YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KİRİŞLERDEKİ BÜYÜK YER DEĞİŞTİRMELER ÜZERİNE BAZI YENİ ÇÖZÜMLER

Makine Yük. Müh. İbrahim EREN

FBE Makine Mühendisliği Anabilim Dalı Konstrüksiyon Programında Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi **:** 8 Kasım 2006
Tez Danışmanı **:** Prof. Dr. Uğur Güven (YTÜ)
Jüri Üyeleri **:** Prof. Dr. Faruk Yükseler (YTÜ)
Prof. Dr. Cem Parmaksızoğlu (İTÜ)
Prof. Dr. Günay Anlaş (B.Ü)
Doç. Dr. Özgen Ümit Çolak (YTÜ)

İSTANBUL, 2006

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ

A	Kesit alanı (cm^2)
a_1	Dikdörtgen kesitli kompozit kirişteki bir numaralı parçanın yüksekliği (cm)
a_2	Dikdörtgen kesitli kompozit kirişteki iki numaralı parçanın yüksekliği (cm)
b	Dikdörtgen kesitli kirişlerin kesit genişliği (cm)
E	Elastiklik Modülü (N / cm^2)
h	Dikdörtgen kesitli kirişlerin kesit yüksekliği (cm)
h_1, h_2	Tarafsız eksenin en üst ve en alt iplikçiklerden uzaklıkları (cm)
k	Logaritmik gerilme-şekil değiştirme ilişkisinde lineer olmama derecesini gösteren boyutsuz bir büyüklüktür.
K	Serbest ucundan tekil kuvvet etkiyen kompozit konsol kirişlerde yük ve malzeme kesit özelliklerine bağlı boyutsuz bir büyüklük
L	Kiriş Boyu (cm)
M	Eğilme Momenti (N.cm)
n	Ludwick tipi lineer olmayan malzemede malzemenin özelliklerine bağlı olarak değişen lineer olmama derecesini gösteren üstel boyutsuz bir büyüklük
t	Kompozit kirişlerde elastiklik modülleri oranı
w	Birim Yayılı Yük (N/cm)
$\varepsilon_\Omega(x)$	Ağırlıklı Artıklar Yönteminde Hata Fonksiyonu
$\varphi_i(x)$	Ağırlıklı Artıklar Yönteminde tam bir fonksiyon ailesinin elamanı olan baz fonksiyonlarıdır.
$\Psi(x)$	Ağırlıklı Artıklar Yönteminde ağırlık fonksiyonlarıdır.
$\Gamma(z)$	Gamma Fonksiyonu
${}_2Fl[a,b;c;z]$	Hipergeometrik Fonksiyon

κ	Eğrilik (1/cm)
ε	Birim şekil değiştirme
σ	Normal gerilme (N/cm^2)
ρ	Eğrilik yarıçapı (cm)
α	Kübik gerilme-şekil değiştirme ilişkisinde lineer olmama derecesini gösteren boyutsuz bir büyüklük
K_n	Ludwick tipi gerilme-şekil değiştirme özelliklerine sahip kirişlerde yük ve malzeme kesit özelliklerine bağlı bir büyüklük
Δ	Yatay yer değiştirme (cm)
δ_h	Boyutsuz yatay yer değiştirme
δ_v	Düşey yer değiştirme (cm)
$\dfrac{\delta v}{L}$	Boyutsuz düşey yer değiştirme
EI	Eğilme rijitliği (N.cm^2)
I_n	Atalet momenti (cm^4)

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

ÖNSÖZ

Elastik kirişlerde, belirli bir yük altında meydana gelen gerilme ve şekil değiştirme arasındaki ilişki, doğrusal değildir. Yer değiştirmelerin büyüklüğünün görsel ve mukavemet olarak önemli olduğu yapı ve sistemlerde, doğrusal olmayan gerilme-şekil değiştirme ilişkilerinin etkisi de önem kazanmaktadır.

Kirişlerde geometrik ve malzeme olarak doğrusal olmamanın büyük yer değiştirmeler üzerindeki etkisini incelerken, doğrusal olmayan bir kirişi, doğrusal kabul ederek yer değiştirme hesaplamaları yapıldığında veya malzemelerin doğrusal olmayan gerilme-şekil değiştirme bağıntılarından her hangi birine sahip olması durumunda, hesaplanan yer değiştirme değerleri arasında büyük fark olduğu görülmektedir.

Yer değiştirme hesaplamalarında kirişlerin yükleme koşulları, kesitleri, bağlantı koşulları en çok bilinen ve kullanılan parametreyken, yukarıda bahsedilen gerilme - şekil değiştirme ilişkisinin doğrusal olmayışı yanında, malzemenin kompozit veya çift modüllü olması da büyük yer değiştirmeler incelenirken göz önüne alınması gereken önemli konulardandır.

Bu çalışmada, kirişlerdeki bazı problemler için doğrusal olmamanın, malzemenin kompozit veya çift modüllü olmasının, belirli bir aralıkta (moment veya boyutsuz parametreler), büyük yer değiştirmeler üzerindeki etkisi sayısal uygulamalarla gösterilmiş, bazı kabuller ve kullanılan sayısal yöntemlerle elde edilen yatay ve düşey yer değiştirme değerleri tablolaştırılmıştır.

Bu çalışmamın her safhasında ilgi, yardım, bilgi ve birikimlerini sabırla bana aktaran değerli hocalarım Prof.Dr. Uğur Güven, Prof. Dr. Faruk Yükseler ve Prof. Dr. Cem Parmaksızoğlu’na en içten teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Taşıyıcı sistemlerde değişik yüklemeler altında oluşan büyük yer değiştirmeler, iyi bilinen bir konu olup, bununla ilgili yapılmış çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Konunun önemi nedeniyle bu alanda yapılan çalışmalar günümüzde de sürmektedir.Değişik mühendislik alanlarında karşılaşılan bir çok durumda, yapılan doğrusallaştırmalar ile elde edilen sonuçlar yeteri derecede yaklaşık olabilmektedir. Oysa ki elastik eğri için iyi bilinen eğrilik ifadesi doğrusal olmadığı gibi gerçek malzeme de doğrusal gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip değildir. Bu gerçek göz önüne alındığında yer değiştirmeler, genellikle analitik yöntemlerle belirlenemez, daha ziyade yaklaşık ve sayısal yöntemler kullanmak gerekir. Bu tezde, genellikle Ağırlıklı artıklar ve Runge-Kutta yöntemleri kullanılmıştır. Tezin büyük bir kısmında, hem malzeme hem de geometrik doğrusal olmama birlikte ele alınmıştır.

Tezin giriş bölümünde; daha önce yapılan çalışmalara, tezin amacına, farklılıklarına ve literatüre katkısına değinilmiştir.

İkinci bölümünde, kiriş malzemesindeki gerilme-şekil değiştirme ilişkisi, ilk olarak Ludwick tipi alınmış daha sonra kübik, logaritmik biçimler seçilerek, serbest uç noktasından moment etkiyen konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler hesaplanmıştır.

Üçüncü bölümde, serbest uç noktasından tekil kuvvet etkiyen konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler, farklı yöntemlerle hesaplanıp, karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Dördüncü ve beşinci bölümde, düzgün yayılı yüklü basit kirişlerde ve bileşik yüklü konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirme değerleri, farklı yay uzunlukları kabulü ile elde edilen eğrilik-moment eşitliklerinden faydalanılarak, sayısal yöntemlerle bulunmuştur.

Altı ve yedinci bölümde, çift malzemeli kompozit kirişler incelenmiştir. Altıncı bölümde, yalnızca geometrik doğrusal olmama hali için serbest uç noktasından tekil kuvvet etkiyen kompozit konsol kirişler ele alınmıştır. Yedinci bölümde, her iki doğrusal olmama hali için, Ludwick tipi, kübik ve logaritmik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip, serbest uç noktasından moment etkiyen kompozit konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler hesaplanmıştır.

Sekizinci bölümde, ilk olarak kübik ve logaritmik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip, serbest uç noktasından moment etkiyen, doğrusal olmayan çift modüllü konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler incelenmiştir. Daha sonra serbest uç noktasından tekil kuvvet etkiyen veya bileşik yüklü doğrusal çift modüllü konsol kirişlerdeki ve düzgün yayılı yüklü doğrusal çift modüllü basit kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler, farklı yay uzunlukları kabulüyle hesaplanıp, sayısal sonuçlar tablolarda sunulmuştur.

Bu tezde; bu alanda yapılan önceki çalışmalardan bilinen karmaşık çözümler yerine, daha basit anlaşılabilir çözümler önerilmekte olup, ayrıca daha az rastlanılan çift malzemeli kompozit ve çift modüllü kirişler için, yeni sayılabilecek bazı çözümler sunulmuştur.

Anahtar kelimeler: Büyük yer değiştirmeler, doğrusal olmayan malzemeler, geometrik doğrusal olmama, kompozit kirişler, çift modüllü kirişler.

ABSTRACT

Large deflections which become under various loading on bearer systems are well known and there are many researches on this subject. Since this subject is very important, related studies are going on currently. The obtained results by linearization can be sufficient in many cases of the engineering fields. However, the well known curvature relation of elastic curve is not linear and as that of real material's stress-strain relation. Taking this fact into consideration, large deflections cannot be analyzed by analytic methods all the times. When this is the case, approximate and numerical methods should be used. In this thesis, weighted residual and Runge-Kutta methods are mostly used. Both material and geometrical non-linearity are investigated jointly in most of the sections of the thesis.

The introduction part of the thesis includes the state of the art, the aim of this research and the contribution to literature.

In section 2, Firstly, the relation of stress-strain of beam material is assumed as Ludwick type and then large deflections of cantilever beam which is subjected to moment at the free end are calculated. Then the same process is applied to the type of cubical and logarithmic stress-strain relations.

In section 3, the large deflections of the cantilever beam which is subjected to concentrated load at the free end are calculated using different methods and finally, the compared results are presented.

In sections 4 and 5, the large deflections of the uniform distributed loaded simple beams and combined loaded cantilever beams are calculated by numerical methods using curvature-moment equations which are obtained by assuming different arc lengths.

In sections 6 and 7, composite beams are investigated. In section 6, composite cantilever beams which is subjected to concentrated load for only geometrical non-linearity is considered. In section 7, for both non-linearity, the large deflections of the composite cantilever beams which is subjected to moment at the free end are calculated for Ludwick, cubical, and logarithmic types of stress-strain relations.

In section 8, the large deflections of the non-linear bimodulus cantilever beam which is subjected to moment at the free end are investigated for cubical and logarithmic materials. Afterward, the large deflections of the linear bimodulus cantilever beam which is subjected to concentrated load at the free end or subjected to combined load are calculated by assuming different arc length. The same process is applied to uniform distributed loaded linear bimodulus simple beams and obtained results for each cases are presented in the tables.

In this thesis, simple and understandable solutions have been proposed instead of known complex solutions from the previous studies in this area. Also, some new solutions have been presented for less encountered composite and bimodulus beams.

Keywords: Large deflections, material nonlinearity, geometrical nonlinearity, composite beams, bimodulus beams.

1. GİRİŞ

Kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler uzun yıllardır ilgi çeken bir konu olmuştur. Elastik kirişlerde yük altında büyük yer değiştirmeler oluşabilmektedir. Büyük yer değiştirmelerden dolayı da doğrusal olmama durumu söz konusudur. Bunun için büyük yer değiştirmelere maruz kirişlerde problemler doğrusal olmayan eğilme teorisine göre çözümlenmelidir. Bernoulli-Euler yasasında elastik eğrinin gerçek eğrilik ifadesi kullanılmalıdır. Geometrik doğrusal olmama halinin yanında, malzeme de doğrusal değildir.Yani malzemedeki gerilme-şekil değiştirme ilişkisi üstel, kübik, trigonometrik ve logaritmik fonksiyonlar şeklinde verilebilir.

Doğrusal olmayan eğilme teorisinin kullanımı, ilk zamanlarda doğrusal elastik malzemelerle sınırlandırılmıştı. Bu konuyla ilgili olarak uç noktasından tekil kuvvet etkiyen doğrusal elastik malzemeden yapılmış bir konsol kirişteki büyük yer değiştirmeler için Bishopp ve Drucker (Bishopp, K.E., Drucker, D.C., 1945) eliptik integrale bağlı bir çözüm geliştirmişlerdir. Benzer çalışmalara artık kitaplarda rastlanmaktadır. Örnek olarak Frish-Fay'in kitabı verilebilir (Frisch-Fay, R., 1962). Oden ve Childs (Oden, J.T., Childs, S.B., 1970) uç noktasından ankastre bağlı, doğrusal olmayan elastik malzemeden yapılmış bir kolondaki sonlu yer değiştirmeleri, moment-eğrilik ilişkileri açısından, hiperbolik tanjant kurallarına uygun bir formda göstermişlerdir. Holden (Holden, J.T., 1972) üniform yayılı yüklü doğrusal elastik konsol kirişteki sonlu yer değiştirme problemine dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemini kullanarak sayısal bir çözüm geliştirmiştir. Prathop ve Varadan (Prathop, G., Varadan,T.K., 1976) dikdörtgen kesitli serbest uçtan tekil yüklü üniform bir konsol kirişte, malzemedeki gerilme-şekil değiştirme ilişkisini Ramberg-Osgood tipi alarak, elastik olmayan büyük deformasyonları incelemişlerdir. Lo ve Gupta (Lo, C.C., Gupta, S.D., 1978) kirişin elastik olarak deforme olmuş kısmındaki davranışını doğrusal elastik alıp, elastik limitin ötesinde gerilmeye maruz kalmış bölgelerde şekil değiştirmenin logaritmik fonksiyonunu kullanarak, doğrusal olmayan dikdörtgen kesitli kirişteki büyük yer değiştirmeleri hesaplamışlardır. Monasa(Monasa, F., 1979) malzemesi logaritmik gerilme-şekil değiştirme bağıntısı gösteren, konsol- kolon-kiriş için malzemenin doğrusal olmamasının stabilite üzerindeki etkisini incelemiştir. Sinclair (Sinclair, G.B., 1979) eksenel ve kayma deformasyonları etkisini dikkate alıp, doğrusal olmayan eğilme teorisi kullanarak, konsol kirişteki büyük yer değiştirmeleri hesaplamış, eksenel ve kayma deformasyonlarının etkisini tablo halinde göstermiştir. Monosa ve Lewis (Monasa, F., Lewis, G., 1981) serbest uç noktasından düşey doğrultuda tekil kuvvetin etkidiği Ludwick tipi, doğrusal olmayan elastik konsol kirişin uç noktasındaki yatay ve düşey yer değiştirmeleri, Simpson yöntemi ve Runge-Kutta yönteminden istifade ederek bulmuşlardır. Yine Monosa ve Lewis (Monasa, F., Lewis, G., 1982) serbest uç noktasından moment etkiyen Ludwick tipi, doğrusal olmayan elastik konsol kiriş için sonlu yer değiştirme probleminde kapalı formda bir analitik çözüm elde ederek uç noktadaki yatay ve düşey yer değiştirmeleri hesaplamıştır. Wang (Wang, C.Y., 1981a), (Wang, C.Y., 1981b), (Wang, C.Y., 1983), (Wang, C.Y., 1984) değişik dış yükler ve kendi ağırlığı etkisindeki doğrusal elastik kirişte oluşan büyük yer değiştirmeleri, pertürbasyon yöntemi ve sayısal integrasyon yardımıyla hesaplamıştır. Nageswara ve Venkateswara (Nageswara R.B., Venkateswara, R.G., 1986) uç noktasından tekil yük etkiyen, doğrusal elastik malzemeden yapılmış, konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeleri, tekil yükün rotasyonel (kiriş eğildikçe, kuvvet kiriş eksenine dik kalacak şekilde dönüyor) olduğu ve rotasyonel olmadığı durumlara göre, eliptik integrale bağlı çözümler geliştirerek hesaplamış ve karşılaştırmalı olarak tablolaştırmışlardır. Joseph ve Varadan (Joseph, D., Varadan, T.L., 1987) Ramberg-Osgood tipi doğrusal olmayan malzemeden yapılmış, serbest uç noktasından moment etkiyen, konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmelerin hesaplamalarını yapmışlardır. Kounadis ve Mallis (Kounadis, A.N., 1987) malzemesi kübik gerilme-şekil değiştirme bağıntısı gösteren, basit kiriş için malzemenin doğrusal olmamasının stabilite üzerindeki etkisini incelemişlerdir. Fertis ve Lee (Fertis, D.G., Lee, C.T., 1991) eşdeğer sistemler yöntemini kullanarak prizmatik olan veya prizmatik olmayan esnek kirişlerde, doğrusal olmama durumu için elastik analiz yapmışlardır. Lee ve arkadaşları (Lee, B.K., Wilson, J.F., Oh, S.J., 1993) değişken kesitli, bileşik yüklü doğrusal elastik konsol kirişte meydana gelen büyük yer değiştirmeleri, Runge-Kutta-Falsi yöntemini kullanarak incelemişlerdir. Baker (Baker, G., 1993) boyunca yayılı yüklü, konik, doğrusal elastik konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeleri, Bernoulli-Euler eşitliğini kullanarak, Ağırlıklı artık çözüm yöntemiyle hesaplamıştır. Chucheepsakul, Buncharoen, Wang (Chucheepsakul, S., Buncharoen, S., Wang, C.H., 1994) değişken moment etkisindeki kirişlerde oluşan büyük yer değiştirmeleri, eliptik integral yöntemiyle kapalı formda bir çözüm sağlayarak ve tekrarlı tahminli atış (shooting) optimizasyon tekniğiyle hesaplayarak karşılaştırmışlardır. Pak ve Stauffer (Pak, R.Y.S., Stauffer, E.J., 1994) Tekil ve yayılı yüklü eğri eksenli elastik kirişlerde, eksenel, kayma ve eğilme deformasyonlarından dolayı meydana gelen sonlu yer değiştirmeleri, Timoshenko kiriş teorisi ve Lagrange denklemlerini kullanarak bulmuşlardır. Jeon, Cho ve Lee (Jeon, S.M., Cho, M.H., Lee, I., 1995) Kirişlerdeki büyük yer değiştirme teorisine dayanarak, sonlu elemanlar yöntemini kullanıp, kompozit kirişlerde statik ve dinamik analiz yapmışlardır. Lee (Lee, K., 2002) Serbest uç noktasından düşey doğrultuda tekil kuvvet etkiyen, boyunca üniform yayılı yüklü, Ludwick tipi malzemeden yapılmış konsol kirişlerin uç noktasındaki yatay ve düşey yer değiştirmeleri, trigonometrik formda ifade ederek hesaplamıştır. Belendez ve arkadaşları (Belendez, T., Neipp, C., Belendez, A., 2002) değişken kesit ve değişken eğilme rijitliği şartlarına sahip kirişlerde oluşan büyük yer değiştirmeleri sınır eleman yöntemini temel alan Anolog eşitlik yöntemi yardımıyla hesaplamışlardır. Katsikadelis ve Tsiatas (Katsikadelis, J.T., Tsiatas, G.C., 2003) serbest ucundan tekil kuvvet etkiyen doğrusal elastik malzemeden yapılmış konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeleri hesaplamak için sistemi, sarkaç benzeri bir sisteme benzeterek eliptik integraller yardımıyla çözümler gerçekleştirmiş ve yaptıkları deneylerden elde ettikleri sayısal sonuçlarla karşılaştırmışlardır. Huang ve arkadaşları (Huang, X., Yu, T.X., Lu, G., Lippmann, H., 2003) Hareketli ve değişken serbest uç ve sınır koşullarında geometrik ve malzemenin doğrusal olmama durumu için elastoplastik kirişlerdeki büyük yer değiştirmeleri, sonlu farklar modeli oluşturarak hesaplamışlardır. Dado ve AL-Sadder (Dado, M., AL-Sadder, S., 2005) Prizmatik ve prizmatik olmayan konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeleri, eğilme açısını, eğilmiş kiriş ekseni boyunca değişen bir polinom türü denklemle ifade ederek hesaplamışlardır. Güven, Baykara ve Bayer (Güven, U., Baykara C., Bayer, I., 2005) serbest uç noktasından moment etkiyen Ludwick tipi, doğrusal olmayan, çekme ve basınçtaki gerilme-şekil değiştirme ilişkisi farklı (çift modüllü) olan malzemeden yapılmış konsol kirişlerin, uç noktasındaki büyük yer değiştirmeleri, kapalı formda ifade ederek, sayısal sonuçları, malzeme sabitlerinin değişimine göre tablolaştırarak vermişlerdir. AL-Sadder ve AL-Rawi (AL-Sadder, S., AL-Rawi, R.A.O., 2006) quasi-linearization sonlu farklar yöntemi ile prizmatik ve prizmatik olmayan, sürekli ve süreksiz yüklemeye maruz, yayılı ve tekil yüklü, ince konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeleri hesaplamışlardır. He ve Chen (He, X-T., Chen, S-L., 2006) iki parametreli pertürbasyon ve pseudolinear analiz yöntemleri ile konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeleri hesaplayarak sonuçları kıyaslamışlardır.

Tezde; farklı yükleme koşullarındaki, malzeme ve/veya geometrik olarak doğrusal olmayan kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler, yaklaşık deneme fonksiyonları ve yay uzunlukları kabulleri yapılarak, çeşitli sayısal yöntemlerle hesaplanmış, doğrusallaştırmanın ve gerilme-şekil değiştirme ilişkisi açısından malzemenin değişiminin, sebep olduğu farklılıklar vurgulanarak tablolaştırılmıştır. Daha önceden yapılmış çalışmalarda pek rastlanmayan, kompozit veya çift modüllü, farklı gerilme-şekil değiştirme ilişkisi gösteren malzemelerden oluşan kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler hesaplanarak kıyaslanmıştır. Özellikle kompozit ve çift modüllü malzemelerle ve farklı yükleme koşullarında değişik yay uzunlukları kabulüyle yapılan çalışmaların, bu konudaki yapılacak olan yeni çalışmalara ve literatüre katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Yaklaşık deneme fonksiyonu kabulüyle yapılan yer değiştirme hesaplarında, kullandığımız ve çözümü sağlayan deneme fonksiyonunun sadeliği ve eğri ifadesini genel olarak vermesi ,dolayısıyla sadece bir noktanın yer değiştirmesi değil farklı noktalardaki yer değiştirmelerin de hesaplanabilmesi, vurgulanması gereken hususlardandır.

Tezde kullanılan yöntemler ve matematiksel fonksiyonlar ile ilgili tanımlayıcı ve açıklayıcı bilgiler Ek-1'de verilmiştir.

Tezin her bir bölümünün içeriği, aşağıda özet olarak sunulmuştur.

İkinci bölümde, Ludwick tipi doğrusal olmayan malzemeden oluşan, uç noktasından moment etkiyen, dikdörtgen kesitli konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler, Moment, Galerkin, alt bölge kollokasyon, en küçük kareler ve nokta kollokasyon yöntemi gibi ağırlıklı artık yöntemleriyle yaklaşık olarak hesaplanarak, referans değerlerle karşılaştırmalı olarak tablolaştırılmıştır. Aynı bölümde malzeme ve geometrik olarak doğrusal olmamanın yatay ve düşey yer değiştirmeler üzerindeki etkisi, malzeme doğrusal değil-geometrik doğrusal, malzeme doğrusal - geometrik doğrusal değil, malzeme ve geometrik doğrusal olma durumları incelenerek gösterilmiştir. Daha sonra uç noktasından moment etkiyen, kübik ve logaritmik gerilme- şekil değiştirme bağıntısına sahip konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler, doğrusal olmama derecesini ifade eden parametrelerin değişimine ve momentin değişimine göre tablolaştırılmıştır.

Üçüncü bölümde, uç noktasından düşey doğrultuda tekil kuvvet etkiyen konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler, momentler yöntemi, alt bölge kollokasyon yöntemi ve en küçük kareler yöntemi gibi sayısal yaklaşım yöntemleri ile hesaplanarak kapalı formda elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Dördüncü bölümde, üç farklı yaklaşık yay uzunluğu kabulüyle, yayılı yüklü basit kirişlerdeki yatay yer değiştirme değerleri, Simpson ve Newton yöntemi kullanılarak ve orta noktasındaki en büyük düşey yer değiştirme değerleri de Runge-Kutta yöntemini kullanarak hesaplanmış ve karşılaştırmalı tablo haline getirilmiştir.

Beşinci bölümde, bileşik yüklü yani uç noktasından düşey doğrultuda tekil kuvvet etkiyen ve boyunca üniform yayılı yüklü, konsol kirişin uç noktasındaki yer değiştirme değerleri iki farklı yaklaşık yay uzunluğu kabulü yapılarak hesaplanmış ve referans değerlerle karşılaştırmalı olarak tablolaştırılmıştır.

Altıncı bölümde serbest uç noktasından tekil kuvvet etkiyen, doğrusal malzemeli, dikdörtgen kesitli kompozit kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler hesaplanmıştır.

Yedinci bölümde, serbest uç noktasından moment etkiyen dikdörtgen kesitli, çift malzemeli, Ludwick tipi, kübik ve logaritmik gerilme şekil değiştirme bağıntılarına sahip kompozit konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler hesaplanarak tablolaştırılmıştır. Bu bölümde ayrıca kompozit kirişi oluşturan malzemelerin tür olarak farklı gerilme şekil değiştirme bağıntılarına (biri Ludwick tipi-diğeri kübik, biri logaritmik- diğeri kübik, biri Ludwick tipi - diğeri logaritmik vb.) sahip olması durumunda meydana gelen yatay ve düşey büyük yer değiştirme büyüklükleri karşılaştırmalı tablo olarak verilmiştir.

Son olarak sekizinci bölümde çift modüllü (çekme ve basınçtaki gerilme-şekil değiştirme ilişkisi farklı olan) kirişlerdeki yer değiştirmeler incelenmiştir. Bu konuyla ilgili olarak önce kübik ve logaritmik gerilme-şekil değiştirme bağıntısına sahip, doğrusal olmayan, çift modüllü konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler incelenmiştir. Daha sonra uç noktasından tekil kuvvet etkiyen doğrusal, çift modüllü konsol kirişlerdeki yer değiştirmeler, momentler, Galerkin, alt bölge kollokasyon ve en küçük kareler gibi yaklaşık çözüm yöntemleriyle hesaplanmıştır. Yayılı yüklü doğrusal, çift modüllü basit kirişteki ve bileşik yüklü doğrusal, çift modüllü konsol kirişteki büyük yer değiştirmeler, dört farklı yaklaşık yay uzunluğu kabulü için hesaplanarak tablo haline getirilmiştir.

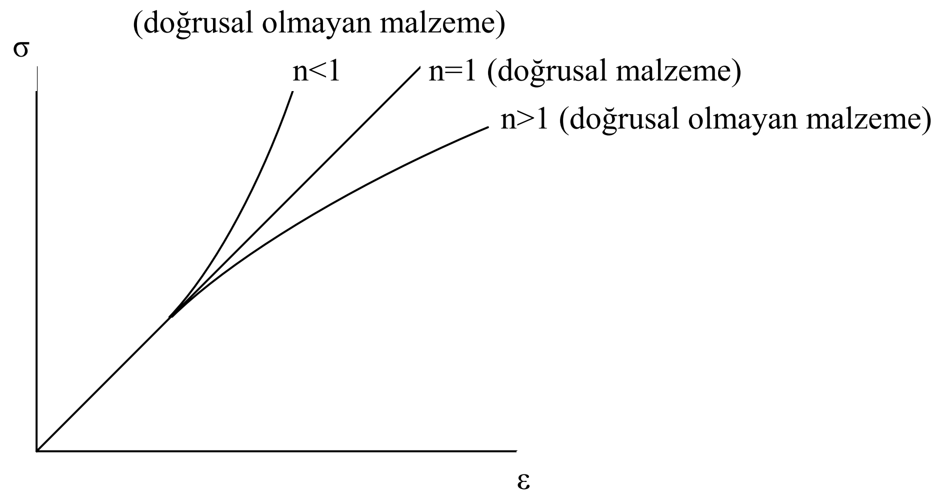
2. SERBEST UCUNDAN MOMENT ETKİYEN DİKDÖRTGEN KESİTLİ KONSOL KİRİŞLERDEKİ BÜYÜK YER DEĞİŞTİRMELERİN FARKLI YÖNTEMLERLE HESAPLANMASI

2.1 Serbest Ucundan Moment Etkiyen Dikdörtgen Kesitli Ludwick Tipi Doğrusal Olmayan Malzemeden Yapılmış Konsol Kirişlerdeki Büyük Yer Değiştirmeler

Doğrusal olmayan malzemeden yapılmış kirişler için deneysel gerilme-şekil değiştirme eğrisi, (2.1) denklemindeki Ludwick bağıntısı ile ifade edilebilmektedir. (Lewis, G., Monosa, F., 1982)

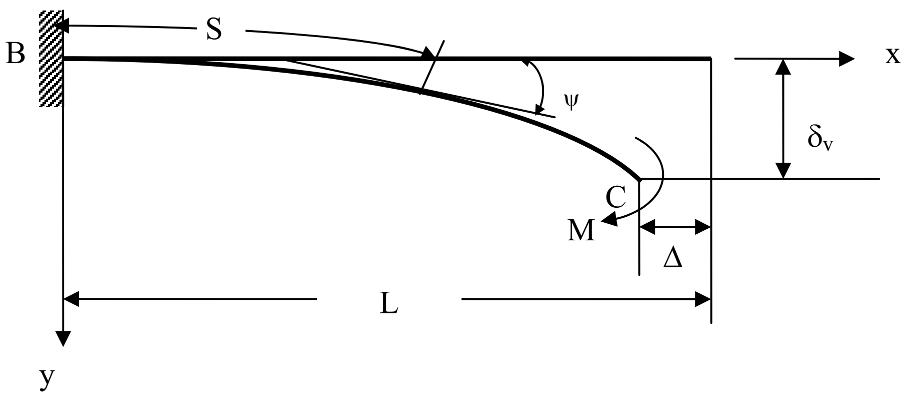
$\sigma = B\varepsilon^{\frac{1}{n}}$, (Lewis, G., Monosa, F., 1982) (2.1)

Burada σ gerilme, ε birim şekil değiştirme, B ve n ise malzeme özelliklerine bağlı sabitlerdir.



Şekil 2.1 Ludwick tipi malzeme için gerilme-birim şekil değiştirme ilişkisi.(Lewis, G., Monosa, F., 1982)

Şekil 2.1'de Ludwick tipi malzeme için malzeme sabiti n'nin değişimine bağlı olarak gerilme – birim şekil değiştirme eğrileri verilmiştir.



Şekil 2.2 Uç noktasından moment etkiyen konsol kiriş.

Serbest uç noktasından moment etkiyen konsol kirişin, moment etkisinden önceki ve sonraki durumu Şekil 2.2'de gösterilmektedir. Burada M momenti, L kirişin ilk boyunu, S yay uzunluğunu, ψ eğim açısını , Δ yatay yer değiştirmeyi , δ_v düşey yer değiştirmeyi göstermektedir. Kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler bulunurken, doğrusallaştırma yapılmaksızın gerçek eğrilik denklemi kullanılmalıdır.

$$\frac{d\psi}{dS} = \kappa = \frac{y''(x)}{(1+(y'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} \text{, (Lewis, G., Monosa, F., 1981)} \tag{2.2}$$

(2.2) denkleminde κ, eğrilik ifadesi verilmiştir. Bu denklemle ilgili ayrıntılı bilgi Ek-2'de verilmiştir.

Dikdörtgen kesitli, Ludwick tipi malzemeden meydana gelen kiriş kesitinde eğrilik bağıntısı;

$$\kappa = \frac{M^n}{K_n} \text{, (Lewis, G., Monosa, F., 1982)} \tag{2.3}$$

şeklinde alınır. Burada K_n , malzemenin ve kesitin geometrik ve fiziksel özelliklerine bağlı bir büyüklüktür. (2.3) ve (2.4) denklemleri ile ilgili ayrıntılı bilgi Ek-3'te verilmiştir.

$$K_n = \frac{B^n h^{2n+1} b^n n^n}{2^{n+1}(1+2n)^n} \text{, (Lewis, G., Monosa, F., 1982)} \tag{2.4}$$

(2.2) ifadesinin her iki tarafı integre edildiğinde;

$$\int \kappa dx + C_1 = \frac{y'(x)}{(1+(y'(x))^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.5}$$

$$\int \kappa dx + C_1 = G \quad \text{(Fertis, D.G., 1999)} \tag{2.6}$$

şeklinde yazılır. Buradan,

$$y'(x) = \frac{G}{(1-(G)^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{(Fertis, D.G., 1999)} \tag{2.7}$$

olarak bulunur.

(2.3) ve (2.6) denklemleri kullanılarak;

$$\int \kappa dx + C_1 = \frac{y'(x)}{(1+(y'(x))^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{M^n}{K_n} x + C_1 \tag{2.8}$$

ifadesi yazılır. (2.8) denkleminde Şekil 2.2'den görülebilecek olan sınır şartları kullanıldığında x = 0'da $y'(x)$ sıfır olacaktır. Buradan integral sabiti C_1'in de sıfır olduğu görülmektedir. O halde (2.6) denklemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$G = \frac{M^n}{K_n} x \tag{2.9}$$

$$\int_0^{(L-\Delta)} \sqrt{(1+(y'(x))^2)} = L \,, \quad \text{(Lewis, G., Monosa, F., 1982)} \tag{2.10}$$

(2.7), (2.9) eşitlikleri ile (2.10) yay uzunluğu eşitliği kullanılırsa ;

$$\int_0^{(L-\Delta)} \sqrt{(1+(\frac{G}{(1-(G)^2)^{\frac{1}{2}}})^2)} = L \tag{2.11}$$

şeklinde yazılan (2.11) denklemi Simpson yöntemi yardımıyla integre edilir, elde edilen eşitlikte Newton yöntemi ile kök bulma işlemi uygulanarak Δ yatay yer değiştirme değerleri bulunur. Daha sonra düşey yer değiştirmeleri hesaplayabilmek için, konsol kirişin başlangıç noktasındaki x = 0'da $y(x)$ sıfır olmalıdır, şeklinde yazılabilen sınır şartı kullanılıp, Runge-Kutta yöntemi yardımıyla y(x) enterpolasyon fonksiyonu elde edilmektedir.

$$\sigma = 66.1\varepsilon^{0.209} \,, \quad \text{(Lewis, G., Monosa, F., 1982)} \tag{2.12}$$

L, kiriş uzunluğu 50.8 cm, b, dikdörtgen kesitin genişliği 2.54 cm, h, dikdörtgen kesitin yüksekliği 0.635 cm olmak üzere gerilme-birim şekil değiştirme bağıntısı (2.12)'deki gibi verilen N.P.8 alüminyum alaşımdan (Lewis, G., Monosa, F., 1982) yapılmış bir konsol kirişteki yer değiştirmeler, Çizelge 2.1'de verilmektedir.

(2.12)'deki denklemde σ, gerilme birimi ksi olarak alınmaktadır. Çizelge 2.1'i oluştururken B'nin 66.1 ksi olan büyüklüğünün yerine, birim dönüşümü yaparak 0.455 10^5 N/cm^2 (0.455 GPa) alınmıştır.

2.1.1 Serbest ucundan moment etkiyen dikdörtgen kesitli Ludwick tipi doğrusal olmayan malzemeden yapılmış konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmelerin momentler yöntemi ile bulunması

Momentler yöntemini kullanırken, (2.2) ve (2.3) eşitliklerinden faydalanarak ε_Ω hata fonksiyonu elde edilir.

$$y'(0) = 0 \tag{2.13}$$

$$y(0) = 0 \tag{2.14}$$

$$y(x) = ax^2 + bx^4 \tag{2.15}$$

(2.13) ve (2.14)'de verilen sınır koşullarını sağlayan, y(x) deneme fonksiyonu (2.15)'deki gibi seçilmektedir.

$$\varepsilon_\Omega = \frac{2a + 12bx^2}{(1 + (2ax + 4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{M^n}{K_n} \tag{2.16}$$

(2.16)'daki ε_Ω hata fonksiyonu denkleminde, (2.15) deneme fonksiyonu yerine yazıldığında ve hatanın sıfırıncı momenti (x^0 ile çarparak) bölge üzerinde integre edilip, sıfıra eşitlendiğinde;

$$\int_0^{L-\Delta} (\varepsilon_\Omega)dx = \int_0^{L-\Delta} \left(\frac{2a + 12bx^2}{(1 + (2ax + 4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{M^n}{K_n}\right)dx = 0 \tag{2.17}$$

olarak bulunur. Hatanın birinci momenti (x^1 ile çarparak) bölge üzerinde integre edilip, sıfıra eşitlendiğinde aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\int_0^{L-\Delta} (\varepsilon_\Omega)xdx = \int_0^{L-\Delta} \left(\frac{2a + 12bx^2}{(1 + (2ax + 4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{M^n}{K_n}\right)xdx = 0 \tag{2.18}$$

Momentler yönteminde de (2.7), (2.9), (2.10) eşitlikleri ve (2.11) yay uzunluğu denkleminden elde edilen ifade, Simpson yöntemi yardımıyla integre edilip, kökleri, Newton yöntemini kullanmak suretiyle hesaplanarak, yatay yer değiştirme Δ'nın değerleri bulunur.

Kesit boyutları, 2.1 bölümündeki ile aynı olan ve gerilme-birim şekil değiştirme bağıntısı (2.12)'deki gibi verilen, N.P.8 alüminyum alaşımdan (Lewis, G., Monosa, F., 1982) yapılmış bir konsol kirişteki düşey yer değiştirmelerin hesabında, her bir moment için (2.17) ve (2.18) denklemlerini kullanarak elde edilen a ve b sabitlerinin oluşturduğu y(x) deneme fonksiyonunda, x =L - Δ yazıldığında serbest uç noktadaki düşey yer değiştirme δ_v , değeri bulunur. Aşağıda, Çizelge 2.1'de verilen moment değerleri için (2.17) ve (2.18) denklemlerini kullanarak elde edilen yaklaşık y(x) fonksiyonları gösterilmektedir.

M=2259.70 N cm için;

$$y(x) = 0.000982x^2 + 9.578401\times10^{-10}x^4 \tag{2.19}$$

M=2485.67 N cm için;

$$y(x) = 0.001550x^2 + 3.818598\times10^{-9}x^4 \tag{2.20}$$

M=2711.64 N cm için;

$$y(x) = 0.002349x^2 + 1.375231\times10^{-8}x^4 \tag{2.21}$$

M=2937.60 N cm için;

$$y(x) = 0.003440x^2 + 4.635283\times10^{-8}x^4 \tag{2.22}$$

M=3163.57 N cm için;

$$y(x) = 0.004873x^2 + 1.527641\times10^{-7}x^4 \tag{2.23}$$

M=3389.54 N cm için;

$$y(x) = 0.006602x^2 + 5.239395\times10^{-7}x^4 \tag{2.24}$$

M=3615.51 N cm için;

$$y(x) = 0.008034x^2 + 2.076958\times10^{-6}x^4 \tag{2.25}$$

M=3841.48 N cm için;

$$y(x) = 0.004952x^2 + 0.000012x^4 \tag{2.26}$$

M=3954.47 N cm için;

$$y(x) = -0.004399x^2 + 0.000038x^4 \tag{2.27}$$

(2.19)-(2.27) denklemlerinde verilen yaklaşık y(x) fonksiyonlarında x = L-Δ yazılarak bulunan düşey yer değiştirme değerleri, Çizelge 2.1'de gösterilmektedir.

2.1.2 Serbest ucundan moment etkiyen dikdörtgen kesitli Ludwick tipi doğrusal olmayan malzemeden yapılmış konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmelerin Galerkin yöntemi ile bulunması

Galerkin yönteminde, (2.15) eşitliğinde verilen (2.13) ve (2.14) sınır şartlarını sağlayan y(x) deneme fonksiyonundaki baz fonksiyonları olan x^2 ve x^4 fonksiyonları, ağırlık fonksiyonu olarak alınır.

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{\Omega}(x)\Psi(x)dx = 0 \tag{2.28}$$

şeklinde alınan (2.28) denkleminde $\Psi(x)$ ağırlık fonksiyonları ile (2.16) eşitliğinde verilen ε_{Ω} yerine yazıldığında ve bölgede incelendiğinde aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\int_0^{L-\Delta} \left(\frac{2a + 12bx^2}{(1 + (2ax + 4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{M^n}{K_n}\right)x^2 dx = 0 \tag{2.29}$$

$$\int_0^{L-\Delta} \left(\frac{2a + 12bx^2}{(1 + (2ax + 4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{M^n}{K_n}\right)x^4 dx = 0 \tag{2.30}$$

Galerkin yöntemini de uygularken moment yönteminde olduğu gibi (2.7), (2.9), (2.10) eşitliklerinden faydalanarak ve (2.11) yay uzunluğu formülünü Simpson yöntemi yardımıyla integre edip, kökleri Newton yöntemini kullanmak suretiyle elde ederek, yatay yer değiştirme Δ'nın değerleri bulunur.

Kesit boyut ve özellikleri üstteki 2.1 bölümünde verilen, N.P.8 alüminyum alaşımdan (Lewis, G., Monosa, F., 1982) yapılmış bir konsol kirişteki düşey yer değiştirmelerin hesabında, her bir moment için (2.29) ve (2.30) denklemlerini kullanarak elde edilen a ve b sabitlerinin oluşturduğu y(x) deneme fonksiyonunda, x = L - Δ yazıldığında serbest uç noktadaki düşey yer değiştirme δ_v , değerleri bulunur. Aşağıda, Çizelge 2.1'de verilen moment değerleri için (2.29) ve (2.30) denklemlerini kullanarak elde edilen yaklaşık y(x) fonksiyonları gösterilmektedir.

M=2259.70 N cm için;

$$y(x) = 0.000982x^2 + 9.244984 \times 10^{-10} x^4 \tag{2.31}$$

M=2485.67 N cm için;

$$y(x) = 0.001550x^2 + 3.796694 \times 10^{-9} x^4 \tag{2.32}$$

M=2711.64 N cm için;

$$y(x) = 0.002347x^2 + 1.396363 \times 10^{-8} x^4 \tag{2.33}$$

M=2937.60 N cm için;

$$y(x) = 0.003422x^2 + 4.830881 \times 10^{-8} x^4 \tag{2.34}$$

M=3163.57 N cm için;

$$y(x) = 0.004750x^2 + 1.644274 \times 10^{-7} x^4 \tag{2.35}$$

M=3389.54 N cm için;

$$y(x) = 0.005925x^2 + 5.559823 \times 10^{-7} x^4 \tag{2.36}$$

M=3615.51 N cm için;

$$y(x) = 0.005841x^2 + 1.664036 \times 10^{-6} x^4 \tag{2.37}$$

M=3841.48 N cm için;

$$y(x) = 0.004608x^2 + 4.049970 \times 10^{-6} x^4 \tag{2.38}$$

M=3954.47 N cm için;

$$y(x) = 0.004389x^2 + 6.081578 \times 10^{-6} x^4 \tag{2.39}$$

(2.31)-(2.39) denklemlerinde verilen yaklaşık y(x) fonksiyonlarında, x =L-Δ yazılarak bulunan düşey yer değiştirme değerleri, Çizelge 2.1'de gösterilmiştir.

2.1.3 Serbest ucundan moment etkiyen dikdörtgen kesitli Ludwick tipi doğrusal olmayan malzemeden yapılmış konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmelerin alt bölge kollokasyon yöntemi ile bulunması

Alt bölge kollokasyon yönteminde (2.28) denkleminde verilen eşitlik, önce bölgenin ilk yarısında daha sonra da diğer yarısında sağlanacak şekilde uygulanır. (2.16) denklemi de kullanıldığında ;

$$\int_0^{\frac{L-\Delta}{2}} \left(\frac{2a + 12bx^2}{(1 + (2ax + 4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{M^n}{K_n} \right) dx = 0 \tag{2.40}$$

$$\int_{\frac{L-\Delta}{2}}^{L-\Delta} \left(\frac{2a + 12bx^2}{(1 + (2ax + 4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{M^n}{K_n} \right) dx = 0 \tag{2.41}$$

eşitlikleri elde edilir.

Yatay yer değiştirmeler, bundan önceki konularda bahsedildiği gibi Simpson ve Newton yöntemi kullanarak bulunur.

Önceki 2.1 bölümünde verilen aynı kesit ve özelliklere sahip N.P.8 alüminyum alaşımdan (Lewis, G., Monosa, F., 1982) yapılmış bir konsol kirişteki düşey yer değiştirmelerin hesabında, her bir moment için (2.40) ve (2.41) denklemlerini kullanarak elde edilen a ve b sabitlerinin oluşturduğu y(x) deneme fonksiyonunda x =L - Δ yazdığımızda serbest uç noktasındaki düşey yer değiştirme δ_v , değerleri bulunur. Aşağıda, Çizelge 2.1'de verilen moment değerleri için (2.40) ve (2.41) denklemlerini kullanarak elde edilen yaklaşık y(x) fonksiyonları gösterilmektedir.

M=2259.70 N cm için;

$$y(x) = 0.000982x^2 + 9.572416 \times 10^{-10} x^4 \tag{2.42}$$

M=2485.67 N cm için;

$$y(x) = 0.001550x^2 + 3.812701 \times 10^{-9} x^4 \tag{2.43}$$

M=2711.64 N cm için;

$$y(x) = 0.002349x^2 + 1.370423 \times 10^{-8} x^4 \tag{2.44}$$

M=2937.60 N cm için;

$$y(x) = 0.003442x^2 + 4.601554 \times 10^{-8} x^4 \tag{2.45}$$

M=3163.57 N cm için;

$$y(x) = 0.004883x^2 + 1.506532 \times 10^{-7} x^4 \tag{2.46}$$

M=3389.54 N cm için;

$$y(x) = 0.006655x^2 + 5.117921 \times 10^{-7} x^4 \tag{2.47}$$

M=3615.51 N cm için;

$$y(x) = 0.008275x^2 + 2.013201 \times 10^{-6} x^4 \tag{2.48}$$

M=3841.48 N cm için;

$$y(x) = 0.005329x^2 + 0.000012x^4 \tag{2.49}$$

M=3954.47 N cm için;

$$y(x) = -0.007450x^2 + 0.000040x^4 \tag{2.50}$$

(2.42)-(2.50) denklemlerinde verilen yaklaşık y(x) fonksiyonlarında, x=L-Δ yazılarak bulunan düşey yer değiştirme değerleri, Çizelge 2.1'de gösterilmektedir.

2.1.4 Serbest ucundan moment etkiyen dikdörtgen kesitli Ludwick tipi doğrusal olmayan malzemeden yapılmış konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmelerin nokta kollokasyon yöntemi ile bulunması

Nokta kollokasyon yönteminde, (2.16) eşitliğinde verilen hata fonksiyonu, bölge üzerinde alınan noktalarda sıfır yapılmaya çalışılmaktadır.

$x = \frac{L-\Delta}{2}$ 'de sıfıra eşitlendiğinde,

$$\frac{2a + 3b(L-\Delta)^2}{(1 + (a(L-\Delta) + \frac{1}{2}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{M^n}{K_n} = 0 \tag{2.51}$$

$x = L - \Delta$ 'da sıfıra eşitlendiğinde,

$$\frac{2a+12b(L-\Delta)^2}{(1+(2a(L-\Delta)+4b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{M^n}{K_n}=0 \tag{2.52}$$

denklemleri elde edilir.

Yatay yer değiştirmeler yukarıda diğer konulardaki yöntemlerde bahsedildiği gibi bulunur.

Üstteki 2.1 bölümünde özellikleri verilen, N.P.8 alüminyum alaşımdan (Lewis, G., Monosa, F., 1982) yapılmış bir konsol kirişteki düşey yer değiştirmelerin hesabında, her bir moment değeri için (2.51) ve (2.52) denklemlerinden hesaplanan a ve b sabitlerinin oluşturduğu y(x) deneme fonksiyonu kullanılarak, serbest uç noktadaki düşey yer değiştirme δ_v , değerleri bulunur. Aşağıda, Çizelge 2.1'de alınan moment değerleri için (2.51) ve (2.52) denklemlerini kullanarak elde edilen yaklaşık y(x) fonksiyonları verilmektedir.

M=2259.70 N cm için;

$$y(x)=0.000982x^2+9.632340\times10^{-10}x^4 \tag{2.53}$$

M=2485.67 N cm için;

$$y(x)=0.001549x^2+3.872569\times10^{-9}x^4 \tag{2.54}$$

M=2711.64 N cm için;

$$y(x)=0.002346x^2+1.460672\times10^{-8}x^4 \tag{2.55}$$

M=2937.60 N cm için;

$$y(x)=0.003418x^2+4.974103\times10^{-8}x^4 \tag{2.56}$$

M=3163.57 N cm için;

$$y(x)=0.004719x^2+1.759566\times10^{-7}x^4 \tag{2.57}$$

M=3389.54 N cm için;

$$y(x)=0.005599x^2+6.552447\times10^{-7}x^4 \tag{2.58}$$

M=3615.51 N cm için;

$$y(x)=0.003744x^2+2.287112\times10^{-6}x^4 \tag{2.59}$$

M=3841.48 N cm için;

$$y(x) = -0.003406x^2 + 7.268322 \times 10^{-6} x^4 \tag{2.60}$$

M=3954.47 N cm için;

$$y(x) = -0.009257x^2 + 0.000013x^4 \tag{2.61}$$

(2.53)-(2.61) denklemlerinde verilen yaklaşık y(x) fonksiyonlarında x=L-Δ alınarak bulunan düşey yer değiştirme değerleri, Çizelge 2.1'de gösterilmektedir.

2.1.5 Serbest ucundan moment etkiyen dikdörtgen kesitli Ludwick tipi doğrusal olmayan malzemeden yapılmış konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmelerin en küçük kareler yöntemi ile bulunması

En küçük kareler yönteminde, hata fonksiyonunun karesi, bölge üzerinde minimize edilmektedir. Bunun için;

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \int_{\Omega} (\varepsilon_{\Omega}(x))^2 \, dx \tag{2.62}$$

$$2\int_{\Omega} \varepsilon_{\Omega}(x) \frac{\partial}{\partial a_i} \varepsilon_{\Omega}(x) dx = 0 \tag{2.63}$$

denklemlerini yazılabilir.

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \varepsilon_{\Omega}(x) dx = \Psi_i \tag{2.64}$$

(2.64) eşitliğinde, (2.63) denkleminde oluşan ağırlık fonksiyonu belirtilmiştir. (2.62)-(2.64) denklemlerinde geçen a_i ifadesi sabit terimleri göstermektedir.

Ağırlık fonksiyonlarını elde etmek için (2.16) eşitliğindeki hata fonksiyonu da kullanılarak aşağıdaki ifadeler bulunur:

$$\frac{\partial}{\partial a} \varepsilon_{\Omega}(x) dx = \frac{2}{((4bx^3 + 2ax)^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{6x(12bx^2 + 2a)(4bx^3 + 2ax)}{((4bx^3 + 2ax)^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \tag{2.65}$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \varepsilon_{\Omega}(x) dx = \frac{12x^2}{((4bx^3 + 2ax)^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{12x^3(12bx^2 + 2a)(4bx^3 + 2ax)}{((4bx^3 + 2ax)^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \tag{2.66}$$

$$\int_0^{L-\Delta}\left(\frac{2a+12bx^2}{(1+(2ax+4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{M^n}{K_n}\right)\left(\frac{2}{((4bx^3+2ax)^2+1)^{\frac{3}{2}}}-\frac{6x(12bx^2+2a)(4bx^3+2ax)}{((4bx^3+2ax)^2+1)^{\frac{5}{2}}}\right)dx=0$$

(2.67)

$$\int_0^{L-\Delta}\left(\frac{2a+12bx^2}{(1+(2ax+4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{M^n}{K_n}\right)\left(\frac{12x^2}{((4bx^3+2ax)^2+1)^{\frac{3}{2}}}-\frac{12x^3(12bx^2+2a)(4bx^3+2ax)}{((4bx^3+2ax)^2+1)^{\frac{5}{2}}}\right)dx$$

$=0$ (2.68)

Yatay yer değiştirmeler, bundan önceki bölümlerdeki yöntemlerde açıklandığı gibi Simpson ve Newton yöntemi kullanılarak bulunur.

Özellikleri 2.1 bölümünde verilen N.P.8 alüminyum alaşımdan (Lewis, G., Monosa, F., 1982) yapılmış bir konsol kirişteki düşey yer değiştirmelerin hesabında, her bir moment için (2.67) ve (2.68) denklemlerini kullanarak elde edilen a ve b sabitlerinin oluşturduğu y(x) deneme fonksiyonuyla, serbest uç noktasındaki düşey yer değiştirme δ_v , değerleri bulunur. Aşağıda, Çizelge 2.1'de verilen moment değerleri için (2.67) ve (2.68) denklemlerini kullanarak elde edilen yaklaşık y(x) fonksiyonları verilmektedir.

M=2259.70 N cm için;

$$y(x)=0.000982x^2+9.588919\times10^{-10}x^4 \quad (2.69)$$

M=2485.67 N cm için;

$$y(x)=0.001549x^2+3.828547\times10^{-9}x^4 \quad (2.70)$$

M=2711.64 N cm için;

$$y(x)=0.002349x^2+1.382584\times10^{-8}x^4 \quad (2.71)$$

M=2937.60 N cm için;

$$y(x)=0.003437x^2+4.675306\times10^{-8}x^4 \quad (2.72)$$

M=3163.57 N cm için;

$$y(x)=0.004863x^2+1.536412\times10^{-7}x^4 \quad (2.73)$$

M=3389.54 N cm için;

$$y(x) = 0.006607x^2 + 5.019494 \times 10^{-7} x^4 \quad (2.74)$$

M=3615.51 N cm için;

$$y(x) = 0.008436x^2 + 1.445522 \times 10^{-6} x^4 \quad (2.75)$$

M=3841.48 N cm için;

$$y(x) = 0.010330x^2 + 3.227573 \times 10^{-6} x^4 \quad (2.76)$$

M=3954.47 N cm için;

$$y(x) = 0.011588x^2 + 4.730691 \times 10^{-6} x^4 \quad (2.77)$$

(2.69)-(2.77) denklemlerinde verilen yaklaşık y(x) fonksiyonlarında x=L-Δ yazılarak bulunan düşey yer değiştirme değerleri, Çizelge 2.1'de gösterilmektedir.

Çizelge 2.1 Serbest uç noktasından moment etkiyen, Ludwick tipi bir konsol kirişte, farklı yöntemlerle hesaplanan yer değiştirmeler.

Moment (N.cm)		2259,7	2485,67	2711,64	2937,6	3163,57	3389,54	3615,51	3841,48	3954,47
Referans Sonuç*	**δ_h (Δ) (cm)**	0,0843	0,2096	0,4811	1,0315	2,0833	3,9848	7,239	12,484	**16,058**
	δ_v (cm)	**2,5321**	**3,9901**	**6,0345**	**8,8024**	**12,417**	**16,94**	**22,281**	28,05	30,838
Simpson Yöntemiyle	**δ_h (Δ) (cm)**	0,0843	0,2097	0,4815	1,0323	2,0848	3,9879	7,2466	12,552	**16,286**
Explicit Runge-Kutta yöntemiyle	**δ_v (cm)**	**2,5333**	**3.9921**	**6,0372**	**8,8060**	**12,421**	**16,945**	**22,284**	27,868	29,30
Moment yöntemiyle δ_v (cm)		**2,5333**	**3,9921**	**6,0373**	**8,8063**	**12,425**	**16,984**	**22,713**	33,325	49,837
Galerkin yöntemiyle δ_v (cm)		**2,5339**	**3,9926**	**6,0341**	**8,7741**	**12,2**	15,654	17,069	15,41	13,859
Alt bölge kollokasyon yöntemiyle δ_v (cm)		**2,5333**	**3,9921**	**6,0376**	**8,8084**	**12,437**	**17,043**	**22,942**	33,601	48,025
Nokta Kollokasyon yöntemiyle δ_v (cm)		**2,5333**	**3,9916**	**6,0329**	**8,7733**	**12,19**	15,416	15,332	10,572	7,6282
En küçük kareler yöntemiyle δ_v (cm)		**2,5333**	**3,9921**	**6,037**	**8,8044**	**12,414**	**16,86**	20,995	21,704	20,21

*(Lewis, G., Monosa, F., 1982)

2.1.6 Serbest ucundan moment etkiyen dikdörtgen kesitli doğrusal elastik malzemeden yapılmış konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmelerin bulunması

Bundan önceki kısımlarda yapılan incelemelerde kiriş için hem malzeme hem de geometrik doğrusal olmama durumu mevcuttu. Bu bölümde ise aynı geometrik kesit özelliklerine sahip alüminyum alaşımından oluşan geometrik doğrusal olmama halinin bulunduğu Şekil 2.2'deki gibi bir konsol kirişteki yer değiştirmeler incelenmiştir. Burada daha önce malzeme özelliklerine bağlı olarak bahsedilen B değeri için artık doğrusal elastik malzeme kullanıldığından, elastiklik modülü E'ye eşittir denilebilir.

Doğrusal malzeme için n=1 olacağından (2.1) eşitliğinden aşağıdaki ifade yazılır:

$$\sigma = E\varepsilon \tag{2.78}$$

Doğrusal elastik malzeme için (2.2) ve (2.3) denklemlerinden;

$$\kappa = \frac{y''(x)}{(1+(y'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M}{K_n} \tag{2.79}$$

elde edilir. K_n , eğilme rijitliği EI'ya eşittir.

$$K_n = \frac{1}{12} Ebh^3 = EI \tag{2.80}$$

(2.79)'daki eşitliğin her iki tarafı integre edildiğinde;

$$\int \kappa dx + C_1 = \frac{y'(x)}{(1+(y'(x))^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{M}{K_n} x + C_1 = G \tag{2.81}$$

ifadesi yazılır. (2.81) denkleminden x = 0'da $y'(0) = 0$ olacağından C_1 integrasyon sabiti de sıfır olacaktır. G aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{M}{K_n} x = G \tag{2.82}$$

(2.7), (2.10), ve (2.82) eşitliklerini kullanarak (2.11) yay uzunluğu denklemi, Simpson yöntemi yardımıyla integre edilir, elde edilen eşitlikte Newton yöntemi ile kök bulma yöntemi uygulanarak, Δ yatay yer değiştirme değerleri bulunur. Daha sonra düşey yer değiştirmeleri bulabilmek için Runge-Kutta yöntemi yardımıyla y(x) enterpolasyon fonksiyonunu elde ederek, konsol kirişin başlangıç noktasındaki x = 0'da $y(x)$ sıfır olmalıdır şeklinde yazılabilen sınır şartı kullanılmaktadır.

L, kiriş uzunluğu 50.8 cm, b, dikdörtgen kesitin genişliği 2.54 cm, h, dikdörtgen kesitin yüksekliği 0.635 cm olmak üzere gerilme-birim şekil değiştirme bağıntısı (2.78)'deki gibi verilen alüminyum alaşımdan yapılmış bir konsol kirişteki yer değiştirmeler, Çizelge 2.2'de verilmektedir. E, Elastiklik modülünün değeri bir alüminyum alaşım için ortalama 70×10^5 N/cm^2 (70 GPa) olarak alınmıştır.

2.1.7 Serbest ucundan moment etkiyen dikdörtgen kesitli Ludwick tipi doğrusal olmayan elastik malzemeden yapılmış geometrik lineer konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmelerin bulunması

Bir önceki konuda, malzemenin doğrusal olduğu ve geometrik doğrusal olmama halinin bulunduğu durum incelendi. Şimdi ise malzemenin doğrusal olmadığı ve geometrik doğrusallığın kabul edildiği durum incelenip, Şekil 2.2'deki gibi bir konsol kirişteki yer değiştirmeler hesaplanacaktır.

Malzeme doğrusal olmadığından gerilme-şekil değiştirme ilişkisi için (2.1) eşitliğindeki Ludwick bağıntısı kullanılır.

Geometrik doğrusallaştırma yapıldığında eğrilik;

$$\kappa = y''(x) = \frac{M^n}{K_n} \tag{2.83}$$

olarak yazılır. K_n , (2.4) eşitliğindeki gibi alınır.

(2.83) denkleminin her iki tarafı integre edildiğinde ;

$$y'(x) = \int \kappa dx + C_1 = \frac{M^n}{K_n} x + C_1 \tag{2.84}$$

ifadesi yazılır. Şekil 2.2'den de görüleceği gibi sınır şartlarından x = 0'da $y'(0) = 0$ olarak alınabileceğinden, C_1 integrasyon sabiti de sıfır olacaktır. Buna göre;

$$y'(x) = \frac{M^n}{K_n} x \tag{2.85}$$

olarak yazılır.

(2.85) eşitliği yerine yazılarak, (2.10) denkleminde verilen yay uzunluğu integre edildiğinde ;

$$\frac{M^{-n}(M^{n}\sqrt{K_n^{2}+M^{2n}(L-\Delta)^2}(L-\Delta)-K_n^{2}\mathrm{ArcSinh}[\frac{M^{n}(-L+\Delta)}{K_n}]}{2K_n}=L \tag{2.86}$$

ifadesi elde edilir. Farklı moment değerleri için (2.4) eşitliğinde verilen K_n ifadesi de yerine yazılmak suretiyle (2.86) eşitliğinden, Newton yöntemi yardımıyla kök bulma işlemi uygulanarak Δ, yatay yer değiştirme değerleri bulunur.

(2.83) eşitliğinde verilen denklem iki kere integre edildiğinde , (2.13) ,(2.14) eşitliklerinde verilen ve Şekil 2.2'den de görülebilen sınır şartları yerine yazıldığında, y(x) ifadesi aşağıdaki gibi olur:

$$y(x)=\frac{M^{n}x^{2}}{2K_n} \tag{2.87}$$

L, kiriş uzunluğu 50.8 cm, b, dikdörtgen kesitin genişliği 2.54 cm, h, dikdörtgen kesitin yüksekliği 0.635 cm olmak üzere gerilme-birim şekil değiştirme bağıntısı (2.12)'deki gibi verilen N.P.8 alüminyum alaşımdan (Lewis, G., Monosa, F., 1982) yapılmış bir konsol kirişteki yer değiştirmeler, Çizelge 2.2'de verilmektedir.

(2.12)'deki denklemde σ, gerilme birimi ksi olarak alınmaktadır. Çizelge 3.2'yi oluştururken B'nin 66.1 ksi olan büyüklüğünün yerine, birim dönüşümü yaparak 0.455 10^5 N/cm^2 (0.455 GPa) alınmıştır.

(2.87) eşitliğinde x = L – Δ yazıldığında Şekil 2.2'deki kirişte, farklı moment değerleri için hesaplanan, serbest uç noktadaki düşey yer değiştirmelerin büyüklükleri, Çizelge 2.2'de gösterilmektedir.

2.1.8 Serbest ucundan moment etkiyen dikdörtgen kesitli doğrusal elastik malzemeden yapılmış konsol kirişlerdeki yer değiştirmelerin bulunması

Bu bölümde, malzeme ve geometrik olarak doğrusal bir kirişteki yer değiştirmeler hesaplanmıştır. Doğrusal elastik kirişte aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\sigma = E\varepsilon \tag{2.88}$$

$$\kappa = y''(x)=\frac{M}{K_n}=\frac{M}{EI} \tag{2.89}$$

Yukarıda E, Elastiklik modülü EI ise eğilme rijitliğidir. (2.89) eşitliğinden de görüleceği gibi doğrusal elastik malzemede K_n ifadesi EI'ya eşittir. EI, ise (2.80)'de verilen eşitlik yardımıyla bulunur. (2.89) eşitliğinin her iki tarafı integre edildiğinde;

$$y'(x) = \frac{M}{K_n} x + C_1 \tag{2.90}$$

ifadesi elde edilir. x = 0'da Şekil 2.2'den de görüleceği gibi $y'(0)=0$ sınır şartından $C_1= 0$ olacaktır.

$$y'(x) = \frac{M}{K_n} x \tag{2.91}$$

(2.91) eşitliği yerine yazılarak ,(2.10) denkleminde verilen yay uzunluğu, integre edildiğinde ;

$$\frac{(M\sqrt{K_n{}^2+M^2(L-\Delta)^2}\,(L-\Delta) + K_n{}^2 \mathrm{ArcSinh}[\frac{M\,(L-\Delta)}{K_n}]}{2K_nM} = L \tag{2.92}$$

ifadesi elde edilir. Farklı moment değerleri için (2.92) eşitliğinden, Newton yöntemi yardımıyla kök bulma işlemi uygulanarak Δ, yatay yer değiştirme değerleri bulunur.

(2.89) eşitliğinde verilen denklem iki kere integre edildiğinde , (2.13) ,(2.14) eşitliklerinde verilen ve Şekil 2.2'den de görülebilen sınır şartları yerine yazıldığında y(x) ifadesi aşağıdaki gibi olur:

$$y(x) = \frac{M\,x^2}{2\,K_n} \tag{2.93}$$

L, kiriş uzunluğu 50.8 cm, b, dikdörtgen kesitin genişliği 2.54 cm, h, dikdörtgen kesitin yüksekliği 0.635 cm olmak üzere gerilme-birim şekil değiştirme bağıntısı (2.88)'deki gibi verilen alüminyum alaşımdan yapılmış bir konsol kirişteki yer değiştirmeler, Çizelge 2.2'de verilmektedir. E, Elastiklik modülünün değeri bir alüminyum alaşım için ortalama 70×10^5 N/cm^2 (70 GPa) olarak alınmıştır.

(2.93) eşitliğinde x = L – Δ yazıldığında Şekil 2.2'deki kirişte, farklı moment değerleri için meydana gelen serbest uç noktadaki düşey yer değiştirmelerin büyüklükleri, Çizelge 2.2'de gösterilmektedir.

Çizelge 2.2 Serbest uç noktasından moment etkiyen bir konsol kirişte doğrusal olmama halinin yer değiştirmeler üzerindeki etkisi.

Moment (N.cm)	**Referans Sonuç* (Ludwick tipi lineer olmayan malzeme+geometrik lineer olmama hali)**		**(Ludwick tipi lineer olmayan malzeme+geometrik lineer)**		**(Lineer malzeme+geometrik lineer olmama hali)**		**(Lineer malzeme+geometrik lineer)**	
	δ_h (Δ) (cm)	**δ_v (cm)**	**δ_h (Δ) (cm)**	**δ_v (cm)**	**δ_h (Δ) (cm)**	**δ_v (cm)**	**δ_h (Δ) (cm)**	**δ_v (cm)**
2259,7	**0,0843**	**2,5321**	**0,0838**	**2,527**	0,7716	7,6271	0,7325	7,4655
2485,67	**0,2096**	**3,9901**	**0,2067**	**3,9678**	0,9327	8,3763	0,8764	8,1649
2711,64	**0,4811**	**6,0345**	**0,4658**	**5,9553**	1,1089	9,1218	1,0306	8,8522
2937,6	**1,0315**	**8,8024**	**0,9640**	**8,5621**	1,2999	9,8630	1,1941	9,5270
3163,57	**2,0833**	**12,417**	**1,8301**	**11,7856**	1,5057	10,5998	1,3663	10,1888
3389,54	**3,9848**	**16,94**	**3,1783**	**15,5048**	1,7262	11,3318	1,5463	10,8372
3615,51	7,239	22,281	5,0485	19,4884	1,9613	12,0586	1,7336	11,4719
3841,48	12,484	28,05	7,3755	23,4645	2,2108	12,7799	1,9272	12,0929
3954,47	16,058	30,838	8,6671	25,3759	2,3409	13,1384	2,0262	12,3982

*(Lewis, G., Monosa, F., 1982)

2.1.9 Serbest ucundan moment etkiyen dikdörtgen kesitli kübik gerilme şekil değiştirme ilişkisine sahip olan konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmelerin bulunması

Şu ana kadar incelediğimiz kısımlarda doğrusal olmayan kirişlerdeki gerilme-şekil değiştirme bağıntısı (2.1) eşitliğinde gösterildiği gibi Ludwick tipiydi. Bu bölümde, aşağıda verildiği gibi kübik gerilme-şekil değiştirme bağıntısına sahip, kirişlerdeki yer değiştirmeler incelenmiştir.

$\sigma = E\varepsilon\,(1 - \alpha\varepsilon^2)$, (Kounadis, A.N., Mallis, J.G., 1987) (2.94)

Burada E, elastiklik modülü, α ise malzemenin doğrusal olmama derecesini gösteren boyutsuz bir parametredir.

$\varepsilon = \kappa y$, (İnan, M., 1967) (2.95)

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma\, y\, dA = M \qquad (2.96)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma\, y\, b dy = M \qquad (2.97)$$

(2.96) ve (2.97) eşitliklerinde M eğilme momenti, h dikdörtgenin kesitin yüksekliği, b dikdörtgen kesitin genişliği, A kesit alanı, σ gerilme olarak verilmiştir.

(2.94), (2.95), (2.97) denklemlerinden;

$$\frac{1}{12} bEh^3\kappa - \frac{1}{80} bEh^5\alpha\kappa^3 = M \qquad (2.98)$$

bulunur. (2.98) denkleminden κ'yı çektiğimizde üç farklı değer karşımıza çıkmaktadır. Daha önceki bölümlerde sadece tek bir κ değeri bulunduğu için işler biraz daha kolaydı. Burada ise sayısal değerler yerine koyulduğunda, elde edilen κ değerlerinin mertebesine göre seçim yapılmaktadır. $\alpha = 0$ için gerilme şekil değiştirme bağıntısı doğrusal olacaktır, dolayısı ile tek bir κ değeri bulunacak ve bu κ değerinin mertebesi bizim aradığımız diğer κ(eğrilik) değerlerinin mertebesi konusunda fikir verecektir.

Boyutları 2.1.8 bölümündeki ile aynı olan ve gerilme-birim şekil değiştirme bağıntısı (2.94)'deki gibi verilen alüminyum alaşımdan yapılmış, Şekil 2.2'de gösterilen bir konsol kirişteki yer değiştirmeler, Çizelge 2.3'de verilmektedir. E, Elastiklik modülünün değeri bir alüminyum alaşım için ortalama 70×10^5 N/cm^2 (70 GPa) olarak alınmıştır.

(2.5) ve (2.6) eşitliklerini kullanarak, sayısal büyüklüğünü bildiğimiz bir κ değeri için;

$$G = \kappa x + C_1 \tag{2.99}$$

olur. Şekil 2.2’deki sınır şartlarından, $x = 0$’da $y'(0) = 0$ olacağından ve (2.5), (2.6) eşitlikleri de dikkate alınarak C_1 değeri sıfır olarak bulunur. O halde;

$$G = \kappa x \tag{2.100}$$

olarak alınabilir.

$y'(x)$ ifadesi, (2.7) eşitliğindeki gibi alındığında ve (2.10), (2.11) yay uzunluğu eşitlikleri Simpson yöntemi yardımıyla integre edilip, Newton yöntemi yardımıyla kök bulma işlemi uygulanarak, değişik moment ve eğrilik değerleri için yatay yer değiştirme değerleri bulunur.

(2.7) eşitliğinde verilen $y'(x)$ ifadesi ve $x = 0$’da $y(0) = 0$ sınır şartı kullanıldığında, Runge-Kutta yöntemi yardımıyla elde ettiğimiz $y(x)$ enterpolasyon fonksiyonunda $x = L - \Delta$ yazıldığında serbest uç noktadaki düşey yer değiştirmeler bulunur. Yatay ve düşey yer değiştirmelerin büyüklükleri Çizelge 2.3’de gösterilmiştir.

Çizelge 2.3 Kübik gerilme - şekil değiştirme bağıntısına sahip konsol kirişteki büyük yer değiştirmeler.

α	**Moment (N.cm)**	**2259,7**	**2485,67**	**2711,64**	**2937,6**	**3163,57**	**3389,54**	**3615,51**	**3841,48**	**3954,47**
0	**δ_h (Δ) (cm)**	0,77162	0,93278	1,10891	1,29994	1,50576	1,72626	1,96132	2,21082	2,34094
	δ_v (cm)	7,62712	8,37637	9,12181	9,86305	10,59980	11,33180	12,05860	12,77990	13,13840
0,5	**δ_h (Δ) (cm)**	0,77163	0,93278	1,10892	1,29994	1,50577	1,72627	1,96134	2,21083	2,34095
	δ_v (cm)	7,62713	8,37639	9,12182	9,86307	10,59980	11,33180	12,05860	12,77990	13,13840
5	**δ_h (Δ) (cm)**	0,77165	0,93280	1,10895	1,29999	1,50582	1,72635	1,96143	2,21095	2,34109
	δ_v (cm)	7,62720	8,37648	9,12195	9,86322	10,60000	11,33200	12,05890	12,78020	13,13880
10	**δ_h (Δ) (cm)**	0,77166	0,93282	1,10898	1,30003	1,50589	1,72643	1,96154	2,21109	2,34124
	δ_v (cm)	7,62728	8,37659	9,12208	9,86340	10,60030	11,33230	12,05920	12,78060	13,13920
100	**δ_h (Δ) (cm)**	0,77196	0,93326	1,10960	1,30088	1,50702	1,72792	1,96346	2,21353	2,34398
	δ_v (cm)	7,62873	8,37851	9,12457	9,86654	10,60420	11,33710	12,06490	12,78750	13,14660
1000	**δ_h (Δ) (cm)**	0,77495	0,93764	1,11580	1,30941	1,51850	1,74305	1,98304	2,23847	2,37199
	δ_v (cm)	7,64334	8,39789	9,14963	9,89827	10,64360	11,38540	12,12330	12,85700	13,22230

2.1.10 Serbest ucundan moment etkiyen dikdörtgen kesitli logaritmik gerilme şekil değiştirme ilişkisine sahip olan konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmelerin bulunması

Bu bölümde, aşağıda verildiği gibi logaritmik gerilme-şekil değiştirme bağıntısına sahip kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler incelenmiştir:

$$\sigma = E Ln[1 + k\varepsilon] \text{, [1]} \tag{2.101}$$

Yukarıdaki formülde E elastiklik modülü, k ise malzemenin özelliklerine bağlı 0 ile 1 arasında değişen bir katsayıdır. Logaritma ise doğal logaritmadır.

(2.96) ve (2.97) eşitliklerinde, (2.95) ve (2.101) denklemleri yerine yazıldığında;

$$\frac{bE(4hk\kappa + (4 - h^2k^2\kappa^2)Ln[2 - hk\kappa] + (-4 + h^2k^2\kappa^2)Ln[2 + hk\kappa]}{8k^2\kappa^2} = M \tag{2.102}$$

bulunur. (2.102) denkleminden, malzemenin geometrik özellikleri ve moment değerleri verildiğinde κ çekilebilmektedir.

2.1.8 bölümündeki boyutlara sahip, gerilme-birim şekil değiştirme bağıntısı (2.101)'deki gibi verilen alüminyum alaşımdan yapılmış, Şekil 2.2'de gösterilen bir konsol kirişteki yer değiştirmeler, Çizelge 2.4'de verilmektedir. E, Elastiklik modülünün değeri bir alüminyum alaşım için ortalama 70 10^5 N/cm^2 (70 GPa) olarak alınmıştır.

(2.5) ve (2.6) eşitliklerini kullanarak, sayısal büyüklüğünü bildiğimiz bir κ değeri için, G değeri (2.99)'da verildiği gibi bulunur.

Şekil 2.2'deki sınır şartlarından, x = 0'da $y'(0) = 0$ olacağından ve (2.5), (2.6) eşitlikleri de dikkate alınarak C_1 değeri sıfır olarak bulunur. G değeri (2.100) denkleminde olduğu gibidir.

$y'(x)$ ifadesi, (2.7) eşitliğindeki gibi alınıp, (2.10), (2.11) yay uzunluğu eşitlikleri Simpson yöntemi yardımıyla integre edildiğinde, Newton yöntemi yardımıyla kök bulma işlemi uygulanarak, değişik moment ve eğrilik değerleri için yatay yer değiştirme değerleri bulunur.

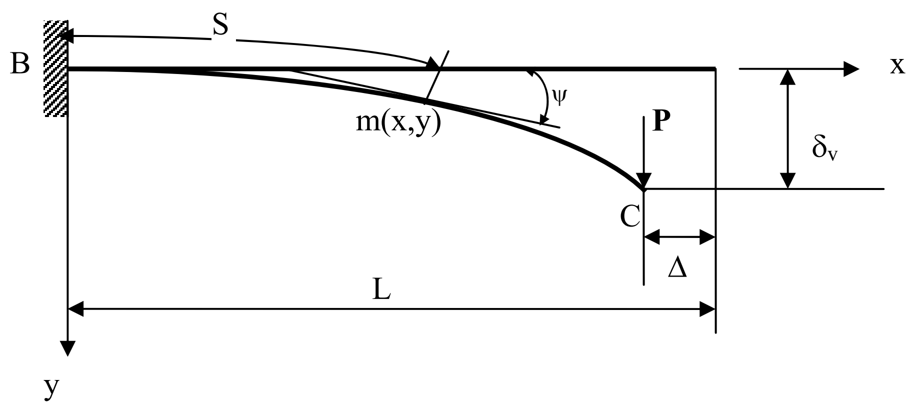
(2.7) eşitliğinde verilen $y'(x)$ ifadesi ve x = 0'da y(0) = 0 sınır şartı kullanıldığında, Runge-Kutta yöntemi yardımıyla elde ettiğimiz y(x) enterpolasyon fonksiyonunda x = L – Δ yazıldığında serbest uç noktadaki düşey yer değiştirmeler bulunur. Yatay ve düşey yer değiştirmelerin büyüklükleri Çizelge 2.4'de gösterilmiştir.

Çizelge 2.4 Logaritmik gerilme - şekil değiştirme bağıntısına sahip konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler.

k	**Moment (N,cm)**	**2259,7**	**2485,67**	**2711,64**	**2937,6**	**3163,57**	**3389,54**	**3615,51**	**3841,48**	**3954,47**
0,25	**δ_h (Δ) (cm)**	11,56134	13,83981	16,28686	18,70755	20,91584	22,87309	24,60155	26,13341	26,83508
	δ_v (cm)	27,07290	28,67690	29,30050	28,75280	27,58210	26,23370	24,89260	23,62390	23,02360
0,5	**δ_h (Δ) (cm)**	3,04449	3,66974	4,34902	5,08088	5,86387	6,69643	7,57706	8,50441	8,98531
	δ_v (cm)	14,90770	16,29290	17,64860	18,97230	20,26160	21,51400	22,72660	23,89610	24,46320
0,75	**δ_h (Δ) (cm)**	1,36692	1,65115	1,96133	2,29715	2,65832	3,04447	3,45522	3,89020	4,11666
	δ_v (cm)	10,10920	11,08840	12,05860	13,01900	13,96890	14,90760	15,83430	16,74810	17,20010

3. SERBEST UÇ NOKTASINDAN TEKİL KUVVET ETKİYEN DİKDÖRTGEN KESİTLİ LUDWICK TİPİ MALZEMEDEN OLUŞAN KONSOL KİRİŞLERDEKİ BÜYÜK YER DEĞİŞTİRMELERİN FARKLI YÖNTEMLER İLE BULUNMASI

Bu kısımda, konsol kirişin serbest uç noktasından etkiyen tekil kuvvetin oluşturduğu büyük yer değiştirmeler hesaplanmıştır.



Şekil 3.1 Serbest uç noktasından tekil kuvvet etkiyen konsol kiriş.

Şekil 3.1'den faydalanarak aşağıdaki denklemler yazılabilir.

Moment büyüklüğü m(x,y) noktası için;

$$M = P(L-x-\Delta) \tag{3.1}$$

şeklindedir. Aşağıdaki eğrilik ifadesi ile ayrıntılı bilgi Ek-3'te verilmiştir.

$$\kappa = \frac{\partial\psi}{\partial S} = \frac{2^{n+1}(1+2n)^n M^n}{n^n b^n h^{2n+1} B^n}, \quad \text{(Lewis, G., Monosa, F., 1981)} \tag{3.2}$$

(3.1) eşitliği (3.2) eğrilik eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\kappa = \frac{\partial\psi}{\partial S} = \frac{2^{n+1}(1+2n)^n (P(L-x-\Delta))^n}{n^n b^n h^{2n+1} B^n} \tag{3.3}$$

eşitliği elde edilir. K_n, aşağıdaki gibidir.

$$K_n = \frac{n^n b^n h^{2n+1} B^n}{2^{n+1}(1+2n)^n P^n}, \quad \text{(Lewis, G., Monosa, F., 1981)} \tag{3.4}$$

Daha önceden de bahsedildiği gibi yukarıdaki denklemlerde B,n değerleri doğrusal olmayan Ludwick tipi ($\sigma = B\varepsilon^{1/n}$) malzeme için verilmiş malzeme sabitleridir. B değeri Elastik malzeme için kullandığımız E, elastiklik modülü ile benzer bir işleve sahiptir. Nitekim son formülde kullanılan $E^n = B^n$ olarak da yazılabilir. K_n değerindeki B ve P dışında kalan elemanların, n=1 için I_n olarak bildiğimiz malzemenin atalet momentine eşit olduğu da görülmektedir. Dikdörtgen kesitte b genişlik, h yükseklik, P kuvveti göstermektedir.

$$\sigma = 66.1\varepsilon^{0.209}, \text{ (Lewis, G., Monosa, F., 1981)} \tag{3.5}$$

Bu kısımda gerilme-birim şekil değiştirme bağıntısı (3.5)'deki gibi verilen N.P.8 alüminyum alaşımdan (Lewis, G., Monosa, F., 1981) yapılmış bir konsol kirişteki, L^{n+1}/K_n boyutsuz oranına göre hesaplanan yer değiştirmeler, Çizelge 3.1'de gösterilmektedir.

(3.5)'deki denklemde σ, gerilme birimi ksi olarak alınmaktadır. Çizelge 3.1'i oluştururken B'nin 66.1 ksi olan büyüklüğünün yerine, birim dönüşümü yaparak 0.455 10^5 N/cm^2 (0.455 GPa) alınmıştır. Yukarıda yapılan tanımlamalar ışığında aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\frac{d\psi}{dS} = \kappa = \frac{y''(x)}{(1+(y'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M^n}{E^n I_n{}^n} = \frac{(L-x-\Delta)^n}{K_n} \tag{3.6}$$

(3.6) eşitliği integre edilirse;

$$\frac{y'(x)}{(1+(y'(x))^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{(L\text{-}x\text{-}\Delta)^{n+1}}{K_n(1+n)} + C_1 \tag{3.7}$$

bulunur.

Şekil 3.1'deki sınır şartları düşünüldüğünde x = 0 için, $y'(0) = 0$ olduğundan C_1 integrasyon sabiti;

$$C_1 = \frac{(L\text{-}\Delta)^{n+1}}{K_n(1+n)} \tag{3.8}$$

olur.

Boyutsuzlaştırma işlemi yapılarak;

$$\frac{x}{L} = \overline{x} \tag{3.9}$$

$$\frac{\Delta}{L} = \delta_h \tag{3.10}$$

şeklinde yazılabilir.

(3.7) ve (3.8), (3.9) ve (3.10) denklemlerinden $y'(\bar{x})$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$y'(\bar{x}) = \frac{(-1)\dfrac{L^{n+1}}{K_n(n+1)}(1-\bar{x}-\delta_h)^{n+1} + \dfrac{L^{n+1}}{K_n(n+1)}(1-\delta_h)^{n+1}}{(1-((-1)\dfrac{L^{n+1}}{K_n(n+1)}(1-\bar{x}-\delta_h)^{n+1} + \dfrac{L^{n+1}}{K_n(n+1)}(1-\delta_h)^{n+1})^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.11}$$

(3.11) denklemi, (3.9), (3.10) eşitlikleri ile birlikte (2.10) yay uzunluğu ifadesinde yerine yazılarak, Simpson yöntemi ile integre edilir, elde edilen ifadenin Newton yöntemi ile kökü bulunarak δ_h , yatay yer değiştirme değerleri hesaplanır. Bu işlem L^{n+1}/K_n boyutsuz oranının farklı değerleri için tekrarlanır. Burada eşitlik (3.5)'den n = 1/0.209 olduğu göz önünde bulundurulmalıdır.

(3.11) denkleminden y(0) = 0 sınır şartı da göz önüne alındığında, Runge-Kutta yöntemi yardımıyla $y(\bar{x})$ enterpolasyon fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyonda $\bar{x} = 1 - \delta_h$ değeri için $y(1 - \delta_h)$ değeri, kirişin serbest uç noktasındaki çökmeyi δ_v / L şeklinde boyutsuz bir büyüklük olarak verir.

L^{n+1}/K_n boyutsuz oranına göre yatay ve düşey yer değiştirmelerin büyüklükleri Çizelge 3.1'de gösterilmiştir.

3.1 Serbest Uç Noktasından Kuvvet Etkiyen Dikdörtgen Kesitli Ludwick Tipi Malzemeden Oluşan Konsol Kirişlerdeki Büyük Yer Değiştirmelerin Momentler Yöntemi İle Bulunması

Momentler yönteminde, önceki kısımlarda da değinildiği gibi, elde edilen hata fonksiyonunun momentlerini sıfıra eşitlemek suretiyle, meydana gelen ifadelerdeki deneme fonksiyonu katsayıları hesaplanmaya çalışılır. Şekil 3.1'den görülebileceği gibi x = 0'da y(0) = 0 ve $y'(0) = 0$ sınır şartlarını sağlayan, deneme fonksiyonu aşağıdaki gibi alınmıştır:

$$y(x) = ax^2 + bx^4 \tag{3.12}$$

(3.12) eşitliğinde verilen y(x) deneme fonksiyonu, (3.6) denkleminde yerine yazılıp ve L^{n+1}/K_n parantezine alındığında, ε_Ω hata fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır:

$$\varepsilon_{\Omega} = \frac{2a + 12bx^2}{(1 + (2ax + 4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{L} \times \frac{L^{n+1}}{K_n}(1 - \frac{x}{L} - \delta_h)^n \tag{3.13}$$

Aslında (3.13) denkleminin sağ tarafında verilen ifade L^n / K_n parantezine alınabilmektedir. Ancak boyutsuz L^{n+1}/K_n parantezine alabilmek için 1/L ile L^{n+1}/K_n ifadesi çarpılarak denklemde gösterilmiştir. K_n ifadesi (3.4) eşitliğinde verilmiştir. δ_h ifadesi ise (3.10) eşitliğinde gösterilen boyutsuz yatay yer değiştirme büyüklüğüdür.

(3.13), hata fonksiyonunun moment yöntemi gereği, önce sıfırıncı momenti bölge üzerinde sıfıra eşitlenirse;

$$\int_0^{L(1-\delta_h)} \left(\frac{2a + 12bx^2}{(1 + (2ax + 4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{L} \times \frac{L^{n+1}}{K_n}(1 - \frac{x}{L} - \delta_h)^n\right)dx = 0 \tag{3.14}$$

(3.13), hata fonksiyonunun birinci momenti bölge üzerinde sıfıra eşitlenirse;

$$\int_0^{L(1-\delta_h)} \left(\frac{2a + 12bx^2}{(1 + (2ax + 4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{L} \times \frac{L^{n+1}}{K_n}(1 - \frac{x}{L} - \delta_h)^n\right)x\,dx = 0 \tag{3.15}$$

denklemleri elde edilir.

Daha önceki bölümde anlatıldığı gibi Simpson ve Newton yöntemleri yardımıyla yatay yer değiştirme δ_h değerleri hesaplanır. (3.14) ve (3.15) eşitliklerinden, deneme fonksiyonu için gerekli sabitler olan a ve b değerleri bulunarak, gerilme-birim şekil değiştirme bağıntısı (3.5)'deki gibi verilen N.P.8 alüminyum alaşımdan (Lewis, G., Monosa, F., 1982) yapılmış bir konsol kirişteki, L^{n+1}/K_n boyutsuz oranına göre hesaplanan yer değiştirmeler, Çizelge 3.1'de gösterilmektedir. (3.5) denkleminden de görüleceği gibi n = 1/0.209 olarak alınmıştır.

Serbest uç noktadaki düşey yer değiştirmeler hesaplanırken bulunan deneme fonksiyonunda x = L(1- δ_h) için y(L(1- δ_h)) değerleri bulunarak δ_v / L boyutsuz düşey yer değiştirme büyüklükleri elde edilir. Boyutsuz düşey yer değiştirme δ_v / L hesaplanırken,(3.13), (3.14), (3.15) eşitlikleri L kiriş uzunluğundan bağımsız hale getirilemediği için önce keyfi olarak L kiriş uzunluğu 100 cm olarak alınır. Daha sonra bulunan y(L(1- δ_h)) değeri, kiriş uzunluğuna bölünüp boyutsuzlaştırılarak δ_v / L değerleri elde edilir.

Aşağıda L^{n+1}/K_n boyutsuz oranına göre elde edilen deneme fonksiyonları ve hesaplanan yer değiştirmeler verilmektedir:

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 0.25, \ \delta_h = 0.000727,$$

$$y(x) = 0.000519\,x^2 \ \text{-}1.522487 \times 10^{-8} \ x^4 \tag{3.16}$$

$$y(L(1\text{-}\ \delta_h)) = 3.670287$$

$$\frac{\delta_v}{L} = \ 0.036702$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 0.5, \ \delta_h = 0.002844,$$

$$y(x) = 0.001031\,x^2 \ \text{-}\ 3.036802 \times 10^{-8} \ x^4 \tag{3.17}$$

$$y(L(1\text{-}\ \delta_h)) = 7.256846$$

$$\frac{\delta_v}{L} = \ 0.072568$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 0.75, \ \delta_h = 0.006171,$$

$$y(x) = 0.001530\,x^2 \ \text{-}\ 4.535888 \times 10^{-8} \ x^4 \tag{3.18}$$

$$y(L(1\text{-}\ \delta_h)) = 10.690141$$

$$\frac{\delta_v}{L} = \ 0.106901$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 1, \ \delta_h = 0.010468,$$

$$y(x) = 0.00201\,x^2 \ \text{-}\ 6.014496 \times 10^{-8} \ x^4 \tag{3.19}$$

$$y(L(1\text{-}\ \delta_h)) = 13.923098$$

$$\frac{\delta_v}{L} = \ 0.139231$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 2, \ \delta_h = 0.032718,$$

$$y(x) = 0.003723\,x^2 - 1.167981\times10^{-7}\,x^4 \tag{3.20}$$

$$y(L(1-\delta_h)) = 24.616774$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.246168$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 3\,,\ \delta_h = 0.056308,$$

$$y(x) = 0.005135\,x^2 - 1.695399\times10^{-7}\,x^4 \tag{3.21}$$

$$y(L(1-\delta_h)) = 32.290146$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.322901$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 4\,,\ \delta_h = 0.077872,$$

$$y(x) = 0.006326\,x^2 - 2.190298\times10^{-7}\,x^4 \tag{3.22}$$

$$y(L(1-\delta_h)) = 37.960963$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.37961$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 5\,,\ \delta_h = 0.096944,$$

$$y(x) = 0.007359\,x^2 - 2.658931\times10^{-7}\,x^4 \tag{3.23}$$

$$y(L(1-\delta_h)) = 42.335102$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.423351$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 6\,,\ \delta_h = 0.113769,$$

$$y(x) = 0.008275\,x^2 - 3.105924\times10^{-7}\,x^4 \tag{3.24}$$

$$y(L(1-\delta_h)) = 45.834918$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.458349$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 7\,,\ \delta_h = 0.128701,$$

$$y(x) = 0.0091\,x^2 - 3.534656\times10^{-7}\ x^4 \tag{3.25}$$

$$y(L(1-\delta_h)) = 48.717461$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.487175$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 8\,,\ \delta_h = 0.142062,$$

$$y(x) = 0.009854\,x^2 - 3.947656\times10^{-7}\ x^4 \tag{3.26}$$

$$y(L(1-\delta_h)) = 51.146344$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.511463$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 9\,,\ \delta_h = 0.154112,$$

$$y(x) = 0.010549\,x^2 - 4.346875\times10^{-7}\ x^4 \tag{3.27}$$

$$y(L(1-\delta_h)) = 53.230506$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.532305$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 10\,,\ \delta_h = 0.165064,$$

$$y(x) = 0.011196\,x^2 - 4.733854\times10^{-7}\ x^4 \tag{3.28}$$

$$y(L(1-\delta_h)) = 55.045428$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.550454$$

Yukarıda hesaplanmış olan yer değiştirme değerleri Çizelge 3.1’de gösterilmektedir.

3.2 Serbest Uç Noktasından Tekil Kuvvet Etkiyen Dikdörtgen Kesitli Ludwick Tipi Malzemeden Oluşan Konsol Kirişlerdeki Büyük Yer Değiştirmelerin Alt Bölge Kollokasyon Yöntemi İle Bulunması

Daha önceden bahsedildiği gibi alt bölge kollokasyon yönteminde, hata fonksiyonu bölgenin iki yarısında ayrı ayrı integre edilerek sıfıra eşitlenmek suretiyle, deneme fonksiyonu elde edilmeye çalışılır. Deneme fonksiyonu olarak, Şekil 3.1 deki sınır şartlarını sağlayan (3.12) eşitliğindeki y(x)'i alabiliriz. (3.13) denkleminde verilen ε_Ω hata fonksiyonu aynen kullanılarak, alt bölge kollokasyon yöntemi gereğince aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\int_0^{\frac{L(1-\delta_h)}{2}} \left(\frac{2a+12bx^2}{(1+(2ax+4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{L}\times\frac{L^{n+1}}{K_n}\left(1-\frac{x}{L}-\delta_h\right)^n\right)dx = 0 \tag{3.29}$$

$$\int_{\frac{L(1-\delta_h)}{2}}^{L(1-\delta_h)} \left(\frac{2a+12bx^2}{(1+(2ax+4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{L}\times\frac{L^{n+1}}{K_n}\left(1-\frac{x}{L}-\delta_h\right)^n\right)dx = 0 \tag{3.30}$$

İkinci bölümde anlatıldığı gibi Simpson ve Newton metotları yardımıyla yatay yer değiştirme δ_h değerleri hesaplanır. (3.29) ve (3.30) eşitliklerinden, deneme fonksiyonu için gerekli sabitler olan a ve b değerleri bulunarak, gerilme-birim şekil değiştirme bağıntısı (3.5)'deki gibi verilen N.P.8 alüminyum alaşımdan (Lewis, G., Monosa, F., 1982) yapılmış bir konsol kirişteki, L^{n+1}/K_n boyutsuz oranına göre hesaplanan yer değiştirmeler, Çizelge 3.1'de gösterilmektedir. (3.5) denkleminden de görüleceği gibi n = 1/0.209 olarak alınmıştır.

Serbest uç noktadaki düşey yer değiştirmeler hesaplanırken bulunan deneme fonksiyonunda x = L(1- δ_h) için y(L(1- δ_h)) değerleri bulunarak δ_v / L boyutsuz düşey yer değiştirme büyüklükleri elde edilir.

Aşağıda L^{n+1}/K_n boyutsuz oranına göre elde edilen deneme fonksiyonları ve hesaplanan yer değiştirmeler verilmektedir:

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 0.25,\ \delta_h = 0.000727,$$

$$y(x) = 0.000492\ x^2\ -1.386699\times10^{-8}\ x^4 \tag{3.31}$$

y(L(1- δ_h)) = 3.534894

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.035348$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 0.5, \ \delta_h = 0.002844,$$

$$y(x) = 0.000977 \ x^2 - 2.763978 \times 10^{-8} \ x^4 \tag{3.32}$$

$$y(L(1- \delta_h)) = 6.987113$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.069871$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 0.75, \ \delta_h = 0.006171,$$

$$y(x) = 0.001448 \ x^2 - 4.123784 \times 10^{-8} \ x^4 \tag{3.33}$$

$$y(L(1- \delta_h)) = 10.288116$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.102881$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 1, \ \delta_h = 0.010468,$$

$$y(x) = 0.001902 \ x^2 - 5.46026 \times 10^{-8} \ x^4 \tag{3.34}$$

$$y(L(1- \delta_h)) = 13.391708$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.133917$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 2, \ \delta_h = 0.032718,$$

$$y(x) = 0.003508 \ x^2 - 1.052849 \times 10^{-7} \ x^4 \tag{3.35}$$

$$y(L(1- \delta_h)) = 23.608898$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.236089$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 3\,,\ \ \delta_h = 0.056308,$$

$$y(x) = 0.004819\ x^2\ - 1.517686\ \times 10^{-7}\ x^4 \tag{3.36}$$

$$y(L(1-\delta_h)) = 30.880729$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.308807$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 4\,,\ \ \delta_h = 0.077872,$$

$$y(x) = 0.005917\ x^2\ - 1.949423\ \times 10^{-7}\ x^4 \tag{3.37}$$

$$y(L(1-\delta_h)) = 36.219328$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.362193$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 5\,,\ \ \delta_h = 0.096944,$$

$$y(x) = 0.006865\ x^2\ - 2.355694\ \times 10^{-7}\ x^4 \tag{3.38}$$

$$y(L(1-\delta_h)) = 40.318404$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.403184$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 6\,,\ \ \delta_h = 0.113769,$$

$$y(x) = 0.007703\ x^2\ - 2.741836\ \times 10^{-7}\ x^4 \tag{3.39}$$

$$y(L(1-\delta_h)) = 43.589001$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.43589$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 7\,,\ \ \delta_h = 0.128701,$$

$$y(x) = 0.008458\ x^2 - 3.11157 \times 10^{-7}\ x^4 \tag{3.40}$$

$y(L(1- \delta_h)) = 46.279113$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.462791$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 8\,,\ \ \delta_h = 0.142062,$$

$$y(x) = 0.009147\ x^2 - 3.467576 \times 10^{-7}\ x^4 \tag{3.41}$$

$y(L(1- \delta_h)) = 48.545362$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.485454$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 9\,,\ \ \delta_h = 0.154112,$$

$$y(x) = 0.009784\ x^2 - 3.81185 \times 10^{-7}\ x^4 \tag{3.42}$$

$y(L(1- \delta_h)) = 50.49131$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.504913$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 10\,,\ \ \delta_h = 0.165064,$$

$$y(x) = 0.010376\ x^2 - 4.145925 \times 10^{-7}\ x^4 \tag{3.43}$$

$y(L(1- \delta_h)) = 52.188258$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.521883$$

Yukarıda hesaplanmış olan yer değiştirme değerleri, Çizelge 3.1’de gösterilmektedir

3.3 Serbest Uç Noktasından Tekil Kuvvet Etkiyen Dikdörtgen Kesitli Ludwick Tipi Malzemeden Oluşan Konsol Kirişlerdeki Büyük Yer Değiştirmelerin En Küçük Kareler Yöntemi İle Bulunması

En küçük kareler yönteminde; (3.13) denkleminde verilen hata fonksiyonunun, (3.12) denkleminde verilen deneme fonksiyonunun sabit terimleri olan a ve b değerlerine göre alınabilen $\frac{\partial \varepsilon_\Omega}{a}$ ve $\frac{\partial \varepsilon_\Omega}{b}$ ağırlık fonksiyonları ile çarpımının, bölge üzerinde integre edilerek sıfıra eşitlenmesi suretiyle, deneme fonksiyonunun sabit terimleri bulunmaya çalışılır.

(3.13) hata fonksiyonu denkleminden elde edilen ağırlık fonksiyonları;

$$\frac{\partial \varepsilon_\Omega}{a} = -\frac{6x(2a+12bx^2)(2ax+4bx^3)}{(1+(2ax+4bx^3)^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{2}{(1+(2ax+4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.44}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_\Omega}{b} = -\frac{12x^3(2a+12bx^2)(2ax+4bx^3)}{(1+(2ax+4bx^3)^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{12x^2}{(1+(2ax+4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.45}$$

şeklinde yazılır. (3.13), (3.44), (3.45) denklemleri yardımıyla aşağıdaki eşitlikler bulunur:

$$\int_0^{L(1-\delta_h)} \Bigg(\Bigg(\frac{2a+12bx^2}{(1+(2ax+4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{L}\times\frac{L^{n+1}}{K_n}\Big(1-\frac{x}{L}-\delta_h\Big)^n\Bigg)\Bigg(-\frac{6x(2a+12bx^2)(2ax+4bx^3)}{(1+(2ax+4bx^3)^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{2}{(1+(2ax+4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg)\Bigg)dx = 0 \tag{3.46}$$

$$\int_0^{L(1-\delta_h)} \Bigg(\Bigg(\frac{2a+12bx^2}{(1+(2ax+4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{L}\times\frac{L^{n+1}}{K_n}\Big(1-\frac{x}{L}-\delta_h\Big)^n\Bigg)\Bigg(-\frac{12x^3(2a+12bx^2)(2ax+4bx^3)}{(1+(2ax+4bx^3)^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{12x^2}{(1+(2ax+4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg)\Bigg)dx = 0 \tag{3.47}$$

Üçüncü bölümde bahsedildiği gibi, Simpson ve Newton yöntemleri yardımıyla, (2.10) yay uzunluğu formülü kullanılarak, yatay yer değiştirme δ_h değerleri bulunur. (3.46) ve (3.47) eşitliklerinden, deneme fonksiyonu için gerekli sabitler olan a ve b değerleri bulunarak, gerilme-birim şekil değiştirme bağıntısı (3.5)'deki gibi verilen N.P.8 alüminyum alaşımdan (Lewis, G., Monosa, F., 1982) yapılmış bir konsol kirişteki, L^{n+1}/K_n boyutsuz oranına göre hesaplanan yer değiştirmeler, Çizelge 3.1'de gösterilmektedir. (3.5) denkleminden de görüleceği gibi $n = 1/0.209$ olarak alınmıştır.

Serbest uç noktadaki düşey yer değiştirmeler hesaplanırken, elde edilen deneme fonksiyonunda, $x = L(1- \delta_h)$ için bulunan $y(L(1- \delta_h))$ değerleri , δ_v / L boyutsuz düşey yer değiştirme büyüklüklerini verir.

Aşağıda L^{n+1}/K_n boyutsuz oranına göre elde edilen deneme fonksiyonları ve hesaplanan yer değiştirmeler verilmektedir:

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 0.25, \ \delta_h = 0.000727,$$

$$y(x) = 0.000455\, x^2 - 1.197732 \times 10^{-8}\, x^4 \tag{3.48}$$

$$y(L(1- \delta_h)) = 3.351453$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.033514$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 0.5, \ \delta_h = 0.002844,$$

$$y(x) = 0.000909\, x^2 - 2.4011 \times 10^{-8}\, x^4 \tag{3.49}$$

$$y(L(1- \delta_h)) = 6.665338$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.066653$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 0.75, \ \delta_h = 0.006171,$$

$$y(x) = 0.00136\, x^2 - 3.616065 \times 10^{-8}\, x^4 \tag{3.50}$$

$$y(L(1- \delta_h)) = 9.912680$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.099126$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 1, \ \delta_h = 0.010468,$$

$$y(x) = 0.00181\,x^2 - 4.849143 \times 10^{-8}\, x^4 \tag{3.51}$$

$$y(L(1-\delta_h)) = 13.078121$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.130781$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 2\,,\ \ \delta_h = 0.032718,$$

$$y(x) = 0.003623\,x^2 - 1.011643 \times 10^{-7}\, x^4 \tag{3.52}$$

$$y(L(1-\delta_h)) = 25.04571$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.250457$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 3\,,\ \ \delta_h = 0.056308,$$

$$y(x) = 0.005596\,x^2 - 1.635126 \times 10^{-7}\, x^4 \tag{3.53}$$

$$y(L(1-\delta_h)) = 36.869090$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.368691$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 4\,,\ \ \delta_h = 0.077872,$$

$$y(x) = 0.007838\,x^2 - 2.392719 \times 10^{-7}\, x^4 \tag{3.54}$$

$$y(L(1-\delta_h)) = 49.354435$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.493544$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 5\,,\ \ \delta_h = 0.096944,$$

$$y(x) = 0.010089\,x^2 - 3.208182 \times 10^{-7}\, x^4 \tag{3.55}$$

$$y(L(1-\delta_h)) = 60.942732$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.609427$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 6\,,\ \ \delta_h = 0.113769,$$

$$y(x) = 0.012015\,x^2\ \text{-}\ 3.965643\times10^{-7}\ x^4 \tag{3.56}$$

$$y(L(1\text{-}\ \delta_h)) = 69.907341$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.699073$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 7\,,\ \ \delta_h = 0.128701,$$

$$y(x) = 0.013597\,x^2\ \text{-}\ 4.640609\times10^{-7}\ x^4 \tag{3.57}$$

$$y(L(1\text{-}\ \delta_h)) = 76.48249$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.764825$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 8\,,\ \ \delta_h = 0.142062,$$

$$y(x) = 0.014920\,x^2\ \text{-}\ 5.247814\times10^{-7}\ x^4 \tag{3.58}$$

$$y(L(1\text{-}\ \delta_h)) = 81.388248$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.813882$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 9\,,\ \ \delta_h = 0.154112,$$

$$y(x) = 0.016053\,x^2\ \text{-}\ 5.803004\times10^{-7}\ x^4 \tag{3.59}$$

$$y(L(1\text{-}\ \delta_h)) = 85.156045$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.85156$$

$$\frac{L^{n+1}}{K_n} = 10, \ \delta_h = 0.165064,$$

$$y(x) = 0.017045\, x^2 - 6.317585 \times 10^{-7}\, x^4 \tag{3.60}$$

$$y(L(1-\delta_h)) = 88.126402$$

$$\frac{\delta_v}{L} = 0.881264$$

Yukarıda hesaplanmış olan yer değiştirme değerleri, Çizelge 3.1'de gösterilmektedir.

Çizelge 3.1 Serbest uç noktasından tekil kuvvet etkiyen konsol kirişteki yer değiştirmeler.

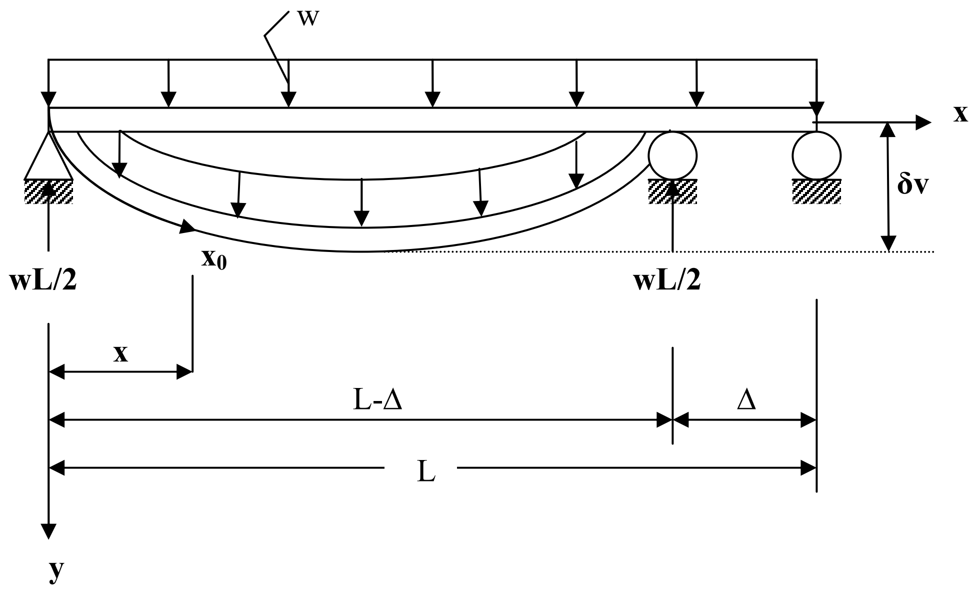
L^{n+1} / K_n	δ_h** (Δ/L)	δ_h*** (Δ/L)	**Referans* Sonuç δ_v / L**	**Açık Runge-Kutta yöntemiyle δ_v / L**	**Moment yöntemiyle δ_v / L**	**Alt bölge kollokasyon yöntemiyle δ_v / L**	**En küçük kareler yöntemiyle δ_v / L**
0.25	0.00073	0.000727	0.03669	0.036695	0.036702	0.035348	0.033514
0.50	0.00284	0.002844	0.07251	0.072513	0.072568	0.069871	0.066653
0.75	0.00617	0.006171	0.10672	0.106726	0.106901	0.102881	0.099126
1	0.01046	0.010468	0.13884	0.138844	0.139231	0.133917	0.130781
2	0.03270	0.032718	0.24407	0.244053	0.246168	0.236089	0.250457
3	0.05629	0.056308	0.31822	0.318196	0.322901	0.308807	0.368691
4	0.07785	0.077872	0.37211	0.37207	0.37961	0.362193	0.493544
5	0.09692	0.096944	0.41308	0.413034	0.423351	0.403184	0.609427
6	0.11374	0.113769	0.44548	0.445423	0.458349	0.43589	0.699073
7	0.12868	0.128701	0.47190	0.471841	0.487175	0.462791	0.764825
8	0.14204	0.142062	0.49398	0.493924	0.511463	0.485454	0.813882
9	0.15409	0.154112	0.51282	0.51275	0.532305	0.504913	0.85156
10	0.16504	0.165064	0.52913	0.529057	0.550454	0.521883	0.881264

* (Lewis, G., Monosa, F., 1981)

** (Lewis, G., Monosa, F., 1981)

*** Simpson yöntemi ile yazar tarafından hesaplanan δ_h değerleridir.

4. YAYILI YÜKLÜ DİKDÖRTGEN KESİTLİ LUDWICK TİPİ MALZEMEDEN YAPILMIŞ BASİT KİRİŞLERDEKİ BÜYÜK YER DEĞİŞTİRMELERİN FARKLI YAY UZUNLUKLARI KABULLERİ YAPILARAK BULUNMASI



Şekil 4.1 Yayılı yüklü basit kiriş.

w birim yayılı yük büyüklüğü, Δ yatay yer değiştirme büyüklüğü, δ_v düşey yer değiştirme büyüklüğü , L kiriş boyu olarak verilen bir konsol kiriş, Şekil 4.1'de gösterilmektedir.

Yer değiştirme büyüklüklerini hesaplarken, x_0 yay uzunluğu ve Δ yatay yer değiştirme büyüklükleri için aşağıdaki yaklaşık kabuller yapılarak çalışılmıştır.

$x_0 = x+\Delta(x)$, (Fertis, D.G., 1999) (4.1)

$\Delta(x) = \Delta$, (Fertis, D.G., 1999) (4.2)

$\Delta(x) = \dfrac{\Delta x}{(L-\Delta)}$, (Fertis, D.G., 1999) (4.3)

$$\Delta(x) = \Delta\sqrt{\frac{\Delta}{(L-\Delta)}} \tag{4.4}$$

(4.1) ve (4.2) eşitlikleri kullanılırsa, Şekil 4.1'de sabit mesnetten x kadar uzaklıktaki bir kesitte moment ,

$$M = \frac{w(L\text{-}\Delta)x}{2} - \frac{wx^2}{2} \quad \text{(Fertis, D.G., 1999)} \tag{4.5}$$

olarak bulunur.

$$\frac{d\psi}{dS} = \kappa = \frac{y''(x)}{(1+(y'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M^n}{K_n}, \text{(Lewis, G., Monosa, F., 1981)} \tag{4.6}$$

(4.5) ve (4.6) eşitliklerinden;

$$\kappa = \frac{L^{2n+1}}{K_n} \times \frac{1}{L}((1\text{-}\frac{\Delta}{L})\frac{x}{L}\text{-}(\frac{x}{L})^2)^n \tag{4.7}$$

ifadesi elde edilir. $\frac{L^{2n+1}}{K_n}$ boyutsuz büyüklüğüne göre yazılmış (4.7) eğrilik denkleminde,

$$K_n = \frac{2^n n^n b^n h^{2n+1} B^n}{2^{n+1}(1+2n)^n w^n} \tag{4.8}$$

olarak alınmıştır.

(3.9), (3.10) eşitliklerindeki boyutsuzlaştırma işlemi yapılarak, (4.7) denklemi, (2.5) ve (2.6) denklemlerinde kullanıldığında,

$$G = \frac{\frac{L^{2n+1}}{K_n}\bar{x}(1+\frac{\bar{x}}{(\delta_h\text{-}1)})^{-n}(-\bar{x}(-1+\bar{x}+\delta_h))^n\, {}_2F1[1+n,-n;2+n;\frac{\bar{x}}{1\text{-}\delta_h}]}{(1+n)} + C_1 \tag{4.9}$$

eşitliği elde edilir. Şekil 4.1'den $x = \frac{1\text{-}\delta_h}{2}$ deki $y'(\frac{1\text{-}\delta_h}{2})$ ifadesi sıfır olacağından, (4.9) denklemi, C_1 integrasyon sabitini bulmak için kullanılır:

$$C1 = -\frac{2^{-2-2n}\frac{L^{2n+1}}{K_n}\sqrt{\pi}(1+\frac{1\text{-}\delta_h}{2(\delta_h\text{-}1)})^{-n}(1\text{-}\delta_h)(-(1\text{-}\delta_h)(-1+\frac{1\text{-}\delta_h}{2}+\delta_h))^n\Gamma[2+n]}{(1+n)\Gamma[\frac{3}{2}+n]} \tag{4.10}$$

Buradan C_1'inde eldesiyle G aşağıdaki gibi yazılır:

$$G = \frac{\frac{L^{2n+1}}{K_n}\bar{x}(1+\frac{\bar{x}}{(\delta_h\text{-}1)})^{-n}(-\bar{x}(-1+\bar{x}+\delta_h))^n\, {}_2F1[1+n,-n;2+n;\frac{\bar{x}}{1\text{-}\delta_h}]}{(1+n)} +$$

$$-\frac{2^{-2-2n}\dfrac{L^{2n+1}}{K_n}\sqrt{\pi}(1+\dfrac{1-\delta_h}{2(\delta_h-1)})^{-n}(1-\delta_h)(-(1-\delta_h)(-1+\dfrac{1-\delta_h}{2}+\delta_h))^n\Gamma[2+n]}{(1+n)\Gamma[\dfrac{3}{2}+n]} \tag{4.11}$$

(4.11) denklemi, (2.11) yay uzunluğu ifadesinde yerine yazılır ve Simpson yöntemi ile integre edilir, elde edilen ifadenin Newton yöntemi ile kökü bulunarak δ_h , yatay yer değiştirme değerleri hesaplanır. Bu işlem L^{2n+1}/K_n boyutsuz oranının farklı değerleri için tekrarlanır. n'nin farklı değerlerine ve L^{2n+1}/K_n göre hesaplanmış yer değiştirme değerleri de Çizelge 4.1'de verilmektedir.

(2.7), (4.11) denkleminden y(0) = 0 sınır şartı da göz önüne alındığında Runge-Kutta yöntemi yardımıyla $y(\bar{x})$ enterpolasyon fonksiyonu elde edilebilir. Bu fonksiyonda $\bar{x} = \frac{1 - \delta_h}{2}$ değeri için $y\,(\frac{1 - \delta_h}{2})$ değeri, kirişin orta noktasındaki çökmeyi δ_v / L şeklinde boyutsuz bir büyüklük olarak verir.

(4.1) ve (4.3) eşitlikleri kullanılırsa, Şekil 4.1'de sabit mesnetten x kadar uzaklıktaki bir kesitte moment ,

$$M = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2} - \frac{\Delta x^2}{2(L-\Delta)} \tag{4.12}$$

şeklinde yazılır.

(4.6) ve (4.12) eşitliklerinden eğrilik ifadesi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\kappa = \frac{L^{2n+1}}{K_n} \times \frac{1}{L}\left(\frac{x}{L} - (\frac{x}{L})^2 - \frac{\Delta}{L(1-\frac{\Delta}{L})}(\frac{x}{L})^2\right)^n \tag{4.13}$$

$\frac{L^{2n+1}}{K_n}$ boyutsuz büyüklüğüne göre yazılmış (4.13) eğrilik denkleminde K_n , (4.8) denkleminde verildiği gibidir.

(3.9), (3.10) eşitliklerindeki boyutsuzlaştırma işlemi yapılarak, (4.13) denklemi (2.5) ve (2.6) denklemlerinde kullanıldığında;

$$G=\frac{\frac{L^{2n+1}}{K_n}\bar{x}\left(1+\frac{\bar{x}}{(\delta_h-1)}\right)^{-n}\left(\frac{\bar{x}(\bar{x}+(\delta_h-1))}{(\delta_h-1)}\right)^{n}{}_2F1\left[1+n,-n;2+n;\frac{\bar{x}}{(1-\delta_h)}\right]}{(1+n)}+C_1 \tag{4.14}$$

eşitliği elde edilir. Şekil 4.1'den görüleceği gibi $\bar{x}=\frac{1-\delta_h}{2}$, de $y'(\frac{1-\delta_h}{2})$ ifadesi sıfır olacağından, (4.14) denkleminden C_1 elde edilerek, aşağıdaki gibi yazılır:

$$C1=-\frac{2^{-2-2n}\frac{L^{2n+1}}{K_n}\sqrt{\pi}\left(1+\frac{1-\delta_h}{2(\delta_h-1)}\right)^{-n}(1-\delta_h)\left(\frac{(1-\delta_h)(-1+\frac{1-\delta_h}{2}+\delta_h)}{(\delta_h-1)}\right)^{n}\Gamma[2+n]}{(1+n)\Gamma[\frac{3}{2}+n]} \tag{4.15}$$

(4.14) ve (4.15) denklemlerinden G aşağıdaki gibidir:

$$G=\frac{\frac{L^{2n+1}}{K_n}\bar{x}\left(1+\frac{\bar{x}}{(\delta_h-1)}\right)^{-n}\left(\frac{\bar{x}(\bar{x}+(\delta_h-1))}{(\delta_h-1)}\right)^{n}{}_2F1\left[1+n,-n;2+n;\frac{\bar{x}}{(1-\delta_h)}\right]}{(1+n)}+$$

$$-\frac{2^{-2-2n}\frac{L^{2n+1}}{K_n}\sqrt{\pi}\left(1+\frac{1-\delta_h}{2(\delta_h-1)}\right)^{-n}(1-\delta_h)\left(\frac{(1-\delta_h)(-1+\frac{1-\delta_h}{2}+\delta_h)}{(\delta_h-1)}\right)^{n}\Gamma[2+n]}{(1+n)\Gamma[\frac{3}{2}+n]} \tag{4.16}$$

(4.16) denklemi, (2.11) yay uzunluğu ifadesinde yerine yazılır ve Simpson yöntemi ile integre edilir, elde edilen ifadenin Newton yöntemi ile kökü bulunarak δ_h , yatay yer değiştirme değerleri elde edilmiş olur. Bu işlem L^{2n+1}/K_n boyutsuz oranının farklı değerleri için tekrarlanır. n'nin farklı değerlerine ve L^{2n+1}/K_n göre hesaplanmış yer değiştirme değerleri de Çizelge 4.1'de verilmektedir.

(2.7), (4.16) denkleminden y(0) = 0 sınır şartı da göz önüne alındığında Runge-Kutta yöntemi yardımıyla $y(\bar{x})$ enterpolasyon fonksiyonu elde edilebilir. Bu fonksiyonda $\bar{x}=\frac{1-\delta_h}{2}$ değeri için $y(\frac{1-\delta_h}{2})$ değeri, kirişin orta noktasındaki çökmeyi δ_v / L şeklinde boyutsuz bir büyüklük olarak verir.

(4.1) ve (4.4) eşitlikleri kullanılırsa, Şekil 4.1'de sabit mesnetten x kadar uzaklıktaki bir kesitte moment ,

$$M = (\frac{wLx}{2} - \frac{wx}{2}(x + \Delta\sqrt{\frac{\Delta}{(L-\Delta)}})) \qquad (4.17)$$

(4.6) ve (4.17) denklemlerinden eğrilik ifadesi;

$$\kappa = \frac{L^{2n+1}}{K_n} \times \frac{1}{L}(\frac{x}{L} \text{-} (\frac{x}{L})(\frac{x}{L} + \frac{\Delta}{L}\sqrt{\frac{\frac{\Delta}{L}}{(1\text{-}\frac{\Delta}{L})}}))^n \qquad (4.18)$$

şeklinde bulunur.

$\frac{L^{2n+1}}{K_n}$,boyutsuz büyüklüğüne göre yazılmış (4.18) eğrilik denkleminde K_n, (4.8) denkleminde verildiği gibidir.

(3.9), (3.10) eşitliklerindeki boyutsuzlaştırma işlemi yapılarak, Şekil 4.1'den $x = \frac{1\text{-}\delta_h}{2}$ deki $y'(\frac{1\text{-}\delta_h}{2})$ ifadesi sıfırdır, şeklindeki sınır şartından integrasyon sabitinin de eldesiyle, (4.18) denklemi, (2.5) ve (2.6) eşitliklerinde kullanıldığında, G aşağıdaki gibidir:

$$G = \frac{\frac{L^{2n+1}}{K_n}\bar{x}(\text{-}\bar{x}(\bar{x}+(\text{-}1+\delta_h\sqrt{\frac{\delta_h}{(1\text{-}\delta_h)}})))^n(1+\frac{\bar{x}}{(\delta_h\sqrt{\frac{\delta_h}{(1\text{-}\delta_h)}}-1)})^{\text{-}n}}{(1+n)} \times {}_2F1[1+n,\text{-}n;2+n;\frac{\bar{x}}{(1\text{-}\delta_h\sqrt{\frac{\delta_h}{(1\text{-}\delta_h)}})}]$$

$$-\frac{2^{\text{-}1\text{-}n}\frac{L^{2n+1}}{K_n}(1\text{-}\delta_h)(\text{-}(1\text{-}\delta_h)(\text{-}1+\frac{(1\text{-}\delta_h)}{2}+\delta_h\sqrt{\frac{\delta_h}{(1\text{-}\delta_h)}}))^n(1+\frac{(1\text{-}\delta_h)}{2(\delta_h\sqrt{\frac{\delta_h}{(1\text{-}\delta_h)}}\text{-}1)})^{\text{-}n}}{(1+n)} \times$$

$${}_2F1[1+n,\text{-}n,2+n,\frac{(1\text{-}\delta_h)}{2(1\text{-}\delta_h\sqrt{\frac{\delta_h}{(1\text{-}\delta_h)}})}] \qquad (4.19)$$

Daha önceki kısımlarda da bahsedildiği gibi (4.19) denklemi, (2.11) yay uzunluğu ifadesinde yerine yazılır ve Simpson yöntemi ile integre edilir, elde edilen ifadenin Newton yöntemi ile kökü bulunarak δ_h , yatay yer değiştirme değerleri elde edilir. Bu işlem, L^{2n+1}/K_n boyutsuz oranının ve n'nin farklı değerlerine göre tekrarlanır. Hesaplanmış yer değiştirme değerleri Çizelge 4.1'de verilmektedir.

(27), (4.19) denkleminden y(0) = 0 sınır şartı da göz önüne alındığında Runge-Kutta yöntemi yardımıyla $y(\overline{x})$ enterpolasyon fonksiyonu elde edilebilir. Bu fonksiyonda $\overline{x} = \frac{1 - \delta_h}{2}$ değeri için $y\left(\frac{1 - \delta_h}{2}\right)$ değeri, kirişin orta noktasındaki çökmeyi δ_v / L şeklinde boyutsuz bir büyüklük olarak verir.

Çizelge 4.1'de üç farklı x_0 değeri için hesaplanmış boyutsuz yer değiştirme değerleri, L^{2n+1}/K_n ve n büyüklüklerine göre tablolaştırılmıştır.

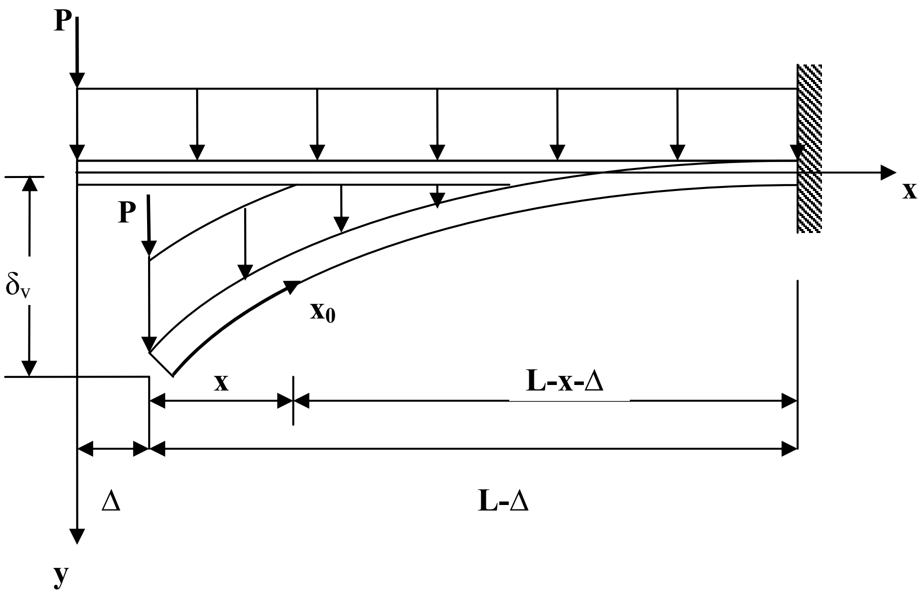
Çizelge 4.1 Ludwick tipi, doğrusal olmayan basit kirişlerdeki, büyük yer değiştirmeler.

x_0	n	δ	L^{2n+1}/Kn							
			10	20	30	40	50	60	66,67	70
$x_0 = x+\Delta$	1	δ_h	0,1015	0,2138	0,29	0,346	0,388	0,4213	0,44* - 0,44	0,4486
		δ_v / L	0,196	0,2748	0,3136	0,3376	0,3547	0,368	0,367*- 0,375	0,3784
	2	δ_h	0,00737	0,0251	0,0464	0,0676	0,0873	0,1052	0,1163	0,1215
		δ_v / L	0,0553	0,1016	0,1372	0,1646	0,186	0,2032	0,2129	0,2173
	3	δ_h	0,00039	0,0015	0,0034	0,00585	0,0088	0,0121	0,0145	0,0157
		δ_v / L	0,0129	0,0256	0,038	0,0498	0,061	0,0716	0,07835	0,0815
	4	δ_h	0,00002	0,00008	0,00018	0,00032	0,0005	0,00073	0,0009	0,00099
		δ_v / L	0,00299	0,0059	0,0089	0,0119	0,01489	0,0178	0,01978	0,0207
	5	δ_h	$1,1x10^{-6}$	$4,4x10^{-6}$	0,00001	0,00001	0,00002	0,00004	0,00004	0,00005
		δ_v / L	0,00069	0,00139	0,002	0,00279	0,00349	0,00418	0,0046	0,00488
	1/0,209**	δ_h	$2x10^{-6}$	$8,3x10^{-6}$	0,00001	0,00003	0,00005	0,00007	0,00009	0,0001
		δ_v / L	0,00095	0,0019	0,00286	0,0038	0,00476	0,00572	0,00635	0,00667
$x_0 = x+\Delta(x / L-\Delta)$	1	δ_h	0,119	0,2745	0,38278	0,4577	0,5124	0,55395	0,5765	0,58664
		δ_v / L	0,21114	0,306	0,35267	0,38174	0,39778	0,40255	0,40166	0,40044
	2	δ_h	0,00759	0,0275	0,054	0,0826	0,1107	0,13723	0,15385	0,1618
		δ_v / L	0,0561	0,1062	0,14775	0,18119	0,208	0,22985	0,24217	0,24777
	3	δ_h	0,00039	0,00156	0,0034	0,00605	0,00925	0,01297	0,01571	0,01715
		δ_v / L	0,01295	0,02579	0,038	0,05072	0,06264	0,0741	0,08149	0,085
	4	δ_h	0,00002	0,00008	0,00018	0,00032	0,00051	0,00073	0,00091	0,001
		δ_v / L	0,00299	0,00598	0,00896	0,01194	0,01492	0,0178	0,0198	0,02084
	5	δ_h	$1,1x10^{-6}$	$4,4x10^{-6}$	0,00001	0,00001	0,00002	0,00004	0,00004	0,00005
		δ_v / L	0,00069	0,00139	0,00209	0,00279	0,00349	0,00418	0,00465	0,00488
	1/0,209**	δ_h	$2,8x10^{-6}$	$8,3x10^{-6}$	0,00001	0,00003	0,00005	0,00007	0,00009	0,0001
		δ_v / L	0,00095	0,0019	0,00286	0,00381	0,00477	0,00572	0,00636	0,00667
$x_0 = x+\Delta(\Delta / L-\Delta)^{1/2}$	1	δ_h	0,13343	0,292	0,37268	0,4158	0,44313	0,46213	0,47194	0,47621
		δ_v / L	0,19681	0,20376	0,18927	0,18972	0,19773	0,21169	0,22473	0,23268
	2	δ_h	0,00785	0,0303	0,0625	0,09747	0,13055	0,16	0,17758	0,18573
		δ_v / L	0,05649	0,10728	0,14625	0,17151	0,18562	0,19227	0,19407	0,1944
	3	δ_h	0,00039	0,00157	0,00354	0,00629	0,00978	0,01398	0,01715	0,01883
		δ_v / L	0,01296	0,02586	0,03863	0,05118	0,0634	0,0752	0,0828	0,0865
	4	δ_h	0,00002	0,00008	0,00018	0,00033	0,00051	0,00074	0,00091	0,001
		δ_v / L	0,00299	0,00598	0,00897	0,01195	0,01494	0,01792	0,0199	0,02089
	5	δ_h	$1,1x10^{-6}$	$4,4x10^{-6}$	0,00001	0,00001	0,00002	0,00004	0,00004	0,00005
		δ_v / L	0,00069	0,00139	0,00209	0,00279	0,00349	0,00419	0,00465	0,00488
	1/0,209**	δ_h	$2,8x10^{-6}$	$8,3x10^{-6}$	0,00001	0,00003	0,00005	0,00007	0,00009	0,0001
		δ_v / L	0,00095	0,0019	0,00286	0,00381	0,00477	0,00572	0,00636	0,00668

* Demeter G.F., 1999, "Nonlinear Mechanics Second Edition", CRC Pres LLC,Boca Raton,Sayfa 92, Örnek 2.4.

**Ludwick tipi non-lineer N.P.8 alüminyum alaşım için üstel "n" sabiti. (Lewis, G., Monosa, F., 1982)

5. DİKDÖRTGEN KESİTLİ BİLEŞİK YÜKLÜ LUDWICK TİPİ DOĞRUSAL OLMAYAN KONSOL KİRİŞLERDEKİ BÜYÜK YERDEĞİŞTİRMELERİN FARKLI YAY UZUNLUKLARI KABULLERİ YAPILARAK BULUNMASI



Şekil 5.1 Bileşik yüklü konsol kiriş.

Bu bölümde, bir önceki bölümde yapılan uygulamalara benzer tarzda bir yaklaşımla, x_0 yay uzunluğu için yapılan yaklaşık kabullerle, serbest uç noktadaki yatay ve düşey yer değiştirmeler hesaplanmıştır.

Şekil 5.1'de w birim yayılı yüke bağlı olarak moment ifadesi;

$$M = \frac{wx}{2} x_0 + Px \tag{5.1}$$

(4.1) ve (4.2) denklemindeki x_0 kabulü yerine yazıldığında;

$$M = \frac{wx}{2}(x + \Delta) + Px \tag{5.2}$$

şeklinde elde edilir.

$$P = wL \tag{5.3}$$

olarak alınmıştır.

(2.2), (3.4), (5.2) ve (5.3) denklemleri kullanıldığında eğrilik ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\kappa = \frac{L^{n+1}}{K_n} \times \frac{1}{L}\left(\frac{x}{2L}\left(\frac{x}{L} + \frac{\Delta}{L} + 2\right)\right)^n \tag{5.4}$$

(5.4) denklemindeki eğrilik ifadesi, $\dfrac{L^{n+1}}{K_n}$ boyutsuz büyüklüğüne göre yazılmıştır. K_n, daha önceden de belirtildiği gibi malzemenin özelliklerine bağlı bir büyüklüktür ve (3.4) denklemi ile açıkça tanımlanmıştır.

(3.9), (3.10) eşitliklerindeki boyutsuzlaştırma işlemi yapılarak, (5.4) denklemi, (2.5) ve (2.6) eşitliklerinde kullanıldığında;

$$G = \frac{2^{-n}\dfrac{L^{n+1}}{K_n}\bar{x}(\bar{x}(\bar{x}+(2+\delta_h)))^n\left(1+\dfrac{\bar{x}}{2+\delta_h}\right)^{-n} {}_2F1\left[1+n,-n;2+n;-\dfrac{\bar{x}}{2+\delta_h}\right]}{(1+n)} + C_1 \tag{5.5}$$

bulunur.

Şekil 5.1'den $\bar{x} = 1-\delta_h$ daki $y'(1-\delta_h)$ değeri sıfırdır, şeklindeki sınır şartı kullanıldığında, C_1 integrasyon sabiti aşağıdaki gibi elde edilir:

$$C_1 = -\frac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n \dfrac{L^{n+1}}{K_n}(1-\delta_h)^{n+1}\left(1+\dfrac{1-\delta_h}{2+\delta_h}\right)^{-n} {}_2F1\left[1+n,-n;2+n;-\dfrac{1-\delta_h}{2+\delta_h}\right]}{(1+n)} \tag{5.6}$$

(5.5) ve (5.6) denklemleri kullanıldığında;

$$G = \frac{2^{-n}\dfrac{L^{n+1}}{K_n}\bar{x}(\bar{x}(\bar{x}+(2+\delta_h)))^n\left(1+\dfrac{\bar{x}}{2+\delta_h}\right)^{-n} {}_2F1\left[1+n,-n;2+n;-\dfrac{\bar{x}}{2+\delta_h}\right]}{(1+n)} +$$

$$-\frac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n \dfrac{L^{n+1}}{K_n}(1-\delta_h)^{n+1}\left(1+\dfrac{1-\delta_h}{2+\delta_h}\right)^{-n} {}_2F1\left[1+n,-n;2+n;-\dfrac{1-\delta_h}{2+\delta_h}\right]}{(1+n)} \tag{5.7}$$

şeklinde bulunur.

Daha önceki bölümlerde anlatıldığı gibi (5.7) denklemi, (2.11) yay uzunluğu ifadesinde yerine yazılır ve Simpson yöntemi ile integre edilir, elde edilen ifadenin Newton yöntemi ile kökü bulunarak δ_h , yatay yer değiştirme değerleri elde edilir. Bu işlem, L^{n+1}/K_n boyutsuz oranının ve n'nin farklı değerlerine göre tekrarlanır.

(2.7), (5.7) denkleminden $y(1-\delta_h)=0$ şeklinde yazılabilecek sınır şartı da göz önüne alındığında, Runge-Kutta yöntemi yardımıyla $y(\overline{x})$ enterpolasyon fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyonda $\overline{x}=0$ için $y(0)$ değeri, kirişin serbest uç noktasındaki çökmeyi δ_v / L şeklinde boyutsuz bir büyüklük olarak verir.

(4.1) eşitliğinde verilen x_0 için farklı bir yay uzunluğu kabulü ile yukarıdaki problemin çözümünde, (2.2), (3.4), (4.3), (5.1) ve (5.3) eşitlikleri kullanıldığında yeni eğrilik ifadesi;

$$\kappa = \frac{L^{n+1}}{K_n} \times \frac{1}{L}\left(\frac{x}{2L}\left(\frac{x}{L}+\frac{x}{L}\frac{\frac{\Delta}{L}}{(1-\frac{\Delta}{L})}+2\right)\right)^n \tag{5.8}$$

şeklinde yazılabilir.

$\frac{L^{n+1}}{K_n}$ boyutsuz büyüklüktür. K_n ise (3.4) denklemi ile gösterilmektedir.

(3.9), (3.10) eşitliklerindeki boyutsuzlaştırma işlemi yapılarak, (5.8) denklemi, (2.5) ve (2.6) denklemlerinde kullanıldığında, G aşağıdaki gibi bulunur:

$$G = \frac{2^{-n}\frac{L^{n+1}}{K_n}\overline{x}\left(-\frac{\overline{x}(\overline{x}-2(-1+\delta_h))}{(-1+\delta_h)}\right)^n\left(1+\frac{\overline{x}}{2-2\delta_h}\right)^{-n}}{(1+n)} \times {}_2F1[1+n,-n;2+n;-\frac{\overline{x}}{2\text{-}2\delta_h}]+C_1 \tag{5.9}$$

Şekil 5.1'den görüldüğü gibi $\overline{x}=1-\delta_h$ de $y'(1-\delta_h)=0$ şeklindeki sınır şartı kullanıldığında, C_1 integrasyon sabiti ;

$$C_1 = -\frac{2^{-n}\frac{L^{n+1}}{K_n}\left(1+\frac{1-\delta_h}{2-2\delta_h}\right)^{-n}(1-\delta_h)\left(-\frac{(1-\delta_h)(1-2(-1+\delta_h)-\delta_h)}{(-1+\delta_h)}\right)^n}{(1+n)} \times$$

$${}_2F1[1+n,-n;2+n;-\frac{(1\text{-}\delta_h)}{(2\text{-}2\delta_h)}] \tag{5.10}$$

olarak yazılır.

(5.9) ve (5.10) denklemleri düzenlendiğinde;

$$G=\frac{2^{-n}\dfrac{L^{n+1}}{K_n}\bar{x}\left(-\dfrac{\bar{x}(\bar{x}-2(-1+\delta_h))}{(-1+\delta_h)}\right)^{n}\left(1+\dfrac{\bar{x}}{2-2\delta_h}\right)^{-n}}{(1+n)}\times {}_2F1[1+n,-n;2+n;-\frac{\bar{x}}{2\text{-}2\delta_h}]+$$

$$-\frac{2^{-n}\dfrac{L^{n+1}}{K_n}\left(1+\dfrac{1-\delta_h}{2-2\delta_h}\right)^{-n}(1-\delta_h)\left(-\dfrac{(1-\delta_h)(1-2(-1+\delta_h)-\delta_h)}{(-1+\delta_h)}\right)^{n}}{(1+n)}\times$$

$${}_2F1[1+n,-n,2+n,-\frac{(1\text{-}\delta_h)}{(2\text{-}2\delta_h)}] \qquad (5.11)$$

şeklinde bulunur.

(5.11) denklemi, (2.11) yay uzunluğu ifadesinde yerine yazılır ve Simpson yöntemi ile integre edilir, elde edilen ifadenin Newton yöntemi ile kökü bulunarak δ_h , yatay yer değiştirme değerleri hesaplanır. Bu işlem, L^{n+1}/K_n boyutsuz oranının ve n'nin farklı değerlerine göre tekrarlanır.

(2.7) ve (5.11) denkleminden, $y(1-\delta_h)=0$ şeklinde yazılabilecek sınır şartı da kullanıldığında, Runge-Kutta yöntemiyle $y(\bar{x})$ enterpolasyon fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyonda $\bar{x}=0$ için $y(0)$ değeri, kirişin serbest uç noktasındaki çökmeyi δ_v / L şeklinde boyutsuz bir büyüklük olarak verir.

Çizelge 5.1'de, yukarıda anlatılmış olan iki farklı x_0 yay uzunluğu kabulü için hesaplanmış boyutsuz yatay ve düşey yer değiştirme değerleri, L^{n+1}/K_n ve n büyüklüklerine göre tablolaştırılmıştır. Ayrıca n = 2.16 olarak alınabilen (Lewis, G., Monosa, F., 1982), (2.1) denkleminde verildiği gibi gerilme – birim şekil değiştirme ilişkisi taşıyan Ludwick tipi doğrusal olmayan tavlanmış bakır malzeme için Şekil 5.1'deki gibi yüklenmiş konsol kirişteki yer değiştirmeler, Referanstaki (Lee, K., 2002) değerlerle karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

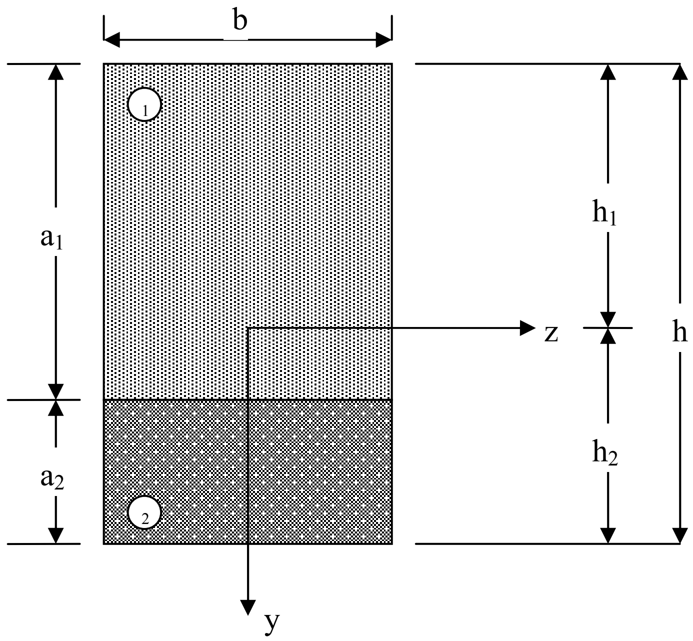
Çizelge 5.1 Bileşik yüklü Ludwick tipi doğrusal olmayan konsol kirişteki yer değiştirmeler.

x_0	n	δ	L^{n+1}/K_n												
			0,25	**0,5**	**0,75**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$x_0 = x+\Delta$	1	δ_h	0,007	0,028	0,059	0,094	0,235	0,341	0,418	0,475	0,519	0,554	0,583	0,607	0,627
		δ_v / L	0,113	0,218	0,31	0,388	0,587	0,684	0,738	0,772	0,797	0,817	0,835	0,851	0,86
	2	δ_h	0,008	0,029	0,057	0,087	0,191	0,266	0,32	0,362	0,396	0,423	0,447	0,467	0,484
		δ_v / L	0,12	0,226	0,314	0,384	0,552	0,637	0,687	0,721	0,746	0,765	0,779	0,792	0,802
	2,16*	δ_h	0,008	0,03	0,058	0,088	0,191	0,265	0,318	0,36	0,393	0,421	0,444	0,464	0,482
		δ_v / L	0,123	0,231	0,319	0,388	0,555	0,639	0,69	0,724	0,749	0,768	0,784	0,796	0,807
	2,16	δ_h	0,008	0,03	0,058	0,087	0,188	0,26	0,312	0,352	0,384	0,411	0,433	0,453	0,47
		δ_v / L	0,122	0,229	0,317	0,386	0,55	0,632	0,682	0,716	0,74	0,759	0,774	0,786	0,796
	3	δ_h	0,01	0,035	0,063	0,092	0,18	0,239	0,282	0,315	0,342	0,364	0,383	0,399	0,414
		δ_v / L	0,137	0,25	0,336	0,4	0,546	0,618	0,663	0,693	0,716	0,734	0,749	0,76	0,771
	4	δ_h	0,014	0,044	0,074	0,101	0,179	0,229	0,264	0,292	0,314	0,333	0,349	0,362	0,375
		δ_v / L	0,163	0,283	0,364	0,422	0,549	0,612	0,651	0,679	0,699	0,716	0,729	0,74	0,749
	5	δ_h	0,02	0,055	0,087	0,112	0,182	0,225	0,256	0,28	0,299	0,315	0,328	0,34	0,351
		δ_v / L	0,196	0,319	0,395	0,447	0,557	0,612	0,646	0,671	0,689	0,704	0,716	0,727	0,735
$x_0 = x+\Delta(x / L-\Delta)$	1	δ_h	0,007	0,028	0,058	0,093	0,229	0,332	0,406	0,462	0,505	0,54	0,569	0,593	0,613
		δ_v / L	0,113	0,217	0,309	0,386	0,581	0,678	0,733	0,768	0,793	0,812	0,827	0,842	0,855
	2	δ_h	0,008	0,029	0,056	0,085	0,186	0,258	0,311	0,352	0,385	0,412	0,435	0,454	0,472
		δ_v / L	0,12	0,226	0,312	0,381	0,547	0,631	0,681	0,716	0,741	0,76	0,775	0,788	0,798
	2,16*	δ_h	0,008	0,03	0,058	0,088	0,191	0,265	0,318	0,36	0,393	0,421	0,444	0,464	0,482
		δ_v / L	0,123	0,231	0,319	0,388	0,555	0,639	0,69	0,724	0,749	0,768	0,784	0,796	0,807
	2,16	δ_h	0,008	0,029	0,057	0,085	0,183	0,252	0,303	0,342	0,374	0,4	0,422	0,441	0,458
		δ_v / L	0,122	0,229	0,315	0,383	0,545	0,626	0,676	0,71	0,735	0,754	0,769	0,782	0,792
	3	δ_h	0,01	0,034	0,063	0,09	0,176	0,233	0,275	0,307	0,333	0,355	0,373	0,39	0,404
		δ_v / L	0,137	0,249	0,333	0,396	0,54	0,612	0,657	0,688	0,711	0,729	0,744	0,756	0,766
	4	δ_h	0,014	0,043	0,073	0,099	0,175	0,223	0,258	0,285	0,307	0,325	0,341	0,354	0,366
		δ_v / L	0,163	0,281	0,362	0,419	0,545	0,607	0,646	0,673	0,694	0,711	0,724	0,735	0,745
	5	δ_h	0,02	0,055	0,085	0,11	0,179	0,221	0,251	0,274	0,292	0,308	0,322	0,333	0,344
		δ_v / L	0,196	0,317	0,392	0,443	0,553	0,607	0,642	0,666	0,685	0,7	0,712	0,722	0,731

*Referans (Lee, K., 2002) yayındaki değerlerdir. x_0 için yapılan kabuller bu hesaplamalarda geçerli değildir.

6. DİKDÖRTGEN KESİTLİ SERBEST UÇ NOKTASINDAN TEKİL KUVVET ETKİYEN DOĞRUSAL VE ÇİFT MALZEMELİ KOMPOZİT KONSOL KİRİŞLERDEKİ BÜYÜK YERDEĞİŞTİRMELER

Bu kısımda; malzeme olarak doğrusal, geometrik olarak doğrusal olmayan çift malzemeli kompozit, Şekil 3.1' deki gibi bir konsol kirişte meydana gelen büyük yer değiştirmeler, hesaplanmıştır.



Şekil 6.1 İki farklı malzemeden oluşan kompozit kiriş kesiti

Yukarıda b parçaların genişliğini, a_1 bir numaralı parçanın yüksekliğini, a_2 iki numaralı parçanın yüksekliğini, h parçaların toplam yüksekliğini, h_1, h_2 tarafsız eksenin sırasıyla en üst ve en alt iplikçiklerden uzaklıklarını vermektedir.

Şekil 6.1 de kesiti verilen kompozit kiriş için aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\varepsilon = -\kappa y \text{, (Gere, J.M., Timoshenko, S.P., 1984)} \tag{6.1}$$

$$\int_1 \sigma_{x_1} dA + \int_2 \sigma_{x_2} dA = 0 \text{, (Gere, J.M., Timoshenko, S.P., 1984)} \tag{6.2}$$

$$\int_1 \sigma_{x_1} y dA + \int_2 \sigma_{x_2} y dA = M \text{, (Gere, J.M., Timoshenko, S.P., 1984)} \tag{6.3}$$

$$\sigma_{x_1} = -E_1 \kappa y \text{, (Gere, J.M., Timoshenko, S.P., 1984)} \tag{6.4}$$

$\sigma_{x_2} = -E_2 \kappa y$, (Gere, J.M., Timoshenko, S.P., 1984) (6.5)

Yukarıdaki eşitliklerde; κ, eğrilik, ε, birim şekil değiştirme, A, alan, σ_{x_1} ,1 numaralı malzeme için normal gerilme, σ_{x_2} , 2 numaralı malzeme için normal gerilme, E_1, 1 numaralı malzeme için elastiklik modülü, E_2, 2 numaralı malzeme için elastiklik modülü olarak tanımlanmaktadır.

(6.1)-(6.5) denklemleri kullanıldığında;

$$E_1 \int_{(h_2-a_2)}^{-h_1} y dy + E_2 \int_{h_2}^{(h_2-a_2)} y dy = 0 \tag{6.6}$$

eşitliği yazılabilir. (6.6) denklemi düzenlendiğinde;

$$\frac{1}{2} E_1 (h_1^2 - (a_2 - h_2)^2) + \frac{1}{2} a_2 E_2 (a_2 - 2h_2) = 0 \tag{6.7}$$

şeklinde bulunur.

Şekil 6.1'den

$$h = h_1 + h_2 \tag{6.8}$$

$$h_2 = a_1 + a_2 - h_1 \tag{6.9}$$

olduğu görülebilir.

(6.7)-(6.9) denklemleri kullanıldığında,

$$h_1 = \frac{a_1^2 E_1 + 2a_1 a_2 E_2 + a_2^2 E_2}{2(a_1 E_1 + a_2 E_2)} \tag{6.10}$$

$$h_2 = \frac{a_1 (a_1 + 2a_2) E_1 + a_2^2 E_2}{2(a_1 E_1 + a_2 E_2)} \tag{6.11}$$

şeklindedir.

Şekil 6.1'deki 1 ve 2 numaralı parçaların tarafsız eksene göre atalet momentleri;

$$I_1 = \frac{b a_1^3}{12} + b a_1 (h_1 - \frac{a_1}{2})^2 \tag{6.12}$$

$$I_2 = \frac{ba_2^{\ 3}}{12} + ba_2 (h_2 - \frac{a_2}{2})^2 \tag{6.13}$$

olarak bulunur.

(3.6) ve (6.3) denkleminden eğrilik ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d\psi}{dS} = \kappa = \frac{y''(x)}{(1+(y'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{PL(1-\frac{x}{L}-\frac{\Delta}{L})}{(E_1I_1+E_2I_2)} \tag{6.14}$$

(2.5)-(2.7) ve (6.14) denklemleri kullanıldığında, (2.6) denkleminde tanımlanan G aşağıdaki gibi yazılır:

$$G = \frac{PL^2(\frac{x}{L}-(\frac{x}{L})^2-\frac{x}{L}\frac{\Delta}{L})}{(E_1I_1+E_2I_2)} + C_1 \tag{6.15}$$

Şekil 3.1'deki sınır şartlarından x = 0 için $y'(0) = 0$ olacağından C_1 sabiti sıfır olacaktır. Buna göre ve (3.9), (3.10) denklemlerindeki boyutsuzlaştırma işlemleri yapıldığında,

$$G = \frac{PL^2(\bar{x}-(\bar{x})^2-\bar{x}\delta_h)}{(E_1I_1+E_2I_2)} \tag{6.16}$$

olarak bulunur. (6.12), (6.13) ve (6.16) denklemlerinden;

$$G = \frac{12(a_1E_1+a_2E_2)PL^2\bar{x}(1-\bar{x}-\delta_h)}{b(a_1^{\ 4}E_1^{\ 2}+2a_1a_2(2a_1^{\ 2}+3a_1a_2+2a_2^{\ 2})E_1E_2+a_2^{\ 4}E_2^{\ 2})} \tag{6.17}$$

elde edilir.

(6.17) denkleminden, K olarak adlandırılan boyutsuz bir büyüklük, aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$K = \frac{PL^2}{\dfrac{b(a_1^{\ 4}E_1^{\ 2}+2a_1a_2(2a_1^{\ 2}+3a_1a_2+2a_2^{\ 2})E_1E_2+a_2^{\ 4}E_2^{\ 2})}{12(a_1E_1+a_2E_2)}} \tag{6.18}$$

(6.17) ve (6.18) denklemlerinden;

$$G = K\bar{x}(1-\bar{x}-\delta_h) \tag{6.19}$$

şeklinde düzenlenebilir.

(6.19) denklemi, (2.11) yay uzunluğu ifadesinde yerine yazılarak, Simpson yöntemi ile integre edilir, elde edilen ifadenin Newton yöntemi ile kökü bulunarak δ_h , yatay yer değiştirme değerleri bulunur. Bu işlem, K boyutsuz oranının farklı değerleri için tekrarlanır.

(2.7) ve (6.19) denklemlerinden, y(0) = 0 sınır şartı da göz önüne alındığında, Runge-Kutta yöntemi yardımıyla $y(\bar{x})$ enterpolasyon fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyonda, $\bar{x} = 1 - \delta_h$ için $y\,(1 - \delta_h)$ değeri kirişin serbest uç noktasındaki çökmeyi δ_v / L şeklinde boyutsuz bir büyüklük olarak verir.

K boyutsuz büyüklüğünün farklı değerleri için hesaplanmış yatay ve düşey yer değiştirme değerleri Çizelge 6.1'de gösterilmektedir.

Çizelge 6.1 Serbest uç noktasından tekil kuvvet etkiyen doğrusal ve çift malzemeli kompozit kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler.

K	**δh (Δ / L)**	**δv / L**
0	0	0
0.25	0.0010	0.0415
0.50	0.0041	0.0827
0.75	0.0091	0.1230
1	0.0159	0.1621
2	0.0564	0.3017
3	0.1079	0.4109
4	0.1606	0.4934
5	0.2099	0.5555
6	0.2544	0.6030
7	0.2940	0.6398
8	0.3290	0.6688
9	0.3602	0.6919
10	0.3879	0.7103

7. SERBEST UÇ NOKTASINDAN MOMENT ETKİYEN DOĞRUSAL OLMAYAN ÇİFT MALZEMELİ KOMPOZİT KİRİŞLERDEKİ BÜYÜK YER DEĞİŞTİRMELERİN FARKLI GERİLME-ŞEKİL DEĞİŞTİRME BAĞINTILARI İÇİN BULUNMASI

7.1 Dikdörtgen Kesitli, Ludwick Tipi Doğrusal Olmayan Malzemeden Oluşan Kompozit Konsol Kirişlerdeki Büyük Yer Değiştirmeler.

Bu bölümde; iki malzemeli kompozit kirişlerdeki yer değiştirmeleri incelerken, malzemelerden biri doğrusal, diğeri Ludwick tipi doğrusal olmayan malzeme olarak alınmıştır. Bu şekilde üstel ifadelerin bir nebze olsun sadeleşmesi sağlanmaktadır. Kesiti Şekil 6.1'de verilmiş olan Şekil 2.2'deki gibi bir konsol kirişteki yer değiştirmelerin hesabında, gerilme-şekil değiştirme ilişkisi (2.1) denklemiyle verilen Ludwick tipi malzeme için (6.2) ve (6.3) denklemleriyle ifade edilebilen aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\int_1 B_1 \varepsilon^{\frac{1}{n_1}} dA + \int_2 B_2 \varepsilon^{\frac{1}{n_2}} dA = 0 \tag{7.1}$$

$$\int_1 B_1 \varepsilon^{\frac{1}{n_1}} y dA + \int_2 B_2 \varepsilon^{\frac{1}{n_2}} y dA = M \tag{7.2}$$

Daha önceki bölümlerde bahsedildiği gibi, n_1, n_2, B_1, B_2 ifadeleri Ludwick tipi doğrusal olmayan malzemeler için malzemeye bağlı katsayıları vermektedir.

(6.1) eşitliği, (7.1) ve (7.2) denklemlerinde yerine yazıldığında;

$$\int_1 B_1 (-\kappa)^{\frac{1}{n_1}} y^{\frac{1}{n_1}} b dy + \int_2 B_2 (-\kappa)^{\frac{1}{n_2}} y^{\frac{1}{n_2}} b dy = 0 \tag{7.3}$$

$$\int_1 B_1 (-\kappa)^{\frac{1}{n_1}} y^{\frac{1}{n_1}} y b dy + \int_2 B_2 (-\kappa)^{\frac{1}{n_2}} y^{\frac{1}{n_2}} y b dy = M \tag{7.4}$$

denklemleri elde edilir.

Şekil 6.1'den görülebilen integral sınırları yerine yazıldığında;

$$B_1 (-\kappa)^{\frac{1}{n_1}} b \int_{(h_2-a_2)}^{-h_1} y^{\frac{1}{n_1}} dy + B_2 (-\kappa)^{\frac{1}{n_2}} b \int_{h_2}^{(h_2-a_2)} y^{\frac{1}{n_2}} dy = 0 \tag{7.5}$$

$$B_1(-\kappa)^{\frac{1}{n_1}} b \int_{(h_2-a_2)}^{-h_1} y^{\frac{n_1+1}{n_1}} dy + B_2(-\kappa)^{\frac{1}{n_2}} b \int_{h_2}^{(h_2-a_2)} y^{\frac{n_2+1}{n_2}} dy = M \tag{7.6}$$

ifadeleri bulunur.

Son olarak, (7.5) ve (7.6) denklemlerindeki integrasyon işlemleri yapıldığında, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir;

$$B_1(-\kappa)^{\frac{1}{n_1}}\left(-\frac{((-1)^{\frac{1}{n_1}} h_1^{1+\frac{1}{n_1}} + (-a_2+h_2)^{1+\frac{1}{n_1}})n_1}{1+n_1}\right) + B_2(-\kappa)^{\frac{1}{n_2}}\left(\frac{(-h_2^{1+\frac{1}{n_2}} + (-a_2+h_2)^{1+\frac{1}{n_2}})n_2}{1+n_2}\right) = 0 \tag{7.7}$$

$$B_1 b(-\kappa)^{\frac{1}{n_1}}\left(-\frac{((-1)^{\frac{1}{n_1}} h_1^{2+\frac{1}{n_1}} - (-a_2+h_2)^{2+\frac{1}{n_1}})n_1}{1+2n_1}\right) + B_2 b(-\kappa)^{\frac{1}{n_2}}\left(\frac{(-h_2^{2+\frac{1}{n_2}} + (-a_2+h_2)^{2+\frac{1}{n_2}})n_2}{1+2n_2}\right) = M \tag{7.8}$$

(6.9), (7.7) ve (7.8) denklemlerinden malzemenin özelliklerine bağlı olarak eğrilik κ, ve h_1, h_2 değerleri hesaplanır.

Eğrilik elde edildikten sonra daha önceden bahsedildiği gibi (2.2), (2.5), (2.6) ve (2.7) denklemleriyle G ifadesi bulunur. Şekil 2.2'den görülebilen x = 0'da $y'(0) = 0$ sınır şartı kullanıldığında (2.6) denklemindeki C_1 integrasyon sabiti sıfır olacaktır. G ifadesi aşağıdaki gibi alınır:

$$G = \kappa x \tag{7.9}$$

(7.9) denklemi (2.11) yay uzunluğu eşitliğinde yerine yazılıp, Simpson yöntemiyle integre edilir, çıkan ifadenin Newton yöntemi yoluyla kökü bulunarak yatay yer değiştirme Δ, elde edilir.

Yatay yer değiştirmeler bulunduktan sonra (2.7), (7.9) denkleminden $y(0) = 0$ şeklinde yazılabilecek sınır şartı da kullanıldığında, Runge-Kutta yöntemiyle $y(x)$ enterpolasyon fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyonda $x = L - \Delta$ için $y(L\text{-}\Delta)$ değeri, kirişin serbest uç noktasındaki çökmeyi δ_v olarak verir.

Şekil 6.1'de kesiti verilen kompozit kiriş için $n_1 = 1$, $n_2 = kn_1$, $B_1 = tB_2$, $a_1 = 2\text{cm}$, $a_2 = 1\text{cm}$,

$b = 2$ cm, $L = 100$ cm, $a_1 + a_2 = h_1 + h_2$, $B_2 = 0{,}5$ GPa olarak alınan verilerle hesaplanan yatay ve düşey yer değiştirme değerleri Çizelge 7.1'de gösterilmektedir.

Çizelge 7.1 Serbest uç noktasından moment etkiyen Ludwick tipi doğrusal olmayan malzemeden yapılmış kompozit konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler.

		M (Ncm)							
		1000		**2000**		**5000**		**10000**	
k	**t**	**Δ (cm)**	**δv (cm)**	**Δ (cm)**	**δv (cm)**	**Δ (cm)**	**δv (cm)**	**Δ (cm)**	**δv (cm)**
1/4	50	0.01499	1,49989	0.05998	2.9991	0.37457	7.48595	1.49326	14.8878
	100	0.00374	0.74998	0.01499	1.49989	0.09372	3.74824	0.37457	7.48595
	150	0.00166	0.49999	0.00666	0.99996	0.04166	2.49948	0.16658	4.99583
	200	0.00093	0.37499	0.00374	0.74998	0.02343	1.87478	0.09372	3.74824
1/2	50	0.015	1.49994	0.05999	2.9993	0.3747	7.48721	1.49427	14.8928
	100	0.00375	0.74999	0.01499	1.49991	0.09373	3.7484	0.37464	7.48658
	150	0.00166	0.49999	0.00666	0.99997	0.04166	2.49953	0.16659	4.99602
	200	0.00093	0.37499	0.00374	0.74998	0.02343	1.8748	0.09372	3.74832
1	50	0.01311	1.40265	0.05246	2.80475	0.32762	7.00223	1.30664	13.9357
	100	0.0035	0.72474	0.014	1.44941	0.08752	3.62219	0.34981	7.23487
	150	0.00159	0.48863	0.00636	0.97723	0.03978	2.44269	0.1591	4.88246
	200	0.0009	0.36856	0.00362	0.73711	0.02263	1.84262	0.09053	3.68399

7.2 Dikdörtgen Kesitli, Kübik Gerilme-Şekil Değiştirme Bağıntısına Sahip Malzemeden Oluşan Kompozit Konsol Kirişlerdeki Büyük Yer Değiştirmeler

Gerilme-şekil değiştirme ilişkisi (2.94) denklemindeki gibi kübik olarak alınan, doğrusal olmayan malzemeden oluşan kompozit kirişlerdeki yer değiştirmeleri hesaplamak için gerekli olan gerilmeler, kesiti Şekil 6.1'de verilen 1 ve 2 numaralı parçalar için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\sigma_1 = E_1\varepsilon(1-\alpha_1\varepsilon^2) \tag{7.10}$$

$$\sigma_2 = E_2\varepsilon(1-\alpha_2\varepsilon^2) \tag{7.11}$$

Burada E_1, E_2 elastiklik modülü, α_1, α_2 ise malzemenin doğrusal olmama derecesini gösteren boyutsuz bir parametredir.

$$E_2 = tE_1 \tag{7.12}$$

olarak alınıp, (2.95) , (6.2) , (6.3) ,(6.8), (6.9), (7.10) ve (7.11) denklemleri kullanıldığında aşağıdaki ifadeler elde edilebilir:

$$\frac{1}{4}a_1bE_2(a_1-2h_1)t\kappa(-2+(a_1^2-2a_1h_1+2h_1^2)\alpha_1\kappa^2)+$$

$$+\frac{1}{4}bE_2\kappa(-4a_1a_2-2a_2^2+4a_2h_1-((a_1-h_1)^4-(a_1+a_2-h_1)^4)\alpha_2\kappa^2) = 0 \tag{7.13}$$

$$\frac{1}{3}bE_2t\kappa(-a_1^3+3a_1^2h_1-3a_1h_1^2-3(-\frac{1}{5}(a_1-h_1)^5-\frac{h_1^5}{5})\alpha_1\kappa^2)+$$

$$+\frac{1}{15}bE_2\kappa(5((a_1-h_1)^3-(a_1+a_2-h_1)^3)-3((a_1-h_1)^5-(a_1+a_2-h_1)^5)\alpha_2\kappa^2) = M \tag{7.14}$$

(6.9), (7.13) ve (7.14) denklemlerinden malzemenin özelliklerine bağlı olarak eğrilik κ, ve h_1, h_2 değerleri bulunur.

Eğrilik değerinden faydalanılarak, (2.2), (2.5), (2.6) ve (2.7) denklemleriyle G ifadesi bulunur. Şekil 2.2'den görülebilen x = 0'da $y'(0) = 0$ sınır şartı kullanıldığında (2.6) denklemindeki C_1 integrasyon sabiti sıfır olacaktır. G ifadesi (7.9) denklemindeki gibi yazılabilir. (7.13) ve (7.14) denklemlerinden elde edilen κ, (7.9) denklemi (2.11) yay uzunluğu eşitliğinde yerine yazılarak Simpson yöntemiyle integre edilir, çıkan ifadenin Newton yöntemi yoluyla kökü bulunarak yatay yer değiştirme Δ, elde edilir.

Yatay yer değiştirmeler bulunduktan sonra (2.7), (7.9) denkleminden $y(0) = 0$ şeklinde yazılabilecek sınır şartı da kullanıldığında, Runge-Kutta yöntemiyle $y(x)$ enterpolasyon fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyonda $x = L - \Delta$ için $y(L\text{-}\Delta)$ değeri, kirişin serbest uç noktasındaki çökmeyi δ_v olarak verir.

Şekil 6.1'de kesiti verilen kompozit kiriş için, $E_2 = tE_1$, $a_1 = 2\mathrm{cm}$, $a_2 = 1\mathrm{cm}$, $b = 2$ cm, L = 100 cm, $a_1 + a_2 = h_1 + h_2$, $E_1 = 70$ GPa olarak alınan verilerle hesaplanan yatay ve düşey yer değiştirme değerleri Çizelge 7.2'de gösterilmektedir.

Çizelge 7.2 Serbest uç noktasından moment etkiyen kübik gerilme-şekil değiştirme bağıntısına sahip malzemeden oluşan kompozit konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler.

			M (Ncm)							
			1000		2000		5000		10000	
α_1	α_2	t	Δ (cm)	δv (cm)	Δ (cm)	δv (cm)	Δ (cm)	δv (cm)	Δ (cm)	δv (cm)
0	0	1/5	0.02877	2.07726	0.11506	4.15273	0.71782	10.3505	2.85279	20.4784
		1	0.00016	0.15873	0.00067	0.31745	0.00419	0.79363	0.01679	1.58717
		5	$1.14x10^{-6}$	0.01307	$4.56x10^{-6}$	0.02615	0.00002	0.06538	0.00011	0.13077
0,25	0,25	1/5	0.02877	2.07726	0.11506	4.15274	0.71783	10.3505	2.85284	20.4786
		1	0.00016	0.15873	0.00067	0.31745	0.00419	0.79363	0.01679	1.58717
		5	$1.14x10^{-6}$	0.01307	$4.56x10^{-6}$	0.02615	0.00002	0.06538	0.00011	0.13077
0	40	1/5	0.02877	2.07727	0.11506	4.15275	0.71786	10.3508	2.85342	20.4806
		1	0.00016	0.15873	0.00067	0.31745	0.00419	0.79363	0.01679	1.58717
		5	$1.14x10^{-6}$	0.01307	$4.56x10^{-6}$	0.02615	0.00002	0.06538	0.00011	0.13077
40	200	1/5	0.02877	2.0773	0.11507	4.15303	0.71846	10.3551	2.86292	20.514
		1	0.00016	0.15873	0.00067	0.31745	0.00419	0.79363	0.01679	1.58719
		5	$1.14x10^{-6}$	0.01307	$4.56x10^{-6}$	0.02615	0.00002	0.06538	0.00011	0.13077
1000	500	1/5	0.02879	2.07793	0.1151	4.15347	0.72968	10.4352	3.06156	21.1987
		1	0.00016	0.15873	0.00067	0.31746	0.00419	0.79365	0.01679	1.58733
		5	$1.14x10^{-6}$	0.01307	$4.56x10^{-6}$	0.02615	0.00002	0.06538	0.00011	0.13077

7.3 Dikdörtgen Kesitli, Logaritmik Gerilme-Şekil Değiştirme Bağıntısına Sahip Malzemeden Oluşan Kompozit Konsol Kirişlerdeki Büyük Yer Değiştirmeler

Logaritmik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip malzemelerde, gerilme-şekil değiştirme bağıntısı (2.101) eşitliğindeki gibi alınır.

Şekil 6.1'de verilen 1 ve 2 numaralı parçalar için logaritmik gerilmeler, aşağıdaki gibidir:

$$\sigma_1 = E_1 Ln[1+k_1\varepsilon] \tag{7.15}$$

$$\sigma_2 = E_2 Ln[1+k_2\varepsilon] \tag{7.16}$$

E_1, E_2 elastiklik modülü, k_1, k_2 ise malzemenin doğrusal olmama derecesini gösteren boyutsuz parametrelerdir.

(2.95) , (6.2) , (6.3) ,(6.8), (6.9), (7.12) , (7.15), (7.16) denklemleri kullanıldığında aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$-bE_2 t(-a_1+h_1+(a_1-h_1)Ln[1+(a_1-h_1)k_1\kappa]+\frac{Ln[1+(a_1-h_1)k_1\kappa]}{k_1\kappa})+$$

$$+ bE_2 t(h_1-h_1 Ln[1-h_1k_1\kappa]+\frac{Ln[1-h_1k_1\kappa]}{k_1\kappa}) +$$

$$+bE_2(-a_1+h_1+(a_1-h_1)Ln[1+(a_1-h_1)k_2\kappa]+\frac{Ln[1+(a_1-h_1)k_2\kappa]}{k_2\kappa}+$$

$$-bE_2(-a_1-a_2+h_1+(a_1+a_2-h_1)Ln[1+(a_1+a_2-h_1)k_2\kappa]+\frac{Ln[1+(a_1+a_2-h_1)k_2\kappa]}{k_2\kappa}) = 0 \tag{7.17}$$

$$-bE_2 t(-\frac{1}{4}(a_1-h_1)^2+\frac{a_1-h_1}{2k_1\kappa}+\frac{1}{2}(a_1-h_1)^2 Ln[1+(a_1-h_1)k_1\kappa]-\frac{Ln[1+(a_1-h_1)k_1\kappa]}{2k_1^2\kappa^2})+$$

$$+bE_2 t(-\frac{h_1}{4}^2-\frac{h_1}{2k_1\kappa}+\frac{1}{2}h_1^2 Ln[1-h_1k_1\kappa]-\frac{Ln[1-h_1k_1\kappa]}{2k_1^2\kappa^2})+$$

$$+bE_2(-\frac{1}{4}(a_1-h_1)^2+\frac{a_1-h_1}{2k_2\kappa}+\frac{1}{2}(a_1-h_1)^2 Ln[1+(a_1-h_1)k_2\kappa]-\frac{Ln[1+(a_1-h_1)k_2\kappa]}{2k_2^2\kappa^2})+$$

$$-bE_2(-\frac{1}{4}(a_1+a_2-h_1)^2+\frac{a_1+a_2-h_1}{2k_2\kappa}+\frac{1}{2}(a_1+a_2-h_1)^2 Ln[1+(a_1+a_2-h_1)k_2\kappa]-$$

$$+\frac{Ln[1+(a_1+a_2-h_1)k_2\kappa]}{2k_2^2\kappa^2}) = M \tag{7.18}$$

(6.9), (7.17) ve (7.18) denklemlerinden, malzemenin özelliklerine bağlı olarak eğrilik κ, ve h_1, h_2 değerleri hesaplanır.

Eğrilik değerinden faydalanılarak, (2.2), (2.5), (2.6) ve (2.7) denklemleriyle G ifadesi bulunur.

Şekil 2.2'den görülebilen x = 0'da $y'(0) = 0$ sınır şartı kullanıldığında (2.6) denklemindeki C_1 integrasyon sabiti sıfır olacaktır. G ifadesi (7.9) denklemindeki gibi yazılabilir. (7.17) ve (7.18) denklemlerinden elde edilen κ, (7.9) denklemi (2.11) yay uzunluğu eşitliğinde yerine yazılarak Simpson yöntemiyle integre edilir, çıkan ifadenin Newton yöntemi yoluyla kökü bulunarak yatay yer değiştirme Δ, hesaplanır.

Yatay yer değiştirmeler bulunduktan sonra, (2.7), (7.9) denkleminden x = 0'da $y(0) = 0$ şeklinde yazılabilecek sınır şartı da kullanıldığında, Runge-Kutta yöntemiyle $y(x)$ enterpolasyon fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyonda $x = L - \Delta$ için $y(L-\Delta)$ değeri, kirişin serbest uç noktasındaki çökmeyi δ_v olarak verir.

Şekil 6.1'de kesiti verilen kompozit kiriş için, $E_2 = tE_1$, $a_1 = 2\text{cm}$, $a_2 = 1\text{cm}$, $b = 2\text{ cm}$, L = 100 cm, $a_1 + a_2 = h_1 + h_2$, $E_1 = 70\text{ GPa}$ olarak alınan verilerle k, t ve momentin farklı değerleri için hesaplanan yatay ve düşey yer değiştirme değerleri Çizelge 7.3'de gösterilmektedir.

Çizelge 7.3 Serbest uç noktasından moment etkiyen logaritmik gerilme-şekil değiştirme bağıntısına sahip kompozit konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler.

			M (Ncm)							
			1000		**2000**		**5000**		**10000**	
k_1	**k_2**	**t**	**Δ (cm)**	**δv (cm)**	**Δ (cm)**	**δv (cm)**	**Δ (cm)**	**δv (cm)**	**Δ (cm)**	**δv (cm)**
0,25	**0,25**	**1/5**	0,45992	8,2926	1,83276	16,4738	11,13984	39,2432	40,16115	54,9108
		1/2	0,02289	1,8531	0,09157	3,70499	0,57155	9,24069	2,27486	18,3246
		1	0,00268	0,63491	0,01074	1,26977	0,06717	3,17354	0,26853	6,34068
0,5	**0,5**	**1/5**	0,1151	4,15347	0,46009	8,29407	2,85782	20,4961	11,15895	39,274
		1/2	0,00572	0,92663	0,02289	1,85313	0,14307	4,63028	0,57165	9,24147
		1	0,00067	0,31745	0,00268	0,63491	0,01679	1,58717	0,06717	3,17354
0,25	**0,75**	**1/5**	0,24522	6,05972	0,97898	12,0764	6,02948	29,4308	22,9191	53,4316
		1/2	0,01055	1,25815	0,04221	2,51594	0,26367	6,2832	1,05238	12,5178
		1	0,00104	0,39499	0,00416	0,78997	0,026	1,97473	0,10398	3,94791
0,75	**0,25**	**1/5**	0,11623	4,17393	0,46463	8,33474	2,88573	20,5939	11,26466	39,4435
		1/2	0,00708	1,03113	0,02835	2,06209	0,17715	5,15169	0,70762	10,277
		1	0,00084	0,35608	0,00338	0,71215	0,02113	1,78026	0,08451	3,55945

7.4 Dikdörtgen Kesitli, Ludwick Tipi Ve Kübik Gerilme-Şekil Değiştirme Bağıntısına Sahip Malzemeden Oluşan Kompozit Konsol Kirişlerdeki Büyük Yerdeğiştirmeler

Bu kısımda, çift malzemeli kompozit kirişleri oluşturan malzemelerden bir tanesindeki gerilme-şekil değiştirme bağıntısı, Ludwick tipi diğerindeki ise kübik olarak alınacaktır.

Şekil 6.1'de kesiti gösterilen Şekil 2.2'deki konsol kirişte 1 numaralı parçadaki gerilme-şekil değiştirme bağıntısı Ludwick tipi, 2 numaralı parçadaki gerilme-şekil değiştirme bağıntısı kübik olarak alındığında ve 1 numaralı parça için (2.1) denklemi, 2 numaralı parça için (2.94) denklemi kullanıldığında;

$$\sigma_1 = B_1\varepsilon^{\frac{1}{n}} \tag{7.19}$$

$$\sigma_2 = E_2\varepsilon(1-\alpha\varepsilon^2) \tag{7.20}$$

eşitlikleri yazılabilir.

σ_1 ve σ_2, sırasıyla 1 ve 2 numaralı parçalara ait gerilmeler, B_1 ve n, 1 numaralı parçaya ait Ludwick tipi doğrusal olmayan malzemeler için sabit katsayılar, E_2, 2 numaralı parça için elastiklik modülü, α, 2 numaralı parça için malzemenin doğrusal olmama derecesini gösteren boyutsuz bir parametredir.

(2.95) , (6.2) , (6.3) ,(6.8), (6.9), (7.19), (7.20) denklemleri kullanıldığında aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$-\frac{bB_1h_1(-h_1\kappa)^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}-\frac{bB_1(a_1-h_1)((a_1-h_1)\kappa)^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}+$$

$$+\frac{1}{4}bE_2\kappa(-4a_1a_2-2a_2{}^2+4a_2h_1-((a_1-h_1)^4-(a_1+a_2-h_1)^4)\alpha\kappa^2)=0 \tag{7.21}$$

$$\frac{bB_1h_1{}^2(-h_1\kappa)^{\frac{1}{n}}}{2+\frac{1}{n}}-\frac{bB_1(a_1-h_1)^2((a_1-h_1)\kappa)^{\frac{1}{n}}}{2+\frac{1}{n}}+$$

$$+\frac{1}{15}bE_2\kappa(5((a_1-h_1)^3-(a_1+a_2-h_1)^3)-3((a_1-h_1)^5-(a_1+a_2-h_1)^5)\alpha\kappa^2)=M \tag{7.22}$$

(6.9), (7.21) ve (7.22) denklemlerinden malzemenin özelliklerine bağlı olarak eğrilik κ, ve h_1, h_2 değerleri hesaplanır.

Önceki kısımlarda anlatıldığı gibi, elde edilen eğrilik değerinden (7.9) denklemindeki G ifadesi kullanılarak Simpson ve Newton yöntemi yardımıyla Δ, yatay yer değiştirmeler, Runge-Kutta yöntemi ile y(x) enterpolasyon fonksiyonu elde edilerek ve y(L-Δ) değeri bulunarak serbest uç noktadaki δ_v , düşey yer değiştirmeler hesaplanır.

Şekil 6.1'de kesiti verilen kompozit kiriş için, n =1/2, a_1= 2cm, a_2= 1cm, b = 2 cm, L = 100 cm, $a_1+a_2=h_1+h_2$, B_1 = 0,5 GPa, E_2 = 70 GPa, α = 100 olarak alınan verilerle momentin farklı değerleri için hesaplanan yatay ve düşey yer değiştirme değerleri Çizelge

7.4'de gösterilmektedir.

Şekil 6.1'de kesiti gösterilen parçalar, gerilme-şekil değiştirme bağıntısı açısından yer değiştirirse, yani yukarıda bahsedilenin tersi düşünülerek 1 numaralı parçadaki gerilme-şekil değiştirme bağıntısı kübik, 2 numaralı parçadaki gerilme-şekil değiştirme bağıntısı Ludwick tipi olarak alındığında ve 1 numaralı parça için (2.94) denklemi, 2 numaralı parça için (2.1) denklemi kullanıldığında;

$$\sigma_1 = E_1\varepsilon(1-\alpha\varepsilon^2) \tag{7.23}$$

$$\sigma_2 = B_2\varepsilon^{\frac{1}{n}} \tag{7.24}$$

yazılabilir.

(2.95) , (6.2) , (6.3) ,(6.8), (6.9), (7.23), (7.24) denklemleri kullanıldığında aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\frac{1}{4}a_1bE_1(a_1-2h_1)\kappa(-2+(a_1{}^2-2a_1h_1+2h_1{}^2)\alpha\kappa^2)+$$

$$+\frac{bB_2(a_1-h_1)((a_1-h_1)\kappa)^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}-\frac{bB_2(a_1+a_2-h_1)((a_1+a_2-h_1)\kappa)^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}=0 \tag{7.25}$$

$$\frac{1}{3}bE_1\kappa(-a_1{}^3+3a_1{}^2h_1-3a_1h_1{}^2-3(-\frac{1}{5}(a_1-h_1)^5-\frac{h_1{}^5}{5})\alpha\kappa^2)+$$

$$+\frac{bB_2(a_1-h_1)^2((a_1-h_1)\kappa)^{\frac{1}{n}}}{2+\frac{1}{n}}-\frac{bB_2(a_1+a_2-h_1)^2((a_1+a_2-h_1)\kappa)^{\frac{1}{n}}}{2+\frac{1}{n}}=M \tag{7.26}$$

(6.9), (7.25) ve (7.26) denklemlerinden malzemenin özelliklerine bağlı olarak eğrilik κ, ve h_1, h_2 değerleri hesaplanır.

Yatay ve düşey yer değiştirmelerin hesabında yukarıda belirtilen Simpson, Newton, ve Runge- Kutta yöntemleri kullanılır.

Şekil 6.1'de kesiti verilen kompozit kiriş için, n =1/2, $a_1 = 2\text{cm}$, $a_2 = 1\text{cm}$, $b = 2$ cm, L = 100 cm, $a_1 + a_2 = h_1 + h_2$, $E_1 = E_2 = 70$ GPa , $B_1 = B_2 = 0,5$ GPa , α = 100 olarak alınan verilerle, momentin farklı değerleri için hesaplanan yatay ve düşey yer değiştirme değerleri

Çizelge 7.4'de gösterilmektedir.

Çizelge 7.4 Serbest uç noktasından moment etkiyen kübik ve Ludwick tipi doğrusal olmayan malzemeden oluşan kompozit konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler.

GERİLMELER	M (Ncm)							
	1000		2000		5000		10000	
	Δ (cm)	δv (cm)	Δ (cm)	δv (cm)	Δ (cm)	δv (cm)	Δ (cm)	δv (cm)
$\sigma_1=B_1\varepsilon^{1/n}$ $\sigma_2=E_2\varepsilon(1-\alpha\varepsilon^2)$	0,12223	4,28008	0,48772	8,53868	3,01354	21,0354	11,66903	40,0825
$\sigma_1=E_1\varepsilon(1-\alpha\varepsilon^2)$ $\sigma_2=B_2\varepsilon^{1/n}$	0,00191	0,53571	0,00765	1,0714	0,04782	2,67803	0,19125	5,35262

7.5 Dikdörtgen Kesitli, Kübik Ve Logaritmik Gerilme-Şekil Değiştirme Bağıntısına Sahip Malzemeden Oluşan Kompozit Konsol Kirişlerdeki Büyük Yerdeğiştirmeler

Bu kısımda, çift malzemeli kompozit kirişleri oluşturan malzemelerden bir tanesindeki gerilme-şekil değiştirme bağıntısı kübik, diğerindeki ise logaritmik olarak alınacaktır.

Şekil 6.1'de kesiti gösterilen Şekil 2.2'deki konsol kirişte, 1 numaralı parçadaki gerilme-şekil değiştirme bağıntısı kübik, 2 numaralı parçadaki gerilme-şekil değiştirme bağıntısı logaritmik olarak alındığında ve 1 numaralı parça için (2.94) denklemi, 2 numaralı parça için (2.101) denklemi kullanıldığında;

$$\sigma_1 = E_1\varepsilon(1-\alpha\varepsilon^2) \tag{7.27}$$

$$\sigma_2 = E_2 Ln[1+k\varepsilon] \tag{7.28}$$

denklemleri elde edilir. E_1, E_2 sırasıyla 1 ve 2 numaralı parçaların elastiklik modülüdür.

(2.95) , (6.2) , (6.3) ,(6.8), (6.9), (7.27), (7.28) denklemleri kullanıldığında aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\frac{1}{4}a_1bE_1(a_1-2h_1)\kappa(-2+(a_1{}^2-2a_1h_1+2h_1{}^2)\alpha\kappa^2)+$$

$$+(bE_2(-a_1+h_1+(a_1-h_1)Ln[1+(a_1-h_1)k\kappa]+\frac{Ln[1+(a_1-h_1)k\kappa]}{k\kappa})-$$

$$+(bE_2(-a_1-a_2+h_1+(a_1+a_2-h_1)Ln[1+(a_1+a_2-h_1)k\kappa]+\frac{Ln[1+(a_1+a_2-h_1)k\kappa]}{k\kappa}))=0$$

$$\tag{7.29}$$

$$\frac{1}{3}bE_1\kappa(-a_1^{\ 3}+3a_1^{\ 2}h_1-3a_1h_1^{\ 2}-3(-\frac{1}{5}(a_1-h_1)^5-\frac{h_1^{\ 5}}{5})\alpha\kappa^2)+$$

$$+(bE_2(-\frac{1}{4}(a_1-h_1)^2+\frac{a_1-h_1}{2k\kappa}+\frac{1}{2}(a_1-h_1)^2Ln[1+(a_1-h_1)k\kappa]-\frac{Ln[1+(a_1-h_1)k\kappa]}{2k^2\kappa^2}))-$$

$$+(bE_2(-\frac{1}{4}(a_1+a_2-h_1)^2+\frac{a_1+a_2-h_1}{2k\kappa}+\frac{1}{2}(a_1+a_2-h_1)^2Ln[1+(a_1+a_2-h_1)k\kappa]-$$

$$+\frac{Ln[1+(a_1+a_2-h_1)k\kappa]}{2k^2\kappa^2}))=M \tag{7.30}$$

(6.9), (7.29) ve (7.30) denklemlerinden malzemenin özelliklerine bağlı olarak eğrilik κ, ve h_1, h_2 değerleri hesaplanır.

Önceki bölümlerde belirtildiği gibi, elde edilen eğrilik değerinden, (7.9) denklemindeki G ifadesi kullanılarak, Simpson ve Newton metotları yardımıyla Δ, yatay yer değiştirmeler, Runge-Kutta yöntemi ile y(x) enterpolasyon fonksiyonu elde edilip, y(L-Δ) değeri bulunarak serbest uç noktadaki δ_v ,düşey yer değiştirmeler hesaplanır.

Şekil 6.1'de kesiti verilen kompozit kiriş için, $E_2=tE_1$, $a_1=2cm$, $a_2=1cm$, $b=2$ cm, L = 100 cm, $a_1+a_2=h_1+h_2$, $E_1=70$ GPa, k = 0.5, α =100 olarak alınan verilerle t ve momentin farklı değerleri için hesaplanan yatay ve düşey yer değiştirme değerleri, Çizelge 7.5'de gösterilmektedir.

Parçalar gerilme-şekil değiştirme bağıntısı açısından yer değiştirirse, yani yukarıda bahsedilenlerin tersi düşünülerek 1 numaralı parçadaki gerilme-şekil değiştirme bağıntısı logaritmik, 2 numaralı parçadaki gerilme-şekil değiştirme bağıntısı kübik olarak alındığında ve 1 numaralı parça için (2.101) denklemi, 2 numaralı parça için (2.94) denklemi kullanıldığında;

$$\sigma_1=E_1Ln[1+k\varepsilon] \tag{7.31}$$

$$\sigma_2 = E_2\varepsilon(1-\alpha\varepsilon^2) \tag{7.32}$$

eşitlikleri yazılabilir.

(2.95) , (6.2) , (6.3) ,(6.8), (6.9), (7.31), (7.32) denklemleri kullanıldığında aşağıdaki ifadeler elde edilebilir:

$$bE_1(h_1 - h_1 Ln[1-h_1 k\kappa] + \frac{Ln[1-h_1 k\kappa]}{k\kappa}) -$$

$$+ bE_1(-a_1 + h_1 + (a_1 - h_1)Ln[1+(a_1-h_1)k\kappa] + \frac{Ln[1+(a_1-h_1)k\kappa]}{k\kappa}) +$$

$$+\frac{1}{4}bE_2\kappa(-4a_1a_2 - 2a_2^{\,2} + 4a_2h_1 - ((a_1-h_1)^4 - (a_1+a_2-h_1)^4)\alpha\kappa^2) = 0 \tag{7.33}$$

$$bE_1(-\frac{h_1^{\,2}}{4} - \frac{h_1}{2k\kappa} + \frac{1}{2}h_1^{\,2}Ln[1-h_1k\kappa] - \frac{Ln[1-h_1k\kappa]}{2k^2\kappa^2}) -$$

$$+ bE_1(-\frac{1}{4}(a_1-h_1)^2 + \frac{a_1-h_1}{2k\kappa} + \frac{1}{2}(a_1-h_1)^2 Ln[1+(a_1-h_1)k\kappa] - \frac{Ln[1+(a_1-h_1)k\kappa]}{2k^2\kappa^2}) +$$

$$+\frac{1}{15}bE_2\kappa(5((a_1-h_1)^3 - (a_1+a_2-h_1)^3) - 3((a_1-h_1)^5 - (a_1+a_2-h_1)^5)\alpha\kappa^2) = M \tag{7.34}$$

(6.9), (7.33) ve (7.34) denklemlerinden malzemenin özelliklerine bağlı olarak eğrilik κ, ve h_1, h_2 değerleri hesaplanır.

Yatay ve düşey yer değiştirmelerin hesabında üstte belirtilen Simpson, Newton, ve Runge-Kutta metotları kullanılır.

$E_2 = tE_1$, $a_1 = 2cm$, $a_2 = 1cm$, $b = 2$ cm, $L = 100$ cm, $a_1 + a_2 = h_1 + h_2$, $E_1 = 70$ GPa , $k = 0.5$, $\alpha = 100$ olarak alınan verilerle t ve momentin farklı değerleri için hesaplanan yatay ve düşey yer değiştirme değerleri, Çizelge 7.5'de gösterilmektedir.

Çizelge 7.5 Serbest uç noktasından moment etkiyen kübik ve logaritmik gerilme-şekil değiştirme bağıntısına sahip malzemeden oluşan kompozit konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler.

GERİLMELER	t	M (Ncm)							
		1000		2000		5000		10000	
		Δ (cm)	δv (cm)	Δ (cm)	δv (cm)	Δ (cm)	δv (cm)	Δ (cm)	δv (cm)
$\sigma_1=E_1\varepsilon(1-\alpha\varepsilon^2)$ $\sigma_2=E_2 Ln[1+k\varepsilon]$	1/2	0,0006	0,30074	0,00241	0,60148	0,01507	1,50359	0,06028	3,0064
	1	0,00032	0,22205	0,00131	0,4441	0,00821	1,11021	0,03286	2,22008
	2	0,00016	0,15872	0,00067	0,31745	0,00419	0,79361	0,01679	1,58711
$\sigma_1=E_1 Ln[1+k\varepsilon]$ $\sigma_2=E_2\varepsilon(1-\alpha\varepsilon^2)$	1/2	0,00067	0,31746	0,00268	0,63492	0,01679	1,58725	0,06718	3,1739
	1	0,00035	0,23166	0,00143	0,46332	0,00894	1,1583	0,03578	2,31641
	2	0,00021	0,17857	0,00085	0,35714	0,00531	0,89287	0,02126	1,78569

7.6 Dikdörtgen Kesitli, Ludwick Tipi Ve Logaritmik Gerilme-Şekil Değiştirme Bağıntısına Sahip Kompozit Konsol Kirişlerdeki Büyük Yer Değiştirmeler

İki farklı malzemeli kompozit kirişlerde, malzemelerden bir tanesindeki gerilme-şekil değiştirme bağıntısı, Ludwick tipi diğerindeki ise logaritmik olarak alınacaktır.

Şekil 6.1’de kesiti gösterilen Şekil 2.2’deki konsol kirişte 1 numaralı parçadaki gerilme-şekil değiştirme bağıntısı Ludwick tipi, 2 numaralı parçadaki gerilme-şekil değiştirme bağıntısı logaritmik olarak alındığında ve 1 numaralı parça için (2.1) denklemi, 2 numaralı parça için (2.101) denklemi kullanıldığında;

$$\sigma_1 = B_1 \varepsilon^{\frac{1}{n}} \qquad (7.35)$$

$$\sigma_2 = E_2 Ln[1 + k\varepsilon] \tag{7.36}$$

şeklinde yazılabilir.

(2.95) , (6.2) , (6.3) ,(6.8), (6.9), (7.35), (7.36) denklemleri kullanıldığında elde edilen ifadeler aşağıdaki gibidir:

$$(-\frac{bB_1h_1(-h_1\kappa)^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} - \frac{bB_1(a_1-h_1)((a_1-h_1)\kappa)^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}) +$$

$$+ bE_2(-a_1 + h_1 + (a_1 - h_1)Ln[1 + (a_1 - h_1)k\kappa] + \frac{Ln[1 + (a_1 - h_1)k\kappa]}{k\kappa}) -$$

$$+ bE_2(-a_1 - a_2 + h_1 + (a_1 + a_2 - h_1)Ln[1 + (a_1 + a_2 - h_1)k\kappa] + \frac{Ln[1 + (a_1 + a_2 - h_1)k\kappa]}{k\kappa})) = 0$$

(7.37)

$$(-\frac{bB_1h_1^{2}(-h_1\kappa)^{\frac{1}{n}}}{2+\frac{1}{n}} - \frac{bB_1(a_1-h_1)^2((a_1-h_1)\kappa)^{\frac{1}{n}}}{2+\frac{1}{n}}) +$$

$$+ (bE_2(-\frac{1}{4}(a_1 - h_1)^2 + \frac{a_1 - h_1}{2k\kappa} + \frac{1}{2}(a_1 - h_1)^2 Ln[1 + (a_1 - h_1)k\kappa] - \frac{Ln[1 + (a_1 - h_1)k\kappa]}{2k^2\kappa^2})) -$$

$$+ (bE_2(-\frac{1}{4}(a_1 + a_2 - h_1)^2 + \frac{a_1 + a_2 - h_1}{2k\kappa} + \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - h_1)^2 Ln[1 + (a_1 + a_2 - h_1)k\kappa] -$$

$$+ \frac{Ln[1 + (a_1 + a_2 - h_1)k\kappa]}{2k^2\kappa^2})) = M \tag{7.38}$$

(6.9), (7.37) ve (7.38) denklemlerinden, malzemenin özelliklerine bağlı olarak eğrilik κ, ve h_1, h_2 değerleri bulunabilir.

Önceki bölümlerde anlatıldığı gibi, elde edilen eğrilik değerinden, (7.9) denklemindeki G ifadesi kullanılarak, Simpson ve Newton metotları yardımıyla Δ, yatay yer değiştirmeler, Runge-Kutta yöntemi ile y(x) enterpolasyon fonksiyonu elde edilip, y(L-Δ) değeri bulunarak, serbest uç noktadaki δ_v , düşey yer değiştirmeler hesaplanır.

$a_1 = 2cm$, $a_2 = 1cm$, $b = 2$ cm, L = 100 cm, $a_1 + a_2 = h_1 + h_2$, $B_1 = 0.5\,GPa$, $E_2 = 70\,GPa$, k = 0.5, n = 1/2 olarak alınan verilerle, momentin farklı değerleri için hesaplanan yatay ve düşey yer değiştirme değerleri, Çizelge 7.6'da gösterilmektedir.

Gerilme- birim şekil değiştirme özellikleri açısından, malzemeler yer değiştirirse aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\sigma_1 = E_1 Ln[1 + k\varepsilon] \tag{7.39}$$

$$\sigma_2 = B_2 \varepsilon^{\frac{1}{n}} \tag{7.40}$$

(2.95) , (6.2) , (6.3) ,(6.8), (6.9), (7.39), (7.40) denklemleri kullanıldığında aşağıdaki ifadeler çıkarılabilir:

$$\begin{aligned} & bE_1(h_1 - h_1 Ln[1 - h_1 k\kappa] + \frac{Ln[1 - h_1 k\kappa]}{k\kappa}) - \\ & + bE_1(-a_1 + h_1 + (a_1 - h_1)Ln[1 + (a_1 - h_1)k\kappa] + \frac{Ln[1 + (a_1 - h_1)k\kappa]}{k\kappa}) + \\ & + \frac{bB_2(a_1 - h_1)((a_1 - h_1)\kappa)^{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} - \frac{bB_2(a_1 + a_2 - h_1)((a_1 + a_2 - h_1)\kappa)^{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} = 0 \end{aligned} \tag{7.41}$$

$$\begin{aligned} & bE_1(-\frac{h_1^2}{4} - \frac{h_1}{2k\kappa} + \frac{1}{2}h_1^2 Ln[1 - h_1 k\kappa] - \frac{Ln[1 - h_1 k\kappa]}{2k^2\kappa^2}) - \\ & + bE_1(-\frac{1}{4}(a_1 - h_1)^2 + \frac{a_1 - h_1}{2k\kappa} + \frac{1}{2}(a_1 - h_1)^2 Ln[1 + (a_1 - h_1)k\kappa] - \frac{Ln[1 + (a_1 - h_1)k\kappa]}{2k^2\kappa^2} + \\ & + \frac{bB_2(a_1 - h_1)^2((a_1 - h_1)\kappa)^{\frac{1}{n}}}{2 + \frac{1}{n}} - \frac{bB_2(a_1 + a_2 - h_1)^2((a_1 + a_2 - h_1)\kappa)^{\frac{1}{n}}}{2 + \frac{1}{n}} = M \end{aligned} \tag{7.42}$$

(6.9), (7.41) ve (7.42) denklemlerinden malzemenin özelliklerine bağlı olarak eğrilik κ, ve h_1, h_2 değerleri hesaplanır.

Yatay ve düşey yer değiştirmelerin hesabında yukarıda belirtilen Simpson, Newton, ve Runge- Kutta yöntemleri kullanılır.

$a_1 = 2cm$, $a_2 = 1cm$, $b = 2$ cm, L = 100 cm, $a_1 + a_2 = h_1 + h_2$, $B_1 = B_2 = 0.5$ GPa , $E_1 = E_2 = 70$ GPa , k = 0.5, n = 1/2 olarak alınan verilerle momentin farklı değerleri için hesaplanan yatay ve düşey yer değiştirme değerleri, Çizelge 7.6'da gösterilmektedir.

Çizelge 7.6 Serbest uç noktasından moment etkiyen Ludwick tipi ve logaritmik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip kompozit konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler.

	M (Ncm)							
	1000		2000		5000		10000	
GERİLMELER	Δ (cm)	δv (cm)	Δ (cm)	δv (cm)	Δ (cm)	δv (cm)	Δ (cm)	δv (cm)
$\sigma_1=B_1\varepsilon^{1/n}$ $\sigma_2=E_2Ln[1+k\varepsilon]$	0,48629	8,52622	1,92583	16,8813	11,49004	39,8015	40,2592	54,853
$\sigma_1=E_1Ln[1+k\varepsilon]$ $\sigma_2=B_2\varepsilon^{1/n}$	0,00765	1,07141	0,03061	2,1426	0,19124	5,35248	0,76381	10,6752

8. DİKDÖRTGEN KESİTLİ ÇİFT MODÜLLÜ KİRİŞLERDEKİ BÜYÜK YER DEĞİŞTİRMELER

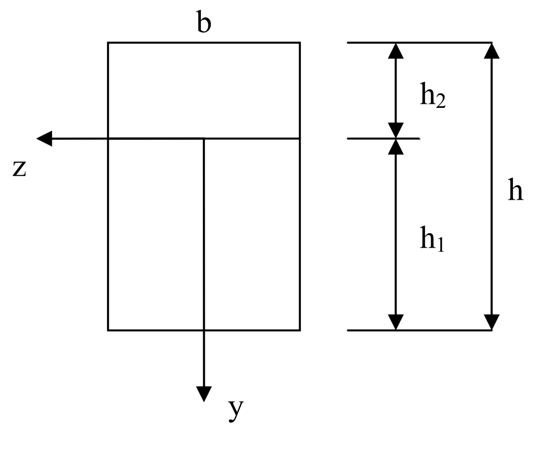
8.1 Serbest Uç Noktasından Moment Etkiyen Kübik Gerilme-Şekil Değiştirme Bağıntısına Sahip Çift Modüllü Konsol Kirişlerdeki Büyük Yer Değiştirmeler

Çift modüllü malzeme ifadesiyle, çekme ve basınçtaki elastiklik modülleri farklı malzemeler kastedilmektedir. Bir çubuğun yapıldığı malzeme, Hooke yasasına uymazsa, kirişlerin eğilmesi için yeni bir teori kurmak gerekir. Bu teori, cisim elastik olmakla beraber ε,σ diyagramı doğrusal olmayan kirişler için kullanıldığı gibi, elastik sınırın üstünde zorlanan plastik durum içinde uygulanabilir. Klasik eğilme teorisinde olduğu gibi burada da Bernoulli-Navier hipotezini uygulayarak kesitin düzlem ve elastik eğriye dik kaldığı kabul edilecektir. Kesitin kuvvetler çizgisine göre simetrik olduğu özel hal incelendiğinde, Bernoulli-Navier hipotezine göre tarafsız eksenden y kadar uzaktaki bir ipçikte uzama oranı, aşağıdaki gibidir:

$$\varepsilon_z = \frac{y}{\rho} \tag{8.1}$$

Burada ρ çubuğun ekseninin eğrilik yarıçapını gösterir. Bu hale göre ε_z uzama oranları, önceden olduğu gibi, yine doğrusaldır. (İnan, M., 1967)

Şekil 2.2 de uç noktasından moment etkiyen konsol kirişin moment uygulamadan önce ve sonraki durumu gösterilmiştir. Burada Δ yatay yer değiştirme, δ_v düşey yer değiştirme olarak alınmıştır. Şekil 8.1'de b kirişin genişliği, M eğilme momenti, h kirişin yüksekliği, h_1 ve h_2 tarafsız eksenin en üst ve en alt ipçiklerden olan uzaklığını göstermek üzere, çift modüllü kirişin dikdörtgen kesiti verilmiştir.



Şekil 8.1 Çift modüllü kirişin dikdörtgen kesiti.

Çift modüllü malzeme için gerilme dağılışı doğrusal değildir. Gerilme y ile orantılı değişmediğinden, tarafsız eksen artık ağırlık merkezinden geçmez, ayrıca tespit edilmesi gerekir. σ_Z gerilmelerinin, M kuvvet çiftine statik yönden eşdeğer olduğunu ifade etmek gerekir. Eşdeğerlik şartları;

$$\iint_F \sigma_Z dF = 0 \tag{8.2}$$

$$\iint_F \sigma_Z y dF = M \tag{8.3}$$

olarak verilebilir. Kesitin kuvvetler çizgisine göre simetrik olduğu hesaba katılırsa, bu integralleri tek katlı olarak göstermek mümkündür:

$$\int_{-h_2}^{h_1} \sigma_z(y) b(y) dy = 0 \tag{8.4}$$

$$\int_{-h_2}^{h_1} \sigma_z(y) y b(y) dy = M \tag{8.5}$$

Yukarıdaki eşitliklerde b(y), tarafsız eksene paralel kabul edilen kesit genişliğidir. (İnan, M., 1967)

$$h = h_1 + h_2 \tag{8.6}$$

olarak yazılabileceği, Şekil 8.1'den görülmektedir.

Çift modüllü malzemenin kübik gerilme – şekil değiştirme bağıntıları, basınç ve çekme de sırasıyla aşağıdaki gibi alınabilir:

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon (1 - \alpha \varepsilon^2) \tag{8.7}$$

$$\sigma_2 = E_2 \varepsilon (1 - \alpha \varepsilon^2) \tag{8.8}$$

Burada E_1, basınçtaki elastiklik modülü, E_2, çekmedeki elastiklik modülüdür.

(2.95), (8.4), (8.5), (8.6), (8.7) ve (8.8) eşitlikleri kullanıldığında aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\int_0^{h_1} \sigma_1 b dy + \int_{-h_2}^{0} \sigma_2 b dy = \frac{1}{2} E_1 h_1^2 \kappa - \frac{1}{2} E_2 h_2^2 \kappa - \frac{1}{4} E_1 h_1^4 \alpha \kappa^3 + \frac{1}{4} E_2 h_2^4 \alpha \kappa^3 = 0 \tag{8.9}$$

$$\int_0^{h_1}\sigma_1 bydy+\int_{-h_2}^{0}\sigma_2 bydy=\frac{1}{3}bE_1h_1^{\,3}\kappa-\frac{1}{3}bE_2h_2^{\,3}\kappa-\frac{1}{5}bE_1h_1^{\,5}\alpha\kappa^3+\frac{1}{5}bE_2h_2^{\,5}\alpha\kappa^3=M \qquad (8.10)$$

(8.6), (8.9) ve (8.10) denklemlerinden malzemenin özelliklerine bağlı olarak eğrilik κ, ve h_1, h_2 değerleri hesaplanır.

Eğrilik elde edildikten sonra (2.2), (2.5), (2.6) ve (2.7) denklemleriyle G ifadesi bulunur. Şekil 2.2'den görülebilen x = 0'da $y'(0)=0$ sınır şartı kullanıldığında, (2.6) denklemindeki C_1 integrasyon sabiti sıfır olacaktır. G ifadesi (7.9) denklemindeki gibi alınabilir. (7.9) denklemi (2.11) yay uzunluğu eşitliğinde yerine yazılıp, Simpson yöntemiyle integre edilir, çıkan ifadenin Newton yöntemi yoluyla kökü bulunarak Δ ,yatay yer değiştirmeler, elde edilir.

Yatay yer değiştirmeler bulunduktan sonra (2.7), (7.9) denkleminden x=0'da $y(0)=0$ şeklinde yazılabilecek sınır şartı da kullanıldığında, Runge-Kutta yöntemiyle $y(x)$ enterpolasyon fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyonda $x=L-\Delta$ için $y(L\text{-}\Delta)$ değeri, kirişin serbest uç noktasındaki çökmeyi δ_v olarak verir.

Şekil 8.1'de kesiti verilen çift modüllü kiriş için, $E_1=70\,\mathrm{GPa}$, b = 2cm, h = 3cm, $E_2=tE_1$ olarak alınan verilerle, α, t ve momentin farklı büyüklükleri için hesaplanan yatay ve düşey yer değiştirme değerleri Çizelge 8.1'de gösterilmektedir.

Çizelge 8.1 Serbest uç noktasından moment etkiyen kübik gerilme-şekil değiştirme bağıntısına sahip çift modüllü konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler.

		M (Ncm)							
		1000		**2000**		**5000**		**10000**	
α	**t**	**Δ (cm)**	**δv (cm)**	**Δ (cm)**	**δv (cm)**	**Δ (cm)**	**δv (cm)**	**Δ (cm)**	**δv (cm)**
1/4	0,25	0.00765	1.07139	0.0306	2.14253	0.19121	5.35202	0.76355	10.6734
	0,5	0.01211	1.34796	0.04845	2.69542	0.30259	6.72999	1.20708	13.3989
	2	0.00302	0.674	0.01211	1.34796	0.07569	3.36882	0.30259	6.72999
	5	0.00031	0.21759	0.00126	0.43517	0.00789	1.08791	0.03156	2.17556
100	0,25	0.00765	1.07139	0.03061	2.14258	0.19126	5.35276	0.76439	10.6792
	0,5	0.01211	1.34796	0.04845	2.69549	0.30268	6.73098	1.2085	13.4068
	2	0.00302	0.67401	0.01211	1.34796	0.0757	3.36894	0.30268	6.73098
	5	0.00031	0.21759	0.00126	0.43517	0.00789	1.08792	0.03156	2.17562
1000	0,25	0.00765	1.07145	0.03062	2.143	0.19174	5.35942	0.77216	10.733
	0,5	0.01211	1.34804	0.04847	2.69606	0.30349	6.73997	1.22167	13.479
	2	0.00302	0.67401	0.01211	1.34804	0.07575	3.37	0.30349	6.73997
	5	0.00031	0.21759	0.00126	0.43518	0.00789	1.08798	0.03157	2.17612

8.2 Serbest Uç Noktasından Moment Etkiyen Logaritmik Gerilme-Şekil Değiştirme Bağıntısına Sahip Çift Modüllü Konsol Kirişlerdeki Büyük Yer Değiştirmeler

Önceki bölümde çift modüllü kirişler için bahsedilenler ışığında, Şekil 2.2 ve Şekil 8.1'de gösterilen konsol kirişteki çift modüllü malzemenin, logaritmik gerilme – şekil değiştirme bağıntıları, basınç ve çekme de sırasıyla aşağıdaki gibi alınabilir:

$$\sigma_1 = E_1 Ln[1 + k\varepsilon] \tag{8.11}$$

$$\sigma_2 = E_2 Ln[1 + k\varepsilon] \tag{8.12}$$

Burada E_1, basınçtaki elastiklik modülü, E_2, çekmedeki elastiklik modülüdür.

(2.95), (8.4), (8.5), (8.6), (8.11) ve (8.12) eşitlikleri kullanıldığında, aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\int_0^{h_1} \sigma_1 bdy + \int_{-h_2}^{0} \sigma_2 bdy = bE_1(-h_1 + (h_1 + \frac{1}{k_1\kappa})Ln[1+h_1k_1\kappa])$$

$$-bE_2(-h+h_1+(h-h_1+\frac{1}{k_2\kappa})Ln[1+(h-h_1)k_2\kappa]) = 0 \tag{8.13}$$

$$\int_0^{h_1} \sigma_1 bydy + \int_{-h_2}^{0} \sigma_2 bydy = \frac{bE_1(h_1k_1\kappa(2-h_1k_1\kappa)+2(-1+h_1^2k_1^2\kappa^2)Ln[1+h_1k_1\kappa])}{4k_1^2\kappa^2} -$$

$$+\frac{bE_2((h-h_1)k_2\kappa(2+(-h+h_1)k_2\kappa)+2(-1+(h-h_1)^2k_2^2\kappa^2 Ln[1+(h-h_1)k_2\kappa])}{4k_2^2\kappa^2} = M \tag{8.14}$$

Eğrilik κ, ve h_1, h_2 değerleri, (8.6), (8.13) ve (8.14) denklemlerinden malzemenin özelliklerine bağlı olarak hesaplanır.

Eğrilik bulunduktan sonra (2.2), (2.5), (2.6) ve (2.7) denklemleriyle G ifadesi bulunur. Şekil 2.2'den görülebilen x = 0'da $y'(0) = 0$ sınır şartı kullanıldığında, (2.6) denklemindeki C_1 integrasyon sabiti sıfır olacaktır. G ifadesi (7.9) denklemindeki gibi alınabilir. (7.9) denklemi (2.11) yay uzunluğu eşitliğinde yerine yazılıp, Simpson yöntemiyle integre edilir, çıkan ifadenin Newton yöntemi yoluyla kökü bulunarak Δ, yatay yer değiştirmeler, elde edilir.

Yatay yer değiştirmeler bulunduktan sonra (2.7), (7.9) denkleminden x = 0'da $y(0) = 0$ şeklinde yazılabilecek sınır şartı da kullanıldığında, Runge-Kutta yöntemiyle $y(x)$ enterpolasyon fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyonda $x = L - \Delta$ için $y(L\text{-}\Delta)$ değeri, kirişin serbest uç noktasındaki çökmeyi δ_v olarak verir.

Şekil 8.1'de kesiti verilen logaritmik çift modüllü kiriş için, $E_1 = 70\,\text{GPa}$, b = 2cm, h = 3cm, $E_2 = tE_1$ olarak alınan verilerle, k, t ve momentin farklı büyüklükleri için hesaplanan yatay ve düşey yer değiştirme değerleri Çizelge 8.2'de gösterilmektedir.

Çizelge 8.2 Serbest uç noktasından moment etkiyen logaritmik gerilme-şekil değiştirme bağıntısına sahip çift modüllü konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler.

		M (Ncm)							
		1000		**2000**		**5000**		**10000**	
k	**t**	**Δ (cm)**	**δv (cm)**	**Δ (cm)**	**δv (cm)**	**Δ (cm)**	**δv (cm)**	**Δ (cm)**	**δv (cm)**
0,25	0,25	0.12238	4.28267	0.48888	8.54879	3.03031	21.0925	11.78272	40.2595
	0,5	0.19368	5.38635	0.77321	10.7403	4.77098	26.3004	18.26918	48.8168
	2	0.04845	2.69557	0.19376	5.3875	1.20772	13.4025	4.78105	26.3272
	5	0.00505	0.87035	0.0202	1.74062	0.12623	4.34952	0.50446	8.68349
0,5	0,25	0.0306	2.14232	0.12235	4.28225	0.7628	10.6681	3.02736	21.0825
	0,5	0.04844	2.69513	0.19363	5.38578	1.20579	13.3918	4.76595	26.287
	2	0.01211	1.34803	0.04846	2.69571	0.30275	6.73179	1.20836	13.406
	5	0.00126	0.43518	0.00505	0.87037	0.03156	2.17579	0.12626	4.34998
0,75	0,25	0.0136	1.42833	0.05439	2.8558	0.33945	7.12723	1.35235	14.1751
	0,5	0.02153	1.797	0.08608	3.59245	0.53698	8.95798	2.13531	17.7625
	2	0.00538	0.89871	0.02154	1.79738	0.13462	4.49164	0.53813	8.96753
	5	0.00056	0.29012	0.00224	0.58025	0.01403	1.45065	0.05612	2.901

8.3 Serbest Uç Noktasından Tekil Kuvvet Etkiyen Doğrusal Çift Modüllü Konsol Kirişlerdeki Büyük Yer Değiştirmeler

Dik kesiti Şekil 8.1'de verilen, Şekil 3.1'deki gibi yüklenmiş, doğrusal çift modüllü konsol kirişlerdeki gerilme değerleri, aşağıdaki gibi alınır:

$$\sigma_1 = E_1\varepsilon \tag{8.15}$$

$$\sigma_2 = E_2\varepsilon \tag{8.16}$$

(8.15) eşitliğinde basınç, (8.16) eşitliğinde ise çekme gerilmesinin değerleri verilmiştir. Burada E_1 basınçtaki, E_2 çekmedeki elastiklik modülüdür.

$$E_2 = tE_1 \tag{8.17}$$

olarak alınırsa, (2.95), (8.4), (8.5), (8.6), (8.15) ,(8.16) ve (8.17) eşitlikleri kullanıldığında aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\int_0^{h_1}\sigma_1 b dy + \int_{-h_2}^{0}\sigma_2 b dy = \frac{1}{2}E_1 h_1^2\kappa - \frac{1}{2}E_1(h-h_1)^2 t\kappa = 0 \tag{8.18}$$

$$\int_0^{h_1}\sigma_1 b y dy + \int_{-h_2}^{0}\sigma_2 b y dy = \frac{1}{3}bE_1 h_1^3\kappa + \frac{1}{3}bE_1(h-h_1)^3 t\kappa = M \tag{8.19}$$

(3.1) , (8.18) ve (8.19) denklemleri kullanıldığında κ ve h_1 değerleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\kappa = \frac{3\left(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-Px-\frac{2P\sqrt{t}x}{1+\sqrt{t}}-3Ptx+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}x}{1+\sqrt{t}}-P\Delta-\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}-3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}\right)}{bE_1h^3t} \tag{8.20}$$

$$h_1 = \frac{h\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} \tag{8.21}$$

Eğrilik bulunduktan sonra, (2.2), (2.5), (2.6), (2.7) ve (8.20) denklemleri kullanılarak G ifadesi elde edilir. Şekil 3.1 den görülebilen x = 0'da $y'(0) = 0$ sınır şartı kullanılıp, (2.6) denkleminde verilen G ifadesindeki C_1 integrasyon sabitinin sıfır olduğu bulunarak, G değeri aşağıdaki gibi yazılır:

$$G = \frac{3P(1+\sqrt{t})^2\left(Lx-\frac{x^2}{2}-x\Delta\right)}{bE_1h^3t} \tag{8.22}$$

$$\frac{E_1 bh^3}{12} = EI \tag{8.23}$$

(8.23) eşitliğindeki kabul yapıldığında, G aşağıdaki gibi bulunacaktır:

$$G = \frac{3P(1+\sqrt{t})^2 (Lx-\frac{x^2}{2}-x\Delta)}{12EIt} \tag{8.24}$$

(2.11) eşitliğindeki yay uzunluğu formülünde, (8.24) denkleminde verilen G ifadesi kullanıldığında, Simpson kuralı yardımıyla yay uzunluğu eşitliği integre edilerek Δ, yatay yer değiştirme büyüklüğü bulunmaktadır. İntegrasyon işlemi sonucunda elde edilen eşitlikten Δ'yı çekebilmek için ise Newton yöntemini kullanarak kök bulma işlemi uygulanmaktadır. Daha sonra düşey yer değiştirmeleri bulabilmek için Runge-Kutta yöntemi yardımıyla $x = 0$'da $y(0) = 0$ sınır şartı kullanılıp, y(x) enterpolasyon fonksiyonu elde edilir. $x = L-\Delta$ için bulunan $y(L-\Delta)$ ifadesi, δ_v olarak gösterdiğimiz serbest uç noktadaki düşey yer değiştirmenin büyüklüğünü vermektedir.

$L = 25.4$ m, $P = 1780$ N, $EI = 516.54\times10^3$ Nm^2 sayısal büyüklükleri için yatay ve düşey yer değiştirme değerleri, Çizelge 8.3'de gösterilmiştir.

Yukarıda yöntemle bulunan değerleri karşılaştırmak adına, aşağıda sırasıyla Moment, Galerkin, Alt Bölge Kollokasyon ve En Küçük Kareler yöntemiyle yapılan işlemler gösterilmektedir.

Moment Yöntemiyle ilgili daha önceki bölümlerde yapılan açıklamalara dayanarak, Şekil 3.1'den görülebilen $y(0) = 0$ ve $y'(0) = 0$ sınır şartları kullanıldığında, yaklaşık deneme fonksiyonu aşağıdaki gibi alınabilir:

$$y(x) = ax^2 + bx^4 \tag{8.25}$$

(2.2), (8.20), (8.23) ve (8.25) denklemleri kullanılarak, hata fonksiyonu ε_Ω aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varepsilon_\Omega = \frac{(2a+12bx^2)}{(1+(2ax+4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}} -$$

$$+\frac{3\left(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-Px-\frac{2P\sqrt{t}x}{1+\sqrt{t}}-3Ptx+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}x}{1+\sqrt{t}}-P\Delta-\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}-3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}\right)}{12EIt} \quad (8.26)$$

ε_Ω, hata fonksiyonunun sıfırıncı momentini, Simpson yönteminden faydalanarak bölge üzerinde integre ettiğimizde;

$$\frac{1}{30}\left(2a+\frac{4(2a+\frac{3}{25}b(L-\Delta)^2)}{(1+(\frac{1}{5}a(L-\Delta)+\frac{1}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{2(2a+\frac{12}{25}b(L-\Delta)^2)}{(1+(\frac{2}{5}a(L-\Delta)+\frac{4}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\right.$$

$$+\frac{4(2a+\frac{27}{25}b(L-\Delta)^2)}{(1+(\frac{3}{5}a(L-\Delta)+\frac{27}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{2(2a+\frac{48}{25}b(L-\Delta)^2)}{(1+(\frac{4}{5}a(L-\Delta)+\frac{32}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$+\frac{4(2a+3b(L-\Delta)^2)}{(1+(a(L-\Delta)+\frac{1}{2}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{2(2a+\frac{108}{25}b(L-\Delta)^2)}{(1+(\frac{6}{5}a(L-\Delta)+\frac{108}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$+\frac{4(2a+\frac{147}{25}b(L-\Delta)^2)}{(1+(\frac{7}{5}a(L-\Delta)+\frac{343}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{2(2a+\frac{192}{25}b(L-\Delta)^2)}{(1+(\frac{8}{5}a(L-\Delta)+\frac{256}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$\left.+\frac{4(2a+\frac{243}{25}b(L-\Delta)^2)}{(1+(\frac{9}{5}a(L-\Delta)+\frac{729}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{2a+12b(L-\Delta)^2}{(1+(2a(L-\Delta)+4b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}\right)(L-\Delta)+$$

$$-\frac{P(1+\sqrt{t})^2(L-\Delta)^2}{8EIt}=0 \quad (8.27)$$

denklemi elde edilir.

ε_Ω, hata fonksiyonunun birinci momentini, Simpson yönteminden faydalanarak bölge üzerinde integre ettiğimizde ise;

$$\frac{1}{30}\left(\frac{2(2a+\frac{3}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(L\text{-}\Delta)}{5(1+(\frac{1}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{1}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{2(2a+\frac{12}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(L\text{-}\Delta)}{5(1+(\frac{2}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{4}{125}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\right.$$

$$+\frac{6(2a+\frac{27}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(L\text{-}\Delta)}{5(1+(\frac{3}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{27}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{4(2a+\frac{48}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(L\text{-}\Delta)}{5(1+(\frac{4}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{32}{125}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$+\frac{2(2a+3b(L\text{-}\Delta)^2)(L\text{-}\Delta)}{(1+(a(L\text{-}\Delta)+\frac{1}{2}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{6(2a+\frac{108}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(L\text{-}\Delta)}{5(1+(\frac{6}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{108}{125}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$+\frac{14(2a+\frac{147}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(L\text{-}\Delta)}{5(1+(\frac{7}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{343}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{8(2a+\frac{192}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(L\text{-}\Delta)}{5(1+(\frac{8}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{256}{125}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$\left.+\frac{18(2a+\frac{243}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(L\text{-}\Delta)}{5(1+(\frac{9}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{729}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{(2a+12b(L\text{-}\Delta)^2)(L\text{-}\Delta)}{(1+(2a(L\text{-}\Delta)+4b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}\right)(L\text{-}\Delta)+$$

$$-\frac{P(1+\sqrt{t})^2(L\text{-}\Delta)^3}{24EIt}=0 \tag{8.28}$$

ifadesi bulunur.

(8.24) denkleminde verilen G ifadesi, (2.11) eşitliğindeki yay uzunluğu formülünde kullanıldığında, Simpson yöntemi yardımıyla, yay uzunluğu eşitliği integre edilerek Δ, yatay yer değiştirme değerleri hesaplanır.

L = 25.4 m, P = 1780 N, $EI = 516.54\times10^3\ \text{Nm}^2$ sayısal büyüklükleri ve yukarıda nasıl bulunacağından bahsettiğimiz Δ, yatay yer değiştirme değerleri kullanılarak, farklı t değerleri için (8.27) ve (8.28) eşitliklerinden, yaklaşık deneme fonksiyonundaki a ve b sabitleri elde edilir. Sabitler bulunduktan sonra (8.25) denklemindeki yerlerine yazıldığında, y(x) yaklaşık deneme fonksiyonu elde edilmiş olur. x = L-Δ için y(L-Δ) ifadesi Şekil 3.1'deki konsol kirişin serbest uç noktasındaki δ_v, düşey yer değiştirme değerlerini vermektedir.

Farklı t değerleri için hesaplanan, yatay ve düşey yer değiştirme değerleri, Çizelge 8.3'de gösterilmektedir.

Galerkin yöntemiyle hesap yapılacak olursa; (2.2), (8.20), (8.23) , (8.25) ve (8.26) denklemleri kullanılarak, (8.25) denklemindeki baz fonksiyonları olan x^2 ve x^4, ağırlık fonksiyonları olarak alınıp, (8.26) denklemindeki hata fonksiyonu ile çarpılan ağırlık fonksiyonları, bölge üzerinde Simpson yönteminden yararlanılarak integre edildiğinde, aşağıdaki eşitlikler bulunabilir:

$$\frac{1}{30}\left(\frac{(2a+\frac{3}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(L\text{-}\Delta)^2}{25(1+(\frac{1}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{1}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{2(2a+\frac{12}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(L\text{-}\Delta)^2}{25(1+(\frac{2}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{4}{125}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\right.$$

$$+\frac{9(2a+\frac{27}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(L\text{-}\Delta)^2}{25(1+(\frac{3}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{27}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{8(2a+\frac{48}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(L\text{-}\Delta)^2}{25(1+(\frac{4}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{32}{125}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$+\frac{(2a+3b(L\text{-}\Delta)^2)(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(a(L\text{-}\Delta)+\frac{1}{2}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{18(2a+\frac{108}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(L\text{-}\Delta)^2}{25(1+(\frac{6}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{108}{125}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$+\frac{49(2a+\frac{147}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(L\text{-}\Delta)^2}{25(1+(\frac{7}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{343}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{32(2a+\frac{192}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(L\text{-}\Delta)^2}{25(1+(\frac{8}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{256}{125}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$\left.+\frac{81(2a+\frac{243}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(L\text{-}\Delta)^2}{25(1+(\frac{9}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{729}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{(2a+12b(L\text{-}\Delta)^2)(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(2a(L\text{-}\Delta)+4b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}\right)(L\text{-}\Delta)+$$

$$-\frac{P(1+\sqrt{t})^2(L\text{-}\Delta)^4}{48EIt}=0 \qquad (8.29)$$

$$\frac{1}{30}\left(\frac{(2a+\frac{3}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(L\text{-}\Delta)^4}{2500(1+(\frac{1}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{1}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{2(2a+\frac{12}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(L\text{-}\Delta)^4}{625(1+(\frac{2}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{4}{125}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\right.$$

$$+\frac{81(2a+\frac{27}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^4}{2500(1+(\frac{3}{5}a(L-\Delta)+\frac{27}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{32(2a+\frac{48}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^4}{625(1+(\frac{4}{5}a(L-\Delta)+\frac{32}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$+\frac{(2a+3b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^4}{4(1+(a(L-\Delta)+\frac{1}{2}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{162(2a+\frac{108}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^4}{625(1+(\frac{6}{5}a(L-\Delta)+\frac{108}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$+\frac{2401(2a+\frac{147}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^4}{2500(1+(\frac{7}{5}a(L-\Delta)+\frac{343}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{512(2a+\frac{192}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^4}{625(1+(\frac{8}{5}a(L-\Delta)+\frac{256}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$+\frac{6561(2a+\frac{243}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^4}{2500(1+(\frac{9}{5}a(L-\Delta)+\frac{729}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{(2a+12b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^4}{(1+(2a(L-\Delta)+4b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}})(L-\Delta)+$$

$$-\frac{P(1+\sqrt{t})^2(L-\Delta)^6}{120EIt}=0 \qquad (8.30)$$

(8.24) denkleminde verilen G ifadesi, (2.11) eşitliğindeki yay uzunluğu formülünde kullanıldığında, Simpson yöntemi yardımıyla, yay uzunluğu eşitliği integre edilerek Δ, yatay yer değiştirme değerleri bulunur.

L = 25.4 m, P = 1780 N, $EI = 516.54\times10^3$ Nm^2 sayısal büyüklükleri ve Δ, yatay yer değiştirme değerleri kullanılarak, farklı t değerleri için (8.29) ve (8.30) eşitliklerinden yaklaşık deneme fonksiyonundaki a ve b sabitleri elde edilebilir. Bulunan y(x) yaklaşık deneme fonksiyonunda x = L-Δ için y(L-Δ) ifadesi Şekil 3.1'deki konsol kirişin serbest uç noktasındaki δ_v, düşey yer değiştirme değerlerini vermektedir.

Farklı t değerleri için hesaplanan yatay ve düşey yer değiştirme değerleri, Çizelge 8.3'de gösterilmektedir.

Alt Bölge Kollokasyon Yönteminde; (2.2), (8.20), (8.23) , (8.25) ve (8.26) denklemleri kullanılıp, hata fonksiyonu bölgenin her iki yarısında integre edilerek, $\int_0^{\frac{L-\Delta}{2}} \varepsilon_\Omega dx$ ve $\int_{\frac{L-\Delta}{2}}^{L-\Delta} \varepsilon_\Omega dx$

ifadeleri sıfıra eşitlenmek suretiyle aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\frac{1}{60}(L\text{-}\Delta)(2a+\frac{2a+3b(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(a(L\text{-}\Delta)+\frac{1}{2}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$+\frac{3P(1+\sqrt{t})^2(\text{-}L+\Delta)}{8EIt}+4(\frac{2a+\frac{3}{100}b(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(\frac{1}{10}a(L\text{-}\Delta)+\frac{b(L\text{-}\Delta)^3}{2000})^2)^{\frac{3}{2}}}\text{-}$$

$$+\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt\text{-}\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}\text{-}\frac{1}{20}P(L\text{-}\Delta)\text{-}\frac{P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{10(1+\sqrt{t})}\text{-}\frac{3}{20}Pt(L\text{-}\Delta)+$$

$$+\frac{Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{10(1+\sqrt{t})}\text{-}P\Delta\text{-}\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}+3Pt\Delta\text{-}\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+2(\frac{2a+\frac{3}{25}b(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(\frac{1}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{1}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}\text{-}\frac{1}{4EIt}(LP+$$

$$+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt\text{-}\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}\text{-}\frac{1}{10}P(L\text{-}\Delta)\text{-}\frac{P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}\text{-}\frac{3}{10}Pt(L\text{-}\Delta)+\frac{Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}\text{-}P\Delta\text{-}\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}\text{-}3Pt\Delta+$$

$$+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+4(\frac{2a+\frac{27}{100}b(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(\frac{3}{10}a(L\text{-}\Delta)+\frac{27b(L\text{-}\Delta)^3}{2000})^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt+$$

$$\text{-}\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}\text{-}\frac{3}{20}P(L\text{-}\Delta)\text{-}\frac{3P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{10(1+\sqrt{t})}\text{-}\frac{9}{20}Pt(L\text{-}\Delta)+\frac{3Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{10(1+\sqrt{t})}\text{-}P\Delta\text{-}\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}\text{-}3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+$$

$$+2(\frac{2a+\frac{12}{25}b(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(\frac{2}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{4}{125}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}\text{-}\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt\text{-}\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}\text{-}\frac{1}{5}P(L\text{-}\Delta)\text{-}$$

$$+\frac{2P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}\text{-}\frac{3}{5}Pt(L\text{-}\Delta)+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}\text{-}P\Delta\text{-}\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}\text{-}3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+$$

$$+4(\frac{2a+\frac{3}{4}b(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(\frac{1}{2}a(L\text{-}\Delta)+\frac{b(L\text{-}\Delta)^3}{16})^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt+$$

$$-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-\frac{1}{4}P(L\text{-}\Delta)-\frac{P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{2(1+\sqrt{t})}-\frac{3}{4}Pt(L\text{-}\Delta)+\frac{Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{2(1+\sqrt{t})}\text{-}P\Delta\text{-}\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}\text{-}3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+$$

$$+2(\frac{2a+\frac{27}{25}b(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(\frac{3}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{27b(L\text{-}\Delta)^3}{250})^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt+$$

$$-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-\frac{3}{10}P(L\text{-}\Delta)-\frac{3P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-\frac{9}{10}Pt(L\text{-}\Delta)+\frac{3Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}\text{-}P\Delta\text{-}\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}\text{-}3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+$$

$$+4(\frac{2a+\frac{147}{100}b(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(\frac{7}{10}a(L\text{-}\Delta)+\frac{343b(L\text{-}\Delta)^3}{2000})^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt+$$

$$-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-\frac{7}{20}P(L\text{-}\Delta)-\frac{7P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{10(1+\sqrt{t})}-\frac{21}{20}Pt(L\text{-}\Delta)+\frac{7Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{10(1+\sqrt{t})}\text{-}P\Delta\text{-}\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}\text{-}3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+$$

$$+2(\frac{2a+\frac{48}{25}b(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(\frac{4}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{32b(L\text{-}\Delta)^3}{125})^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt+$$

$$-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-\frac{2}{5}P(L\text{-}\Delta)-\frac{4P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-\frac{6}{5}Pt(L\text{-}\Delta)+\frac{4Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}\text{-}P\Delta\text{-}\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}\text{-}3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+$$

$$+4(\frac{2a+\frac{243}{100}b(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(\frac{9}{10}a(L\text{-}\Delta)+\frac{729b(L\text{-}\Delta)^3}{2000})^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt\text{-}\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-\frac{9}{20}P(L\text{-}\Delta)+$$

$$-\frac{9P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{10(1+\sqrt{t})}-\frac{27}{20}Pt(L\text{-}\Delta)+\frac{9Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{10(1+\sqrt{t})}\text{-}P\Delta\text{-}\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}\text{-}3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}})))=0 \tag{8.31}$$

$$\frac{1}{60}(L\text{-}\Delta)(2a+\frac{2a+3b(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(a(L\text{-}\Delta)+\frac{1}{2}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{2a+12b(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(2a(L\text{-}\Delta)+4b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{P(1+\sqrt{t})^2(-L+\Delta)}{8EIt}+$$

$$+4\left(\frac{2a+\frac{363}{100}b(L-\Delta)^2}{(1+(\frac{11}{10}a(L-\Delta)+\frac{1331b(L-\Delta)^3}{2000})^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-\frac{11}{20}P(L-\Delta)+\right.$$

$$\left.-\frac{11P\sqrt{t}(L-\Delta)}{10(1+\sqrt{t})}-\frac{33}{20}Pt(L-\Delta)+\frac{11Pt^{\frac{3}{2}}(L-\Delta)}{10(1+\sqrt{t})}-P\Delta-\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}-3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}})\right)+$$

$$+2\left(\frac{2a+\frac{108}{25}b(L-\Delta)^2}{(1+(\frac{6}{5}a(L-\Delta)+\frac{108b(L-\Delta)^3}{125})^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-\frac{3}{5}P(L-\Delta)+\right.$$

$$\left.-\frac{6P\sqrt{t}(L-\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-\frac{9}{5}Pt(L-\Delta)+\frac{6Pt^{\frac{3}{2}}(L-\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-P\Delta-\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}-3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}})\right)+$$

$$+4\left(\frac{2a+\frac{507}{100}b(L-\Delta)^2}{(1+(\frac{13}{10}a(L-\Delta)+\frac{2197b(L-\Delta)^3}{2000})^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-\frac{13}{20}P(L-\Delta)+\right.$$

$$\left.-\frac{13P\sqrt{t}(L-\Delta)}{10(1+\sqrt{t})}-\frac{39}{20}Pt(L-\Delta)+\frac{13Pt^{\frac{3}{2}}(L-\Delta)}{10(1+\sqrt{t})}-P\Delta-\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}-3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}})\right)+$$

$$+2\left(\frac{2a+\frac{147}{25}b(L-\Delta)^2}{(1+(\frac{7}{5}a(L-\Delta)+\frac{343b(L-\Delta)^3}{250})^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-\frac{7}{10}P(L-\Delta)+\right.$$

$$\left.-\frac{7P\sqrt{t}(L-\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-\frac{21}{10}Pt(L-\Delta)+\frac{7Pt^{\frac{3}{2}}(L-\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-P\Delta-\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}-3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}})\right)+$$

$$+4\left(\frac{2a+\frac{27}{4}b(L-\Delta)^2}{(1+(\frac{3}{2}a(L-\Delta)+\frac{27b(L-\Delta)^3}{16})^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-\frac{3}{4}P(L-\Delta)+\right.$$

$$\left.-\frac{3P\sqrt{t}(L-\Delta)}{2(1+\sqrt{t})}-\frac{9}{4}Pt(L-\Delta)+\frac{3Pt^{\frac{3}{2}}(L-\Delta)}{2(1+\sqrt{t})}-P\Delta-\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}-3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}})\right)+$$

$$+2(\frac{2a+\frac{192}{25}b(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(\frac{8}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{256b(L\text{-}\Delta)^3}{125})^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt\text{-}\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}\text{-}\frac{4}{5}P(L\text{-}\Delta)+$$

$$\text{-}\frac{8P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}\text{-}\frac{12}{5}Pt(L\text{-}\Delta)+\frac{8Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}\text{-}P\Delta\text{-}\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}\text{-}3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+$$

$$+4(\frac{2a+\frac{867}{100}b(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(\frac{17}{10}a(L\text{-}\Delta)+\frac{4913b(L\text{-}\Delta)^3}{2000})^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt\text{-}\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}\text{-}\frac{17}{20}P(L\text{-}\Delta)+$$

$$\text{-}\frac{17P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{10(1+\sqrt{t})}\text{-}\frac{51}{20}Pt(L\text{-}\Delta)+\frac{17Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{10(1+\sqrt{t})}\text{-}P\Delta\text{-}\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}\text{-}3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+$$

$$+2(\frac{2a+\frac{243}{25}b(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(\frac{9}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{729b(L\text{-}\Delta)^3}{250})^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt\text{-}\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}\text{-}\frac{9}{10}P(L\text{-}\Delta)+$$

$$\text{-}\frac{9P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}\text{-}\frac{27}{10}Pt(L\text{-}\Delta)+\frac{9Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}\text{-}P\Delta\text{-}\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}\text{-}3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+$$

$$+4(\frac{2a+\frac{1083}{100}b(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(\frac{19}{10}a(L\text{-}\Delta)+\frac{6859b(L\text{-}\Delta)^3}{2000})^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt\text{-}\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}\text{-}\frac{19}{20}P(L\text{-}\Delta)+$$

$$\text{-}\frac{19P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{10(1+\sqrt{t})}\text{-}\frac{57}{20}Pt(L\text{-}\Delta)+\frac{19Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{10(1+\sqrt{t})}\text{-}P\Delta\text{-}\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}\text{-}3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}})))=0 \quad (8.32)$$

(8.24) denkleminde verilen G ifadesi, (2.11) eşitliğindeki yay uzunluğu formülünde kullanıldığında, Simpson kuralı yardımıyla, yay uzunluğu eşitliği integre edilip Δ, yatay yer değiştirme değerleri hesaplanır.

L = 25.4 m, P = 1780 N, $EI = 516.54\times10^3$ Nm^2 sayısal büyüklükleri ve Δ, yatay yer değiştirme değerleri kullanılarak, farklı t değerleri için (8.31) ve (8.32) eşitliklerinden yaklaşık deneme fonksiyonundaki a ve b sabitleri elde edilebilir. Bulunan y(x) yaklaşık deneme fonksiyonunda x = L-Δ için y(L-Δ) ifadesi Şekil 3.1'deki konsol kirişin serbest uç noktasındaki δ_v , düşey yer değiştirme değerlerini vermektedir.

Farklı t değerleri için hesaplanan yatay ve düşey yer değiştirme değerleri, Çizelge 8.3'de gösterilmektedir.

Son olarak aynı hesaplama, en küçük kareler yöntemiyle yapılacak olursa, (2.2), (8.20), (8.23) , (8.25) ve (8.26) denklemleri kullanılarak, hata fonksiyonunu, deneme fonksiyonunun sabit terimlerine göre kısmi türevleri;

$$\partial_a \varepsilon_\Omega = -\frac{6x(2a+12bx^2)(2ax+4bx^3)}{(1+(2ax+4bx^3)^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{2}{(1+(2ax+4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{8.33}$$

$$\partial_b \varepsilon_\Omega = -\frac{12x^3(2a+12bx^2)(2ax+4bx^3)}{(1+(2ax+4bx^3)^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{12x^2}{(1+(2ax+4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{8.34}$$

ile çarpılıp, bölge üzerinde integre edildiğinde, aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\frac{1}{30}(L\text{-}\Delta)(2(2a\text{-}\frac{LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt\text{-}\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}\text{-}P\Delta\text{-}\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}\text{-}3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}}{4EIt})+$$

$$+4(\frac{2}{(1+(\frac{1}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{1}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}\text{-}\frac{3(2a+\frac{3}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(\frac{1}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{1}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)(L\text{-}\Delta)}{5(1+(\frac{1}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{1}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{5}{2}}})\times$$

$$(\frac{2a+\frac{3}{25}b(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(\frac{1}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{1}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt\text{-}\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}\text{-}\frac{1}{10}P(L\text{-}\Delta)+$$

$$\text{-}\frac{P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}\text{-}\frac{3}{10}Pt(L\text{-}\Delta)+\frac{Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}\text{-}P\Delta\text{-}\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}\text{-}3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+$$

$$+2(\frac{2}{(1+(\frac{2}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{4}{125}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}\text{-}\frac{6(2a+\frac{12}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(\frac{2}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{4}{125}b(L\text{-}\Delta)^3)(L\text{-}\Delta)}{5(1+(\frac{2}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{4}{125}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{5}{2}}})\times$$

$$(\frac{2a+\frac{12}{25}b(L-\Delta)^2}{(1+(\frac{2}{5}a(L-\Delta)+\frac{4}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-\frac{1}{5}P(L-\Delta)+$$

$$-\frac{2P\sqrt{t}(L-\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-\frac{3}{5}Pt(L-\Delta)+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}(L-\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-P\Delta-\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}-3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+$$

$$+4(\frac{2}{(1+(\frac{3}{5}a(L-\Delta)+\frac{27}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{9(2a+\frac{27}{25}b(L-\Delta)^2)(\frac{3}{5}a(L-\Delta)+\frac{27}{250}b(L-\Delta)^3)(L-\Delta)}{5(1+(\frac{3}{5}a(L-\Delta)+\frac{27}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{5}{2}}})\times$$

$$(\frac{2a+\frac{27}{25}b(L-\Delta)^2}{(1+(\frac{3}{5}a(L-\Delta)+\frac{27}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-\frac{3}{10}P(L-\Delta)+$$

$$-\frac{3P\sqrt{t}(L-\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-\frac{9}{10}Pt(L-\Delta)+\frac{3Pt^{\frac{3}{2}}(L-\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-P\Delta-\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}-3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+$$

$$+2(\frac{2}{(1+(\frac{4}{5}a(L-\Delta)+\frac{32}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{12(2a+\frac{48}{25}b(L-\Delta)^2)(\frac{4}{5}a(L-\Delta)+\frac{32}{125}b(L-\Delta)^3)(L-\Delta)}{5(1+(\frac{4}{5}a(L-\Delta)+\frac{32}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{5}{2}}})\times$$

$$(\frac{2a+\frac{48}{25}b(L-\Delta)^2}{(1+(\frac{4}{5}a(L-\Delta)+\frac{32}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-\frac{2}{5}P(L-\Delta)+$$

$$-\frac{4P\sqrt{t}(L-\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-\frac{6}{5}Pt(L-\Delta)+\frac{4Pt^{\frac{3}{2}}(L-\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-P\Delta-\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}-3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+$$

$$+4(\frac{2}{(1+(a(L-\Delta)+\frac{1}{2}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3(2a+3b(L-\Delta)^2)(a(L-\Delta)+\frac{1}{2}b(L-\Delta)^3)(L-\Delta)}{(1+(a(L-\Delta)+\frac{1}{2}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{5}{2}}})\times$$

$$(\frac{2a+3b(L-\Delta)^2}{(1+(a(L-\Delta)+\frac{1}{2}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-\frac{1}{2}P(L-\Delta)+$$

$$-\frac{P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{1+\sqrt{t}}-\frac{3}{2}Pt(L\text{-}\Delta)+\frac{Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{1+\sqrt{t}}-P\Delta-\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}-3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+$$

$$+2(\frac{2}{(1+(\frac{6}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{108}{125}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{18(2a+\frac{108}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(\frac{6}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{108}{125}b(L\text{-}\Delta)^3)(L\text{-}\Delta)}{5(1+(\frac{6}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{108}{125}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{5}{2}}})\times$$

$$(\frac{2a+\frac{108}{25}b(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(\frac{6}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{108}{125}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-\frac{3}{5}P(L\text{-}\Delta)+$$

$$-\frac{6P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-\frac{9}{5}Pt(L\text{-}\Delta)+\frac{6Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-P\Delta-\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}-3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+$$

$$+4(\frac{2}{(1+(\frac{7}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{343}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{21(2a+\frac{147}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(\frac{7}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{343}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)(L\text{-}\Delta)}{5(1+(\frac{7}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{343}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{5}{2}}})\times$$

$$(\frac{2a+\frac{147}{25}b(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(\frac{7}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{343}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-\frac{7}{10}P(L\text{-}\Delta)+$$

$$-\frac{7P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-\frac{21}{10}Pt(L\text{-}\Delta)+\frac{7Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-P\Delta-\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}-3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+$$

$$+2(\frac{2}{(1+(\frac{8}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{256}{125}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{24(2a+\frac{192}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(\frac{8}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{256}{125}b(L\text{-}\Delta)^3)(L\text{-}\Delta)}{5(1+(\frac{8}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{256}{125}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{5}{2}}})\times$$

$$(\frac{2a+\frac{192}{25}b(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(\frac{8}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{256}{125}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-\frac{4}{5}P(L\text{-}\Delta)+$$

$$-\frac{8P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-\frac{12}{5}Pt(L\text{-}\Delta)+\frac{8Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-P\Delta-\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}-3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+$$

$$+4\left(\frac{2}{(1+(\frac{9}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{729}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{27(2a+\frac{243}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(\frac{9}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{729}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)(L\text{-}\Delta)}{5(1+(\frac{9}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{729}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{5}{2}}}\right)\times$$

$$\left(\frac{2a+\frac{243}{25}b(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(\frac{9}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{729}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt\text{-}\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}\text{-}9P(L\text{-}\Delta)+\right.$$

$$\left.\text{-}\frac{9P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}\text{-}\frac{27}{10}Pt(L\text{-}\Delta)+\frac{9Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}\text{-}P\Delta\text{-}\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}\text{-}3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}})\right)+$$

$$+\left(\frac{2}{(1+(2a(L\text{-}\Delta)+4b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}\text{-}\frac{6(2a+12b(L\text{-}\Delta)^2)(2a(L\text{-}\Delta)+4b(L\text{-}\Delta)^3)(L\text{-}\Delta)}{(1+(2a(L\text{-}\Delta)+4b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{5}{2}}}\right)\times$$

$$\left(\frac{2a+12b(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(2a(L\text{-}\Delta)+4b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt\text{-}\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}\text{-}P(L\text{-}\Delta)+\right.$$

$$\left.\text{-}\frac{2P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{1+\sqrt{t}}\text{-}3Pt(L\text{-}\Delta)+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{1+\sqrt{t}}\text{-}P\Delta\text{-}\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}\text{-}3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}})\right))=0 \qquad (8.35)$$

$$\frac{1}{30}(L\text{-}\Delta)(4(\frac{3(L\text{-}\Delta)^2}{25(1+(\frac{1}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{1}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$-\frac{3(2a+\frac{3}{25}b(L\text{-}\Delta)^2)(\frac{1}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{1}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)(L\text{-}\Delta)^3}{250(1+(\frac{1}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{1}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{5}{2}}})\times(\frac{2a+\frac{3}{25}b(L\text{-}\Delta)^2}{(1+(\frac{1}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{1}{250}b(L\text{-}\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-$$

$$+\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt\text{-}\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}\text{-}\frac{1}{10}P(L\text{-}\Delta)+$$

$$\text{-}\frac{P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}\text{-}\frac{3}{10}Pt(L\text{-}\Delta)+\frac{Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}\text{-}P\Delta\text{-}\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}\text{-}3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+$$

$$+2\left(\frac{12(L-\Delta)^2}{25(1+(\frac{2}{5}a(L-\Delta)+\frac{4}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{12(2a+\frac{12}{25}b(L-\Delta)^2)(\frac{2}{5}a(L-\Delta)+\frac{4}{125}b(L-\Delta)^3)(L-\Delta)^3}{125(1+(\frac{2}{5}a(L-\Delta)+\frac{4}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{5}{2}}}\right)\times$$

$$\left(\frac{2a+\frac{12}{25}b(L-\Delta)^2}{(1+(\frac{2}{5}a(L-\Delta)+\frac{4}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-\frac{1}{5}P(L-\Delta)+\right.$$

$$\left.-\frac{2P\sqrt{t}(L-\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-\frac{3}{5}Pt(L-\Delta)+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}(L-\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-P\Delta-\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}-3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}})\right)+$$

$$+4\left(\frac{27(L-\Delta)^2}{25(1+(\frac{3}{5}a(L-\Delta)+\frac{27}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{81(2a+\frac{27}{25}b(L-\Delta)^2)(\frac{3}{5}a(L-\Delta)+\frac{27}{250}b(L-\Delta)^3)(L-\Delta)^3}{250(1+(\frac{3}{5}a(L-\Delta)+\frac{27}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{5}{2}}}\right)\times$$

$$\left(\frac{2a+\frac{27}{25}b(L-\Delta)^2}{(1+(\frac{3}{5}a(L-\Delta)+\frac{27}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-\frac{3}{10}P(L-\Delta)+\right.$$

$$\left.-\frac{3P\sqrt{t}(L-\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-\frac{9}{10}Pt(L-\Delta)+\frac{3Pt^{\frac{3}{2}}(L-\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-P\Delta-\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}-3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}})\right)+$$

$$+2\left(\frac{48(L-\Delta)^2}{25(1+(\frac{4}{5}a(L-\Delta)+\frac{32}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{96(2a+\frac{48}{25}b(L-\Delta)^2)(\frac{4}{5}a(L-\Delta)+\frac{32}{125}b(L-\Delta)^3)(L-\Delta)^3}{125(1+(\frac{4}{5}a(L-\Delta)+\frac{32}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{5}{2}}}\right)\times$$

$$\left(\frac{2a+\frac{48}{25}b(L-\Delta)^2}{(1+(\frac{4}{5}a(L-\Delta)+\frac{32}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-\frac{2}{5}P(L-\Delta)+\right.$$

$$\left.-\frac{4P\sqrt{t}(L-\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-\frac{6}{5}Pt(L-\Delta)+\frac{4Pt^{\frac{3}{2}}(L-\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-P\Delta-\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}-3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}})\right)+$$

$$+4\left(\frac{3(L-\Delta)^2}{(1+(a(L-\Delta)+\frac{1}{2}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3(2a+3b(L-\Delta)^2)(a(L-\Delta)+\frac{1}{2}b(L-\Delta)^3)(L-\Delta)^3}{2(1+(a(L-\Delta)+\frac{1}{2}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{5}{2}}}\right)\times$$

$$
(\frac{2a+3b(L\text{-}\Delta)^{2}}{(1+(a(L\text{-}\Delta)+\frac{1}{2}b(L\text{-}\Delta)^{3})^{2})^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt\text{-}\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}\text{-}\frac{1}{2}P(L\text{-}\Delta)+
$$

$$
\text{-}\frac{P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{1+\sqrt{t}}\text{-}\frac{3}{2}Pt(L\text{-}\Delta)+\frac{Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{1+\sqrt{t}}\text{-}P\Delta\text{-}\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}\text{-}3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+
$$

$$
+2(\frac{108(L\text{-}\Delta)^{2}}{25(1+(\frac{6}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{108}{125}b(L\text{-}\Delta)^{3})^{2})^{\frac{3}{2}}}+
$$

$$
-\frac{324(2a+\frac{108}{25}b(L\text{-}\Delta)^{2})(\frac{6}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{108}{125}b(L\text{-}\Delta)^{3})(L\text{-}\Delta)^{3}}{125(1+(\frac{6}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{108}{125}b(L\text{-}\Delta)^{3})^{2})^{\frac{5}{2}}})\times
$$

$$
(\frac{2a+\frac{108}{25}b(L\text{-}\Delta)^{2}}{(1+(\frac{6}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{108}{125}b(L\text{-}\Delta)^{3})^{2})^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt\text{-}\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}\text{-}\frac{3}{5}P(L\text{-}\Delta)+
$$

$$
\text{-}\frac{6P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}\text{-}\frac{9}{5}Pt(L\text{-}\Delta)+\frac{6Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}\text{-}P\Delta\text{-}\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}\text{-}3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+
$$

$$
+4(\frac{147(L\text{-}\Delta)^{2}}{25(1+(\frac{7}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{343}{250}b(L\text{-}\Delta)^{3})^{2})^{\frac{3}{2}}}+
$$

$$
-\frac{1029(2a+\frac{147}{25}b(L\text{-}\Delta)^{2})(\frac{7}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{343}{250}b(L\text{-}\Delta)^{3})(L\text{-}\Delta)^{3}}{250(1+(\frac{7}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{343}{250}b(L\text{-}\Delta)^{3})^{2})^{\frac{5}{2}}})\times
$$

$$
(\frac{2a+\frac{147}{25}b(L\text{-}\Delta)^{2}}{(1+(\frac{7}{5}a(L\text{-}\Delta)+\frac{343}{250}b(L\text{-}\Delta)^{3})^{2})^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt\text{-}\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}\text{-}\frac{7}{10}P(L\text{-}\Delta)+
$$

$$
\text{-}\frac{7P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}\text{-}\frac{21}{10}Pt(L\text{-}\Delta)+\frac{7Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}\text{-}P\Delta\text{-}\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}\text{-}3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+
$$

$$+2(\frac{192(L-\Delta)^2}{25(1+(\frac{8}{5}a(L-\Delta)+\frac{256}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$-\frac{768(2a+\frac{192}{25}b(L-\Delta)^2)(\frac{8}{5}a(L-\Delta)+\frac{256}{125}b(L-\Delta)^3)(L-\Delta)^3}{125(1+(\frac{8}{5}a(L-\Delta)+\frac{256}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{5}{2}}})\times$$

$$(\frac{2a+\frac{192}{25}b(L-\Delta)^2}{(1+(\frac{8}{5}a(L-\Delta)+\frac{256}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-\frac{4}{5}P(L-\Delta)+$$

$$-\frac{8P\sqrt{t}(L-\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-\frac{12}{5}Pt(L-\Delta)+\frac{8Pt^{\frac{3}{2}}(L-\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-P\Delta-\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}-3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+$$

$$+4(\frac{243(L-\Delta)^2}{25(1+(\frac{9}{5}a(L-\Delta)+\frac{729}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$-\frac{2187(2a+\frac{243}{25}b(L-\Delta)^2)(\frac{9}{5}a(L-\Delta)+\frac{729}{250}b(L-\Delta)^3)(L-\Delta)^3}{250(1+(\frac{9}{5}a(L-\Delta)+\frac{729}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{5}{2}}})\times$$

$$(\frac{2a+\frac{243}{25}b(L-\Delta)^2}{(1+(\frac{9}{5}a(L-\Delta)+\frac{729}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-\frac{9}{10}P(L-\Delta)+$$

$$-\frac{9P\sqrt{t}(L-\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-\frac{27}{10}Pt(L-\Delta)+\frac{9Pt^{\frac{3}{2}}(L-\Delta)}{5(1+\sqrt{t})}-P\Delta-\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}-3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))+$$

$$+(\frac{12(L-\Delta)^2}{(1+(2a(L-\Delta)+4b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{12(2a+12b(L-\Delta)^2)(2a(L-\Delta)+4b(L-\Delta)^3)(L-\Delta)^3}{(1+(2a(L-\Delta)+4b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{5}{2}}})\times$$

$$(\frac{2a+12b(L-\Delta)^2}{(1+(2a(L-\Delta)+4b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4EIt}(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-P(L-\Delta)+$$

$$-\frac{2P\sqrt{t}(L\text{-}\Delta)}{1+\sqrt{t}}\text{-}3Pt(L\text{-}\Delta)+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}(L\text{-}\Delta)}{1+\sqrt{t}}\text{-}P\Delta\text{-}\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}\text{-}3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}}))) = 0 \tag{8.36}$$

(8.24) denkleminde verilen G ifadesi, (2.11) eşitliğindeki yay uzunluğu formülünde kullanıldığında, Simpson yöntemi yardımıyla, yay uzunluğu eşitliği integre edilerek Δ, yatay yer değiştirme değerleri hesaplanır.

L = 25.4 m, P = 1780 N, $EI = 516.54 \times 10^3 \ Nm^2$ sayısal büyüklükleri ve Δ, yatay yer değiştirme değerleri kullanılarak, farklı t değerleri için (8.35) ve (8.36) eşitliklerinden yaklaşık deneme fonksiyonundaki a ve b sabitleri elde edilebilir. Bulunan y(x) yaklaşık deneme fonksiyonunda, x = L-Δ için y(L-Δ) ifadesi, Şekil 3.1'deki konsol kirişin serbest uç noktasındaki δ_v, düşey yer değiştirme değerlerini vermektedir.

Farklı t değerleri için hesaplanan yatay ve düşey yer değiştirme değerleri, Çizelge 8.3'de gösterilmektedir.

Çizelge 8.3 Serbest uç noktasından tekil kuvvet etkiyen doğrusal çift modüllü konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler.

$\sigma_1 = E_1\varepsilon$ (Basınç), $\sigma_2 = E_2\varepsilon$ (Çekme)						
(E_1bh^3 / 12) = EI $E_2 = t\,E_1$, $h = h_1+h_2$, L = 25,4m , P = 1780 N , EI = $516{,}54 \times 10^3$ Nm^2						
t		0,25	0,5	1	2	5
Referans Değer*	Δ (m)			4,61		
	δ_v (m)			13,4198		
Açık Runge Kutta Yöntemi	Δ (m)	9,84867	6,95821	4,65362	3,06576	1,84727
	δ_v (m)	18,1334	15,8023	13,2933	9,72465	8,65842
Moment Yöntemi	Δ (m)	9,84867	6,95821	4,65362	3,06576	1,84727
	δ_v (m)	17,478	15,4333	13,1956	10,9917	8,67377
Galerkin Yöntemi	Δ (m)	9,84867	6,95821	4,65362	3,06576	1,84727
	δ_v (m)	11,9334	14,3213	16,3313	11,8634	8,08435
Alt Bölge Kollokasyon Yöntemi	Δ (m)	9,84867	6,95821	4,65362	3,06576	1,84727
	δ_v (m)	17,2403	15,293	13,0792	10,9096	8,62774
En Küçük Kareler Yöntemi	Δ (m)	9,84867	6,95821	4,65362	3,06576	1,84727
	δ_v (m)	17,7747	16,125	12,8545	10,9397	8,71259

* Fertis, D.G., 1999, "Nonlinear Mechanics Second Edition", CRC Pres LLC,Boca Raton,Sayfa 13, Örnek 1.1.

8.4 Yayılı Yüklü Doğrusal Çift Modüllü Basit Kirişlerde Büyük Yer Değiştirmeler

Kesiti, Şekil 8.1 deki gibi verilen, Şekil 2.1'deki yayılı yüklü doğrusal, çift modüllü basit kirişlerdeki şekil değiştirmeleri hesaplarken, gerilme değerleri aşağıdaki gibi alınır:

$$\sigma_1 = E_1\varepsilon \tag{8.37}$$

$$\sigma_2 = E_2\varepsilon \tag{8.38}$$

(8.37) eşitliğinde çekme, (8.38) eşitliğinde ise basınç, gerilmesinin değerleri verilmiştir. Burada E_1 çekmedeki, E_2 basınçtaki elastiklik modülüdür.

$$E_2 = tE_1 \tag{8.39}$$

olarak alınırsa ve

$$x_0 = x + \Delta \quad \text{(Fertis, D.G., 1999)} \tag{8.40}$$

yay uzunluğu ile ilgili olarak yukarıdaki kabulü yaparsak,

Şekil 4.1' den eğilme moment değeri, aşağıdaki gibi bulunur:

$$M = \frac{wx^2}{2} - \frac{w(L-\Delta)x}{2} \quad \text{(Fertis, D.G., 1999)} \tag{8.41}$$

(2.95), (8.6), (8.18), (8.19), (8.37), (8.38), (8.39), (8.41) denklemleri kullanıldığında, κ ve h_1 değerleri aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\kappa = \frac{3}{2bB_1h^3t}(-Lwx - \frac{2L\sqrt{t}wx}{1+\sqrt{t}} - 3Ltwx + \frac{2Lt^{\frac{3}{2}}wx}{1+\sqrt{t}} + wx^2 + \frac{2\sqrt{t}wx^2}{1+\sqrt{t}} + 3twx^2 - \frac{2t^{\frac{3}{2}}wx^2}{1+\sqrt{t}} +$$

$$wx\Delta + \frac{2\sqrt{t}wx\Delta}{1+\sqrt{t}} + 3twx\Delta - \frac{2t^{\frac{3}{2}}wx\Delta}{1+\sqrt{t}}) \tag{8.42}$$

$$h_1 = \frac{h\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} \tag{8.43}$$

eğrilik κ, ifadesi aşağıdaki gibi alındığında,

$$\kappa = \frac{y''(x)}{(1+(y'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{(Lewis, G., Monosa, F., 1981)} \tag{8.44}$$

ve (8.44) ifadesinin her iki tarafı integre edildiğinde;

$$\int \kappa dx + C_1 = \frac{y'(x)}{(1+(y'(x))^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{8.45}$$

$$\int \kappa dx = \frac{3(1+\sqrt{t})^2 w(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2(-L+\Delta))}{2bB_1h^3t} \tag{8.46}$$

denklemleri elde edilir. (8.45) denkleminde C_1 integral sabitini bulmak için kirişin orta noktasındaki eğim açısının sıfır olması kullanılacaktır. Yani x = (L-Δ) / 2'de $y'(x)$ sıfır olacaktır. (8.42) , (8.45) ve (8.46) eşitlikleri kullanıldığında C_1 ifadesi bulunur:

$$C_1 = -\frac{3(1+\sqrt{t})^2 w(\frac{1}{24}(L-\Delta)^3 + \frac{1}{8}(L-\Delta)^2(-L+\Delta))}{2bB_1h^3t} \tag{8.47}$$

$$\int \kappa dx + C_1 = G \quad \text{(Fertis, D.G., 1999)} \tag{8.48}$$

olarak alınırsa,

$$y'(x) = \frac{G}{(1-(G)^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{(Fertis, D.G., 1999)} \tag{8.49}$$

şeklinde yazılabilir.

(8.46), (8.47), ve (8.48), eşitliklerinden G aşağıdaki gibidir:

$$G = \frac{3(1+\sqrt{t})^2 w(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2(\text{-}L+\Delta))}{2bE_1h^3t} - \frac{3(1+\sqrt{t})^2 w(\frac{1}{24}(L\text{-}\Delta)^3 + \frac{1}{8}(L\text{-}\Delta)^2(\text{-}L+\Delta))}{2bE_1h^3t} \tag{8.50}$$

$$\frac{E_1bh^3}{12} = EI \tag{8.51}$$

olarak alındığında ve (8.51) eşitliğindeki EI, Eğilme rijitliği ifadesi (8.50) denkleminde yerine yazıldığında, G değeri aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir:

$$G = \frac{3(1+\sqrt{t})^2 w(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2(-L+\Delta))}{24EIt} - \frac{3(1+\sqrt{t})^2 w(\frac{1}{24}(L-\Delta)^3 + \frac{1}{8}(L-\Delta)^2(-L+\Delta))}{24EIt}$$

(8.52)

(2.11) eşitliği ile verilen yay uzunluğu formülü yardımıyla Δ, yatay yer değiştirme büyüklüğünü bulmak mümkündür. (8.49) ve (8.52) eşitlikleri, (2.10) denkleminde yerine yazılıp, Simpson kuralı yardımıyla yay uzunluğu eşitliği integre edilebilir. İntegrasyon işlemi sonucunda elde edilen eşitlikten Δ'yı çekebilmek için ise, Newton yöntemi kullanılarak kök bulma işlemi uygulanır. Daha sonra düşey yer değiştirme büyüklükleri için Runge-Kutta yöntemi yardımıyla y(x) enterpolasyon fonksiyonunu elde edilip, orta noktadaki en büyük düşey yer değiştirmenin değerleri bulunur. Bu değerler, Çizelge 8.4'de gösterilmektedir.

Yukarıdaki benzer işlemleri yaparak, farklı x_0 yaklaşık yay uzunluğu kabulüyle oluşan, yeni yer değiştirme değerleri bulunabilir.

$$x_0 = x + \Delta\frac{x}{(L-\Delta)}, \text{ (Fertis, D.G., 1999)} \qquad (8.53)$$

Yukarıdaki x_0 değerine göre, önceden (8.41) denkleminde bulunan moment değeri, yeniden düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılır:

$$M = \frac{wx}{2}(x + \Delta\frac{x}{(L-\Delta)}) - \frac{wLx}{2} \qquad (8.54)$$

(8.6), (8.18), (8.19), (8.54) denklemleri kullanılarak bulunan eğrilik κ, aşağıdaki gibidir:

$$\kappa = \frac{3}{2bB_1h^3t}(-Lwx - \frac{2L\sqrt{t}wx}{1+\sqrt{t}} - 3Ltwx + \frac{2Lt^{\frac{3}{2}}wx}{1+\sqrt{t}} + \frac{Lwx^2}{L-\Delta} + \frac{2L\sqrt{t}wx^2}{(1+\sqrt{t})(L-\Delta)}$$

$$+\frac{3Ltwx^2}{L-\Delta} - \frac{2Lt^{\frac{3}{2}}wx^2}{(1+\sqrt{t})(L-\Delta)}) \qquad (8.55)$$

h_1 değeri ise (8.43) eşitliğinde verilen değer ile aynıdır. (8.48) eşitliğinde verilen G değerini bulmak için (8.55)'deki κ değeri integre edilir. Sınır şartları kullanılıp integrasyon sabiti bulunarak G aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$G = -\frac{3L(1+\sqrt{t})^2 w(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2(L-\Delta))}{2bB_1h^3t(L-\Delta)} + \frac{L(1+\sqrt{t})^2 w(L-\Delta)^2}{8bB_1h^3t} \tag{8.56}$$

(8.51) denklemindeki eğilme rijitliği EI yerine koyulursa, G değeri,

$$G = -\frac{3L(1+\sqrt{t})^2 w(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2(L-\Delta))}{24EIt(L-\Delta)} + \frac{L(1+\sqrt{t})^2 w(L-\Delta)^2}{96EIt} \tag{8.57}$$

şeklinde ifade edilir. (2.10), (8.49), ve (8.57) eşitlikleri yardımıyla yukarıda yapılanlara benzer şekilde yine Simpson, Newton ve Runge-Kutta yöntemi kullanılarak, yer değiştirme değerleri bulunur. Bu değerler Çizelge 8.4'de gösterilmektedir.

İki farklı x_0 değeri için yukarıda yapılan işlemlere benzer tarzda, yeni bir x_0 kabulü ile aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

$$x_0 = x + \Delta\sqrt{\frac{x}{(L-\Delta)}}, \text{ (Fertis, D.G., 1999)} \tag{8.58}$$

$$M = \frac{wx}{2}(x + \Delta\sqrt{\frac{x}{(L-\Delta)}}) - \frac{wLx}{2} \tag{8.59}$$

$$\kappa = \frac{1}{2bB_1h^3t}(3(-Lwx - \frac{2L\sqrt{t}wx}{1+\sqrt{t}} - 3Ltwx + \frac{2Lt^{\frac{3}{2}}wx}{1+\sqrt{t}} + wx^2 + \frac{2\sqrt{t}wx^2}{1+\sqrt{t}} + 3twx^2 - \frac{2t^{\frac{3}{2}}wx^2}{1+\sqrt{t}} +$$
$$+ wx\Delta\sqrt{\frac{x}{L-\Delta}} + \frac{2\sqrt{t}wx\Delta\sqrt{\frac{x}{L-\Delta}}}{1+\sqrt{t}} + 3twx\Delta\sqrt{\frac{x}{L-\Delta}} - \frac{2t^{\frac{3}{2}}wx\Delta\sqrt{\frac{x}{L-\Delta}}}{1+\sqrt{t}})) \tag{8.60}$$

(8.48), (8.51), (8.60) eşitlikleri ve sınır şartları kullanılarak,

$$G = \frac{(1+\sqrt{t})^2 wx^2(-15L + 10x + 12\Delta\sqrt{\frac{x}{L-\Delta}})}{240EIt} - \frac{(1+\sqrt{t})^2 w(L-\Delta)^2(-15L + 5(L-\Delta) + 6\Delta\sqrt{2}}{960EIt} \tag{8.61}$$

şeklinde yazılır. h_1 değeri (8.43) denklemindeki ile aynıdır.

(8.61) de bulunan G ifadesi, (2.11) yay uzunluğu denkleminde kullanılarak, Simpson yöntemi yardımıyla Δ, yatay yer değiştirme değerleri bulunur. Şekil 4.1'deki sınır şartları göz önüne alınarak Runge-Kutta yöntemiyle y(x) fonksiyonu elde edilir. $x=\frac{L-\Delta}{2}$ için $y(\frac{L-\Delta}{2})$ ifadesi kirişin orta noktasındaki en büyük düşey yer değiştirmeyi verir. Yatay ve düşey yer değiştirme değerleri Çizelge 8.4'de gösterilmektedir.

Son olarak trigonometrik bir x_0 değeri için hesaplama yapılmıştır.

$$x_0 = x + \Delta \mathrm{Sin}[\frac{\pi x}{2(L-\Delta)}], \text{ (Fertis, D.G., 1999)} \tag{8.62}$$

$$M = \frac{wx}{2}(x + \Delta \mathrm{Sin}[\frac{\pi x}{2(L-\Delta)}]) - \frac{wLx}{2} \tag{8.63}$$

(8.6), (8.18), (8.19) ve (8.63) eşitliklerinden κ, bulunabilir:

$$\kappa = \frac{1}{2bB_1h^3t}(3(-Lwx - \frac{2L\sqrt{t}wx}{1-\sqrt{t}} - 3Ltwx + \frac{2Lt^{\frac{3}{2}}wx}{1-\sqrt{t}} + wx^2 + \frac{2\sqrt{t}wx^2}{1-\sqrt{t}} + 3twx^2 - \frac{2t^{\frac{3}{2}}wx^2}{1-\sqrt{t}} +$$

$$wx\Delta \mathrm{Sin}[\frac{\pi x}{2(L-\Delta)}] + \frac{2\sqrt{t}wx\Delta \mathrm{Sin}[\frac{\pi x}{2(L-\Delta)}]}{1-\sqrt{t}} + 3twx\Delta \mathrm{Sin}[\frac{\pi x}{2(L-\Delta)}] - \frac{2t^{\frac{3}{2}}wx\Delta \mathrm{Sin}[\frac{\pi x}{2(L-\Delta)}]}{1-\sqrt{t}}))$$

(8.64)

(8.64)'deki κ değeri integre edilip, (8.51) eşitliğindeki EI yerine yazıldığında, G aşağıdaki gibi bulunur:

$$G = \frac{(1+\sqrt{t})^2 w(\pi^2 x^2(-3L+2x) + 12\pi x\Delta(-L+\Delta)\mathrm{Cos}[\frac{\pi x}{2(L-\Delta)}] + 24(L-\Delta)^2 \Delta \mathrm{Sin}[\frac{\pi x}{2(L-\Delta)}]}{48EI\pi^2 t}$$

$$-\frac{1}{48EI\pi^2 t}(1+\sqrt{t})^2 w(\frac{1}{4}\pi^2(-2L-\Delta)(L-\Delta)^2 + 6\pi(L-\Delta)\Delta(-L+\Delta)\mathrm{Cos}[\frac{\pi(L-\Delta)}{4(L-\Delta)}] +$$

$$+24(L-\Delta)^2 \Delta \mathrm{Sin}[\frac{\pi(L-\Delta)}{4(L-\Delta)}]) \tag{8.65}$$

(8.65)'de bulunan G değeri, (8.45), (8.48) ve (8.49) eşitlikleri ile birlikte (2.10) ve (2.11) yay uzunluğu denkleminde yerine yazıldığında, Simpson ve Newton metotlarını kullanarak Δ yatay yer değiştirme değerleri, (8.48), (8.49) denklemleri ve sınır şartlarını kullanıp, Runge-Kutta yöntemiyle orta noktadaki en büyük düşey yer değiştirme değerleri bulunur.

Hesaplanan yatay ve düşey yer değiştirme değerleri, Çizelge 8.4'de gösterilmektedir.

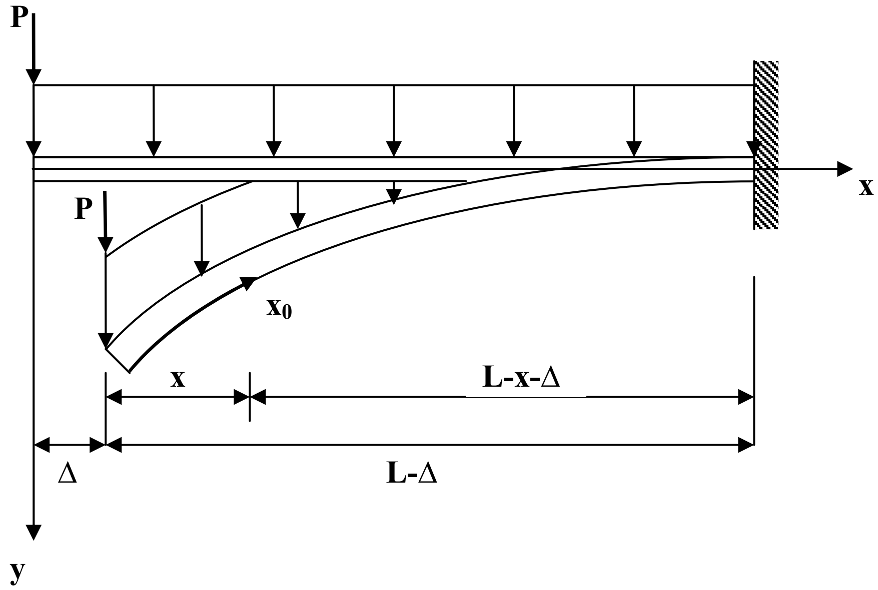
Dört farklı yaklaşık x_0 değeri için çeşitli t değerleri kullanarak bulunan Δ, yatay yer değiştirme , δ_v (kiriş ortasındaki en büyük düşey yer değiştirme) değerleri Çizelge 8.4'de kıyaslamalı olarak gösterilmektedir. Bu çizelgede L, kiriş uzunluğu 25.4 m, w, birim yük 1751 N/m, EI, eğilme rijitliği 215.224 $\times 10^3$ Nm^2 olarak alınmıştır. İlk üç x_0 değeri için yer değiştirmeler incelendiğinde, t değerleri arttıkça yani çekmedeki elastiklik modülü, basınçtaki elastiklik modülüne yaklaştıkça veya daha büyük hale geldiğinde yatay ve düşey yer değiştirmeler azalmaktadır. Son trigonometrik x_0 değerinde ise yatay yer değiştirmeler, t değerindeki artışa göre azalmasına rağmen, düşey yer değiştirmeler, diğer üç x_0 değerindekinden farklı olarak, t değerindeki artışla birlikte artmaktadır.

Çizelge 8.4 Üniform yayılı yüklü doğrusal, çift modüllü basit kirişteki yer değiştirmeler.

$\sigma_1 = E_1\varepsilon$ (Çekme), $\sigma_2 = E_2\varepsilon$ (Basınç)							
$(E_1bh^3/12) = EI$ $E_2 = t E_1$, $h = h_1+h_2$, $L = 25.4m$, $w = 1751.27$ N / m, $EI = 215.224*10^3$ Nm^2							
Referans Değer* ($x_0 = x+\Delta$)		t	0.25	0.5	1	2	5
		Δ (m)			11.1895		
		δ_v (m)			9.33831		
Açık Runge Kutta Yöntemi	$x_0 = x+\Delta$	Δ (m)	14.47098	12.79501	11.17879	9.71955	8.12882
		δ_v (m)	10.2158	10.0547	9.53132	8.95658	8.29486
	$x_0 = x+\Delta(x / L-\Delta)$	Δ (m)	18.21817	16.47939	14.64456	12.84057	10.73813
		δ_v (m)	8.74208	9.71382	10.2022	10.0654	9.3618
	$x_0 = x+\Delta(x / L-\Delta)^{1/2}$	Δ (m)	17.18309	15.35461	13.47417	11.66782	9.65615
		δ_v (m)	10.4915	11.7105	12.26	11.6657	9.89087
	$x_0 = x+\Delta\mathrm{Sin}[\pi x/2(L-\Delta)]$	Δ (m)	17.54175	15.73349	13.85314	12.01409	9.85736
		δ_v (m)	10.3436	11.781	12.8004	13.0826	11.8807

* Fertis, D.G., 1999, "Nonlinear Mechanics Second Edition", CRC Pres LLC,Boca Raton,Sayfa 92, Örnek 2.4.

8.5 Dikdörtgen Kesitli Doğrusal Çift Modüllü Bileşik Yüklü Konsol Kirişlerdeki Büyük Yer Değiştirmeler



Şekil 8.2 Bileşik yüklü konsol kiriş.

Şekil 8.2'deki bileşik yüklü, doğrusal, çift modüllü konsol kirişlerdeki gerilme dağılımı (8.37) ve (8.38) denklemlerindeki gibi alınmıştır. x_0 yay uzunluğu için (8.40) denklemindeki kabul yapıldığında, aşağıdaki moment eşitliği yazılabilir:

$$M = \frac{wx}{2}(x + \Delta) + Px \tag{8.66}$$

$$k = \frac{wL}{P}, \text{ (Fertis, D.G., 1999)} \tag{8.67}$$

şeklinde bir kabul yapılmıştır. (8.67) denklemindeki P ifadesi, Şekil 8.2'den görüldüğü gibi, uç noktadan düşey doğrultuda uygulanan kuvvettir.

(8.18), (8.19), (8.39), (8.66) ve (8.67) denklemleri kullanıldığında κ,değeri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\kappa = \frac{3}{2bB_1h^3t}(2Px + \frac{4P\sqrt{t}x}{1+\sqrt{t}} + 6Ptx - \frac{4Pt^{\frac{3}{2}}x}{1+\sqrt{t}} + \frac{kPx^2}{L} + \frac{2kP\sqrt{t}x^2}{L(1+\sqrt{t})} + \frac{3kPtx^2}{L} - \frac{2kPt^{\frac{3}{2}}x^2}{L(1+\sqrt{t})} +$$

$$+\frac{kPx\Delta}{L}+\frac{2kP\sqrt{t}x\Delta}{L(1+\sqrt{t})}+\frac{3kPtx\Delta}{L}-\frac{2kPt^{\frac{3}{2}}x\Delta}{L(1+\sqrt{t})})$$

(8.45), (8.48), (8.49), (8.51) ve (8.68) eşitlikleri kullanılarak, G değeri aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$G=\frac{3P(1+\sqrt{t})^2(\frac{kx^3}{3}+\frac{1}{2}x^2(2L+k\Delta))}{24EILt}-\frac{3P(1+\sqrt{t})^2(\frac{1}{3}k(L-\Delta)^3+\frac{1}{2}(L-\Delta)^2(2L+k\Delta))}{24EILt}$$

(8.69)

(2.10), (8.49) ve (8.69) denklemleri kullanılarak toplam yay uzunluğu eşitliğinden Simpson ve Newton yöntemiyle Δ, yatay yer değiştirme, değerleri bulunur. Bulunan yatay yer değiştirmeler, Şekil 8.2'deki sınır şartları ve (8.69) denklemindeki G değeri kullanıldığında, Runge-Kutta Yöntemi yardımıyla elde edilen y(x) enterpolasyon fonksiyonuyla, uç noktadaki düşey yer değiştirmeler hesaplanır. Yatay ve düşey yer değiştirme değerleri Çizelge 8.5'de verilmektedir.

x_0 yay uzunluğu, (8.53) denkleminde verildiği şekilde kabul edilecek olursa, moment aşağıdaki gibi alınır:

$$M=\frac{wx}{2}(x+\Delta\frac{x}{L-\Delta})+Px \quad (8.70)$$

(8.18), (8.19), (8.39), (8.67) ve (8.70) denklemleri kullanıldığında κ ve h_1 değeri;

$$\kappa=\frac{3}{2bB_1h^3t}(2Px+\frac{4P\sqrt{t}x}{1+\sqrt{t}}+6Ptx-\frac{4Pt^{\frac{3}{2}}x}{1+\sqrt{t}}+\frac{kPx^2}{L-\Delta}+\frac{2kP\sqrt{t}x^2}{(1+\sqrt{t})(L-\Delta)}+$$

$$+\frac{3kPtx^2}{L-\Delta}-\frac{2kPt^{\frac{3}{2}}x^2}{(1+\sqrt{t})(L-\Delta)}) \quad (8.71)$$

şeklinde yazılır. h_1 değeri, (8.43) eşitliğindeki değerle aynıdır.

(8.45), (8.48), (8.49), (8.51) ve (8.71) denklemleri kullanılarak, G değeri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$G=\frac{3P(1+\sqrt{t})^2(\frac{kx^3}{3}+x^2(L-\Delta))}{24EILt(L-\Delta)}-\frac{3P(1+\sqrt{t})^2((L-\Delta)^3+\frac{1}{3}k(L-\Delta)^3)}{24EILt(L-\Delta)} \tag{8.72}$$

(2.10), (2.11), (8.49), (8.72) eşitlikleri ve toplam yay uzunluğu formülü yardımıyla yatay yer değiştirmeler, yatay yer değiştirmeler ve Runge-Kutta Yöntemi yardımıyla da düşey yer değiştirmeler hesaplanır.

x_0 yay uzunluğu (8.58) denkleminde verildiği gibi kabul edilecek olursa moment ifadesi;

$$M=\frac{wx}{2}(x+\Delta\sqrt{\frac{x}{L-\Delta}})+Px \tag{8.73}$$

şeklinde yazılabilir.

(8.18), (8.19), (8.39), (8.67) ve (8.73) denklemleri kullanıldığında, κ değeri aşağıdaki gibidir:

$$\kappa=\frac{1}{2bB_1h^3t}(3(2Px+\frac{4P\sqrt{t}x}{1+\sqrt{t}}+6Ptx-\frac{4Pt^{\frac{3}{2}}x}{1+\sqrt{t}}+\frac{kPx^2}{L}+\frac{2kP\sqrt{t}x^2}{L(1+\sqrt{t})}+\frac{3kPtx^2}{L}-\frac{2kPt^{\frac{3}{2}}x^2}{L(1+\sqrt{t})}+$$

$$+\frac{kPx\Delta\sqrt{\frac{x}{L-\Delta}}}{L}+\frac{2kPx\Delta\sqrt{t}\sqrt{\frac{x}{L-\Delta}}}{L(1+\sqrt{t})}+\frac{3kPxt\Delta\sqrt{\frac{x}{L-\Delta}}}{L}-\frac{2kPx\Delta t^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{x}{L-\Delta}}}{L(1+\sqrt{t})})) \tag{8.74}$$

(8.45), (8.48), (8.49), (8.51) ve (8.74) eşitlikleri kullanılarak G değeri bulunur:

$$G=\frac{P(1+\sqrt{t})^2x^2(15L+5kx+6k\Delta\sqrt{\frac{x}{L-\Delta}}}{120EILt}-\frac{P(1+\sqrt{t})^2(L-\Delta)^2(15L+5k(L-\Delta)+6k\Delta)}{120EILt} \tag{8.75}$$

(2.10), (2.11), (8.49), (8.75) denklemleri ve Şekil 8.2'deki sınır şartları kullanılarak, Simpson ve Newton yöntemiyle yatay yer değiştirme değerleri bulunur. Yatay yer değiştirme değerleri ve Runge Kutta Yöntemi kullanılıp, kirişin serbest uç noktasındaki düşey yer değiştirme değerleri de hesaplanarak Çizelge 8.5'de gösterilmiştir.

Son olarak (8.62) denklemindeki trigonometrik x_0 yay uzunluğu kabulüyle M, eğilme momenti değeri;

$$M = \frac{wx}{2}(x + \Delta \mathrm{Sin}[\frac{\pi x}{2(L-\Delta)}]) + Px \tag{8.76}$$

olarak alınır.

Aşağıdaki κ, eğrilik ifadesini elde etmek için (8.18), (8.19), (8.39), (8.67) ve (8.76) denklemlerinden faydalanılır:

$$\kappa = \frac{1}{2bB_1h^3t}(3(2Px + \frac{4Px\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} + 6Ptx - \frac{4Pxt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}} + \frac{kPx^2}{L} + \frac{2kPx^2\sqrt{t}}{L(1+\sqrt{t})} + \frac{3kPtx^2}{L} - \frac{2kPx^2t^{\frac{3}{2}}}{L(1+\sqrt{t})} +$$

$$\frac{kPx\Delta \mathrm{Sin}[\frac{\pi x}{2(L-\Delta)}]}{L} + \frac{2kPx\Delta\sqrt{t}\mathrm{Sin}[\frac{\pi x}{2(L-\Delta)}]}{L(1+\sqrt{t})} + \frac{3kPx\Delta t\mathrm{Sin}[\frac{\pi x}{2(L-\Delta)}]}{L} +$$

$$-\frac{2kPx\Delta t^{\frac{3}{2}}\mathrm{Sin}[\frac{\pi x}{2(L-\Delta)}]}{L(1+\sqrt{t})})) \tag{8.77}$$

h_1 değeri, (8.43) denklemindeki gibi bulunmaktadır.

(8.45), (8.48), (8.49), (8.51) ve (8.77) eşitlikleriyle G ifadesi elde edilir:

$$G = \frac{P(1+\sqrt{t})^2(\pi^2x^2(3L+kx) - 6k\pi x(L-\Delta)\Delta \mathrm{Cos}[\frac{\pi x}{2(L-\Delta)}] + 12k(L-\Delta)^2\Delta \mathrm{Sin}[\frac{\pi x}{2(L-\Delta)}]}{24EIL\pi^2t} -$$

$$\frac{P(1+\sqrt{t})^2(\pi^2(3L+k(L-\Delta))(L-\Delta)^2 - 6k\pi(L-\Delta)^2\Delta \mathrm{Cos}[\frac{\pi}{2}] + 12k(L-\Delta)^2\Delta \mathrm{Sin}[\frac{\pi}{2}]}{24EIL\pi^2t} \tag{8.78}$$

Daha önceki kısımlarda belirtildiği gibi yatay ve düşey yer değiştirmeleri hesaplamak için (2.10), (2.11), (8.49), (8.78) eşitlikleri, Simpson, Newton ve Runge-Kutta yöntemleri kullanılmaktadır.

Dört farklı yaklaşık x_0 değeri için çeşitli t değerleri kullanarak bulunan Δ (yatay yer değiştirme), δ_v (kirişin serbest uç noktasındaki düşey yer değiştirme) değerleri, Çizelge 8.5'te gösterilmektedir. Bu çizelgede L, kiriş uzunluğu 25.4 m, k = wL/P = 3, EI, eğilme rijitliği 516.541×10^3 Nm^2 , PL^2 /EI= 2.416 olarak alınmıştır. Tüm x_0 değerleri (dört farklı yaklaşım) için yer değiştirmeler incelendiğinde, t değerleri arttıkça yani çekmedeki elastiklik modülü, basınçtaki elastiklik modülüne yaklaştıkça veya daha büyük hale geldiğinde, yatay ve düşey yer değiştirmeler azalmaktadır. Artan elastiklik modülünün, yüklemelere bağlı yer değiştirmelerin büyüklüğünü azaltması gerekliliği düşünülünce, t değerindeki artışın, düşey ve yatay yer değiştirmelerin azalmasına sebep olması mantıklıdır.

Çizelge 8.5 Bileşik yüklü doğrusal çift modüllü konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler.

<table>
<tr><td colspan="8">$\sigma_1 = E_1\varepsilon$ (Basınç), $\sigma_2 = E_2\varepsilon$ (Çekme)</td></tr>
<tr><td colspan="8">$(E_1bh^3 / 12) = EI$ $E_2 = t\,E_1$, $h = h_1+h_2$, $L = 25.4m$, $k = (wL / P) = 3$,
$(PL^2/ EI) = 2,416$, $EI = 516,541\times10^3\ Nm^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">Referans Değer* ($x_0 = x+\Delta$)</td><td>t</td><td>0.25</td><td>0.5</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Δ (m)</td><td></td><td></td><td>10.3213</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>δ_v (m)</td><td></td><td></td><td>18.6309</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="8">Açık Runge Kutta Yöntemi</td><td rowspan="2">$x_0 = x+\Delta$</td><td>Δ (m)</td><td>15.27106</td><td>12.79420</td><td>10.3213</td><td>8.11872</td><td>5.88757</td></tr>
<tr><td>δ_v (m)</td><td>21.5184</td><td>20.0935</td><td>18.6303</td><td>17.0081</td><td>14.9056</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$x_0 = x+\Delta(x / L-\Delta)$</td><td>$\Delta$ (m)</td><td>14.58177</td><td>12.13014</td><td>9.75445</td><td>7.68108</td><td>5.60183</td></tr>
<tr><td>δ_v (m)</td><td>21.1848</td><td>19.8947</td><td>18.3758</td><td>16.7276</td><td>14.6473</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$x_0 = x+\Delta(x / L-\Delta)^{1/2}$</td><td>$\Delta$ (m)</td><td>14.86813</td><td>12.40331</td><td>9.98637</td><td>7.85993</td><td>5.71891</td></tr>
<tr><td>δ_v (m)</td><td>21.2697</td><td>19.9834</td><td>18.4897</td><td>16.8492</td><td>14.7573</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$x_0 = x+\Delta Sin[\pi x/2(L-\Delta)]$</td><td>$\Delta$ (m)</td><td>14.89698</td><td>12.43669</td><td>10.02017</td><td>7.88961</td><td>5.74051</td></tr>
<tr><td>δ_v (m)</td><td>21.2952</td><td>20.0261</td><td>18.529</td><td>16.8844</td><td>14.7863</td></tr>
</table>

* Fertis, D.G., 1999, “Nonlinear Mechanics Second Edition”, CRC Pres LLC,Boca Raton,Sayfa 85, Örnek 2.3

9. SAYISAL SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Hesaplamaların yapıldığı ilk bölüm olan, ikinci bölümün ilk kısmında, serbest uç noktasından moment etkiyen Ludwick tipi malzemeden yapılmış konsol kirişlerdeki yatay ve düşey yer değiştirmeler farklı yöntemlerle hesaplanıp, Referans sonuç (Lewis, G., Monosa, F.,1982) ile karşılaştırılmıştır. Referans sonuçta kapalı formda bir çözüm elde edilip Δ, yatay yer değiştirme, ve δ_v , düşey yer değiştirme değerleri hesaplanmıştır. Bu çalışmada ise yatay ve düşey yer değiştirme değerleri, $y = ax^2 + bx^4$ şeklinde alınan yaklaşık bir deneme fonksiyonu ile Simpson, Açık Runge-Kutta, Momentler, Galerkin, Alt Bölge Kollokasyon, Nokta Kollokasyon ve En Küçük Kareler gibi sayısal yaklaşım yöntemleri kullanılarak bulunmuştur. Hesaplanmış değerler, Çizelge 2.1'de verilmiştir. Çizelge 2.1'de verilen değerlerle oluşturulan Çizelge 9.1 ve Çizelge 9.2'de hesaplanan değerlerin, referans sonuçtan (Lewis, G., Monosa, F.,1982) sapma büyüklüğü % olarak verilmiştir.

Çizelge 9.1 Referans* sonuç ile Simpson yöntemiyle hesaplanan yatay yer değiştirmelerin karşılaştırılması.

Moment (N.cm)		2259,7	2485,67	2711,64	2937,6	3163,57	3389,54	3615,51	3841,48	3954,47
Referans Sonuç*	**δ_h (Δ) (cm)**	0,0843	0,2096	0,4811	1,0315	2,0833	3,9848	7,239	12,484	**16,058**
Simpson Yöntemiyle	**δ_h (Δ) (cm)**	0,0843	0,2097	0,4815	1,0323	2,0848	3,9879	7,2466	12,552	**16,286**
SAPMA (%)		**0,0000**	**0,0477**	**0,0831**	**0,0776**	**0,0720**	**0,0778**	**0,1050**	**0,5447**	**1,4199**

Çizelge 9.1' den görüldüğü gibi Simpson yöntemiyle hesaplanan yatay yer değiştirme değerleri, küçük moment değerleri için Referans sonuçla (Lewis, G., Monosa, F.,1982) hemen hemen aynı olmaktadır. İlk moment değeri 2259,7 Ncm için sapma % 0 dır. Moment arttıkça yatay yer değiştirmeler arasındaki sapma % olarak artmakta ancak makul düzeyde kalmaktadır. En son 3954,47 Ncm'lik moment değeri için Referans sonuçtan (Lewis, G., Monosa, F.,1982) sapma sadece %1,4199 düzeyindedir.

*(Lewis, G., Monosa, F., 1982)

Çizelge 9.2 Referans* sonuç ile Açık Runge-Kutta, Momentler, Galerkin, Alt Bölge Kollokasyon, Nokta Kollokasyon ve En Küçük Kareler yöntemleri ile hesaplanan düşey yer değiştirme değerlerinin kıyaslanması.

Moment (N.cm)	2259,7	2485,67	2711,64	2937,6	3163,57	3389,54	3615,51	3841,48	3954,47
Referans Sonuç* δv (cm)	**2,5321**	**3,9901**	**6,0345**	**8,8024**	**12,417**	**16,94**	**22,281**	28,05	30,838
Açık Runge-Kutta yöntemiyle δv (cm)	**2,5333**	**3,9921**	**6,0372**	**8,806**	**12,421**	**16,945**	**22,284**	**27,868**	29,3
SAPMA(%)	0,05	0,05	0,04	0,04	0,03	0,03	0,01	-0,65	-4,99
Moment yöntemiyle δ_v (cm)	**2,5333**	**3,9921**	**6,0373**	**8,8063**	**12,425**	**16,984**	**22,713**	33,325	49,837
SAPMA(%)	0,05	0,05	0,05	0,04	0,06	0,26	1,94	18,81	61,61
Galerkin yöntemiyle δ_v (cm)	**2,5339**	**3,9926**	**6,0341**	**8,7741**	**12,2**	15,654	17,069	15,41	13,859
SAPMA(%)	0,07	0,06	-0,01	-0,32	-1,75	-7,59	-23,39	-45,06	-55,06
Alt bölge kollokasyon yöntemiyle δ_v (cm)	**2,5333**	**3,9921**	**6,0376**	**8,8084**	**12,437**	**17,043**	**22,942**	33,601	48,025
SAPMA(%)	0,05	0,05	0,05	0,07	0,16	0,61	2,97	19,79	55,73
Nokta Kollokasyon yöntemiyle δ_v (cm)	**2,5333**	**3,9916**	**6,0329**	**8,7733**	**12,19**	15,416	15,332	10,572	7,6282
SAPMA(%)	0,05	0,04	-0,03	-0,33	-1,83	-9,00	-31,19	-62,31	-75,26
En küçük kareler yöntemiyle δ_v (cm)	**2,5333**	**3,9921**	**6,037**	**8,8044**	**12,414**	**16,86**	20,995	21,704	20,21
SAPMA(%)	0,05	0,05	0,04	0,02	-0,02	-0,47	-5,77	-22,62	-34,46

*(Lewis, G., Monosa, F., 1982)

Çizelge 9.2’de Referansta (Lewis, G., Monosa, F.,1982) verilen düşey yer değiştirme değerleri ile Açık Runge-Kutta, Momentler, Galerkin, Alt Bölge Kollokasyon, Nokta Kollokasyon ve En Küçük Kareler yöntemleriyle bulunan düşey yer değiştirme değerleri karşılaştırılmıştır. Açık Runge-Kutta yönteminden sonra Momentler ve Alt Bölge Kollokasyon yöntemleri en iyi sonuç veren yöntemler olmuşlardır. Açık Runge-Kutta yönteminde son moment değerine kadar Referans (Lewis, G., Monosa, F.,1982) değerden sapma %1’in altındayken son moment değerinde % 5 civarına gelmiştir. Son moment değeri 3954,47 Ncm olduğu için yaklaşık 3900 Ncm’lik moment değerine kadar Açık Runge-Kutta yöntemiyle yapılan hesaplamalar, Referans (Lewis, G., Monosa, F.,1982) sonuca paralellik arz etmektedir. Momentler yönteminde dokuz farklı moment değeri için hesaplanan düşey yer değiştirmelerin, ilk altı moment değeri için referans sonuçlardan sapma %0,25’ten küçükken yedinci moment değerinde sapma % 2 civarına gelmiştir. Son iki moment değerinde sapma kabul edilebilir sınırlar dışına çıktığından, Momentler yöntemi 3600 Ncm’den daha küçük değerlerde iyi çalışıyor denilebilir. Galerkin yönteminde ilk beş moment değeri için referans sonuçtan sapma %1,7’den daha küçüktür. Daha büyük moment değerlerinde sapma artmaktadır. Buradan bu yöntemle 3100 Ncm’nin altındaki moment değerlerinde iyi sonuç alındığı söylenebilir. Alt Bölge Kollokasyon yönteminde dokuz farklı moment değerinin ilk altısında referans sonuçlardan sapma %0,6’dan daha küçüktür. Yedinci moment değerinde sapma %3 mertebelerine çıkmaktadır ve artan moment değerlerine bağlı olarak sapma da artmaktadır. 3600 Ncm’nin altındaki değerlerde bu yöntemin iyi çalıştığı söylenebilir. Nokta kollokasyon yönteminde, 3100 Ncm moment değerinin altındaki değerlerde, sapmanın %1,8’den daha küçük olduğunu, En küçük kareler yönteminde 3300 Ncm’den daha küçük moment değerlerinde hesaplanan düşey yer değiştirme değerlerinin referans değerlere göre %0,5’ten daha küçük sapma gösterdikleri söylenebilmektedir.

Tezdeki tüm hesaplamaları yaparken Mathematica 5.2 programı kullanılmıştır.

İkinci bölümün ikinci kısmında, malzemenin doğrusal olmamasının ve geometrik olarak doğrusallaştırma yapılmamasının, yatay ve düşey yer değiştirme değerleri üzerindeki etkisi incelenmiştir. Çizelge 2.2’deki değerler kullanılarak Çizelge 9.3 oluşturulmuştur. Bu çizelgede, Ludwick tipi doğrusal olmayan bir malzemeden yapılmış kirişlerde, geometrik olarak doğrusal olma veya olmama durumunun yer değiştirmeler üzerindeki etkisi gösterilmiştir. Dokuz farklı moment değeri için yapılan karşılaştırmadan görüldüğü gibi ilk moment değeri 2259,7 Ncm de yatay yer değiştirme değeri, referans(Lewis, G., Monosa, F.,1982) sonuçtan %0,59 sapma göstermekte, diğer moment değerleri için sapma artarak devam etmektedir. Son moment değeri 3954,47 Ncm için yatay yer değiştirmenin referans değerden sapması % 46 mertebelerine ulaşmaktadır. Buradan moment büyüklüğü arttıkça doğrusallaştırma yapılmasıyla oluşan sapma büyüklüğünün de arttığı söylenebilir. Küçük moment değerlerinde bu sapma kabul edilebilir düzeydedir.

Çizelge 9.3 Uç noktasından moment etkiyen Ludwick tipi gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip malzemeden yapılmış konsol kirişlerdeki geometrik doğrusallaştırmanın yer değiştirmeler üzerindeki etkisi.

Moment (N.cm)		2259,7	2485,67	2711,64	2937,6	3163,57	3389,54	3615,51	3841,48	3954,47
Referans Sonuç* (Ludwick tipi lineer olmayan malzeme+geometrik lineer olmama hali)	**δ_h (Δ) (cm)**	**0,0843**	**0,2096**	**0,4811**	**1,0315**	**2,0833**	**3,9848**	7,239	12,484	16,058
(Ludwick tipi lineer olmayan malzeme+geometrik lineer)	**δ_h (Δ) (cm)**	**0,0838**	**0,2067**	**0,4658**	**0,964**	**1,8301**	**3,1783**	5,0485	7,3755	8,6671
SAPMA (%)		**0,59**	**1,38**	**3,18**	**6,54**	**12,15**	**20,24**	**30,26**	**40,92**	**46,03**
Referans Sonuç* (Ludwick tipi lineer olmayan malzeme+geometrik lineer olmama hali	**δ_v (cm)**	**2,5321**	**3,9901**	**6,0345**	**8,8024**	**12,417**	**16,94**	22,281	28,05	30,838
(Ludwick tipi lineer olmayan malzeme+geometrik lineer)	**δ_v (cm)**	**2,527**	**3,9678**	**5,9553**	**8,5621**	**11,7856**	**15,5048**	19,4884	23,4645	25,3759
SAPMA (%)		**0,20**	**0,56**	**1,31**	**2,73**	**5,08**	**8,47**	**12,53**	**16,35**	**17,71**

*(Lewis, G., Monosa, F., 1982)

Çizelge 9.4 Uç noktasından moment etkiyen konsol kirişlerdeki malzeme ve geometrik doğrusallaştırmanın yer değiştirmeler üzerindeki etkisi.

Moment (N.cm)		2259,7	2485,67	2711,64	2937,6	3163,57	3389,54	3615,51	3841,48	3954,47
Referans Sonuç* (Ludwick tipi lineer olmayan malzeme+geometrik lineer olmama hali	**δ_h (Δ) (cm)**	0,0843	0,2096	0,4811	1,0315	2,0833	3,9848	7,239	12,484	16,058
(Lineer malzeme+geometrik lineer olmama hali)	**δ_h (Δ) (cm)**	0,7716	0,9327	1,1089	1,2999	1,5057	1,7262	1,9613	2,2108	2,3409
SAPMA		-815,30	-344,99	-130,49	-26,02	27,73	56,68	72,91	82,29	85,42
Referans Sonuç* (Ludwick tipi lineer olmayan malzeme+geometrik lineer olmama hali	**δ_v (cm)**	2,5321	3,9901	6,0345	8,8024	12,417	16,94	22,281	28,05	30,838
(Lineer malzeme+geometrik lineer olmama hali)	**δ_v (cm)**	7,6271	8,3763	9,1218	9,863	10,5998	11,3318	12,0586	12,7799	13,1384
SAPMA		-201,22	-109,93	-51,16	-12,05	14,63	33,11	45,88	54,44	57,40
Referans Sonuç* (Ludwick tipi lineer olmayan malzeme+geometrik lineer olmama hali)	**δ_h (Δ) (cm)**	0,0843	0,2096	0,4811	1,0315	2,0833	3,9848	7,239	12,484	16,058
(Lineer malzeme+geometrik lineer)	**δ_h (Δ) (cm)**	0,7325	0,8764	1,0306	1,1941	1,3663	1,5463	1,7336	1,9272	2,0262
SAPMA		-768,92	-318,13	-114,22	-15,76	34,42	61,20	76,05	84,56	87,38
Referans Sonuç* (Ludwick tipi lineer olmayan malzeme+geometrik lineer olmama hali)	**δ_v (cm)**	2,5321	3,9901	6,0345	8,8024	12,417	16,94	22,281	28,05	30,838
(Lineer malzeme+geometrik lineer)	**δ_v (cm)**	7,4655	8,1649	8,8522	9,527	10,1888	10,8372	11,4719	12,0929	12,3982
SAPMA		-194,83	-104,63	-46,69	-8,23	17,94	36,03	48,51	56,89	59,80

*(Lewis, G., Monosa, F., 1982)

Çizelge 2.2'deki değerler kullanılarak elde edilen Çizelge 9.4'te farklı moment değerleri için Ludwick tipi doğrusal olmayan malzemeden yapılmış ve geometrik olarak doğrusal olmama durumu mevcut bir konsol kirişteki referans(Lewis, G., Monosa, F.,1982) sonuçlar ile malzemenin doğrusal olduğu, geometrik doğrusal olmama halinin mevcut bulunduğu ve hem malzeme hem de geometrik doğrusallığın bulunduğu konsol kirişteki yer değiştirme değerleri kıyaslanmıştır. Referans (Lewis, G., Monosa, F.,1982) sonuçlar ile doğrusal malzeme ve geometrik doğrusal olmama durumu için yapılan hesaplamalardan elde edilen değerler karşılaştırıldığında, farklı moment değerleri için yatay yer değiştirme değerleri arasındaki sapma % 26 ile % 815 arasında değişmektedir. Doğrusal malzemedeki elastiklik modülü bir alüminyum alaşım için ortalama 70GPa alınmıştır. Malzemenin doğrusal olmadığı bir sistemde hesaplamalar, malzeme doğrusalmış gibi yapılırsa, örneğin 3954 ,47 Ncm'lik bir moment için 16,058 cm olması gereken yatay yer değiştirme değeri, sadece 2,3409 cm olarak bulunur ki bu kabul edilemez bir farktır. Düşey yer değiştirme değerlerine bakılacak olursa, farklı moment değerleri için sapma değerleri % 12'den % 201'lere kadar çıkmaktadır. Mesela 2259,7 Ncm'lik moment değerinde düşey yer değiştirme değeri 2,5321 cm iken doğrusallaştırılmış bir sistemde artarak 7,6271 cm olarak bulunmaktadır. 3954,47 Ncm'lik bir moment değerinde ise düşey yer değiştirme 30,838 cm olması gerekirken malzeme doğrusal olarak alındığında, düşey yer değiştirme de azalarak 13,1384 cm olarak bulunmaktadır.

Referans (Lewis, G., Monosa, F.,1982) sonuç ile malzeme ve geometrik olarak doğrusallaştırmanın yapıldığı konsol kirişteki yer değiştirme değerlerinde ise, yatay yer değiştirme değerlerinde %15'ten yüzde % 768'e , düşey yer değiştirme değerlerinde % 8'den % 194'e varan sapma büyüklükleri ile karşılaşılmaktadır. En düşük sapma değeri ise momentin 2937,6 Ncm'lik değeri için bulunmaktadır.

Hooke yasasına uymayan ve doğrusal olmayan bazı malzemelerde gerilme-şekil değiştirme bağıntısı $\sigma = E\varepsilon(1-\alpha\varepsilon^2)$ şeklinde de yazılabilmektedir. Bu çalışmada bu denklem kübik gerilme-şekil değiştirme bağıntısı olarak ifade edilmiştir. Lineer olmama derecesini gösteren α'nın büyüklüğüne göre malzeme, $\alpha > 0$ ise yumuşak tip, $\alpha < 0$ ise sert tip, $\alpha = 0$ ise doğrusaldır. Bu tezde, $\alpha \geq 0$ değerleri ile çalışılmıştır. Özellikle hesaplamaları yaparken eğrilik-moment eşitliğinde bulunan, eğriliğin üçüncü dereceden kuvveti, hesaplanan 3 farklı eğrilik değerinden, doğru olanını seçmek gibi bir zorluk ortaya çıkarmaktadır. Genelde yer değiştirmeleri hesaplamak için yapılan işlemlerde, eğrilikten yola çıkılarak hesapların yapılması, doğru olan tek bir eğrilik değerini kullanmayı zorunlu kılmaktadır. Elde edilen üç farklı eğrilik (eğrilik-moment ifadesinden üç farklı kök, eğrilik değeri elde edilmektedir) değerinden hangisinin kullanılacağına karar vermek için ilk olarak, bulunan 3 eğrilik değeri, ayrı ayrı hesaplamalarda kullanarak, elde edilen yer değiştirme değerleri karşılaştırılır. Bu karşılaştırma sonucunda, uygun olan eğrilik değeri dışındaki eğrilik değerlerinin, hesaplamalarda kullanılmasıyla ortaya çıkan yer değiştirme değerlerinin mantıklı olmadığı görülecektir. İkinci olarak hesaplamalarda ortaya çıkan eğrilik değerlerinin reel olmayanları, alınmayacaktır. Üçüncü olarak ta $\alpha = 0$ için hesaplamaları yaptığımızda, tek bir eğrilik değeri elde edileceğinden, bu eğrilik mertebesi, aradığımız eğrilik değerlerinin mertebesi, konusunda bize fikir verecektir.

2. Bölümde yapılan bir başka hesaplamayla bulunan, kübik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip konsol kirişlerdeki yer değiştirmeler, Çizelge 2.3'te verilmiştir. Çizelge 2.3'teki veriler kullanılarak elde edilen, Çizelge 9.5'te kübik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip bir konsol kirişte, doğrusal olmama derecesini belirleyen, α boyutsuz parametresinin iki farklı değerine göre, yatay ve düşey yer değiştirmelerin farklı moment büyüklükleri için kıyaslamaları verilmiştir. Dokuz farklı moment büyüklüğü için $\alpha = 0{,}5$ ve $\alpha = 1000$ olduğunda oluşan yatay ve düşey yer değiştirme değerleri, Çizelge 9.5'ten incelendiğinde, ilk ve en küçük moment değeri için yatay yer değiştirme değerlerinde oluşan sapma % 0,43 iken, en büyük moment değeri için sapma % 1,31'e çıkmaktadır. Düşey yer değiştirmelere bakılacak olursa; iki farklı α değeri için yapılan hesaplamalarda düşey yer değiştirme değerleri arasındaki sapma % 0,21 ile % 0,63 arasında değişmektedir.

Çizelge 9.5 Kübik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip konsol kirişte farklı moment değerleri için "α" parametresinin yer değiştirme büyüklükleri üzerindeki etkisi.

α	**Moment (Ncm)**	**2259,7**	**2485,67**	**2711,64**	**2937,6**	**3163,57**	**3389,54**	**3615,51**	**3841,48**	**3954,47**
0,5	**δ_h (Δ) (cm)**	0,77163	0,93278	1,10892	1,29994	1,50577	1,72627	1,96134	2,21083	2,34095
1000	**δ_h (Δ) (cm)**	0,77495	0,93764	1,11580	1,30941	1,51850	1,74305	1,98304	2,23847	2,37199
SAPMA (%)		0,43	0,52	0,62	0,72	0,84	0,96	1,09	1,23	1,31
0,5	**δ_v (cm)**	7,62713	8,37639	9,12182	9,86307	10,59980	11,33180	12,05860	12,77990	13,13840
1000	**δ_v (cm)**	7,64334	8,39789	9,14963	9,89827	10,64360	11,38540	12,12330	12,85700	13,22230
SAPMA (%)		0,21	0,26	0,30	0,36	0,41	0,47	0,53	0,60	0,63

Düşey yer değiştirmelerdeki sapmanın en büyük % 0,6 mertebesinde olması, α'nın bu aralıktaki (0-1000) değişiminin, verilen moment aralığında (2259,7 Ncm – 3954,47 Ncm), kübik gerilme-şekil değiştirme eşitliği üzerindeki, doğrusallıktan saptırma etkisinin çok büyük olmadığını göstermektedir.

Çizelge 2.1'de verilen Ludwick tipi doğrusal olmayan malzemeden yapılmış konsol kirişteki yer değiştirme büyüklükleri ile, Çizelge 2.3'teki kübik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip konsol kirişteki yer değiştirme büyüklüklerinin karşılaştırılması, Çizelge 9.6'da gösterilmektedir. Çizelge 9.6'da kübik gerilme şekil değiştirme ilişkisine sahip konsol kirişte malzemenin doğrusal olmama derecesini gösteren boyutsuz "α" parametresinin 1000 olarak alınması durumunda hesaplanan yer değiştirme değerleri verilmiştir. Kübik malzemede elastiklik modülü 70GPa olarak alınmıştır. Çizelge 9.6'daki referans (Lewis, G., Monosa, F.,1982) sonuçlardan sapma değerlerine baktığımızda; verilen moment değerlerinden en küçük (2259,7 Ncm) olanı için Ludwick tipi malzemede yatay yer değiştirme 0,0843 cm iken kübik malzemede daha büyük 0,77495 cm bulunmaktadır. Buradaki sapma % 819 civarındadır. En büyük moment değeri (3954,47 Ncm) için Ludwick tipi malzemede yatay yer değiştirme değeri 16,058 cm, kübik malzemede ise daha küçük 2,37199 cm dir.

Çizelge 9.6 Ludwick tipi ve Kübik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip konsol kirişte farklı moment değerleri için yer değiştirme büyüklüklerinin karşılaştırılması.

Moment (N.cm)		2259,7	2485,67	2711,64	2937,6	3163,57	3389,54	3615,51	3841,48	3954,47
Referans Sonuç* (Ludwick tipi lineer olmayan malzeme+geometrik lineer olmama hali)	δ_h (Δ) (cm)	0,0843	0,2096	0,4811	1,0315	2,0833	3,9848	7,239	12,484	16,058
Kübik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip malzeme olduğunda, (α =1000 için)	δ_h (Δ) (cm)	0,77495	0,93764	1,11580	1,30941	1,51850	1,74305	1,98304	2,23847	2,37199
SAPMA (%)		-819,28	-347,35	-131,93	-26,94	27,11	56,26	72,61	82,07	85,23
Referans Sonuç* (Ludwick tipi lineer olmayan malzeme+geometrik lineer olmama hali)	δ_v (cm)	2,5321	3,9901	6,0345	8,8024	12,417	16,94	22,281	28,05	30,838
Kübik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip malzeme olduğunda, (α =1000 için)	δ_v (cm)	7,64334	8,39789	9,14963	9,89827	10,64360	11,38540	12,12330	12,85700	13,22230
SAPMA (%)		-201,86	-110,47	-51,62	-12,45	14,28	32,79	45,59	54,16	57,12

*(Lewis, G., Monosa, F., 1982)

Her iki tür gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip konsol kirişlerde de artan moment ile yatay yer değiştirme büyüklükleri de artmakta, ancak Ludwick tipindeki artış kübik malzemeye göre daha büyük olmaktadır. Ludwick tipi ve kübik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip konsol kirişlerdeki yatay yer değiştirme büyüklüklerinin birbirine en yakın olduğu moment değeri 3000 Ncm civarındadır ve buradaki sapma değeri %27 civarındadır. Düşey yer değiştirmelerde sapma büyüklükleri momentin farklı değerleri için % 12,5'ten % 202'ye kadar çıkmaktadır. En küçük moment değeri için Ludwick tipinde düşey yer değiştirme 2,5321 cm iken, kübik malzemede 7,6433 cm olmaktadır. Alınan en büyük moment değeri için Ludwick tipinde düşey yer değiştirme 30,838 cm iken, kübikte 13,2223 cm olmaktadır. 3000 Ncm'lik moment değerinde Ludwick tipi ve kübik malzeme için bulunan düşey yer değiştirme büyüklükleri de birbirine en yakındır.

Genelde şekil değiştirme problemlerindeki hesaplamalar, malzemenin kesit ve boyu (1. mertebe teorisine göre) şekil değiştirmemiş konumdan ölçülerek yapılır. Bu durumda oluşan gerilme-şekil değiştirme eğrisine, mühendislik gerilme-şekil değiştirme eğrisi adı verilmektedir. Eğer kesit değişimi dikkate alınacak olursa (2.mertebe teorisine göre) gerilme-şekil değiştirme ilişkisi, $\sigma = E\ln(1+k\varepsilon)$ şeklinde verilebilmektedir. Çalışmada bu denklemden logaritmik gerilme-şekil değiştirme ilişkisi olarak bahsedilmiştir. Bu durumda gerilme-şekil değiştirme eğrisi gerçek yada logaritmik gerilme-şekil değiştirme eğrisi adını alır. k, 0 ile 1 arasında değişmektedir. $\varepsilon_e = k\varepsilon_t$ eşitliğinden görülebileceği gibi k, mühendislik şekil değiştirme değerinin, gerçek şekil değiştirme değerine oranıdır.

2. Bölümde logaritmik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip konsol kirişteki büyük yer değiştirme değerleri, Çizelge 2.4'te verilmektedir. Bu çizelgeden görüleceği gibi 0 ile 1 arasında aldığımız "k" değeri arttıkça yatay ve düşey yer değiştirme büyüklükleri azalmaktadır. Çizelge 2.4'teki iki farklı k değeri için hesaplanan yatay ve düşey yer değiştirme büyüklükleri arasındaki sapma değerleri Çizelge 9.7'de % olarak gösterilmiştir.

Çizelge 9.7 Logaritmik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip konsol kirişte farklı moment değerleri için "k" parametresinin yer değiştirme büyüklükleri üzerindeki etkisi.

k	**Moment (N.cm)**	**2259,7**	**2485,67**	**2711,64**	**2937,6**	**3163,57**	**3389,54**	**3615,51**	**3841,48**	**3954,47**
0,5	**δ_h (Δ) (cm)**	3,04449	3,66974	4,34902	5,08088	5,86387	6,69643	7,57706	8,50441	8,98531
0,75	**δ_h (Δ) (cm)**	1,36692	1,65115	1,96133	2,29715	2,65832	3,04447	3,45522	3,89020	4,11666
SAPMA (%)		-122,73	-122,25	-121,74	-121,18	-120,59	-119,95	-119,29	-118,61	-118,27
0,5	**δ_v (cm)**	14,90770	16,29290	17,64860	18,97230	20,26160	21,51400	22,72660	23,89610	24,46320
0,75	**δ_v (cm)**	10,10920	11,08840	12,05860	13,01900	13,96890	14,90760	15,83430	16,74810	17,20010
SAPMA (%)		-47,47	-46,94	-46,36	-45,73	-45,05	-44,32	-43,53	-42,68	-42,23

Çizelge 9.7'den görüldüğü gibi k = 0,5 ve k = 0,75 değerleri için dokuz farklı moment değerindeki yatay yer değiştirmelerdeki sapma % 120 civarındadır. Düşey yer değiştirmelerde bu sapma % 45 düzeyindedir. Çizelge 2.1 ve Çizelge 2.4'teki değerleri kullanarak Ludwick tipi doğrusal olmayan bir konsol kirişteki ve logaritmik gerilme-şekil değiştirme bağıntısına sahip bir konsol kirişteki, büyük yer değiştirmeleri kıyaslamak amacıyla, Çizelge 9.8 oluşturulmuştur.

Çizelge 9.8 Ludwick tipi ve Logaritmik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip konsol kirişte farklı moment değerleri için yer değiştirme büyüklüklerinin karşılaştırılması.

Moment (N.cm)		2259,7	2485,67	2711,64	2937,6	3163,57	3389,54	3615,51	3841,48	3954,47
Referans Sonuç* (Ludwick tipi lineer olmayan malzeme+ geometrik lineer olmama hali)	**δ_h (Δ) (cm)**	0,0843	0,2096	0,4811	1,0315	2,0833	3,9848	7,239	12,484	16,058
Logaritmik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip malzeme olduğunda, (k =0,5 için)	**δ_h (Δ) (cm)**	3,0445	3,6697	4,3490	5,0809	5,8639	6,6964	7,5771	8,5044	8,9853
SAPMA (%)		-3511,49	-1650,83	-803,97	-392,57	-181,47	-68,05	-4,67	31,88	44,04
Referans Sonuç* (Ludwick tipi lineer olmayan malzeme+ geometrik lineer olmama hali)	**δ_v (cm)**	2,5321	3,9901	6,0345	8,8024	12,417	16,94	22,281	28,05	30,838
Logaritmik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip malzeme olduğunda, (k =0,5 için)	**δ_v (cm)**	14,9077	16,2929	17,6486	18,9723	20,2616	21,5140	22,7266	23,8961	24,4632
SAPMA (%)		-488,75	-308,33	-192,46	-115,54	-63,18	-27,00	-2,00	14,81	20,67

Çizelge 9.8'e bakıldığında Logaritmik ve Ludwick tipi gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip malzemelerden oluşan konsol kirişlerde meydana gelen yatay yer değiştirmeler arasındaki sapma % 4,67'den % 3511'e kadar çıkmaktadır. Moment değeri 3615 Ncm olduğunda yatay yer değiştirme değerleri birbirine en yakın değerleri almakta ve % 4,67 civarında sapma olmaktadır. Düşey yer değiştirmelerdeki sapma ise % 2 ile % 488 arasında değişmektedir. Yatay yer değiştirme değerlerinde olduğu gibi düşey yer değiştirme değerlerinde de en düşük sapma % 2 değeri ile 3615 Ncm moment büyüklüğünde olmaktadır.

*(Lewis, G., Monosa, F., 1982)

Buradan, k = 0,5 için moment 3600 Ncm civarındayken, logaritmik gerilme-şekil değiştirme bağıntısına sahip bir kirişte oluşan yer değiştirme değerleri, Ludwick tipi gerilme-şekil değiştirme bağıntısına sahip bir kirişte oluşan yer değiştirme değerlerine en yakındır denilebilir.

3. Bölümde serbest uç noktasından tekil kuvvet etkiyen bir konsol kirişte oluşan büyük yer değiştirmeler, farklı yöntemlerle incelenmiş ve elde edilen sonuçlar, Çizelge 3.1'de karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Çizelge 3.1'de verilen Referans (Lewis, G., Monosa, F., 1981) sonuçlar ve diğer yöntemlerle hesaplanan boyutsuz düşey yer değiştirme değerleri kullanılarak oluşturulan, Çizelge 9.9'da, Referans (Lewis, G., Monosa, F., 1981) sonuçlardan sapma % olarak gösterilmektedir. Bu çizelgeden de görülebileceği gibi Momentler ve Alt Bölge Kollokasyon yöntemiyle yapılan hesaplamalardan elde edilen yer değiştirmeler, Referans (Lewis, G., Monosa, F., 1981) sonuçlara daha yakın değerler vermektedir. Momentler yöntemiyle farklı, boyutsuz $\frac{L^{n+1}}{K_n}$ değerlerine göre yapılan hesaplamalarda referans sonuçlardan sapma % 0,03 ile % 4,03 arasında değişmektedir. En küçük sapma $\frac{L^{n+1}}{K_n}=0,25$ olduğunda, en büyük sapma $\frac{L^{n+1}}{K_n}=10$ olduğunda meydana gelmektedir. Yani L (kiriş boyu) azaldıkça veya K_n arttıkça (4.4 denklemine bakılırsa K_n 'in artması, sabit kesit için P kuvvetinin azalması demektir.) küçülen $\frac{L^{n+1}}{K_n}$ değerlerinde Momentler yöntemi en iyi sonucu vermektedir. L arttıkça veya K_n azaldıkça büyüyen $\frac{L^{n+1}}{K_n}$ değerlerinde, Momentler yöntemiyle bulunan düşey yer değiştirme değerlerindeki, referans sonuçlardan sapma yüzdesi artmaktadır. Alt Bölge Kollokasyon yönteminde ise Referans sonuçlardan sapma % 1,36 ile % 3,65 arasında değişmektedir. Momentler yöntemindekinin tersi, $\frac{L^{n+1}}{K_n}=0,25$ olduğunda en büyük sapma, $\frac{L^{n+1}}{K_n}=10$ olduğunda en küçük sapma oluşmaktadır

Çizelge 9.9 Serbest uç noktasından tekil kuvvet etkiyen bir konsol kirişte farklı yöntemler kullanılarak bulunan yer değiştirme büyüklüklerinin karşılaştırılması.

L^{n+1} / K_n	**Referans* Sonuç, δ_v / L**	**Açık RungeKutta δ_v / L**	**SAPMA**	**Moment yöntemiyle, δ_v / L**	**SAPMA**	**Alt bölge kollokasyon yöntemiyle, δ_v / L**	**SAPMA**	**En küçük kareler yöntemiyle, δ_v / L**	**SAPMA**
0,25	0,03669	0,036695	-0,01	0,036702	-0,03	0,035348	3,66	0,033514	8,66
0,5	0,07251	0,072513	0,00	0,072568	-0,08	0,069871	3,64	0,066653	8,08
0,75	0,10672	0,106726	-0,01	0,106901	-0,17	0,102881	3,60	0,099126	7,12
1	0,13884	0,138844	0,00	0,139231	-0,28	0,133917	3,55	0,130781	5,80
2	0,24407	0,244053	0,01	0,246168	-0,86	0,236089	3,27	0,250457	-2,62
3	0,31822	0,318196	0,01	0,322901	-1,47	0,308807	2,96	0,368691	-15,86
4	0,37211	0,37207	0,01	0,37961	-2,02	0,362193	2,67	0,493544	-32,63
5	0,41308	0,413034	0,01	0,423351	-2,49	0,403184	2,40	0,609427	-47,53
6	0,44548	0,445423	0,01	0,458349	-2,89	0,43589	2,15	0,699073	-56,93
7	0,4719	0,471841	0,01	0,487175	-3,24	0,462791	1,93	0,764825	-62,07
8	0,49398	0,493924	0,01	0,511463	-3,54	0,485454	1,73	0,813882	-64,76
9	0,51282	0,51275	0,01	0,532305	-3,80	0,504913	1,54	0,85156	-66,05
10	0,52913	0,529057	0,01	0,550454	-4,03	0,521883	1,37	0,881264	-66,55

En Küçük Kareler yönteminde ise Referans (Lewis, G., Monosa, F., 1981) sonuçlarla hesaplanan düşey yer değiştirme değerleri arasındaki sapma % 2 ile % 66 arasında değişmektedir. Sapma yüzdesinin büyüklüğü, bu yöntemin bu problemin çözümünde çok uygun olmadığını göstermektedir. Yukarıda bahsedilenlerden $\frac{L^{n+1}}{K_n}$'nin küçük olduğu değerlerde, yer değiştirme büyüklüklerinin hesabında Momentler yönteminin, $\frac{L^{n+1}}{K_n}$'nin büyük olduğu değerlerde, yer değiştirme büyüklüklerinin hesabında Alt Bölge Kollokasyon yönteminin iyi çalıştığı sonucuna varılabilir.

* (Lewis, G., Monosa, F., 1981)

4. Bölümde yayılı yüklü Ludwick tipi gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip, malzemeden yapılmış bir basit kirişte $\frac{L^{2n+1}}{K_n}$, n, ve kabul edilen farklı x_0 yay uzunluklarına bağlı olarak yatay ve düşey yer değiştirme değerleri hesaplanarak Çizelge 4.1'de tablolaştırılmıştır. Çizelge 4.1'deki verileri kullanarak oluşturulan, Çizelge 9.10'da bazı n değerleri için yatay ve düşey yer değiştirme değerleri gösterilmiştir. Ayrıca çizelgenin ilk bölümünde $x_0 = x + \Delta$ kabulüyle Referansta (Lewis, G., Monosa, F., 1982) belirtilen doğrusal olmayan N.P.8 alüminyum alaşım için (n = 1 / 0,209) hesaplanan yer değiştirme değerlerinin n = 5 gibi yakın bir değer alındığında nasıl değiştiği incelenmiştir.

Çizelge 9.10 Yayılı yüklü Ludwick tipi gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip basit kirişte farklı parametrelere göre değişen yer değiştirme büyüklüklerinin karşılaştırılması.

x_0	n	δ	L^{2n+1}/Kn							
			10	20	30	40	50	60	66,67	70
$x_0 = x+\Delta$	1	δ_h	0,1015	0,2138	0,29	0,346	0,388	0,4213	0,44* - 0,44	0,4486
	5	δ_h	$1{,}1\times10^{-6}$	$4{,}4\times10^{-6}$	0,00001	0,00001	0,00002	0,00004	0,00004	0,00005
	1	δ_v / L	0,196	0,2748	0,3136	0,3376	0,3547	0,368	0,367*- 0,375	0,3784
	5	δ_v / L	0,00069	0,00139	0,002	0,00279	0,00349	0,00418	0,0046	0,00488
	5	δ_h	$1{,}1\times10^{-6}$	$4{,}4\times10^{-6}$	0,00001	0,00001	0,00002	0,00004	0,00004	0,00005
	1/0,209**	δ_h	2×10^{-6}	$8{,}3\times10^{-6}$	0,00001	0,00003	0,00005	0,00007	0,00009	0,0001
	SAPMA (%)		45,00	46,99	0,00	66,67	60,00	42,86	55,56	50,00
	5	δ_v / L	0,00069	0,00139	0,002	0,00279	0,00349	0,00418	0,0046	0,00488
	1/0,209**	δ_v / L	0,00095	0,0019	0,00286	0,0038	0,00476	0,00572	0,00635	0,00667
	SAPMA (%)		27,37	26,84	30,07	26,58	26,68	26,92	27,56	26,84
$x_0 = x+\Delta(x / L-\Delta)$	1	δ_h	0,119	0,2745	0,38278	0,4577	0,5124	0,55395	0,5765	0,58664
	5	δ_h	$1{,}1\times10^{-6}$	$4{,}4\times10^{-6}$	0,00001	0,00001	0,00002	0,00004	0,00004	0,00005
	1/0,209**	δ_h	$2{,}8\times10^{-6}$	$8{,}3\times10^{-6}$	0,00001	0,00003	0,00005	0,00007	0,00009	0,0001
	1	δ_v / L	0,21114	0,306	0,35267	0,38174	0,39778	0,40255	0,40166	0,40044
	5	δ_v / L	0,00069	0,00139	0,00209	0,00279	0,00349	0,00418	0,00465	0,00488
	1/0,209**	δ_v / L	0,00095	0,0019	0,00286	0,00381	0,00477	0,00572	0,00636	0,00667
$x_0 = x+\Delta(\Delta / L-\Delta)^{1/2}$	1	δ_h	0,13343	0,292	0,37268	0,4158	0,44313	0,46213	0,47194	0,47621
	5	δ_h	$1{,}1\times10^{-6}$	$4{,}4\times10^{-6}$	0,00001	0,00001	0,00002	0,00004	0,00004	0,00005
	1/0,209**	δ_h	$2{,}8\times10^{-6}$	$8{,}3\times10^{-6}$	0,00001	0,00003	0,00005	0,00007	0,00009	0,0001
	1	δ_v / L	0,19681	0,20376	0,18927	0,18972	0,19773	0,21169	0,22473	0,23268
	5	δ_v / L	0,00069	0,00139	0,00209	0,00279	0,00349	0,00419	0,00465	0,00488
	1/0,209**	δ_v / L	0,00095	0,0019	0,00286	0,00381	0,00477	0,00572	0,00636	0,00668

* Demeter G.F., 1999, "Nonlinear Mechanics Second Edition", CRC Pres LLC,Boca Raton,Sayfa 92, Örnek 2.4.
**Ludwick tipi doğrusal olmayan N.P.8 alüminyum alaşım için üstel "n" sabiti. (Lewis, G., Monosa, F., 1982)

n = 1 / 0,209 olan alüminyum alaşım için n = 5 alınırsa, yatay yer değiştirmelerde, farklı $\frac{L^{2n+1}}{K_n}$ büyüklükleri için % 0'dan % 66'ya kadar değişen bir sapma, orta kesitteki düşey yer değiştirmelerde ise % 26 ile % 30 civarında bir sapma olmaktadır. Çizelge 9.10'a bakıldığında n = 1 (doğrusal) ve n = 5 (doğrusal olmayan malzeme) için, yer değiştirme değerlerinin farklılıkları oldukça büyüktür. Örneğin, $x_0 = x + \Delta$ kabulüyle $\frac{L^{2n+1}}{K_n} = 70$ değerinde n =1 için hesaplanan yatay yer değiştirme büyüklüğü $\delta_h = 0{,}4486$ iken n = 5 iken $\delta_h = 0{,}00005$ gibi çok farklı ve küçük bir değer olmaktadır. n = 1 için kirişin ortasındaki düşey yer değiştirme değeri, $\frac{\delta_v}{L} = 0{,}3784$ iken n = 5 için $\frac{\delta_v}{L} = 0{,}00488$ olarak hesaplanmıştır. Buradan malzemenin doğrusal olmasının veya olmamasının yer değiştirmeler üzerindeki etkisi görülmektedir. Ludwick tipi malzemede ($\sigma = B\varepsilon^{\frac{1}{n}}$) Çizelge 4.1'den daha ayrıntılı görülebileceği gibi n arttıkça yatay ve kirişin ortasındaki düşey yer değiştirme büyüklükleri azalmaktadır. $\frac{L^{2n+1}}{K_n}$ boyutsuz büyüklüğü arttıkça her üç farklı x_0 yay uzunluğu kabulü içinde, olması gerektiği gibi, yatay ve düşey yer değiştirme değerleri artmaktadır.

4. Bölümde bahsedilmesi gereken önemli hususlardan biri de yay uzunluğunun 3 farklı kabulle alınarak, yer değiştirme hesaplarının yapılmasıdır. Çizelge 4.1'den elde edilen verilerle oluşturulan Çizelge 9.11'de n = 1,3,5 için kabul edilen 3 farklı x_0 yay uzunluğu değerine göre yapılan hesaplamalardan, şu sonuçlara ulaşabilir: n = 1 iken 3 farklı x_0 değeri için yatay yer değiştirmelerdeki sapma (birbirlerinden olan fark) % 8,84 ile % 26,78 arasında değişmektedir. n = 3 iken yatay yer değiştirmelerdeki sapma % 0 ile %16,62 arasındadır. n = 5'te ise 3 farklı x_0 değeri için yatay yer değiştirmelerdeki sapma % 0 seviyesindedir. Kirişin orta noktasındaki düşey yer değiştirmeler içinse n = 1 iken 3 farklı x_0 değeri için birbirlerinden sapma % 0,41 ile % 73,39 arasında değişmektedir. n = 3 iken sapma % 0,39 ilen % 5,78 arasında değişmekte, n = 5 iken sapma % 0 civarında olmaktadır. Yukarıda anlatılanlara göre, doğrusal konumdan uzaklaştıkça yani n arttıkça kabul edilen 3 farklı x_0 yay uzunluğu değeri için hesaplanan yatay ve kirişin ortasındaki düşey yer değiştirme değerleri arasındaki fark azalmaktadır.

Çizelge 9.11 Yayılı yüklü Ludwick tipi gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip basit kirişte farklı yay uzunlukları kabulünün yer değiştirmeler üzerindeki etkisi.

			L^{2n+1}/Kn							
x_0	n	δ	10	20	30	40	50	60	66,67	70
$x_0 = x+\Delta$	1	δ_h	0,1015	0,2138	0,29	0,346	0,388	0,4213	0,44	0,4486
$x_0 = x+\Delta(x / L-\Delta)$	1	δ_h	0,119	0,2745	0,38278	0,4577	0,5124	0,55395	0,5765	0,58664
SAPMA (%)			14,71	22,11	24,24	24,40	24,28	23,95	23,68	23,53
$x_0 = x+\Delta$	1	δ_h	0,1015	0,2138	0,29	0,346	0,388	0,4213	0,44	0,4486
$x_0 = x+\Delta(\Delta / L-\Delta)^{1/2}$	1	δ_h	0,13343	0,292	0,37268	0,4158	0,44313	0,46213	0,47194	0,47621
SAPMA (%)			23,93	26,78	22,19	16,79	12,44	8,84	6,77	5,80
$x_0 = x+\Delta$	1	δ_v / L	0,196	0,2748	0,3136	0,3376	0,3547	0,368	0,375	0,3784
$x_0 = x+\Delta(x / L-\Delta)$	1	δ_v / L	0,21114	0,306	0,35267	0,38174	0,39778	0,40255	0,40166	0,40044
SAPMA (%)			7,17	10,20	11,08	11,56	10,83	8,58	6,64	5,50
$x_0 = x+\Delta$	1	δ_v / L	0,196	0,2748	0,3136	0,3376	0,3547	0,368	0,375	0,3784
$x_0 = x+\Delta(\Delta / L-\Delta)^{1/2}$	1	δ_v / L	0,19681	0,20376	0,18927	0,18972	0,19773	0,21169	0,22473	0,23268
SAPMA (%)			0,41	-34,86	-65,69	-77,95	-79,39	-73,84	-66,87	-62,63
$x_0 = x+\Delta$	3	δ_h	0,00039	0,0015	0,0034	0,00585	0,0088	0,0121	0,0145	0,0157
$x_0 = x+\Delta(x / L-\Delta)$	3	δ_h	0,00039	0,00156	0,0034	0,00605	0,00925	0,01297	0,01571	0,01715
SAPMA (%)			0,00	3,85	0,00	3,31	4,86	6,71	7,70	8,45
$x_0 = x+\Delta$	3	δ_h	0,00039	0,0015	0,0034	0,00585	0,0088	0,0121	0,0145	0,0157
$x_0 = x+\Delta(\Delta / L-\Delta)^{1/2}$	3	δ_h	0,00039	0,00157	0,00354	0,00629	0,00978	0,01398	0,01715	0,01883
SAPMA (%)			0,00	4,46	3,95	7,00	10,02	13,45	15,45	16,62
$x_0 = x+\Delta$	3	δ_v / L	0,0129	0,0256	0,038	0,0498	0,061	0,0716	0,07835	0,0815
$x_0 = x+\Delta(x / L-\Delta)$	3	δ_v / L	0,01295	0,02579	0,038	0,05072	0,06264	0,0741	0,08149	0,085
SAPMA (%)			0,39	0,74	0,00	1,81	2,62	3,37	3,85	4,12
$x_0 = x+\Delta$	3	δ_v / L	0,0129	0,0256	0,038	0,0498	0,061	0,0716	0,07835	0,0815
$x_0 = x+\Delta(\Delta / L-\Delta)^{1/2}$	3	δ_v / L	0,01296	0,02586	0,03863	0,05118	0,0634	0,0752	0,0828	0,0865
SAPMA (%)			0,46	1,01	1,63	2,70	3,79	4,79	5,37	5,78
$x_0 = x+\Delta$	5	δ_h	1,1x10^{-6}	4,4x10^{-6}	0,00001	0,00001	0,00002	0,00004	0,00004	0,00005
$x_0 = x+\Delta(x / L-\Delta)$	5	δ_h	1,1x10^{-6}	4,4x10^{-6}	0,00001	0,00001	0,00002	0,00004	0,00004	0,00005
SAPMA (%)			0	0	0	0	0	0	0	0
$x_0 = x+\Delta$	5	δ_h	1,1x10^{-6}	4,4x10^{-6}	0,00001	0,00001	0,00002	0,00004	0,00004	0,00005
$x_0 = x+\Delta(\Delta / L-\Delta)^{1/2}$	5	δ_h	1,1x10^{-6}	4,4x10^{-6}	0,00001	0,00001	0,00002	0,00004	0,00004	0,00005
SAPMA (%)			0	0	0	0	0	0	0	0
$x_0 = x+\Delta$	5	δ_v / L	0,00069	0,00139	0,002	0,00279	0,00349	0,00418	0,0046	0,00488
$x_0 = x+\Delta(x / L-\Delta)$	5	δ_v / L	0,00069	0,00139	0,00209	0,00279	0,00349	0,00418	0,00465	0,00488
SAPMA (%)			0	0	0	0	0	0	0	0
$x_0 = x+\Delta$	5	δ_v / L	0,00069	0,00139	0,002	0,00279	0,00349	0,00418	0,0046	0,00488
$x_0 = x+\Delta(\Delta / L-\Delta)^{1/2}$	5	δ_v / L	0,00069	0,00139	0,00209	0,00279	0,00349	0,00419	0,00465	0,00488
SAPMA (%)			0	0	0	0	0	0	0	0

5. Bölümde bileşik yüklü, yani serbest uç noktasından düşey doğrultuda tekil kuvvet etkiyen ve boyunca yayılı yüklü, dikdörtgen kesitli doğrusal olmayan Ludwick tipi gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip, konsol kirişlerdeki yer değiştirme büyüklükleri, $\frac{L^{n+1}}{K_n}$ boyutsuz büyüklüğüne göre, farklı yollarla hesaplanarak karşılaştırılmıştır. Kabul edilen iki farklı x_0 yay uzunluğu ve n'nin farklı değerleri için hesaplanan yatay yer değiştirme ve serbest uç noktadaki düşey yer değiştirme değerleri, Referans sonuç ile karşılaştırmalı olarak Çizelge 5.1'de verilmiştir. Bu çizelgedeki veriler kullanılarak Çizelge 9.12 oluşturulmuştur.

Çizelge 9.12 Bileşik yüklü Ludwick tipi gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip konsol kirişte farklı yay uzunlukları kabulünün yer değiştirmeler üzerindeki etkisi.

x_0	n	δ	L^{n+1}/K_n												
			0,25	**0,5**	**0,75**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$x_0 = x+\Delta$	**2,16***	δ_h	0,008	0,03	0,058	0,088	0,191	0,265	0,318	0,36	0,393	0,421	0,444	0,464	0,482
	2,16	δ_h	0,008	0,03	0,058	0,087	0,188	0,26	0,312	0,352	0,384	0,411	0,433	0,453	0,47
	SAPMA(%)		0,00	0,00	0,00	1,14	1,57	1,89	1,89	2,22	2,29	2,38	2,48	2,37	2,49
	2,16*	δ_v / L	0,123	0,231	0,319	0,388	0,555	0,639	0,69	0,724	0,749	0,768	0,784	0,796	0,807
	2,16	δ_v / L	0,122	0,229	0,317	0,386	0,55	0,632	0,682	0,716	0,74	0,759	0,774	0,786	0,796
	SAPMA(%)		0,81	0,87	0,63	0,52	0,90	1,10	1,16	1,10	1,20	1,17	1,28	1,26	1,36
$x_0 = x+\Delta(x / L\text{-}\Delta)$	**2,16***	δ_h	0,008	0,03	0,058	0,088	0,191	0,265	0,318	0,36	0,393	0,421	0,444	0,464	0,482
	2,16	δ_h	0,008	0,029	0,057	0,085	0,183	0,252	0,303	0,342	0,374	0,4	0,422	0,441	0,458
	SAPMA(%)		0,00	3,33	1,72	3,41	4,19	4,91	4,72	5,00	4,83	4,99	4,95	4,96	4,98
	2,16*	δ_v / L	0,123	0,231	0,319	0,388	0,555	0,639	0,69	0,724	0,749	0,768	0,784	0,796	0,807
	2,16	δ_v / L	0,122	0,229	0,315	0,383	0,545	0,626	0,676	0,71	0,735	0,754	0,769	0,782	0,792
	SAPMA(%)		0,81	0,87	1,25	1,29	1,80	2,03	2,03	1,93	1,87	1,82	1,91	1,76	1,86

*Referans (Lee, K., 2002) yayındaki değerlerdir. x_0 için yapılan kabuller bu hesaplamalarda geçerli değildir.

Çizelge 9.12'yi incelediğimizde, Referansta (Lee, K., 2002) n = 2,16 olarak alınabilen, Ludwick tipi tavlanmış bakır malzeme için verilen yatay yer değiştirmelerle, $x_0 = x + \Delta$ kabulünü yaptığımızda hesapladığımız yatay yer değiştirmeler arasındaki sapma $\frac{L^{n+1}}{K_n}$ boyutsuz büyüklüğüne bağlı olarak % 0 ile % 2,49 arasında değişmektedir. Serbest uç noktadaki düşey yer değiştirmeye baktığımızda ise Referans (Lee, K., 2002) sonuçtan sapma % 0,52 ile % 1,36 arasında değişmektedir. $x_0 = x + \Delta(\frac{x}{L - \Delta})$ olarak aldığımızda ise yatay yer değiştirmelerin, referans (Lee, K., 2002) sonuçlardan sapma değeri % 0 ile % 5 , düşey yer değiştirmeler için sapma değeri % 0,81 ile % 2,03 arasındadır. Dikkat edilecek olursa her iki x_0 kabulü içinde sapma (%) aralığı yatay yer değiştirme değerlerinde, düşey yer değiştirme değerlerine göre daha büyüktür. Çizelge 9.12'de verilen diğer x_0 kabulüne göre, yatay ve düşey yer değiştirme değerleri açısından, referans (Lee, K., 2002) sonuçtan daha düşük sapma veren $x_0 = x + \Delta$ kabulünün, bu hesaplamalar için daha kullanışlı olduğu söylenebilir.

x_0 yay uzunluğu, yukarıda olduğu gibi yaklaşık kabuller yapılarak kullanıldığında, yer değiştirme hesabı kolaylaşmaktadır. Bu tür sorularda yaklaşık x_0 kabulü yapılamak suretiyle, eğrilikten yola çıkarak (2.8) denkleminde verildiği gibi $y'(x)$'li ifade elde edilip, daha önceki tüm bölümlerde bahsedilen çözüm yolunu kullanarak, yer değiştirmeleri hesaplamak mümkündür.

Çizelge 5.1'deki verileri kullanarak oluşturulan Çizelge 9.13'te, farklı n ve x_0 değerleri için yer değiştirme değerleri ve n = 1 (doğrusal) olduğunda oluşan yer değiştirme değerlerinden sapma % olarak görülmektedir. Burada sapma hata değil sadece değişimi % olarak gösteren bir ifadedir. Çizelge 9.13'te sapma büyüklüğünün pozitif olduğu yerlerdeki $\frac{L^{n+1}}{K_n}$ değerlerinde, n arttıkça yatay ve düşey yer değiştirme değerleri artmakta, sapma değerlerinin negatif olduğu % değerlerinde, n arttıkça yatay ve düşey yer değiştirme değerleri azalmaktadır.

Çizelge 9.13 Bileşik yüklü Ludwick tipi gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip konsol kirişte “n” parametresinin değişiminin yer değiştirmeler üzerindeki etkisi.

x_0	n	δ	L^{n+1}/K_n												
			0,25	**0,5**	**0,75**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$x_0 = x+\Delta$	**1**	δ_h	0,007	0,028	0,059	0,094	0,235	0,341	0,418	0,475	0,519	0,554	0,583	0,607	0,627
	2,16	δ_h	0,008	0,03	0,058	0,087	0,188	0,26	0,312	0,352	0,384	0,411	0,433	0,453	0,47
	SAPMA(%)		12,50	6,67	-1,72	-8,05	-25,00	-31,15	-33,97	-34,94	-35,16	-34,79	-34,64	-34,00	-33,40
	1	δ_h	0,007	0,028	0,059	0,094	0,235	0,341	0,418	0,475	0,519	0,554	0,583	0,607	0,627
	5	δ_h	0,02	0,055	0,087	0,112	0,182	0,225	0,256	0,28	0,299	0,315	0,328	0,34	0,351
	SAPMA(%)		65	49,09	32,18	16,07	-29,1	-51,6	-63,3	-69,6	-73,6	-75,9	-77,7	-78,5	-78,6
	1	δ_v / L	0,113	0,218	0,31	0,388	0,587	0,684	0,738	0,772	0,797	0,817	0,835	0,851	0,86
	2,16	δ_v / L	0,122	0,229	0,317	0,386	0,55	0,632	0,682	0,716	0,74	0,759	0,774	0,786	0,796
	SAPMA(%)		7,38	4,80	2,21	-0,52	-6,73	-8,23	-8,21	-7,82	-7,70	-7,64	-7,88	-8,27	-8,04
	1	δ_v / L	0,113	0,218	0,31	0,388	0,587	0,684	0,738	0,772	0,797	0,817	0,835	0,851	0,86
	5	δ_v / L	0,196	0,319	0,395	0,447	0,557	0,612	0,646	0,671	0,689	0,704	0,716	0,727	0,735
	SAPMA(%)		42,35	31,66	21,52	13,2	-5,39	-11,8	-14,2	-15,1	-15,7	-16,1	-16,6	-17,1	-17
$x_0 = x+\Delta(x / L-\Delta)$	**1**	δ_h	0,007	0,028	0,058	0,093	0,229	0,332	0,406	0,462	0,505	0,54	0,569	0,593	0,613
	2,16	δ_h	0,008	0,029	0,057	0,085	0,183	0,252	0,303	0,342	0,374	0,4	0,422	0,441	0,458
	SAPMA(%)		12,50	3,45	-1,75	-9,41	-25,14	-31,75	-33,99	-35,09	-35,03	-35,00	-34,83	-34,47	-33,84
	1	δ_h	0,007	0,028	0,058	0,093	0,229	0,332	0,406	0,462	0,505	0,54	0,569	0,593	0,613
	5	δ_h	0,02	0,055	0,085	0,11	0,179	0,221	0,251	0,274	0,292	0,308	0,322	0,333	0,344
	SAPMA(%)		65	49,09	31,76	15,45	-27,9	-50,2	-61,8	-68,6	-72,9	-75,3	-76,7	-78,1	-78,2
	1	δ_v / L	0,113	0,217	0,309	0,386	0,581	0,678	0,733	0,768	0,793	0,812	0,827	0,842	0,855
	2,16	δ_v / L	0,122	0,229	0,315	0,383	0,545	0,626	0,676	0,71	0,735	0,754	0,769	0,782	0,792
	SAPMA(%)		7,38	5,24	1,90	-0,78	-6,61	-8,31	-8,43	-8,17	-7,89	-7,69	-7,54	-7,67	-7,95
	1	δ_v / L	0,113	0,217	0,309	0,386	0,581	0,678	0,733	0,768	0,793	0,812	0,827	0,842	0,855
	5	δ_v / L	0,196	0,317	0,392	0,443	0,553	0,607	0,642	0,666	0,685	0,7	0,712	0,722	0,731
	SAPMA(%)		42,35	31,55	21,17	12,87	-5,06	-11,7	-14,2	-15,3	-15,8	-16	-16,2	-16,6	-17

6.Bölümde doğrusal malzemeli, serbest uç noktasından tekil kuvvet etkiyen kompozit kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler incelenmiştir. Etki eden kuvvete kirişin kesit ve boyuna bağlı olarak ve tanımlanan “K” boyutsuz büyüklüğüne göre, hesaplanan yer değiştirme değerleri Çizelge 6.1’de verilmiştir. K değeri arttıkça boyutsuz yatay ve düşey yer değiştirme değerleri de artmaktadır. 6.18 denklemine bakıldığında P (kuvvet) veya L (kirişin boyu) arttıkça, K değeri dolayısıyla da yatay ve düşey yer değiştirme değerleri de artmaktadır.

7. Bölümde, serbest uç noktasından moment etkiyen iki malzemeli, doğrusal olmayan kompozit kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler hesaplanmıştır. İlk olarak Ludwick tipi

doğrusal olmayan kompozit kirişler için hesaplamalar yapılmış ve farklı moment değerleri için sonuçlar, Çizelge 7.1'de gösterilmiştir. Matematiksel zorlukları azaltabilmek adına, kompozit kirişlerdeki malzemelerden biri doğrusal, diğeri Ludwick tipi doğrusal olmayan malzeme alınmıştır. Moment arttıkça yatay ve uç noktadaki düşey yer değiştirme büyüklükleri artmaktadır. Ayrıca kompozit kirişi oluşturan doğrusal malzemenin elastiklik modülü arttıkça olması gerektiği gibi her bir moment değeri için yer değiştirme büyüklükleri azalmaktadır. 7. Bölümde ikinci olarak, kübik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip kompozit kirişlerdeki yer değiştirmeler hesaplanmıştır. Çizelge 7.2'de bu değerler görülebilmektedir. Şekil 6.1'de kesiti verilen kompozit kiriş için üstteki parça 1 alttaki parça 2 numaralı parça olarak alındığında, Çizelge 7.2'den, artan moment değerlerine göre yatay ve düşey yer değiştirme değerlerinin arttığı görülebildiği gibi, 2 numaralı parçanın elastiklik modülü arttıkça, her bir moment değeri için yer değiştirme büyüklüklerinin de azaldığı görülmektedir. Doğrusal olmama derecesini gösteren α'daki değişimin, α'nın küçük değerlerinde yer değiştirmeler üzerindeki etkisi çok küçükken, α'nın daha büyük değerlerinde yer değiştirmeler üzerindeki etkisi, büyük moment değerleri için bir miktar artmaktadır. Bu bölümde üçüncü olarak logaritmik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip kompozit kirişlerdeki yer değiştirmeler incelenmiştir. Çizelge 7.3'te bu değerler tablolaştırılmıştır. Moment değerleri arttıkça yer değiştirmeler artmakta Şekil 6.1'de gösterilen, 2 numaralı parçanın elastiklik modülü arttıkça, yer değiştirme değerleri küçülmektedir. Doğrusal olmama derecesini gösteren "k" daki değişimin yer değiştirmeler üzerindeki etkisini incelemek için, Çizelge 7.3'teki veriler kullanılarak, Çizelge 9.14 oluşturulmuştur. Çizelge 9.14'ü incelediğimizde, aynı k değerine sahip kompozit kirişi oluşturan her iki malzemede, k yine aynı miktarda arttığında yatay ve düşey yer değiştirmeler azalmaktadır. Kompozit kirişi oluşturan malzemelerdeki k değerleri birbirinden farklı olduğunda ise Şekil 6.1'de gösterilen 2 numaralı parçanın k değeri, 1 numaralı parçadan daha küçükse, yatay ve düşey yer değiştirmeler de daha küçüktür sonucu çıkarılmaktadır

Çizelge 9.14 Logaritmik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip kompozit konsol kirişte farklı elastiklik modülü oranı ve moment değerleri için "k" parametresinin değişiminin yer değiştirmeler üzerindeki etkisi.

			M (Ncm)							
			1000		2000		5000		10000	
k_1	**k_2**	**t**	**Δ (cm)**	**δv (cm)**	**Δ (cm)**	**δv (cm)**	**Δ (cm)**	**δv (cm)**	**Δ (cm)**	**δv (cm)**
0,25	**0,25**	**1/5**	0,45992	8,2926	1,83276	16,4738	11,1398	39,2432	40,1612	54,9108
0,5	**0,5**	**1/5**	0,1151	4,15347	0,46009	8,29407	2,85782	20,4961	11,159	39,274
		SAPMA(%)	74,97	49,91	74,90	49,65	74,35	47,77	72,21	28,48
0,25	**0,25**	**1/2**	0,02289	1,8531	0,09157	3,70499	0,57155	9,24069	2,27486	18,3246
0,5	**0,5**	**1/2**	0,00572	0,92663	0,02289	1,85313	0,14307	4,63028	0,57165	9,24147
		SAPMA(%)	75,01	50,00	75,00	49,98	74,97	49,89	74,87	49,57
0,25	**0,25**	**1**	0,00268	0,63491	0,01074	1,26977	0,06717	3,17354	0,26853	6,34068
0,5	**0,5**	**1**	0,00067	0,31745	0,00268	0,63491	0,01679	1,58717	0,06717	3,17354
		SAPMA(%)	75,00	50,00	75,05	50,00	75,00	49,99	74,99	49,95
0,25	**0,75**	**1/5**	0,24522	6,05972	0,97898	12,0764	6,02948	29,4308	22,9191	53,4316
0,75	**0,25**	**1/5**	0,11623	4,17393	0,46463	8,33474	2,88573	20,5939	11,2647	39,4435
		SAPMA(%)	52,60	31,12	52,54	30,98	52,14	30,03	50,85	26,18
0,25	**0,75**	**1/2**	0,01055	1,25815	0,04221	2,51594	0,26367	6,2832	1,05238	12,5178
0,75	**0,25**	**1/2**	0,00708	1,03113	0,02835	2,06209	0,17715	5,15169	0,70762	10,277
		SAPMA(%)	32,89	18,04	32,84	18,04	32,81	18,01	32,76	17,90
0,25	**0,75**	**1**	0,00104	0,39499	0,00416	0,78997	0,026	1,97473	0,10398	3,94791
0,75	**0,25**	**1**	0,00084	0,35608	0,00338	0,71215	0,02113	1,78026	0,08451	3,55945
		SAPMA(%)	19,23	9,85	18,75	9,85	18,73	9,85	18,72	9,84

7. Bölümün sonraki kısımlarında kompozit kirişi oluşturan malzemelerin, Ludwick tipi-kübik, kübik-logaritmik, Ludwick tipi-logaritmik gerilme-şekil değiştirme bağıntılarına sahip olmaları durumunda, oluşan yer değiştirmeler incelenmiştir. Şekil 6.1'de kesiti verilen kompozit kirişte 1 ve 2 numaralı parçalar için önce 1 numaralı parçanın Ludwick tipi, 2 numaralı parçanın kübik, daha sonra 1 numaralı parçanın kübik, 2 numaralı parçanın Ludwick tipi olması durumunda oluşan yer değiştirmeler, Çizelge 7.4'te verilmiştir. Çizelge 7.4'teki veriler kullanılarak Çizelge 9.15 oluşturulmuştur. 1 numaralı parça Ludwick tipi, 2 numaralı parça kübik olduğunda oluşan yatay ve düşey yer değiştirme değerleri; diğer duruma yani 1 numaralı parça kübik, 2 numaralı parça Ludwick tipi olduğu duruma göre, çok daha büyük

olmaktadır. Çizelge 9.15'te bahsedilen farkı sapma (%) olarak görmek mümkündür.

Çizelge 9.15 Ludwick tipi-kübik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip kompozit konsol kirişte malzemelerin gerilme-şekil değiştirme özellikleri açısından yer değiştirmesinin yatay ve düşey yer değiştirmeler üzerindeki etkisi.

	M (Ncm)							
	1000		2000		5000		10000	
GERİLMELER	**Δ (cm)**	**δv (cm)**	**Δ (cm)**	**δv (cm)**	**Δ (cm)**	**δv (cm)**	**Δ (cm)**	**δv (cm)**
$\sigma_1=B_1\varepsilon^{1/n}$ $\sigma_2=E_2\varepsilon(1-\alpha\varepsilon^2)$	0,12223	4,28008	0,48772	8,53868	3,01354	21,0354	11,669	40,0825
$\sigma_1=E_1\varepsilon(1-\alpha\varepsilon^2)$ $\sigma_2=B_2\varepsilon^{1/n}$	0,00191	0,53571	0,00765	1,0714	0,04782	2,67803	0,19125	5,35262
SAPMA(%)	98,44	87,48	98,43	87,45	98,41	87,27	98,36	86,65

Çizelge 7.5'te 1 numaralı parçanın kübik, 2 numaralı parçanın logaritmik ve 1 numaralı parçanın logaritmik, 2 numaralı parçanın kübik olması durumunda oluşan büyük yer değiştirmeler ve farklılıkları görebilmektedir. Moment arttıkça yer değiştirmeler arttığı gibi, 2 numaralı parçanın elastiklik modülünün artması ile yer değiştirmeler azalmaktadır. E_1, kesiti Şekil 6.1 de verilen kompozit kirişteki 1 numaralı parçanın elastiklik modülü, E_2, 2 numaralı parçanın elastiklik modülü olmak üzere $E_2 = tE_1$ eşitliğinde "t" elastiklik modülleri oranı olarak ifade edilmiştir. Çizelge 7.5'teki verilerle oluşturulan, Çizelge 9.16'da yalnız bir t değeri için 1 ve 2 numaralı parçanın kübik ve/veya logaritmik olması durumunda, meydana gelen yer değiştirmeler ve aralarındaki fark, sapma (%) olarak görülebilmektedir. Buradan 2 numaralı parça logaritmik olduğunda, kübik olduğu duruma göre daha küçük yer değiştirmelerin oluştuğu sonucu çıkarılabilmektedir.

Çizelge 9.16 Kübik - Logaritmik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip kompozit konsol kirişte malzemelerin gerilme-şekil değiştirme özellikleri açısından yer değiştirmesinin yatay ve düşey yer değiştirmeler üzerindeki etkisi.

GERİLMELER	t	M (Ncm)							
		1000		2000		5000		10000	
		Δ (cm)	δv (cm)	Δ (cm)	δv (cm)	Δ (cm)	δv (cm)	Δ (cm)	δv (cm)
$\sigma_1=E_1\varepsilon(1-\alpha\varepsilon^2)$ $\sigma_2=E_2Ln[1+k\varepsilon]$	2	0,00016	0,15872	0,00067	0,31745	0,00419	0,79361	0,01679	1,58711
$\sigma_1=E_1Ln[1+k\varepsilon]$ $\sigma_2=E_2\varepsilon(1-\alpha\varepsilon^2)$	2	0,00021	0,17857	0,00085	0,35714	0,00531	0,89287	0,02126	1,78569
SAPMA(%)		23,81	11,12	21,18	11,11	21,09	11,12	21,03	11,12

Çizelge 7.6'da, Şekil 6.1'de kesiti verilen kompozit kiriş için 1 ve 2 numaralı parçaların Ludwick tipi ve logaritmik gerilme- şekil değiştirme bağıntısına sahip olmaları durumunda meydana gelen yatay ve düşey yer değiştirme değerleri verilmiştir. 1 numaralı parçanın Ludwick tipi, 2 numaralı parçanın logaritmik olması durumunda meydana gelen yer değiştirme değerleri, diğer duruma göre yani 1 numaralı parça logaritmik, 2 numaralı parça Ludwick tipi olmasına göre daha büyük olmaktadır. Çizelge 7.6'daki verileri kullanarak oluşturulan Çizelge 9.17'de, 1 ve 2 numaralı parçalardaki gerilme-şekil değiştirme bağıntılarının sırasıyla, Ludwick tipi-logaritmik, logaritmik-Ludwick tipi olmasının yer değiştirmeler üzerindeki etkisi ve oluşan yer değiştirmeler arasındaki fark sapma (%) olarak gösterilmiştir.

Çizelge 9.17 Ludwick tipi - Logaritmik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip kompozit konsol kirişte malzemelerin gerilme-şekil değiştirme özellikleri açısından yer değiştirmesinin yatay ve düşey yer değiştirmeler üzerindeki etkisi.

GERİLMELER	M (Ncm)							
	1000		2000		5000		10000	
	Δ (cm)	δv (cm)	Δ (cm)	δv (cm)	Δ (cm)	δv (cm)	Δ (cm)	δv (cm)
$\sigma_1=B_1\varepsilon^{1/n}$ $\sigma_2=E_2Ln[1+k\varepsilon]$	0,48629	8,52622	1,92583	16,8813	11,49004	39,8015	40,2592	54,853
$\sigma_1=E_1Ln[1+k\varepsilon]$ $\sigma_2=B_2\varepsilon^{1/n}$	0,00765	1,07141	0,03061	2,1426	0,19124	5,35248	0,76381	10,6752
SAPMA(%)	98,43	87,43	98,41	87,31	98,34	86,55	98,10	80,54

Çizelge 9.18 Ludwick tipi – Kübik ve Ludwick tipi - Logaritmik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip kompozit konsol kirişte meydana gelen yer değiştirme büyüklüklerinin karşılaştırılması.

GERİLMELER	M (Ncm)							
	1000		2000		5000		10000	
	Δ (cm)	δv (cm)	Δ (cm)	δv (cm)	Δ (cm)	δv (cm)	Δ (cm)	δv (cm)
$\sigma_1=B_1\varepsilon^{1/n}$ $\sigma_2=E_2\varepsilon(1-\alpha\varepsilon^2)$	0,12223	4,28008	0,48772	8,53868	3,01354	21,0354	11,66903	40,0825
$\sigma_1=B_1\varepsilon^{1/n}$ $\sigma_2=E_2Ln[1+k\varepsilon]$	0,48629	8,52622	1,92583	16,8813	11,49004	39,8015	40,2592	54,853
SAPMA(%)	74,86	49,80	74,67	49,42	73,77	47,15	71,02	26,93

Çizelge 7.4 ve Çizelge 7.6'daki verileri kullanarak Ludwick tipi-kübik ve Ludwick tipi-logaritmik gerilme-şekil değiştirme bağıntısına sahip kompozit kirişlerdeki yer değiştirmeler, aralarındaki farkı sapma (%) olarak görebilmek amacıyla oluşturulan Çizelge 9.18'de, gösterilmektedir. Çizelge 9.18'den görülebildiği gibi, farklı moment büyüklükleri için Ludwick tipi-logaritmik gerilme-şekil değiştirme bağıntısına sahip malzemelerden oluşan

konsol kirişlerdeki yer değiştirme değerleri, Ludwick tipi-kübik gerilme-şekil değiştirme bağıntısına sahip malzemelerden oluşan, konsol kirişlere göre daha büyük olmaktadır.

8. Bölümde önce serbest uç noktasından moment etkiyen, doğrusal olmayan, kübik gerilme-şekil değiştirme bağıntısına sahip çift modüllü konsol kirişlerdeki, büyük yer değiştirmeler hesaplanmıştır. Şekil 8.1'de çift modüllü kirişin dikdörtgen kesiti verilmiştir. Çizelge 8.1'de farklı α, elastiklik modülü oranı t ve moment büyüklüklerine göre hesaplanan çift modüllü konsol kirişlerdeki yatay ve düşey yer değiştirme değerleri verilmiştir. Buradan moment arttıkça yatay ve düşey yer değiştirmelerin arttığı, doğrusal olmama derecesini gösteren α'nın yer değiştirmeler üzerindeki etkisinin küçük olduğu ve çekmedeki elastiklik modülünün basınçtaki elastiklik modülüne göre artması durumunda, yer değiştirmelerin küçüldüğü görebilmektedir. Bu bölümde, daha sonra gerilme-şekil değiştirme bağıntısı logaritmik olan çift modüllü konsol kirişlerdeki yer değiştirmeler incelenmiştir. Doğrusal olmama derecesini gösteren k değerleri arttıkça yatay ve düşey yer değiştirme değerleri azalmaktadır. Artan moment değerleri ile yer değiştirme değerleri artmakta, çekmedeki elastiklik modülü, basınçtaki elastiklik modülüne göre arttığında, yatay ve düşey yer değiştirme değerleri azalmaktadır.

8. Bölümün üçüncü kısmında serbest uç noktasından tekil kuvvet etkiyen, doğrusal çift modüllü konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler, farklı yöntemlerle incelenmiştir. Çekmedeki ve basınçtaki elastiklik modülleri eşit olduğunda, malzeme bilinen doğrusal malzemeye dönüşmektedir. Çizelge 8.3'te Referans (Fertis, D.G., 1999) sonuç ile diğer yöntemlerle bulduğumuz yer değiştirme değerleri (karşılaştırma yapabilmek için Çizelgenin karşılaştırma yapılan kısmında çift modüllü malzemede t = 1, yani çekme ve basınçtaki elastiklik modülü aynı alınmıştır.) karşılaştırmalı olarak görebilmektedir. t =1 için Referans (Fertis, D.G., 1999) sonuçta verilen yer değiştirme değerleri ve çift modüllü konsol kirişte farklı yöntemlerle çözümler yapıldıktan sonra, t = 1 alarak elde ettiğimiz yer değiştirme değerlerinin referans sonuçtan farkı, sapma (%) olarak Çizelge 9.19'da verilmektedir. Çizelge 9.19'da yatay yer değiştirmeler için Referans (Fertis, D.G., 1999) sonuçtan sapma % 0,94 iken düşey yer değiştirmelerdeki referans sonuçlardan sapma, Açık Runge Kutta Yönteminde % 0,95, Momentler yönteminde % 1,70, Alt Bölge Kollokasyon Yönteminde % 2,60, En Küçük Kareler Yönteminde % 4,40 ve Galerkin yönteminde % 17,83 olmaktadır. Çizelge 8.3'ten, çekmedeki elastiklik modülü, basınçtaki elastiklik modülüne göre arttıkça, yer değiştirme değerlerinin küçüldüğü görülmektedir. Açık Runge-Kutta, Momentler, Alt Bölge Kollokasyon ve En Küçük Kareler yöntemleri ile yapılan hesaplamalarda bulunan yer

değiştirme değerleri, birbirine oldukça yakın değerlerdir. Yalnızca Galerkin yönteminde bir iki değer için büyük sapma değerleri gözlemlenmektedir.

Çizelge 9.19 Serbest uç noktasından tekil kuvvet etkiyen doğrusal çift modüllü konsol kirişte farklı yöntemlerle hesaplanan yer değiştirme değerlerinin çekme ve basınçta aynı elastiklik modülü olması durumu için karşılaştırılması.

$\sigma_1 = E_1\varepsilon$ (Basınç), $\sigma_2 = E_2\varepsilon$ (Çekme)		
($E_1bh^3 / 12$) = EI $E_2 = t\,E_1$, $h = h_1+h_2$, L = 25,4m , P = 1780 N , EI = $516{,}54*10^3$ Nm^2		
t		1
Referans Değer*	**Δ (m)**	4,61
	δ_v (m)	13,4198
Açık Runge-Kutta Yöntemi	**Δ (m)**	4,65362
	SAPMA (%)	0,94
	δ_v (m)	13,2933
	SAPMA (%)	-0,95
Momentler Yöntemi	**Δ (m)**	4,65362
	SAPMA (%)	0,94
	δ_v (m)	13,1956
	SAPMA (%)	-1,70
Galerkin Yöntemi	**Δ (m)**	4,65362
	SAPMA (%)	0,94
	δ_v (m)	16,3313
	SAPMA (%)	17,83
Alt Bölge Kollokasyon Yöntemi	**Δ (m)**	4,65362
	SAPMA (%)	0,94
	δ_v (m)	13,0792
	SAPMA (%)	-2,60
En Küçük Kareler Yöntemi	**Δ (m)**	4,65362
	SAPMA (%)	0,94
	δ_v (m)	12,8545
	SAPMA (%)	-4,40

8. bölümün dördüncü kısmında doğrusal çift modüllü yayılı yüklü basit kirişlerdeki yer değiştirmeler hesaplanmıştır. Çizelge 8.4'te kirişin ortasındaki düşey yer değiştirmeler ve yatay yer değiştirmeler verilmiştir. Burada Açık-Runge-Kutta yöntemiyle, 4 farklı x_0 yay uzunluğu kabulüyle hesaplamalar yapılmış ve Referans (Fertis, D.G., 1999) sonuç ile t =1 için (çekmedeki ve basınçtaki elastiklik modülünün aynı olması hali) karşılaştırılmıştır.

---

* Fertis, D.G., 1999, "Nonlinear Mechanics Second Edition", CRC Pres LLC,Boca Raton,Sayfa 92, Örnek 2.4.

Referans (Fertis, D.G., 1999) değerler ile özellikle $x_0 = x + \Delta$ kabulüyle yapılan hesaplamalarda çok yakın sonuçlar elde edilmiştir. Mesela t = 1 için Referans sonuçta yatay yer değiştirme 11.1895 m iken $x_0 = x + \Delta$ kabulüyle, Açık Runge Kutta yöntemiyle 11,17879 m, kirişin ortasındaki düşey yer değiştirme, referans sonuçta 9,33831 m iken $x_0 = x + \Delta$ kabulüyle, Açık Runge Kutta yöntemiyle 9,53132 m olarak hesaplanmıştır.

Çizelge 8.4'e bakıldığında, basınçtaki elastiklik modülü arttıkça, yatay ve düşey yer değiştirmelerin azaldığı görülmektedir. $x_0 = x + \Delta$ kabulüyle, yapılan hesaplamalardan elde edilen yer değiştirme değerleri, diğer 3 x_0 kabulüyle bulunan yer değiştirme büyüklüklerine göre daha küçüktür.

En son olarak bileşik yüklü doğrusal çift modüllü konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler hesaplanmıştır. 4 farklı x_0 değeri için yapılan yer değiştirme hesapları karşılaştırmalı olarak Çizelge 8.5'te verilmiştir. Bu çizelge de t = 1 için yapılan karşılaştırmalarda tüm x_0 kabulleri için oldukça yakın sonuçlar bulunduğu görülmektedir. Çekmedeki elastiklik modülünün artmasıyla yatay ve düşey yer değiştirme değerleri azalmaktadır. 4 farklı x_0 değeri için yapılan yer değiştirme hesapları sonucunda tüm t değerleri için yakın sonuçlar bulunmuştur.

10. SONUÇLAR

Bir çok mühendislik alanlarında kullanılan bir boyutlu taşıyıcı sistemlerde genel olarak doğrusal teoriyi kullanmak büyük hatalara yol açmamaktadır. Gerçekte ise elastik eğrideki eğrilik ifadesi doğrusal olmadığı gibi malzemede doğrusal değildir. Bundan dolayı büyük yer değiştirme değerlerini hesaplamak için doğrusal olmayan teori kullanılmalıdır ve hesaplamalarda malzemedeki doğrusal olmayan gerilme-şekil değiştirme ilişkisi de dikkate alınmalıdır. Eğer malzeme doğrusal gerilme-şekil değiştirme bağıntısına sahip olmadığı halde doğrusal olarak kabul edilip yer değiştirme hesaplamaları yapılırsa, çalışmadaki örnek problemlerden görüleceği gibi seçilen moment aralığında farklı moment değerleri için yatay yer değiştirmelerde % 800, düşey yer değiştirmelerde % 200'e varan büyük farklılıklara neden olmaktadır. Asma köprüler gibi yapılarda bu tür doğrusallaştırmaların yapılması sakıncalıdır.

Bu çalışmada, matematiksel güçlüklerin aşılamadığı durumlar dışında, hem geometrik hem de malzemenin doğrusal olmama durumuna göre yer değiştirme hesaplamaları yapılmıştır. Geometrik doğrusal olmama durumunun bile hesapları yeterince karıştırdığı düşünülürse, malzemenin doğrusal olmama durumunun da eklenmesiyle yer değiştirme hesaplamaları daha da zorlaşmaktadır.

Serbest ucundan moment etkiyen konsol kirişlerdeki yer değiştirmeleri hesaplarken kullanılan Momentler, Galerkin, Alt Bölge Kollokasyon, En Küçük Kareler ve Nokta Kollokasyon yöntemleriyle düşey yer değiştirme ifadesi yaklaşık $y = ax^2 + bx^4$ formunda yazılarak daha basit bir denkleme dönüştürülmektedir. Genelde yapılan çalışmalarda serbest uç noktadaki düşey yer değiştirmeleri veren ifadeler elde edilirken, bu çalışmada yer değiştirmeler, $y = ax^2 + bx^4$ formunda genel olarak ifade edilmiştir.

Deneme fonksiyonu, $y = ax^2 + bx^4$ formunda seçilirken, sınır koşullarını sağlaması yanında, sade ve basit olması, bilinmeyen sabit terim sayısının az olması ve herkes tarafından en çok bilinen polinom tipi olması ve hesaplamalarda matematiksel kolaylık sağlaması, hususları göz önüne alınmıştır. Sınır koşullarını sağlayan farklı deneme fonksiyonları(üstel, çarpım tipi, trigonometrik) veya daha fazla terimli polinom tipi fonksiyon seçilerekte hesaplamalar yapılabilir. Ancak seçilen fonksiyona bağlı olarak, elde edilen denklemlerdeki karmaşıklık, kullanılan yöntemlerden hesaplanması gereken sabit terimleri bulmayı zorlaştırmakta veya imkansızlaştırmaktadır.

Serbest uç noktasından moment etkiyen Ludwick tipi bir konsol kirişte, $y = ax^2 + bx^4$ şeklinde sınır şartlarını sağlayan bir deneme fonksiyonu alarak, yatay ve düşey yer değiştirmeler hesaplandığında, moment değeri arttıkça, referans (Lewis, G., Monosa, F., 1982) sonuca göre, kullanılan yöntemlerdeki hassasiyetin azaldığı, büyük moment değerlerinde, yer değiştirme hesaplarındaki sonuçların doğruluğunun, yöntemler arasında iyiden kötüye doğru sırasıyla, Açık Runge-Kutta, Momentler, Alt Bölge Kollokasyon, En Küçük Kareler, Galerkin ve Nokta Kollokasyon yöntemleriyle sağlandığı söylenebilmektedir. Tüm yöntemlerde ilk üç moment değeri için hesaplanan düşey yer değiştirme büyüklüklerinin referans (Lewis, G., Monosa, F., 1982) sonuçtan sapma değeri % 0,05 civarında çok küçük bir değer olması, küçük moment değerlerinde kullandığımız sayısal yöntemlerin daha iyi sonuç verdiğinin göstergesidir.

Serbest uç noktasından tekil kuvvet etkiyen Ludwick tipi gerilme-şekil değiştirme bağıntısına sahip konsol kirişlerde, yer değiştirmeler için tekrar $y = ax^2 + bx^4$ şeklinde sınır şartlarını sağlayan bir deneme fonksiyonu alınarak, yapılan hesaplamalarda Açık Runge-Kutta, Momentler, Alt Bölge Kollokasyon ve En Küçük Kareler yöntemiyle uygun sonuçlar elde edilmiş, Galerkin ve Nokta Kollokasyon yöntemleriyle yapılan hesaplamalarda uygun sonuçlar elde edilememiştir. Hesaplamalar için gerekli olan ve Galerkin yöntemiyle elde edilen denklemlerdeki, ağırlık fonksiyonlarına bağlı olarak ortaya çıkan, üstel ifadelerin derecelerinin büyüklüğü ve Nokta Kollokasyon yönteminin, kendi yapısından kaynaklanan karmaşık denklemlerdeki hassasiyet eksikliği, istenilen sonuçlardan sapma gerekçeleri olarak söylenebilir. Daha farklı deneme ve ağırlık fonksiyonları kullanılarak bu yöntemlerle de uygun sonuçlar elde edilebileceği düşünülmektedir.

Kullanılan yöntemler ile yapılan hesaplamalar sonucunda düşey yer değiştirme değeri, yine $y = ax^2 + bx^4$ şeklinde basit bir formda ifade edilebilmiştir. Referans (Lewis, G., Monosa, F., 1981) değerler ile karşılaştığında sonuçların doğruluğunu en iyi veren yöntemler iyiden kötüye doğru sırayla, Açık Runge-Kutta, Momentler, Alt Bölge Kollokasyon ve En Küçük Kareler yöntemleri olarak verilebilir. Momentler yönteminde verilen aralıkta, $\frac{L^{n+1}}{K_n}$ boyutsuz büyüklüğü arttıkça artacak şekilde, düşey yer değiştirmelerdeki sapma % 0,03 ile % 4,03 arasında değişmektedir. Yani $\frac{L^{n+1}}{K_n}$ arttıkça Referans (Lewis, G., Monosa, F., 1981) sonuçtan sapma artmaktadır. Alt Bölge Kollokasyon yönteminde ise Momentler yönteminin tersine, $\frac{L^{n+1}}{K_n}$ arttıkça düşey yer değiştirmelerde ki Referans (Lewis, G., Monosa, F., 1981) sonuçtan sapma, azalarak % 3,66 ile % 1,37 arasında değişmektedir.

Üniform yayılı yüklü basit kirişlerde Fertis'in (Fertis, D.G., 1999) 4 farklı yaklaşık x_0 yay uzunluğu kabullerinden 3 tanesi için yer değiştirmeler hesaplanabilmiş, trigonometrik terim içeren dördüncü x_0 yay uzunluğu kabulü için sonuçlar elde edilememiştir.

Yayılı yüklü, Ludwick tipi gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip basit kirişte $\frac{L^{2n+1}}{K_n}$ boyutsuz büyüklüğü arttıkça yer değiştirmelerde artmakta, $\sigma = B\varepsilon^{\frac{1}{n}}$ ifadesindeki n arttıkça ise yer değiştirmeler azalmaktadır. Ayrıca n arttıkça her x_0 yay uzunluğu kabulü için hesaplanan yatay ve en büyük düşey yer değiştirme büyüklükleri arasındaki farkta azalmaktadır. Örneğin n = 5 için tüm x_0 yay uzunluğu kabullerinde hesaplanan yatay ve orta noktadaki düşey yer değiştirmeler arasındaki sapma % 0 düzeyindedir.

Bileşik yüklü, Ludwick tipi gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip konsol kirişlerde büyük yer değiştirmelerin hesabı için Fertis'in (Fertis, D.G., 1999) kullandığı 2 farklı x_0 yay uzunluğu kabulüyle uygulanan yöntem, Referans'ta (Lee, K., 2002) kullanılan yöntemden daha sade ve daha kolay ve anlaşılır bir çözüm vermektedir.

Ludwick tipi gerilme-şekil değiştirme bağıntısına sahip malzemelerden oluşan kompozit kirişlerdeki yer değiştirme hesaplamalarında kullanılan eğrilik-moment eşitliğindeki üstel ifadelerin derecesini küçültmek için (üstel ifadeler arttıkça denklemin kökü olarak bulunan eğrilik değerlerinin de sayısı artacaktır) n değeri ($\sigma = B\varepsilon^{\frac{1}{n}}$) uygun bir değer seçilerek çözüm yapılabilmiştir. n'nin büyüklüğü arttıkça doğru eğrilik değerini bulmak zorlaşmaktadır.

Ayrıca çift malzemeli kompozit kirişlerde, her iki parçanın Ludwick tipi, kübik,logaritmik veya her bir parçanın farklı özelliğe sahip Ludwick tipi-kübik, kübik-Ludwick tipi, Ludwick tipi-logaritmik, logaritmik-Ludwick tipi, kübik-logaritmik, logaritmik-kübik gibi gerilme-şekil değiştirme bağıntılarına sahip olmaları durumunda, parçaların kesitlerine de bağlı olarak, verilen moment aralığında, yer değiştirme değerlerinde büyük farklılıklar olmaktadır.

Doğrusal çift modüllü konsol kirişlerdeki yer değiştirme değerlerinin hesabında en iyi sonucu, sırasıyla Açık Runge-Kutta, Momentler, Alt Bölge Kollokasyon ve En Küçük Kareler yöntemleri vermektedir. Ayrıca çekmedeki elastiklik modülü, basınçtakii elastiklik modülüne göre arttıkça, yatay ve düşey yer değiştirme değerlerinin küçüldüğü görülmektedir.

Yayılı yüklü, doğrusal çift modüllü basit kirişlerde, Fertis'in (Fertis, D.G., 1999) 4 farklı yaklaşık x_0 yay uzunluğu kabulleriyle yapılan hesaplamalardan elde edilen, yatay ve düşey yer değiştirme değerleri için en iyi sonuç, $x_0 = x + \Delta$ kabulü yapıldığında bulunabilmektedir. Ayrıca basınçtaki elastiklik modülü, çekmedekine göre arttıkça yatay ve düşey yer değiştirmeler küçülmektedir.

Bileşik yüklü, doğrusal çift modüllü konsol kirişlerde 4 farklı x_0 kabulüyle yapılan hesaplamalarda, tüm x_0 kabulleri için çekmedeki elastiklik modülü arttıkça, yatay ve düşey yer değiştirmelerin azaldığı görülmektedir.

Daha karmaşık haller için genel çözümlerin değişik sayısal yöntemler (örneğin; sonlu farklar yöntemi gibi) kullanılarak bulunabileceği düşünülmektedir.

Tezde Bernoulli-Euler kirişi ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Timoshenko ve diğer kiriş tipleri içinde benzer çalışmalar yapılarak bu konu genişletilebilir.

KAYNAKLAR

AL-Sadder, S., AL-Rawi, R.A.O., (2006), "Finite difference scheme for large deflection analysis of non-prismatic cantilever beams subjected to different types of continuous and discontinuous loadings." Arch. Appl. Mech., 75: 459-473.

Baker, G., (1993),"On the large deflections of non-prismatic cantilevers with a finite depth", Computers and Structures, 46: 365-370.

Belendez, T., Neipp, C., Belendez, A., (2002), "Large and small deflection of a cantilever beam", Eur.J.Phys., 23:371-379.

Bishopp, K.E., Drucker, D.C., (1945), "Large deflections of cantilever beams" , Q. Appl. Math., 3: 272-275.

Chucheepsakul, S., Buncharoen, S.,Wang, C.M., (1994), "Large deflection of beams under moment gradient", J.Eng.Mech., 120(9): 1848-1860.

Dado, M., AL-Sadder, S., (2005), "A new tecnique for large deflection analysis of non-prismatic cantilever beams" Mech. Res. Com. 32(6): 692-703.

Fertis, D.G., Lee, C.T., (1991) "Inelastic analysis of flexible bars using simplified non linear equivalent systems", Computers and Structures, 41: 947-958.

Fertis, D.G., (1999), "Nonlinear Mechanics", CRC Press, Boca Raton, Florida.

Frisch-Fay, R., (1962), " Flexible Bars " Butterworths, London.

Gere, J.M., Timoshenko, S.P., (1984), "Mechanics of Materials", Pws Publishers, Boston.

Güven, U., Baykara, C., Bayer, İ., (2005), "Large deflections of a cantilever beam of nonlinear bimodulus material subjected to an end moment", J.Reinforced Plastics and Composites, Vol.24, 12:1321-1326.

He, X-T., Chen, S-L., (2006), "Biparametric perturbation solutions of large deflection problem of cantilever beams.", Appl. Math. and Mech. 27(4): 453-460.

Holden, J.T., (1972), "On the finite deflections of thin beams" Int. J. Solids Struct., 8: 133-135.

Huang, X., Yu, T.X., Lu, G., Lippmann, H., (2003), "Large deflection of elastoplastic beams with prescribed moving and rotating ends" J. Mech. Eng. Sci., 217(9): 1001-1014

İnan, M., (1967), "Cisimlerim Mukavemeti", Arı Kitabevi, İstanbul.

Jeon, S.M., Cho, M.H., Lee, I., (1995) "Static and dynamic analysis of composite box beams using large deflection theory" Computers and Structures, 57(4): 635-642

Joseph, D., Varadan, T.L., (1987), "Inelastic finite deflections of cantilever beams", J. Aeronout. Soc.India, 39: 39-41.

Katsikadelis, J.T., Tsiatas, G.C., (2003), "Large deflection analysis of beams with variable stiffness", Acta Mechanica, 164:1-13.

Kounadis, A.N., Mallis, J.G., (1987), "Elastica Type buckling analysis of bars from non-linearly elastic material", Int.J.Non Linear Mech., 22(2): 99-107.

Lee, B.K., Wilson, J.F., Oh, S.J., (1993), "Elastica of cantilevered beams with variable cross sections", Int. J. Non-Linear Mechanics, 28:579-589.

Lo, C.C., Gupta, S.D., (1978), "Bending of a non-linear rectangular beam in a large deflection", J. Appl. Mech., 45, 213-215.

Monasa, F., (1979), " The effect of material nonlinearity on the bending of the elastica ", Proc. 3rd. Engng Mech. Speciality Conference, ASCE, 638-641.

Monasa, F., Lewis, G., (1981), " Large deflections of cantilever beams of non-linear materials", Computers and Structures, Vol.14, No. 5-6: 357-360.

Monasa, F., Lewis, G., (1982), " Large deflections of cantilever beams of non-linear materials of the Ludwick type subjected to an end moment ", Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol.17, No.1:1-6.

Nageswara, R.B., Venkateswara, R.G., (1986) "On the large deflection of cantilever beams with and rotational load", ZAMM, 66(10):507-509.

Oden, J.T., Childs, S.B., (1970), "Finite deflections of non-linearly elastic bar", J. Appl. Mech., 37: 48-52.

Pak, R.Y.S., Stauffer, E.J., (1994), "Nonlinear finite deformations analysis of beams and columns", J.Eng. Mech., 120(10): 2136-2153.

Prathop, G., Varadan, T.K., (1976), " The inelastic large deformation of beams ", J. Appl. Mech. ASME, 43, 689.

Sinclair, G.B., (1979),"The non-linear bending of a cantilever beam with shear and longitudinal deformations", Int.J.Nonlinear Mech., 14:111-122.

Wang, C.Y., (1981a), "Folding of elastica: similarity solutions", J. Appl. Mech., 48: 199-200.

Wang, C.Y., (1981b), "Large deflection of an inclined cantilever with an end load", Int. J. Non-Linear Mechanics, 16: 155-164.

Wang, C.Y., (1983), "Lifting a heavy elastic sheet or rod from an incline", Int. J.Mech.Sci. 25: 851-858.

Wang, C.Y., (1984), "Buckling and postbuckling of the lying sheet", Int. J. Solids Struct., 20: 851-858.

İNTERNET KAYNAKLARI

[1] http://web.mit.edu/course/3/3.11/www/modules/ss.pdf

EKLER

Ek 1	Tezde kullanılan yöntemler ve matematiksel fonksiyonlar.
Ek 2	Euler-Bernoulli eğrilik ifadesi ile ilgili tanımlamalar.
Ek 3	Ludwick tipi gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip dikdörtgen kesitli kirişlerde, eğrilik-moment ilişkisinin tanımlanması.

Ek 1 Tezde kullanılan yöntemler ve matematiksel fonksiyonlar

Ağırlıklı Artıklar Yöntemi

$L(y(x)) = f(x) \quad \forall x \in \Omega$ şeklinde alınan eşitlikte L, diferansiyel operatör, x ise Ω bölgesinin üzerinde alınan bir nokta olmak üzere, bölge üzerindeki hata fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır:

$$\varepsilon_{\Omega}(x) = L(y(x)) - f(x) \tag{1}$$

Yaklaşık çözüm için seçilen fonksiyonlar;

$$y_N(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i(x) \tag{2}$$

olarak alınabilir. a_i, x'den bağımsız sabit terimler, $\varphi_i(x)$ ise tam bir fonksiyon (polinomlar, trigonometrik fonksiyonlar gibi) ailesinin elamanı olan baz fonksiyonlarıdır.

Ağırlıklı artık fonksiyonu ise aşağıdaki gibidir:

$$\int_{\Omega} [L(y(x)) - f(x)]\Psi(x)d\Omega = 0 \tag{3}$$

Bölge noktaları için $\Psi(x)$, ağırlık fonksiyonlarıdır. (3) denkleminde, (2) eşitliğinde verilen yaklaşık deneme fonksiyonu yerine yazıldığında, hatayı bölge üzerinde yaymamızı sağlayan ağırlıklı artık fonksiyonu;

$$\int_{\Omega} [L(\sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i(x)) - f(x)]\Psi(x)d\Omega = 0 \tag{4}$$

olarak bulunur.

Yöntemleri tanımlamak adına seçtiğimiz örnek diferansiyel denklem eşitliği, aşağıdaki gibi alınırsa;

$$y'(x) + y(x) = x \tag{5}$$

verilen x = 0'da $y(0) = 0$ ve x = 0'da $y'(0) = 0$ sınır şartlarını sağlayan, yaklaşık deneme fonksiyonunu;

$$y(x) = ax^2 + bx^4 \tag{6}$$

şeklinde seçebiliriz.

(5)'deki örnek denklem için (6) denklemi kullanıldığında hata fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\varepsilon_{\Omega}(x) = 2ax + 4bx^3 + ax^2 + bx^4 - x \tag{7}$$

Ağırlıklı artık fonksiyonu,

$$\int_0^L (2ax + 4bx^3 + ax^2 + bx^4 - x)\Psi(x)dx = 0 \tag{8}$$

şeklinde yazılır.

Denklemin tanımlı olduğu bölge, $x \in [0,L]$ alınarak, ağırlıklı artık yöntemleri, aşağıda incelenmiştir.

Nokta kollokasyon yöntemi

Bu yöntemde, hatayı bölge üzerinde seçilen noktalar için sıfıra eşitlemek suretiyle, denklem (5)'te verilen a ve b sabitleri hesaplanmaya çalışılır. Bu yöntemlerde denklem sayısı, bilinmeyen sabit sayısı kadar olması gerektiğinden bölge üzerinde seçilen noktaların sayısı, bilinmeyen sabit terimler kadar olmalıdır.

$x = L / 2$ ve $x = L$ olarak seçilen bölge üzerindeki iki nokta için, (7) denklemindeki hata fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır:

$$\varepsilon_{\Omega}(x = \frac{L}{2}) = aL + \frac{bL^3}{2} + \frac{aL^2}{4} + \frac{bL^4}{16} - \frac{L}{2} = 0 \tag{9}$$

$$\varepsilon_{\Omega}(x = L) = 2aL + 4bL^3 + aL^2 + bL^4 - L = 0 \tag{10}$$

(9) ve (10) denklemleri çözüldüğünde (6) denklemindeki a ve b sabitleri bulunarak yaklaşık deneme fonksiyonu elde edilir.

Momentler yöntemi

Bu yöntemde, (8) denkleminde gösterilen ağırlıklı artık fonksiyonunda, bilinmeyen sayısına bağlı olarak, hatanın orijine göre momentleri, yani hata fonksiyonun ağırlık fonksiyonları $(1, x, x^2, x^3 ......)$ ile çarpılmış hali, sıfıra eşitlenerek elde edilen denklemler aşağıdaki gibi yazılabilir:

Hatanın sıfırıncı momenti;

$$\int_0^L (2ax + 4bx^3 + ax^2 + bx^4 - x)1dx = 0 \tag{11}$$

Hatanın birinci momenti;

$$\int_0^L (2ax + 4bx^3 + ax^2 + bx^4 - x)xdx = 0 \tag{12}$$

(11) ve (12) denklemlerindeki integrasyon işlemleri yapıldıktan sonra elde edilen denklemlerden a ve b sabit terimleri çekilerek (6) denkleminde verilen yaklaşık deneme fonksiyonu bulunur.

Alt bölge kollokasyon yöntemi

Bu yöntemde hata fonksiyonu, bilinmeyen sayısına bağlı olarak, bölge üzerinde alt bölgeler için sıfırlanmaya çalışılır. Bu bölgelerdeki ağırlık fonksiyonun şiddeti de bir olarak alınır. Bu açıklamalar ışığında (8) denklemindeki ağırlıklı artık fonksiyonu;

$$\int_0^{\frac{L}{2}} (2ax + 4bx^3 + ax^2 + bx^4 - x)1dx = 0 \tag{13}$$

$$\int_{\frac{L}{2}}^L (2ax + 4bx^3 + ax^2 + bx^4 - x)1dx = 0 \tag{14}$$

şeklinde yazılabilir. (13) ve (14) denklemlerindeki integrasyonlar yapılıp, çıkan ifadelerden a ve b sabit terimleri elde edildikten sonra (6) denklemindeki yaklaşık deneme fonksiyonu bulunur.

Galerkin yöntemi

Galerkin yönteminde, ağırlık fonksiyonları olarak baz fonksiyonları seçilir. (6) denklemindeki yaklaşık deneme fonksiyonunda bulunan x^2 ve x^4 baz fonksiyonları, (8) denkleminde kullanılarak, hata bölge üzerinde integre edildiğinde aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\int_0^L (2ax + 4bx^3 + ax^2 + bx^4 - x)x^2dx = 0 \tag{15}$$

$$\int_0^L (2ax + 4bx^3 + ax^2 + bx^4 - x)x^4 dx = 0 \quad (16)$$

(15) ve (16) denklemlerindeki integrasyon sonucunda çıkan ifadelerden, çekilebilecek olan a ve b sabitleri, (6) denklemindeki yaklaşık deneme fonksiyonunun bulunmasını sağlar.

En küçük kareler yöntemi

Bu yöntemde;

$\int [\varepsilon_\Omega(x)]^2 dx$ ifadesi minimum yapılmaya çalışılır. a_i (i = 1,2,3...) değerleri x'den bağımsız sabitler olmak üzere aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \int_\Omega [\varepsilon_\Omega(x)]^2 d(x) = 0 \quad (17)$$

$$2\int_\Omega [\varepsilon_\Omega(x)] \frac{\partial}{\partial a_i} [\varepsilon_\Omega(x)] d(x) = 0 \quad (18)$$

$\frac{\partial}{\partial a_i} [\varepsilon_\Omega(x)]$ ifadeleri ağırlık fonksiyonları olduğuna göre (5) eşitliğindeki örnek denklem için ağırlık fonksiyonları aşağıdaki gibi alınır:

$$\frac{\partial \varepsilon_\Omega(x)}{\partial a} = 2x + x^2 \quad (19)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_\Omega(x)}{\partial b} = 4x^3 + x^4 \quad (20)$$

(19) ve (20) ağırlık fonksiyonları kullanılarak (8) denklemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\int_0^L (2ax + 4bx^3 + ax^2 + bx^4 - x)(2x + x^2) dx = 0 \quad (21)$$

$$\int_0^L (2ax + 4bx^3 + ax^2 + bx^4 - x)(4x^3 + x^4) dx = 0 \quad (22)$$

Yukarıdaki iki denklemi kullanarak a ve b sabit terimleri, dolayısıyla (6) denkleminde verilen yaklaşık deneme fonksiyonunu bulunur.

Newton Yöntemi

Newton yöntemi, genellikle yaklaşık kök bulmak için kullanılan bir metottur. $f(x) = 0$ şeklinde verilen bir fonksiyonun kökünü bulmak için, x_0, yaklaşık başlangıç değeri, ε, adım aralığı olmak üzere f(x) fonksiyonunda $x = x_0 + \varepsilon$ yazılmak suretiyle, $f(x_0 + \varepsilon)$ ifadesi Taylor serisine açılarak aşağıdaki gibi yazılır:

$$f(x_0+\varepsilon) = f(x_0)+f'(x_0)\varepsilon+\frac{1}{2}f''(x_0)\varepsilon^2+... \tag{23}$$

Eşitliğin sağ tarafındaki ilk iki terimi alırsak, (23) denklemi yaklaşık olarak;

$$f(x_0+\varepsilon) \approx f(x_0)+f'(x_0)\varepsilon \tag{24}$$

şeklindedir.

$f(x_0 + \varepsilon) = 0$ olarak alındığında $\varepsilon \equiv \varepsilon_0$ olur ve aşağıdaki gibi yazılır:

$$\varepsilon_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{25}$$

Daha sonra benzer işlem $x_1 = x_0 + \varepsilon_0$ için yapılır. Bu işlem yakınsaklık sağlanıncaya kadar sürdürülür. Bu işlemler için aşağıdaki genel tanımlamalar yapılabilir:

$$\varepsilon_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{26}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{27}$$

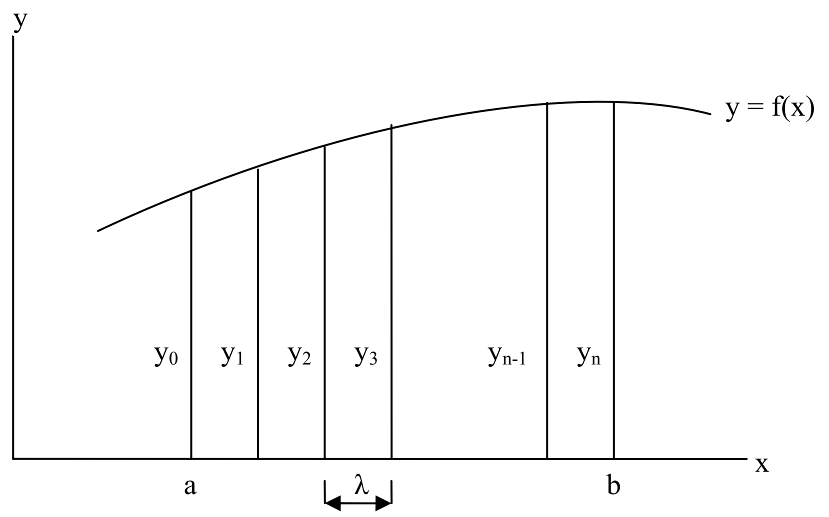
(27) ifadesi Newton yöntemi ile kök bulma işleminin en genel halidir.

Simpson'ın Üçte Bir Kuralı

Simpson'ın üçte bir kuralı en çok belirli integrallerin yaklaşık çözümünü bulmak için kullanılır.

$$\delta = \int_a^b f(x)dx \tag{28}$$

(28) denklemindeki gibi alınan bir integral, a ve b sınırları arasında Şekil 1'deki gibi n eşit parçaya ayrılmıştır.



Şekil 1 y = f(x) fonksiyonunun grafiği.

$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$ değerleri, f(x) fonksiyonu üzerinde alınan noktaların ordinatlarıdır. λ ise bu noktaların, apsis ekseni üzerindeki izdüşümleri arasındaki eş uzaklıktır.

$$\lambda = \frac{b-a}{n} \tag{29}$$

Buna göre λ, (29) denkleminde yazıldığı gibi alındığında, (28) eşitliği aşağıdaki gibi bulanabilir:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\lambda}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \tag{30}$$

Eğer n =10 olarak alınırsa (30) denklemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{30}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + 2y_8 + 4y_9 + y_{10}) \tag{31}$$

Runge-Kutta Yöntemi

Runge-Kutta Yöntemi, diferansiyel denklemlerin sayısal çözüm yöntemi olarak kullanılan en yaygın metotlardan biridir. Yüksek mertebeden Runge-Kutta yöntemiyle çözüm elde etmek hiçte kolay bir iş değildir. Zorluklardan bir tanesi geçerli koşulları sağlayan katsayıların bulunmasıdır. Denklemin lineer olmaması, tek bir çözümünün bulunmaması, deneysel ve basitleştirici bir çok kabulün yapılmak zorunda kalınması diğer zorluklardır. Örneğin on ikinci mertebeden Runge-Kutta yöntemini kullanarak bir diferansiyel denklemin çözümünü yapmak için sağlanması gereken 7813 koşul vardır.

Dördüncü mertebeden klasik Runge-Kutta yöntemi

En çok kullanılan Runge-Kutta metotlarından biridir. Aşağıdaki gibi tanımlanan bir başlangıç değer probleminde bu yöntem izah edilebilir:

$$y' = f(x,y) \tag{32}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{33}$$

Bu problem için, h adım aralığı olmak üzere, 4. mertebeden Runge-Kutta yöntemi aşağıdaki gibi verilir:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{34}$$

(34) denkleminde;

$$k_1 = f(x_n, y_n) \tag{35}$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \tag{36}$$

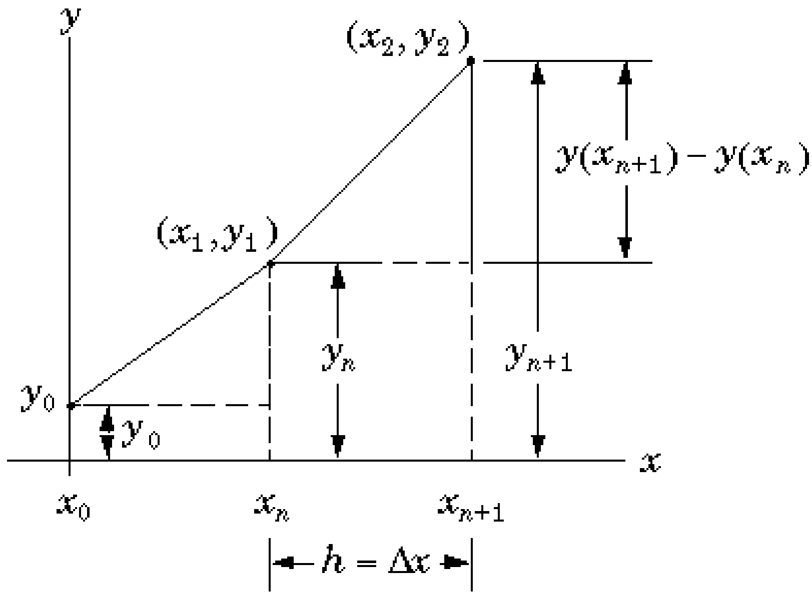
$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2) \tag{37}$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \tag{38}$$

olarak yazılabilir.

Buradan çıkarılacak sonuca göre, bir sonraki y_{n+1} değeri, o anki y_n değerine h aralığının büyüklüğü ile tahmini eğimin çarpımının eklenmesiyle elde edilir. Bu eğim, eğimlerin ağırlıklı ortalamasıdır.

k_1, aralığın başlangıcındaki eğimdir. k_2, aralığın orta noktasındaki eğimdir. Bu eğim, Euler yöntemi kullanılarak y'nin $x_n + \frac{h}{2}$ noktasındaki değerinden elde edilir. k_3, yine orta noktadaki eğimdir. Ama bu sefer y değeri k_2 eğiminden elde edilir. k_4, aralığın sonundaki eğimdir ve y değeri k_3 eğimi kullanılarak bulunur.



Şekil 2 Runge-Kutta yöntemi için kullanılan bazı parametrelerin grafik gösterimi.

Açık(Explicit) Runge-Kutta Yöntemi

Açık Runge-Kutta Yöntemi, 4. Mertebeden Runge-Kutta yönteminin aşağıda gösterildiği gibi genelleştirilmesidir.

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i \tag{39}$$

(39) denklemindeki s, basamak sayısıdır. k_i değerleri ise aşağıdaki gibidir:

$$k_1 = f(x_n, y_n) \tag{40}$$

$$k_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} h k_1) \tag{41}$$

$$k_3 = f(x_n + c_3 h, y_n + a_{31} h k_1 + a_{32} h k_2) \tag{42}$$

.

.

$$k_n = f(x_n + c_s h, y_n + a_{s1} h k_1 + a_{s2} h k_2 + \ldots + a_{s,s-1} h k_{s-1}) \tag{43}$$

a_{ij} $(1 \le j \le i \le s$ için), b_i (i =1,2,...s için), c_i (i =2,3,...s için) olarak belirtilen katsayılar, Runge-Kutta tablosu olarak bilinen tarzda düzenlenerek aşağıdaki gibi gösterilebilir:

Çizelge 1 Runge-Kutta katsayı tablosu.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & & \ddots & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s,s-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s
\end{array}
$$

i = 2,3,...s için, aşağıdaki kabul yapılabilir:

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i \tag{44}$$

Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \tag{45}$$

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^{z} e^{-t} dt \tag{46}$$

z > 0 olarak alındığında;

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^{z} e^{-t} dt = [-t^z e^{-t}]_0^\infty + z\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z) \tag{47}$$

z, pozitif tamsayı olarak alındığında,

$$\Gamma(z+1) = z! \tag{48}$$

olacaktır. Aşağıda bir kaç tane, örnek Gamma fonksiyon değeri verilmiştir:

$$\Gamma(\frac{1}{3}) \approx 2,67894$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\frac{2}{3}) \approx 1,35412$$

Hipergeometrik Fonksiyon

Hipergeometrik fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$_2\mathrm{Fl}[a,b;c;z] = \sum_{0}^{k} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} \tag{49}$$

c, negatif tamsayı değilse, z'nin modülü 1'den küçük $|z| < 1$ olduğunda ve $|z| = 1$ iken $\mathbb{R}[c\text{-}a\text{-}b] > 0$ ise (49) denklemi yakınsar.

(49) denklemindeki $(a)_k$ Pochhammer sembolüdür.

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = a(a+1)...(a+k-1) \tag{50}$$

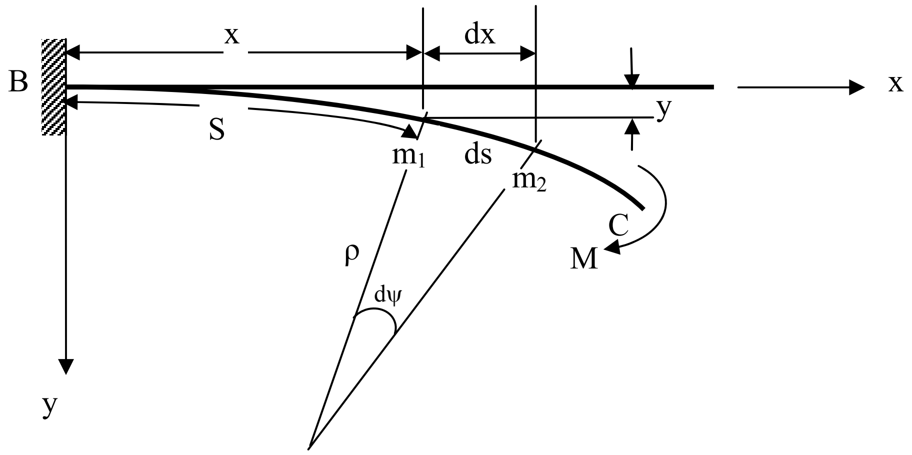
Aşağıda bir kaç tane, örnek hipergeometrik fonksiyon değeri verilmiştir:

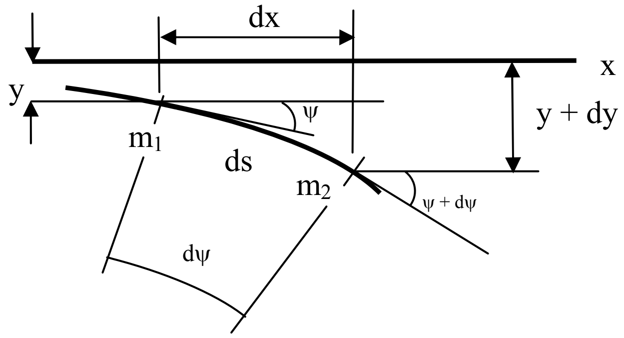
$$_2\mathrm{Fl}[1,1;1;z] = \frac{1}{1-z}$$

$$_2\mathrm{Fl}[1,2;1;z] = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$_2\mathrm{Fl}[1,1;2;z] = -\frac{\ln(1-z)}{z}$$

Ek 2 Euler-Bernoulli eğrilik ifadesi ile ilgili tanımlamalar.





$$\mathrm{tg}\psi \cong \frac{dy}{dx} \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' \tag{2}$$

$$\rho d\psi \cong ds \tag{3}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{4}$$

$$\frac{ds^2}{dx^2} = \frac{dx^2}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} \tag{5}$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \tag{6}$$

$$\frac{ds}{dx} = (1 + \left(y'\right)^2)^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

Yukarıdaki 1,2 ve 3 nolu denklemlerden κ, eğrilik ifadesi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\psi}{ds} = \frac{d(\mathrm{arctg}y')}{ds} \tag{8}$$

Yukarıdaki ifadenin sağ tarafı, $\frac{dx}{dx}$ ile çarpılırsa aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$\frac{d(\mathrm{arctg}y')}{ds} \times \frac{dx}{dx} = \frac{d(\mathrm{arctg}y')}{dx} \times \frac{dx}{ds} \tag{9}$$

Yukarıdaki en son denklemdeki türev işlemi yapıldığında;

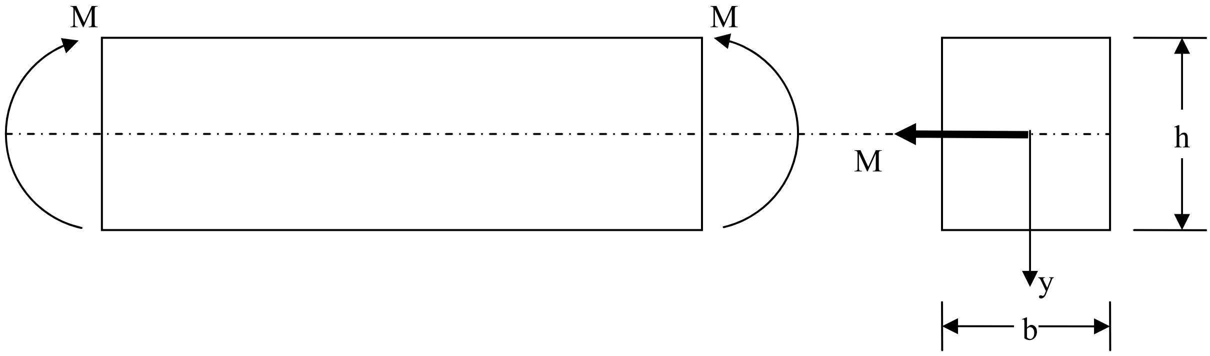
$$\frac{d(\mathrm{arctg}y')}{dx} = \frac{y''}{(1+(y')^2)} \tag{10}$$

bulunur.

7,8,9,10 numaralı denklemler kullanıldığında Euler-Bernoulli eğrilik ifadesi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\kappa = \frac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{11}$$

Ek 3 Ludwick tipi gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip dikdörtgen kesitli kirişlerde, eğrilik-moment ilişkisinin tanımlanması.



Yukarıdaki şekilde verilen genişliği b, yüksekliği h olan dikdörtgen kesitte M, momenti etkisinde aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma y dA = M \tag{1}$$

$$dA = bdy \tag{2}$$

$$\varepsilon = \kappa y \tag{3}$$

Yukarıdaki denklemde ε, birim şekil değiştirme, κ, eğriliktir.

Ludwick tipi malzeme için gerilme-şekil değiştirme ilişkisi aşağıdaki gibidir:

$$\sigma = B\,\varepsilon^{\frac{1}{n}} \tag{4}$$

B ve n malzeme özelliklerine bağlı büyüklüklerdir.

(1)-(4) denklemleri kullanılırsa, aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} B\,(\kappa y)^{\frac{1}{n}}\,ybdy = M \tag{5}$$

Yukarıdaki integrasyon yapılıp, her iki tarafın "n" inci kuvveti alınırsa, eğrilik aşağıdaki gibidir:

$$\kappa = \frac{d\psi}{ds} = \frac{2^{n+1}(1+2n)^n M^n}{n^n b^n h^{2n+1} B^n} = \frac{M^n}{K_n} \quad \text{burada,} \quad K_n = \frac{n^n b^n h^{2n+1} B^n}{2^{n+1}(1+2n)^n} \quad \text{olarak alınmıştır.}$$

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	08.06.1973	
Doğum yeri	Almanya	
Lise	1987-1990	Kadir Has Lisesi
Lisans	1990-1995	Yıldız Teknik Üniversitesi Makine Fak. Makine Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	1995-1998	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Müh. Anabilim Dalı, Enerji Programı
Doktora	2000-2006	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Müh. Anabilim Dalı, Konstrüksiyon Programı

Çalıştığı kurum(lar)

1998-Devam ediyor YTÜ Mak. Fak. Mak. Müh.Böl. Araştırma Görevlisi