

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KRENLERDE DİNAMİK DAVRANIŞLARIN TASARIM  
ÜZERİNDEKİ ETKİLERİ**

**Makine Mühendisi Mustafa UZUNDAĞ**

**FBE Makine Mühendisliği Anabilim Dalı Makine Teorisi Ve Kontrol Programında  
Hazırlanan**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Muharrem BOĞOÇLU**

**İSTANBUL, 2009**

# İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ .....	v
KISALTMA LİSTESİ .....	vi
ŞEKİL LİSTESİ .....	vii
ÇİZELGE LİSTESİ .....	ix
ÖNSÖZ.....	x
ÖZET .....	xi
ABSTRACT .....	xii
1. GİRİŞ.....	1
2. TANIMLAR .....	2
2.1 Krenler .....	2
3. SINIFLANDIRMA .....	3
3.1 Köprülü Krenler:.....	6
3.2 Portal Krenler.....	6
3.3 Oklu Krenler – Döner Krenler .....	7
3.3.1 Karakteristikleri .....	7
3.4 Kablolü Krenler .....	7
3.5 Yapı Krenleri (Kule Vinçleri).....	8
3.5.1 Kule Vinçlerinin Genel Kullanım Değerleri.....	9
3.6 Genel Olarak Krenlerde Kullanılan Elemanlar.....	10
4. KRENLERDE KONTRÜKSİYON, ÖLÇÜLENDİRME VE SEÇİM ESASLARI12	
4.1 Konstrüksiyon İçin Genel Esaslar .....	12
4.2 Ölçülendirme Esasları.....	13
4.3 Kren Seçimi .....	15
4.4 Seçilen Kren İçin Tavsiyeler .....	16
5. KREN HESABINDA SİSTEME ETKİYEN YÜKLER VE KATSAYILAR .....	17
5.1 Esas (ana) Yükler.....	17
5.2 Düşey Hareketlerden Gelen Yükler.....	17
5.3 Yatay Hareketlerden Gelen Yükler .....	17
5.4 Hava Şartlarından Meydana Gelen Yüklemeler .....	18
5.4.1 Kar .....	18
5.4.2 Sıcaklık Değişimi.....	18
5.5 Yükleme Durumu Grupları ve Genel Gerilme Değerleri .....	18

5.5.1	Yüklemenin H ( ana yük ) Hali.....	19
5.5.2	Yüklemenin HZ ( ana ve ek yükler ) Hali .....	19
5.5.3	Yüklemenin HS ( ana ve özel yükler ) Hali.....	19
5.6	Genel Emniyet Gerilme Değerleri .....	19
5.7	Taşıyıcı Elemanların Yük Durumuna Göre Eğilme Gerimeleri.....	20
5.8	Kren Hesabındaki Katsayılar .....	20
5.8.1	Zati Ağılık Katsayısı ( $\phi$ ).....	20
5.8.2	Yük Kaldırma Katsayısı ( $\psi$ ) .....	21
6.	KRENLERDE GÜVENLİK VE BAKIM ESASLARI .....	23
6.1	Önleyici Bakım.....	23
6.2	Arızadan Kaynaklanan Bakım.....	23
6.3	Düzeltilici Bakım .....	23
6.4	Dinamik Bakım.....	23
6.5	Krenlerin Muayenesi .....	24
6.5.1	Muayenenin Uygulanması .....	24
6.5.2	Muayene Raporları .....	25
6.6	Krenlerde Servis İşlemi .....	25
6.6.1	Krenlerin İlk Bakımı.....	25
6.6.2	Periyodik Bakım .....	25
6.7	Emniyet İçin Krenlerde Olması Gerekli Ekipmanlar .....	26
7.	MODEL KREN TANITIMI.....	27
8.	5 SERBESTLİK DERECELİ KULE KREN SİSTEMİNİN MODELLENMESİ	29
8.1	Örnek Olarak Alınan Kule Tipi Krenin Matematiksel Olarak Modellenmesi .....	29
9.	MATLAB – SIMULINK ORTAMINDA YAPILAN BENZETİM ÇALIŞMALARI VE GRAFİKLER .....	38
10.	MATLAB – SIMULINK ORTAMINDA ELDE EDİLEN GRAFİKLERİN YORUMLARI .....	68
10.1	1.Durum başlangıç koşulları için elde edilen grafiklerin yorumları.....	68
10.2	2.Durum başlangıç koşulları için elde edilen grafiklerin yorumları.....	69
10.3	3.Durum başlangıç koşulları için elde edilen grafiklerin yorumları.....	70
10.4	4.Durum başlangıç koşulları için elde edilen grafiklerin yorumları.....	71
10.5	5.Durum başlangıç koşulları için elde edilen grafiklerin yorumları.....	72
10.6	6.Durum başlangıç koşulları için elde edilen grafiklerin yorumları.....	73
10.7	7.Durum başlangıç koşulları için elde edilen grafiklerin yorumları;.....	74
10.8	8.Durum başlangıç koşulları için elde edilen grafiklerin yorumları;.....	75
10.9	9.Durum başlangıç koşulları için elde edilen grafiklerin yorumları.....	76
11.	SONUÇLAR ve ÖNERİLER .....	77
	KAYNAKLAR.....	79
	EKLER .....	80

ÖZGEÇMİŞ.....	107
---------------	-----

## SİMGE LİSTESİ

$A$	Rüzgar yönüne dik düzlemdeki taşıyıcı sistem yüzeylerinin iz düşümü
$c$	Aerodinamik bir katsayı
$F$	$m_1$ kütlesi ve yerçekimi etkisiyle meydana gelen kuvvet
$g$	Yerçekimi ivmesi
$K$	Kren gövdesinin esneklik katsayısı
$L$	Değişken halat boyu
$m_1$	Halat ucuna asılı yük kütlesi
$m_2$	Kren yük kolunun $x_2, y_2, z_2$ koordinatına indirgenmiş kütlesi
$M$	Krene z eksenine etrafında uygulanan döndürme momenti
$M_R$	Rüzgar kuvvetlerinden gelen eğilme momentleri
$M_Y$	Yan ilave yüklerden gelen eğilme momentleri
$p$	Rüzgar kuvvetinin bileşeni
$q$	Dinamik basınç
$R$	$m_2$ kütlesi ile moment uygulanan nokta arasındaki mesafe
$v$	Hareket hızı
$v_{rüz}$	Rüzgar hızı
$v_k$	Kaldırma hızı
$x_1$	$m_1$ kütlesi koordinatının x koordinatı
$x_2$	$m_2$ kütlesi koordinatının x koordinatı
$y_1$	$m_1$ kütlesi koordinatının y koordinatı
$y_2$	$m_2$ kütlesi koordinatının y koordinatı
$z_1$	$m_1$ kütlesi koordinatının z koordinatı
$z_2$	$m_2$ kütlesi koordinatının z koordinatı
$\alpha$	$R$ uzunluğu ile kren gövdesi arasındaki açı
$\beta$	Kren gövdesi ile boom(yük kolu) arasındaki açı
$\theta_1$	Kren kolunun x-y düzlemindeki izdüşümünün x eksenine ile yaptığı açı
$\theta_2$	Yükün asılı bulunduğu halatın x-y düzlemindeki izdüşümünün kren kolunun x-y düzlemindeki izdüşümüyle yaptığı açı
$\theta_3$	Yükün asılı olduğu halatın z eksenine ile yaptığı açı
$\theta_4$	Kren gövdesinin z eksenine ile yaptığı açı
$\sigma$	Eğilme gerilmesi
$\varphi$	Zati ağırlık katsayısı
$\psi$	Yük kaldırma katsayısı

## **KISALTMALISTESI**

DIN      Deutsches Institut für Normung eV

## ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 7.1 Kule kren çeşitleri(Boğoçlu, ) .....	27
Şekil 7.2 Döner kuleli kren.....	28
Şekil 8.1 Örnek olarak alınan kule tipi krenin şematik görünümü .....	30
Şekil 9.1 Kule tipi krenin Matlab – Simulink modeli .....	38
Şekil 9.2 $L$ (halat boyu) değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	39
Şekil 9.3 $\theta_1$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	40
Şekil 9.4 $\theta_2$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	40
Şekil 9.5 $\theta_3$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	41
Şekil 9.6 $\theta_4$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	41
Şekil 9.7 $L$ (halat boyu) değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri .....	42
Şekil 9.8 $\theta_1$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	43
Şekil 9.9 $\theta_2$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	43
Şekil 9.10 $\theta_3$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	44
Şekil 9.11 $\theta_4$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	44
Şekil 9.12 $L$ (halat boyu) değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	45
Şekil 9.13 $\theta_1$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	46
Şekil 9.14 $\theta_2$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	46
Şekil 9.15 $\theta_3$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	47
Şekil 9.16 $\theta_4$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	47
Şekil 9.17 $L$ (halat boyu) değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	48
Şekil 9.18 $\theta_1$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	49
Şekil 9.19 $\theta_2$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	49
Şekil 9.20 $\theta_3$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	50
Şekil 9.21 $\theta_4$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	50
Şekil 9.22 $L$ (halat boyu) değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	51
Şekil 9.23 $\theta_1$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	52
Şekil 9.24 $\theta_2$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	52
Şekil 9.25 $\theta_3$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	53
Şekil 9.26 $\theta_4$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	53

Şekil 9.27 $L$ (halat boyu) değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	54
Şekil 9.28 $\theta_1$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	55
Şekil 9.29 $\theta_2$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	55
Şekil 9.30 $\theta_3$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	56
Şekil 9.31 $\theta_4$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	56
Şekil 9.32 $L$ (halat boyu) değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	57
Şekil 9.33 $\theta_1$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	58
Şekil 9.34 $\theta_2$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	58
Şekil 9.35 $\theta_3$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	59
Şekil 9.36 $\theta_4$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	59
Şekil 9.37 $L$ (halat boyu) değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	60
Şekil 9.38 $\theta_1$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	61
Şekil 9.39 $\theta_2$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	61
Şekil 9.40 $\theta_3$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	62
Şekil 9.41 $\theta_4$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	62
Şekil 9.42 $L$ (halat boyu) değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	63
Şekil 9.43 $\theta_1$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	64
Şekil 9.44 $\theta_2$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	64
Şekil 9.45 $\theta_3$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	65
Şekil 9.46 $\theta_4$ değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri.....	65



## ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 3.1 Kren sınıflandırmaları .....	5
Çizelge 5.1 St 37 ve St 52-3 malzemeleri gerilme emniyet değerleri(İmrak vd., 2007).....	20
Çizelge 5.2 Zati ağırlık katsayısı ( $\phi$ )(Demirsoy vd., 2005).....	21
Çizelge 5.3 Yük kaldırma katsayısı ( $\psi$ ) (Demirsoy vd., 2005) .....	21
Çizelge 5.4 Çeşitli krenler ve kaldırma sınıfları(İmrak vd., 2007).....	22
Çizelge 9.1 Sırasıyla 9 farklı durum başlangıç koşulu değerleri.....	66

## ÖNSÖZ

Non-linear bir sistemi incelemiş olduğum bu çalışmada; krenler, sınıflandırmaları, kren sisteminin matematiksel olarak modellenip bilgisayar ortamına taşınmasıyla benzetim çalışmalarının yapılması amaçlanmıştır. Bu çalışmada yer alan hesap ve modelleme yöntemleriyle elde edilen veriler, benden sonra yine aynı konuda çalışma yapacak arkadaşlara konunun daha sağlıklı ve daha geniş bir vizyondan görülerek irdelenebilmesi adına iyi bir ışık tutacaktır.

Bu tez çalışmasının başlangıç aşamasından tamamlanmasına dek benden değerli görüşlerini esirgemeyen, ortaya daha iyi bir iş çıkarabilmek adına her zaman desteklerini aldığım saygıdeğer hocalarımdan başta tez danışmanım Yrd.Doç.Dr. Muharrem BOĞOÇLU olmak üzere, Yrd.Doç.Dr. Ahmet SAĞIRLI, Yrd.Doç.Dr. Semih SEZER'e ve değerli görüşlerini aldığım arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

# KRENLERDE DİNAMİK DAVRANIŞLARIN TASARIM ÜZERİNDEKİ ETKİLERİ

Mustafa UZUNDAĞ  
Makine Mühendisliği, Yüksek Lisans Tezi

5 serbestlik dereceli kule tipi bir kren modelinde, öncelikle sistemin diferansiyel denklemler yardımıyla matematiksel olarak ifade edilmesi ardından, farklı durum değişkenleri altında matlab – simulink ortamına aktarılarak bu farklı parametreler altında ne tür davranışlar sergilediği gözlemlenmiştir.

Genel olarak krenlerin sınıflandırmaları, seçim esasları, güvenlik ve bakım esaslarından bahsedilip model olarak ele alınan kule tipi krenin tanıtımı yapılmıştır.

Matlab – simulink yardımıyla elde edilen grafiklerde sistemin farklı koşullar altında ne tür dinamik davranışlar sergilediği açıkça görülmüş ve her bir grafik tek tek yorumlanmıştır. Grafiklerin birbirleriyle kıyaslanmasıyla dinamik davranışların tasarım üzerindeki etkilerinin farkları gözlemlenmiştir.

**Anahtar Kelimeler :** Kule krenler, Dinamik davranışlar, Modelleme, Non-lineer sistem.

JÜRİ:

1. Yrd. Doç. Dr. Muharrem E. Boğoçlu
2. Prof. Mustafa Alışverişçi
3. Prof. Dr. Ahmet D. Alkan

Kabul tarihi: 17.03.2009  
Sayfa Sayısı: 119

# THE AFFECTS OF THE DYNAMIC REACTIONS TO THE CRANE DESIGN

Mustafa UZUNDAĞ

Mechanical Engineering, M.S. Thesis

In a tower crane model which has five degree freedom, it is first observed to be expressed mathematically with the help of differential equations, than what type of reactions it can show under different parameters via transferring matlab – simulink atmosphere.

Not only the tower crane which was taken as a model but also the information about cranes' classifications, their security and maintenance principles, how we must choose them is described.

The graphics which were obtained with the help of matlab – simulink, it is clearly seem that under different circumstances how it reacts dynamically and these are commented one by one. With comparing these diagrams it is again observed the differences of these dynamic reactions' affect on the project.

**Keywords:** Tower cranes, Dynamic reactions, Modelling, Non-lineer system.

JÜRİ:

1. Yrd. Doç. Dr. Muharrem E. Boğoçlu
2. Prof. Mustafa Alışverişçi
3. Prof. Dr. Ahmet D. Alkan

Kabul tarihi: 17.03.2009

Sayfa Sayısı: 119

## 1. GİRİŞ

Son yıllarda teknolojide meydana gelen hızlı bir gelişim ve değişim süreci endüstrinin birçok alanında da kendini göstermiştir. Özellikle İstanbul gibi kalabalık şehirlerde yerleşim alanlarının kısıtlı olması alçak binalar yerine daha ziyade yüksek katlı gökdelen tipi yapıların ortaya çıkmasına sebep olmuştur. Endüstriyel ve mimari yapıların inşa süreci içerisinde malzemelerin bir yerden başka bir yere taşınması için kaldırma ve taşıma makinelerine ihtiyaç vardır. Günümüzde bu makinelerden beklenen amaç, sadece kol kuvvetinin yetmeyeceği ağır yükleri kaldırmak, istenilen bir yere iletmek değil aynı zamanda çeşitli alanlardaki üretimin daha rasyonel ve verimli bir hale getirilmesini sağlamaktır. Yapı sektöründeki hızlı artış grafiği ve binaların çok kısa inşa süreleri gerektirmesi hem iş gücü hem de zamandan bir kazanç sağlama ihtiyacı doğurduğundan kule vinçlerin ortaya çıkmasına ve hızlı bir gelişim sürecine girmelerine sebebiyet vermiştir. Yapı krenleri olarak da bilinen kule vinçleri ileride sınıflandırmalarını vermiş olduğum kren çeşitlerinden sadece bir tanesidir. Kule vinçleri yatay ve dikey pozisyonda taşıma yapabildikleri için çok değişik kullanım alanlarına sahiptir. Ayrıca küçük bir çalışma alanı kaplaması diğer krenlere göre avantajlı yönlerinden birisi olarak sayılabilir. Kule vinçleri büyük yapım yükseklikleri, yük kolu(boom) açıklıkları ve ağırlıktan tasarruf etmek nedeniyle kafes giriş taşıyıcı sistemli olarak yapılmaktadır. Çelik konstrüksiyon olan kren taşıyıcı sistemi büyük taşıma kapasiteleri ve çalışma yüksekliklerinde büyük gerilim dağılımı altında çalışmaktadır. Bu sebeple kule vinçlerin tasarım ve yapım aşamasında matematiksel olarak çok iyi incelenmesi ve çalışma esnasında meydana gelecek olan dinamik davranışların hasiyetle incelenip en iyi tasarımın gerçekleştirilmesi hedeflenmelidir.

Yapmış olduğum bu çalışmada kule tipi krenlerde sistemin esnek olduğu düşünülerek belli bir döndürme momenti ve kuvvet etkisinde meydana gelen dinamik davranışların matlab-simulink programı yardımıyla bilgisayar ortamında modellenmesi ve çeşitli koşullarda tasarım üzerindeki etkilerinin incelenerek yapılabilecek olan somut bir model için ışık tutması amaçlanmıştır.

## 2. TANIMLAR

Yüklerin kaldırma ve taşıma araç veya tesisleriyle yakın mesafelere taşınmasına yakın mesafe transport işleri denir.

Endüstriyel tesisler, mimari yapılar, makine sanayi, depolar, limanlar, v.b. yerlerde yapılan taşıma işlemlerinde malların sadece kaldırılmadığı, yatay olarak da taşındığı görülmektedir. Bu nedenle yakın mesafe transport işlerinde kullanılan araç ve tesislere “Kaldırma ve taşıma makineleri” veya “Transport makineleri” demek doğru olur. Bu makinelerin incelenmesi ile birlikte, malzemelerin depolama tekniklerinin, tesislerin kullanım ve işletim sistemlerinin de bir arada ele alınmasına “Transport tekniği” adı verilir.

Kaldırma ve taşıma makinelerini birbirinden ayıran en önemli özellik “Kesikli çalışma” veya “Sürekli çalışma” durumlarıdır. Kesikli çalışmada periyodik olarak yapılan hareketler söz konusudur. Makine malı istenilen yere götürmek için bir periyotta, “durma”, “hızlanma”, “düzgün hareket” ve yavaşlama evrelerini geçirir. Yeniden bir taşıma için tekrar geri döner ve her mal iletiminde bu hareketler tekrarlanır. Oysa sürekli (kesintisiz) çalışan transport makinelerinde, çalışma ve mal iletimi hep aynı yönde olmaktadır. Kesikli çalışan transport makinelerine “Kaldırma makineleri”, sürekli çalışan transport makinelerine ise “Taşıma makineleri” denir.

### 2.1 Krenler

Bu tür kaldırma makineleri, yüklerin kaldırılması veya indirilmesinden başka bunların yatay hareketlerine de olanak sağlarlar. Yüklerin hareketi üç eksen doğrultusunda yani uzaysal olarak sağlanabilmektedir. Bu nedenle buldukları atölye, fabrika, ambar v.b. yerlerde çok faydalı ve etkili olan kaldırma makineleridir(İmrak vd., 2007)..

### 3. SINIFLANDIRMA

Kaldırma ve taşıma makineleri her türlü endüstri dalında ve ticari işletmelerde uygulandığından çeşitleri çok fazladır. Bu çeşitliliği doğuran faktörler aşağıdaki gibi yazılabilir(Demirsoy vd., 2005; Aslan, 2007; İmrak vd., 2007) ;

- Taşınacak kütlelerin büyüklüğü
- Taşıma mesafesinin büyüklüğü
- Taşınacak malların türü

Çalışma prensiplerine göre transport makineleri öncelikle iki ana gruba ayrılır.

- Kesikli çalışan transport makineleri
- Sürekli çalışan transport makineleri

Alt gruplar ise aşağıda görülmektedir.

Transport İşleri,

- Transport makineleri ile taşıma
- Ulaşım araçları ile taşıma

Transport Tekniği,

- Transport makineleri
- Depolama tekniği
- Uygulama Tekniği

Transport Makineleri,

- Kesikli çalışanlar – Kaldırma
- Sürekli çalışanlar – Taşıma Makineleri

Kaldırma Makineleri,

- Basit Kaldırma Makineleri
- Krenler
- Asansörler

- Zemin Araçları

#### Basit Kaldırma Makineleri,

- Krikolar – Kremayerli, Vidalı, Hidrolik
- Palangalar – Elle çalıştırılanlar(adi palanga, sonsuz vidalı, düz dişli), Elektrikle çalıştırılanlar
- Vinçler (Çıkrıklar) – El vinçleri, Otomatik kepçe vinçleri, Elektrikli vinçler, Kabestan vinçleri

#### Asansörler,

- Yolcu asansörleri
- Yük asansörleri
- Hidrolik asansörler
- Servis asansörleri
- Otopark asansörleri
- Maden kuyusu asansörleri
- Paternosterler

#### Zemin Araçları,

- Raysız – El arabaları, tekerlekli paletler, römorkörler, kaldırma arabaları(kulplu, oklu), çekiciler, çatal istifçiler(forkliftler), hava yastıklı taşıyıcılar
- Raylı

Çizelge 3.1’de belirtilmiş olan bazı kren modelleri için aşağıda tanımlar verilmiştir.



Çizelge 3.1 Kren sınıflandırmaları

<b>KRENLER</b>													
<b>Köprülü Krenler</b>		<b>Taklı (Ayaklı) Krenler</b>		<b>Yükleme Köprüleri</b>		<b>Konsol Krenler</b>		<b>Özel Krenler</b>			<b>Kablolu Krenler</b>		
Elle Tahrikli	Elektrikle Tahrikli	Tam Taklı	Yarım Taklı	Konsollu	Döner Krenli	Sabit Oklu	Döner Oklu	Lokomotif Krenleri	Dökümhane Krenleri	Yer altı Ocak Krenleri			
<b>Döner Krenler</b>													
<b>Sabit Döner Krenler</b>							<b>Yürür ve Döner Krenler</b>					<b>Yüzer (Dubalı) Krenler</b>	
<b>Sütunlu Döner Krenler</b>					<b>Döner Tabanlı Krenler</b>								
Duvar Döner Krenler	Dökümhane Döner Krenleri	Derik Kreni	Sabit Sütunlu Döner Kren	Sabit Kuleli Döner Kren	Vidalı Döner Kren	Çekme Oluklu Döner Kren	Raylı Döner Kren	Yapı Krenleri	Mobil Krenler	Liman Krenleri	Derik Krenler	Kepçeli Krenler	Ağır Yük Yüzer Krenler

### 3.1 Köprülü Krenler:

Yükseğe yerleştirilmiş iki kren yolu arasında bir köprü konstrüksiyonundan ibarettir. Yarı ağır endüstriyle ilgili bütün fabrika, mağaza ve makine park salonlarında kullanılırlar. Kumanda, basit bir operatör kabininden olabileceği gibi, seyyar operatör kabininden veya uzaktan da olabilir. Köprülü kren tarafından gerçekleştirilmesi gereken hareketler şunlardır;

- Kaldırma ve indirme hareketi
- Köprünün öteleme hareketi
- Arabanın köprü üzerinde yaptığı öteleme hareketi

Bu durumlara göre, bir köprülü krende aşağıdaki mekanizmaların olması öngörülür:

- Tamburlu kaldırma mekanizması
- Araba öteleme mekanizması
- Köprü yürütme mekanizması

Bir köprülü kren ;

- Taşınacak yükün maksimum değeri, yani kaldırma kabiliyeti
- Köprü açıklığı

ile karakterize edilir. Bunların yanı sıra ;

- a) Kaldırma hızı
- b) Köprü öteleme
- c) Araba öteleme hızı
- d) Kaldırma yüksekliği
- e) Köprü gezinme mesafesi

dikkate alınması gereken özelliklerdir.

### 3.2 Portal Krenler

“Liman Krenleri” veya “ Şehpalı Krenler” olarak da anılırlar. Limanlarda, tersanelerde ve depolarda kullanılırlar. Yapılarında kafes kiriş sistemi veya levhalı kiriş sistemi kullanılması mümkündür. Genellikle raylar üzerinde hareket ederler, küçük ve orta ağırlıkta yükler için

lastik yürüme elemanları kullanılabilir. Taşıma kuvvetleri 800 tona, açıklıkları ise 120 m'ye kadar çıkabilir.

Tahrik kaynağı olarak elektrik motorları ya da nadiren içten yanmalı kuvvet makineleri kullanılır. Genelde açık havada çalıştıklarından fırtınaya karşı emniyetlerinin sağlanması gerekir. Bu yüzden rüzgar basıncı belli bir değeri aşınca kreni durduran ve kısıkaçlarıyla rayı kavramasını sağlayan bir mekanizmaya sahiptirler.

### **3.3 Oklu Krenler – Döner Krenler**

Liman ve şantiyelerde önemli görev üstlenen ve çok kullanılan kaldırma makineleri arasındadır. Ok adı verilen kiriş, uçlarından birisi aracılığıyla düşey bir eksen etrafında dönme hareketi yapar. Kanca bloğu, okun serbest olan öteki ucu tarafından taşınır.

Oklu krenler sınıflandırılırken kancanın hizmet edebildiği, erişebildiği alan dikkate alınır. Bu durumda oklu krenler 3 sınıfa ayrılır ;

1) Sabit aplik krenler :

Atölye içinde bir duvara veya bir kolona tespit edilir. Okun serbest ucu, yarıçapı ok açıklığına eşit olan bir yarım daire çizebilir.

2) Müstakil sabit krenler :

Bir duvar veya bir kolona tespit edilmeden kullanılırlar. Okun serbest ucu tam bir daire yayı çizebilir.

3) Hareketli veya mobil krenler :

Raylar veya yollar üzerinde ya da herhangi bir arazide hareket edebilen kaldırma araçlarıdır.

#### **3.3.1 Karakteristikleri**

a) Kaldırma kapasitesi veya yeteneği

b) Ok açıklığı

c) Kaldırma yüksekliği

### **3.4 Kablolü Krenler**

Üzerinde arabanın hareket ettiği bir veya daha fazla tel halatlı (taşıma halatlı) krenlerdir.

Şantiyelerde ve büyük depolarda kullanılırlar. Açıklık 1000 m'ye kadar yükselebilir. Halatlar iki devrilebilir (sabit, hareketli veya dönebilir) kule arasına gerilmiştir.

Taşıma halatları olarak yarı veya tam kapalı spiral halatlar kullanılır. Arabanın hareketi çekme halatı üzerinde olurken, yük de kaldırma halatına asılır. Araba, içinde tekerleklerin ve halat makaralarının (kaldırma halatı makaraları) yataklandığı bir kafes kiriş sisteminden ibarettir. Tekerlek adedi, tekerlek yükünün halat çekme kuvvetine oranının 1/50 değerini aşmayacak şekilde seçilmelidir.

### 3.5 Yapı Krenleri (Kule Vinçleri)

Genellikle mimari ve endüstriyel yapılarda kullanılan ve kapasiteleri devamlı gelişen kule vinçleri çok çeşitli şekillerde imal edilir ve sınıflandırılabilirler.

Bunlar ;

Sistem hareketliliğine göre,

- Gezer kule vinçleri,
- Çalışılan yapının çatısına bağlı kule vinçleri,
- Düşey tırmanan kule vinçleri

Kule tipine bağlı olarak,

- Döner kuleli vinçler,
- Sabit kule ile dönen üst kısma sahip vinçler

Yük kolunun hareket tarzına göre,

- Yatay ve düşey düzlemde hareketli yük kolu,
- Sadece yatay düzlemde hareketli yük kolu,

Kule vinçlerinin raylar üzerinde gezen tiplerinde, tekerlekler motor-redüktör grubu ile tahrik edilir. Durma emniyeti ise hem motora akuple bir fren tertibatıyla hem de ilave durdurma ekipmanlarıyla sağlanır.

Tekerleklerin sayısı dört veya daha fazla olabilir. Alt platform, kulenin alt kısmında bulunur. Üzerinde kule, karşı ağırlık ve tahrik grupları bulunur. Kule genellikle kare kesitli kafes kiriş

sistem olarak yapılır. Vincin kumanda kabini genellikle kulenin üst kısmına monte edilir ve vinç operatörünün çevreyi tam olarak görebileceği tarzda yapılır. Kumanda kolları kötü hava şartlarına karşın koruyucu aksesuarlarla donatılır. Yük kolu (boom), üçgen veya kare kesitli kafes kiriş sistem şeklinde yapılır. Ark tarafından kuleye mafsallı olarak bağlanmıştır. Sadece yatay düzlemde dönen tiplerinde uç kısmı kule tepesine bağlanır. Üzerinde bulunan raylarda bir vinç arabası çalışır. Yük bu vinç arabası üzerinde bulunan palanga bloğu ile kaldırılır. Yatay ve düşey düzlemde hareketli yük koluna sahip vinçlerde ise yük kolunun ucu bir palanga sistemi ve saptırma makaraları ile alt platformdan tahrik edilirler. Bu tiplerde yük, yük kolunun ucundaki bir palanga tertibatı ile kaldırılırlar. Yük kaldırma palangası da alt platformda bulunan motor, redüktör ve tambur grubu ile tahrik edilir.

Genellikle, sadece yatay düzlemde dönen yük koluna sahip vinçlerde, kulenin üst kısmında yük kolunun arkasında, karşı ağırlık ve karşı ağırlığı taşıyan bir “karşı ağırlık kolu” vardır.

### 3.5.1 Kule Vinçlerinin Genel Kullanım Değerleri

Aşağıda belirtilen değerler günümüzde kullanılan ortalama değerler olup özel hallerde bu değerler aşılabilmektedir.

Mimari yapılar için kapasiteler,

- Yük kaldırma kapasitesi - 30 – 80 kN
- En fazla yük kolu açıklığı - 25 m
- Yük kaldırma yüksekliği - 30 – 50 m
- Yük kaldırma hızları - 0.3 – 1 m/s
- Vinç seyahat hızları - 0.33 – 0.5 m/s
- Döner parçanın açısal hızı - 0.5 – 0.7 d/d

Endüstriyel kullanım için kapasiteler,

- Yük kaldırma kapasitesi - 200 kN ve üzeri
- En fazla yük kolu açıklığı - 25 - 45 m
- Yük kaldırma yüksekliği - 50 – 80 m
- Yük kaldırma hızları - 0.16 – 1 m/s

- Vinç seyahat hızları - 0.16 – 0.2 m/s
- Döner parçanın açısal hızı - 0.2 – 0.4 d/d

Kule vinçlerin çalışılan konstrüksiyonun çatısına bağlanmaları durumunda kapasiteler,

- Yük kaldırma kapasitesi - 63 – 80 – 100 – 125 kN
- En fazla yük kolu açıklığı - 45 m'ye kadar
- Yük kaldırma yüksekliği - 150 m'ye kadar
- Yük kaldırma hızları - 0.33 – 1.5 m/s
- Vinç seyahat hızları - 0.5 m/s
- Döner parçanın açısal hızı - 0.5 – 0.7 d/d

### 3.6 Genel Olarak Krenlerde Kullanılan Elemanlar

- Tel halatlar
  - Çapraz sarımlı halatlar
    - Çapraz sağ sarımlı halat s/Z
    - Çapraz sol sarımlı halat z/S
  - Düz sarımlı halatlar
    - Düz sağ sarımlı halat z/Z
    - Düz sol sarımlı halat s/S
- Halat makaraları
- Makara donanımları
  - Palangalar
    - Basit palangalar
    - İkiz palangalar

- Yük tutma elemanları
  - Kanca ve kanca blokları
  - Hamut ve hamut blokları
  - Bađlama halatı ve zincirleri
  - Taşıma kovaları ve kepçeler
  - Travers, aks ve mengene
  - Kıskaçlar ve kavrayıcılar
  - Elektro-magnetler
  - Vakumlu taşıyıcılar
- Halat tamburları
- Frenler
- Tekerlekler ve raylar

## 4. KRENLERDE KONTRÜKSİYON, ÖLÇÜLENDİRME VE SEÇİM ESASLARI

### 4.1 Konstrüksiyon İçin Genel Esaslar

Kaldırma makineleri yapımı, konstrüksiyonla uğraşan mühendisler için çok yönlü ve ilginç bir çalışma alanıdır. Genel makine yapımı, çelik, inşaat ve elektroteknik gibi farklı disiplinlerin bir arada uygulama yeri bulmaları ayrıca proje ve yapı şekillerinin çok çeşitli olması bu alanın önde gelen özelliklerindedir.

Krenlerin projelendirilmesi ve şekillendirilmesinin sevk idaresi kren konstrüktörünün görevidir. Bu yüzden bir kren konstrüktörü, ihtiyaçları dikkate alabilecek ve olanaklardan yararlanmasına yetecek kadar diğer bilim dallarından da bilgiye sahip olmalıdır.

Küçük kaldırma makineleri ve sık rastlanmayan bazı normal konstrüksiyon bir tarafa bırakılırsa, kaldırma makineleri yapımında günümüzde münferit üretim hakimdir. Alışılmış olan yürür ve döner krenler bile, kaldırma yükü, açıklık, çalışma hızı, kaldırma yüksekliği ve işletme şekline göre çok değişik tiplerde karşımıza çıkabilir. Boşluğu sınırlı olan bir hol ya da bir rıhtımdaki gibi yerel şartlar çoğu zaman normal yapı şekillerinden ayrılan konstrüksiyonlar gerektirir. Her zaman tek ve her seferinde amaca en iyi uyacak şekilde yapılan büyük tesis olarak sayılabilecek yükleme köprüleri, yüzer (dubalı) krenler, tersane krenleri, dok krenleri, özel demiryolu krenleri, doldurma, kıskaçlı, blok sıyırma ve dökümhane krenleri gibi bir çok farklı kren çeşidi sıralanabilir. Bu yüzden çoğu kren konstrüksiyonu her defasında yeniden projelendirilir ve çizilir.

Kren yapımında bir konstrüksiyon siparişe yakından ilgilidir, bir dereceye kadar imalatın bir parçasını oluşturur. Teslim süreleri de sınırlı tutulmaktadır. Benzer örneklerden yararlanılmadığı ve yeni projelerin çözümünde yeni konstrüktif çabalara girilmek zorunluluğunda kalındığı için projelerin zorluğu artmaktadır. Bu yüzden kren konstrüktörünün çok defa ön denemeye tabi tutulmadan işletmeye alınan ve pratikte başarı ile çalışması beklenen yeni konstrüksiyonları kısa sürede ortaya koyması gerekir.

Konstrüksiyonlarda problemin doğru bir şekilde ortaya konması uygun bir çözümün ilk şartıdır. İsteklere karşı düşen pek çok sayıdaki görüşler her zaman dikkate alınmalıdır. Bunların tercih sırasını belirlemek ve akabinde gelen konstrüktif çalışmaların esaslarını koyabilmek çözümün önemli bir kısmı demektir.



Bir krenin çalışmasını doğrudan etkileyen yapısal istekler ön planda tutulmalıdır. Çünkü sonunda ulaşılabilecek pratik başarı bir konstrüksiyon için kesin yargı demektir. İşletme emniyeti, yeteli ömür, kolay bakım ve yağlama, aşınan parçaları kolaylık değiştirebilme vb. bir krende bulunması gereken isteklerdir. Bunlardan sonra kren işletmesinde ekonomik istekler ortaya çıkar. Bunların başlıcaları ; iş kapasitesinin yüksekliği, az enerji ve yağ sarfiyatı, düşük bakım ve onarım giderleri, düşük personel ve satın alma masrafları. Fakat bütün isteklerin aynı anda karşılanması mümkün değildir. Bir kren tesisinin kapasitesi arttığı oranda o tesis daha çok pahalılaşmaktadır.

Kaldırma makineleri üretiminde ekonomik şekilde planlamada en etkin çare standartlaştırmaktır. Bu, farklı krenlere aynı parçaları (tekerlekler, halat makaraları, halatlar, kavramalar, yataklar, fren kasnakları, dişli kutuları vb.) kullanma imkanı verir. Böylece parça sayısı artması sonucunda bir elemanın imalatı ucuzlamış olur.

Standartlaştırma bazen konstrüktörün proje içerisindeki hareket kabiliyetini sınırladığı için kullanışsız olarak nitelendirilse bile konstrüksiyonu kolaylaştırdığı montaj kolaylığı sağladığı ve ucuzluk elde edildiği unutulmamalıdır. Diğer taraftan, çok yönlü kullanabilmeyi sağlayabilmek için kren yapımı standardizasyonu yeteri kadar esnek olmalıdır.

Son olarak, görev ve etken görüşlerin önem sırası açıklandıktan ve amaç tespit edildikten sonra taslaklar yardımıyla en iyi çözüm bulunur. Unutulmamalıdır ki mümkün gözüken pek çok çözümden sadece birkaç tanesi en iyidir. Çözümlerin karşılaştırılmalarından ve ortaya konulan isteklerle uyumlarından dolayı ortaya bir biçim çıkar. Ancak bunun üzerine proje adım hesapla kontrol edilir. Bu sırada başlangıçta tespit edilen düzenin kısmen ve bazen de tamamen değiştirilmesi zorunlu olabilir. Fakat burada başlangıçta verilen görevi ve ana görüşleri göz önünden uzak tutmamaya dikkat etmek gerekir. Konstrüktör benzer yapılardan, standardizasyonun getirdiği avantajlardan, kendi deneyim ve bilgisinden mutlaka faydalanacaktır ama her şeyden önemlisi konstrüktörün kritik ve ön yargısız temel görüşe sahip olmasıdır(Boğoçlu vd.; Demirsoy vd., 2005; İmrak vd., 2007).

## 4.2 Ölçülendirme Esasları

Krenlerin çelik konstrüksiyonları için geçerli ölçülendirme esasları DIN 15018'de verilmiştir ama kren konstrüktörü mekanik kısımlar için gerilmelerin seçiminde hareket serbestliğine sahiptir.

Kaldırma makineleri çokça yer değiştiren makineler oldukları için mümkün olduğunca hafif

yapılmalıdır. Ancak temel yapısal görüşlerin önem sırasına göre hafif yapı isteği ilk planda gelmez. Buna verilen önem bazı kren parçalarında ve değişik kren tiplerinde çok farklıdır. Örneğin yürüyen bir döner kren, yükün devirme momentine karşı stabilite emniyeti sağlayabilmek için belli bir ağırlığa sahip olmak zorundadır. Devirme momenti oluşturan elemanların (ok ve okun ucundaki makara takımı vb.) hafif yapılmasına bağlı olarak krenin ağırlığı azaltılabilir. Ancak, krenin stabilite emniyetini sağlayan parçalardan hafif yapı esaslarını uygulayarak mümkün olan büyük ağırlıkları çıkartıp, sonra bunları gerekli olan stabilite emniyetini dengelemek amacıyla tekrar ilave etmek gereksizdir. Bu yüzden hafif yapı ilk olarak diğer konstrüksiyon ve bunun ağırlıkları üzerinde bir etkisinin bulunduğu yerlerde uygulanmalıdır. Örneğin bir döner krenin ok veya özellikle de ucunda tasarruf edilen ağırlık, karşıt ağırlıktan yani yükten 3-4 kat tasarruf edilmesini sağlar. Büyük açıklıklı köprülerde kren arabasında yapılacak ağırlık tasarrufları da benzer oranda önem kazanacaktır. Burada kren arabası ağırlığı, köprü konstrüksiyonunun kendi ağırlığını ve daha önemli olan köprü yürütme mekanizması ile kren yollarının ağırlığını da etkiler. Keççeler ve diğer istif kaplarında ağırlık tasarrufu çok daha önemlidir. Bu çeşit yük tutma düzenlerinin ağırlıklarının azaltılması gerekli olan kaldırma kuvvetinin azalmasını sağlayacaktır. Burada kullanılan yapı şekli ve malzeme (alüminyum vs.) krenin diğer parçalarında ekonomik olmayabilir. Önemli olan, kullanılan malzemelerin, miktarlarının ve maliyetlerinin, toplam ağırlığı uygun şekilde etkileyerek dengelemesidir.

Krenlerin diğer parçalarında da fazla ağırlıktan kaçınmak gerekir. Fakat ekonomik sınır daha dardır. Örneğin döküm bir dişli kutusu yerine bundan daha pahalı olan kaynaklı bir yapı kullanmak uygun olmaz. Uzun millerde ise kaliteli malzeme söz konusu olmaz. Bunlarda sadece deformasyon önemlidir. Genellikler kren yapımında orta mukavemetli malzemeler kullanılır.

Sınırlamalara rağmen kren yapımcısı konstrüksiyonunu ağırlıktan tasarruf sağlayacak şekilde biçimlendirmede çok sayıda imkana sahiptir. Önemli olan şekil değiştirme ve sürekli mukavemet üzerindeki bugünkü bilgilere dayanarak münferit elemanların doğru olarak şekillendirilmesidir. Uygun olmayan bir şekillendirmenin sonucunda ortaya çıkan büyük boyutlar ve gereksiz ağırlıklar yerine, kren yapımcısı aynı emniyet ve sağlamlıktaki yapıyı daha uygun şekil verme ve boyutları küçük tutarak da sağlayabilir.

Boyutların belirlenmesinde emniyetli gerilmelerin seçilebilmesi için işletme şartları en ince ayrıntılarına kadar incelenmeli ve kontrol edilmelidir. İşletme şartları özellikle kren yapımında büyük farklılıklar gösterir. Bu sadece kren tipinde değil, bir krenin farklı tahrik

mekanizmalarında da ortaya çıkar. Buna uygun olarak gerilmeler için de çok farklı değerler kullanılır. Tam hesaplanan yüklemenin ne kadar oluşacağı, hangi ölçüde aşırı yüklemelerin beklendiği, artı veya eksi ivmelenme, darbeler sonucunda hangi ek kuvvetlerin oluşacağı, kullanma sıklığı vb. gibi unsurlar sürekli olarak kontrol edilmelidir. Her bir yapı elemanının önem derecesi ve bir kopma veya kırılmanın ortaya çıkaracağı sonuçlar dikkatle tahmin edilmeli ve ölçülendirme de göz önüne alınmalıdır. Sonuç olarak hesaplama sonuçlarının güvenilir olup olmadığına dikkat edilmelidir. Hesap yöntemleri ne kadar yaklaşık ve güvensiz olursa, emniyet gerilmeleri o kadar düşük alınmalıdır.

### 4.3 Kren Seçimi

Bir krenin seçiminde emniyetli çalışma için temel özelliklerden biri yapılacak işin gereksinimlerine uygun makine seçimidir. Şayet kren gereksinimlerin çoğunu karşılamıyorsa, iş personelinin zorlanması veya yapmak için zorlama birçok kazalara yol açabilir. Spesifik bir işte kaldırma operasyonlarında boyut ve karakteristikler bilinince makine seçimi yapılır.

Bunlar ;

- Ağırlıklar, boyutlar ve büyük boyutlu ağır yüklerin kaldırma radüsleri
- Maksimum kaldırma yüksekliği ve maksimum kaldırma radüsü, bu pozisyondaki yüklerin ağırlığı
- Kaldırma işleminin sayısı ve hangi frekansta olduğu
- Kaldırma işleminin türü (örneğin hassas kaldırma v.s.)
- Kren taşıyıcısının türü. Bu zemin şartlarına ve makinenin kapasitesine bağlıdır. Kren taşıyıcısı üzerinde boom(yük kolu) döndüğü zaman kapasite taşıyıcıya göre değişecektir. Maksimum kapasite taşıyıcının arka tarafından yapılan kaldırma işleminde olacaktır. Yan yüzlerde kapasite düşebilir. Bu kren stabilitesi ile ilişkilidir. Bir çok kren, taşıyıcının ön tarafından yük kaldırmayacak şekilde imal edilir.
- İşletmede yüklü ve yüksüz taşımalar yapılabilir.
- Yük uzun zaman periyotlarında havada asılı kalabilir.
- Çalışma yeri şartları, makinenin yerleştirildiği zemin şartları, giriş yolları ve rampalar dikkate alınmalıdır. Bu, montaj, demontaj ve operasyon işlerini engelleyebilir.

- Servis ve fiyat durumları
- Montaj, demontaj ve transport gibi işlemlerin fiyatları

#### **4.4 Seçilen Kren İçin Tavsiyeler**

- Kren ve ana boom(yük kolu) yeterli boyda ve istenilen bütün istekleri karşılayacak kapasitede olmalıdır. Çıkabilecek problemleri karşılayabilmek için gib boom(yük kolu) , karşı ağırlık(ekstra) ve özel makara düzenekleri bulunması iyidir.
- Kaldırma işlemlerinde yük için %5 tolerans marj bırakılmalıdır.
- Kazalarda minimum hasar oluşumuna yol açmalıdır.
- Yük ve boom(yük kolu) arasında uygun aralık kalacak şekilde makine seçilmelidir.

## 5. KREN HESABINDA SİSTEME ETKİYEN YÜKLER VE KATSAYILAR

Gezer ve portal krenlerin hesabında DIN 15018'e göre esaslar gözetilir. Taşıyıcı sistemlerin hesaplanmasında, bir krenin işletmesi sırasında meydana gelen zorlamalar göz önünde bulundurulmalıdır. Bu zorlamalar aşağıda belirtilen yüklerin sonucunda ortaya çıkar(Demirsoy vd., 2005; İmrak vd., 2007).

- a) Duruş halindeki krenin taşıyıcı sisteminin (en uygunsuz yükleme durumundaki) esas yükler
- b) Düşey hareketten meydana gelen yükler
- c) Yatay hareketten meydana gelen yükler
- d) Hava şartlarından "iklim etkisi ile" meydana gelen yükler

### 5.1 Esas (ana) Yükler

Taşıyıcı sistem elemanlarının kendi ağırlığından gelen yükler ve işletme yükü (hareketten doğan) yüklerdir. "Kendi ağırlıklarından" gelen yükler için, DIN 15018 (Çizelge 5.2)' de "yürütme hızlarına ve hareket yollarının düzgünlük durumlarına göre" (çubuk kuvvetleri, eğilme momentleri ve kesme kuvvetleri ile çarpılan) zati ağırlık katsayıları  $\phi$  olarak verilmiştir. Sabit yükün bir kısmı üniform yayılı yük olarak kabul edilir, diğer kısmı (makinist sepeti, karşı ağırlık vb.) münferit yük olarak etki eder.

### 5.2 Düşey Hareketlerden Gelen Yükler

İşletme yükünün (kaldırılan yük) az veya çok sarsıntılı olmasından ve kaldırma hareketinin ivmeli bir hareket oluşundan ortaya çıkan ilave yüklerdir. DIN 15018 (Çizelge 5.3)' de "yük kaldırma hızlarına göre" yük kaldırma katsayıları  $\psi$  olarak verilmiştir. İşletme yükünün "büyütülmesi" için kullanılan bu  $\psi$  katsayısı ile çubuk kuvvetleri, kesme kuvvetleri ve eğilme momentleri çarpılır.

### 5.3 Yatay Hareketlerden Gelen Yükler

Hareket eden kısımların hareketinden ya da frenlemesinden meydana gelen ivmeli hareketlerin (atalet kuvvetlerinin), çeşitli taşıyıcı sistem elemanları üzerine gelen ilave yan yüklerdir.

#### 5.4 Hava Şartlarından Meydana Gelen Yüklemeler

Rüzgar, kar ve sıcaklık değişimleri nedeniyle meydana gelir. Rüzgarın bütün yönlerden esmesi hallerinde dahi yatay olarak etki yaptığı kabul edilir. Rüzgarın etkisi krenin yapı şekline bağlıdır. Bir taşıyıcı sistem elemanın üzerine düşen rüzgarın etkisi bir kuvvettir. Bunun rüzgar yönündeki bileşeni (5.1):

$$p = c \cdot A \cdot Q \quad (5.1)$$

p: Rüzgar kuvvetinin bileşkesi (daN)

c: Aerodinamik bir katsayısı, (Bu katsayı taşıyıcı sistem elemanların şekline bağlıdır)

c katsayıları; Kafes kirişlerde  $c=1,6$ ; Dolu gövdeli veya kutu kirişlerde  $c = 1,2 \sim 1,6$ ;

Boru kafes kirişlerde ve daire kesitli elemanlarda  $c=0,7$  civarlarında alınır.

A: Rüzgar yönüne dik düzlemdeki taşıyıcı sistem yüzeylerinin izdüşümü ( $m^2$ )

q: Dinamik basınç ( $daN/m^2$ )  $q=(V_{rüz})^2 / 16$  ( $daN/m^2$ )

$V_{rüz}$ : Rüzgar hızı (m/s)

##### 5.4.1 Kar

Gezer krenlerde, yükleme köprüleri ve döner krenlerin hesaplamalarında kar yükleri hesaba katılmaz

##### 5.4.2 Sıcaklık Değişimi

Yalnızca özel hallerde dikkate alınır. Örneğin, kiriş sistem elemanlarının serbest olarak uzamalarının mümkün olmadığı yerlerde dikkate alınabilir. Açık havada çalışacak tesislerde sıcaklık değişimlerinin sınırı  $-20^{\circ}C \sim +45^{\circ}C$ 'dir.

#### 5.5 Yükleme Durumu Grupları ve Genel Gerilme Değerleri

Krenlerin hesaplanmasında ilk adım yükleme durumuna göre grubun seçilmesidir. Buna göre eğilme gerilmesi hesapları yapılır. DIN 15018 standardına göre yükleme 3 grupta incelenmektedir. Bunlar;

- Yüklemenin H ( ana yük ) hali
- Yüklemenin HZ ( ana ve ek yükler ) hali

- Yüklemenin HS ( ana ve özel yükler ) hali

### 5.5.1 Yüklemenin H ( ana yük ) Hali

Ana yük denilince anlaşılması gereken kısımlar ve kuvvetler :

- Kaldırma makinesinin öz ağırlığının kuvveti ( Kiriş, araba, kanca, travers, çelik halatlar, kepçe ve magnetler v.b. ),
- Kaldırma yükü kuvveti,
- Tahrik ivmesi ve frenlemesinden kaynaklanan kütle kuvvetleri,
- Yük darbeleri sonucu oluşan kuvvet,
- Platform öz ağırlığından ileri gelen kuvvet.

### 5.5.2 Yüklemenin HZ ( ana ve ek yükler ) Hali

Ek yük denilince anlaşılması gereken kuvvetler ;

- Rüzgar kuvveti,
- Kasılmadan ve çarpık hareketlerden ileri gelen kuvvetler,
- Isıdan ileri gelen kuvvetler,
- Kar yükünden ileri gelen kuvvetler,
- Merdivenler, raflar ve korkulukların yük ağırlığından ileri gelen kuvvetler.

### 5.5.3 Yüklemenin HS ( ana ve özel yükler ) Hali

Özel yük denilince anlaşılması gereken kuvvetler :

- Kaldırma makinesini işletmeye alırken kullanılan kontrol yüklerinden ileri gelen kuvvetler,
- Tampon kuvvetleri,
- İki araba veya vinç beraberce bir rayda çalışıyorlarsa, bunların çarpışma kuvveti.

## 5.6 Genel Emniyet Gerilme Değerleri

DIN 15018'de yükleme durumları (H ve Hz) gruplarına göre genel emniyet gerilme değerleri verilmiştir. St 37 ve St 52-3 malzemeleri gerilme emniyet değerleri Çizelge 5.1'de gösterilmiştir.

Çizelge 5.1 St 37 ve St 52-3 malzemeleri gerilme emniyet değerleri(İmrak vd., 2007)

Malzeme	DIN	Yükleme Durumu	Çekme emniyet gerilmesi $\sigma_{em}N/mm^2$	Basma emniyet gerilmesi $\sigma_{em}N/mm^2$	Kayma emniyet gerilmesi $\tau_{em}N/mm^2$
St 37	DIN 17100	H	160	140	92
St 37	DIN 17100	Hz	180	160	104
St 52-3	DIN 17100	H	240	210	138
St 52-3	DIN 17100	Hz	270	240	156

### 5.7 Taşıyıcı Elemanların Yük Durumuna Göre Eğilme Gerimeleri

H yük durumuna göre eğilme gerilmesi (5.2);

$$\sigma_H = (\varphi \cdot M_T + \psi \cdot M_K) / W_z + M_{AT} / W_y \quad (5.2)$$

Hz yük durumuna göre eğilme gerilmesi (5.3);

$$\sigma_{Hz} = \sigma_H + (M_R + M_y) / W_y \quad (5.3)$$

$M_R$  : Rüzgar kuvvetlerinden ,  $M_y$  : Yan ilave yüklerden gelen eğilme momentleridir.

### 5.8 Kren Hesabındaki Katsayılar

#### 5.8.1 Zati Ağılık Katsayısı ( $\varphi$ )

Krenlerin taşıyıcı elemanlarının yürüme yolları üzerinde hareketleri sırasında, seyir hızlarına (m/min) ve hareket yollarının pürüzlülük durumlarında göre, kendi “zati” ağırlıklarından meydana gelen kuvvet ve momentlerin zati ağırlık  $\varphi$  ile çarpılması gerekir (Çizelge 5.2).



Çizelge 5.2 Zati ağırlık katsayısı ( $\phi$ )(Demirsoy vd., 2005)

Hareket hızı v (m/min)		Zati ağırlık katsayısı
Hareket yolları rayları		
Düzgün olmayan veya pürüzlü	Düzgün veya kaynaklı (işlenmiş)	
$\leq 60$	$\leq 90$	1.1
60 – 200	91 – 300	1.2
>200	–	$\geq 1.2$

### 5.8.2 Yük Kaldırma Katsayısı ( $\psi$ )

Bu yükler işletme yükünün (kaldırılan yükün) az veya çok sarsıntılı olmasından ve kaldırma hareketinin ivmeli bir hareket olmasından meydana gelen ek yüklerdir. DIN 15018'den Çizelge 5.3'de "yük kaldırma hızlarına ve kaldırma sınıflarına göre" yük kaldırma katsayıları verilmiştir. İşletme yükünün "büyütülmesi" için kullanılan bu  $\psi$  katsayısı ile çubuk kuvvetleri, kesme kuvvetleri veya eğilme momentleri çarpılır.

Çizelge 5.3 Yük kaldırma katsayısı ( $\psi$ ) (Demirsoy vd., 2005)

Kaldırma Sınıfı	Kaldırma Hızları $V_k$ (m/min)	
	$\leq 90$ m/min	> 90 m/min
H1	$1.1 + 0.0022 \cdot V_k$	1.3
H2	$1.2 + 0.0044 \cdot V_k$	1.6
H3	$1.3 + 0.0066 \cdot V_k$	1.9
H4	$1.4 + 0.0066 \cdot V_k$	2.2

Çeşitli krenlere ait kaldırma sınıfları Çizelge 5.4'de görüldüğü gibidir.

Çizelge 5.4 Çeşitli krenler ve kaldırma sınıfları(İmrak vd., 2007)

No	KREN ÇEŞİTİ	KALDIRMA SINIFI
1	Küçük motorlu kaldırma makineleri ve el krenleri	H1
2	Elektrik santral krenleri	H1 ve H2
3	Lokomotif kaldırma krenleri	H2
4	Hafif yük kaldıran atölye ve ambar krenleri	H2 ve H3
5	Ağır yük kaldıran atölye ve ambar krenleri	H2
6	Montaj krenleri	H1 ve H3
7	Dökümhane krenleri	H2 ve H3
8	Perçinli krenler	H2 ve H3
9	Tersane krenleri	H2
10	Ağır yük krenleri	H1 ve H2
11	Döner krenler, taklı krenler, yüzer krenler - kancalı	H2
12	Döner krenler, taklı krenler, yüzer krenler - keççeli	H2 ve H3
13	Yükleme köprüleri, kablo krenler - kancalı	H2
14	Yükleme köprüleri, kablo krenler – keççeli	H2 ve H3
15	Kiper (külbüter, basküler) köprüleri	H3
16	Yer üstü ve yer altı yapım işlerindeki kuleli krenler	H1 ve H2
Maden istihali tesisatında kullanılan özel krenler		
17	Hafif krenler, montaj krenleri, vals değiştirme krenleri	H1 ve H3
18	Doldurma makineleri	H3 ve H4
19	Çelik profil taşıma krenleri (kısaçallı)	H2 ve H4
20	Kokil ve blok krenleri	H2 ve H3
21	Karıştırıcılar ve döküm krenleri	H3
22	Yer altı fırın krenleri	H3 ve H4
23	Stipper krenleri	H4
24	Şahmerdan krenleri	H2 ve H4

## **6. KRENLERDE GÜVENLİK VE BAKIM ESASLARI**

Kaliteli imal edilmiş kren donanımlarında bakım, bu makinelerin iyi şartlarda olmasında büyük ölçüde etkilidir. Bakım; donanımların verimini, güvenli çalışmasını, arızaları önleyerek düzenli ve verimli bir şekilde çalıştırarak işletme kayıplarını en alt düzeyde tutarak, hasar olmadan alınan önlemlerdir. Doğru zamanda, dikkatli ve titizlikle yapılan düzenli bakım, gözlemlerle , disiplinli çalışmayla yapılabilir. Çalışanların hayatı ve mal güvenliği açısından krenlerde düzenli bakım büyük önem taşımaktadır.

Krenlerde uygulanan bakım, sistemin verimini ve güvenli çalışmasını sağlamaktır. Bakımın faydalarından biri tesisi düzenli ve verimli, arızayı önleyecek düzeyde emniyetli olarak çalıştıracak en üst düzeyde tutmak ve işletme kayıplarını en aza indirmektir. Bunun için uygulanması gereken bakım yöntemleri şunlardır(Boğoçlu; İmrak vd., 2004);

### **6.1 Önleyici Bakım**

Kren ve elemanların çalışmalarını yeterli ve uygun bir şekilde sürdürülmesi için düzenlenen bakım.

### **6.2 Arızadan Kaynaklanan Bakım**

Donanım ve elemanların yeniden eski çalışma koşullarına dönmesini sağlayan bakım. Bakım sırasında değiştirme ihtiyacı duyulabilen elemanların parçalarının aşınma sınırını aşması durumunda değiştirildiği bakım.

### **6.3 Düzeltici Bakım**

Donanım ve elemanların daha fazla güvenli ve uygun çalışma özelliklerini yitirdiğinde uygulanan bakım.

### **6.4 Dinamik Bakım**

Donanımın uzaktan izlenme ve bilgilerin bilgisayar tarafından sürekli değerlendirildiği bakım.

Krenler için güvenilirliği düzeltici bakımda arttırmak için uygulanması gereken faktörler şunlardır;

- Arıza bulma işlemleri
- Uygun moment değerleri, ön yükler ve diğer montaj bilgilerini de içeren sıralı sökme ve takma
- Frenler, kavramalar, zincirler, halatlar v.b gibi elemanlar için değiştirme ölçütleri ile birlikte aşınma, uzama, çatlak kontrolünün de gerekli olduğu parçaların ve grupların özelliği
- Gerekli özel aletler ile donanımın özelliği
- Kren parçalarının kaldırma ve iletmesi ile ilgili özel şartlar

Bu faktörler düzeltici bakımda krenlerin emniyetli ve güvenli çalışması için önemli bir yer tutar.

## **6.5 Krenlerin Muayenesi**

Krenlerin emniyetli çalışması için, uygun çalışma ve işletme şartları korunmalıdır. Bütün krenlerde düzenli muayenenin yapılması gereklidir. Muayeneler sonucunda emniyet şartlarından sapmalar tespit edildiğinde düzeltilmesi yoluna gidilmelidir.

Krenler, çalışma süresi, işletme ve fabrika şartlarına bağlı olarak tecrübeli bir teknisyen veya bir uzman mühendis tarafından, gerektiği şekilde ve gerektiği zamanda muayene edilmelidir. Düzenli ve esas muayene yılda en az bir kere yapılmalıdır.

### **6.5.1 Muayenenin Uygulanması**

Muayenenin sırası ;

- Etiketlemeyi de kontrol etmek üzere, krenin diğer dökümanlarının kontrolü
- Hasar, aşınma, korozyon ve diğer herhangi bir değişiklikte ilgili parçaların ve diğer tertibatların durumlarının kontrolü
- Mekanizmaların çalışma deneyi
- Anma yükü altındaki emniyet tertibatı ve frenlerin etkinliği ile ilgili durumların muayenesi

### **6.5.2 Muayene Raporları**

Muayene sonuçlarını gösteren raporlar, muayeneyi yapan kişiler tarafından düzenli olarak kaydedilmelidir.

Raporlar ;

- Muayenenin kapsamını
- Devam eden muayeneleri
- Tespit edilen kusurları
- Krenin daha fazla çalışmasının sakıncasının olup olmadığı hakkında bilgiyi içermelidir.

### **6.6 Krenlerde Servis İşlemi**

Rutin temizleme, yağlama ve ayarlama, aşınmayı önemli ölçüde azaltır ve arızaları önler. Belirli bir çalışma süresi sonunda krenin emniyet sistemlerinin işlerliğinin kontrol edilmesi gerekmektedir.

Krenlerin ilk bakımı 50 işletme saati veya ilk birinci ayın sonunda, diğer periyodik bakımlar ise işletme şartlarının ağırlığına bağlı olarak 1 ile 3 aylık periyotlarda yapılmalıdır.

#### **6.6.1 Krenlerin İlk Bakımı**

İlk 50 işletme saati sonunda yapılacak bakımda yapılması gereken işler aşağıda belirtilmiştir.

- Bütün redüktörlerin yağları değiştirilmeli
- Bütün elemanların ve emniyet sisteminin işlerlik kontrolü yapılmalı
- İmalatçı firmanın vereceği yağlama cetveline göre tüm yağlamalar yapılmalıdır.

#### **6.6.2 Periyodik Bakım**

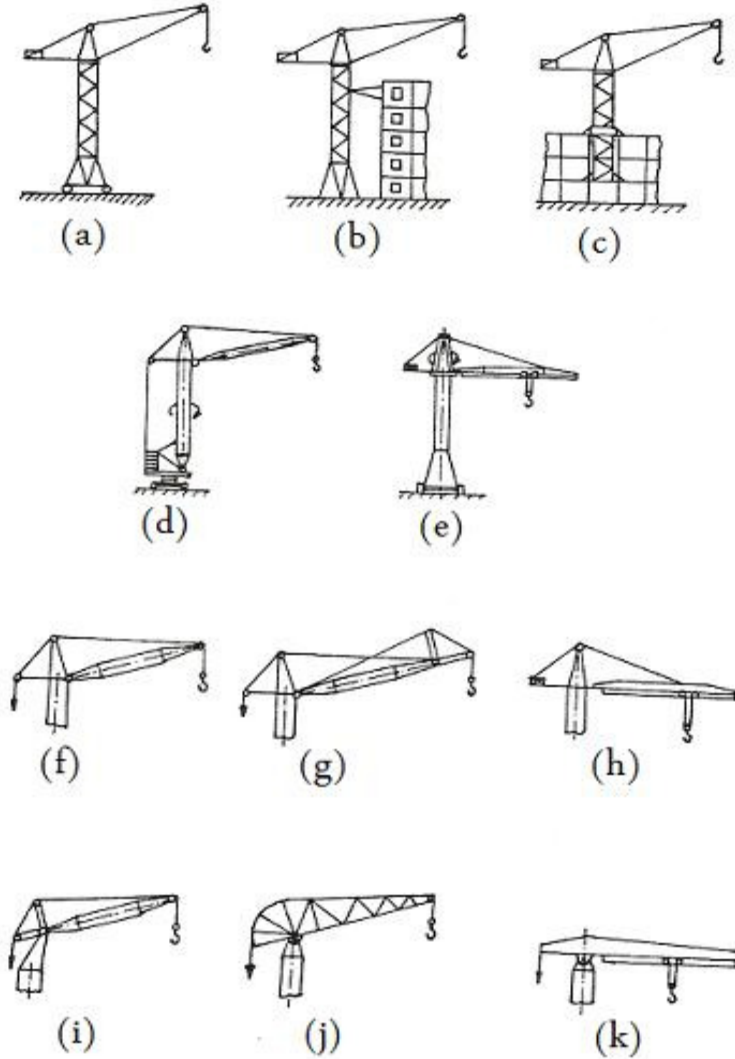
Krenlerde uygulanan koruyucu periyodik bakımda ise, ilk bakımdaki işlemlere ilave olarak aşınma kontrolleri yapılarak, gereken parçalar değiştirilmelidir.

## 6.7 Emniyet İçin Krenlerde Olması Gerekli Ekipmanlar

- Yakıt tankında otomatik kapanan kapak ve alev önleyici sistem bulunmalıdır.
- Tamir bakım ekipmanları makine üzerinde metal bir kutuya yerleştirilmiş olmalıdır.
- Gece operasyonları için uygun ışıklandırma sistemi olmalıdır.
- Kolay kullanılabilen bir yangın söndürücüsü olmalıdır.
- Bütün makinelerde düşey düzlemde boom'ların (yük kolu) hareket kabiliyetini gösterir boom(yük kolu) açısı göstergesi olmalıdır. Bu açı göstergesi temiz, okunaklı ve işlemler sırasında operatörün 1°'lik değişimleri görebilmesini mümkün kılar tarzda olmalıdır.
- Bütün makinelerde teleskopik boom'larda(yük kolu) boom (yük kolu) boyu göstergesi olmalıdır.
- Kabin dışında etkili bir şekilde işitilebilir ikaz sinyali bulunmalıdır. Operatör tarafından kolayca kullanılacak şekilde yerleştirilmiş olmalıdır.
- Boom (yük kolu) duruşları şok absorpsiyonlu olmalıdır. Boom (yük kolu) kaldırma sistemi emniyetli durma tertibatı ile donatılmalıdır.
- Üzerinde operasyon özelliklerini detaylı bir şekilde gösteren kapasite kartları bulunmalıdır.

## 7. MODEL KREN TANITIMI

Bu tez konusunda matematiksel olarak incelenip benzetim çalışmalarını yapmış olduğum model aşağıda şekli verilmiş (Şekil 7.2) olan, kule vinç yada yapı krenleri olarak ta bilinen bir kren çeşididir. Bu tip krenlerden sınıflandırma başlığı altında bahsedilmiştir. Şekil 7.1’de kule kren çeşitleri görülmektedir.

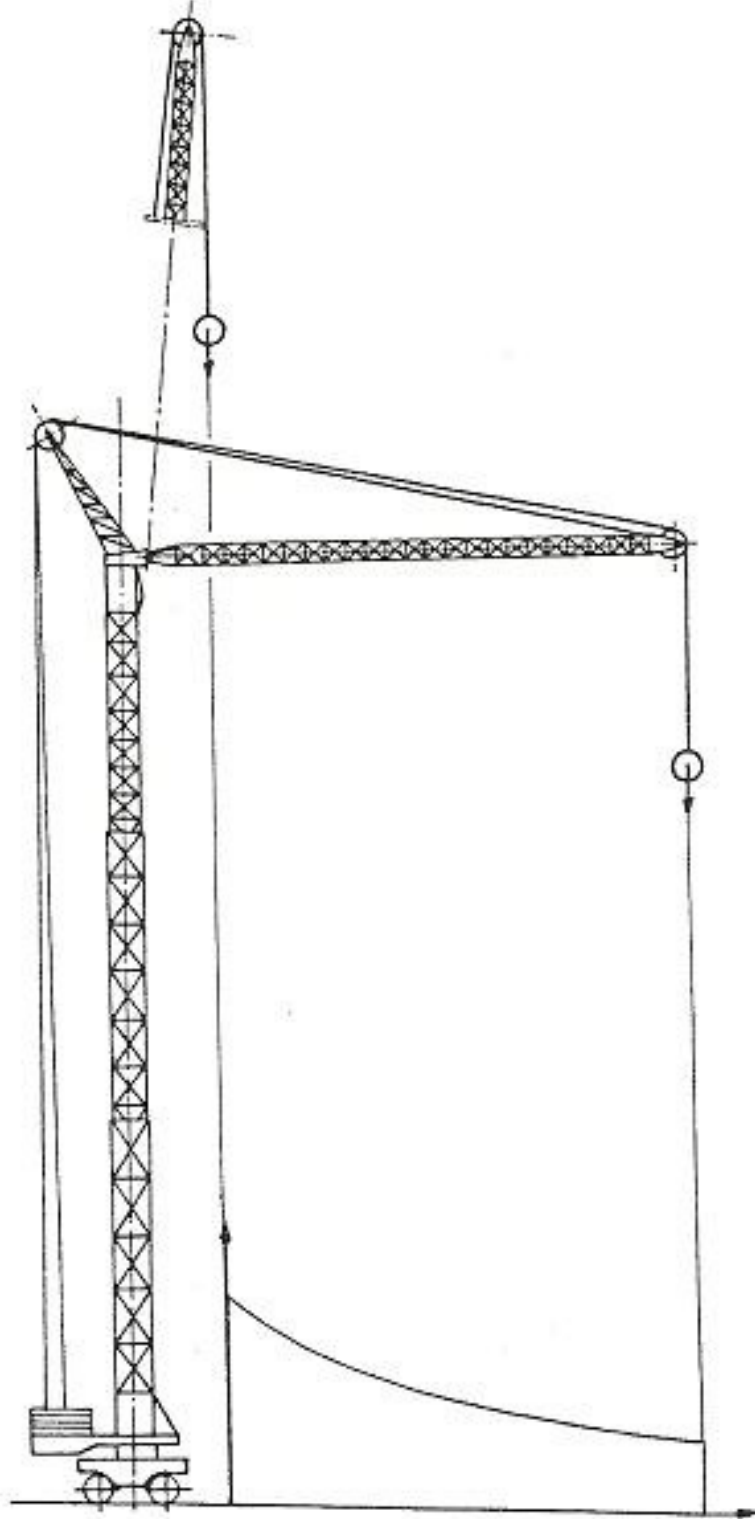


Şekil 7.1 Kule kren çeşitleri(Boğoçlu, )

- Gezer kule krenleri (Şekil 7.1a)
- Çalışan yapının çatısına bağlı kule krenleri (Şekil 7.1 b)
- Dikey tırmanan kule krenleri (Şekil 7.1 c)
- Döner kuleli krenler (Şekil 7.1 d)
- Sabit kule ile dönen üst kısma sahip krenler (Şekil 7.1 e)
- Yatay ve dikey düzlemde hareketli yük koluna sahip krenler (Şekil 7.1 f, g, i, j, k)

- Sadece yatay düzlemde hareketli yük koluna sahip krenler (Şekil 7.1 h)

Şekil 7.1 d’de görülen kren çeşidi kule kren çeşitlerinden biri olan döner kuleli krenlerdir. Bu tip krenin şematik görünümü Şekil 7.2’de verilmiştir.



Şekil 7.2 Döner kuleli kren

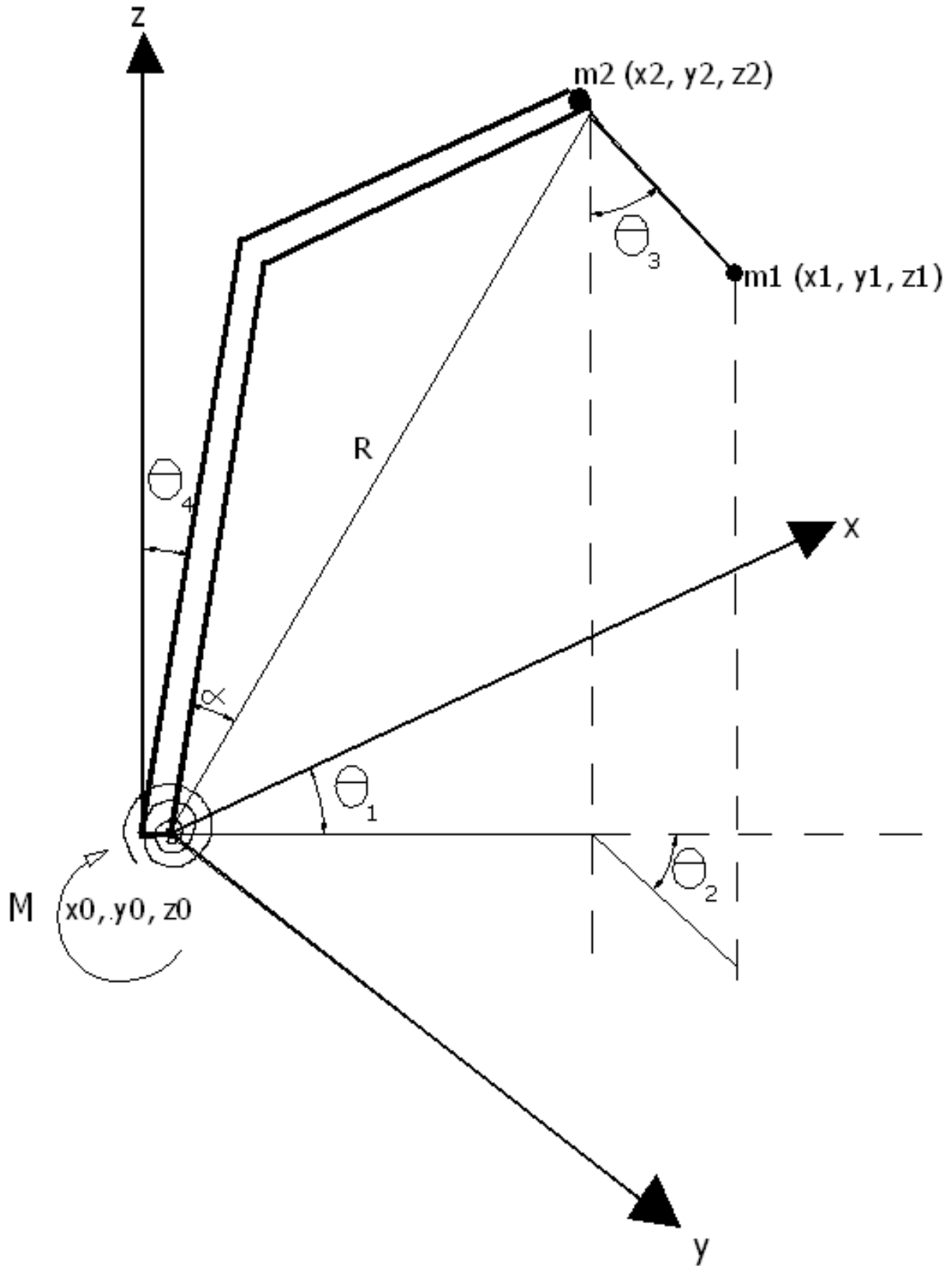


## 8. 5 SERBESTLİK DERECELİ KULE KREN SİSTEMİNİN MODELLENMESİ

### 8.1 Örnek Olarak Alınan Kule Tipi Krenin Matematiksel Olarak Modellenmesi

İncelemiş olduğum kule tipi krenin şematik görünümü (Şekil 8.1) aşağıda yer almaktadır. Bu sistemde Lagrange yöntemi ve enerji denklemleri kullanılarak nonlinear bir yapının matematiksel olarak modellenmesi ve bu modelleme sayesinde sistemin bilgisayar ortamında, matlab-simulink programı yardımıyla benzetim çalışmaları yapılmış ve dinamik davranışları incelenmiştir. Bu çalışmalara ait verilerden de bir sonraki aşamada bahsedilmiştir. Ele almış olduğumuz kule tipi krende sisteme etki eden bir döndürme momenti ( $M$ ) ve mevcut yükler etkisinde oluşan bir kuvvet ( $F$ ) bulunmaktadır ve sistem açık çevrim olarak incelenmiştir. Sistemin gövdesi esnek, sistemde yer alan  $m_1$  kütlelerinin asılı olduğu halat rijit ve yük kolunun kütlelerinin en uç noktaya indirgenmiş olduğu kabul edilmiştir.

Sistemin şematik görünümü (Şekil 8.1) aşağıdaki gibidir.



Şekil 8.1 Örnek olarak alınan kule tipi krenin şematik görünümü

Bu parametreler göz önünde bulundurulursa sisteme ait denklemler aşağıdaki gibi olmaktadır;

(8.1), (8.2), (8.3) eşitlikleri yardımıyla bulunan  $m_2$  kütesinin sırasıyla x, y, z koordinatları,

$$x_2 = R \sin(\alpha + \theta_4) \cos \theta_1 \quad (8.1)$$

$$y_2 = R \sin(\alpha + \theta_4) \sin \theta_1 \quad (8.2)$$

$$z_2 = R \cos(\alpha + \theta_4) \quad (8.3)$$

(8.4), (8.5), (8.6) eşitlikleri yardımıyla bulunan  $m_1$  kütesinin sırasıyla x, y, z koordinatları,

$$x_1 = x_2 + L \sin \theta_3 \cos (\theta_1 + \theta_2) \quad (8.4)$$

$$y_1 = y_2 + L \sin \theta_3 \sin (\theta_1 + \theta_2) \quad (8.5)$$

$$z_1 = z_2 - L \cos \theta_3 \quad (8.6)$$

Sistemin kinetik enerji denkleminde kullanmak üzere (8.7), (8.8), (8.9) eşitlikleri yardımıyla bulunan  $m_2$  kütesinin x, y, z koordinatlarının hızları,

$$\dot{x}_2 = -R \sin(\alpha + \theta_4) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 + R \cos(\alpha + \theta_4) \cos \theta_1 \dot{\theta}_4 \quad (8.7)$$

$$\dot{y}_2 = R \sin(\alpha + \theta_4) \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + R \cos(\alpha + \theta_4) \sin \theta_1 \dot{\theta}_4 \quad (8.8)$$

$$\dot{z}_2 = -R \sin(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_4 \quad (8.9)$$

Sistemin kinetik enerji denkleminde kullanmak üzere (8.10) eşitliği yardımıyla bulunan  $m_2$  kütesinin x, y, z koordinatları hızlarının kareleri toplamı,

$$\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2 = R^2 \sin^2(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1^2 + R^2 \dot{\theta}_4^2 \quad (8.10)$$

Sistemin kinetik enerji denkleminde kullanmak üzere (8.11), (8.12), (8.13) eşitlikleri

yardımla bulunan  $m_1$  kütesinin  $x, y, z$  koordinatlarının hızları,

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 + \sin\theta_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \dot{L} + L \cos\theta_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_3 - L \sin\theta_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad (8.11)$$

$$\dot{y}_1 = \dot{y}_2 + \sin\theta_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) \dot{L} + L \cos\theta_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_3 + L \sin\theta_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad (8.12)$$

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_2 - \cos\theta_3 \dot{L} + L \sin\theta_3 \dot{\theta}_3 \quad (8.13)$$

Sistemin kinetik enerji denkleminde kullanmak üzere (8.14) eşitliği yardımla bulunan  $m_2$  kütesinin  $x, y, z$  koordinatları hızlarının kareleri toplamı,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 = & R^2 \sin^2(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1^2 + R^2 \dot{\theta}_4^2 + \dot{L}^2 + L^2 \dot{\theta}_3^2 + L^2 \sin^2\theta_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \\ & (2R \sin\theta_3 \sin\theta_2 \sin(\alpha + \theta_4)) \dot{\theta}_1 \dot{L} + (2R \cos\theta_2 \sin\theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) + 2R \cos\theta_3 \sin(\alpha \\ & + \theta_4)) \dot{\theta}_4 \dot{L} + (2RL \cos\theta_2 \cos\theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) - 2RL \sin\theta_3 \sin(\alpha + \theta_4)) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 + \\ & 2RL \sin\theta_2 \cos\theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + 2RL \cos\theta_2 \sin\theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1^2 - \\ & 2RL \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + 2RL \cos\theta_2 \sin\theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \\ & 2RL \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \end{aligned} \quad (8.14)$$

Sistemin kinetik enerji denklemi (8.16),

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned}
E_k = & \frac{1}{2}m_1 \left[ R^2 \sin^2(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1^2 + R^2 \dot{\theta}_4^2 + \dot{L}^2 + L^2 \dot{\theta}_3^2 + L^2 \sin^2 \theta_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \right. \\
& (2R \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin(\alpha + \theta_4)) \dot{\theta}_1 \dot{L} + (2R \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) + 2R \cos \theta_3 \sin(\alpha \\
& + \theta_4)) \dot{\theta}_4 \dot{L} + (2RL \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) - 2RL \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4)) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 + \\
& 2RL \sin \theta_2 \cos \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + 2RL \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1^2 - \\
& 2RL \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + 2RL \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \\
& \left. 2RL \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \right] + \frac{1}{2}m_2 [R^2 \sin^2(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1^2 + R^2 \dot{\theta}_4^2]
\end{aligned} \tag{8.16}$$

Sistemin potansiyel enerji denklemi (8.17),

$$E_p = m_1 g [R(\cos \alpha - \cos(\alpha + 4)) + L(1 - \cos \theta_3)] + \frac{1}{2} K \theta_4^2 + m_2 g R [\cos \alpha - \cos(\alpha + \theta_4)] \tag{8.17}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + b = F, \tag{8.18}$$

(8.18)'de belirtilen diferansiyel denklemden faydalanarak sistemde bulunan  $L$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_4$  değişkenlerinin, matlab-simulink modellemesinde kullanmak üzere elde edilmesi gereken diferansiyel denklemleri aşağıdaki gibidir,

$L$  değişkenine ait diferansiyel denklemler (8.19), (8.20), (8.21), (8.22)'de ifade edildiği gibidir,

$$\frac{\partial E_k}{\partial L} = m_1 \dot{L} + m_1 R \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1 + m_1 R \dot{\theta}_4 (\cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) + \cos \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4)) \tag{8.19}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_k}{\partial L} = & m_1 \ddot{L} + m_1 R \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \ddot{\theta}_1 + m_1 R \ddot{\theta}_4 (\cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) + \\
& \cos \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4)) + m_1 R \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_1 R \sin \theta_2 \cos \theta_3 \sin(\alpha \\
& + \theta_4) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + m_1 R \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 - m_1 R \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_2 + \\
& (m_1 R \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) - m_1 R \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4)) \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_3 + (m_1 R \cos \theta_3 \cos(\alpha \\
& + \theta_4) - m_1 R \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4)) \dot{\theta}_4^2
\end{aligned} \tag{8.20}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial L} = m_1 g (1 - \cos \theta_3) \quad (8.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_k}{\partial L} + \frac{\partial E_p}{\partial L} = F \quad (8.22)$$

$\theta_1$  değişkenine ait diferansiyel denklemler (8.23), (8.24), (8.25), (8.26)'de ifade edildiği gibidir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial \theta_1} = & m_1 (2RL \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) + R^2 \sin^2(\alpha + \theta_4)) \dot{\theta}_1 + m_1 R \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha \\ & + \theta_4) \dot{L} + m_1 RL \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_2 + m_1 RL \sin \theta_2 \cos \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_3 - \\ & m_1 RL \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_4 + m_1 L^2 \sin^2 \theta_3 \dot{\theta}_1 + m_1 L^2 \sin^2 \theta_3 \dot{\theta}_2 + m_1 R^2 \sin^2(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1 \end{aligned} \quad (8.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_k}{\partial \theta_1} = & (2m_1 RL \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) + m_1 R^2 \sin^2(\alpha + \theta_4) + m_2 R^2 \sin^2(\alpha + \theta_4) + \\ & m_1 L^2 \sin^2 \theta_3) \ddot{\theta}_1 + m_1 R \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \dot{L} + (m_1 L^2 \sin^2 \theta_3 + m_1 RL \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha \\ & + \theta_4)) \ddot{\theta}_2 + m_1 RL \sin \theta_2 \cos \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \ddot{\theta}_3 - m_1 RL \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) \ddot{\theta}_4 + \\ & (2m_1 RL \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) + 2m_1 R^2 \sin(\alpha + \theta_4) \cos(\alpha + \theta_4) + 2m_2 R^2 \sin(\alpha \\ & + \theta_4) \cos(\alpha + \theta_4)) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + (2m_1 RL \cos \theta_2 \cos \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) + 2m_1 L^2 \sin \theta_3 \cos \theta_3) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - \\ & 2m_1 RL \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + (2m_1 R \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) + 2m_1 L \sin^2 \theta_3) \dot{\theta}_1 \dot{L} + \\ & (2m_1 R \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) + 2m_1 L \sin^2 \theta_3) \dot{\theta}_2 \dot{L} + \\ & (2m_1 L^2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + 2m_1 RL \cos \theta_2 \cos \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4)) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + 2m_1 R \sin \theta_2 \cos \theta_3 \sin(\alpha \\ & + \theta_4) \dot{\theta}_3 \dot{L} - m_1 RL \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_2^2 - m_1 RL \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_3^2 + \\ & m_1 RL \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_4^2 \end{aligned} \quad (8.24)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta_1} = 0 \quad (8.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_k}{\partial \theta_1} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta_1} = M \quad (8.26)$$

$\theta_2$  değişkenine ait diferansiyel denklemler (8.27), (8.28), (8.29), (8.30)'de ifade edildiği gibidir,

$$\frac{\partial E_k}{\partial \theta_2} = (m_1 L^2 \sin^2 \theta_3 + m_1 R L \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4)) \dot{\theta}_1 - m_1 R L \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_4 + m_1 L^2 \sin^2 \theta_3 \dot{\theta}_2 \quad (8.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_k}{\partial \theta_2} = & (m_1 L^2 \sin^2 \theta_3 + m_1 R L \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4)) \ddot{\theta}_1 - m_1 R L \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) \ddot{\theta}_4 + m_1 L^2 \sin^2 \theta_3 \ddot{\theta}_2 + (2m_1 L \dot{L} \sin^2 \theta_3 + m_1 R \dot{L} \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4)) \dot{\theta}_1 + \\ & (2m_1 L^2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + m_1 R L \cos \theta_2 \cos \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4)) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + m_1 R L \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 - m_1 R L \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_1 R L \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_4 - \\ & m_1 R L \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_2 - m_1 R L \sin \theta_2 \cos \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_3 + \\ & m_1 R L \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_4^2 + 2m_1 L^2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + 2m_1 L \dot{L} \sin^2 \theta_3 \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (8.28)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta_2} = 0 \quad (8.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_k}{\partial \theta_2} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta_2} = 0 \quad (8.30)$$

$\theta_3$  değişkenine ait diferansiyel denklemler (8.31), (8.32), (8.33), (8.34)'de ifade edildiği gibidir,

$$\frac{\partial E_k}{\partial \theta_3} = m_1 R L \sin \theta_2 \cos \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1 + m_1 R L (\cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) - \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4)) \dot{\theta}_4 + m_1 L^2 \dot{\theta}_3 \quad (8.31)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\theta}_3} = & m_1 RL \sin \theta_2 \cos \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \ddot{\theta}_1 + m_1 RL (\cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) - \\
& \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4)) \ddot{\theta}_4 + m_1 L^2 \ddot{\theta}_3 + m_1 R \sin \theta_2 \cos \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1 \dot{L} + \\
& m_1 RL (\cos \theta_2 \cos \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4)) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_1 RL \sin \theta_2 \cos \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 - \\
& m_1 RL \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - m_1 RL \sin \theta_2 \cos \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 - \\
& (m_1 RL \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) + m_1 RL \cos \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4)) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 - \\
& (m_1 RL \cos \theta_2 \cos \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) + m_1 RL \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4)) \dot{\theta}_4^2 + \\
& (m_1 R \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) - m_1 R \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4)) \dot{\theta}_4 \dot{L} + 2m_1 L \dot{L} \dot{\theta}_3
\end{aligned} \tag{8.32}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta_3} = m_1 g L \sin \theta_3 \tag{8.33}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\theta}_3} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta_3} = 0 \tag{8.34}$$

$\theta_4$  değişkenine ait diferansiyel denklemler (8.35), (8.36), (8.37), (8.38)'de ifade edildiği gibidir,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\theta}_4} = & (m_1 R \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) + m_1 R \cos \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4)) \dot{L} - m_1 RL \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha \\
& + \theta_4) \dot{\theta}_1 - m_1 RL \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_2 + (m_1 R L \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) - \\
& m_1 RL \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4)) \dot{\theta}_3 + (m_2 + m_1) R^2 \dot{\theta}_4
\end{aligned} \tag{8.35}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\theta}_4} = & (m_1 R \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) + m_1 R \cos \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4)) \dot{L} - m_1 RL \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha \\
& + \theta_4) \ddot{\theta}_1 - m_1 RL \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) \ddot{\theta}_2 + (m_1 R L \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) - \\
& m_1 RL \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4)) \ddot{\theta}_3 + (m_2 + m_1) R^2 \ddot{\theta}_4 + (2m_1 R \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) - \\
& 2m_1 R \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4)) \dot{L} \dot{\theta}_3 + (m_1 R \cos \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) - m_1 R \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha \\
& + \theta_4)) \dot{\theta}_4 \dot{L} - 2m_1 R \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) \dot{L} \dot{\theta}_2 - m_1 RL \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \\
& m_1 RL \sin \theta_2 \cos \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - m_1 R \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) \dot{L} \dot{\theta}_1 + \\
& m_1 RL \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 - m_1 RL \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_2^2 - \\
& 2m_1 RL \sin \theta_2 \cos \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + m_1 RL \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 - \\
& (m_1 RL \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4) + m_1 RL \cos \theta_3 \sin(\alpha + \theta_4)) \dot{\theta}_3^2 - (m_1 RL \cos \theta_2 \cos \theta_3 \sin(\alpha \\
& + \theta_4) + m_1 RL \sin \theta_3 \cos(\alpha + \theta_4)) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4
\end{aligned} \tag{8.36}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta_4} = (m_1 + m_2) g R \sin(\alpha + \theta_4) + K \theta_4 \tag{8.37}$$

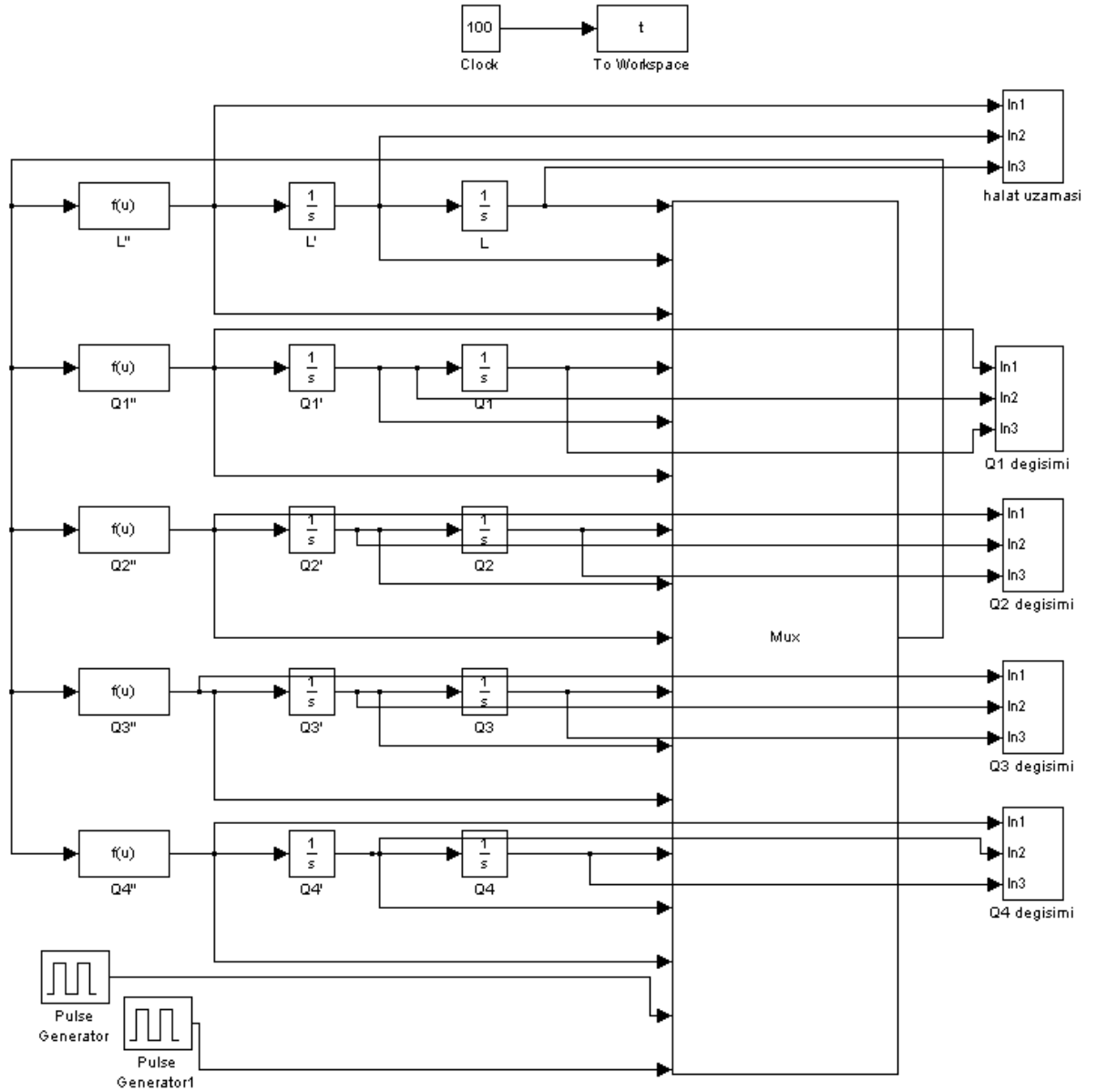


$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_k}{\partial \theta_4} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta_4} = 0 \quad (8.38)$$

Yukarıda elde etmiş olduğum (8.22), (8.26), (8.30), (8.34), (8.38) no'lu denklemlerde sırasıyla  $\ddot{L}$ ,  $\ddot{\theta}_1$ ,  $\ddot{\theta}_2$ ,  $\ddot{\theta}_3$  ve  $\ddot{\theta}_4$  ifadeleri Ek 1'de görüldüğü gibi eşitliğin bir tarafında yalnız bırakılmıştır. Bu ifadeler sistemin matlab –simulink ortamında kullanılmak üzere, Şekil 9.1'de görülen Matlab – Simulink modeli içerisinde yer alan fonksiyon kutucuklarına yerleştirilerek gerekli başlangıç değerlerinin de girilmesiyle konum, hız ve ivme parametreleri grafiksel olarak elde edilip yorumlanmıştır. Tüm denklemlerin doğruluğu Mathematica programı yardımıyla kontrol edilmiştir(Ek 2).

## 9. MATLAB – SIMULINK ORTAMINDA YAPILAN BENZETİM ÇALIŞMALARI VE GRAFİKLER

İncelemiş olduğum modelde kren gövdesinin esnek olduğu,  $m_1$  kütlelerinin asılı olduğu taşıyıcı halatın rijit olduğu ve herhangi bir esneklik katsayısının olmadığı, boom(yük kolu)'un kütlelerinin  $m_1$  kütlelerinin asılı olduğu halatın uç kısmına indirgenmiş olduğu ve  $F$ (sistemde  $m_1$  kütlelerinin yarattığı kuvvet),  $M$ (moment) değerlerinin etkisi altında çalıştığı kabul edilmiştir. Kule tipi kren modelinin matlab – simulink modeli Şekil 9.1'de gösterildiği gibidir.



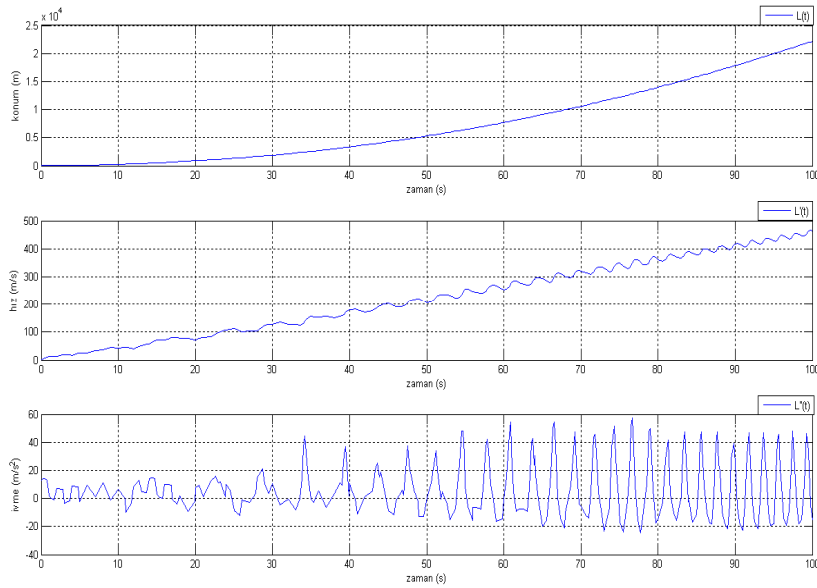
Şekil 9.1 Kule tipi krenin Matlab – Simulink modeli

Sistemin çeşitli başlangıç koşulları(Çizelge 9.1) ve bu koşullardaki  $L$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_4$  ifadelerinin konum, hız ve ivme değerlerinin elde edildiği ve çeşitli değişkenler altında dinamik davranışlarının gözlemlendiği grafikler aşağıdaki gibidir.  $L$  (halat boyu) tüm başlangıç koşulları için 1m,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_4$  açılarının ilk durumu  $0^\circ$  ve  $\theta_3$  değeri  $6^\circ$  ( $\pi/30$  rad)'dir.

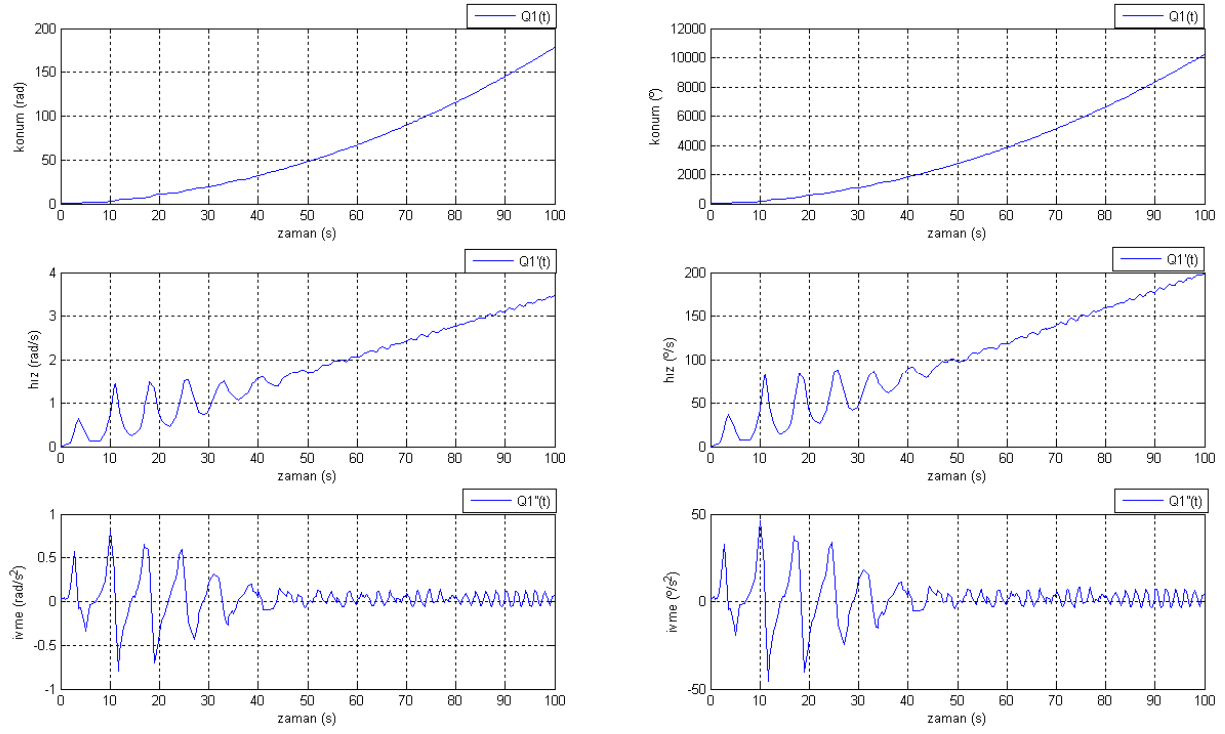
### 1.Durum başlangıç koşulları,

$m_1$	: 100	(kg)
$m_2$	: 2500	(kg)
$R$	: 38	(m)
$\alpha$	: 0,55	(rad)
$\beta$	: 110	( $^\circ$ )
$g$	: 9,81	( $m/s^2$ )
$K$	: 1750000	( $kg.m^2/rad.s^2$ )
$F$	: $m_1.g$	( $kg.m/s^2$ )
$M$	: 30000	( $kg.m^2/s^2$ )

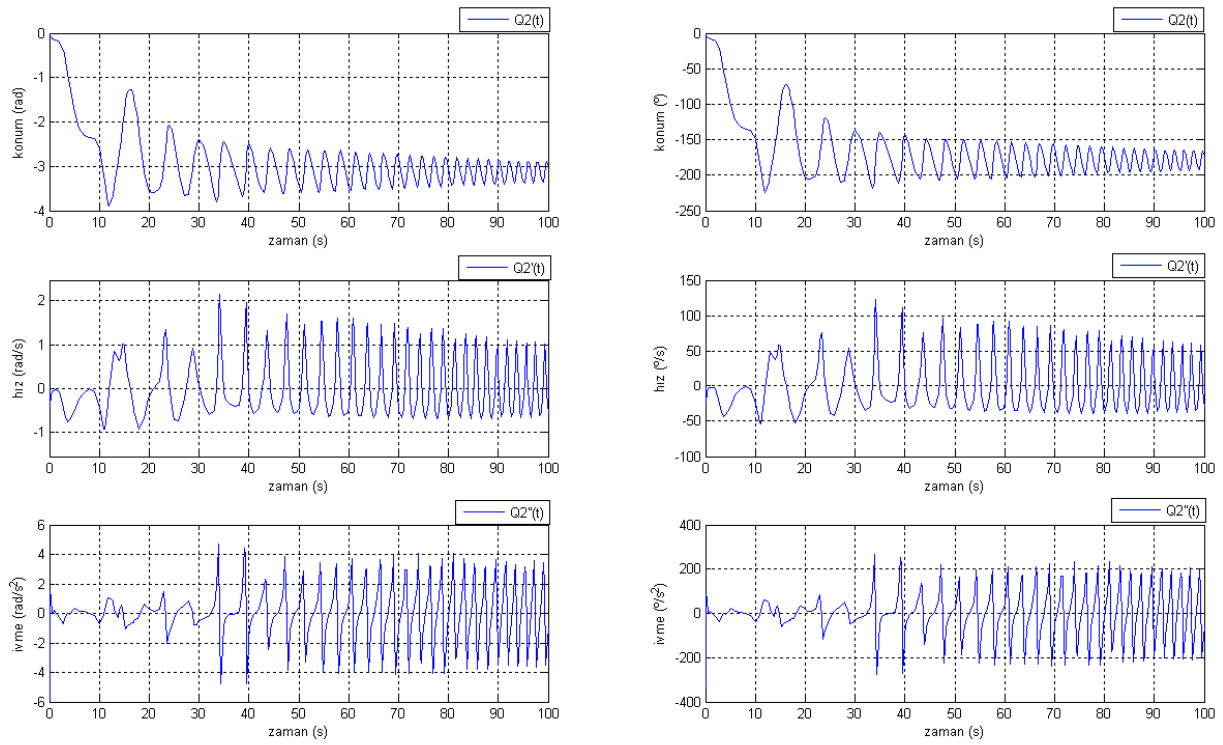
şeklinde olduğunda dinamik davranış grafikleri aşağıda incelenmiştir;



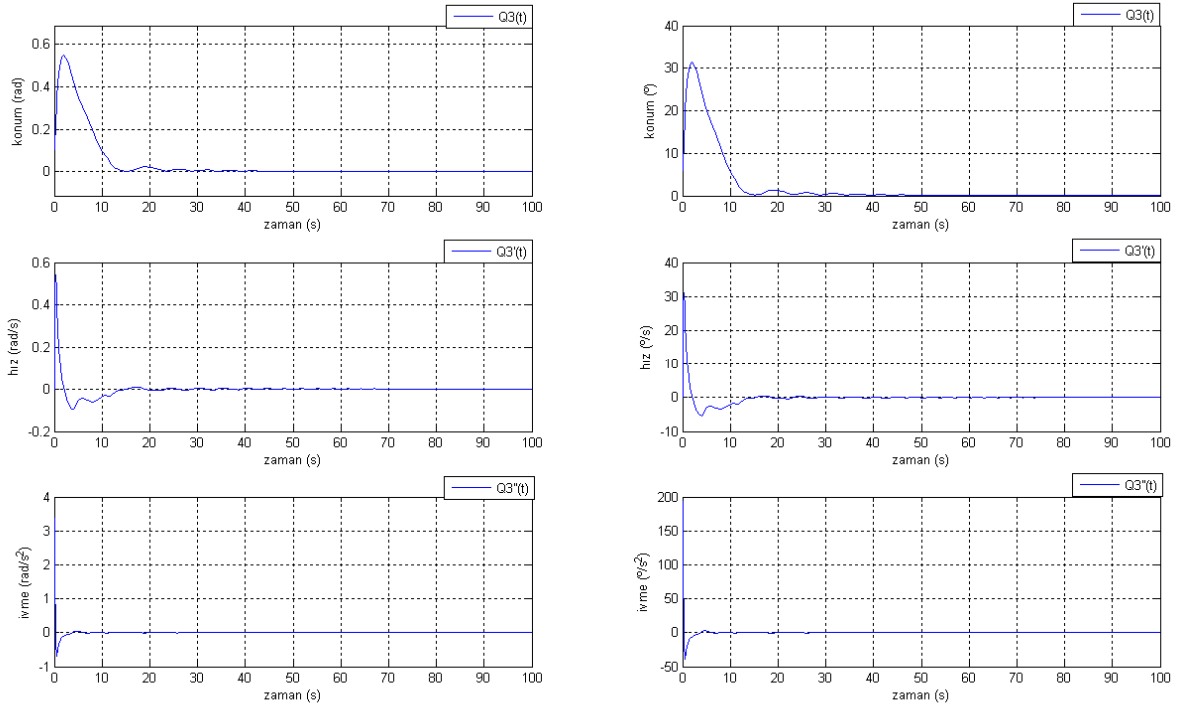
Şekil 9.2  $L$ (halat boyu) değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



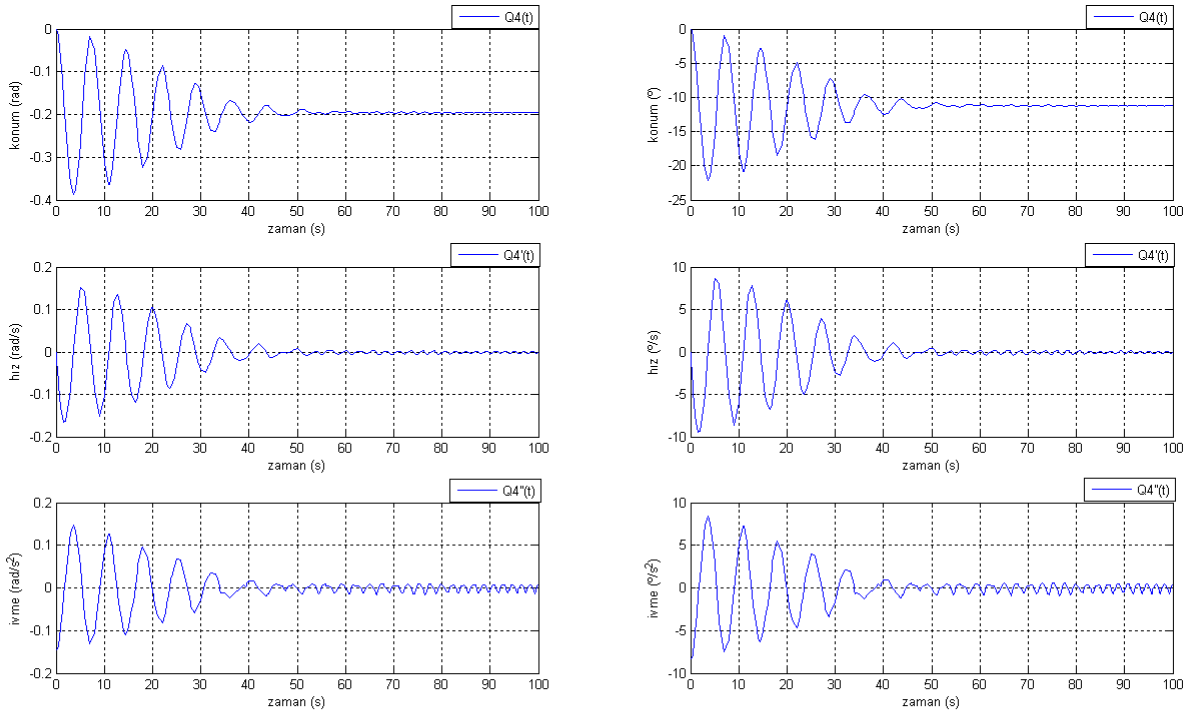
Şekil 9.3  $\theta_1$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



Şekil 9.4  $\theta_2$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



Şekil 9.5  $\theta_3$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri

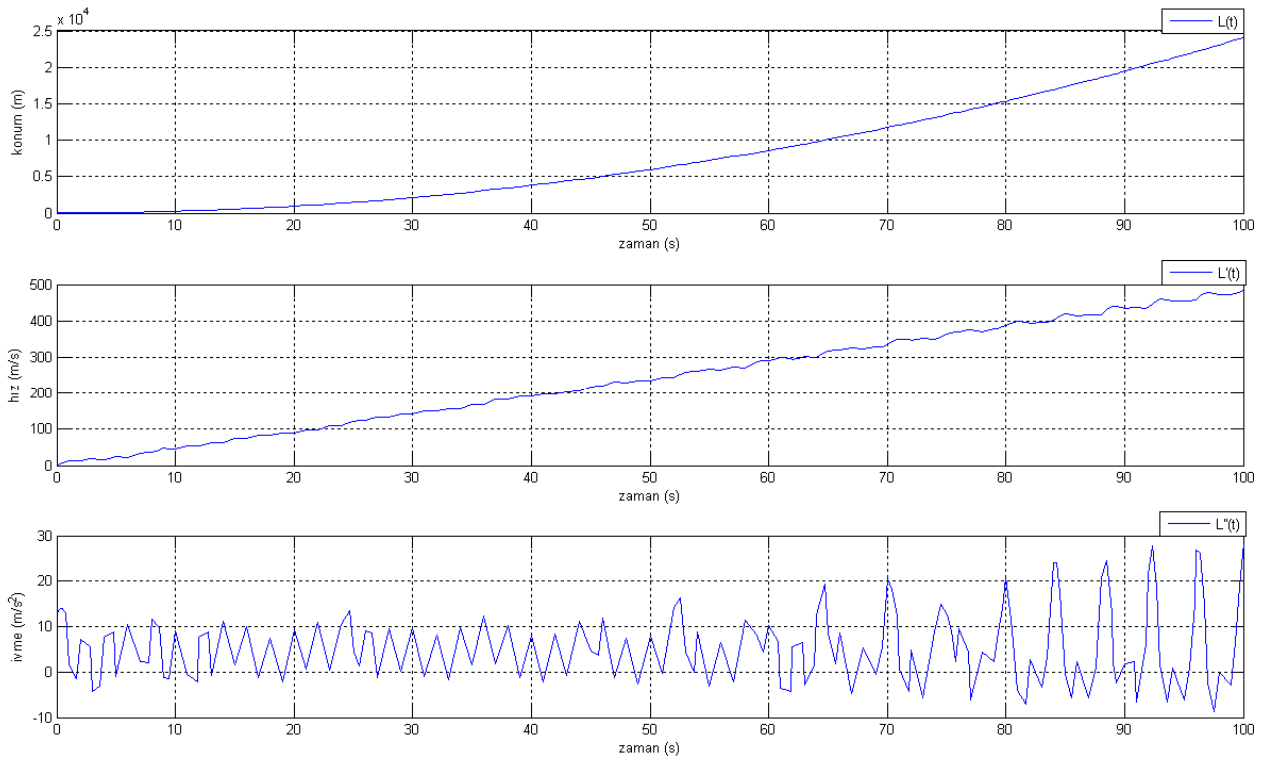


Şekil 9.6  $\theta_4$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri

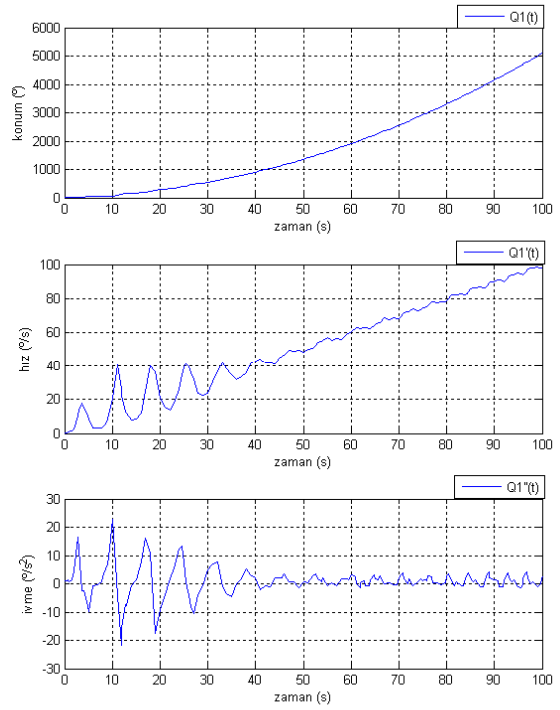
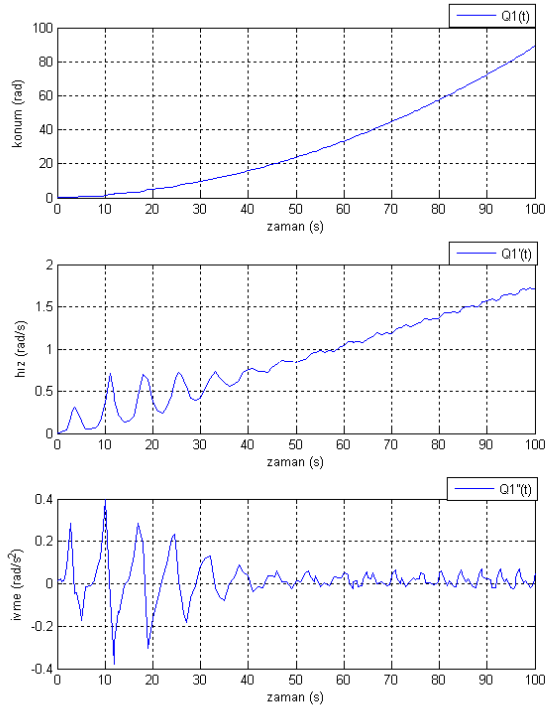
## 2.Durum başlangıç koşulları,

$m_1$	: 100	(kg)
$m_2$	: 2500	(kg)
$R$	: 38	(m)
$\alpha$	: 0,55	(rad)
$\beta$	: 110	(°)
$g$	: 9,81	(m/s <sup>2</sup> )
$K$	: 1750000	(kg.m <sup>2</sup> /rad.s <sup>2</sup> )
$F$	: $m_1.g$	(kg.m/s <sup>2</sup> )
$M$	: 15000	(kg.m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )

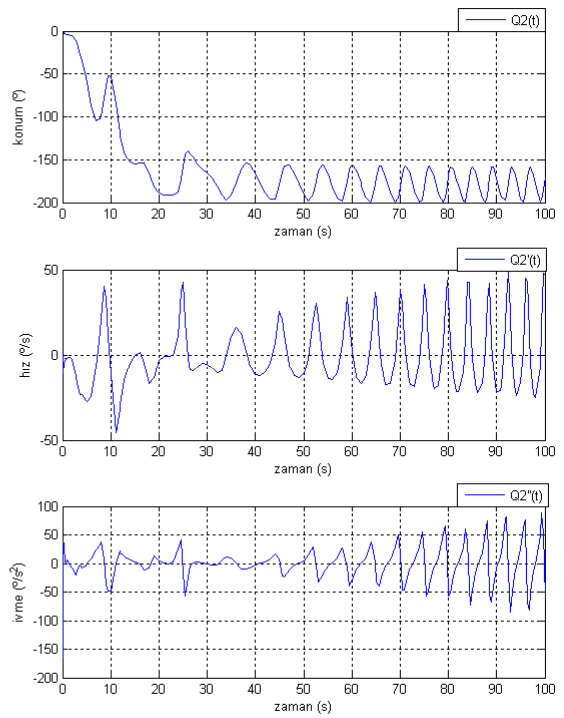
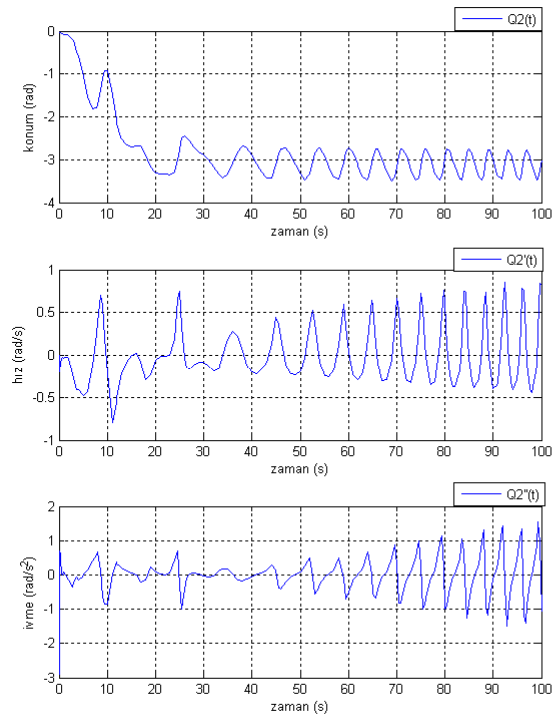
şeklinde olduğunda dinamik davranış grafikleri aşağıda incelenmiştir;



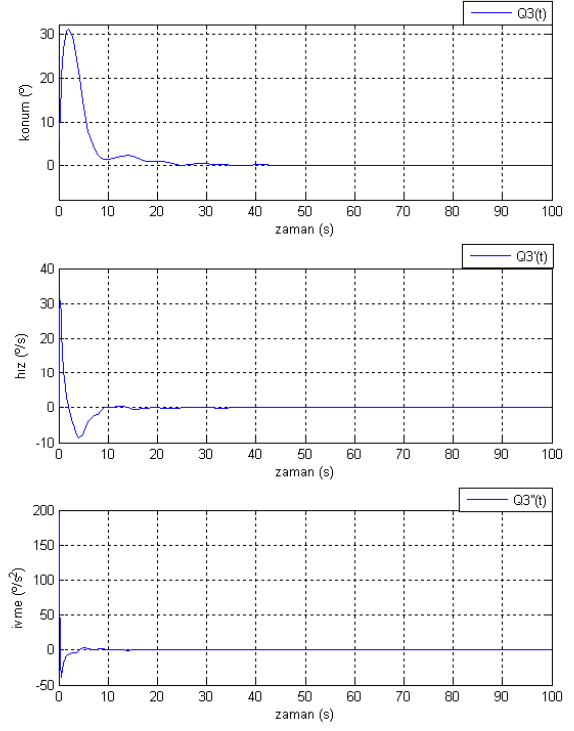
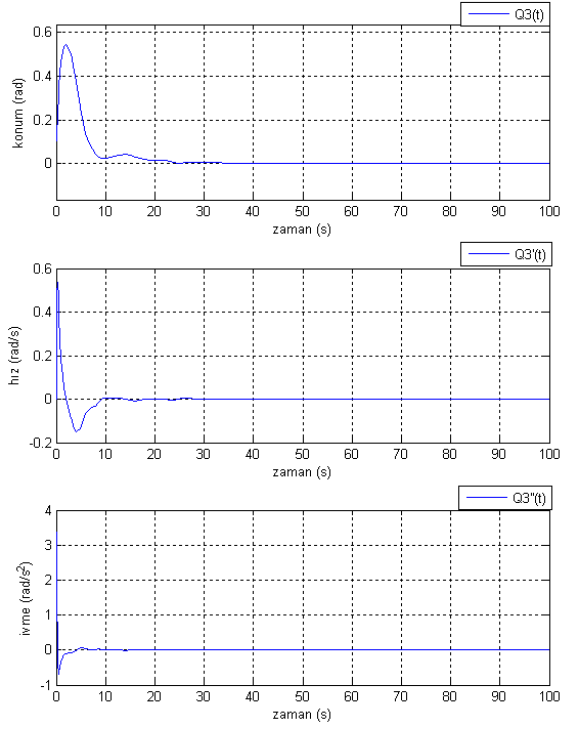
Şekil 9.7  $L$ (halat boyu) değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



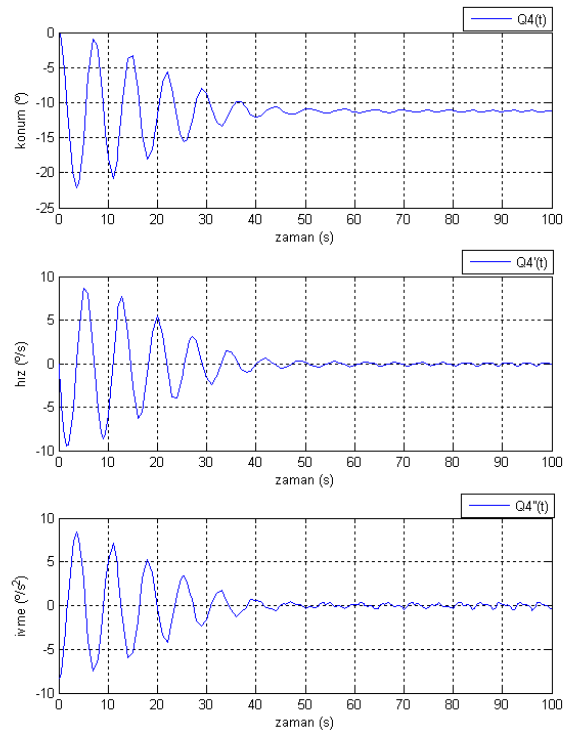
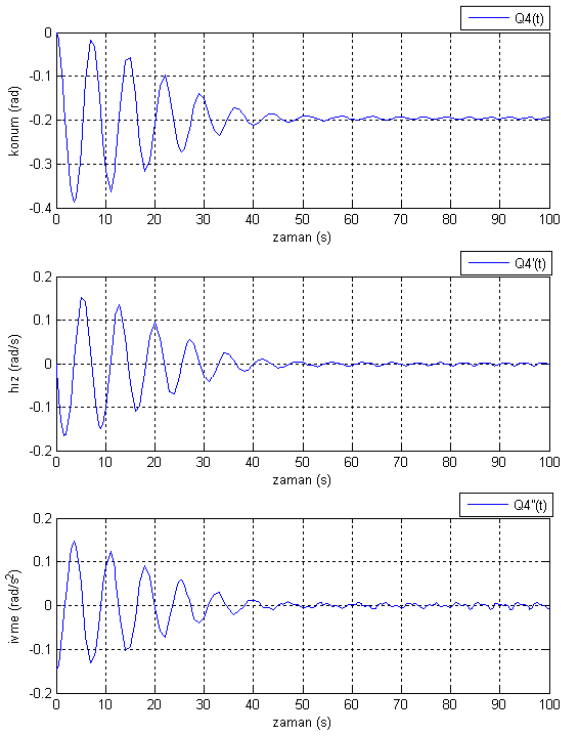
Şekil 9.8  $\theta_1$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



Şekil 9.9  $\theta_2$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



Şekil 9.10  $\theta_3$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



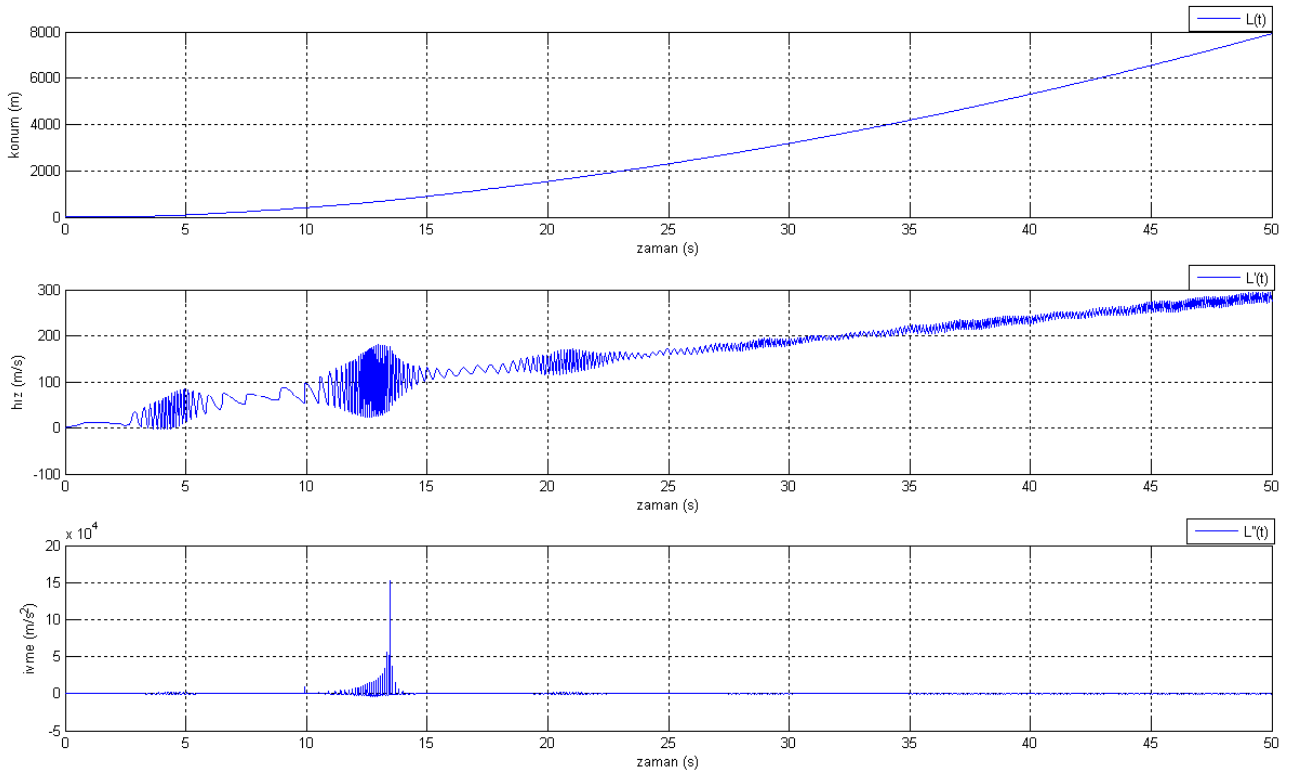
Şekil 9.11  $\theta_4$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



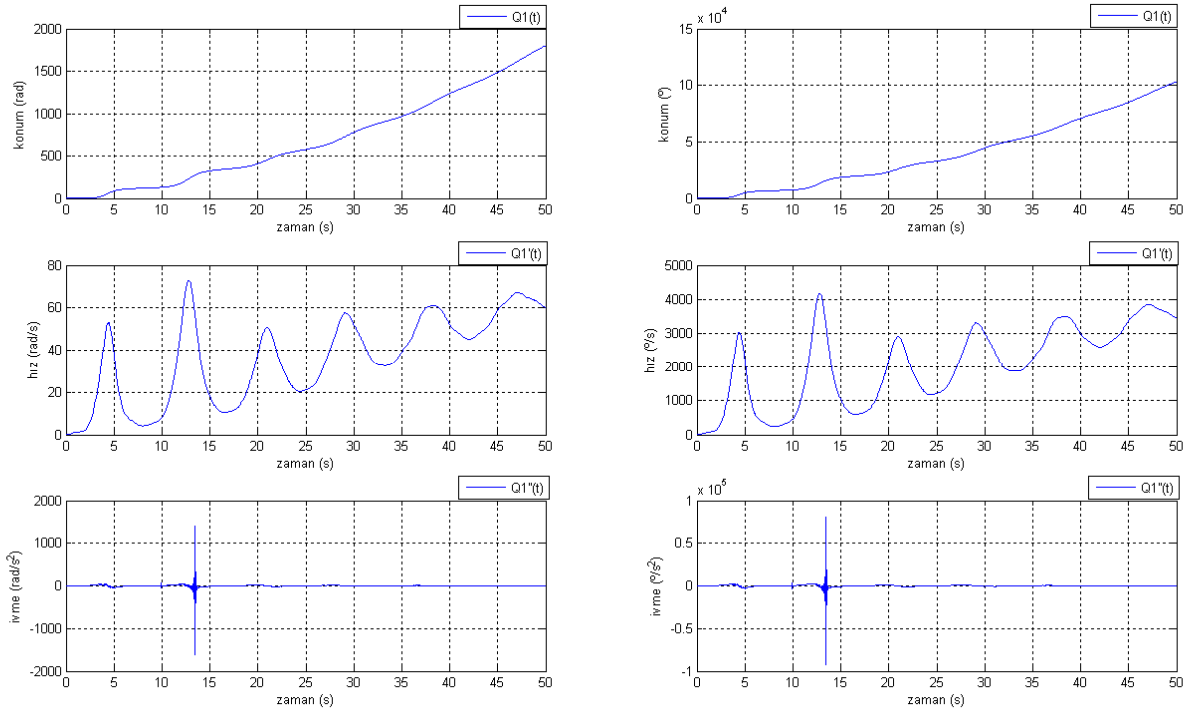
### 3.Durum başlangıç koşulları,

$m_1$	: 100	(kg)
$m_2$	: 2500	(kg)
$R$	: 46	(m)
$\alpha$	: 0,08	(rad)
$\beta$	: 170	(°)
$g$	: 9,81	(m/s <sup>2</sup> )
$K$	: 1750000	(kg.m <sup>2</sup> /rad.s <sup>2</sup> )
$F$	: $m_1.g$	(kg.m/s <sup>2</sup> )
$M$	: 30000	(kg.m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )

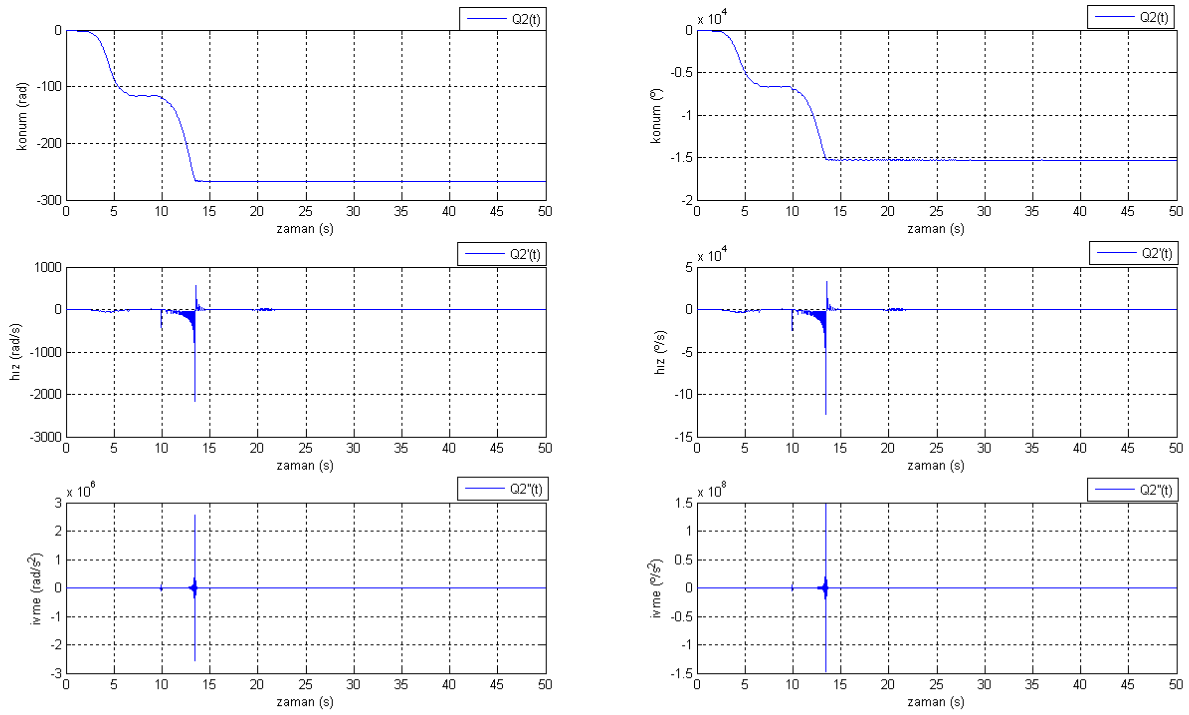
şeklinde olduğunda dinamik davranış grafikleri aşağıda incelenmiştir;



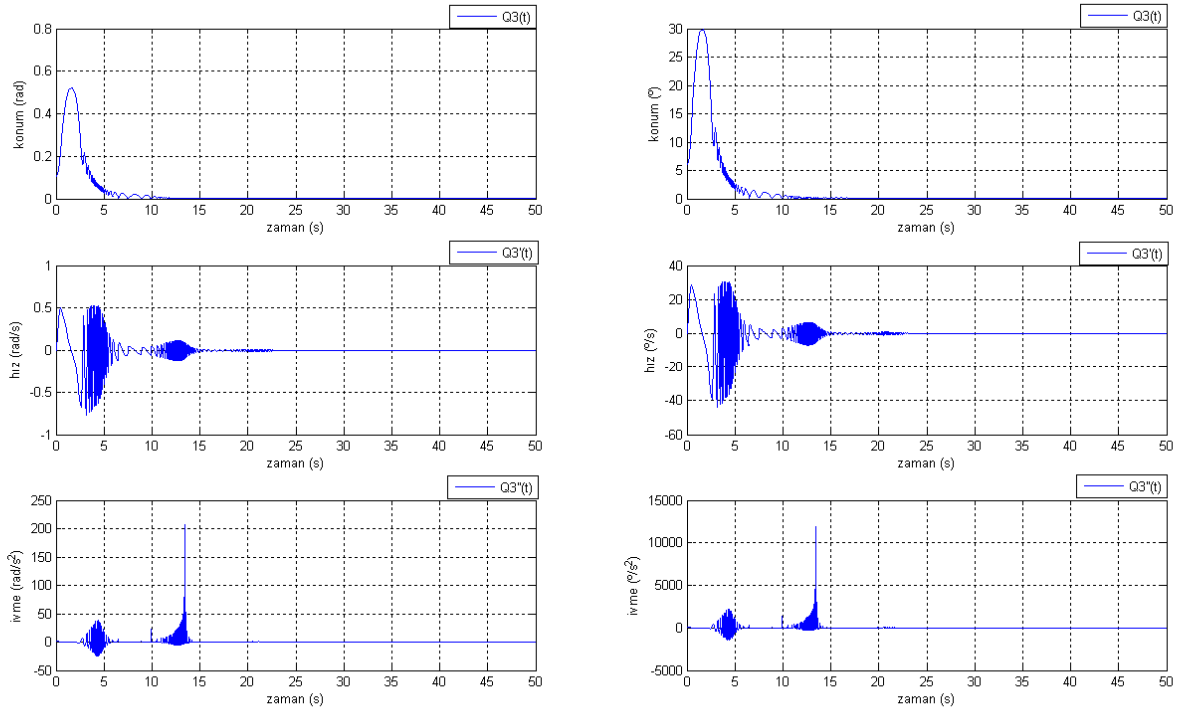
Şekil 9.12  $L$ (halat boyu) değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



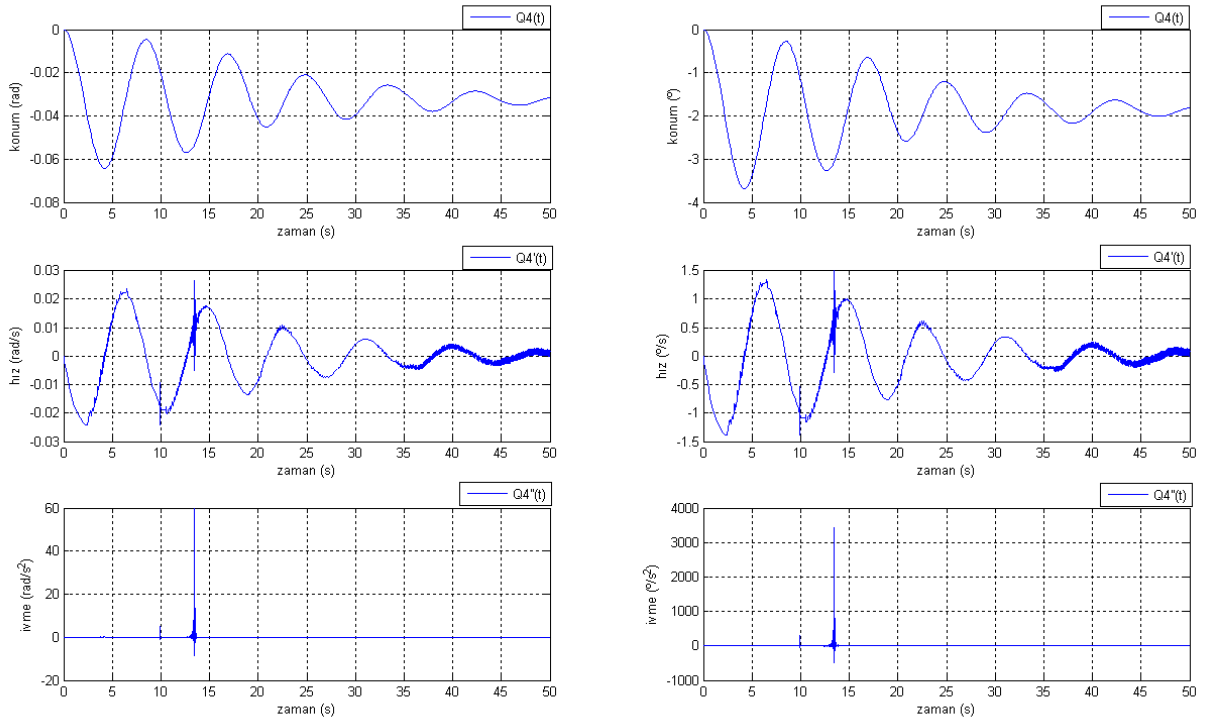
Şekil 9.13  $\theta_1$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



Şekil 9.14  $\theta_2$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



Şekil 9.15  $\theta_3$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



Şekil 9.16  $\theta_4$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri

#### 4.Durum başlangıç koşulları,

$$m_1 : 100 \quad (\text{kg})$$

$$m_2 : 2500 \quad (\text{kg})$$

$$R : 46 \quad (\text{m})$$

$$\alpha : 0,08 \quad (\text{rad})$$

$$\beta : 170 \quad (^\circ)$$

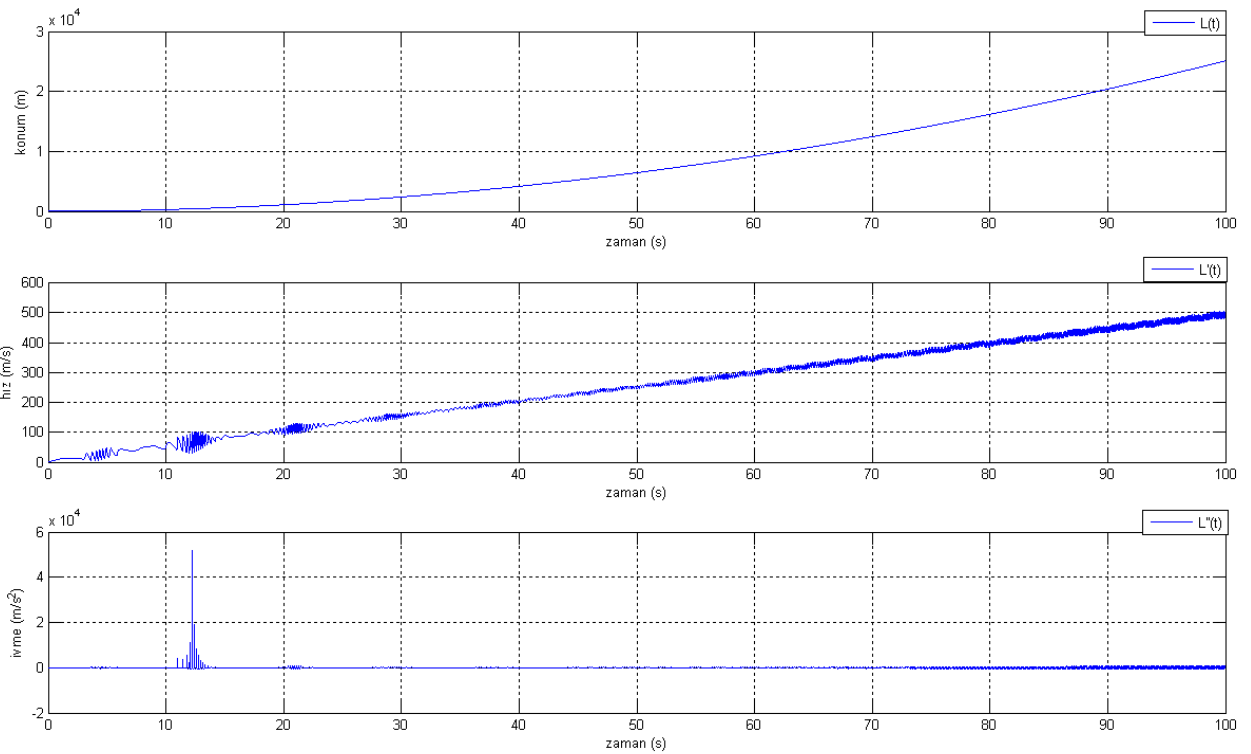
$$g : 9,81 \quad (\text{m/s}^2)$$

$$K : 1750000 \quad (\text{kg.m}^2/\text{rad.s}^2)$$

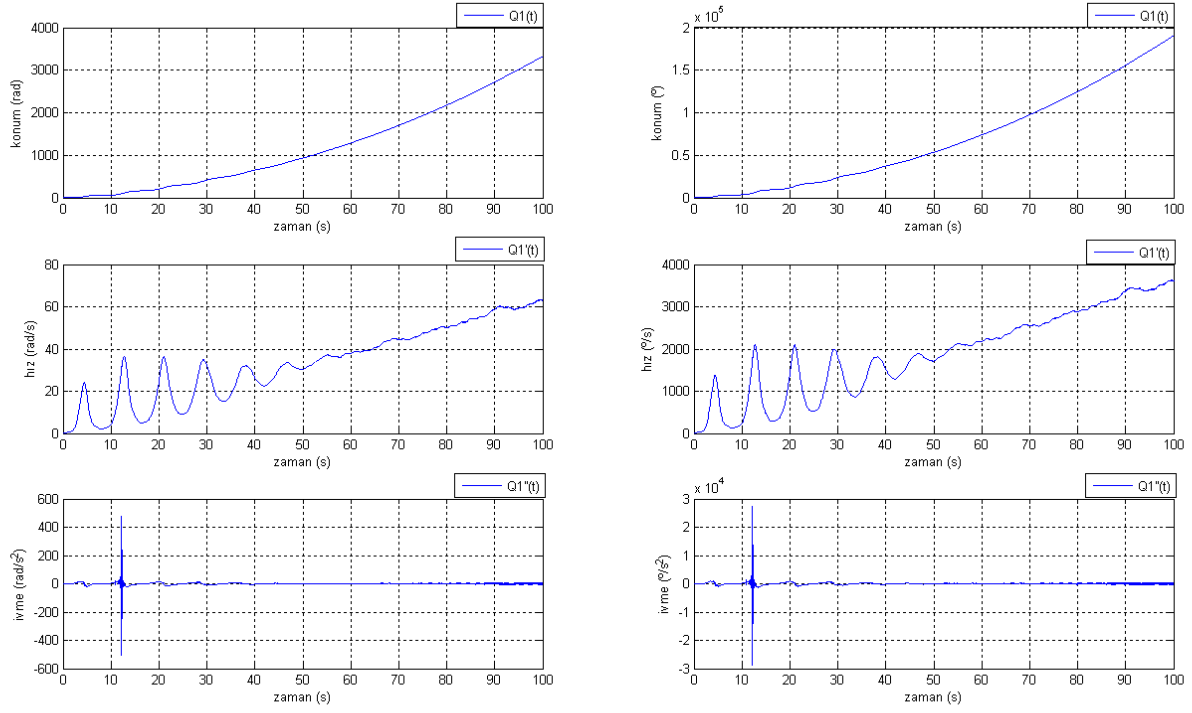
$$F : m_1.g \quad (\text{kg.m/s}^2)$$

$$M : 15000 \quad (\text{kg.m}^2/\text{s}^2)$$

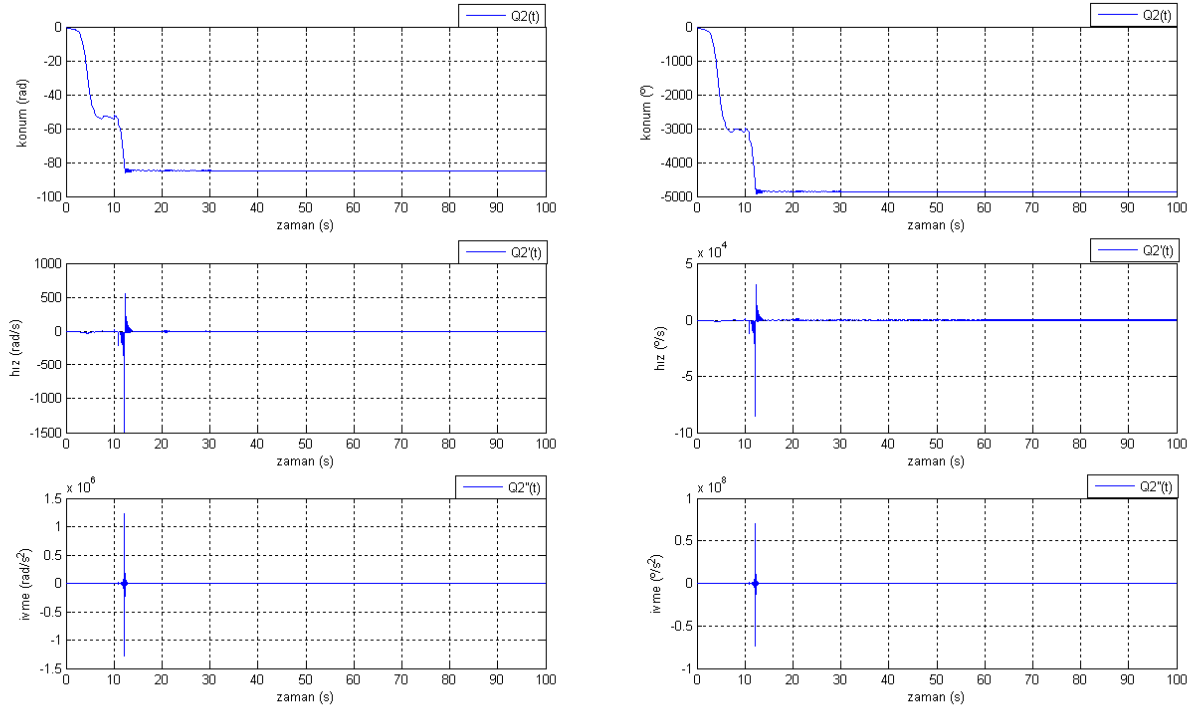
şeklinde olduğunda dinamik davranış grafikleri aşağıda incelenmiştir;



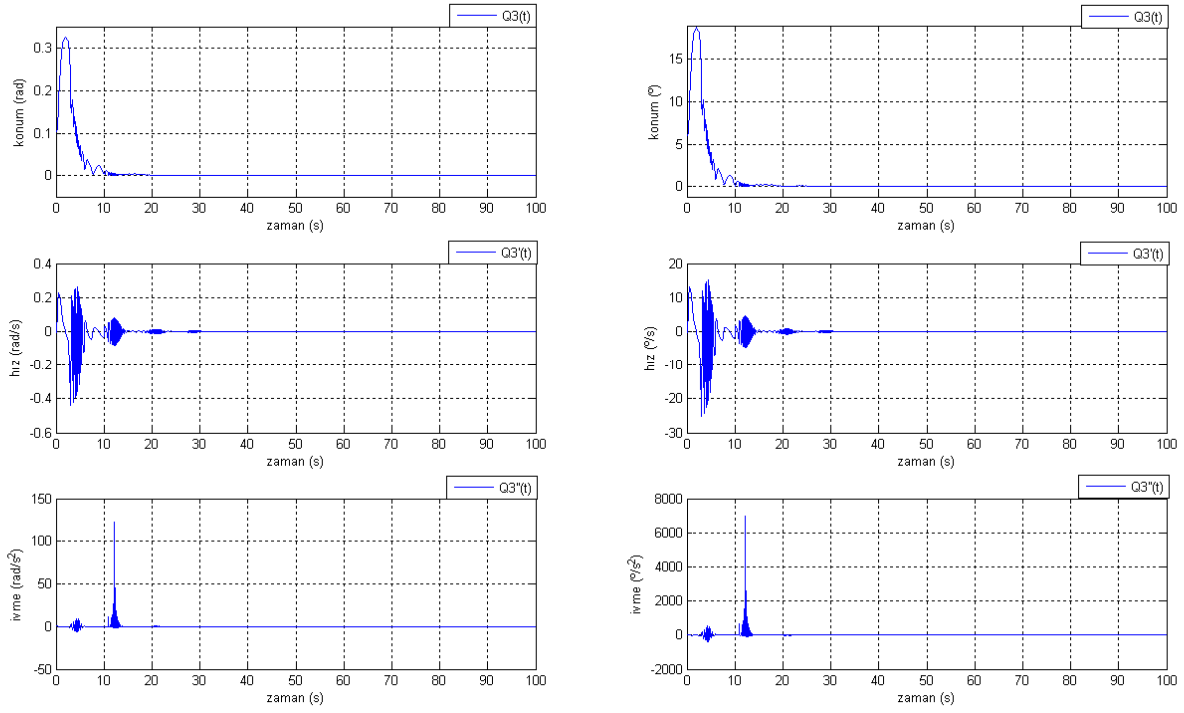
Şekil 9.17  $L$ (halat boyu) değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



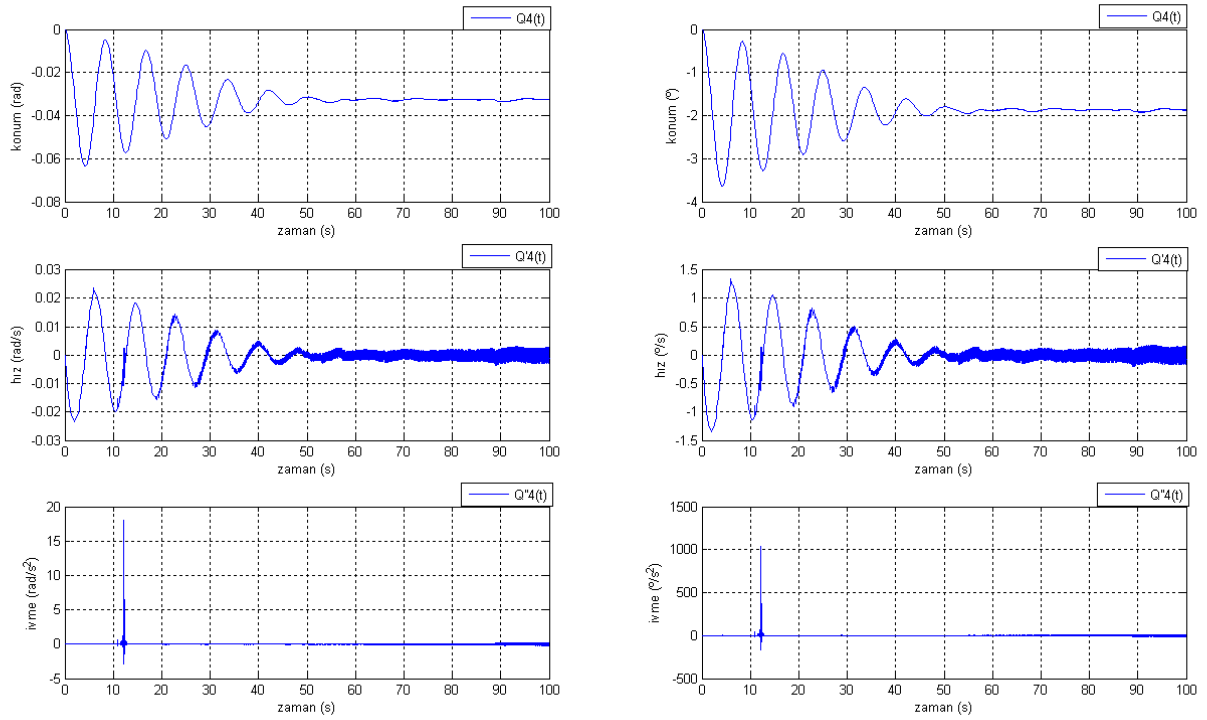
Şekil 9.18  $\theta_1$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



Şekil 9.19  $\theta_2$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



Şekil 9.20  $\theta_3$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri

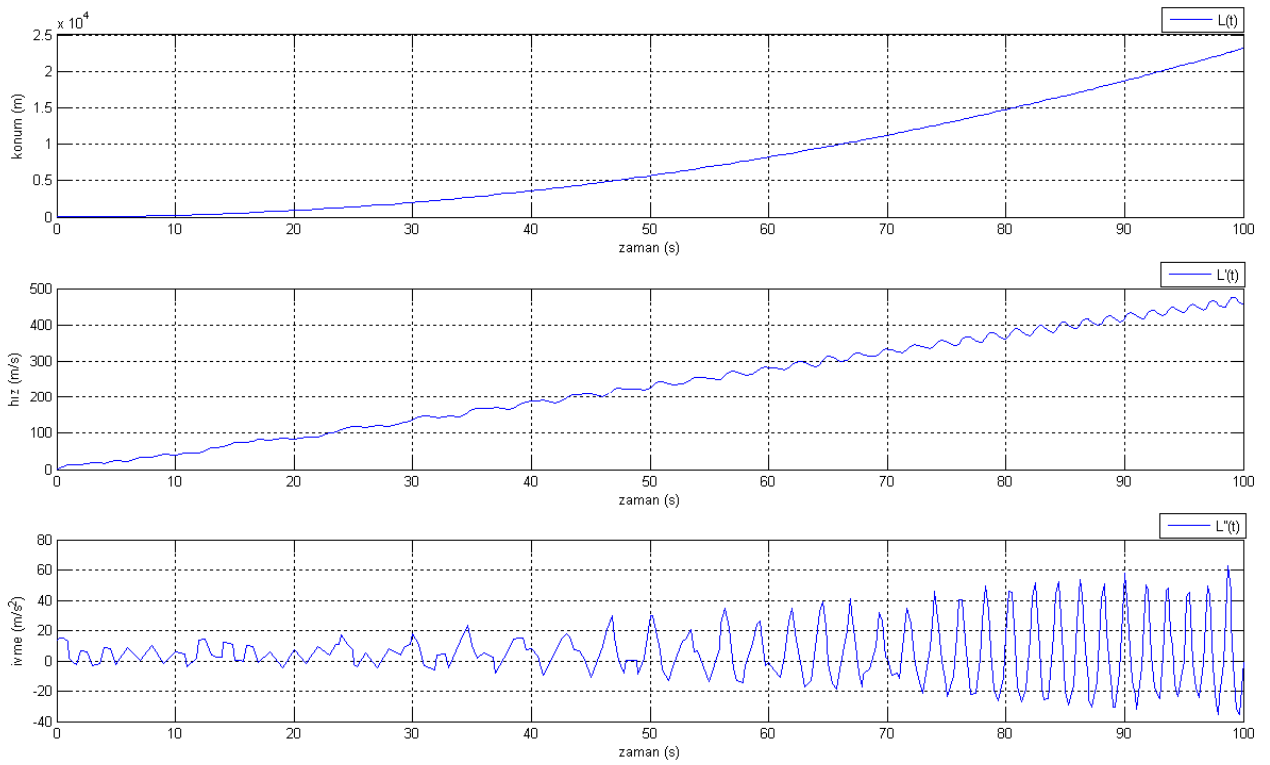


Şekil 9.21  $\theta_4$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri

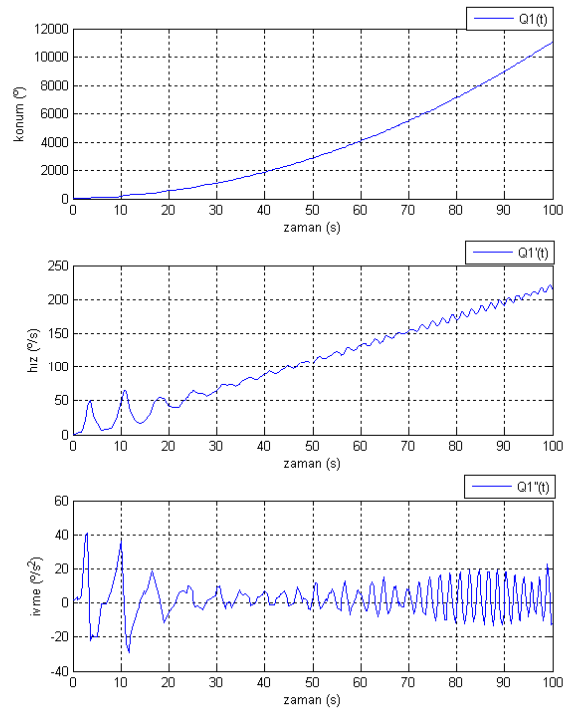
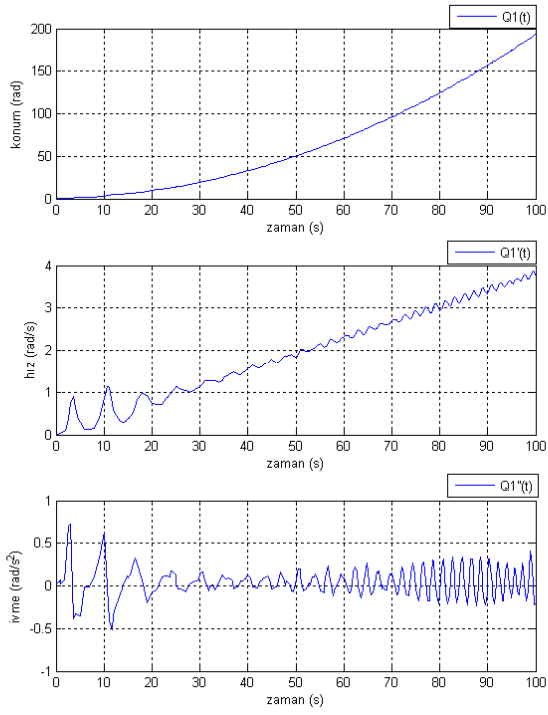
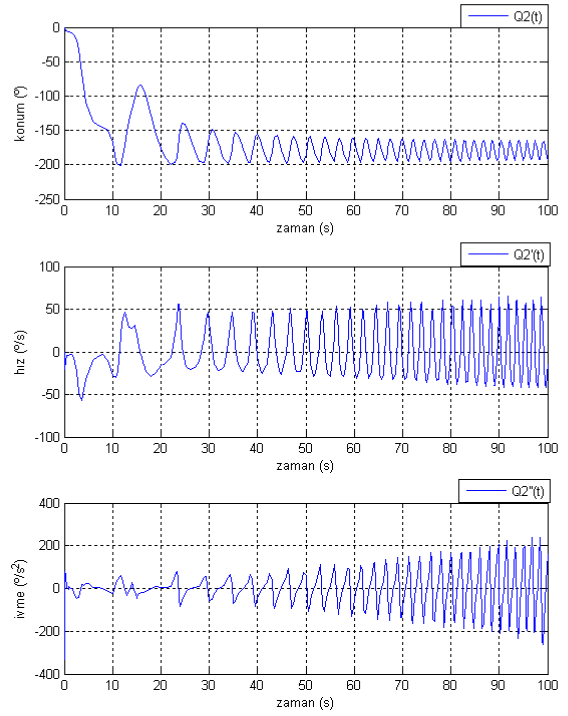
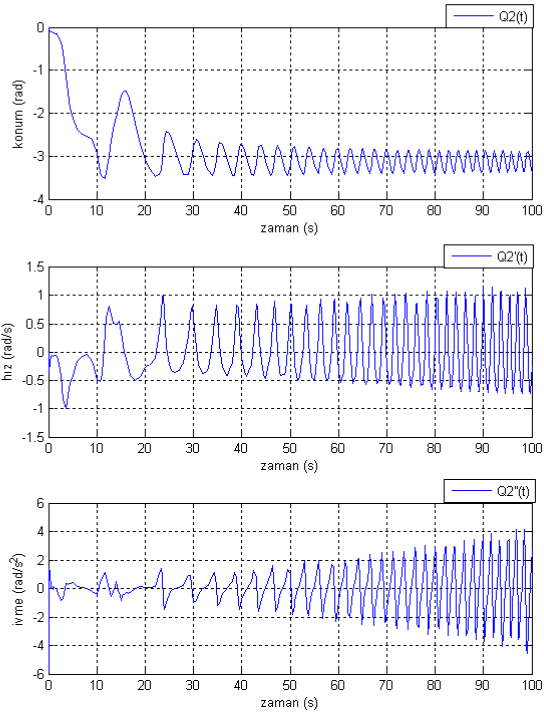
### 5.Durum başlangıç koşulları,

$m_1$	: 350	(kg)
$m_2$	: 2500	(kg)
R	: 38	(m)
$\alpha$	: 0,55	(rad)
$\beta$	: 110	(°)
g	: 9,81	(m/s <sup>2</sup> )
K	: 1750000	(kg.m <sup>2</sup> /rad.s <sup>2</sup> )
F	: $m_1.g$	(kg.m/s <sup>2</sup> )
M	: 30000	(kg.m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )

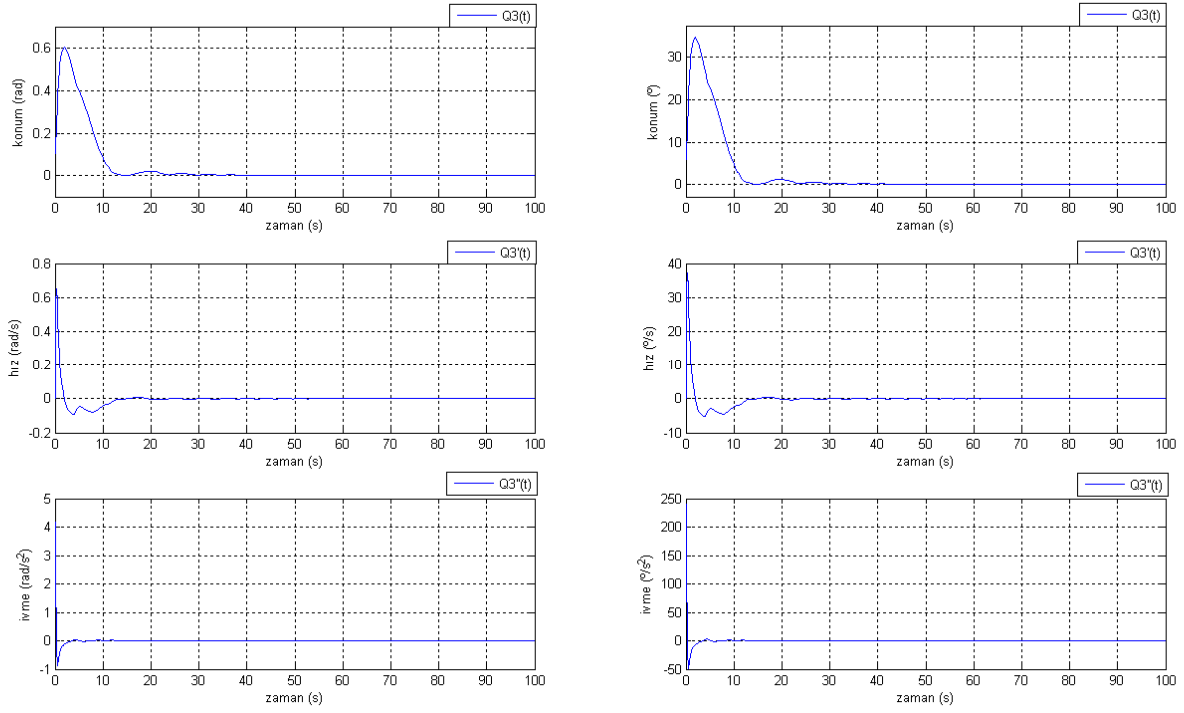
şeklinde olduğunda dinamik davranış grafikleri aşağıda incelenmiştir;



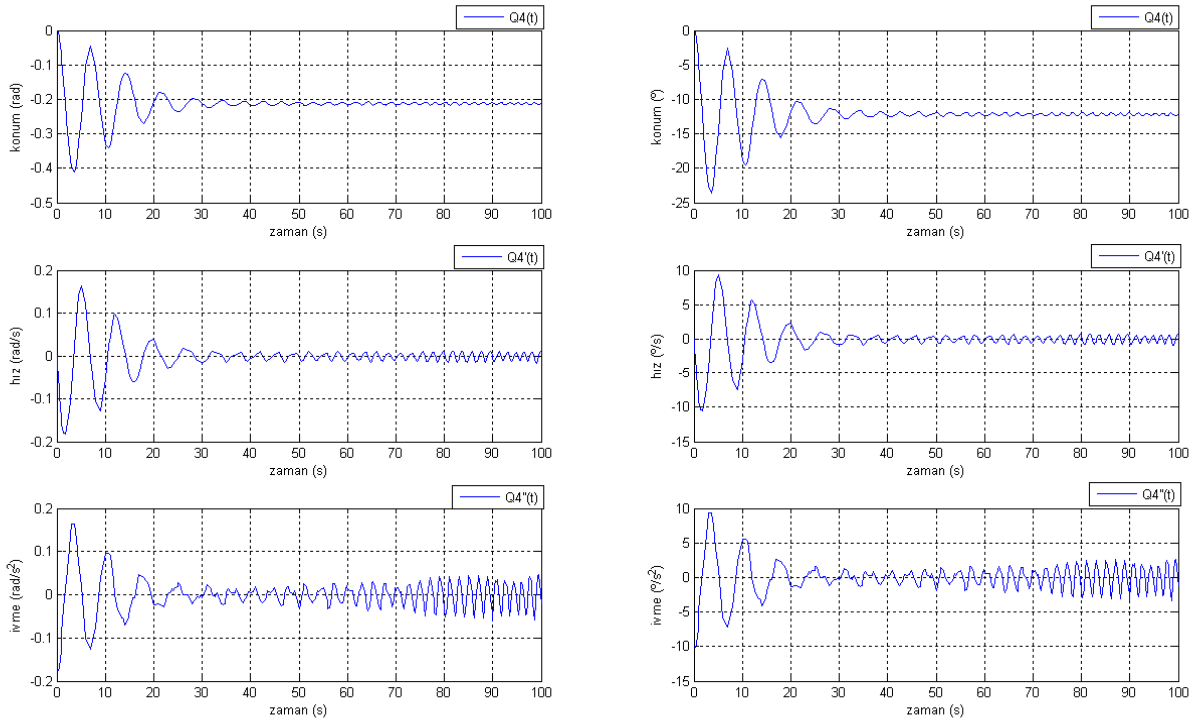
Şekil 9.22  $L$ (halat boyu) değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri

Şekil 9.23  $\theta_1$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleriŞekil 9.24  $\theta_2$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri





Şekil 9.25  $\theta_3$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri

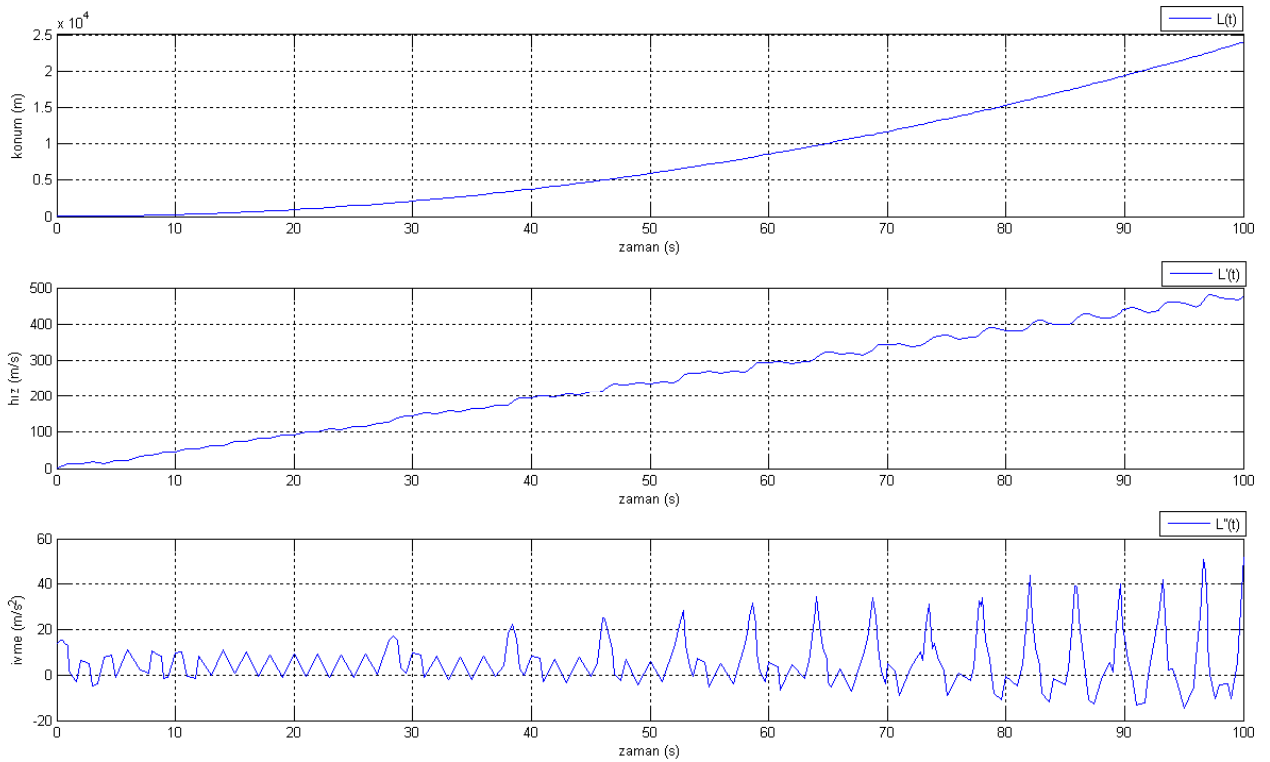


Şekil 9.26  $\theta_4$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri

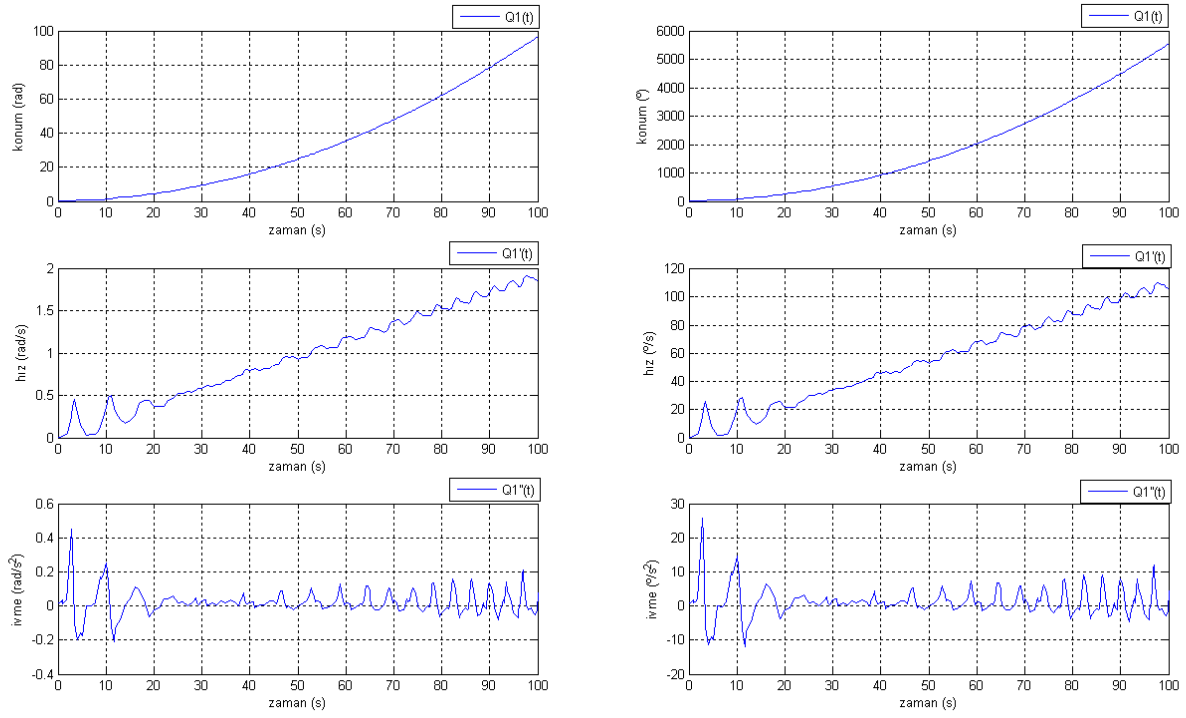
### 6.Durum başlangıç koşulları,

$m_1$	: 350	(kg)
$m_2$	: 2500	(kg)
$R$	: 38	(m)
$\alpha$	: 0,55	(rad)
$\beta$	: 110	(°)
$g$	: 9,81	(m/s <sup>2</sup> )
$K$	: 1750000	(kg.m <sup>2</sup> /rad.s <sup>2</sup> )
$F$	: $m_1.g$	(kg.m/s <sup>2</sup> )
$M$	: 15000	(kg.m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )

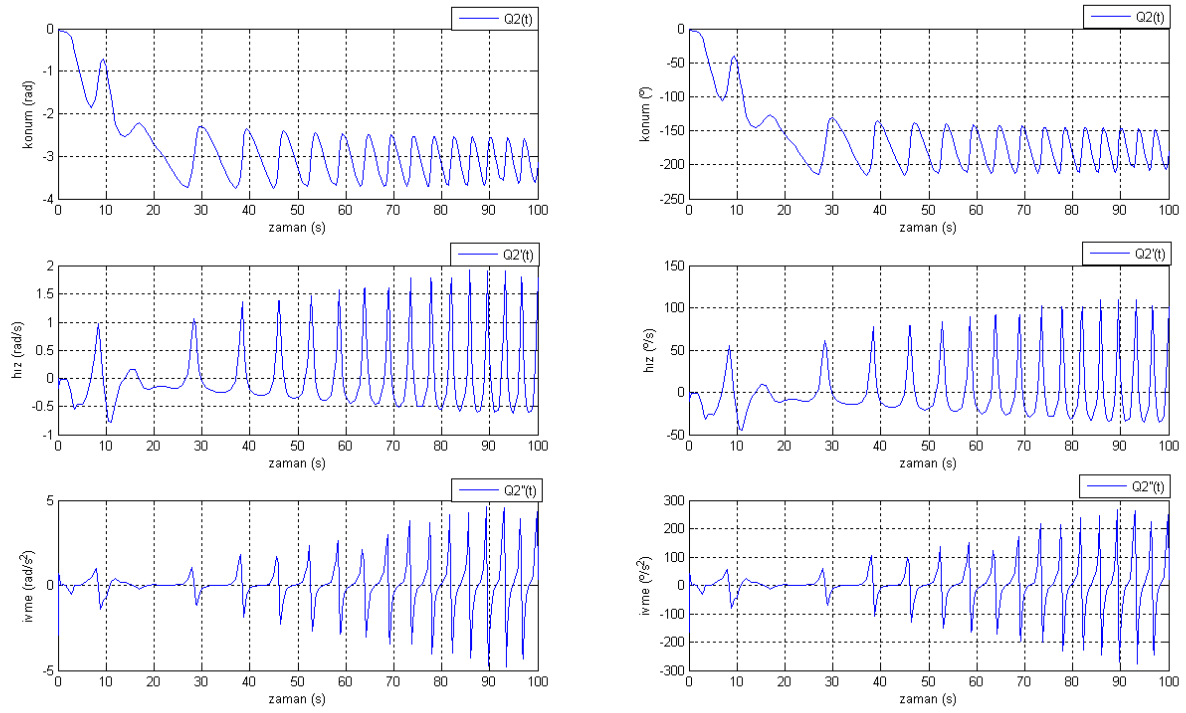
şeklinde olduğunda dinamik davranış grafikleri aşağıda incelenmiştir;



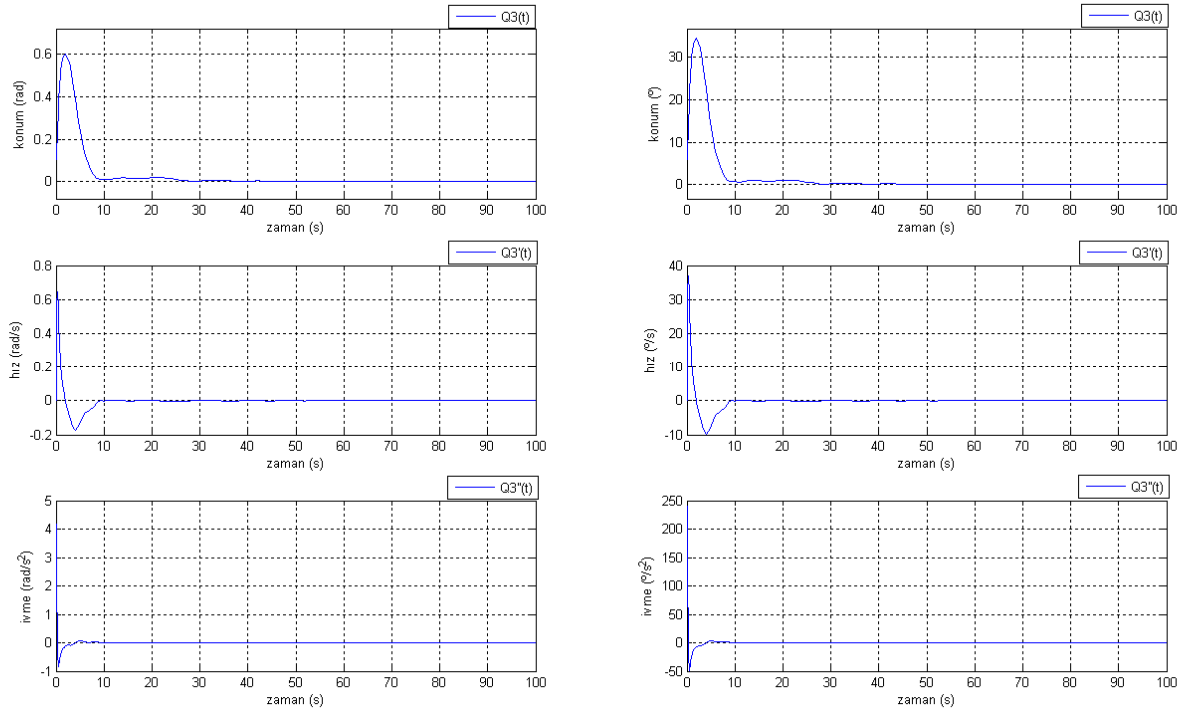
Şekil 9.27  $L$ (halat boyu) değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



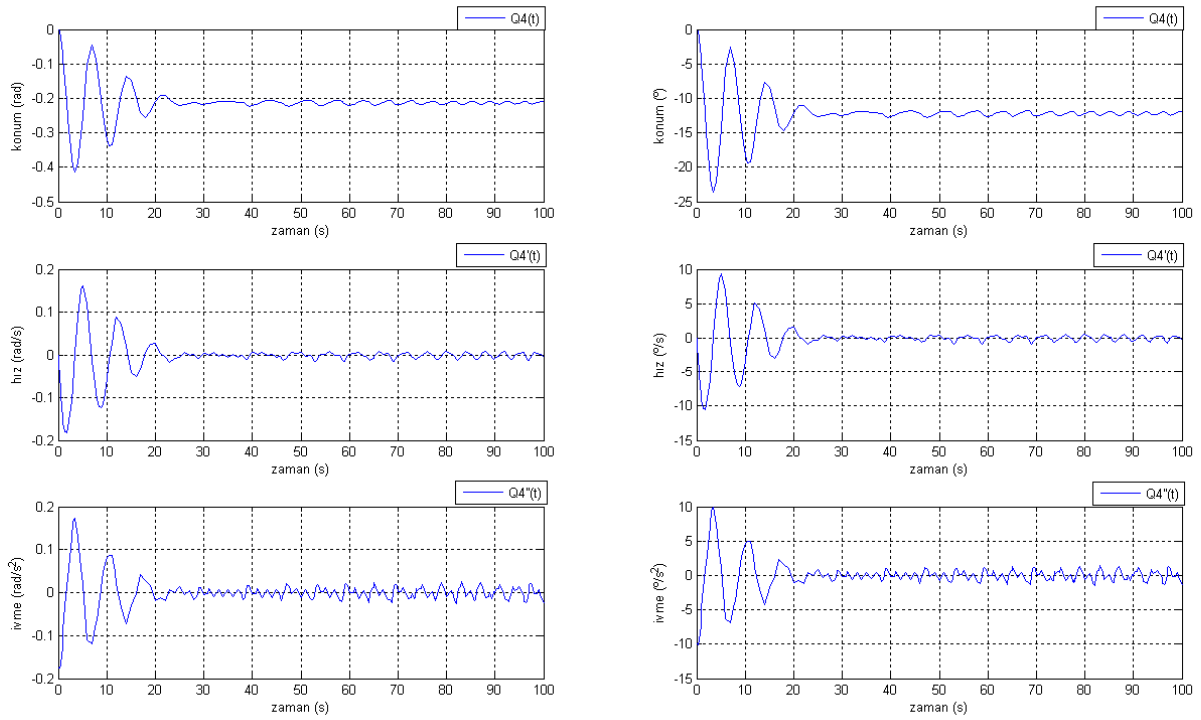
Şekil 9.28  $\theta_1$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



Şekil 9.29  $\theta_2$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



Şekil 9.30  $\theta_3$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri

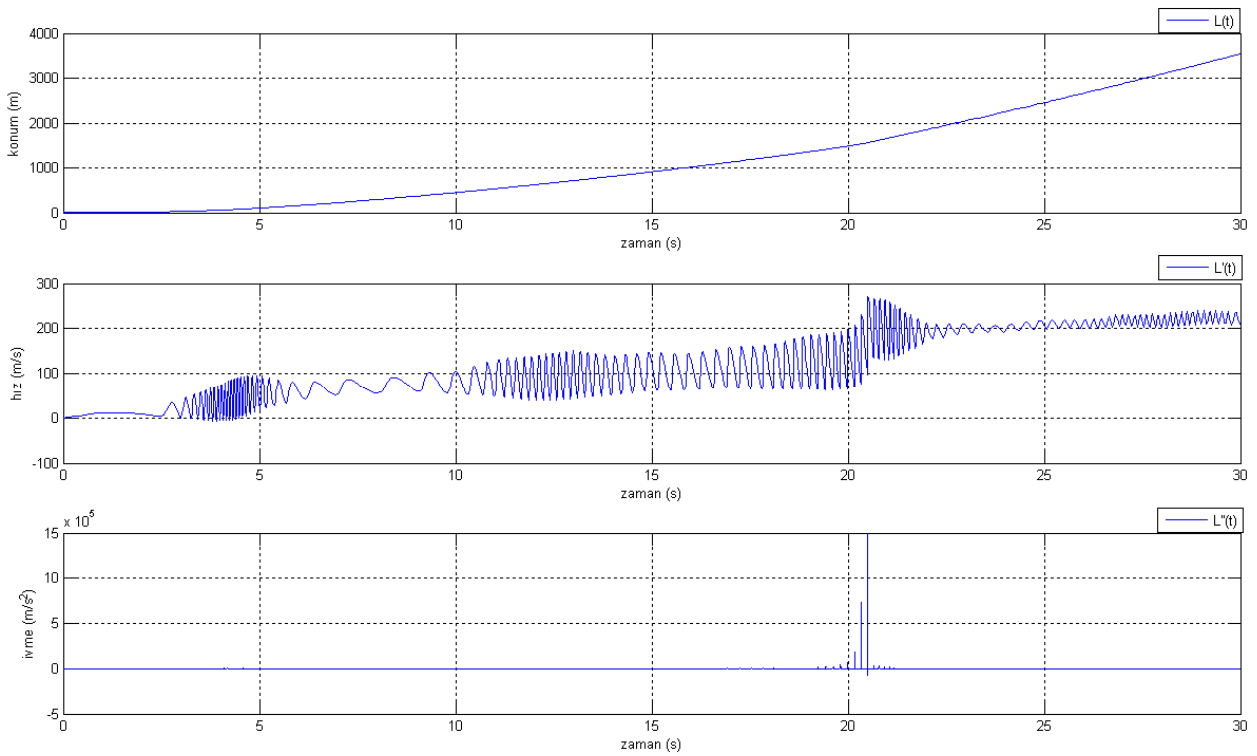


Şekil 9.31  $\theta_4$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri

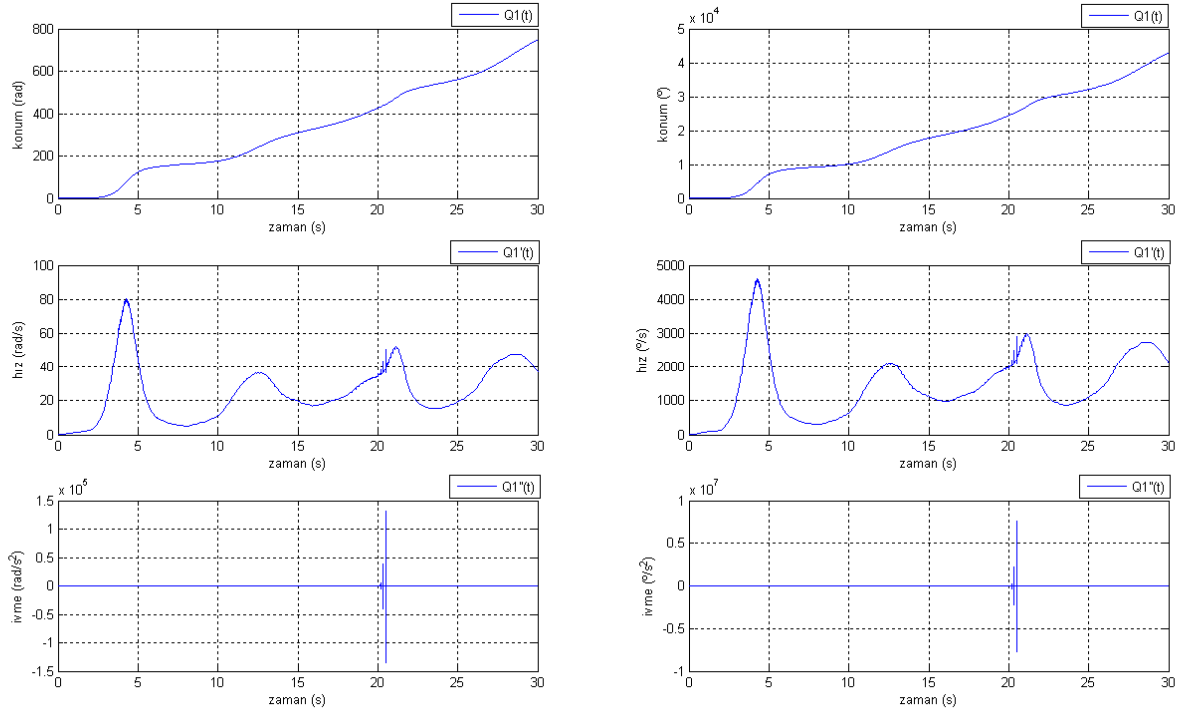
### 7.Durum başlangıç koşulları,

$m_1$	: 350	(kg)
$m_2$	: 2500	(kg)
$R$	: 46	(m)
$\alpha$	: 0,08	(rad)
$\beta$	: 170	(°)
$g$	: 9,81	(m/s <sup>2</sup> )
$K$	: 1750000	(kg.m <sup>2</sup> /rad.s <sup>2</sup> )
$F$	: $m_1.g$	(kg.m/s <sup>2</sup> )
$M$	: 30000	(kg.m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )

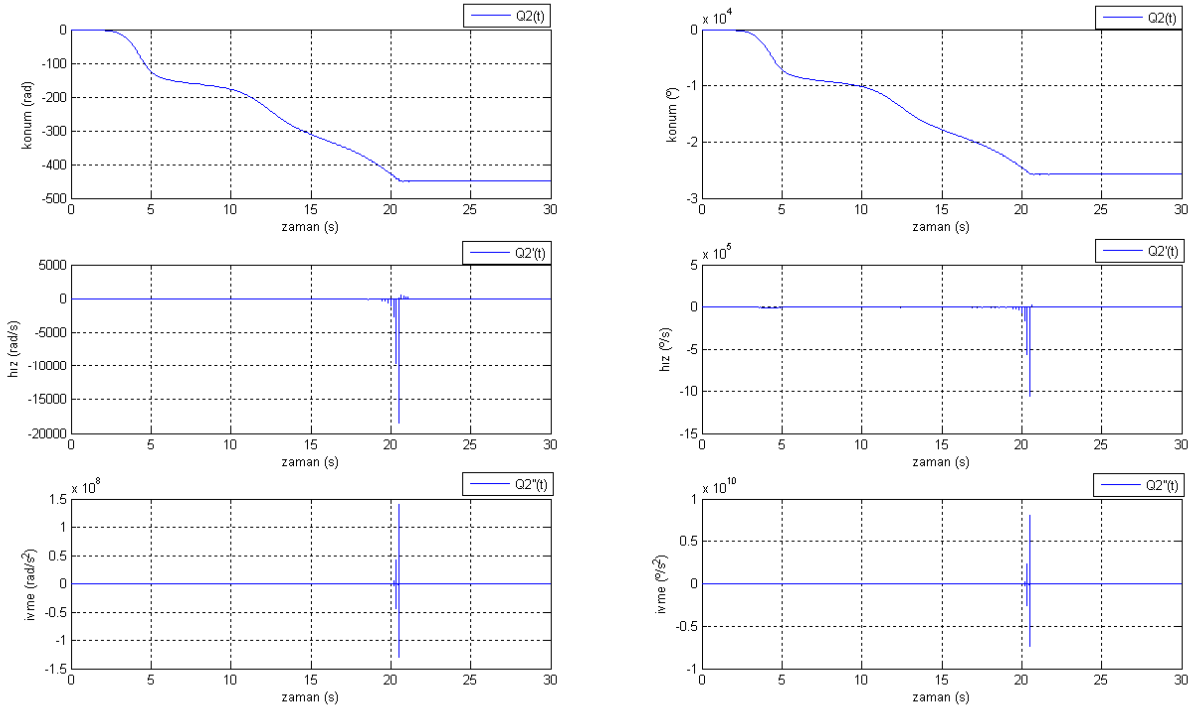
şeklinde olduğunda dinamik davranış grafikleri aşağıda incelenmiştir;



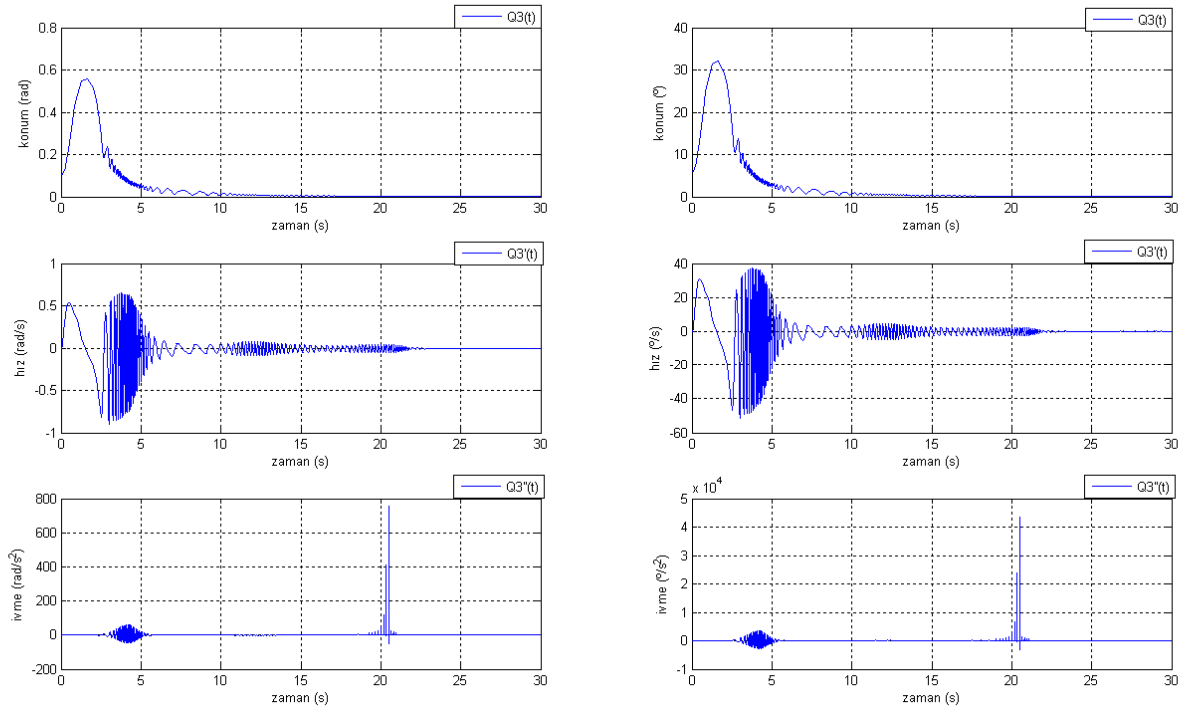
Şekil 9.32  $L$ (halat boyu) değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



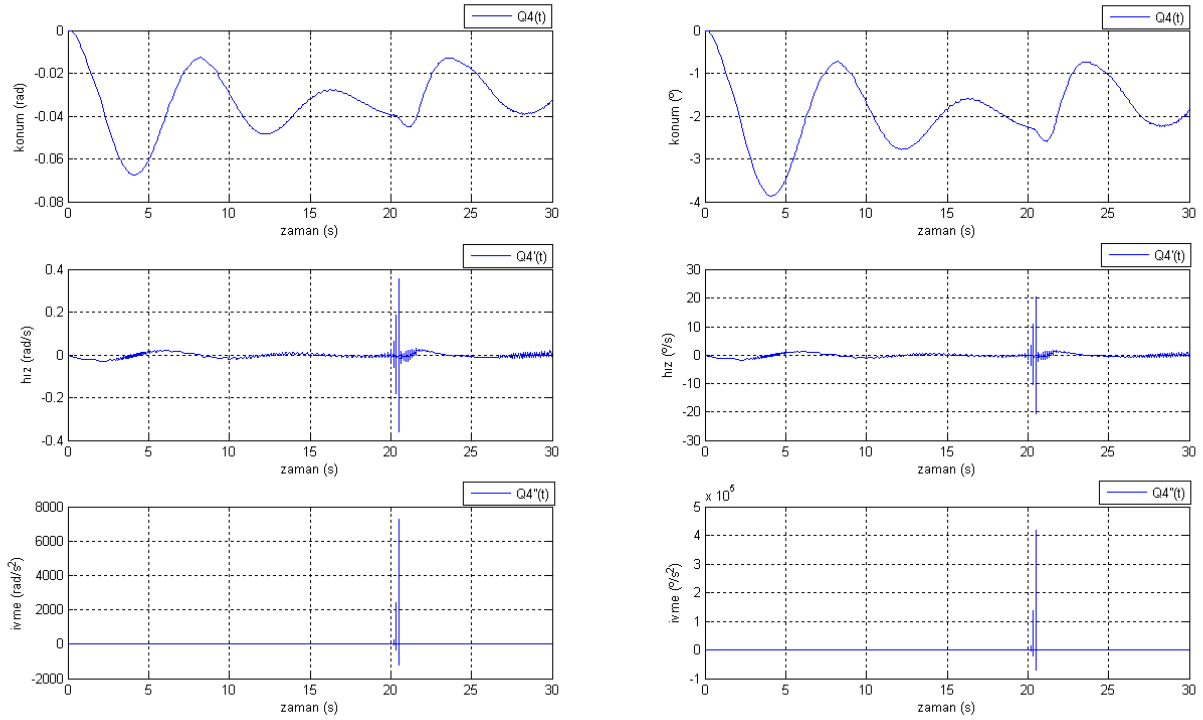
Şekil 9.33  $\theta_1$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



Şekil 9.34  $\theta_2$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



Şekil 9.35  $\theta_3$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri

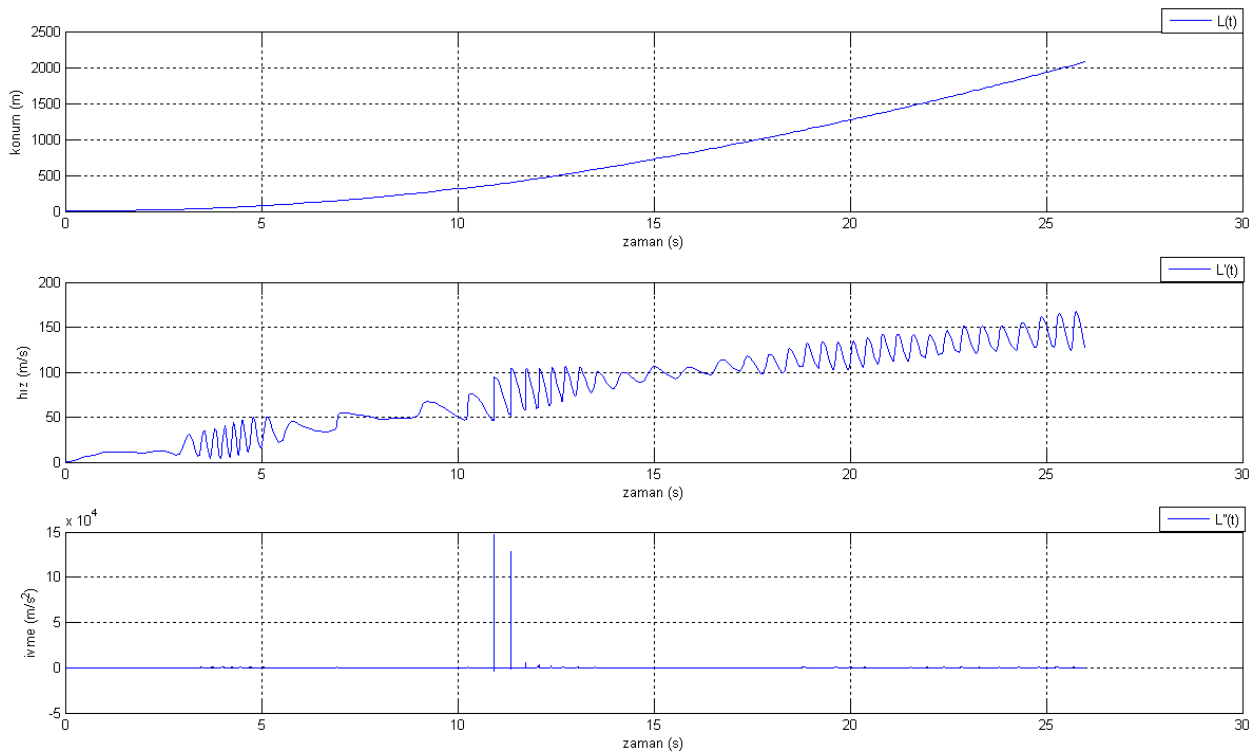


Şekil 9.36  $\theta_4$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri

### 8.Durum başlangıç koşulları,

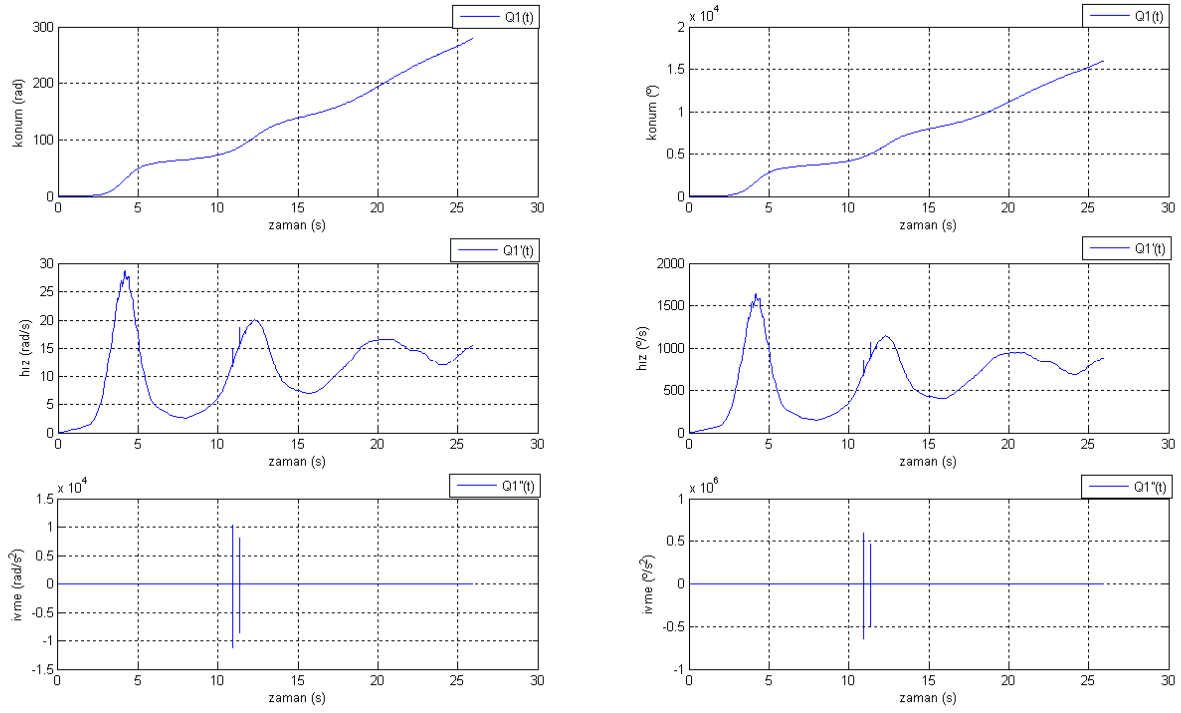
$m_1$	: 350	(kg)
$m_2$	: 2500	(kg)
$R$	: 46	(m)
$\alpha$	: 0,08	(rad)
$\beta$	: 170	(°)
$g$	: 9,81	(m/s <sup>2</sup> )
$K$	: 1750000	(kg.m <sup>2</sup> /rad.s <sup>2</sup> )
$F$	: $m_1.g$	(kg.m/s <sup>2</sup> )
$M$	: 15000	(kg.m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )

şeklinde olduğunda dinamik davranış grafikleri aşağıda incelenmiştir;

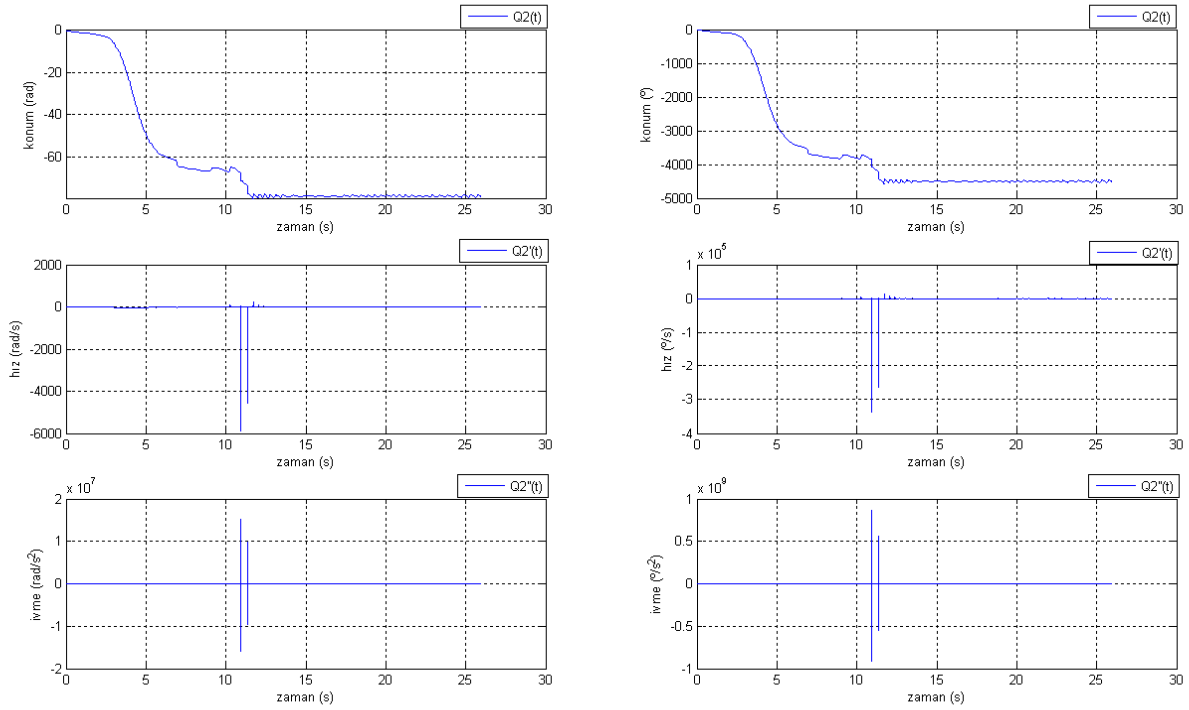


Şekil 9.37  $L$ (halat boyu) değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri

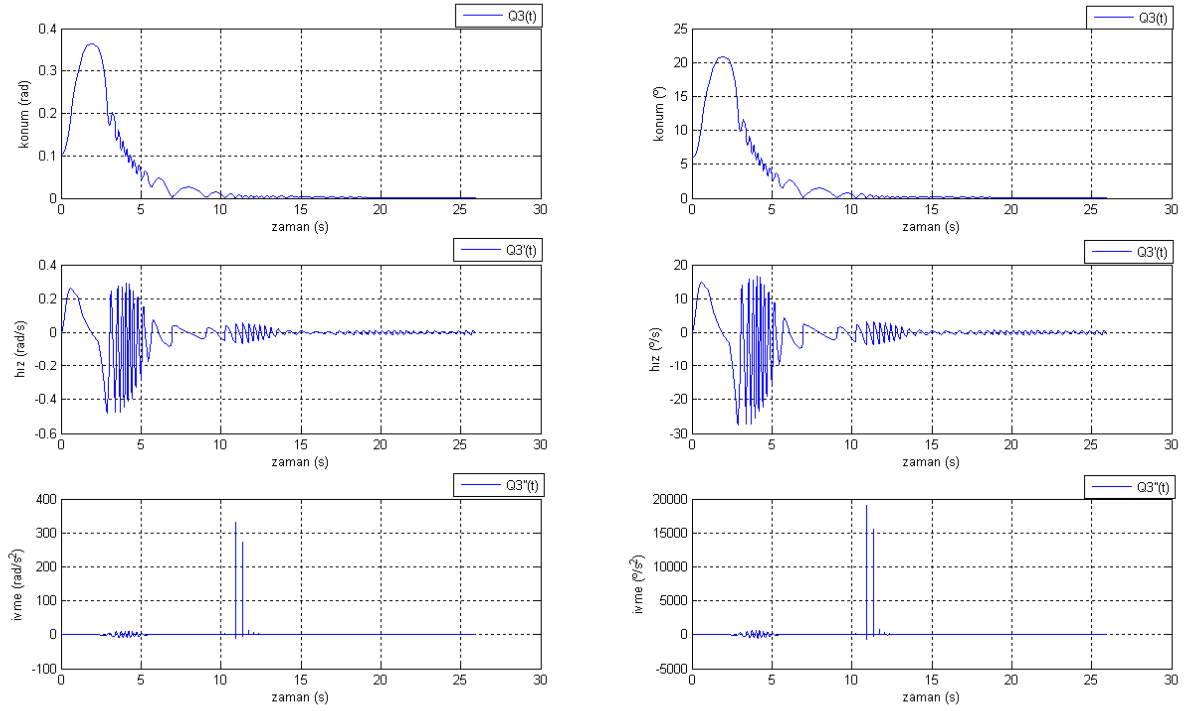




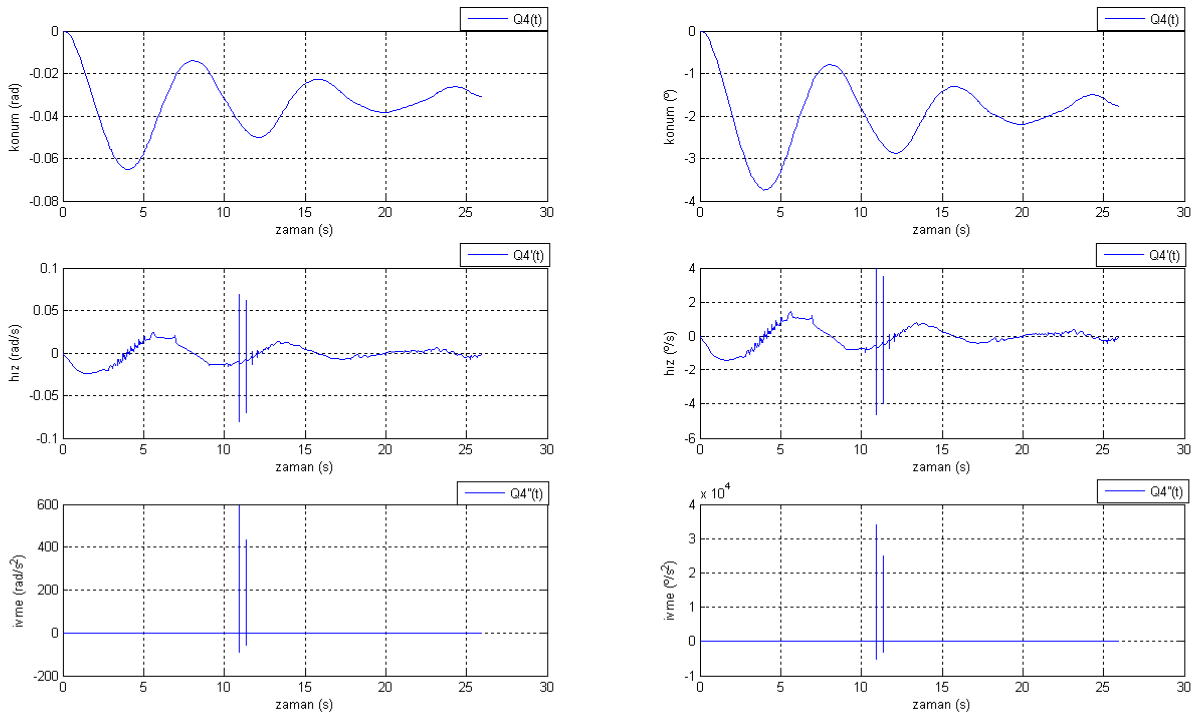
Şekil 9.38  $\theta_1$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



Şekil 9.39  $\theta_2$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



Şekil 9.40  $\theta_3$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



Şekil 9.41  $\theta_4$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri

### 9.Durum başlangıç koşulları,

$$m_1 : 100 \quad (\text{kg})$$

$$m_2 : 2500 \quad (\text{kg})$$

$$R : 46 \quad (\text{m})$$

$$\alpha : 0,08 \quad (\text{rad})$$

$$\beta : 170 \quad (^\circ)$$

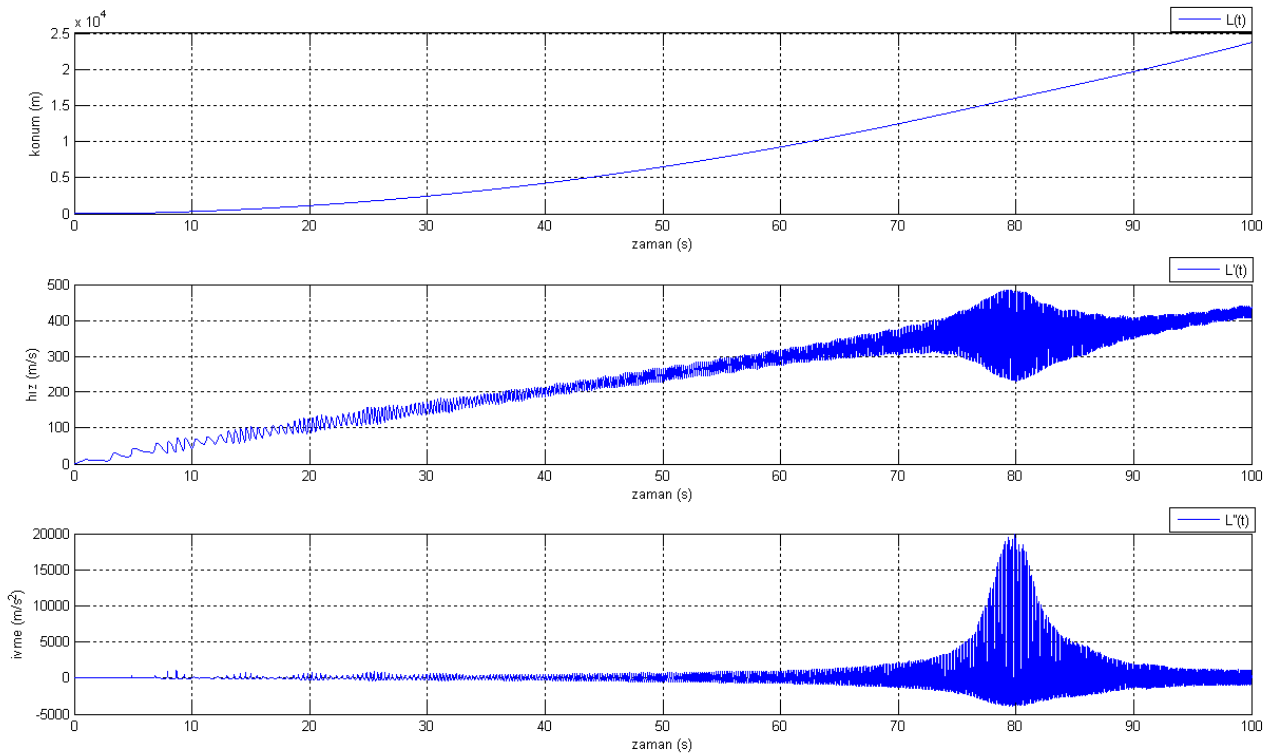
$$g : 9,81 \quad (\text{m/s}^2)$$

$$K : 5225000 \quad (\text{kg.m}^2/\text{rad.s}^2)$$

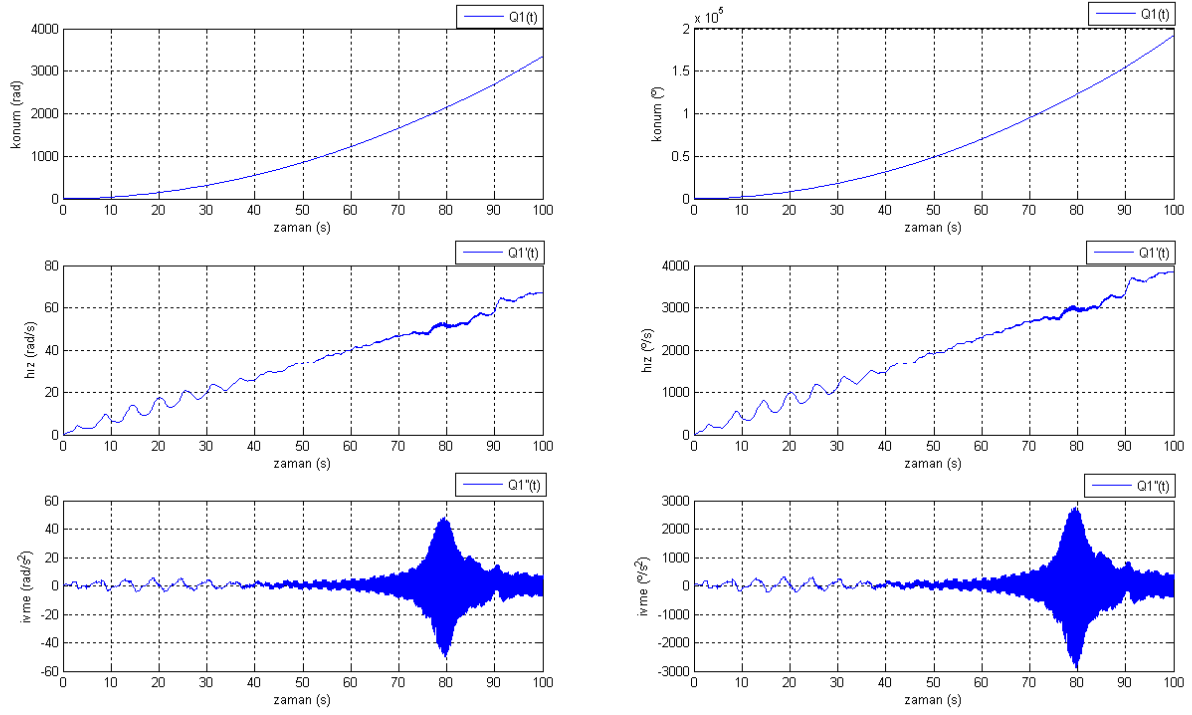
$$F : m_1.g \quad (\text{kg.m/s}^2)$$

$$M : 30000 \quad (\text{kg.m}^2/\text{s}^2)$$

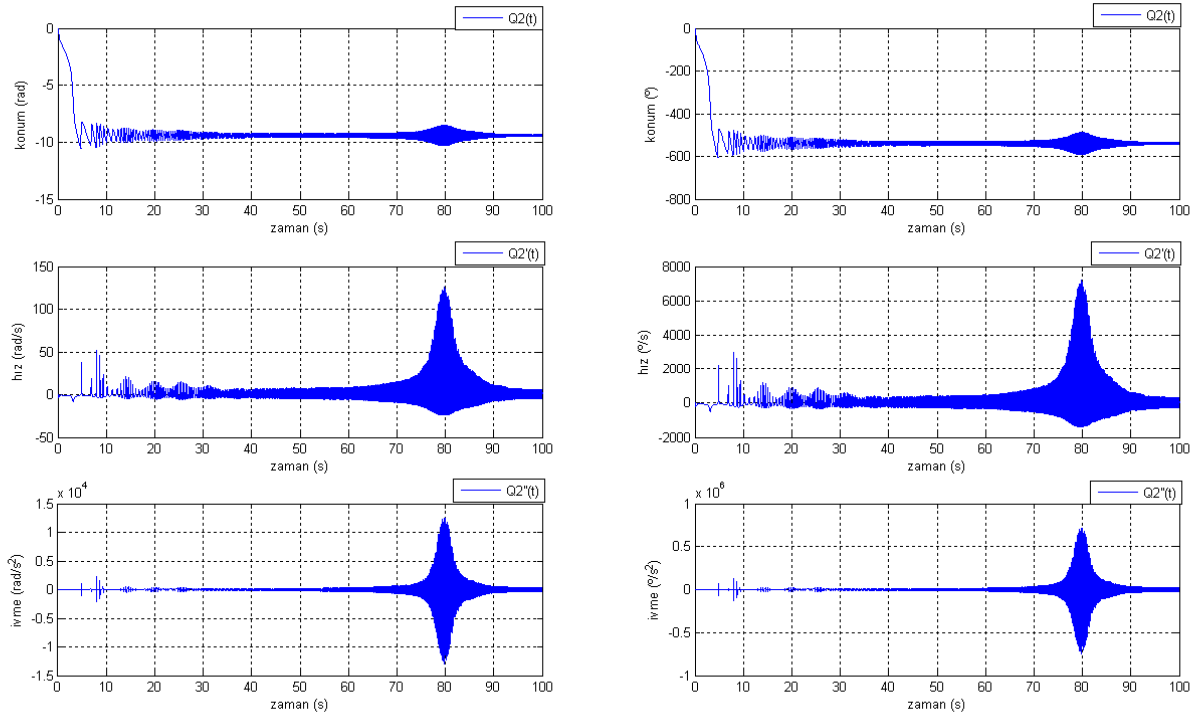
şeklinde olduğunda dinamik davranış grafikleri aşağıda incelenmiştir;



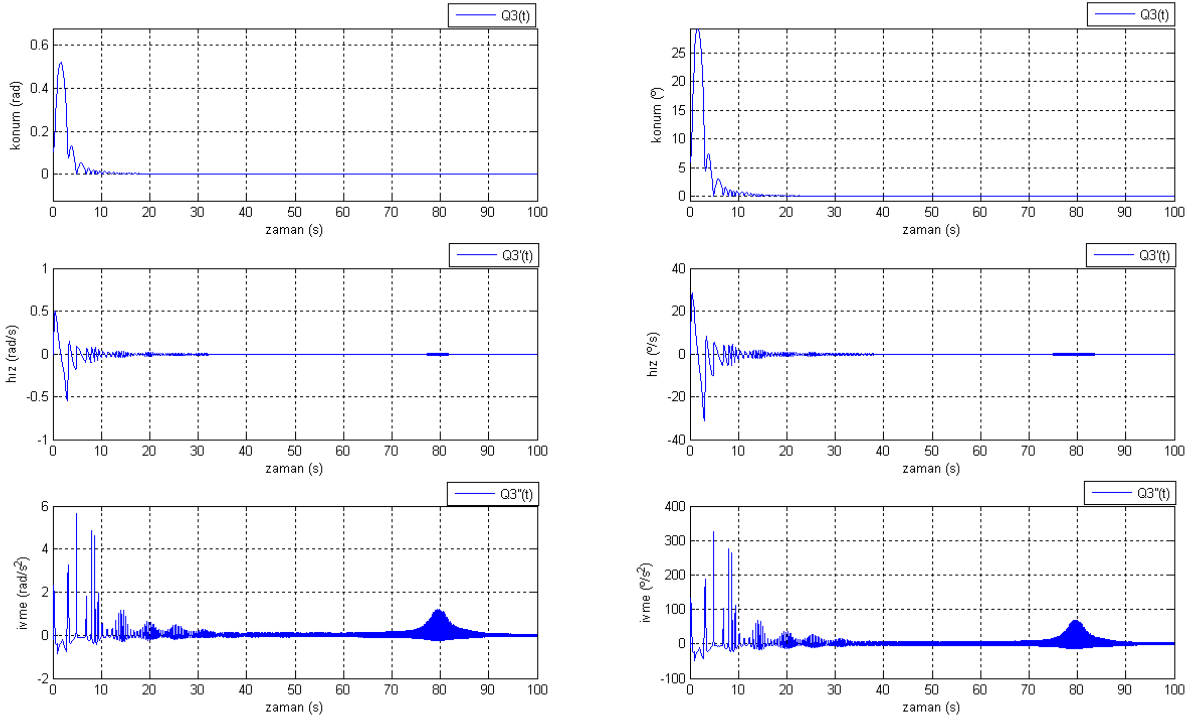
Şekil 9.42  $L$ (halat boyu) değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



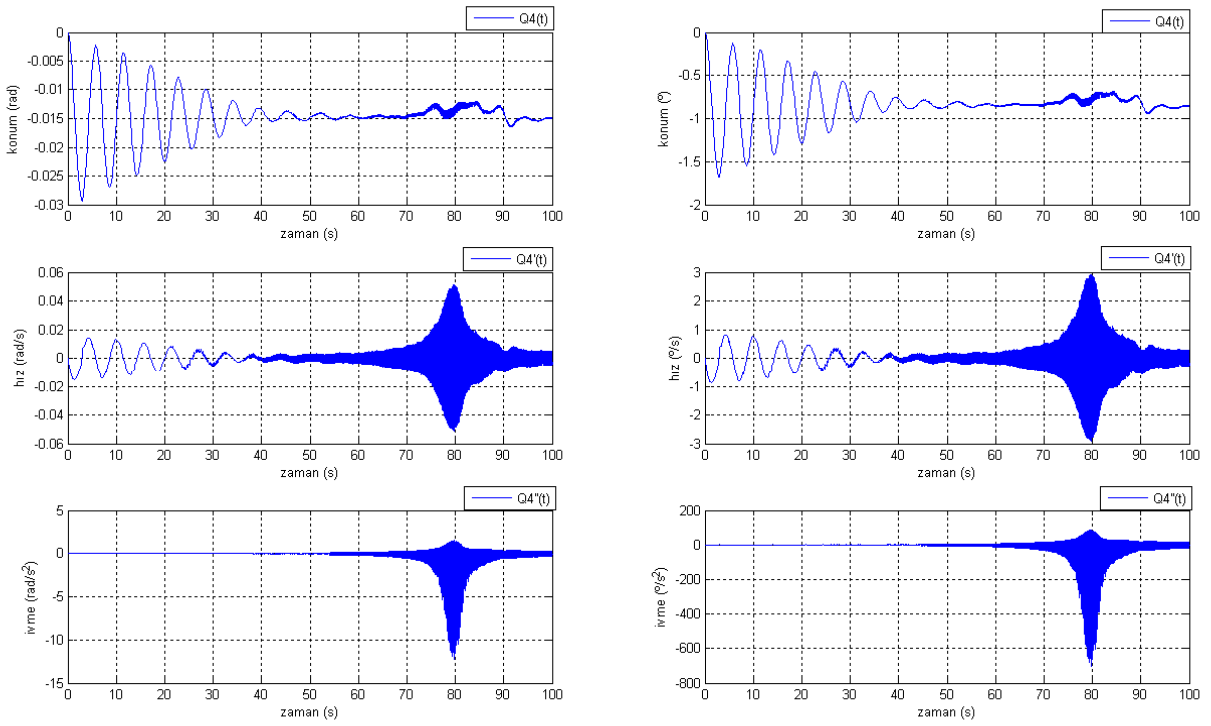
Şekil 9.43  $\theta_1$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



Şekil 9.44  $\theta_2$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



Şekil 9.45  $\theta_3$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri



Şekil 9.46  $\theta_4$  değerine ait konum, hız ve ivme grafikleri

Çizelge 9.1 Sırasıyla 9 farklı durum başlangıç koşulu değerleri

$m_1$ (kg)	$m_2$ (kg)	$R$ (m)	$\alpha$ (rad)	Kren gövdesi ile yük kolu arasındaki açı (°)	$g$	$K$	$F$	$M$	AÇIKLAMA	Kren boyu (m)	Boom (yük kolu) boyu (m)	$\theta_4$ (°)	$\theta_4$ (rad)	Gövdenin z ekseninden uzaklığı (m)
100	2500	38	0,55	110	9,81	1750000	$ml.g$	30000	1. Başlangıç	25	21.5	0,9827	0,0171	0,43
100	2500	38	0,55	110	9,81	1750000	$ml.g$	15000	Moment düştü			0,4914	0,0086	0,21
100	2500	46	0,08	170	9,81	1750000	$ml.g$	30000	Yük kolu yukarı çıktı			0,9827	0,0171	0,43
100	2500	46	0,08	170	9,81	1750000	$ml.g$	15000	Moment düştü			0,4914	0,0086	0,21
350	2500	38	0,55	110	9,81	1750000	$ml.g$	30000	Kütle arttı			0,9827	0,0171	0,43
350	2500	38	0,55	110	9,81	1750000	$ml.g$	15000	Moment düştü			0,4914	0,0086	0,21
350	2500	46	0,08	170	9,81	1750000	$ml.g$	30000	Yük kolu yukarı çıktı			0,9827	0,0171	0,43
350	2500	46	0,08	170	9,81	1750000	$ml.g$	15000	Moment düştü			0,4914	0,0086	0,21
100	2500	46	0,08	170	9,81	5225000	$ml.g$	30000	Esneklik katsayısı arttı			0,3291	0,0057	0,14

Yukarıda, vermiş olduğum 9 ayrı durum başlangıç koşulları için elde edilen grafikler görülmektedir. Bu başlangıç koşulları için Çizelge 9.1 hazırlanmış ve (9.1) eşitliği yardımıyla sistemin gerçeğe uygunluğunu sağlamak amacıyla sistemde yer alan  $M$ (moment),  $K$ (Kren gövdesinin esneklik katsayısı) değerleri  $\theta_4$  açısının makul sonuçlar verebilmesi amacıyla belirlenmiştir. Ayrıca  $R$  ve  $\alpha$  açısı parametreleri kren gövdesi ile boom (yük kolu) arasındaki açının( $\beta$ )  $110^\circ$  ve  $170^\circ$ 'lik durumları göz önünde bulundurularak verilmiştir.

$$M = K \theta_4 \quad (9.1)$$

## 10. MATLAB – SIMULINK ORTAMINDA ELDE EDİLEN GRAFİKLERİN YORUMLARI

### 10.1 1.Durum başlangıç koşulları için elde edilen grafiklerin yorumları

#### **$L$ (Değişken halat boyu) :**

Sistemde halat rijit olarak kabul edildiği ve  $m_1.g$  değerinde bir kuvvete maruz kaldığı için sürekli bir uzama eğilimi göstermektedir(Şekil 9.2).

#### **$\theta_1$ (Kren kolunun x-y düzlemindeki izdüşümünün x eksenine ile yaptığı açı) :**

Sisteme uygulanan belli bir  $M$ (moment) değeri olduğu için  $\theta_1$  açısının sürekli arttığı, dolayısıyla kren gövdesinin sürekli döndüğü gözlemlenmektedir(Şekil 9.3).

#### **$\theta_2$ (Yükün asılı bulunduğu halatın x-y düzlemindeki izdüşümünün kren kolunun x-y düzlemindeki izdüşümüyle yaptığı açı) :**

Sistemin matematiksel modellemesine bakıldığında  $\ddot{\theta}_2$  denkleminde  $\theta_2$  değerinin,  $\theta_3$  açısının değişimiyle bağıntılı olarak değiştiği görülmektedir.  $\theta_3$  açısı  $0^\circ$ 'ye yaklaştığında  $\theta_2$  açısının  $150 - 200^\circ$  arasında dengeye oturduğu gözlemlenmektedir(Şekil 9.4).

#### **$\theta_3$ (Yükün asılı olduğu halatın z eksenine ile yaptığı açı) :**

Sisteme uygulanan  $M$ (moment) etkisinde  $\theta_3$  açısının değeri merkezkaç kuvveti etkisiyle artmakta daha sonra  $\theta_3$  açısal hızı değerinin azalması ve  $0 \text{ rad/s}$  değerine yaklaşmasıyla  $\theta_3$  açısının  $0^\circ$ 'ye yaklaştığı gözlemlenmektedir. Ayrıca , sistemin matematiksel modellemesinde  $\ddot{\theta}_3$  denkleminde bakıldığında  $L$ (halat boyu) değerinin artışıyla  $\theta_3$  değerinin  $0^\circ$ 'ye yaklaştığını da görebilmekteyiz(Şekil 9.5).

#### **$\theta_4$ (Kren gövdesinin z eksenine ile yaptığı açı) :**

Kren gövdesi esnek olarak kabul edildiği için verilen parametreler altında yaklaşık 5. s'de gövdenin maksimum  $22^\circ$ 'lik bir açıyla esneyip 50. s'ye kadar osilasyon yaptığı ve 50. s'den sonra yaklaşık  $11^\circ$ 'lik bir açıda sabitlendiği gözlemlenmiştir. 1.durumda vermiş olduğum  $M$ (moment) ve  $K$ (gövdenin esneklik katsayısı) değerleri için denklem (9.1)'e göre  $\theta_4$  açısının



0.98° olması öngörülmüştür. Ancak diğer başlangıç koşulları etkisiyle bu açının 11°'ye çıktığı görülmektedir(Şekil 9.6).

## 10.2 2.Durum başlangıç koşulları için elde edilen grafiklerin yorumları

### **$L$ (Değişken halat boyu) :**

1.durumdan farklı olarak sadece  $M$ (moment) değeri yarıya düşürülmüştür. Bunun sonucu olarak  $L$ (halat boyu) boyundaki değişimin arttığı gözlemlenmiştir. Moment değerinin düşmesi  $\theta_3$  açısının azalmasına neden olmuştur.  $\dot{L}$  denklemine bakıldığında,  $\theta_3$  açısının düşmesiyle  $L$  değerinin arttığı görülmektedir(Şekil 9.7).

### **$\theta_1$ (Kren kolunun x-y düzlemindeki izdüşümünün x eksenine ile yaptığı açı) :**

1.duruma göre kıyaslandığında sadece  $M$ (moment) değeri azaldığı için  $\theta_1$  açısının azaldığı ve kren gövdesinin daha az döndüğü görülmektedir(Şekil 9.8).

### **$\theta_2$ (Yükün aslı bulunduğu halatın x-y düzlemindeki izdüşümünün kren kolunun x-y düzlemindeki izdüşümüyle yaptığı açı) :**

1.durumdan farklı olarak sadece  $M$ (moment) değeri yarıya düşürülmüştür. Ancak  $\theta_2$  değerinin değişimi 1.durum ile benzerlik göstermektedir(Şekil 9.9).

### **$\theta_3$ (Yükün aslı olduğu halatın z eksenine ile yaptığı açı) :**

1.durumdan farklı olarak sadece  $M$ (moment) değeri yarıya düşürülmüştür. Bu durumda  $\theta_3$  açısının daha kısa sürede 0°'ye yaklaştığı görülmektedir(Şekil 9.10).

### **$\theta_4$ (Kren gövdesinin z eksenine ile yaptığı açı) :**

1.durumdan farklı olarak sadece  $M$ (moment) değerini yarıya düşürülmüştür. Bu da  $\theta_4$  açısındaki değişimin daha kısa bir sürede dengeye oturmasını sağlamıştır. Ancak gövdenin yine yaklaşık 11°'lik bir açıyla esnediği görülmektedir(Şekil 9.11).

### 10.3 3.Durum başlangıç koşulları için elde edilen grafiklerin yorumları

#### **$L$ (Değişken halat boyu) :**

1.durumla kıyaslandığında sadece kren gövdesi ile boom(yük kolu) arasındaki açı artmıştır. Yani boom(yük kolu) yukarı kalkmıştır. Bu durumda açısal hız arttığı için  $L$  boyundaki değişimin arttığı görülmektedir(Şekil 9.12).

#### **$\theta_1$ (Kren kolunun x-y düzlemindeki izdüşümünün x eksenine ile yaptığı açı) :**

1.duruma göre kıyaslandığında sadece kren gövdesi ile boom(yük kolu) arasındaki açı artmaktadır. Bu da  $\theta_1$  değerinin yani açısal hızın artmasına sebep olmuştur(Şekil 9.13).

#### **$\theta_2$ (Yükün asılı bulunduğu halatın x-y düzlemindeki izdüşümünün kren kolunun x-y düzlemindeki izdüşümüyle yaptığı açı) :**

3.durumda  $\theta_3$  açısının hızında ve ivmesinde kararsızlıklar olduğu için  $\theta_2$  açısı çok daha hızlı bir artış grafiği sergilemiştir(Şekil 9.14).

#### **$\theta_3$ (Yükün asılı olduğu halatın z eksenine ile yaptığı açı) :**

1.duruma göre kıyaslandığında sadece kren gövdesi ile boom(yük kolu) arasındaki açı artmaktadır.  $\theta_3$  açısının değişimi daha kısa sürede meydana gelmiş yaklaşık 3 – 5 ve 10 – 15 s'leri arasında  $\theta_3$  açısının hızı ve ivmesinde kararsızlıklar görülmektedir(Şekil 9.15).

#### **$\theta_4$ (Kren gövdesinin z eksenine ile yaptığı açı) :**

1.durumla kıyaslandığında sadece kren gövdesi ile boom(yük kolu) arasındaki açı artmıştır. Bu durumda sistemin kütle merkezi kren gövdesine yaklaştığından sisteme etkiyen  $F$  kuvvetinin etkisi daha az olduğundan  $\theta_4$  açısındaki değişimin daha az ve öngörülen değere ( $0.98^\circ$ ) daha yakın olduğu gözlemlenmiştir(Şekil 9.16).

#### 10.4 4.Durum başlangıç koşulları için elde edilen grafiklerin yorumları

##### **$L$ (Değişken halat boyu) :**

3.durumdan farklı olarak sadece moment değeri yarıya düşürülmüştür. Bu durumda açısal hız 3.duruma göre azaldığı için  $L$  boyundaki değişimin azaldığı görülmektedir(Şekil 9.17).

##### **$\theta_1$ (Kren kolunun x-y düzlemindeki izdüşümünün x eksenine ile yaptığı açı) :**

3.durumdan farklı olarak sadece  $M$ (moment) değeri yarıya düşürülmüştür. Buna bağlı olarak  $\theta_1$ 'deki değişim azalmaktadır(Şekil 9.18).

##### **$\theta_2$ (Yükün aslı bulunduğu halatın x-y düzlemindeki izdüşümünün kren kolunun x-y düzlemindeki izdüşümüyle yaptığı açı) :**

4.durumda  $\theta_3$  açısının hızında ve ivmesinde kararsızlıklar olduğu için  $\theta_2$  açısı çok daha hızlı bir artış grafiği sergilemiştir(Şekil 9.19).

##### **$\theta_3$ (Yükün aslı olduğu halatın z eksenine ile yaptığı açı) :**

3.durumdan farklı olarak sadece  $M$ (moment) değeri yarıya düşürülmüştür. Buna bağlı olarak  $\theta_3$ 'deki değişimde belirgin bir farklılık gözlemlenmemiştir(Şekil 9.20).

##### **$\theta_4$ (Kren gövdesinin z eksenine ile yaptığı açı) :**

3.durumdan farklı olarak sadece  $M$ (moment) değeri yarıya düşürülmüştür. Bu da  $\theta_4$  açısındaki değişimin daha kısa bir sürede dengeye oturmasını sağlamıştır. Ancak bu durum çok belirgin bir şekilde gözlemlenmemektedir. Fakat  $\theta_4$  açısının hızında ve ivmesinde kararsızlıklar görülmektedir(Şekil 9.21).

### 10.5 5.Durum başlangıç koşulları için elde edilen grafiklerin yorumları

#### **$L$ (Değişken halat boyu) :**

1.durumdan farklı olarak sadece  $m_1$  kütle değeri arttırılmıştır. Bunun sonucunda  $F$ (kuvvet) değerinde bir artış ve buna bağlı olarak  $L$  değerindeki değişimin arttığı görülmektedir(Şekil 9.22).

#### **$\theta_1$ (Kren kolunun x-y düzlemindeki izdüşümünün x eksenine ile yaptığı açı) :**

1.durumdan farklı olarak sadece  $m_1$  kütlesi arttırılmıştır. Bu kütle değişiminin  $\theta_1$  açısına etkisinin yok denecek kadar az olduğu gözlemlenmektedir(Şekil 9.23).

#### **$\theta_2$ (Yükün aslı bulunduğu halatın x-y düzlemindeki izdüşümünün kren kolunun x-y düzlemindeki izdüşümüyle yaptığı açı) :**

1.durumdan farklı olarak sadece  $m_1$  kütlesi arttırılmıştır. Ancak  $\theta_2$  değerinin değişimi 1.durum ile benzerlik göstermektedir(Şekil 9.24).

#### **$\theta_3$ (Yükün aslı olduğu halatın z eksenine ile yaptığı açı) :**

1.durumdan farklı olarak sadece  $m_1$  kütlesi arttırılmıştır. Bu durumun  $L$ (halat boyu) değerinin artmasına dolayısıyla  $\theta_3$  açısının daha kısa sürede  $0^\circ$ 'ye yaklaşmasına sebep olduğu gözlemlenmiştir(Şekil 9.25).

#### **$\theta_4$ (Kren gövdesinin z eksenine ile yaptığı açı) :**

1.durumdan farklı olarak sadece  $m_1$  kütle değeri arttırılmıştır.  $\theta_4$  açısının daha kısa bir sürede kararlı hale geldiği gözlemlenmektedir. Ancak kütle artışı kren gövdesinin denge halinde bir miktar daha fazla esnediğini gösteriyor(Şekil 9.26).

## 10.6 6.Durum başlangıç koşulları için elde edilen grafiklerin yorumları

### **$L$ (Değişken halat boyu) :**

5.durumdan farklı olarak sadece moment değeri yarıya düşürülmüştür. Bunun sonucu olarak  $L$ (halat boyu) boyundaki değişimin arttığı gözlemlenmiştir. Moment değerinin düşmesi  $\theta_3$  açısının azalmasına neden olmuştur.  $\dot{L}$  denklemine bakıldığında,  $\theta_3$  açısının düşmesiyle  $L$  değerinin arttığı görülmektedir(Şekil 9.27).

### **$\theta_1$ (Kren kolunun x-y düzlemindeki izdüşümünün x eksenine ile yaptığı açı) :**

5.durumdan farklı olarak sadece  $M$ (moment) değeri yarıya düşürülmüştür. Bunun sonucunda için  $\theta_1$  açısının azaldığı ve kren gövdesinin daha az döndüğü görülmektedir(Şekil 9.28).

### **$\theta_2$ (Yükün asılı bulunduğu halatın x-y düzlemindeki izdüşümünün kren kolunun x-y düzlemindeki izdüşümüyle yaptığı açı) :**

5.durumdan farklı olarak sadece  $M$ (moment) değeri yarıya düşürülmüştür. Ancak  $\theta_2$  değerinin değişimi 5.durum ile benzerlik göstermektedir(Şekil 9.29).

### **$\theta_3$ (Yükün asılı olduğu halatın z eksenine ile yaptığı açı) :**

5.durumdan farklı olarak sadece  $M$ (moment) değeri yarıya düşürülmüştür. Bu durumda  $\theta_3$  açısının daha kısa sürede  $0^\circ$ 'ye yaklaştığı görülmektedir(Şekil 9.30).

### **$\theta_4$ (Kren gövdesinin z eksenine ile yaptığı açı) :**

5.durumdan farklı olarak sadece  $M$ (moment) değeri yarıya düşürülmüştür. Bunun sonucunda için  $\theta_4$  açısındaki değişim 25. s'den itibaren dengeye oturmuş ve bir önceki durumdan daha kararlı bir sistem olduğu gözlemlenmiştir(Şekil 9.31).

## 10.7 7.Durum başlangıç koşulları için elde edilen grafiklerin yorumları;

### **L (Değişken halat boyu) :**

5.durumla kıyaslandığında sadece kren gövdesi ile boom(yük kolu) arasındaki açı artmıştır. Yani boom(yük kolu) yukarı kalkmıştır. Bu durumda açısal hız arttığı için  $L$  boyundaki değişimin arttığı görülmektedir. Ancak 7.durum başlangıç değerleri için sistem 30 s çalışabilmektedir. Bu da parametrelerin diğer durum başlangıç koşullarına göre daha kötü çalışma şartları doğurduğunu göstermektedir(Şekil 9.32).

### **$\theta_1$ (Kren kolunun x-y düzlemindeki izdüşümünün x eksenine ile yaptığı açı) :**

5.durumla kıyaslandığında sadece kren gövdesi ile boom(yük kolu) arasındaki açı artmaktadır. Bu da  $\theta_1$  değerinin yani açısal hızın artmasına sebep olmuştur(Şekil 9.33).

### **$\theta_2$ (Yükün aslı bulunduğu halatın x-y düzlemindeki izdüşümünün kren kolunun x-y düzlemindeki izdüşümüyle yaptığı açı) :**

7.durumda  $\theta_3$  açısının hızında ve ivmesinde kararsızlıklar olduğu için  $\theta_2$  açısı çok daha hızlı bir artış grafiği sergilemiştir(Şekil 9.34).

### **$\theta_3$ (Yükün aslı olduğu halatın z eksenine ile yaptığı açı) :**

5.durumla kıyaslandığında sadece kren gövdesi ile boom(yük kolu) arasındaki açı artmaktadır. Bu durumda  $\theta_3$  açısının daha kısa sürede  $0^\circ$ 'ye yaklaştığı görülmektedir. Ancak yaklaşık olarak 3 -5 ve 10 – 23 s'leri arasında  $\theta_3$  açısının hızında ve ivmesinde kararsızlıklar görülmektedir(Şekil 9.35).

### **$\theta_4$ (Kren gövdesinin z eksenine ile yaptığı açı)**

5.durumla kıyaslandığında sadece kren gövdesi ile boom(yük kolu) arasındaki açı artmaktadır. Bu durumda sistemin kütle merkezi kren gövdesine yaklaştığından sisteme etkiyen  $F$  kuvvetinin etkisi daha az olduğundan  $\theta_4$  açısındaki değişimin daha az ve öngörülen değere ( $0.98^\circ$ ) daha yakın olduğu gözlemlenmiştir. Ancak sistemin 30 s çalışabilmesi diğer parametrelerin çalışma şartlarını olumsuz yönde etkilediğini göstermektedir(Şekil 9.36).

## 10.8 8.Durum başlangıç koşulları için elde edilen grafiklerin yorumları;

### **$L$ (Değişken halat boyu) :**

4.duruma göre kütle artması,  $L$  boyunun artmasına, 6.duruma göre kren gövdesi ile yük kolu arasındaki açının artması, açısal hız arttığı için  $L$  boyunun artmasına sebep olmaktadır. Ancak 8.durum başlangıç koşullarına göre sistem sadece 26 s çalışabilmektedir. Seçilen bu başlangıç koşulu değerleri sistemin daha fazla çalışmasına izin vermediği gözlemlenmiştir. Bu da sistemde meydana gelen bir hatanın olduğunu göstermektedir(Şekil 9.37).

### **$\theta_1$ (Kren kolunun x-y düzlemindeki izdüşümünün x eksenine ile yaptığı açı) :**

7.durum ile kıyaslandığında sadece M(moment) değeri yarıya düşürülmüştür. Buna bağlı olarak  $\theta_1$ 'deki değişim azalmaktadır(Şekil 9.38).

### **$\theta_2$ (Yükün aslı bulunduğu halatın x-y düzlemindeki izdüşümünün kren kolunun x-y düzlemindeki izdüşümüyle yaptığı açı) :**

8.durumda  $\theta_2$  açısının hızında ve ivmesinde kararsızlıklar olduğu için  $\theta_2$  açısı çok daha hızlı bir artış grafiği sergilemiştir(Şekil 9.39).

### **$\theta_3$ (Yükün aslı olduğu halatın z eksenine ile yaptığı açı) :**

7.durum ile kıyaslandığında sadece M(moment) değeri yarıya düşürülmüştür. Buna bağlı olarak  $L$ (halat boyu) değerindeki artış  $\theta_3$  açısının maksimum değerinin daha küçük olmasına sebep olmuştur(Şekil 9.40).

### **$\theta_4$ (Kren gövdesinin z eksenine ile yaptığı açı) :**

7.durum ile kıyaslandığında sadece M(moment) değeri yarıya düşürülmüştür. Buna bağlı olarak  $\theta_4$ 'deki değişim azalmaktadır. 4. Durumla kıyasladığımızda sadece  $m_1$  kütle arttığını ancak sistemin sadece 26 s çalışabildiği görülmektedir. Bu da sistemin  $m_1$  kütledeki artışın çalışmayı olumsuz yönde etkilediğini göstermektedir(Şekil 9.41).

## 10.9 9.Durum başlangıç koşulları için elde edilen grafiklerin yorumları

### **$L$ (Değişken halat boyu) :**

9.durum başlangıç değerlerinde kren gövdesi esneklik katsayısı arttırılmıştır. Bu durumda sistemin rijitliği artmış, 4.durumda  $L$  (halat boyu) boyunda meydana gelen değişimin hemen hemen aynısı meydana gelmiştir. Ancak  $L$ (halat boyu) boyu uzama hızının ve ivmesinin 70 – 90 s arasında kararsızlıklar gösterdiği gözlemlenmiştir(Şekil 9.42).

### **$\theta_1$ (Kren kolunun x-y düzlemindeki izdüşümünün x eksenine ile yaptığı açı) :**

9.durum başlangıç değerlerinde kren gövdesi esneklik katsayısı arttırılmıştır. Bu durumda sistemin rijitliği artmış, 4.durumda  $\theta_1$ 'de meydana gelen değişimin hemen hemen aynısı meydana gelmiştir. Ancak  $\theta_1$  değişim hızının ve ivmesinin 70 – 90 s arasında kararsızlıklar gösterdiği gözlemlenmiştir(Şekil 9.43).

### **$\theta_2$ (Yükün aslı bulunduğu halatın x-y düzlemindeki izdüşümünün kren kolunun x-y düzlemindeki izdüşümüyle yaptığı açı) :**

9.durum başlangıç değerlerinde kren gövdesi esneklik katsayısı arttırılmıştır. Sistemin daha rijit hale getirilmesiyle,  $\theta_2$  açısının hızında ve ivmesinde büyük kararsızlıklar meydana geldiği gözlemlenmiştir(Şekil 9.44).

### **$\theta_3$ (Yükün aslı olduğu halatın z eksenine ile yaptığı açı) :**

9.durum başlangıç değerlerinde kren gövdesi esneklik katsayısı arttırılmıştır. 4.durumda  $\theta_3$ 'de meydana gelen değişimin hemen hemen aynısı meydana gelmiştir. Ancak aynı sürede  $\theta_3$  açısı maksimum değerinin daha büyük olduğu gözlemlenmektedir. Bu durumda  $L$ (halat boyu) değerinin 4.durumda daha büyük olmasıyla ilişkilendirilebilir(Şekil 9.45).

### **$\theta_4$ (Kren gövdesinin z eksenine ile yaptığı açı) :**

9.durum başlangıç değerlerinde kren gövdesi esneklik katsayısı arttırılmıştır. Böylece gövdenin daha az esnemesi sağlanmış sistem daha rijit bir hale gelmiştir. Ancak  $\theta_4$  açısındaki değişimin hızında ve ivmesinde 70 – 90 s arasında kararsızlıklar gözlemlenmiştir(Şekil 9.46).



## 11. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Şekil 8.1’de şematik görünümü verilen 25 m kule boyu, 21.5 m boom(yük kolu) uzunluğa sahip 1 m’lik halat ucunda  $m_l$  kütlesi asılı olan ve  $K$  esneklik katsayısına ve döner kuleye sahip bir kren modelinin bilgisayar ortamında benzetim çalışması yapılmıştır. Bu amaçla önce fiziksel daha sonra matematiksel model oluşturulmuştur.

Yukarıda 9 ayrı durum başlangıç koşulları için elde edilen grafikler yorumlanmış ve irdelenmiştir. Bu irdelemelerin ışığında  $L$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_4$  ifadelerinin konum, hız ve ivme değişimlerinin ne şekilde gerçekleştiği açık bir şekilde görülmektedir. Elde edilen grafikler sistemin çeşitli koşullar altındaki dinamik davranışlarını ve tasarım üzerindeki etkilerini göstermektedir. Bu çalışmada incelenmiş olan kren modelinde, birçok farklı parametre altında incelenip, bu farklı koşullar altında ne tür davranışlar sergilediğinin görülmesi amaçlanmıştır. Elde edilen grafikler  $L$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_4$  ifadeleri için genel olarak irdelenecek olursa aşağıdaki gibi yorumlanabilir;

$L$ (halat boyu), yerçekimi ivmesi etkisinde sürekli bir uzama eğilimindedir. Eğer bu sistemde  $L$ (halat boyu) değerini rijit değil de esnek olarak kabul etseydik, uzama miktarını kontrol altına almamız mümkün olabilirdi.

$\theta_1$  değerinin, sisteme uygulanan belli bir  $M$ (moment) değeri olduğu için sürekli arttığı, dolayısıyla kren gövdesinin sürekli döndüğü gözlemlenmektedir.

$\theta_2$  değerinin,  $L$ (halat boyu) ve  $\theta_3$  açısına bağlı olarak değiştiği söylenebilir.

$\theta_3$  değerinin, sistemin matematiksel modellemesinde  $0^\circ$  olduğu anda  $\sin\theta_3$  değerinin denklemlerde paydada yer alması nedeniyle bazı ifadeleri tanımsız hale getirdiği ve matlab – simulink ortamında sistemin çalışmasına engel olduğu söylenebilir. Bu sebeple  $\theta_3$  değeri  $0^\circ$ ’den farklı olacak şekilde başlangıçta küçük bir değer olarak yani  $6^\circ(\pi/30 \text{ rad})$  alınmıştır.  $L$ (halat boyu) sürekli uzama eğilimde olduğu için  $\theta_3$  açısı  $0^\circ$ ’ye yaklaşmakta fakat  $0^\circ$  olamamaktadır. Bu durumda sistemin daha sağlıklı çalışmasını sağlamıştır.

$\theta_4$  değerinin, kren gövdesi esnek olarak kabul edildiği için osilasyon yaptığı ve belli bir zamandan sonra denge konumuna oturduğu söylenebilir.

Krenin benzetim çalışması sonunda görülen tüm ivmeler göz önüne alındığı zaman oldukça dinamik davranışlar gösterdiğini söylemek mümkündür. Dolayısıyla bu tür kren yapılarında tasarımın yay katsayısı da, üzerinde durulması gereken önemli konulardan birisidir. Salt dinamik ve statik kontrollere göre yapılan tasarımlarda sistemin yay katsayısı irdelenmemişse

Çalışma ortamında ivmeler sebebiyle öngörülemeyen dinamik davranışlarla karşılaşılabilir Krenin bilgisayar ortamında çalıştırılacak modeli oluşturulurken benimsenen modelleme tekniği, durum değişkenlerinin kabulünün, benzetim çalışmaları esnasında elde edilen sonuçlar üzerinde oldukça etkili olduğu görülmüştür.

Sistem açık çevrim olarak incelenmiştir. İncelen sistemin karmaşıklığı ve bir çok değişkene bağlı olması nedeniyle gelecekte yapılan çalışmalarda kapalı çevrim olarak da yapılmasının faydalı olacağı kanaatindeyim.

## KAYNAKLAR

- Akkurt, M., ve Savcı, M., (1972), Makina Elemanları, Şirketi Mürettibiye Basımevi, İstanbul.
- Arıtan, T., ve Aslan, R., (1992), Çözümlü Kaldırma Makinaları Problemleri, İTÜ Denizcilik Yüksek Okulu Yayını, İstanbul
- Arıtan, T.,ve Köktürk, U., (1973), Kaldırma ve Taşıma Makinaları 1, 2, İnkılap ve Aka Basımevi, İstanbul
- Aslan, R., (2007), Transport Tekniği Problemleri, Yapım Tanıtım Yayıncılık, İstanbul.
- Boğoçlu, M.E., Kule Vinçleri Ders Notları, Yıldız Teknik Üniversitesi.
- Boğoçlu, M.E., Sağırlı, A., Azeloğlu, O., Transport Tekniği, Yıldız Teknik Üniversitesi.
- Demirsoy, M., (1995), Kaldırma Makinaları, D.E.Ü. Müh. Fak. Yayın No.113, 3.Baskı, İzmir.
- Demirsoy, M., (1998), Transport Tekniği 1, 3.Baskı, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- Demirsoy, M., ve Demirsoy, M., (2005), Kaldırma Makinaları(Krenler), Altındağ Grafik Matbaacılık, İzmir.
- Dosdoğru, G., Kaldırma Makinaları, İTÜ Yayınları, İstanbul.
- İmrak, C.E., Kurt, S., Gerdemeli, İ., Erdil, A.B., ve Özer, D., (2007), Kaldırma İletme Makinaları, TMMOB Makine Mühendisleri Odası İstanbul Şubesi.
- İmrak, C.E., ve Fetvacı, M.C., (2004), “Krenlerin(Vinçlerin) Periyodik Koruyucu Bskım Esasları, Mühendis ve Makine, Cilt 45, Sayı 538, s. 34-40.
- Öztepe, H., (1999), Transport Tekniği-Kaldırma ve Taşıma Makinaları, Eğitim Matbaası, İstanbul.
- Tahralı, N., Kaya, F., Yüksek, İ., ve Güçlü, R., (2007), Makine Dinamiği, Yıldız Teknik Üniversitesi Basım Yayın Merkezi, İstanbul.
- Young, S., University Physics, Addison-Wesley Publishing Company, USA

[www.madehow.com](http://www.madehow.com)

[www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)

[www.vansoncranes.com](http://www.vansoncranes.com)

**EKLER**

- Ek 1      Matlab – Simulink fonksiyon kutucuklarına yazılacak denklemler
- Ek 2      Mathematica programı ile yapılan denklem kontrolleri

**Ek 1 Matlab – Simulink fonksiyon kutucuklarına yazılacak denklemler**

$$\begin{array}{llll}
L & = u[1], & L' & = u[2], & L'' & = u[3], & F & = u[16] \\
Q1 & = u[4], & Q1' & = u[5], & Q1'' & = u[6], & M & = u[17] \\
Q2 & = u[7], & Q2' & = u[8], & Q2'' & = u[9] \\
Q3 & = u[10], & Q3' & = u[11], & Q3'' & = u[12] \\
Q4 & = u[13], & Q4' & = u[14], & Q4'' & = u[15]
\end{array}$$

1.denklem:

$$\begin{aligned}
L''=u[3]= & (u[16]/m1)+(-g+g*\cos(u[10])-R*\cos(u[7])*cos(u[10])*sin(a+u[13])*u[5]*u[8]- \\
& R*\cos(u[10])*sin(u[7])*sin(a+u[13])*u[5]*u[11]- \\
& R*\cos(a+u[13])*sin(u[7])*sin(u[10])*u[5]*u[14]+R*\cos(a+ \\
& u[13])*sin(u[7])*sin(u[10])*u[8]*u[14]+R*(sin(u[10])*sin(a+u[13])- \\
& \cos(u[7])*cos(u[10])*cos(a+u[13]))*u[11]* \\
& u[14]+R*(\cos(u[7])*sin(u[10])*sin(a+u[13])-\cos(u[10])*cos(a+u[13]))* \\
& (u[14])^2-R*\sin(u[7])*sin(u[10])*sin(a+u[13])*u[6]-R*(\cos(u[10])*sin(a+ \\
& u[13])+\cos(u[7])*sin(u[10])*cos(a+u[13]))*u[15])
\end{aligned}$$

2.denklem:

$$\begin{aligned}
Q1''=u[6]= & (1/(2*(m1)*R*u[1]*\cos(u[7])*sin(u[10])*sin(a+u[13])+m1*R^2*(\sin(a+ \\
& u[13]))^2+m2*R^2*(\sin(a+u[13]))^2+m1*(u[1])^2*(\sin(u[10]))^2))*(- \\
& m1*R*\sin(u[7])*sin(u[10])*sin(a+u[13])*u[3]-(m1* \\
& (u[1])^2*(\sin(u[10]))^2+m1*R*u[1]*\cos(u[7])*sin(u[10])*sin(a+u[13]))*u[9]- \\
& m1*R*u[1]*\sin(u[7])*cos(u[10])*sin(a+u[13])* \\
& u[12]+m1*R*u[1]*\sin(u[7])*sin(u[10])*cos(a+u[13])*u[15]- \\
& (2*m1*R*u[1]*\cos(u[7])*sin(u[10])*cos(a+u[13])+2*m1*R^2*\sin(a+u[13])*cos( \\
& a+u[13])+2*m2*R^2*\sin(a+u[13])*cos(a+u[13]))*u[5]*u[14]- \\
& (2*m1*R*u[1]*\cos(u[7])*cos(u[10])*sin(a+u[13])+2*m1*(u[1])^2*\sin(u[10])*co \\
& s(u[10]))*u[5]*u[11]+2*m1*R*u[1]*\sin(a+ \\
& u[13])*sin(u[10])*sin(u[7])*u[5]*u[8]- \\
& (2*m1*R*\sin(a+u[13])*cos(u[7])*sin(u[10])+2*m1*u[1]*(\sin(u[10]))^2)*u[5]*u[ \\
& 2]-(2*m1*u[1]*(\sin(u[10]))^2+2*m1*R*\cos(u[7])*sin(u[10])*sin(a+ \\
& u[13]))*u[8]*u[2]- \\
& (2*m1*(u[1])^2*\sin(u[10])*cos(u[10])+2*m1*R*u[1]*\cos(u[7])*cos(u[10])*sin(a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + u[13])) * u[8] * u[11] - \\
& 2 * m1 * R * \sin(u[7]) * \cos(u[10]) * \sin(a + u[13]) * u[2] * u[11] + m1 * R * u[1] * \sin(u[7]) * \sin(u[10]) * \sin(a + \\
& u[13]) * (u[8])^2 + m1 * R * u[1] * \sin(u[7]) * \sin(u[10]) * \sin(a + u[13]) * (u[11])^2 - \\
& m1 * R * u[1] * \sin(u[7]) * \sin(u[10]) * \sin(a + u[13]) * (u[14])^2 + u[17])
\end{aligned}$$

3.denklem:

$$Q2'' = u[9] =$$

$$\begin{aligned}
& (1 / ((u[1])^2 * (\sin(u[10]))^2)) * ((2 * u[1] * (\sin(u[10]))^2 + R * \cos(u[7]) * \sin(u[10]) * \sin(a + u[13])) * u[2] * u[5] + 2 * u[1] * (\sin(u[10]))^2 * u[2] * u[8] - \\
& R * u[1] * \sin(u[7]) * \sin(u[10]) * \sin(a + u[13]) * u[5] * u[8] + (2 * (u[1])^2 * \cos(u[10]) * \sin(u[10]) + R * u[1] * \\
& \cos(u[7]) * \cos(u[10]) * \sin(a + u[13])) * u[5] * u[11] + 2 * (u[1])^2 * \cos(u[10]) * \sin(u[10]) * u[8] * u[11] - \\
& R * \cos(a + u[13]) * \sin(u[7]) * \sin(u[10]) * u[2] * u[14] + R * u[1] * \cos(u[7]) * \cos(a + u[13]) * \sin(u[10]) * u[5] * u[14] - \\
& R * u[1] * \cos(u[7]) * \cos(a + u[13]) * \sin(u[10]) * u[8] * u[14] - \\
& R * u[1] * \cos(a + u[13]) * \cos(u[10]) * \sin(u[7]) * u[11] * u[14] + R * u[1] * \sin(a + u[13]) * \sin(u[7]) * \sin(u[10]) * (u[14])^2 + (R * u[1] * \sin(a + u[13]) * \cos(u[7]) * \sin(u[10]) + (u[1])^2 * (\sin(u[10]))^2 * u[6] - R * u[1] * \cos(a + u[13]) * \sin(u[10]) * \sin(u[7]) * u[15])
\end{aligned}$$

4.denklem:

$$Q3'' = u[12] = (1 / ((u[1])^2)) * (-R * u[1] * \sin(u[7]) * \cos(u[10]) * \sin(a + u[13]) * u[6] - (R * u[1] * \cos(u[7]) * \cos(u[10]) * \cos(a + u[13]) - R * u[1] * \sin(u[10]) * \sin(a + u[13])) * u[15] -$$

$$\begin{aligned}
& R * \sin(u[7]) * \cos(u[10]) * \sin(a + u[13]) * u[5] * u[2] - \\
& R * u[1] * \cos(u[7]) * \cos(u[10]) * \sin(a + u[13]) * u[5] * u[8] - \\
& R * u[1] * \sin(u[7]) * \cos(u[10]) * \cos(a + u[13]) * u[5] * u[14] + R * u[1] * \sin(u[7]) * \sin(u[10]) * \sin(a + u[13]) * u[5] * u[11] + R * u[1] * \sin(u[7]) * \cos(u[10]) * \cos(a + u[13]) * u[14] * u[8] + (R * u[1] * \cos(u[7]) * \sin(u[10]) * \cos(a + u[13]) + R * u[1] * \cos(u[10]) * \sin(a + u[13]) * u[14] * u[11] + (R * u[1] * \cos(u[7]) * \cos(u[10]) * \sin(a + u[13]) + R * u[1] * \sin(u[10]) * \cos(a + u[13])) * (u[14])^2 - (R * \cos(u[7]) * \cos(u[10]) * \cos(a + u[13]) - R * \sin(u[10]) * \sin(a + u[13])) * u[14] * u[2] - 2 * u[1] * u[2] * u[11] - g * u[1] * \sin(u[10]))
\end{aligned}$$

5.denklem:

$$\begin{aligned}
Q4'' = u[15] = & (-1 / ((m1 + m2) * R^2)) * (K * u[13] + g * m2 * R * \sin(a + u[13]) + m1 * (g * R * \sin(a + u[13]) - \\
& R * \cos(a + u[13]) * \sin(u[7]) * \sin(u[10]) * u[2] * u[5] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2*R*\cos(a+u[13])*sin(u[7])*sin(u[10])*u[2]*u[8]- \\
& R*u[1]*\cos(u[7])*cos(a+u[13])*sin(u[10])*u[5]*u[8]- \\
& R*u[1]*\cos(u[7])*cos(a+u[13])*sin(u[10])*(u[8])^2+(2*R*\cos(a+u[13])*cos(u[7]) \\
& )*\cos(u[10])-2*R*\sin(u[10])*sin(a+u[13])*u[2]*u[11]- \\
& R*u[1]*\cos(u[10])*cos(a+u[13])*sin(u[7])*u[5]*u[11]- \\
& 2*R*u[1]*\cos(u[10])*cos(a+u[13])*sin(u[7])*u[8]*u[11]-(R*u[1]* \\
& \cos(u[10])*sin(a+u[13])+R*u[1]*\cos(u[7])*sin(u[10])*cos(a+u[13]))*(u[11])^2+( \\
& R*\cos(u[10])*cos(a+u[13])- \\
& R*\cos(u[7])*cos(u[10])*sin(a+u[13])*u[2]*u[14]+R*u[1]*sin(u[7])*sin(u[10])*s \\
& in(a+u[13])*u[5]*u[14]+R*u[1]*sin(u[7])*sin(u[10])*sin(a+u[13])*u[8]*u[14]- \\
& (R*u[1]*\cos(u[7])*cos(u[10])*sin(a+u[13])+R*u[1]*sin(u[10])*cos(a+u[13]))*u[ \\
& 11]*u[14]+(R*\cos(u[10])*sin(a+u[13])+R*\cos(u[7])*sin(u[10])*cos(a+u[13]))*u[ \\
& 3]-R*u[1]*sin(u[7])*sin(u[10])*cos(a+u[13])*u[6]- \\
& R*u[1]*sin(u[7])*sin(u[10])*cos(a+u[13])*u[9]+(R*u[1]*\cos(u[7])*cos(u[10])*c \\
& os(a+u[13])-R*u[1]*sin(u[10])*sin(a+u[13]))*u[12]))
\end{aligned}$$

## Ek 2 Mathematica Programı ile Yapılan Denklem Kontrolleri

**SetAttributes**[{R, m1, m2, k, g, a}, Constant]

**Q1**[t]

Q1[t]

**Q2**[t]

Q2[t]

**Q3**[t]

Q3[t]

**Q4**[t]

Q4[t]

**L**[t]

L[t]

**X2**[t] = (R\*Sin[a+Q4[t]]) \*Cos[Q1[t]]

RCos[Q1[t]] Sin[a+Q4[t]]

**Y2**[t] = (R\*Sin[a+Q4[t]]) \*Sin[Q1[t]]

RSin[Q1[t]] Sin[a+Q4[t]]

**Z2**[t] = R\*Cos[a+Q4[t]]

RCos[a+Q4[t]]

**X2'** = Dt[X2[t], t]

-R Sin[Q1[t]] Sin[a+Q4[t]] Q1'[t] + RCos[Q1[t]] Cos[a+Q4[t]] Q4'[t]

**Y2'** = Dt[Y2[t], t]

RCos[Q1[t]] Sin[a+Q4[t]] Q1'[t] + RCos[a+Q4[t]] Sin[Q1[t]] Q4'[t]

**Z2'** = Dt[Z2[t], t]

-R Sin[a+Q4[t]] Q4'[t]

**X1**[t] = X2[t] + L[t] \* Sin[Q3[t]] \* Cos[Q1[t] + Q2[t]]

Cos[Q1[t] + Q2[t]] L[t] Sin[Q3[t]] + RCos[Q1[t]] Sin[a+Q4[t]]

**Y1**[t] = Y2[t] + L[t] \* Sin[Q3[t]] \* Sin[Q1[t] + Q2[t]]

L[t] Sin[Q1[t] + Q2[t]] Sin[Q3[t]] + RSin[Q1[t]] Sin[a+Q4[t]]

**Z1**[t] = Z2[t] - L[t] \* Cos[Q3[t]]

RCos[a+Q4[t]] - Cos[Q3[t]] L[t]

**X1'** = Dt[X1[t], t]

Cos[Q1[t] + Q2[t]] Sin[Q3[t]] L'[t] - R Sin[Q1[t]] Sin[a+Q4[t]] Q1'[t] +

L[t] Sin[Q1[t] + Q2[t]] Sin[Q3[t]] (-Q1'[t] - Q2'[t]) +

Cos[Q1[t] + Q2[t]] Cos[Q3[t]] L[t] Q3'[t] + RCos[Q1[t]] Cos[a+Q4[t]] Q4'[t]

**Simplify**[X1']

Cos[Q1[t] + Q2[t]] Sin[Q3[t]] L'[t] - R Sin[Q1[t]] Sin[a+Q4[t]] Q1'[t] -

L[t] Sin[Q1[t] + Q2[t]] Sin[Q3[t]] (Q1'[t] + Q2'[t]) +

Cos[Q1[t] + Q2[t]] Cos[Q3[t]] L[t] Q3'[t] + RCos[Q1[t]] Cos[a+Q4[t]] Q4'[t]

**Y1'** = Dt[Y1[t], t]



$$\begin{aligned} & \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] + R \cos[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] + \\ & \cos[Q1[t] + Q2[t]] L[t] \sin[Q3[t]] (Q1'[t] + Q2'[t]) + \\ & \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] Q3'[t] + R \cos[a + Q4[t]] \sin[Q1[t]] Q4'[t] \end{aligned}$$

**Simplify[Y1']**

$$\begin{aligned} & \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] + R \cos[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] + \\ & \cos[Q1[t] + Q2[t]] L[t] \sin[Q3[t]] (Q1'[t] + Q2'[t]) + \\ & \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] Q3'[t] + R \cos[a + Q4[t]] \sin[Q1[t]] Q4'[t] \end{aligned}$$

**Z1' = Dt[Z1[t], t]**

$$-\cos[Q3[t]] L'[t] + L[t] \sin[Q3[t]] Q3'[t] - R \sin[a + Q4[t]] Q4'[t]$$

**Expand[(X1')^2]**

$$\begin{aligned} & \cos[Q1[t] + Q2[t]]^2 \sin[Q3[t]]^2 L'[t]^2 - \\ & 2 \cos[Q1[t] + Q2[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]]^2 L'[t] Q1'[t] - \\ & 2 R \cos[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q1[t]] \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] L'[t] Q1'[t] + \\ & L[t]^2 \sin[Q1[t] + Q2[t]]^2 \sin[Q3[t]]^2 Q1'[t]^2 + \\ & 2 R L[t] \sin[Q1[t]] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t]^2 + \\ & R^2 \sin[Q1[t]]^2 \sin[a + Q4[t]]^2 Q1'[t]^2 - \\ & 2 \cos[Q1[t] + Q2[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]]^2 L'[t] Q2'[t] + \\ & 2 L[t]^2 \sin[Q1[t] + Q2[t]]^2 \sin[Q3[t]]^2 Q1'[t] Q2'[t] + \\ & 2 R L[t] \sin[Q1[t]] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] Q2'[t] + \\ & L[t]^2 \sin[Q1[t] + Q2[t]]^2 \sin[Q3[t]]^2 Q2'[t]^2 + \\ & 2 \cos[Q1[t] + Q2[t]]^2 \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q3[t]] L'[t] Q3'[t] - \\ & 2 \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[Q3[t]] L[t]^2 \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] Q1'[t] Q3'[t] - \\ & 2 R \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] Q3'[t] - \\ & 2 \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[Q3[t]] L[t]^2 \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] Q2'[t] Q3'[t] + \\ & \cos[Q1[t] + Q2[t]]^2 \cos[Q3[t]]^2 L[t]^2 Q3'[t]^2 + \\ & 2 R \cos[Q1[t]] \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[a + Q4[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] Q4'[t] - \\ & 2 R \cos[Q1[t]] \cos[a + Q4[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] Q1'[t] Q4'[t] - \\ & 2 R^2 \cos[Q1[t]] \cos[a + Q4[t]] \sin[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] Q4'[t] - \\ & 2 R \cos[Q1[t]] \cos[a + Q4[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] Q2'[t] Q4'[t] + \\ & 2 R \cos[Q1[t]] \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[Q3[t]] \cos[a + Q4[t]] L[t] Q3'[t] Q4'[t] + \\ & R^2 \cos[Q1[t]]^2 \cos[a + Q4[t]]^2 Q4'[t]^2 \end{aligned}$$

**Expand[(Y1')^2]**

$$\begin{aligned}
& \sin[Q1[t] + Q2[t]]^2 \sin[Q3[t]]^2 L'[t]^2 + \\
& 2 \cos[Q1[t] + Q2[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]]^2 L'[t] Q1'[t] + \\
& 2 R \cos[Q1[t]] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] L'[t] Q1'[t] + \\
& \cos[Q1[t] + Q2[t]]^2 L[t]^2 \sin[Q3[t]]^2 Q1'[t]^2 + \\
& 2 R \cos[Q1[t]] \cos[Q1[t] + Q2[t]] L[t] \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t]^2 + \\
& R^2 \cos[Q1[t]]^2 \sin[a + Q4[t]]^2 Q1'[t]^2 + \\
& 2 \cos[Q1[t] + Q2[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]]^2 L'[t] Q2'[t] + \\
& 2 \cos[Q1[t] + Q2[t]]^2 L[t]^2 \sin[Q3[t]]^2 Q1'[t] Q2'[t] + \\
& 2 R \cos[Q1[t]] \cos[Q1[t] + Q2[t]] L[t] \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] Q2'[t] + \\
& \cos[Q1[t] + Q2[t]]^2 L[t]^2 \sin[Q3[t]]^2 Q2'[t]^2 + \\
& 2 \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]]^2 \sin[Q3[t]] L'[t] Q3'[t] + \\
& 2 \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[Q3[t]] L[t]^2 \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] Q1'[t] Q3'[t] + \\
& 2 R \cos[Q1[t]] \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] Q3'[t] + \\
& 2 \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[Q3[t]] L[t]^2 \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] Q2'[t] Q3'[t] + \\
& \cos[Q3[t]]^2 L[t]^2 \sin[Q1[t] + Q2[t]]^2 Q3'[t]^2 + \\
& 2 R \cos[a + Q4[t]] \sin[Q1[t]] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] Q4'[t] + \\
& 2 R \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[a + Q4[t]] L[t] \sin[Q1[t]] \sin[Q3[t]] Q1'[t] Q4'[t] + \\
& 2 R^2 \cos[Q1[t]] \cos[a + Q4[t]] \sin[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] Q4'[t] + \\
& 2 R \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[a + Q4[t]] L[t] \sin[Q1[t]] \sin[Q3[t]] Q2'[t] Q4'[t] + \\
& 2 R \cos[Q3[t]] \cos[a + Q4[t]] L[t] \sin[Q1[t]] \sin[Q1[t] + Q2[t]] Q3'[t] Q4'[t] + \\
& R^2 \cos[a + Q4[t]]^2 \sin[Q1[t]]^2 Q4'[t]^2
\end{aligned}$$

**Expand[(Z1')^2]**

$$\begin{aligned}
& \cos[Q3[t]]^2 L'[t]^2 - 2 \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q3[t]] L'[t] Q3'[t] + \\
& L[t]^2 \sin[Q3[t]]^2 Q3'[t]^2 + 2 R \cos[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] L'[t] Q4'[t] - \\
& 2 R L[t] \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q3'[t] Q4'[t] + R^2 \sin[a + Q4[t]]^2 Q4'[t]^2
\end{aligned}$$

**Expand[(X1')^2 + (Y1')^2 + (Z1')^2]**

$$\begin{aligned}
& \cos[Q3[t]]^2 L'[t]^2 + \cos[Q1[t] + Q2[t]]^2 \sin[Q3[t]]^2 L'[t]^2 + \\
& \sin[Q1[t] + Q2[t]]^2 \sin[Q3[t]]^2 L'[t]^2 - \\
& 2R \cos[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q1[t]] \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] L'[t] Q1'[t] + \\
& 2R \cos[Q1[t]] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] L'[t] Q1'[t] + \\
& \cos[Q1[t] + Q2[t]]^2 L[t]^2 \sin[Q3[t]]^2 Q1'[t]^2 + \\
& L[t]^2 \sin[Q1[t] + Q2[t]]^2 \sin[Q3[t]]^2 Q1'[t]^2 + \\
& 2R \cos[Q1[t]] \cos[Q1[t] + Q2[t]] L[t] \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t]^2 + \\
& 2RL[t] \sin[Q1[t]] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t]^2 + \\
& R^2 \cos[Q1[t]]^2 \sin[a + Q4[t]]^2 Q1'[t]^2 + R^2 \sin[Q1[t]]^2 \sin[a + Q4[t]]^2 Q1'[t]^2 + \\
& 2 \cos[Q1[t] + Q2[t]]^2 L[t]^2 \sin[Q3[t]]^2 Q1'[t] Q2'[t] + \\
& 2L[t]^2 \sin[Q1[t] + Q2[t]]^2 \sin[Q3[t]]^2 Q1'[t] Q2'[t] + \\
& 2R \cos[Q1[t]] \cos[Q1[t] + Q2[t]] L[t] \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] Q2'[t] + \\
& 2RL[t] \sin[Q1[t]] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] Q2'[t] + \\
& \cos[Q1[t] + Q2[t]]^2 L[t]^2 \sin[Q3[t]]^2 Q2'[t]^2 + \\
& L[t]^2 \sin[Q1[t] + Q2[t]]^2 \sin[Q3[t]]^2 Q2'[t]^2 - 2 \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q3[t]] L'[t] Q3'[t] + \\
& 2 \cos[Q1[t] + Q2[t]]^2 \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q3[t]] L'[t] Q3'[t] + \\
& 2 \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]]^2 \sin[Q3[t]] L'[t] Q3'[t] - \\
& 2R \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] Q3'[t] + \\
& 2R \cos[Q1[t]] \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] Q3'[t] + \\
& \cos[Q1[t] + Q2[t]]^2 \cos[Q3[t]]^2 L[t]^2 Q3'[t]^2 + \\
& \cos[Q3[t]]^2 L[t]^2 \sin[Q1[t] + Q2[t]]^2 Q3'[t]^2 + L[t]^2 \sin[Q3[t]]^2 Q3'[t]^2 + \\
& 2R \cos[Q1[t]] \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[a + Q4[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] Q4'[t] + \\
& 2R \cos[a + Q4[t]] \sin[Q1[t]] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] Q4'[t] + \\
& 2R \cos[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] L'[t] Q4'[t] + \\
& 2R \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[a + Q4[t]] L[t] \sin[Q1[t]] \sin[Q3[t]] Q1'[t] Q4'[t] - \\
& 2R \cos[Q1[t]] \cos[a + Q4[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] Q1'[t] Q4'[t] + \\
& 2R \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[a + Q4[t]] L[t] \sin[Q1[t]] \sin[Q3[t]] Q2'[t] Q4'[t] - \\
& 2R \cos[Q1[t]] \cos[a + Q4[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] Q2'[t] Q4'[t] + \\
& 2R \cos[Q1[t]] \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[Q3[t]] \cos[a + Q4[t]] L[t] Q3'[t] Q4'[t] + \\
& 2R \cos[Q3[t]] \cos[a + Q4[t]] L[t] \sin[Q1[t]] \sin[Q1[t] + Q2[t]] Q3'[t] Q4'[t] - \\
& 2RL[t] \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q3'[t] Q4'[t] + R^2 \cos[Q1[t]]^2 \cos[a + Q4[t]]^2 Q4'[t]^2 + \\
& R^2 \cos[a + Q4[t]]^2 \sin[Q1[t]]^2 Q4'[t]^2 + R^2 \sin[a + Q4[t]]^2 Q4'[t]^2
\end{aligned}$$

**Simplify[(X1')^2 + (Y1')^2 + (Z1')^2]**

$$\begin{aligned}
& (\cos[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] - R \sin[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] - \\
& L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] (Q1'[t] + Q2'[t]) + \\
& \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[Q3[t]] L[t] Q3'[t] + R \cos[Q1[t]] \cos[a + Q4[t]] Q4'[t])^2 + \\
& (\sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] + R \cos[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] + \\
& \cos[Q1[t] + Q2[t]] L[t] \sin[Q3[t]] (Q1'[t] + Q2'[t]) + \\
& \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] Q3'[t] + R \cos[a + Q4[t]] \sin[Q1[t]] Q4'[t])^2 + \\
& (\cos[Q3[t]] L'[t] - L[t] \sin[Q3[t]] Q3'[t] + R \sin[a + Q4[t]] Q4'[t])^2
\end{aligned}$$

**Expand[(X2')^2]**

$$\begin{aligned}
& R^2 \sin[Q1[t]]^2 \sin[a + Q4[t]]^2 Q1'[t]^2 - \\
& 2R^2 \cos[Q1[t]] \cos[a + Q4[t]] \sin[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] Q4'[t] + \\
& R^2 \cos[Q1[t]]^2 \cos[a + Q4[t]]^2 Q4'[t]^2
\end{aligned}$$

**Expand[(Y2')^2]**

$$R^2 \cos[Q1[t]]^2 \sin[a + Q4[t]]^2 Q1'[t]^2 +$$

$$2 R^2 \cos[Q1[t]] \cos[a + Q4[t]] \sin[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] Q4'[t] +$$

$$R^2 \cos[a + Q4[t]]^2 \sin[Q1[t]]^2 Q4'[t]^2$$

**Expand[(Z2')^2]**

$$R^2 \sin[a + Q4[t]]^2 Q4'[t]^2$$

**Expand[(X2')^2 + (Y2')^2 + (Z2')^2]**

$$R^2 \cos[Q1[t]]^2 \sin[a + Q4[t]]^2 Q1'[t]^2 +$$

$$R^2 \sin[Q1[t]]^2 \sin[a + Q4[t]]^2 Q1'[t]^2 + R^2 \cos[Q1[t]]^2 \cos[a + Q4[t]]^2 Q4'[t]^2 +$$

$$R^2 \cos[a + Q4[t]]^2 \sin[Q1[t]]^2 Q4'[t]^2 + R^2 \sin[a + Q4[t]]^2 Q4'[t]^2$$

**Simplify[(X2')^2 + (Y2')^2 + (Z2')^2]**

$$R^2 (\sin[a + Q4[t]]^2 Q1'[t]^2 + Q4'[t]^2)$$

**Ek[t] = (1/2) \* m1 \* ((X1')^2 + (Y1')^2 + (Z1')^2) +**

**(1/2) \* m2 \* ((X2')^2 + (Y2')^2 + (Z2')^2)**

$$\frac{1}{2} m2 (R^2 \sin[a + Q4[t]]^2 Q4'[t]^2 +$$

$$(-R \sin[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] + R \cos[Q1[t]] \cos[a + Q4[t]] Q4'[t])^2 +$$

$$(R \cos[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] + R \cos[a + Q4[t]] \sin[Q1[t]] Q4'[t])^2) +$$

$$\frac{1}{2} m1 ((\cos[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] - R \sin[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] +$$

$$L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] (-Q1'[t] - Q2'[t]) +$$

$$\cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[Q3[t]] L[t] Q3'[t] + R \cos[Q1[t]] \cos[a + Q4[t]] Q4'[t])^2 +$$

$$(\sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] + R \cos[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] +$$

$$\cos[Q1[t] + Q2[t]] L[t] \sin[Q3[t]] (Q1'[t] + Q2'[t]) +$$

$$\cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] Q3'[t] + R \cos[a + Q4[t]] \sin[Q1[t]] Q4'[t])^2 +$$

$$(-\cos[Q3[t]] L'[t] + L[t] \sin[Q3[t]] Q3'[t] - R \sin[a + Q4[t]] Q4'[t])^2)$$

**Simplify[Ek[t]]**

$$\frac{1}{2} (m2 R^2 (\sin[a + Q4[t]]^2 Q1'[t]^2 + Q4'[t]^2) +$$

$$m1 ((\cos[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] - R \sin[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] -$$

$$L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] (Q1'[t] + Q2'[t]) +$$

$$\cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[Q3[t]] L[t] Q3'[t] + R \cos[Q1[t]] \cos[a + Q4[t]] Q4'[t])^2 +$$

$$(\sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] + R \cos[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] +$$

$$\cos[Q1[t] + Q2[t]] L[t] \sin[Q3[t]] (Q1'[t] + Q2'[t]) +$$

$$\cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] Q3'[t] + R \cos[a + Q4[t]] \sin[Q1[t]] Q4'[t])^2 +$$

$$(\cos[Q3[t]] L'[t] - L[t] \sin[Q3[t]] Q3'[t] + R \sin[a + Q4[t]] Q4'[t])^2)$$

**Ep[t] = m1 \* g \* (R \* (Cos[a] - Cos[a + Q4[t]]) + L[t] \* (1 - Cos[Q3[t]])) +**

**(1/2) \* k \* Q4[t]^2 + m2 \* g \* R \* (Cos[a] - Cos[a + Q4[t]])**

$$g m2 R (\cos[a] - \cos[a + Q4[t]]) +$$

$$g m1 (R (\cos[a] - \cos[a + Q4[t]]) + (1 - \cos[Q3[t]]) L[t]) + \frac{1}{2} k Q4[t]^2$$

**Ek1 = D[Ek[t], L'[t]]**

$$\frac{1}{2} m1 (2 \cos[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]])$$

$$\begin{aligned} & (\cos[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] - R \sin[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] + \\ & L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] (-Q1'[t] - Q2'[t]) + \\ & \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[Q3[t]] L[t] Q3'[t] + R \cos[Q1[t]] \cos[a + Q4[t]] Q4'[t]) + \\ & 2 \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] (\sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] + R \cos[Q1[t]] \\ & \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] + \cos[Q1[t] + Q2[t]] L[t] \sin[Q3[t]] (Q1'[t] + Q2'[t]) + \\ & \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] Q3'[t] + R \cos[a + Q4[t]] \sin[Q1[t]] Q4'[t]) - \\ & 2 \cos[Q3[t]] (-\cos[Q3[t]] L'[t] + L[t] \sin[Q3[t]] Q3'[t] - R \sin[a + Q4[t]] Q4'[t]) \end{aligned}$$

**Simplify[E<sub>k1</sub>]**

$$m1 (L'[t] + R (\sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] + (\cos[Q2[t]] \cos[a + Q4[t]] \sin[Q3[t]] + \cos[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]]) Q4'[t]))$$

**Expand[E<sub>k1</sub>]**

$$\begin{aligned} & m1 \cos[Q3[t]]^2 L'[t] + m1 \cos[Q1[t] + Q2[t]]^2 \sin[Q3[t]]^2 L'[t] + \\ & m1 \sin[Q1[t] + Q2[t]]^2 \sin[Q3[t]]^2 L'[t] - \\ & m1 R \cos[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q1[t]] \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] + \\ & m1 R \cos[Q1[t]] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] - \\ & m1 \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q3[t]] Q3'[t] + \\ & m1 \cos[Q1[t] + Q2[t]]^2 \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q3[t]] Q3'[t] + \\ & m1 \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]]^2 \sin[Q3[t]] Q3'[t] + \\ & m1 R \cos[Q1[t]] \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[a + Q4[t]] \sin[Q3[t]] Q4'[t] + \\ & m1 R \cos[a + Q4[t]] \sin[Q1[t]] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] Q4'[t] + \\ & m1 R \cos[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q4'[t] \end{aligned}$$

**E<sub>k1</sub>' = D[E<sub>k1</sub>, t]**

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} m_1 (2 \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) \\
& (\cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] - R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + \\
& L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) + \\
& \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L[t] Q_3'[t] + R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4'[t]) + \\
& 2 \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] Q_3'[t] \\
& (\cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] - R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + \\
& L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) + \\
& \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L[t] Q_3'[t] + R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4'[t]) + \\
& 2 \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (Q_1'[t] + Q_2'[t]) \\
& (\sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] + R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + \\
& \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] Q_3'[t] + R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4'[t]) + \\
& 2 \cos[Q_3[t]] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] Q_3'[t] \\
& (\sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] + R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + \\
& \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] Q_3'[t] + R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4'[t]) + 2 \\
& \sin[Q_3[t]] Q_3'[t] (-\cos[Q_3[t]] L'[t] + L[t] \sin[Q_3[t]] Q_3'[t] - R \sin[a + Q_4[t]] Q_4'[t]) + \\
& 2 \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (-R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t]^2 + \\
& 2 \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) + \\
& \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& 2 \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L'[t] Q_3'[t] + 2 \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \\
& (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) Q_3'[t] - \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] Q_3'[t]^2 - \\
& 2 R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_1'[t] Q_4'[t] - R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_4'[t]^2 + \\
& \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L''[t] - R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1''[t] + \\
& L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (-Q_1''[t] - Q_2''[t]) + \\
& \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L[t] Q_3''[t] + R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4''[t]) + \\
& 2 \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (-R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t]^2 + \\
& 2 \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& 2 \cos[Q_3[t]] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] L'[t] Q_3'[t] + 2 \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] \\
& L[t] (Q_1'[t] + Q_2'[t]) Q_3'[t] - L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] Q_3'[t]^2 + \\
& 2 R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_1'[t] Q_4'[t] - R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_4'[t]^2 + \\
& \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L''[t] + R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1''[t] + \\
& \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] (Q_1''[t] + Q_2''[t]) + \\
& \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] Q_3''[t] + R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4''[t]) - \\
& 2 \cos[Q_3[t]] (2 \sin[Q_3[t]] L'[t] Q_3'[t] + \cos[Q_3[t]] L[t] Q_3'[t]^2 - R \cos[a + Q_4[t]] \\
& Q_4'[t]^2 - \cos[Q_3[t]] L''[t] + L[t] \sin[Q_3[t]] Q_3''[t] - R \sin[a + Q_4[t]] Q_4''[t])
\end{aligned}$$

**SL = Simplify[Ekl ']**

$$\begin{aligned}
& m1 (-R \cos[a + Q4[t]] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] Q2'[t] Q4'[t] + \\
& R \cos[a] \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] Q3'[t] Q4'[t] - \\
& R \cos[Q4[t]] \sin[a] \sin[Q3[t]] Q3'[t] Q4'[t] - \\
& R \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \sin[a] \sin[Q4[t]] Q3'[t] Q4'[t] - \\
& R \cos[a] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q3'[t] Q4'[t] + R \cos[a] \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] Q4'[t]^2 - \\
& R \cos[Q2[t]] \cos[Q4[t]] \sin[a] \sin[Q3[t]] Q4'[t]^2 - \\
& R \cos[Q3[t]] \sin[a] \sin[Q4[t]] Q4'[t]^2 - R \cos[a] \cos[Q2[t]] \sin[Q3[t]] \\
& \sin[Q4[t]] Q4'[t]^2 + R Q1'[t] (\cos[Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q2'[t] + \\
& \sin[Q2[t]] (\cos[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q3'[t] + \cos[a + Q4[t]] \sin[Q3[t]] Q4'[t])) + \\
& L''[t] + R \cos[Q4[t]] \sin[a] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] Q1''[t] + \\
& R \cos[a] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q1''[t] + \\
& R \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] \sin[a] Q4''[t] + \\
& R \cos[a] \cos[Q2[t]] \cos[Q4[t]] \sin[Q3[t]] Q4''[t] + \\
& R \cos[a] \cos[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q4''[t] - \\
& R \cos[Q2[t]] \sin[a] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q4''[t])
\end{aligned}$$

$$\mathbf{Ep1} = \mathbf{D}[\mathbf{Ep}[t], \mathbf{L}[t]]$$

$$gm1 (1 - \cos[Q3[t]])$$

$$\mathbf{Apart}[(\mathbf{SL} + \mathbf{Ep1}), \mathbf{L}''[t]]$$

$$m1 L''[t] -$$

$$\begin{aligned}
& m1 (-g + g \cos[Q3[t]] - R \cos[Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] Q2'[t] - R \cos[Q3[t]] \\
& \sin[Q2[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] Q3'[t] - R \cos[a + Q4[t]] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] \\
& Q1'[t] Q4'[t] + R \cos[a + Q4[t]] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] Q2'[t] Q4'[t] - \\
& R \cos[a] \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] Q3'[t] Q4'[t] + \\
& R \cos[Q4[t]] \sin[a] \sin[Q3[t]] Q3'[t] Q4'[t] + \\
& R \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \sin[a] \sin[Q4[t]] Q3'[t] Q4'[t] + \\
& R \cos[a] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q3'[t] Q4'[t] - R \cos[a] \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] Q4'[t]^2 + \\
& R \cos[Q2[t]] \cos[Q4[t]] \sin[a] \sin[Q3[t]] Q4'[t]^2 + R \cos[Q3[t]] \sin[a] \\
& \sin[Q4[t]] Q4'[t]^2 + R \cos[a] \cos[Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q4'[t]^2 - \\
& R \cos[Q4[t]] \sin[a] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] Q1''[t] - R \cos[a] \sin[Q2[t]] \\
& \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q1''[t] - R \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] \sin[a] Q4''[t] - \\
& R \cos[a] \cos[Q2[t]] \cos[Q4[t]] \sin[Q3[t]] Q4''[t] - R \cos[a] \cos[Q3[t]] \\
& \sin[Q4[t]] Q4''[t] + R \cos[Q2[t]] \sin[a] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q4''[t])
\end{aligned}$$

$$\mathbf{Ek2} = \mathbf{D}[\mathbf{Ek}[t], \mathbf{Q1}'[t]]$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} m_2 (-2 R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] \\
& \quad (-R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4'[t]) + \\
& \quad 2 R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] \\
& \quad (R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4'[t])) + \\
& \frac{1}{2} m_1 (2 (-L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] - R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]]) \\
& \quad (\cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] - R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + \\
& \quad L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L[t] Q_3'[t] + R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4'[t]) + \\
& \quad 2 (\cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] + R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]]) \\
& \quad (\sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] + R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] Q_3'[t] + R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4'[t]))
\end{aligned}$$

**Simplify[Ek2]**

$$\begin{aligned}
& m_1 R \sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] \sin[a + Q_4[t]] L'[t] + \\
& (m_1 + m_2) R^2 \sin[a + Q_4[t]]^2 Q_1'[t] + m_1 L[t]^2 \sin[Q_3[t]]^2 (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& m_1 R L[t] (2 \cos[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + \\
& \quad \cos[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_2'[t] + \\
& \quad \sin[Q_2[t]] (\cos[Q_3[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_3'[t] - \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_3[t]] Q_4'[t]))
\end{aligned}$$

**Ek2' = D[Ek2, t]**



$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} m_2 (-2 R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] \\
& \quad (-R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4'[t]) - \\
& \quad 2 R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4'[t] (-R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + \\
& \quad \quad R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4'[t]) - 2 R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] \\
& \quad (R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4'[t]) + \\
& \quad 2 R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4'[t] \\
& \quad (R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4'[t]) - \\
& \quad 2 R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] (-R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t])^2 - \\
& \quad \quad 2 R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_1'[t] Q_4'[t] - R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_4'[t]^2 - \\
& \quad \quad R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1''[t] + R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4''[t]) + \\
& \quad 2 R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] (-R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t])^2 + \\
& \quad \quad 2 R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_1'[t] Q_4'[t] - R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_4'[t]^2 + \\
& \quad \quad R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1''[t] + R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4''[t])) + \\
& \frac{1}{2} m_1 (2 (\cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] - R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + \\
& \quad L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L[t] Q_3'[t] + R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4'[t]) \\
& \quad (-\sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] - R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] - \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] (Q_1'[t] + Q_2'[t]) - \\
& \quad \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] Q_3'[t] - R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4'[t]) + \\
& \quad 2 (\cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] - R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + \\
& \quad L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L[t] Q_3'[t] + R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4'[t]) \\
& \quad (\sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] + R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] Q_3'[t] + R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4'[t]) + \\
& \quad 2 (-L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] - R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]]) \\
& \quad (-R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t])^2 + \\
& \quad 2 \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& \quad 2 \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L'[t] Q_3'[t] + 2 \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \\
& \quad (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) Q_3'[t] - \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] Q_3'[t]^2 - \\
& \quad 2 R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_1'[t] Q_4'[t] - R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_4'[t]^2 + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L''[t] - R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1''[t] + \\
& \quad L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (-Q_1''[t] - Q_2''[t]) + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L[t] Q_3''[t] + R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4''[t]) + \\
& \quad 2 (\cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] + R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]]) \\
& \quad (-R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t])^2 + \\
& \quad 2 \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& \quad L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& \quad 2 \cos[Q_3[t]] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] L'[t] Q_3'[t] + 2 \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] \\
& \quad L[t] (Q_1'[t] + Q_2'[t]) Q_3'[t] - L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] Q_3'[t]^2 + \\
& \quad 2 R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_1'[t] Q_4'[t] - R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_4'[t]^2 + \\
& \quad \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L''[t] + R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1''[t] + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] (Q_1''[t] + Q_2''[t]) + \\
& \quad \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] Q_3''[t] + R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4''[t]))
\end{aligned}$$

**S1 = Simplify[Ek2']**

R Sin[a + Q4[t]]

$$\begin{aligned}
 & \left( 2 m_1 L'[t] (\cos[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] Q_1'[t] + \cos[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] Q_2'[t] + \cos[Q_3[t]] \right. \\
 & \quad \left. \sin[Q_2[t]] Q_3'[t]) + 2 (m_1 + m_2) R \cos[a + Q_4[t]] Q_1'[t] Q_4'[t] + \right. \\
 & \quad \left. \frac{1}{2} m_1 \cos[Q_2[t] - Q_3[t]] L''[t] - \frac{1}{2} m_1 \cos[Q_2[t] + Q_3[t]] L''[t] + \right. \\
 & \quad \left. m_1 R \sin[a + Q_4[t]] Q_1''[t] + m_2 R \sin[a + Q_4[t]] Q_1''[t] \right) + m_1 L[t]^2 \sin[Q_3[t]] \\
 & (2 \cos[Q_3[t]] Q_1'[t] Q_3'[t] + 2 \cos[Q_3[t]] Q_2'[t] Q_3'[t] + \sin[Q_3[t]] (Q_1''[t] + Q_2''[t])) + \\
 & m_1 L[t] (2 \sin[Q_3[t]]^2 L'[t] (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
 & R (-\sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_2'[t]^2 + 2 \cos[Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] \\
 & \quad \sin[a + Q_4[t]] Q_2'[t] Q_3'[t] - \cos[Q_4[t]] \sin[a] \sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] Q_3'[t]^2 - \\
 & \quad \cos[a] \sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] \sin[Q_4[t]] Q_3'[t]^2 + \cos[Q_4[t]] \sin[a] \\
 & \quad \sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] Q_4'[t]^2 + \cos[a] \sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] \sin[Q_4[t]] Q_4'[t]^2 + \\
 & \quad Q_1'[t] (-2 \sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_2'[t] + 2 \cos[Q_2[t]] \\
 & \quad (\cos[Q_3[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_3'[t] + \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_3[t]] Q_4'[t])) + \\
 & 2 \cos[Q_2[t]] \cos[Q_4[t]] \sin[a] \sin[Q_3[t]] Q_1''[t] + 2 \cos[a] \cos[Q_2[t]] \\
 & \quad \sin[Q_3[t]] \sin[Q_4[t]] Q_1''[t] + \cos[Q_2[t]] \cos[Q_4[t]] \sin[a] \sin[Q_3[t]] Q_2''[t] + \\
 & \quad \cos[a] \cos[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] \sin[Q_4[t]] Q_2''[t] + \cos[Q_3[t]] \cos[Q_4[t]] \\
 & \quad \sin[a] \sin[Q_2[t]] Q_3''[t] + \cos[a] \cos[Q_3[t]] \sin[Q_2[t]] \sin[Q_4[t]] Q_3''[t] - \\
 & \quad \cos[a] \cos[Q_4[t]] \sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] Q_4''[t] + \\
 & \quad \sin[a] \sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] \sin[Q_4[t]] Q_4''[t]))
 \end{aligned}$$

**Ep2 = D[Ep[t], Q1[t]]**

0

**Apart[S1 + Ep2, Q1''[t]]**

$$\begin{aligned}
& (2 m_1 R \cos[Q_2[t]] \cos[Q_4[t]] L[t] \sin[a] \sin[Q_3[t]] + \\
& \quad m_1 L[t]^2 \sin[Q_3[t]]^2 + 2 m_1 R \cos[a] \cos[Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] \sin[Q_4[t]] + \\
& \quad m_1 R^2 \sin[a + Q_4[t]]^2 + m_2 R^2 \sin[a + Q_4[t]]^2) Q_1''[t] + \\
& \frac{1}{2} (4 m_1 L[t] \sin[Q_3[t]]^2 L'[t] Q_1'[t] + 4 m_1 R \cos[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] \\
& \quad \sin[a + Q_4[t]] L'[t] Q_1'[t] + 4 m_1 L[t] \sin[Q_3[t]]^2 L'[t] Q_2'[t] + \\
& \quad 4 m_1 R \cos[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] \sin[a + Q_4[t]] L'[t] Q_2'[t] - \\
& \quad 4 m_1 R L[t] \sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] Q_2'[t] - \\
& \quad 2 m_1 R L[t] \sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_2'[t]^2 + \\
& \quad 4 m_1 R \cos[Q_3[t]] \sin[Q_2[t]] \sin[a + Q_4[t]] L'[t] Q_3'[t] + \\
& \quad 4 m_1 \cos[Q_3[t]] L[t]^2 \sin[Q_3[t]] Q_1'[t] Q_3'[t] + \\
& \quad 4 m_1 R \cos[Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] Q_3'[t] + \\
& \quad 4 m_1 \cos[Q_3[t]] L[t]^2 \sin[Q_3[t]] Q_2'[t] Q_3'[t] + \\
& \quad 4 m_1 R \cos[Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[a + Q_4[t]] Q_2'[t] Q_3'[t] - \\
& \quad 2 m_1 R \cos[Q_4[t]] L[t] \sin[a] \sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] Q_3'[t]^2 - \\
& \quad 2 m_1 R \cos[a] L[t] \sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] \sin[Q_4[t]] Q_3'[t]^2 + \\
& \quad 4 m_1 R \cos[Q_2[t]] \cos[a + Q_4[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] Q_1'[t] Q_4'[t] + \\
& \quad 4 m_1 R^2 \cos[a + Q_4[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] Q_4'[t] + \\
& \quad 4 m_2 R^2 \cos[a + Q_4[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] Q_4'[t] + \\
& \quad 2 m_1 R \cos[Q_4[t]] L[t] \sin[a] \sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] Q_4'[t]^2 + \\
& \quad 2 m_1 R \cos[a] L[t] \sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] \sin[Q_4[t]] Q_4'[t]^2 + \\
& \quad m_1 R \cos[Q_2[t] - Q_3[t]] \sin[a + Q_4[t]] L''[t] - \\
& \quad m_1 R \cos[Q_2[t] + Q_3[t]] \sin[a + Q_4[t]] L''[t] + 2 m_1 R \cos[Q_2[t]] \cos[Q_4[t]] \\
& \quad L[t] \sin[a] \sin[Q_3[t]] Q_2''[t] + 2 m_1 L[t]^2 \sin[Q_3[t]]^2 Q_2''[t] + \\
& \quad 2 m_1 R \cos[a] \cos[Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] \sin[Q_4[t]] Q_2''[t] + \\
& \quad 2 m_1 R \cos[Q_3[t]] \cos[Q_4[t]] L[t] \sin[a] \sin[Q_2[t]] Q_3''[t] + \\
& \quad 2 m_1 R \cos[a] \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[Q_2[t]] \sin[Q_4[t]] Q_3''[t] - \\
& \quad 2 m_1 R \cos[a] \cos[Q_4[t]] L[t] \sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] Q_4''[t] + \\
& \quad 2 m_1 R L[t] \sin[a] \sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] \sin[Q_4[t]] Q_4''[t])
\end{aligned}$$

**Simplify[Apart[(S1 + Ep2), Q1'[t]]]**

$$\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
& (R \sin[a + Q_4[t]] (4 m_1 L'[t] (\cos[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] Q_1'[t] + \cos[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] Q_2'[t] + \\
& \quad \cos[Q_3[t]] \sin[Q_2[t]] Q_3'[t]) + 4 (m_1 + m_2) R \cos[a + Q_4[t]] Q_1'[t] Q_4'[t] + \\
& \quad m_1 \cos[Q_2[t] - Q_3[t]] L''[t] - m_1 \cos[Q_2[t] + Q_3[t]] L''[t] + \\
& \quad 2 m_1 R \sin[a + Q_4[t]] Q_1''[t] + 2 m_2 R \sin[a + Q_4[t]] Q_1''[t]) + 2 m_1 L[t]^2 \sin[Q_3[t]] \\
& (2 \cos[Q_3[t]] Q_1'[t] Q_3'[t] + 2 \cos[Q_3[t]] Q_2'[t] Q_3'[t] + \sin[Q_3[t]] (Q_1''[t] + Q_2''[t])) + \\
& 2 m_1 L[t] (2 \sin[Q_3[t]]^2 L'[t] (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& R (-\sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_2'[t]^2 + 2 \cos[Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] \\
& \quad \sin[a + Q_4[t]] Q_2'[t] Q_3'[t] - \cos[Q_4[t]] \sin[a] \sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] Q_3'[t]^2 - \\
& \quad \cos[a] \sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] \sin[Q_4[t]] Q_3'[t]^2 + \cos[Q_4[t]] \sin[a] \sin[Q_2[t]] \\
& \quad \sin[Q_3[t]] Q_4'[t]^2 + \cos[a] \sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] \sin[Q_4[t]] Q_4'[t]^2 + \\
& Q_1'[t] (-2 \sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_2'[t] + 2 \cos[Q_2[t]] \\
& \quad (\cos[Q_3[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_3'[t] + \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_3[t]] Q_4'[t])) + \\
& 2 \cos[Q_2[t]] \cos[Q_4[t]] \sin[a] \sin[Q_3[t]] Q_1''[t] + 2 \cos[a] \cos[Q_2[t]] \\
& \quad \sin[Q_3[t]] \sin[Q_4[t]] Q_1''[t] + \cos[Q_2[t]] \cos[Q_4[t]] \sin[a] \sin[Q_3[t]] Q_2''[t] + \\
& \quad \cos[a] \cos[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] \sin[Q_4[t]] Q_2''[t] + \cos[Q_3[t]] \cos[Q_4[t]] \\
& \quad \sin[a] \sin[Q_2[t]] Q_3''[t] + \cos[a] \cos[Q_3[t]] \sin[Q_2[t]] \sin[Q_4[t]] Q_3''[t] - \\
& \quad \cos[a] \cos[Q_4[t]] \sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] Q_4''[t] + \\
& \quad \sin[a] \sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] \sin[Q_4[t]] Q_4''[t]))))
\end{aligned}$$

**Ek3 = D[Ek[t], Q2'[t]]**

$$\frac{1}{2} m_1$$

$$\begin{aligned}
& (-2 L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (\cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] - R \sin[Q_1[t]] \\
& \quad \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L[t] Q_3'[t] + R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4'[t]) + \\
& 2 \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] (\sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] + R \cos[Q_1[t]] \\
& \quad \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] Q_3'[t] + R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4'[t]))
\end{aligned}$$

**Simplify[Ek3]**

$$\begin{aligned}
& m_1 L[t] \sin[Q_3[t]] (L[t] \sin[Q_3[t]] (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& R (\cos[Q_2[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] - \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_2[t]] Q_4'[t]))
\end{aligned}$$

**Ek3' = D[Ek3, t]**

$$\frac{1}{2} m1$$

$$\begin{aligned}
& (-2 \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] (\cos[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] - R \sin[Q1[t]] \\
& \quad \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] + L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] (-Q1'[t] - Q2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[Q3[t]] L[t] Q3'[t] + R \cos[Q1[t]] \cos[a + Q4[t]] Q4'[t]) - \\
& 2 \cos[Q1[t] + Q2[t]] L[t] \sin[Q3[t]] (Q1'[t] + Q2'[t]) \\
& (\cos[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] - R \sin[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] + \\
& \quad L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] (-Q1'[t] - Q2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[Q3[t]] L[t] Q3'[t] + R \cos[Q1[t]] \cos[a + Q4[t]] Q4'[t]) - \\
& 2 \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] Q3'[t] \\
& (\cos[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] - R \sin[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] + \\
& \quad L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] (-Q1'[t] - Q2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[Q3[t]] L[t] Q3'[t] + R \cos[Q1[t]] \cos[a + Q4[t]] Q4'[t]) + \\
& 2 \cos[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] (\sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] + R \cos[Q1[t]] \\
& \quad \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] + \cos[Q1[t] + Q2[t]] L[t] \sin[Q3[t]] (Q1'[t] + Q2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] Q3'[t] + R \cos[a + Q4[t]] \sin[Q1[t]] Q4'[t]) + \\
& 2 L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] (-Q1'[t] - Q2'[t]) \\
& (\sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] + R \cos[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] + \\
& \quad \cos[Q1[t] + Q2[t]] L[t] \sin[Q3[t]] (Q1'[t] + Q2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] Q3'[t] + R \cos[a + Q4[t]] \sin[Q1[t]] Q4'[t]) + \\
& 2 \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[Q3[t]] L[t] Q3'[t] \\
& (\sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] + R \cos[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] + \\
& \quad \cos[Q1[t] + Q2[t]] L[t] \sin[Q3[t]] (Q1'[t] + Q2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] Q3'[t] + R \cos[a + Q4[t]] \sin[Q1[t]] Q4'[t]) - \\
& 2 L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] (-R \cos[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t]^2 + \\
& \quad 2 \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] (-Q1'[t] - Q2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q1[t] + Q2[t]] L[t] \sin[Q3[t]] (-Q1'[t] - Q2'[t]) (Q1'[t] + Q2'[t]) + \\
& \quad 2 \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[Q3[t]] L'[t] Q3'[t] + 2 \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \\
& \quad (-Q1'[t] - Q2'[t]) Q3'[t] - \cos[Q1[t] + Q2[t]] L[t] \sin[Q3[t]] Q3'[t]^2 - \\
& \quad 2 R \cos[a + Q4[t]] \sin[Q1[t]] Q1'[t] Q4'[t] - R \cos[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q4'[t]^2 + \\
& \quad \cos[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L''[t] - R \sin[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1''[t] + \\
& \quad L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] (-Q1''[t] - Q2''[t]) + \\
& \quad \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[Q3[t]] L[t] Q3''[t] + R \cos[Q1[t]] \cos[a + Q4[t]] Q4''[t]) + \\
& 2 \cos[Q1[t] + Q2[t]] L[t] \sin[Q3[t]] (-R \sin[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t]^2 + \\
& \quad 2 \cos[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] (Q1'[t] + Q2'[t]) + \\
& \quad L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] (-Q1'[t] - Q2'[t]) (Q1'[t] + Q2'[t]) + \\
& \quad 2 \cos[Q3[t]] \sin[Q1[t] + Q2[t]] L'[t] Q3'[t] + 2 \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[Q3[t]] \\
& \quad L[t] (Q1'[t] + Q2'[t]) Q3'[t] - L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] Q3'[t]^2 + \\
& \quad 2 R \cos[Q1[t]] \cos[a + Q4[t]] Q1'[t] Q4'[t] - R \sin[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q4'[t]^2 + \\
& \quad \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L''[t] + R \cos[Q1[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1''[t] + \\
& \quad \cos[Q1[t] + Q2[t]] L[t] \sin[Q3[t]] (Q1''[t] + Q2''[t]) + \\
& \quad \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] Q3''[t] + R \cos[a + Q4[t]] \sin[Q1[t]] Q4''[t]))
\end{aligned}$$

**S2 = Simplify[EK3']**

$$\begin{aligned}
& m1 (R \sin[Q3[t]] L'[t] (\cos[Q2[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] - \cos[a + Q4[t]] \sin[Q2[t]] Q4'[t]) + \\
& L[t]^2 \sin[Q3[t]] \\
& (2 \cos[Q3[t]] Q1'[t] Q3'[t] + 2 \cos[Q3[t]] Q2'[t] Q3'[t] + \sin[Q3[t]] (Q1''[t] + Q2''[t])) + \\
& L[t] (2 \sin[Q3[t]]^2 L'[t] (Q1'[t] + Q2'[t]) + \\
& R (-\cos[Q2[t]] \cos[a + Q4[t]] \sin[Q3[t]] Q2'[t] Q4'[t] - \\
& \cos[a] \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] \sin[Q2[t]] Q3'[t] Q4'[t] + \cos[Q3[t]] \sin[a] \\
& \sin[Q2[t]] \sin[Q4[t]] Q3'[t] Q4'[t] + \cos[Q4[t]] \sin[a] \sin[Q2[t]] \\
& \sin[Q3[t]] Q4'[t]^2 + \cos[a] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q4'[t]^2 + \\
& Q1'[t] (-\sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q2'[t] + \cos[Q2[t]] \\
& (\cos[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q3'[t] + \cos[a + Q4[t]] \sin[Q3[t]] Q4'[t])) + \\
& \cos[Q2[t]] \cos[Q4[t]] \sin[a] \sin[Q3[t]] Q1''[t] + \cos[a] \cos[Q2[t]] \\
& \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q1''[t] - \cos[a] \cos[Q4[t]] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] Q4''[t] + \\
& \sin[a] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q4''[t]))
\end{aligned}$$

$$\mathbf{Ep3} = \mathbf{D[Ep[t], Q2[t]]}$$

0

$$\mathbf{Apart[(S2 + Ep3), Q2''[t]]}$$

$$\begin{aligned}
& m1 L[t]^2 \sin[Q3[t]]^2 Q2''[t] + \\
& m1 (2 L[t] \sin[Q3[t]]^2 L'[t] Q1'[t] + R \cos[Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] L'[t] Q1'[t] + \\
& 2 L[t] \sin[Q3[t]]^2 L'[t] Q2'[t] - R L[t] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] \\
& \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] Q2'[t] + 2 \cos[Q3[t]] L[t]^2 \sin[Q3[t]] Q1'[t] Q3'[t] + \\
& R \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] L[t] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] Q3'[t] + 2 \cos[Q3[t]] L[t]^2 \\
& \sin[Q3[t]] Q2'[t] Q3'[t] - R \cos[a + Q4[t]] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] Q4'[t] + \\
& R \cos[Q2[t]] \cos[a + Q4[t]] L[t] \sin[Q3[t]] Q1'[t] Q4'[t] - \\
& R \cos[Q2[t]] \cos[a + Q4[t]] L[t] \sin[Q3[t]] Q2'[t] Q4'[t] - \\
& R \cos[a] \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] L[t] \sin[Q2[t]] Q3'[t] Q4'[t] + \\
& R \cos[Q3[t]] L[t] \sin[a] \sin[Q2[t]] \sin[Q4[t]] Q3'[t] Q4'[t] + \\
& R \cos[Q4[t]] L[t] \sin[a] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] Q4'[t]^2 + \\
& R \cos[a] L[t] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q4'[t]^2 + \\
& R \cos[Q2[t]] \cos[Q4[t]] L[t] \sin[a] \sin[Q3[t]] Q1''[t] + \\
& L[t]^2 \sin[Q3[t]]^2 Q1''[t] + R \cos[a] \cos[Q2[t]] L[t] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q1''[t] - \\
& R \cos[a] \cos[Q4[t]] L[t] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] Q4''[t] + \\
& R L[t] \sin[a] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q4''[t])
\end{aligned}$$

$$\mathbf{Ek4} = \mathbf{D[Ek[t], Q3'[t]]}$$

$$\frac{1}{2} m1$$

$$\begin{aligned}
& (2 \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[Q3[t]] L[t] (\cos[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] - R \sin[Q1[t]] \\
& \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] + L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] (-Q1'[t] - Q2'[t]) + \\
& \cos[Q1[t] + Q2[t]] \cos[Q3[t]] L[t] Q3'[t] + R \cos[Q1[t]] \cos[a + Q4[t]] Q4'[t]) + \\
& 2 \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] (\sin[Q1[t] + Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] + R \cos[Q1[t]] \\
& \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] + \cos[Q1[t] + Q2[t]] L[t] \sin[Q3[t]] (Q1'[t] + Q2'[t]) + \\
& \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q1[t] + Q2[t]] Q3'[t] + R \cos[a + Q4[t]] \sin[Q1[t]] Q4'[t]) + \\
& 2 L[t] \sin[Q3[t]] (-\cos[Q3[t]] L'[t] + L[t] \sin[Q3[t]] Q3'[t] - R \sin[a + Q4[t]] Q4'[t]))
\end{aligned}$$

$$\mathbf{Simplify[Ek4]}$$

$$\begin{aligned}
& m_1 L[t] (R \cos[Q_3[t]] \sin[Q_2[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + L[t] Q_3'[t] - \\
& R (\sin[a] (\cos[Q_4[t]] \sin[Q_3[t]] + \cos[Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] \sin[Q_4[t]]) + \\
& \cos[a] (-\cos[Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] \cos[Q_4[t]] + \sin[Q_3[t]] \sin[Q_4[t]])) Q_4'[t])
\end{aligned}$$

$$\mathbf{Ek4}' = \mathbf{D}[\mathbf{Ek4}, t]$$

$$\frac{1}{2} m_1$$

$$\begin{aligned}
& (2 \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L'[t] (\cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] - R \sin[Q_1[t]] \\
& \quad \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L[t] Q_3'[t] + R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4'[t]) + \\
& 2 \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) \\
& (\cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] - R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + \\
& \quad L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L[t] Q_3'[t] + R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4'[t]) - \\
& 2 \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] Q_3'[t] \\
& (\cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] - R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + \\
& \quad L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L[t] Q_3'[t] + R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4'[t]) + \\
& 2 \cos[Q_3[t]] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] L'[t] (\sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] + R \cos[Q_1[t]] \\
& \quad \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] Q_3'[t] + R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4'[t]) + \\
& 2 \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L[t] (Q_1'[t] + Q_2'[t]) \\
& (\sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] + R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] Q_3'[t] + R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4'[t]) - \\
& 2 L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] Q_3'[t] \\
& (\sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] + R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] Q_3'[t] + R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4'[t]) + \\
& 2 \sin[Q_3[t]] L'[t] (-\cos[Q_3[t]] L'[t] + L[t] \sin[Q_3[t]] Q_3'[t] - R \sin[a + Q_4[t]] Q_4'[t]) + \\
& 2 \cos[Q_3[t]] L[t] Q_3'[t] \\
& (-\cos[Q_3[t]] L'[t] + L[t] \sin[Q_3[t]] Q_3'[t] - R \sin[a + Q_4[t]] Q_4'[t]) + \\
& 2 \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L[t] (-R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t]^2 + \\
& \quad 2 \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& \quad 2 \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L'[t] Q_3'[t] + 2 \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \\
& \quad (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) Q_3'[t] - \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] Q_3'[t]^2 - \\
& \quad 2 R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_1'[t] Q_4'[t] - R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_4'[t]^2 + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L''[t] - R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1''[t] + \\
& \quad L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (-Q_1''[t] - Q_2''[t]) + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L[t] Q_3''[t] + R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4''[t]) + \\
& 2 \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] (-R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t]^2 + \\
& \quad 2 \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& \quad L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& \quad 2 \cos[Q_3[t]] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] L'[t] Q_3'[t] + 2 \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] \\
& \quad L[t] (Q_1'[t] + Q_2'[t]) Q_3'[t] - L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] Q_3'[t]^2 + \\
& \quad 2 R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_1'[t] Q_4'[t] - R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_4'[t]^2 + \\
& \quad \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L''[t] + R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1''[t] + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] (Q_1''[t] + Q_2''[t]) + \\
& \quad \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] Q_3''[t] + R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4''[t]) + \\
& 2 L[t] \sin[Q_3[t]] (2 \sin[Q_3[t]] L'[t] Q_3'[t] + \cos[Q_3[t]] L[t] Q_3'[t]^2 - R \cos[a + Q_4[t]] \\
& \quad Q_4'[t]^2 - \cos[Q_3[t]] L''[t] + L[t] \sin[Q_3[t]] Q_3''[t] - R \sin[a + Q_4[t]] Q_4''[t])
\end{aligned}$$



**S3 = Simplify[Ek4']**

$$\begin{aligned}
& m1 (L'[t] (R \cos[Q3[t]] \sin[Q2[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] + 2 L[t] Q3'[t] - \\
& \quad R (\sin[a] (\cos[Q4[t]] \sin[Q3[t]] + \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \sin[Q4[t]]) + \\
& \quad \cos[a] (-\cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] + \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]])) Q4'[t]) + \\
& L[t] (-R \cos[Q3[t]] \cos[a + Q4[t]] \sin[Q2[t]] Q2'[t] Q4'[t] - R \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] \\
& \quad \sin[a] Q3'[t] Q4'[t] - R \cos[a] \cos[Q2[t]] \cos[Q4[t]] \sin[Q3[t]] Q3'[t] Q4'[t] - \\
& \quad R \cos[a] \cos[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q3'[t] Q4'[t] + R \cos[Q2[t]] \sin[a] \sin[Q3[t]] \\
& \quad \sin[Q4[t]] Q3'[t] Q4'[t] - R \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] \sin[a] Q4'[t]^2 - \\
& \quad R \cos[a] \cos[Q4[t]] \sin[Q3[t]] Q4'[t]^2 - R \cos[a] \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \\
& \quad \sin[Q4[t]] Q4'[t]^2 + R \sin[a] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q4'[t]^2 + \\
& \quad R Q1'[t] (\cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q2'[t] + \sin[Q2[t]] \\
& \quad (-\sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q3'[t] + \cos[Q3[t]] \cos[a + Q4[t]] Q4'[t])) + \\
& \quad R \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] \sin[a] \sin[Q2[t]] Q1''[t] + \\
& \quad R \cos[a] \cos[Q3[t]] \sin[Q2[t]] \sin[Q4[t]] Q1''[t] + \\
& \quad L[t] Q3''[t] + R \cos[a] \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] Q4''[t] - \\
& \quad R \cos[Q4[t]] \sin[a] \sin[Q3[t]] Q4''[t] - R \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \\
& \quad \sin[a] \sin[Q4[t]] Q4''[t] - R \cos[a] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q4''[t])
\end{aligned}$$

**Ep4 = D[Ep[t], Q3[t]]**

$$gm1 L[t] \sin[Q3[t]]$$

**Apart[(S3 + Ep4), Q3''[t]]**

$$\begin{aligned}
& m1 L[t]^2 Q3''[t] + m1 (gL[t] \sin[Q3[t]] + R \cos[Q3[t]] \sin[Q2[t]] \sin[a + Q4[t]] L'[t] Q1'[t] + \\
& \quad R \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] L[t] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] Q2'[t] + \\
& \quad 2 L[t] L'[t] Q3'[t] - RL[t] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] Q3'[t] + \\
& \quad R \cos[a] \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] L'[t] Q4'[t] - \\
& \quad R \cos[Q4[t]] \sin[a] \sin[Q3[t]] L'[t] Q4'[t] - R \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \sin[a] \\
& \quad \sin[Q4[t]] L'[t] Q4'[t] - R \cos[a] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] L'[t] Q4'[t] + \\
& \quad R \cos[Q3[t]] \cos[a + Q4[t]] L[t] \sin[Q2[t]] Q1'[t] Q4'[t] - \\
& \quad R \cos[Q3[t]] \cos[a + Q4[t]] L[t] \sin[Q2[t]] Q2'[t] Q4'[t] - \\
& \quad R \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] L[t] \sin[a] Q3'[t] Q4'[t] - \\
& \quad R \cos[a] \cos[Q2[t]] \cos[Q4[t]] L[t] \sin[Q3[t]] Q3'[t] Q4'[t] - \\
& \quad R \cos[a] \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q4[t]] Q3'[t] Q4'[t] + \\
& \quad R \cos[Q2[t]] L[t] \sin[a] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q3'[t] Q4'[t] - \\
& \quad R \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] L[t] \sin[a] Q4'[t]^2 - \\
& \quad R \cos[a] \cos[Q4[t]] L[t] \sin[Q3[t]] Q4'[t]^2 - \\
& \quad R \cos[a] \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q4[t]] Q4'[t]^2 + \\
& \quad RL[t] \sin[a] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q4'[t]^2 + \\
& \quad R \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] L[t] \sin[a] \sin[Q2[t]] Q1''[t] + \\
& \quad R \cos[a] \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q2[t]] \sin[Q4[t]] Q1''[t] + \\
& \quad R \cos[a] \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] L[t] Q4''[t] - \\
& \quad R \cos[Q4[t]] L[t] \sin[a] \sin[Q3[t]] Q4''[t] - R \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] L[t] \\
& \quad \sin[a] \sin[Q4[t]] Q4''[t] - R \cos[a] L[t] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q4''[t])
\end{aligned}$$

**Ek5 = D[Ek[t], Q4'[t]]**

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} m_2 (2 R^2 \sin[a + Q_4[t]]^2 Q_4'[t] + 2 R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] \\
& \quad (-R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4'[t]) + \\
& \quad 2 R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] \\
& \quad (R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4'[t])) + \\
& \frac{1}{2} m_1 (2 R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] (\cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] - R \sin[Q_1[t]] \\
& \quad \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L[t] Q_3'[t] + R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4'[t]) + \\
& \quad 2 R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] (\sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] + R \cos[Q_1[t]] \\
& \quad \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] Q_3'[t] + R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4'[t]) - \\
& \quad 2 R \sin[a + Q_4[t]] (-\cos[Q_3[t]] L'[t] + L[t] \sin[Q_3[t]] Q_3'[t] - R \sin[a + Q_4[t]] Q_4'[t]))
\end{aligned}$$

**Simplify [Ek5]**

$$\begin{aligned}
& R (m_1 (\cos[Q_2[t]] \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_3[t]] + \cos[Q_3[t]] \sin[a + Q_4[t]]) L'[t] - \\
& \quad m_1 L[t] (\cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] Q_1'[t] + \cos[a + Q_4[t]] \\
& \quad \sin[Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] Q_2'[t] + (-\cos[a] \cos[Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] \cos[Q_4[t]] + \\
& \quad \cos[Q_4[t]] \sin[a] \sin[Q_3[t]] + \cos[Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] \sin[a] \sin[Q_4[t]] + \\
& \quad \cos[a] \sin[Q_3[t]] \sin[Q_4[t])) Q_3'[t]) + (m_1 + m_2) R Q_4'[t])
\end{aligned}$$

$$\mathbf{Ek5}' = \mathbf{D}[\mathbf{Ek5}, t]$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} m_2 (4 R^2 \cos[a + Q_4[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_4'[t]^2 - 2 R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_1'[t] \\
& \quad (-R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4'[t]) - \\
& \quad 2 R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_4'[t] (-R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + \\
& \quad \quad R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4'[t]) + 2 R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_1'[t] \\
& \quad (R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4'[t]) - \\
& \quad 2 R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_4'[t] (R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + \\
& \quad \quad R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4'[t]) + 2 R^2 \sin[a + Q_4[t]]^2 Q_4''[t] + \\
& \quad 2 R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] (-R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t])^2 - \\
& \quad \quad 2 R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_1'[t] Q_4'[t] - R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_4'[t]^2 - \\
& \quad \quad R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1''[t] + R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4''[t]) + \\
& \quad 2 R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] (-R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t])^2 + \\
& \quad \quad 2 R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_1'[t] Q_4'[t] - R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_4'[t]^2 + \\
& \quad \quad R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1''[t] + R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4''[t]) + \frac{1}{2} m_1 \\
& (-2 R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_1'[t] (\cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] - R \sin[Q_1[t]] \\
& \quad \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L[t] Q_3'[t] + R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4'[t]) - \\
& \quad 2 R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_4'[t] (\cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] - R \sin[Q_1[t]] \\
& \quad \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L[t] Q_3'[t] + R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4'[t]) + \\
& \quad 2 R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_1'[t] (\sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] + R \cos[Q_1[t]] \\
& \quad \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] Q_3'[t] + R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4'[t]) - \\
& \quad 2 R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_4'[t] (\sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] + \\
& \quad R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t] + \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] \\
& \quad (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] Q_3'[t] + \\
& \quad R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4'[t]) - 2 R \cos[a + Q_4[t]] Q_4'[t] \\
& \quad (-\cos[Q_3[t]] L'[t] + L[t] \sin[Q_3[t]] Q_3'[t] - R \sin[a + Q_4[t]] Q_4'[t]) + \\
& \quad 2 R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] (-R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t])^2 + \\
& \quad \quad 2 \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& \quad \quad 2 \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L'[t] Q_3'[t] + 2 \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \\
& \quad \quad (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) Q_3'[t] - \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] Q_3'[t]^2 - \\
& \quad \quad 2 R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_1'[t] Q_4'[t] - R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_4'[t]^2 + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L''[t] - R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1''[t] + \\
& \quad L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (-Q_1''[t] - Q_2''[t]) + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] L[t] Q_3''[t] + R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_4''[t]) + \\
& \quad 2 R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] (-R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1'[t])^2 + \\
& \quad \quad 2 \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L'[t] (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& \quad L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] (-Q_1'[t] - Q_2'[t]) (Q_1'[t] + Q_2'[t]) + \\
& \quad \quad 2 \cos[Q_3[t]] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] L'[t] Q_3'[t] + 2 \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] \cos[Q_3[t]] \\
& \quad \quad L[t] (Q_1'[t] + Q_2'[t]) Q_3'[t] - L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] Q_3'[t]^2 + \\
& \quad \quad 2 R \cos[Q_1[t]] \cos[a + Q_4[t]] Q_1'[t] Q_4'[t] - R \sin[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_4'[t]^2 + \\
& \quad \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] \sin[Q_3[t]] L''[t] + R \cos[Q_1[t]] \sin[a + Q_4[t]] Q_1''[t] + \\
& \quad \cos[Q_1[t] + Q_2[t]] L[t] \sin[Q_3[t]] (Q_1''[t] + Q_2''[t]) + \\
& \quad \cos[Q_3[t]] L[t] \sin[Q_1[t] + Q_2[t]] Q_3''[t] + R \cos[a + Q_4[t]] \sin[Q_1[t]] Q_4''[t]) - \\
& \quad 2 R \sin[a + Q_4[t]] (2 \sin[Q_3[t]] L'[t] Q_3'[t] + \cos[Q_3[t]] L[t] Q_3'[t]^2 - R \cos[a + Q_4[t]] \\
& \quad \quad Q_4'[t]^2 - \cos[Q_3[t]] L''[t] + L[t] \sin[Q_3[t]] Q_3''[t] - R \sin[a + Q_4[t]] Q_4''[t])
\end{aligned}$$

**S4 = Simplify [Ek5']**

R (-m1 L'[t]

$$\begin{aligned}
 & (\cos[a + Q4[t]] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] Q1'[t] + 2 \cos[a + Q4[t]] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] \\
 & \quad Q2'[t] - 2 \cos[a] \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] Q3'[t] + 2 \cos[Q4[t]] \sin[a] \\
 & \quad \sin[Q3[t]] Q3'[t] + 2 \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \sin[a] \sin[Q4[t]] Q3'[t] + \\
 & \quad 2 \cos[a] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q3'[t] - \cos[a] \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] Q4'[t] + \\
 & \quad \cos[Q2[t]] \cos[Q4[t]] \sin[a] \sin[Q3[t]] Q4'[t] + \cos[Q3[t]] \sin[a] \\
 & \quad \sin[Q4[t]] Q4'[t] + \cos[a] \cos[Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q4'[t]) + \\
 & m1 \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] \sin[a] L''[t] + m1 \cos[a] \cos[Q2[t]] \cos[Q4[t]] \\
 & \quad \sin[Q3[t]] L''[t] + m1 \cos[a] \cos[Q3[t]] \sin[Q4[t]] L''[t] - \\
 & m1 \cos[Q2[t]] \sin[a] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] L''[t] - m1 L[t] \\
 & (\cos[Q2[t]] \cos[a + Q4[t]] \sin[Q3[t]] Q2'[t]^2 + \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] \sin[a] Q3'[t]^2 + \\
 & \quad \cos[a] \cos[Q2[t]] \cos[Q4[t]] \sin[Q3[t]] Q3'[t]^2 + \cos[a] \cos[Q3[t]] \\
 & \quad \sin[Q4[t]] Q3'[t]^2 - \cos[Q2[t]] \sin[a] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q3'[t]^2 + \\
 & \quad \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] \sin[a] Q3'[t] Q4'[t] + \cos[a] \cos[Q4[t]] \\
 & \quad \sin[Q3[t]] Q3'[t] Q4'[t] + \cos[a] \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q3'[t] Q4'[t] - \\
 & \quad \sin[a] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q3'[t] Q4'[t] + \sin[Q2[t]] Q2'[t] \\
 & \quad (2 \cos[Q3[t]] \cos[a + Q4[t]] Q3'[t] - \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q4'[t]) + \\
 & Q1'[t] (\cos[Q2[t]] \cos[a + Q4[t]] \sin[Q3[t]] Q2'[t] + \\
 & \quad \sin[Q2[t]] (\cos[Q3[t]] \cos[a + Q4[t]] Q3'[t] - \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q4'[t])) + \\
 & \cos[a] \cos[Q4[t]] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] Q1''[t] - \sin[a] \sin[Q2[t]] \\
 & \quad \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q1''[t] + \cos[a] \cos[Q4[t]] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] Q2''[t] - \\
 & \quad \sin[a] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q2''[t] - \\
 & \quad \cos[a] \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] Q3''[t] + \cos[Q4[t]] \sin[a] \\
 & \quad \sin[Q3[t]] Q3''[t] + \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \sin[a] \sin[Q4[t]] Q3''[t] + \\
 & \quad \cos[a] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q3''[t]) + m1 R Q4''[t] + m2 R Q4''[t])
 \end{aligned}$$

**Ep5 = D[Ep[t], Q4[t]]**

$$k Q4[t] + g m1 R \sin[a + Q4[t]] + g m2 R \sin[a + Q4[t]]$$

**Simplify[Ep5]**

$$k Q4[t] + g (m1 + m2) R \sin[a + Q4[t]]$$

**Simplify[Apart[Ek5', Q4''[t]]]**

R (-m1 L' [t]

$$\begin{aligned}
& (\text{Cos}[a + Q4[t]] \text{Sin}[Q2[t]] \text{Sin}[Q3[t]] Q1'[t] + 2 \text{Cos}[a + Q4[t]] \text{Sin}[Q2[t]] \text{Sin}[Q3[t]] \\
& \quad Q2'[t] - 2 \text{Cos}[a] \text{Cos}[Q2[t]] \text{Cos}[Q3[t]] \text{Cos}[Q4[t]] Q3'[t] + 2 \text{Cos}[Q4[t]] \text{Sin}[a] \\
& \quad \text{Sin}[Q3[t]] Q3'[t] + 2 \text{Cos}[Q2[t]] \text{Cos}[Q3[t]] \text{Sin}[a] \text{Sin}[Q4[t]] Q3'[t] + \\
& \quad 2 \text{Cos}[a] \text{Sin}[Q3[t]] \text{Sin}[Q4[t]] Q3'[t] - \text{Cos}[a] \text{Cos}[Q3[t]] \text{Cos}[Q4[t]] Q4'[t] + \\
& \quad \text{Cos}[Q2[t]] \text{Cos}[Q4[t]] \text{Sin}[a] \text{Sin}[Q3[t]] Q4'[t] + \text{Cos}[Q3[t]] \text{Sin}[a] \\
& \quad \text{Sin}[Q4[t]] Q4'[t] + \text{Cos}[a] \text{Cos}[Q2[t]] \text{Sin}[Q3[t]] \text{Sin}[Q4[t]] Q4'[t]) + \\
& m1 \text{Cos}[Q3[t]] \text{Cos}[Q4[t]] \text{Sin}[a] L''[t] + m1 \text{Cos}[a] \text{Cos}[Q2[t]] \text{Cos}[Q4[t]] \\
& \quad \text{Sin}[Q3[t]] L''[t] + m1 \text{Cos}[a] \text{Cos}[Q3[t]] \text{Sin}[Q4[t]] L''[t] - \\
& m1 \text{Cos}[Q2[t]] \text{Sin}[a] \text{Sin}[Q3[t]] \text{Sin}[Q4[t]] L''[t] - m1 L[t] \\
& (\text{Cos}[Q2[t]] \text{Cos}[a + Q4[t]] \text{Sin}[Q3[t]] Q2'[t]^2 + \text{Cos}[Q3[t]] \text{Cos}[Q4[t]] \text{Sin}[a] Q3'[t]^2 + \\
& \quad \text{Cos}[a] \text{Cos}[Q2[t]] \text{Cos}[Q4[t]] \text{Sin}[Q3[t]] Q3'[t]^2 + \text{Cos}[a] \text{Cos}[Q3[t]] \\
& \quad \text{Sin}[Q4[t]] Q3'[t]^2 - \text{Cos}[Q2[t]] \text{Sin}[a] \text{Sin}[Q3[t]] \text{Sin}[Q4[t]] Q3'[t]^2 + \\
& \quad \text{Cos}[Q2[t]] \text{Cos}[Q3[t]] \text{Cos}[Q4[t]] \text{Sin}[a] Q3'[t] Q4'[t] + \text{Cos}[a] \text{Cos}[Q4[t]] \\
& \quad \text{Sin}[Q3[t]] Q3'[t] Q4'[t] + \text{Cos}[a] \text{Cos}[Q2[t]] \text{Cos}[Q3[t]] \text{Sin}[Q4[t]] Q3'[t] Q4'[t] - \\
& \quad \text{Sin}[a] \text{Sin}[Q3[t]] \text{Sin}[Q4[t]] Q3'[t] Q4'[t] + \text{Sin}[Q2[t]] Q2'[t] \\
& \quad (2 \text{Cos}[Q3[t]] \text{Cos}[a + Q4[t]] Q3'[t] - \text{Sin}[Q3[t]] \text{Sin}[a + Q4[t]] Q4'[t]) + \\
& Q1'[t] (\text{Cos}[Q2[t]] \text{Cos}[a + Q4[t]] \text{Sin}[Q3[t]] Q2'[t] + \\
& \quad \text{Sin}[Q2[t]] (\text{Cos}[Q3[t]] \text{Cos}[a + Q4[t]] Q3'[t] - \text{Sin}[Q3[t]] \text{Sin}[a + Q4[t]] Q4'[t])) + \\
& \text{Cos}[a] \text{Cos}[Q4[t]] \text{Sin}[Q2[t]] \text{Sin}[Q3[t]] Q1''[t] - \text{Sin}[a] \text{Sin}[Q2[t]] \\
& \quad \text{Sin}[Q3[t]] \text{Sin}[Q4[t]] Q1''[t] + \text{Cos}[a] \text{Cos}[Q4[t]] \text{Sin}[Q2[t]] \text{Sin}[Q3[t]] Q2''[t] - \\
& \text{Sin}[a] \text{Sin}[Q2[t]] \text{Sin}[Q3[t]] \text{Sin}[Q4[t]] Q2''[t] - \\
& \text{Cos}[a] \text{Cos}[Q2[t]] \text{Cos}[Q3[t]] \text{Cos}[Q4[t]] Q3''[t] + \text{Cos}[Q4[t]] \text{Sin}[a] \\
& \quad \text{Sin}[Q3[t]] Q3''[t] + \text{Cos}[Q2[t]] \text{Cos}[Q3[t]] \text{Sin}[a] \text{Sin}[Q4[t]] Q3''[t] + \\
& \text{Cos}[a] \text{Sin}[Q3[t]] \text{Sin}[Q4[t]] Q3''[t]) + m1 R Q4''[t] + m2 R Q4''[t])
\end{aligned}$$

**Apart[(S4 + Ep5), Q4''[t]]**

$$\begin{aligned}
& k Q4[t] + g m1 R \sin[a + Q4[t]] + g m2 R \sin[a + Q4[t]] - \\
& m1 R \cos[a + Q4[t]] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] Q1'[t] - \\
& 2 m1 R \cos[a + Q4[t]] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] L'[t] Q2'[t] - \\
& m1 R \cos[Q2[t]] \cos[a + Q4[t]] L[t] \sin[Q3[t]] Q1'[t] Q2'[t] - \\
& m1 R \cos[Q2[t]] \cos[a + Q4[t]] L[t] \sin[Q3[t]] Q2'[t]^2 + \\
& 2 m1 R \cos[a] \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] L'[t] Q3'[t] - \\
& 2 m1 R \cos[Q4[t]] \sin[a] \sin[Q3[t]] L'[t] Q3'[t] - \\
& 2 m1 R \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \sin[a] \sin[Q4[t]] L'[t] Q3'[t] - \\
& 2 m1 R \cos[a] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] L'[t] Q3'[t] - \\
& m1 R \cos[Q3[t]] \cos[a + Q4[t]] L[t] \sin[Q2[t]] Q1'[t] Q3'[t] - \\
& 2 m1 R \cos[Q3[t]] \cos[a + Q4[t]] L[t] \sin[Q2[t]] Q2'[t] Q3'[t] - \\
& m1 R \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] L[t] \sin[a] Q3'[t]^2 - \\
& m1 R \cos[a] \cos[Q2[t]] \cos[Q4[t]] L[t] \sin[Q3[t]] Q3'[t]^2 - \\
& m1 R \cos[a] \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q4[t]] Q3'[t]^2 + \\
& m1 R \cos[Q2[t]] L[t] \sin[a] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q3'[t]^2 + \\
& m1 R \cos[a] \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] L'[t] Q4'[t] - \\
& m1 R \cos[Q2[t]] \cos[Q4[t]] \sin[a] \sin[Q3[t]] L'[t] Q4'[t] - \\
& m1 R \cos[Q3[t]] \sin[a] \sin[Q4[t]] L'[t] Q4'[t] - \\
& m1 R \cos[a] \cos[Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] L'[t] Q4'[t] + \\
& m1 R L[t] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q1'[t] Q4'[t] + \\
& m1 R L[t] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[a + Q4[t]] Q2'[t] Q4'[t] - \\
& m1 R \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] L[t] \sin[a] Q3'[t] Q4'[t] - \\
& m1 R \cos[a] \cos[Q4[t]] L[t] \sin[Q3[t]] Q3'[t] Q4'[t] - \\
& m1 R \cos[a] \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] L[t] \sin[Q4[t]] Q3'[t] Q4'[t] + \\
& m1 R L[t] \sin[a] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q3'[t] Q4'[t] + \\
& m1 R \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] \sin[a] L''[t] + \\
& m1 R \cos[a] \cos[Q2[t]] \cos[Q4[t]] \sin[Q3[t]] L''[t] + \\
& m1 R \cos[a] \cos[Q3[t]] \sin[Q4[t]] L''[t] - \\
& m1 R \cos[Q2[t]] \sin[a] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] L''[t] - \\
& m1 R \cos[a] \cos[Q4[t]] L[t] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] Q1''[t] + \\
& m1 R L[t] \sin[a] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q1''[t] - \\
& m1 R \cos[a] \cos[Q4[t]] L[t] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] Q2''[t] + \\
& m1 R L[t] \sin[a] \sin[Q2[t]] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q2''[t] + \\
& m1 R \cos[a] \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] \cos[Q4[t]] L[t] Q3''[t] - \\
& m1 R \cos[Q4[t]] L[t] \sin[a] \sin[Q3[t]] Q3''[t] - \\
& m1 R \cos[Q2[t]] \cos[Q3[t]] L[t] \sin[a] \sin[Q4[t]] Q3''[t] - \\
& m1 R \cos[a] L[t] \sin[Q3[t]] \sin[Q4[t]] Q3''[t] + (m1 + m2) R^2 Q4''[t]
\end{aligned}$$

**ÖZGEÇMİŞ**

Doğum tarihi 01.11.1982

Doğum yeri Aydın

Lise 1996-2000 Aydın Efeler Lisesi

Lisans 2000-2005 Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Müh. Mim. Fak.  
Makine Mühendisliği Bölümü

Yüksek Lisans 2005- Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Makine Müh. Anabilim Dalı, Makine Teorisi ve  
Kontrol Programı

**Çalıştığı kurum(lar)**

2006-2007 KE-Fibertec San. Ve Tic. Ltd. Şti.  
2008-Devam ediyor Totem A.Ş.