154486

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR HİPERYÜZEYİN ORTALAMA EĞRİLİĞİ KORUYAN İZOMETRİSİ PROBLEMİ

Yüksek Matematikçi Hülya BAĞDATLI

FBE Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi	:	16.04.2004
Tez Danışmanı	:	Prof. Dr. Ziya SOYUÇOK (YTÜ)
Jüri Üyeleri	:	Prof. Dr. Füsun URAS (YTÜ)
	:	Prof. Dr. Göksel AĞARGÜN (YTÜ)
	:	Prof. Dr. Afet ÖZOK (MÜ)
	:	Prof. Dr. Aynur UYSAL (İTÜ)

İSTANBUL, 2004

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR HİPERYÜZEYİN ORTALAMA EĞRİLİĞİ KORUYAN İZOMETRİSİ PROBLEMİ

Yüksek Matematikçi Hülya BAĞDATLI

FBE Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi	: 16.04.2004
Tez Danışmanı	: Prof. Dr. Ziya SOYUÇOK (YTÜ)
Jüri Üyeleri	: Prof. Dr. Füsun URAS (YTÜ)
	: Prof. Dr. Göksel AĞARGÜN (YTÜ)
	: Prof. Dr. Afet ÖZOK (MÜ)
	: Prof. Dr. Aynur UYSAL (İTÜ)

İSTANBUL, 2004

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

b_{AB}	İkinci esas form katsayısı
C^{∞}	Her mertebeden kısmi türevi var ve sürekli olan fonksiyonların sınıfı
$C^{\infty}(M,R)$	M den R ye giden C^{∞} sınıfından fonksiyonların kümesi
D	Riemann konneksiyonu
$\dfrac{\partial}{\partial x^{A}}$	Doğal baz
dx^{A}	Doğal bazın duali
e_{A}	Asal vektör
f_{*}	f fonksiyonunun diferansiyeli
g_{AB}	Birinci esas form katsayısı
H	Ortalama eğrilik
k_{A}	Asal eğrilik
L	Şekil operatörü
N	Birim normal vektör
R^{n+1}	(n+1)-boyutlu Öklit uzay
$T_{p}(M)$	M manifoldunun p noktasındaki teğet uzayı
$\chi(M)$	M manifoldunun C^{∞} sınıfından vektör alanlarının kümesi
w_{A}^{B}	Konneksiyon formu
Γ_{AB}^{C}	Christoffel sembolü

ŞEKİL LİSTESİ

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın giriş kısmında bu konuyla daha önce ilgilenmiş olan matematikçilerin araştırmalarından bahsedilmiş ve gerekli bazı önbilgiler verilmiştir.

İkinci kısmında, R^{n+1} deki ombilik noktası bulunmayan ve minimal olmayan bir hiperyüzeyin Bonnet hiperyüzeyi olması için gerek ve yeter şart bulunmuştur.

Üçüncü kısımda, sonsuz sayıda izometri kabul eden yani bükülebilen Bonnet hiperyüzeyleri incelenmiş ve bu hiperyüzeylerin ortalama eğriliği koruyarak kendi üzerine izometrik olarak tasvir edilebildiği görülmüştür.

Dördüncü kısımda, her bir bükülebilir Bonnet hiperyüzeyinin belirlenebilmesi için birinci ve ikinci esas form ve Gauss denklemi hesaplanmıştır.

Beşinci kısımda ise, elde edilen sonuçlar toplu olarak verilmiştir.

Çalışmalarım sırasında benden yardımını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Ziya Soyuçok' a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, her zaman beni destekleyen aileme ve bana yardımcı olan tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.

ÖZET

R^{n+1} deki Bonnet hiperyüzeylerinin, yani ortalama eğrilik korunarak izometrik olarak tasvir edilebilen hiperyüzeylerin belirlenmesi problemi ele alınmıştır.

Bir hiperyüzey üzerinde A-şebekesi adı verilen ortogonal koordinat sistemiyle oluşturulmuş bir şebeke tanımlanmıştır. R^{n+1} de ombilik noktası bulunmayan ve minimal olmayan bir hiperyüzeyin Bonnet hiperyüzeyi olması için gerek ve yeter koşul olarak bir A-şebekesine sahip olması gerektiği kanıtlanmıştır.

Ayrıca ortalama eğrilik korunarak bükülebilir hiperyüzeyler, yani birden fazla izometri kabul eden Bonnet hiperyüzeyleri incelenmiştir. Bükülebilir Bonnet hiperyüzeylerinin kendi üzerlerine bükülebildiği gösterilmiş ve bu hiperyüzeyler tam olarak belirlenmiştir. Belirlenen bu hiperyüzey ailesi içinde birbirlerine bükülebilenler de saptanmıştır. Böylece R^{n+1} deki bükülebilir Bonnet hiperyüzeylerinin sonlu sayıda olduğu görülmüştür ve tümü belirlenmiştir.

Anahtar kelimeler: Bonnet hiperyüzeyi, yandaş, Bonnet eğrisi, A-şebekesi, izometri, bükülebilir Bonnet hiperyüzeyi.

ABSTRACT

It is studied the problem of determining the Bonnet hypersurfaces in R^{n+1}, that is the hypersurfaces which can be isometrically maped preserving the mean curvature.

It is described a special orthogonal net which is called A-net on a hypersurface. It is proved that a non-minimal hypersurface in R^{n+1} with no umbilical points is a Bonnet hypersurface if and only if it has an A-net.

Moreover, it is considered isometric deformations of hypersurfaces preserving mean curvature, namely Bonnet hypersurfaces that have more than one A-net. It is shown that they can be deformable over themselves and these hypersurfaces are completely determined. Also, each other deformable hypersurfaces are pointed out in this determined hypersurface family. Thus, it is shown that deformable Bonnet hypersurfaces in R^{n+1} are finity number and they are all determined.

Keywords: Bonnet hypersurface, associate, isometry, Bonnet curve, A-net, deformable Bonnet hypersurface.

1. GİRİŞ

3–boyutlu Öklit uzayındaki yüzeylerin ortalama eğriliği koruyan bir izometri kabul etmesi problemi veya daha özel olarak izometrik deformasyonları problemi birçok matematikçi tarafından ele alınmıştır. Bu konuda ilk çalışanlardan Bonnet (Bonnet, 1867), her iki problem hakkında önemli sonuçlar elde etmiştir. Bonnet bir yüzeyin ortalama eğrilik korunarak izometrik olarak tasvir edilebilmesi probleminin genel halde çözülebilir olmadığına işaret ettikten sonra, sabit ortalama eğrilikli bütün yüzeylerin birbirlerine izometrik olarak tasvir edilebildiklerini, ortalama eğriliği sabit olmayanların da dönel yüzeye bükülebilen Weingarten yüzeyleri olduğunu göstermiştir. Cartan (Cartan, 1942), diferansiyel formların bir uygulaması olarak problemi ele almış, oldukça uzun hesaplardan sonra söz konusu dönel yüzeye bükülebilen Weingarten yüzeylerini sınıflandırmış ve her bir sınıfta beklenenin aksine sonlu sayıda yüzey olduğunu göstermiştir.

Son yıllarda problem tekrar ele alınmıştır. Chern (Chern, 1985), diferansiyel formları kullanarak ortalama eğriliği koruyan izometrik deformasyon için bir karakterizasyon elde etmiştir. Bu konuda birçok çalışması olan Roussos, (Roussos, 1999) Chern'in yöntemini kullanarak, genel hal, yani ortalama eğriliği koruyan izometri için bir karakterizasyon vermiştir. Problemle ilgili olarak Voss'un (Voss, 1993) önemli çalışması, Bobenko ve Either'in (Bobenko ve Either, 1998), Kenmotsu'nun (Kenmotsu, 1994), Colares ve Kenmotsu' nun (Colares ve Kenmotsu, 1989), Roussos'un (Roussos, 1987), Xiuxiong ve Chia-Kuei'nin (Xiuxiong ve Chia-Kuei, 1989) ve Kokubu'nun (Kokubu, 1992) makaleleri de probleme katkılar yapmıştır. Kokubu, R^{n+1} de ortalama eğriliği koruyan bir deformasyon kabul eden bir hiperyüzeyin yani bükülebilen bir Bonnet hiperyüzeyin

a) Minimal hiperyüzey ,

b) M^2, R^3 de bükülebilir Bonnet yüzeyi olmak üzere $M^2 x R^{n-2}$ silindirinin açık bir parçası,

c) N, S^3 de bükülebilir Bonnet yüzeyi ve CN, R^4 de N üzerinde bir koni olmak üzere $CNxR^{n-3}$ silindirinin açık bir parçası

d) (a) , (b) ve (c) nin karışımı olan bir hiperyüzey olduğunu göstermiştir.

Daha sonra Soyuçok (Soyuçok, 1995) Bonnet yüzeylerinin yani yukarıda **(b)** de söz edilen M^2 yüzeylerinin belirlenmesi problemini incelemiş ve bir yüzeyin Bonnet yüzeyi olması için yüzeyin özel bir izotermal parametreli sisteme sahip olmasının gerek ve yeter koşul olduğunu göstermiştir. Ayrıca, Cartan'ın uzun ve zor hesaplamalarla elde ettiği sonuçları, bunun bir uygulaması olarak elde etmiş ve Cartan tarafından belirlenen sınıflarda niçin sonlu sayıda yüzey olduğunu geometrik olarak açıklamıştır.

Soyuçok başka bir çalışmasında (Soyuçok, 1996) R^4 deki Bonnet hiperyüzeylerinin belirlenmesi problemini incelemiş ve bu hiperyüzeylerin büyüklüklerini elde etmiş ve 3–boyutlu bir hiperyüzeyin Bonnet hiperyüzeyi olması için gerek ve yeter koşulun özel bir ortogonal şebekeye sahip olması gerektiğini göstermiştir.

Bu çalışmada R^{n+1} deki bükülebilen Bonnet hiperyüzeylerini belirleme problemi ele alınmış ve tam olarak çözülmüştür. Ayrıca, bir hiperyüzeyin bir Bonnet hiperyüzeyi olması için gerek ve yeter koşulun A-şebekesi adı verilen özel bir ortogonal şebekeye sahip olması gerektiği gösterilmiştir.

1.1 Ön Bilgiler

M, bir C^∞ manifold olsun. M nin her bir noktasındaki teğet uzay üzerinde pozitif-definit bir iç çarpım tanımlı ise M manifolduna *Riemann manifoldu*, dejenere olmayan bir iç çarpım tanımlanmış ise *pseudo Riemann manifoldu* denir. Pseudo Riemann manifoldu üzerinde $\chi(M)$, C^∞ sınıfından vektör alanlarının kümesini, $C^\infty(M,R)$, M den R ye giden C^∞ sınıfından fonksiyonların kümesini göstermek üzere,

$D:\chi(M)\ x\ \chi(M)\to\chi(M)$, $D(X,Y)=D_X^Y$ şeklinde tanımlı D fonksiyonu için

$\forall f,g\in C^\infty(M,R),\quad \forall X,Y,Z\in\chi(M),\quad \forall p\in M$

(1) $D_{fX+gY}^Z=fD_x^z+gD_y^z$

(2) $D_X^{fY}=X(f)Y+fD_X^Y$

(3) $D_X^Y-D_Y^X=[X,Y]$

(4) $X_p<Y,Z>=<D_X^Y,Z>_p+<Y,D_X^Z>_p$

özellikleri sağlanıyorsa, D ye *Riemann konneksiyonu* denir (Hicks, 1965).

M ve M', Riemann manifoldları ve $f:M\to M'$ bir dönüşüm olsun. f bire bir ve üzerine, f ve f^{-1} C^∞ sınıfından ise f ye M den M' ye bir *difeomorfizim* denir (Hicks, 1965).

$f:M\to M'$ Riemann manifoldları arasında C^∞ sınıfından bir dönüşüm olsun.

$\forall X,Y \in T_p(M)$, $p \in M$ için $< X,Y > = < f_* X, f_* Y >$ oluyorsa, f ye bir *izometri* denir. f bir izometri ve difeomorfizim ise f ye *izometrik tasvir* denir. Bu durumda M , M' ye *izometriktir* denir (Hicks, 1965).

M , R^{n+1} in bir hiperyüzeyi , D, R^{n+1} in konneksiyonu ve N birim normal vektör alanı olmak üzere, her $p \in M$ ve $X \in T_p(M)$ için $L : T_p(M) \to T_p(M)$, $L(X) = D_X^N$ ile tanımlı lineer dönüşüme *şekil operatörü* denir (Hicks, 1965).

Ortalama eğriliği koruyan bir izometri kabul eden R^3 de bir yüzeye *Bonnet yüzeyi* ya da *B-yüzeyi* denir. R^{n+1} de böyle bir izometri kabul eden hiperyüzeye *Bonnet hiperyüzeyi* ya da *B-hiperyüzeyi* denir (Soyuçok, 1996).

İki Bonnet yüzeyi veya iki Bonnet hiperyüzeyi aynı ortalama eğriliğe sahip ise bu iki yüzey veya hiperyüzey birbirine *yandaştır* denir. Birbirine yandaş iki hiperyüzeyin birisinin üzerindeki eğrilik çizgileri diğer hiperyüzey üzerinde ortogonal bir şebekeye karşılık gelir. Bu ortogonal şebekelere *B-şebekeleri* ve her bir şebekenin eğrilerine *Bonnet eğrileri* ya da *B-eğrileri* denir (Soyuçok, 1995).

Ortalama eğrilik korunarak birden fazla izometri kabul eden Bonnet hiperyüzeylerine *bükülebilir Bonnet hiperyüzeyi* ya da *bükülebilir B-hiperyüzeyi* denir (Soyuçok, 1996).

2. TEMEL TEOREM

M ve M', R^{n+1} de n-boyutlu, minimal olmayan yandaş hiperyüzeyler olsun. Buna göre, şekil operatörlerinin rankları aynı ve 3 den az olur (Kokubu, 1992).

$\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ M nin, $\{e_1', e_2', ..., e_n'\}$ M' nün yerel ortonormal çatı alanını göstersin. Burada $e_1, e_2, ..., e_n$ asal vektörler olup bunlara karşı gelen $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$, $k_3, ..., k_n$ asal eğrilikleri için $k_1 \neq k_2$, $k_3 = k_4 = ... = 0$ dır. Ayrıca karşılıklı noktalardaki M ve M' nün şekil operatörlerinin null uzayları aynıdır. Buna göre,

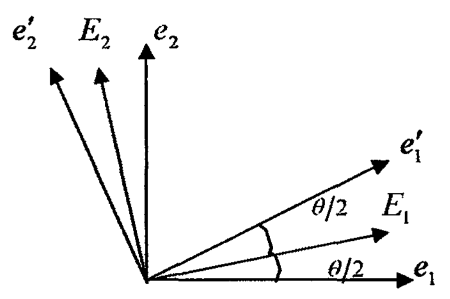
span $\{e_1, e_2\}$= span $\{e_1', e_2'\}$

span $\{e_3, e_4, ..., e_n\}$=span $\{e_3', e_4', ..., e_n'\}$

olur (Kokubu, 1992).

M', M ye yandaş hiperyüzey olduğundan, M' nün 1. ve 2. eğrilik çizgileri M üzerinde C_1 ve C_2 ortogonal eğrilerine karşılık gelir. C_1 ve C_2 ye M nin Bonnet eğrileri denir.

M nin Bonnet eğrileri ile eğrilik çizgilerinin açıortaylarının birim teğet vektörlerini E_1 ve E_2 ile gösterelim. M nin ortonormal çatı alanı olarak $\{E_1, E_2, E_3 = e_3, ..., E_n = e_n\}$ alınabilir. Aynı zamanda M' nün ortonormal çatı alanı olarak $\{E_1, E_2, E_3, ..., E_n\}$ seçilebilir.



Şekil 2.1 Bonnet eğrilerinin teğet vektörleri

M nin L şekil operatörü bu çatı alanına göre

$$L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} k_1(1+\cos\theta)+k_2(1-\cos\theta) & (k_1-k_2)\sin\theta & 0 & \ldots & 0 \\ (k_1-k_2)\sin\theta & k_1(1-\cos\theta)+k_2(1+\cos\theta) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

olarak yazılabilir. Burada θ, e_1 ve e_1' arasındaki açıdır, Şekil 2.1.

e_1' ile E_1 arasındaki açı $-\frac{\theta}{2}$ olduğundan, M' nün şekil operatörünün matris temsili, L de θ yerine $-\theta$ alınarak (Soyuçok, 1996),

$$L' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} k_1(1+\cos\theta)+k_2(1-\cos\theta) & -(k_1-k_2)\sin\theta & 0 & \ldots & 0 \\ -(k_1-k_2)\sin\theta & k_1(1-\cos\theta)+k_2(1+\cos\theta) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu çalışmada indislerin değerleri

$$1 \le i, j, k, \ldots \le 2$$
$$3 \le p, q, r, \ldots \le n$$
$$1 \le A, B, C, \ldots \le n$$

şeklinde seçilecektir.

2.1 Codazzi Denklemleri

M hiperyüzeyinin Codazzi denklemleri, D, M üzerindeki Riemann konneksiyonu olmak üzere

$$\left(D_{E_A}^{L}\right)E_B = \left(D_{E_B}^{L}\right)E_A$$

dır (Kobayashi ve Nomizu, 1963). Bu denklemlerin açık ifadesini elde etmek için önce

$$k_1^1 = \frac{1}{2}\{k_1(1+\cos\theta)+k_2(1-\cos\theta)\} = H + J\cos\theta = k; \quad H = \frac{k_1+k_2}{2} \neq 0$$

$$k_2^2 = \frac{1}{2}\{k_1(1-\cos\theta) + k_2(1+\cos\theta)\} = H - J\cos\theta = \bar{k}; \quad J = \frac{k_1 - k_2}{2} \neq 0 \tag{2.3}$$

$$k_1^2 = k_2^1 = \frac{1}{2}(k_1 - k_2)\sin\theta = J\sin\theta = t$$

tanımlarını yapalım. Bu tanımlara göre, M' hiperyüzeyi söz konusu olduğunda t yerine $-t$ yazmak yeterli olacaktır. Diğer ifadeler aynı kalacaktır. Bu taktirde (2.1)

$$L = \begin{pmatrix} k_1^1 & k_2^1 & 0 & \dots & 0 \\ k_1^2 & k_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

şeklini alır. Dolayısıyla,

$$L(E_i) = k_i^j E_j \tag{2.5}$$

$$L(E_p) = 0 \tag{2.6}$$

olur.

Şimdi

$$\left(D_{E_i}^L\right)E_j = \left(D_{E_j}^L\right)E_i$$

Codazzi denklemlerini ele alalım. Bu denklemlerin daha açık ifadesi,

$$D_{E_i}^{L(E_j)} - D_{E_j}^{L(E_i)} - L\left(D_{E_i}^{E_j}\right) + L\left(D_{E_j}^{E_i}\right) = 0 \tag{2.7}$$

dir.

Öte yandan, w_A^B konneksiyon formlarını göstermek üzere,

$$D_{E_A}^{E_B} = w_B^C(E_A)E_C \tag{2.8}$$

dir (Hicks, 1965). Buna göre (2.5), (2.6) ve (2.8) kullanılarak, (2.7) den

$$D_{E_i}^{k_j^l E_l} - D_{E_j}^{k_i^l E_l} - L\left(w_j^A(E_i)E_A\right) + L\left(w_i^A(E_j)E_A\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$E_i(k_j^l)E_l + k_j^l D_{E_l}^{E_l} - E_j(k_i^l)E_l - k_i^l D_{E_j}^{E_l} - w_j^A(E_i)L(E_A) + w_i^A(E_j)L(E_A) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$E_i(k_j^l)E_l + k_j^l w_l^A(E_i)E_A - E_j(k_i^l)E_l - k_i^l w_l^A(E_j)E_A - w_j^l(E_i)L(E_l) + w_i^l(E_j)L(E_l) = 0$$

elde edilir.

$E_1, E_2, ..., E_n$ vektörleri doğrusal bağımsız olduğundan, bütün E_A vektörlerinin katsayıları sıfır olmalıdır. Buna göre, E_i den,

$$E_i(k_j^i) + k_j^l w_l^i(E_i) - E_j(k_i^i) - k_i^l w_l^i(E_j) - k_l^i w_j^l(E_i) + k_l^i w_i^l(E_j) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$E_i(k_j^i) + (k_j^j - k_i^i)w_j^i(E_i) = E_j(k_i^i) + 2k_i^j w_j^i(E_j)$$

ve E_p den,

$$k_j^l w_l^p(E_i) - k_i^l w_l^p(E_j) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$k_j^l w_l^p(E_i) = k_i^l w_l^p(E_j)$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\left(D_{E_i}^L\right)E_p = \left(D_{E_p}^L\right)E_i \quad \Rightarrow$$

$$D_{E_i}^{L(E_p)} - D_{E_p}^{L(E_i)} - L\left(D_{E_i}^{E_p}\right) + L\left(D_{E_p}^{E_i}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-D_{E_p}^{k_i^j E_j} - L\left(w_p^A(E_i)E_A\right) + L\left(w_i^A(E_p)E_A\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-E_p(k_i^j)E_j - k_i^j D_{E_p}^{E_j} - w_p^A(E_i)L(E_A) + w_i^A(E_p)L(E_A) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-E_p(k_i^j)E_j - k_i^j w_j^A(E_p)E_A - w_p^l(E_i)L(E_l) + w_i^l(E_p)L(E_l) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-E_p(k_i^j)E_j - k_i^j w_j^A(E_p)E_A - k_l^m w_p^l(E_i)E_m + k_l^m w_i^l(E_p)E_m = 0$$

dir.

E_m den,

$$-E_p(k_i^m) - k_i^j w_j^m(E_p) - k_l^m w_p^l(E_i) + k_l^m w_i^l(E_p) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$E_p(k_i^m) + k_i^j w_j^m(E_p) = k_l^m \left\{w_i^l(E_p) - w_p^l(E_i)\right\}$$

E_p den,

$$-k_i^j w_j^p(E_p) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$k_i^j w_j^p(E_p) = 0$$

ve E_q dan

$$-k_i^j w_j^q(E_p)=0 \quad \Rightarrow$$

$$k_i^j w_j^q(E_p)=0$$

bulunur. Devam edilerek,

$$\left(D_{E_p}{}^L\right)E_q=\left(D_{E_q}{}^L\right)E_p \quad \Rightarrow$$

$$D_{E_p}^{L(E_q)}-D_{E_q}^{L(E_p)}-L\left(D_{E_p}^{E_q}\right)+L\left(D_{E_q}^{E_p}\right)=0 \quad \Rightarrow$$

$$-L\left(w_q^A(E_p)E_A\right)+L\left(w_p^A(E_q)E_A\right)=0 \quad \Rightarrow$$

$$-w_q^A(E_p)L(E_A)+w_p^A(E_q)L(E_A)=0 \quad \Rightarrow$$

$$-w_q^l(E_p)L(E_l)+w_p^l(E_q)L(E_l)=0 \quad \Rightarrow$$

$$-k_l^i w_q^l(E_p)E_i+k_l^i w_p^l(E_q)E_i=0$$

dir. E_i den

$$k_l^i w_q^l(E_p)=k_l^i w_p^l(E_q)$$

bulunur.

Böylece M hiperyüzeyinin Codazzi denklemleri,

$$E_i(k_j^i)+(k_j^j-k_i^i)w_j^i(E_i)=E_j(k_i^i)+2k_i^j w_j^i(E_j)$$

$$k_j^l w_l^p(E_i)=k_i^l w_l^p(E_j)$$

$$E_p(k_i^m)+k_i^j w_j^m(E_p)=k_l^m\left\{w_i^l(E_p)-w_p^l(E_i)\right\}$$

$$k_i^j w_j^p(E_p)=0$$

$$k_i^j w_j^q(E_p)=0$$

$$k_l^i w_q^l(E_p)=k_l^i w_p^l(E_q)$$

veya (2.3) gereğince

$$\begin{aligned}
&E_2(k)+(k-\bar{k})w_2^1(E_1)=E_1(t)+2tw_1^2(E_2)\\
&E_1(\bar{k})+(\bar{k}-k)w_1^2(E_2)=E_2(t)+2tw_2^1(E_1)\\
&\bar{k}w_2^p(E_1)-kw_1^p(E_2)=t\left[w_2^p(E_2)-w_1^p(E_1)\right]\\
&E_p(k)+kw_p^1(E_1)=t\left[2w_1^2(E_p)-w_p^2(E_1)\right]\\
&E_p(t)+tw_p^1(E_1)=\bar{k}\left[w_1^2(E_p)-w_p^2(E_1)\right]-kw_1^2(E_p)\\
&E_p(t)+tw_p^2(E_2)=k\left[w_2^1(E_p)-w_p^1(E_2)\right]-\bar{k}w_2^1(E_p)
\end{aligned} \qquad (2.9)$$

$$E_p(\bar{k}) + \bar{k}w_p^2(E_2) = t\left[2w_2^1(E_p) - w_p^1(E_2)\right]$$

$$kw_1^p(E_p) = -tw_2^p(E_p)$$

$$kw_1^q(E_p) = -tw_2^q(E_p)$$

$$\bar{k}w_2^p(E_p) = -tw_1^p(E_p)$$

$$k\left[w_p^1(E_q) - w_q^1(E_p)\right] = -t\left[w_p^2(E_q) - w_q^2(E_p)\right]$$

$$\bar{k}\left[w_p^2(E_q) - w_q^2(E_p)\right] = -t\left[w_p^1(E_q) - w_q^1(E_p)\right]$$

olarak bulunur.

M' nün Codazzi denklemlerini bulmak için, yukarıdaki denklemlerde sadece t yerine $-t$ yazmak yeterlidir. M' hiperyüzeyinin Codazzi denklemlerinin bu şekilde yazıldığı düşünülürse, aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$kw_1^p(E_p) = -tw_2^p(E_p)$$

$$kw_1^p(E_p) = tw_2^p(E_p)$$

den

$$w_1^p(E_p) = w_2^p(E_p) = 0, \tag{2.10}$$

$$kw_1^q(E_p) = -tw_2^q(E_p)$$

$$kw_1^q(E_p) = tw_2^q(E_p)$$

den

$$w_1^q(E_p) = w_2^q(E_p) = 0 \tag{2.11}$$

$$\bar{k}w_2^p(E_1) - kw_1^p(E_2) = t\left[w_2^p(E_2) - w_1^p(E_1)\right]$$

$$\bar{k}w_2^p(E_1) - kw_1^p(E_2) = -t\left[w_2^p(E_2) - w_1^p(E_1)\right]$$

den

$$2t\left[w_2^p(E_2) - w_1^p(E_1)\right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$t \neq 0, \quad w_p^2(E_2) = w_p^1(E_1) \equiv T_p, \tag{2.12}$$

$$E_p(\bar{k}) + \bar{k}w_p^2(E_2) = t\left[2w_2^1(E_p) - w_p^1(E_2)\right]$$

$$E_p(\bar{k}) + \bar{k}w_p^2(E_2) = -t\left[2w_2^1(E_p) - w_p^1(E_2)\right]$$

den

$$w_p^1(E_2) = 2w_2^1(E_p), \tag{2.13}$$

$$E_p(k) + kw_p^1(E_1) = t\left[2w_1^2(E_p) - w_p^2(E_1)\right]$$

$$E_p(k) + kw_p^1(E_1) = -t\left[2w_1^2(E_p) - w_p^2(E_1)\right]$$

den

$$w_p^2(E_1) = 2w_1^2(E_p) = -2w_2^1(E_p)$$

ve dolayısıyla (2.13) den

$$w_p^1(E_2) = -w_p^2(E_1) = 2w_2^1(E_p), \tag{2.14}$$

$$E_p(t) + tw_p^1(E_1) = \bar{k}\left[w_1^2(E_p) - w_p^2(E_1)\right] - kw_1^2(E_p)$$

$$-E_p(t) - tw_p^1(E_1) = \bar{k}\left[w_1^2(E_p) - w_p^2(E_1)\right] - kw_1^2(E_p)$$

den

$$\bar{k}\left[w_1^2(E_p) - w_p^2(E_1)\right] - kw_1^2(E_p) = 0,$$

(2.14) kullanılarak

$$-\bar{k}w_1^2(E_p) - kw_1^2(E_p) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$Hw_1^2(E_p) = 0$$

ve

$$Hw_p^1(E_2) = 0, \tag{2.15}$$

$$E_p(k) + kw_p^1(E_1) = t\left[2w_1^2(E_p) - w_p^2(E_1)\right]$$

$$E_p(k) + kw_p^1(E_1) = -t\left[2w_1^2(E_p) - w_p^2(E_1)\right]$$

den

$$E_p(k) + kw_p^1(E_1) = 0,$$

ve (2.12) kullanılarak

$$E_p(k) + kT_p = 0,$$

$$E_p(\bar{k}) + \bar{k}w_p^2(E_2) = t\left[2w_2^1(E_p) - w_p^1(E_2)\right]$$

$$E_p(\bar{k}) + \bar{k}w_p^2(E_2) = -t\left[2w_2^1(E_p) - w_p^1(E_2)\right]$$

den

$E_p(\bar{k}) + \bar{k}w_p^2(E_2) = 0,$

(2.12) gereğince

$E_p(\bar{k}) + \bar{k}T_p = 0,$

$$E_p(t) + tw_p^2(E_2) = k\left[w_2^1(E_p) - w_p^1(E_2)\right] - \bar{k}w_2^1(E_p)$$

$$-E_p(t) - tw_p^2(E_2) = k\left[w_2^1(E_p) - w_p^1(E_2)\right] - \bar{k}w_2^1(E_p)$$

ve (2.12) den,

$$E_p(t) + tT_p = k\left[w_2^1(E_p) - w_p^1(E_2)\right] - \bar{k}w_2^1(E_p)$$

$$-E_p(t) - tT_p = k\left[w_2^1(E_p) - w_p^1(E_2)\right] - \bar{k}w_2^1(E_p)$$

ve dolayısıyla

$E_p(t) + tT_p = 0,$

$$E_2(k) + (k - \bar{k})w_2^1(E_1) = E_1(t) + 2tw_1^2(E_2)$$

$$E_2(k) + (k - \bar{k})w_2^1(E_1) = -E_1(t) - 2tw_1^2(E_2)$$

den

$E_2(k) + (k - \bar{k})w_2^1(E_1) = 0$

ve

$$h \equiv w_2^1(E_1) \tag{2.16}$$

tanımı yapılarak

$E_2(k) + (k - \bar{k})h = 0,$

$$E_1(\bar{k}) + (\bar{k} - k)w_1^2(E_2) = E_2(t) + 2tw_2^1(E_1)$$

$$E_1(\bar{k}) + (\bar{k} - k)w_1^2(E_2) = -E_2(t) - 2tw_2^1(E_1)$$

den

$E_1(\bar{k}) + (\bar{k} - k)w_1^2(E_2) = 0$

ve

$$\bar{h} \equiv w_1^2(E_2) \tag{2.17}$$

tanımı yapılarak

$E_1(\bar{k}) + (\bar{k} - k)\bar{h} = 0,$

$$E_2(k)+(k-\bar{k})w_2^1(E_1)=E_1(t)+2tw_1^2(E_2)$$

$$E_2(k)+(k-\bar{k})w_2^1(E_1)=-E_1(t)-2tw_1^2(E_2)$$

den

$$E_1(t)+2tw_1^2(E_2)=0$$

ve (2.17) gereğince

$$E_1(t)+2t\bar{h}=0\,,$$

$$E_1(\bar{k})+(\bar{k}-k)w_1^2(E_2)=E_2(t)+2tw_2^1(E_1)$$

$$E_1(\bar{k})+(\bar{k}-k)w_1^2(E_2)=-E_2(t)-2tw_2^1(E_1)$$

den

$$E_2(t)+2tw_2^1(E_1)=0$$

ve (2.16) gereğince

$$E_2(t)+2th=0$$

bulunur.

Yukarıda bulunan denklemler toplu olarak ifade edilirse,

$$
\begin{aligned}
& w_1^p(E_p)=w_2^p(E_p)=0 \\
& w_1^q(E_p)=w_2^q(E_p)=0 \\
& w_p^2(E_2)=w_p^1(E_1)=T_p \\
& w_p^1(E_2)=-w_p^2(E_1)=2w_2^1(E_p) \\
& Hw_p^1(E_2)=0 \\
& E_p(k)+kT_p=0 \\
& E_p(\bar{k})+\bar{k}T_p=0 \\
& E_p(t)+tT_p=0 \\
& E_2(k)+(k-\bar{k})h=0 \\
& E_1(\bar{k})+(\bar{k}-k)\bar{h}=0 \\
& E_1(t)+2t\bar{h}=0 \\
& E_2(t)+2th=0 \\
& h=w_2^1(E_1)\,,\quad \bar{h}=w_1^2(E_2)
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

elde edilir.

$H \neq 0$ varsaydığımızdan (2.14) ve (2.15) denklemleri,

$$w_p^1(E_2) = w_p^2(E_1) = w_2^1(E_p) = 0 \qquad (2.19)$$

şeklini alır.

Böylece $k, \bar{k}, t$ ve $w_p^2(E_2) = w_p^1(E_1) = T_p$, $h = w_2^1(E_1)$ ve $\bar{h} = w_1^2(E_2)$ şeklinde tanımlanan T_p, h ve $\bar{h}$ fonksiyonlarının sağlanması gereken Codazzi denklemleri

$$\begin{aligned}
&E_p(k) + kT_p = 0 \\
&E_p(\bar{k}) + \bar{k}T_p = 0 \\
&E_p(t) + tT_p = 0 \\
&E_2(k) + (k - \bar{k})h = 0 \qquad (2.20) \\
&E_1(\bar{k}) + (\bar{k} - k)\bar{h} = 0 \\
&E_1(t) + 2t\bar{h} = 0 \\
&E_2(t) + 2th = 0
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

2.2 Gauss Denklemleri

M hiperyüzeyinin Gauss denklemleri,

$$D_{E_A}\left(D_{E_B}^{E_C}\right) - D_{E_B}\left(D_{E_A}^{E_C}\right) - D_{[E_A,E_B]}^{E_C} = < L(E_B), E_C > L(E_A) - < L(E_A), E_C > L(E_B)$$

dir (Kobayashi ve Nomizu, 1963). Şimdi vektörlerin çeşitli kombinasyonları için bu denklemlerin açık şeklini ele alalım ve sonuçlarda yukarıdaki denklemleri kullanalım.

1) $D_{E_1}\left(D_{E_2}^{E_1}\right) - D_{E_2}\left(D_{E_1}^{E_1}\right) - D_{[E_1,E_2]}^{E_1} = < L(E_2), E_1 > L(E_1) - < L(E_1), E_1 > L(E_2) \quad \Rightarrow$

$$D_{E_1}^{w_1^A(E_2)E_A} - D_{E_2}^{w_1^A(E_1)E_A} - D_{\{w_2^A(E_1) - w_1^A(E_2)\}E_A}^{E_1} = < tE_1 + \bar{k}E_2, E_1 > \{kE_1 + tE_2\}$$
$$- < kE_1 + tE_2, E_1 > \{tE_1 + \bar{k}E_2\} \qquad \Rightarrow$$

$$E_1\left(w_1^A(E_2)\right)E_A + w_1^A(E_2)D_{E_1}^{E_A} - E_2\left(w_1^A(E_1)\right)E_A - w_1^A(E_1)D_{E_2}^{E_A} - \left\{w_2^A(E_1) - w_1^A(E_2)\right\}D_{E_A}^{E_1}$$
$$= ktE_1 + t^2E_2 - ktE_1 - k\bar{k}E_2 \quad \Rightarrow$$

$$E_1\left(w_1^A(E_2)\right)E_A + w_1^A(E_2)w_A^B(E_1)E_B - E_2\left(w_1^A(E_1)\right)E_A - w_1^A(E_1)w_A^B(E_2)E_B$$
$$- \left\{w_2^A(E_1) - w_1^A(E_2)\right\}w_1^B(E_A)E_B = (t^2 - k\bar{k})E_2$$

elde edilir.

Bütün E_A vektörlerinin katsayıları sıfır olmalıdır. Böylece, E_2 nin katsayısından

$$\begin{aligned}&E_1\left(w_1^2(E_2)\right)+w_1^A(E_2)w_A^2(E_1)-E_2\left(w_1^2(E_1)\right)-w_1^A(E_1)w_A^2(E_2)\\&-w_2^A(E_1)w_1^2(E_A)+w_1^A(E_2)w_1^2(E_A)=t^2-k\bar{k} \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$E_1(\bar{h})+E_2(h)+\sum_{p=3}^{n}T_p^2+h^2+\bar{h}^2=t^2-k\bar{k}$$

bulunur.

2) $D_{E_1}\left(D_{E_2}^{E_2}\right)-D_{E_2}\left(D_{E_1}^{E_2}\right)-D_{[E_1,E_2]}^{E_2}=<L(E_2),E_2>L(E_1)-<L(E_1),E_2>L(E_2) \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned}&D_{E_1}^{w_2^A(E_2)E_A}-D_{E_2}^{w_2^A(E_1)E_A}-D_{\{w_2^A(E_1)-w_1^A(E_2)\}E_A}^{E_2}=<tE_1+\bar{k}E_2,E_2>\{kE_1+tE_2\}\\&-<kE_1+tE_2,E_2>\{tE_1+\bar{k}E_2\} \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&E_1\left(w_2^A(E_2)\right)E_A+w_2^A(E_2)D_{E_1}^{E_A}-E_2\left(w_2^A(E_1)\right)E_A-w_2^A(E_1)D_{E_2}^{E_A}-\{w_2^A(E_1)-w_1^A(E_2)\}D_{E_A}^{E_2}\\&=k\bar{k}E_1+\bar{k}tE_2-t^2E_1-\bar{k}tE_2 \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&E_1\left(w_2^A(E_2)\right)E_A+w_2^A(E_2)w_A^B(E_1)E_B-E_2\left(w_2^A(E_1)\right)E_A-w_2^A(E_1)w_A^B(E_2)E_B\\&-\{w_2^A(E_1)-w_1^A(E_2)\}w_2^B(E_A)E_B=(k\bar{k}-t^2)E_1\end{aligned}$$

dir.

E_1 in katsayısından

$$\begin{aligned}&E_1\left(w_2^1(E_2)\right)+w_2^A(E_2)w_A^1(E_1)-E_2\left(w_2^1(E_1)\right)-w_2^A(E_1)w_A^1(E_2)-w_2^A(E_1)w_2^1(E_A)\\&+w_1^A(E_2)w_2^1(E_A)=k\bar{k}-t^2 \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$-E_1(\bar{h})-E_2(h)-\sum_{p=3}^{n}T_p^2-h^2-\bar{h}^2=k\bar{k}-t^2$$

bulunur. Bu da yukarıdaki ile aynı sonucu verir.

3) $D_{E_p}\left(D_{E_1}^{E_2}\right)-D_{E_1}\left(D_{E_p}^{E_2}\right)-D_{[E_p,E_1]}^{E_2}=<L(E_1),E_2>L(E_p)-<L(E_p),E_2>L(E_1) \quad \Rightarrow$

$$D_{E_p}^{w_2^A(E_1)E_A}-D_{E_1}^{w_2^A(E_p)E_A}-\{w_1^A(E_p)-w_p^A(E_1)\}D_{E_A}^{E_2}=0 \quad \Rightarrow$$

$$E_p\left(w_2^A(E_1)\right)E_A+w_2^A(E_1)D_{E_p}^{E_A}-E_1\left(w_2^A(E_p)\right)E_A-w_2^A(E_p)D_{E_1}^{E_A}-\{w_1^A(E_p)-w_p^A(E_1)\}D_{E_A}^{E_2}=0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}&E_p\left(w_2^A(E_1)\right)E_A+w_2^A(E_1)w_A^B(E_p)E_B-E_1\left(w_2^A(E_p)\right)E_A-w_2^A(E_p)w_A^B(E_1)E_B\\&-\{w_1^A(E_p)-w_p^A(E_1)\}w_2^B(E_A)E_B=0\end{aligned}$$

dir.

E_1 in katsayısından

$$E_p\left(w_2^1(E_1)\right)+w_2^A(E_1)w_A^1(E_p)-E_1\left(w_2^1(E_p)\right)-w_2^A(E_p)w_A^1(E_1)$$
$$-w_1^A(E_p)w_2^1(E_A)+w_p^A(E_1)w_2^1(E_A)=0$$

yazılabilir. (2.18) sisteminin 1. , 3. ve sonuncu denklemleri kullanılarak, bu son denklemden

$$E_p(h)+T_ph=0$$

bulunur.

4) $D_{E_p}\left(D_{E_2}^{E_1}\right)-D_{E_2}\left(D_{E_p}^{E_1}\right)-D_{[E_p,E_2]}^{E_1}=<L(E_2),E_1>L(E_p)-<L(E_p),E_1>L(E_2) \quad \Rightarrow$

$$D_{E_p}^{w_1^A(E_2)E_A}-D_{E_2}^{w_1^A(E_p)E_A}-\left\{w_2^A(E_p)-w_p^A(E_2)\right\}D_{E_A}^{E_1}=0 \quad \Rightarrow$$

$$E_p\left(w_1^A(E_2)\right)E_A+w_1^A(E_2)D_{E_p}^{E_A}-E_2\left(w_1^A(E_p)\right)E_A-w_1^A(E_p)D_{E_2}^{E_A}-\left\{w_2^A(E_p)-w_p^A(E_2)\right\}D_{E_A}^{E_1}=0$$
$$\Rightarrow$$
$$E_p\left(w_1^A(E_2)\right)E_A+w_1^A(E_2)w_A^B(E_p)E_B-E_2\left(w_1^A(E_p)\right)E_A-w_1^A(E_p)w_A^B(E_2)E_B$$
$$-\left\{w_2^A(E_p)-w_p^A(E_2)\right\}w_1^B(E_A)E_B=0$$

dir.

E_2 nin katsayısından

$$E_p\left(w_1^2(E_2)\right)+w_1^A(E_2)w_A^2(E_p)-E_2\left(w_1^2(E_p)\right)-w_1^A(E_p)w_A^2(E_2)$$
$$-w_2^A(E_p)w_1^2(E_A)+w_p^A(E_2)w_1^2(E_A)=0$$

yazılabilir. Bu denklemden, (2.18) sisteminin 1. , 3. ve sonuncu denklemleri kullanılarak,

$$E_p(\bar{h})+T_p\bar{h}=0$$

bulunur.

5) $D_{E_p}\left(D_{E_1}^{E_q}\right)-D_{E_1}\left(D_{E_p}^{E_q}\right)-D_{[E_p,E_1]}^{E_q}=0 \quad \Rightarrow$

$$D_{E_p}^{w_q^A(E_1)E_A}-D_{E_1}^{w_q^A(E_p)E_A}-\left\{w_1^A(E_p)-w_p^A(E_1)\right\}D_{E_A}^{E_q}=0 \quad \Rightarrow$$

$$E_p\left(w_q^A(E_1)\right)E_A+w_q^A(E_1)D_{E_p}^{E_A}-E_1\left(w_q^A(E_p)\right)E_A-w_q^A(E_p)D_{E_1}^{E_A}$$
$$-\left\{w_1^A(E_p)-w_p^A(E_1)\right\}w_q^B(E_A)E_B=0 \quad \Rightarrow$$

$$E_p\left(w_q^A(E_1)\right)E_A+w_q^A(E_1)w_A^B(E_p)E_B-E_1\left(w_q^A(E_p)\right)E_A-w_q^A(E_p)w_A^B(E_1)E_B$$
$$-w_1^A(E_p)w_q^B(E_A)E_B+w_p^A(E_1)w_q^B(E_A)E_B=0$$

dir.

E_1 in katsayısından

$$E_p\left(w_q^1(E_1)\right)+w_q^A(E_1)w_A^1(E_p)-E_1\left(w_q^1(E_p)\right)-w_q^A(E_p)w_A^1(E_1)-w_1^A(E_p)w_q^1(E_A)$$
$$+w_p^A(E_1)w_q^1(E_A)=0$$

yazılabilir. Bu denklemden, (2.18) in 3. denklemi kullanılarak,

$$E_p(T_q)-w_q^r(E_p)T_r+T_pT_q=0$$

bulunur.

6) $D_{E_1}\left(D_{E_2}^{E_p}\right)-D_{E_2}\left(D_{E_1}^{E_p}\right)-D_{[E_1,E_2]}^{E_p}=0 \quad \Rightarrow$

$$D_{E_1}^{w_p^A(E_2)E_A}-D_{E_2}^{w_p^A(E_1)E_A}-\left\{w_2^A(E_1)-w_1^A(E_2)\right\}D_{E_A}^{E_p}=0 \quad \Rightarrow$$

$$E_1\left(w_p^A(E_2)\right)E_A+w_p^A(E_2)D_{E_1}^{E_A}-E_2\left(w_p^A(E_1)\right)E_A-w_p^A(E_1)D_{E_2}^{E_A}-\left\{w_2^A(E_1)-w_1^A(E_2)\right\}D_{E_A}^{E_p}=0$$
$$\Rightarrow$$
$$E_1\left(w_p^A(E_2)\right)E_A+w_p^A(E_2)w_A^B(E_1)E_B-E_2\left(w_p^A(E_1)\right)E_A-w_p^A(E_1)w_A^B(E_2)E_B$$
$$-w_2^A(E_1)w_p^B(E_A)E_B+w_1^A(E_2)w_p^B(E_A)E_B=0$$

dir.

E_2 nin katsayısından

$$E_1\left(w_p^2(E_2)\right)+w_p^A(E_2)w_A^2(E_1)-E_2\left(w_p^2(E_1)\right)-w_p^A(E_1)w_A^2(E_2)-w_2^A(E_1)w_p^2(E_A)$$
$$+w_1^A(E_2)w_p^2(E_A)=0$$

yazılabilir. Bu denklemden, (2.18) in 3. ve 13. denklemleri ve (2.19) kullanılarak,

$$E_1(T_p)-T_q\overline{h}-w_p^q(E_1)T_q+T_q\overline{h}=0 \quad \Rightarrow$$

$$E_1(T_p)-w_p^q(E_1)T_q=0$$

bulunur.

E_1 in katsayısından

$$E_1\left(w_p^1(E_2)\right)+w_p^A(E_2)w_A^1(E_1)-E_2\left(w_p^1(E_1)\right)-w_p^A(E_1)w_A^1(E_2)$$
$$-w_2^A(E_1)w_p^1(E_A)+w_1^A(E_2)w_p^1(E_A)=0 \qquad \Rightarrow$$

$$E_2(T_p)-T_ph-w_p^q(E_2)T_q+T_ph=0$$

$$E_2(T_p)-w_p^q(E_2)T_q=0$$

elde edilir.

7) $D_{E_p}\left(D_{E_q}^{E_r}\right)-D_{E_q}\left(D_{E_p}^{E_r}\right)-D_{[E_p,E_q]}^{E_r}=0 \quad \Rightarrow$

$$D_{E_p}^{w_r^A(E_q)E_A}-D_{E_q}^{w_r^A(E_p)E_A}-D_{\{w_p^A(E_q)-w_q^A(E_p)\}E_A}^{E_r}=0 \quad \Rightarrow$$

$$E_p\left(w_r^A(E_q)\right)E_A+w_r^A(E_q)D_{E_p}^{E_A}-E_q\left(w_r^A(E_p)\right)E_A-w_r^A(E_p)D_{E_q}^{E_A}-\{w_p^A(E_q)-w_q^A(E_p)\}D_{E_A}^{E_r}=0$$
$\Rightarrow$

$$E_p\left(w_r^A(E_q)\right)E_A+w_r^A(E_q)w_A^B(E_p)E_B-E_q\left(w_r^A(E_p)\right)E_A-w_r^A(E_p)w_A^B(E_q)E_B$$
$$-w_p^A(E_q)w_r^B(E_A)E_B+w_q^A(E_p)w_r^B(E_A)E_B=0$$

dir.

E_s nin katsayısından

$$E_p\left(w_r^s(E_q)\right)+w_r^A(E_q)w_A^s(E_p)-E_q\left(w_r^s(E_p)\right)-w_r^A(E_p)w_A^s(E_q)-w_p^A(E_q)w_r^s(E_A)$$
$$+w_q^A(E_p)w_r^s(E_A)=0$$

yazılabilir. Bu denklemden, (2.18) in 1. ve 2. denklemleri kullanılarak,

$$E_p\left(w_r^s(E_q)\right)+w_r^t(E_q)w_t^s(E_p)-E_q\left(w_r^s(E_p)\right)-w_r^t(E_p)w_t^s(E_q)-w_p^t(E_q)w_r^s(E_t)$$
$$+w_q^t(E_p)w_r^s(E_t)=0$$

bulunur.

Diğer Gauss denklemlerinden de yukarıdaki sonuçlar elde edilir, yeni denklem elde edilmez. Böylece yukarıda bulunan Gauss Denklemleri toplu olarak ifade edilirse,

$$E_1(\bar{h})+E_2(h)+\sum_{p=3}^{n}T_p^2+h^2+\bar{h}^2=t^2-k\bar{k}$$

$$E_p(h)+T_p h=0$$

$$E_p(\bar{h})+T_p\bar{h}=0$$

$$E_p(T_q)-w_q^r(E_p)T_r+T_pT_q=0 \qquad (2.21)$$

$$E_1(T_p)-w_p^q(E_1)T_q=0$$

$$E_2(T_p)-w_p^q(E_2)T_q=0$$

$$E_p\left(w_r^s(E_q)\right)+w_r^t(E_q)w_t^s(E_p)-E_q\left(w_r^s(E_p)\right)-w_r^t(E_p)w_t^s(E_q)-w_p^t(E_q)w_r^s(E_t)$$
$$+w_q^t(E_p)w_r^s(E_t)=0$$

elde edilir.

2.3 Yapı Denklemleri

$\{w^1, w^2, ..., w^n\}$, $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$nin dual çatı alanı olsun. Bu takdirde, (2.18) ve (2.19) kullanılarak,

$$w_2^1 = hw^1 - \bar{h}w^2$$

$$w_p^1 = T_p w^1$$

$$w_p^2 = T_p w^2$$

$$w_p^q = w_p^q(E_A)w^A$$

elde edilir. Buna göre,

$$dw^L = -w_J^L \wedge w^J$$

yapı denklemlerinden

$$dw^1 = -w_J^1 \wedge w^J = -w_2^1 \wedge w^2 - w_p^1 \wedge w^p \quad \Rightarrow$$

$$dw^1 = -hw^1 \wedge w^2 - T_p w^1 \wedge w^p$$

$$dw^2 = -w_J^2 \wedge w^J = -w_1^2 \wedge w^1 - w_p^2 \wedge w^p \quad \Rightarrow$$

$$dw^2 = \bar{h}w^1 \wedge w^2 - T_p w^2 \wedge w^p$$

$$dw^q = -w_J^q \wedge w^J = -w_1^q \wedge w^1 - w_2^q \wedge w^2 - w_p^q \wedge w^p \quad \Rightarrow$$

$$dw^q = -w_p^q(E_A)w^A \wedge w^p$$

bulunur. Yapı denklemleri toplu olarak ifade edilirse

$$\begin{aligned} dw^1 &= -hw^1 \wedge w^2 - T_p w^1 \wedge w^p \\ dw^2 &= \bar{h}w^1 \wedge w^2 - T_p w^2 \wedge w^p \\ dw^q &= -w_p^q(E_A)w^A \wedge w^p \end{aligned} \qquad (2.22)$$

yazılabilir.

Şimdi bir f fonksiyonunun $\{w^1, w^2, ..., w^n\}$ dual çatı alanına göre $df = f_A w^A$ diferansiyelini göz önüne alalım. $d^2 f = 0$ ifadesinde (2.22) denklemleri kullanılırsa,

$$df_A \wedge w^A + f_A dw^A = 0 \quad \Rightarrow$$

$$df_1 \wedge w^1 + f_1 dw^1 + df_2 \wedge w^2 + f_2 dw^2 + df_q \wedge w^q + f_q dw^q = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(f_{11}w^1 + f_{12}w^2 + f_{1p}w^p\right) \wedge w^1 + f_1\left(-hw^1 \wedge w^2 - T_p w^1 \wedge w^p\right) + \left(f_{21}w^1 + f_{22}w^2 + f_{2p}w^p\right) \wedge w^2$$

$$+ f_2\left(\bar{h}w^1 \wedge w^2 - T_p w^2 \wedge w^p\right) + \left(f_{q1}w^1 + f_{q2}w^2 + f_{qp}w^p\right) \wedge w^q + f_q\left(-w_p^q(E_A)w^A \wedge w^p\right) = 0$$

olur. Buradan, (2.18) in 2. denklemine göre $w_1^q(E_p) = w_2^q(E_p) = 0$ olması nedeniyle,

$$\left\{-f_{12} - hf_1 + f_{21} + \overline{h}f_2\right\}w^1 \wedge w^2 + \left\{-f_{1p} - T_p f_1 + f_{p1} - f_q w_p^q(E_1)\right\}w^1 \wedge w^p$$

$$+\left\{-f_{2p} - T_p f_2 + f_{p2} - f_q w_p^q(E_2)\right\}w^2 \wedge w^p + \left\{f_{pr} - f_{rp} + f_q w_r^q(E_p) - f_q w_p^q(E_r)\right\}w^r \wedge w^p = 0$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned}
&-f_{12} - hf_1 + f_{21} + \overline{h}f_2 = 0 \\
&-f_{1p} - T_p f_1 + f_{p1} - f_q w_p^q(E_1) = 0 \\
&-f_{2p} - T_p f_2 + f_{p2} - f_q w_p^q(E_2) = 0 \qquad (2.23) \\
&f_{pr} - f_{rp} + f_q w_r^q(E_p) - f_q w_p^q(E_r) = 0
\end{aligned}$$

uygunluk denklemleri elde edilir.

(2.20) in 6 . ve 7 . denklemleri,

$$(\ln|t|)_1 = -2\overline{h} \ , \ (\ln|t|)_2 = -2h \qquad (2.24)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece (2.23) nin 1. denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&-f_{12} - hf_1 + f_{21} + \overline{h}f_2 = 0 \quad \Rightarrow \\
&-(-2\overline{h})_2 - (-2\overline{h})h + (-2h)_1 + (-2h)\overline{h} = 0 \quad \Rightarrow \\
&2\overline{h}_2 - 2h_1 - 2h\overline{h} + 2\overline{h}h = 0 \quad \Rightarrow \\
&h_1 = \overline{h}_2 \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.4 Yeni Koordinatlar

g_{AB} birinci esas formun katsayıları olmak üzere w^A formları $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ yerel koordinatların uygun sisteminde,

$$w^A = \sqrt{g_{AA}}dx^A \quad (\ A \text{ da toplam yok })$$

şeklinde yazılabilir (Chern, Bryant, Gardner, Goldschmidt ve Griffiths, 1991). Buna göre,

$$\begin{aligned}
&w^q = \sqrt{g_{qq}}dx^q \quad \Rightarrow \\
&dw^q = \left(\sqrt{g_{qq}}\right)_{x^A} dx^A \wedge dx^q \quad \Rightarrow \\
&dw^q = \left(\sqrt{g_{qq}}\right)_{x^1} dx^1 \wedge dx^q + \left(\sqrt{g_{qq}}\right)_{x^2} dx^2 \wedge dx^q + \left(\sqrt{g_{qq}}\right)_{x^r} dx^r \wedge dx^q
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Şimdi (2.22) in 3.denklemini

$$dw^q = -w^q_p(E_A)w^A \wedge w^p = -w^q_p(E_A)\sqrt{g_{AA}g_{pp}}dx^A \wedge dx^p$$

$$dw^q = -w^q_p(E_1)\sqrt{g_{11}g_{pp}}dx^1 \wedge dx^p - w^q_p(E_2)\sqrt{g_{22}g_{pp}}dx^2 \wedge dx^p - w^q_p(E_r)\sqrt{g_{rr}g_{pp}}dx^r \wedge dx^p$$
$$- w^q_r(E_p)\sqrt{g_{pp}g_{rr}}dx^p \wedge dx^r$$

şeklinde yazalım.

dw^q nun iki ifadesinden

$$\left(\sqrt{g_{qq}}\right)_{x^1} = 0\,, \quad w^q_p(E_1) = 0 \tag{2.26}$$

$$\left(\sqrt{g_{qq}}\right)_{x^2} = 0\,, \quad w^q_p(E_2) = 0 \tag{2.27}$$

$$w^q_p(E_r) = w^q_r(E_p) \tag{2.28}$$

$$\left(\sqrt{g_{qq}}\right)_{x^p} = w^q_p(E_q)\sqrt{g_{qq}g_{pp}} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\ln\sqrt{g_{qq}}\right)_{x^p} = w^q_p(E_q)\sqrt{g_{pp}} \tag{2.29}$$

elde edilir.

(2.28), (2.23) ün sonuncu denkleminde kullanılırsa,

$$f_{pr} = f_{rp} \tag{2.30}$$

bulunur.

Öte yandan,

$$df = f_A w^A = f_A\sqrt{g_{AA}}dx^A$$

diferansiyeli, f nin

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^A}dx^A = f_{x^A}dx^A$$

adi diferansiyeli ile karşılaştırılırsa

$$f_A = \frac{1}{\sqrt{g_{AA}}}f_{x^A} = \frac{f_{x^A}}{\sqrt{g_{AA}}} \tag{2.31}$$

bulunur. Buna göre,

$$f_{pr} = \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}\left(\frac{f_{x^p}}{\sqrt{g_{pp}}}\right)_{x^r} = \frac{f_{x^p x^r}}{\sqrt{g_{pp}g_{rr}}} - \frac{f_{x^p}}{\sqrt{g_{pp}}}\frac{\left(\sqrt{g_{pp}}\right)_{x^r}}{\sqrt{g_{pp}g_{rr}}} \quad \Rightarrow$$

$$f_{pr} = \frac{f_{x^p x^r}}{\sqrt{g_{pp} g_{rr}}} - \frac{f_{x^p}}{\sqrt{g_{pp} g_{rr}}} \left(\ln \sqrt{g_{pp}}\right)_{x^r}$$

olur. Benzer şekilde f_{rp} hesaplanır ve $f_{x^p x^r} = f_{x^r x^p}$ olduğu göz önüne alınırsa, (2.30) dan

$$f_{x^p}\left(\ln \sqrt{g_{pp}}\right)_{x^r} = f_{x^r}\left(\ln \sqrt{g_{rr}}\right)_{x^p} \tag{2.32}$$

elde edilir. Örneğin, $f = x^3$, $p = 3$ ve $r > 3$ seçilirse, $f_{x^3} = 1$, $f_{x^r} = 0$ olacağından, (2.32) den $\left(\sqrt{g_{33}}\right)_{x^r} = 0, r \neq 3$ bulunur. Dolayısıyla

$$\left(\sqrt{g_{pp}}\right)_{x^r} = 0 \,, \quad p \neq r \tag{2.33}$$

yazabiliriz. O halde

$$g_{pp} = c^p(x^p)$$

dir. Bu sonuçla, (2.32) bir özdeşliğe dönüşür ve (2.29) dan

$$w_p^q(E_q) = 0 \tag{2.34}$$

elde edilir. Böylece,

$$w_p^1(E_p) = w_p^2(E_p) = 0$$

$$w_p^q(E_p) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$w_p^A(E_p) = 0$$

ve dolayısıyla

$$w_p^A(E_p)E_A = 0$$

olur. Buradan da

$$D_{E_p}^{E_p} = 0 \tag{2.35}$$

elde edilir.

$$w_p^1(E_r) = w_r^1(E_p) = 0$$

$$w_p^2(E_r) = w_r^2(E_p) = 0$$

$$w_p^q(E_r) = w_r^q(E_p)$$

olduğundan

$$D_{E_p}^{E_r} = D_{E_r}^{E_p} \tag{2.36}$$

bulunur.

(2.35) den dolayı $D_{E_p+E_r}^{E_p+E_r} = 0$ dır.

$$D_{E_p+E_r}^{E_p+E_r} = D_{E_p}^{E_p} + D_{E_p}^{E_r} + D_{E_r}^{E_p} + D_{E_r}^{E_r}$$

olduğundan, (2.35) ve (2.36) kullanılarak,

$$D_{E_p}^{E_r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$w_r^A(E_p)E_A = 0 \quad \Rightarrow$$

$$w_r^A(E_p) = 0 \tag{2.37}$$

elde edilir.

Böylece, (2.21) in 7. denklemi bir özdeşliğe dönüşür.

$w^1 = \sqrt{g_{11}}\,dx^1$ gereğince

$$dw^1 = \left(\sqrt{g_{11}}\right)_{x^2} dx^2 \wedge dx^1 + \left(\sqrt{g_{11}}\right)_{x^p} dx^p \wedge dx^1$$

dir. (2.22) nin 1. denklemi de

$$dw^1 = -h\left(\sqrt{g_{11}g_{22}}\right)dx^1 \wedge dx^2 - T_p\left(\sqrt{g_{11}g_{pp}}\right)dx^1 \wedge dx^p$$

şeklinde yazılabildiğinden, böylece

$$h = \frac{\left(\sqrt{g_{11}}\right)_{x^2}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} = \frac{\left(\ln\sqrt{g_{11}}\right)_{x^2}}{\sqrt{g_{22}}} = \left(\ln\sqrt{g_{11}}\right)_2 \tag{2.38}$$

$$T_p = \frac{\left(\sqrt{g_{11}}\right)_{x^p}}{\sqrt{g_{11}g_{pp}}} \tag{2.39}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$dw^2 = \left(\sqrt{g_{22}}\right)_{x^1} dx^1 \wedge dx^2 + \left(\sqrt{g_{22}}\right)_{x^p} dx^p \wedge dx^2$$

$$dw^2 = \bar{h}\left(\sqrt{g_{11}g_{22}}\right)dx^1 \wedge dx^2 - T_p\left(\sqrt{g_{22}g_{pp}}\right)dx^2 \wedge dx^p$$

den,

$$\bar{h} = \frac{\left(\sqrt{g_{22}}\right)_{x^1}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} = \frac{\left(\ln\sqrt{g_{22}}\right)_{x^1}}{\sqrt{g_{11}}} = \left(\ln\sqrt{g_{22}}\right)_1 \tag{2.40}$$

$$T_p = \frac{\left(\sqrt{g_{22}}\right)_{x^p}}{\sqrt{g_{22}g_{pp}}} \tag{2.41}$$

elde edilir.

$h_1 = \dfrac{h_{x^1}}{\sqrt{g_{11}}}$ olduğundan, (2.38) den

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left[\frac{\left(\ln\sqrt{g_{11}}\right)_{x^2}}{\sqrt{g_{22}}}\right]_{x^1}$$

yazılabilir. Buradan da

$$h_1 = \frac{\left(\ln\sqrt{g_{11}}\right)_{x^2x^1}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} - \frac{\left(\sqrt{g_{22}}\right)_{x^1}\left(\sqrt{g_{11}}\right)_{x^2}}{g_{11}g_{22}}$$

olur. Benzer şekilde, (2.40) göz önüne alınarak,

$$\overline{h}_2 = \frac{\left(\ln\sqrt{g_{22}}\right)_{x^1x^2}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} - \frac{\left(\sqrt{g_{22}}\right)_{x^1}\left(\sqrt{g_{11}}\right)_{x^2}}{g_{11}g_{22}}$$

bulunur. (2.25) e göre $h_1 = \overline{h}_2$ olduğundan, böylece

$$\left(\ln\frac{g_{11}}{g_{22}}\right)_{x^1x^2} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\left(\ln\frac{g_{11}}{g_{22}}\right)_{x^1} = \overline{A}(x^1) \quad \Rightarrow$$

$$\ln\frac{g_{11}}{g_{22}} = A(x^1) + B(x^2) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{g_{11}}{g_{22}} = e^{A(x^1)}.e^{B(x^2)} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{g_{11}}{e^{A(x^1)}} = \frac{g_{22}}{e^{-B(x^2)}} \quad \Rightarrow$$

$e^{A(x^1)} \equiv a(x^1)$, $\quad e^{-B(x^2)} \equiv b(x^2)$ denirse

$$\frac{g_{11}}{a(x^1)} = \frac{g_{22}}{b(x^2)} \tag{2.42}$$

elde edilir.

Şimdi

$$\overline{x}^1 = \int\sqrt{a(x^1)}dx^1 , \quad \overline{x}^2 = \int\sqrt{b(x^2)}dx^2 , \quad \overline{x}^p = \int\sqrt{c^p(x^p)}dx^p$$

ölçek dönüşümüyle $\overline{x}^1, \overline{x}^2, ..., \overline{x}^n$ koordinatlarına geçelim. Buna göre,

$$g_{AB} = \frac{\partial\overline{x}^K}{\partial x^A}\frac{\partial\overline{x}^L}{\partial x^B}\overline{g}_{KL}$$

den (Matsusima, 1972)

$g_{11} = a(x^1)\bar{g}_{11}$

$g_{22} = b(x^2)\bar{g}_{22}$

elde edilir ve (2.42) kullanılarak

$\bar{g}_{11} = \bar{g}_{22}$

bulunur.

$$g_{pp} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^p}\bar{g}_{pp}$$

den

$c^p(x^p) = c^p(x^p)\bar{g}_{pp} \quad \Rightarrow$

$\bar{g}_{pp} = 1$

bulunur. Böylece, koordinatları tekrar $x^1, x^2, ..., x^n$ ile göstererek

$$g_{11} = g_{22}\,, \quad g_{pp} = 1 \tag{2.43}$$

elde ederiz. Buna göre (2.39) ve (2.41) den T_p nin ifadesi,

$$T_p = \frac{\left(\sqrt{g_{11}}\right)_{x^p}}{\sqrt{g_{11}}} = \frac{\left(\sqrt{g_{22}}\right)_{x^p}}{\sqrt{g_{22}}} \tag{2.44}$$

bulunur.

Artık (2.26) ve (2.27) den (2.21) denklemlerinin 5. ve 6. denklemleri

$E_1(T_p) = 0$

$E_2(T_p) = 0$

şeklinde yazılabilir. O halde T_p x^1 ve x^2 ye bağlı değildir.

(2.37) den dolayı (2.21) in 4. denklemi

$E_p(T_q) + T_pT_q = 0$

şeklini alır. Denklem $p = q$ için

$$E_p(T_p) + (T_p)^2 = 0 \tag{2.45}$$

olur. Burada iki hal söz konusudur: **A)** $T_p = 0$ hali, **B)** $T_p \neq 0$ hali.

A) $T_p = 0$ hali.

(2.20) nin ilk 3 denklemi ve (2.21) in 2. ve 3. denklemi gereğince $k, \bar{k}, t, h$ ve $\bar{h}$ temel fonksiyonları $x^3, x^4, \ldots, x^n$ ye bağlı olmaz. Bunlar sadece x^1 ve x^2 nin fonksiyonları olurlar. Bu takdirde, R^{n+1} deki Bonnet hiperyüzeylerini belirleme problemi tamamiyle R^3 deki Bonnet yüzeylerini belirleme problemine indirgenir. Bu inceleme de (Soyuçok, 1995) tarafından yapılmış bulunmaktadır.

Bu halde Bonnet hiperyüzeyleri tabanı R^3 deki Bonnet yüzeyleri olan silindirlerden ibarettir.

B) $T_p \neq 0$ hali.

Bu halde (2.45) denkleminin çözümünden

$$T_p = \frac{1}{x^p + \varphi}; \quad \varphi = \varphi(x^3, \ldots, x^{p-1}, x^{p+1}, \ldots, x^n) \tag{2.46}$$

ve dolayısıyla

$$T_q = \frac{1}{x^q + \psi}; \quad \psi = \psi(x^3, \ldots, x^{q-1}, x^{q+1}, \ldots, x^n)$$

ve

$$\ln T_p = -\ln(x^p + \varphi) \quad , \quad \ln T_q = -\ln(x^q + \psi) \tag{2.47}$$

elde edilir.

$$E_p(T_q) + T_p T_q = 0$$

denklemi

$$\left(\ln T_q\right)_{x^p} = -T_p$$

şeklinde yazılabilir. (2.46) ve (2.47) den, $p \neq q$ için

$$\left(\ln(x^q + \psi)\right)_{x^p} = \frac{1}{x^p + \varphi} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\psi_{x^p}}{x^q + \psi} = \frac{1}{x^p + \varphi} \quad \Rightarrow$$

$$(x^p + \varphi)\psi_{x^p} = x^q + \psi$$

bulunur. Şimdi iki yanın x^p ye göre türevini alalım, $p \neq q$. $\varphi_{x^p} = 0$ olduğundan

$$\psi_{x^p} + (x^p + \varphi)\psi_{x^p x^p} = \psi_{x^p} \quad \Rightarrow$$

$$(x^p + \varphi)\psi_{x^p x^p} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\psi_{x^p x^p} = 0$$

bulunur. Buna göre ψ, γ^r ler sabit olmak üzere

$$\psi = \gamma^3 x^3 + \ldots + \gamma^{q-1} x^{q-1} + \gamma^{q+1} x^{q+1} + \ldots + \gamma^n x^n$$

formundadır.Buradan

$$T_q = \frac{1}{x^q + \gamma^3 x^3 + \ldots + \gamma^n x^n}$$

elde edilir.Burada

$$\gamma^3 = \frac{\beta^3}{\beta^q}, \quad \gamma^4 = \frac{\beta^4}{\beta^q}, \ldots, \gamma^n = \frac{\beta^n}{\beta^q}$$

alınırsa

$$T_q = \frac{\beta^q}{\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^q x^q + \ldots + \beta^n x^n} \tag{2.48}$$

bulunur. Bu sonuçla (2.44)

$$\frac{\left(\sqrt{g_{11}}\right)_{x^p}}{\sqrt{g_{11}}} = \frac{\beta^p}{\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\ln \sqrt{g_{11}}\right)_{x^p} = \left(\ln(\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)\right)_{x^p}$$

şeklini alır. Buradan

$$\sqrt{g_{11}} = (\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)\sqrt{\xi(x^1, x^2)} \quad \Rightarrow$$

$$g_{11} = (\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)^2 \xi(x^1, x^2)$$

elde edilir. (2.43) den dolayı da

$$g_{11} = g_{22} = (\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)^2 \xi(x^1, x^2) \tag{2.49}$$

bulunur.

Bu sonuçlarla (2.21) Gauss denklemlerinin 2. si ve 3. sü sağlanır. Gerçekten, (2.43) uyarınca, (2.21) in 2. denklemi

$$(\ln h)_{x^p} + T_p = 0$$

şeklinde yazılabilir. (2.38) ve (2.49) a göre

$$h = \frac{\left(\sqrt{\xi}\right)_{x^2}}{(\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)\xi}$$

olduğundan

$$(\ln h)_{x^p} = -\left[\ln(\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)\right]_{x^p} = -\frac{\beta^p}{\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n} = -T_p$$

dir. Böylece denklem sağlanır. 3. Gauss denkleminin de sağlandığı aynı şekilde gösterilir.

(2.20) nin 3. denklemi (2.39) ve (2.43) gereği

$E_p t + T_p t = 0 \quad \Rightarrow$

$$\frac{t_{x^p}}{t} = -\frac{\left(\sqrt{g_{11}}\right)_{x^p}}{\sqrt{g_{11}}}$$

şeklini alır. Çözümden

$t = \dfrac{A(x^1, x^2)}{\sqrt{g_{11}}} \quad \Rightarrow$

$$t = \frac{A(x^1, x^2)}{(\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)\sqrt{\xi}} \tag{2.50}$$

bulunur.

(2.24) ve (2.38) e göre

$\left(\ln|t|\right)_2 = -2h = -2\left(\ln\sqrt{g_{11}}\right)_2$

dir. (2.49) ve (2.50) uyarınca

$\left(\ln\sqrt{g_{11}}\right)_2 = \left(\ln\sqrt{\xi}\right)_2$ ve $\left(\ln|t|\right)_2 = \left(\ln|A|\right)_2 - \left(\ln\sqrt{\xi}\right)_2$

olduğundan, böylece

$\left(\ln|A|\right)_2 = -\left(\ln\sqrt{\xi}\right)_2 \quad \Rightarrow$

$\left(\ln|A|\sqrt{\xi}\right)_2 = 0$

elde edilir. Benzer şekilde, (2.24) ve (2.40) dan

$\left(\ln|t|\right)_1 = -2\left(\ln\sqrt{\xi}\right)_1$

yazılabilir. Buradan da

$\left(\ln|A|\sqrt{\xi}\right)_1 = 0$

elde edilir. Böylece bulunan $\left(\ln|A|\sqrt{\xi}\right)_2 = 0$ ve $\left(\ln|A|\sqrt{\xi}\right)_1 = 0$ dan

$A\sqrt{\xi} = C$; $C =$ sabit

bulunur. Böylece (2.50) den

$$t = \frac{C}{(\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)\xi} \tag{2.51}$$

elde edilir.

Öte yandan, (2.48) uyarınca (2.20) nin 1. denklemi

$$\frac{\partial k}{\partial x^p}+\frac{\beta^p k}{(\beta^3x^3+\ldots+\beta^n x^n)}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\left\{\ln\left|k(\beta^3x^3+\ldots+\beta^n x^n)\right|\right\}_{x^p}=0$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$k(\beta^3x^3+\ldots+\beta^n x^n)=\Psi(x^1,x^2) \quad \Rightarrow$$

$$k=\frac{\Psi(x^1,x^2)}{(\beta^3x^3+\ldots+\beta^n x^n)} \tag{2.52}$$

bulunur. (2.20) nin 2. denkleminden de, benzer şekilde

$$\bar{k}(\beta^3x^3+\ldots+\beta^n x^n)=\overline{\Psi}(x^1,x^2) \quad \Rightarrow$$

$$\bar{k}=\frac{\overline{\Psi}(x^1,x^2)}{(\beta^3x^3+\ldots+\beta^n x^n)} \tag{2.53}$$

elde edilir.

Şimdi H ortalama eğriliğini hesaplayalım. (2.3) gereğince, $H=\dfrac{k_1+k_2}{2}=\dfrac{k+\bar{k}}{2}$ olduğundan, (2.52) ve (2.53) kullanılarak

$$H=\frac{\mathcal{H}(x^1,x^2)}{(\beta^3x^3+\ldots+\beta^n x^n)}$$

yazılabilir. Buradaki $\mathcal{H}(x^1,x^2)$

$$\mathcal{H}(x^1,x^2)\equiv\frac{\Psi(x^1,x^2)+\overline{\Psi}(x^1,x^2)}{2}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Öte yandan, (2.3) e göre $k-\bar{k}=2J\cos\theta$, $J=\dfrac{t}{\sin\theta}$ olduğundan $\tan\theta=\dfrac{2t}{k-\bar{k}}$ yazılabilir. Burada (2.51), (2.52) ve (2.53) kullanılırsa

$$\tan\theta=\frac{2C}{\xi(x^1,x^2)\left\{\Psi(x^1,x^2)-\overline{\Psi}(x^1,x^2)\right\}}$$

elde edilir. O halde

$$\theta=\theta(x^1,x^2)$$

dir.

Şimdi de J yi hesaplayalım:

$$J = \frac{k-\bar{k}}{2\cos\theta} \quad \Rightarrow$$

$$J = \frac{\Psi(x^1,x^2) - \overline{\Psi}(x^1,x^2)}{2\cos\theta(\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)}$$

bulunur. Buradan

$$\mathcal{J}(x^1,x^2) \equiv \frac{\Psi(x^1,x^2) - \overline{\Psi}(x^1,x^2)}{2\cos\theta}$$

tanımıyla

$$J = \frac{\mathcal{J}(x^1,x^2)}{(\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)}$$

yazılabilir.

Elde edilen sonuçlar toplu olarak ifade edilirse,

$$k = \frac{\Psi(x^1,x^2)}{(\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)} \quad , \quad \bar{k} = \frac{\overline{\Psi}(x^1,x^2)}{(\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)}$$

$$H = \frac{\mathcal{H}(x^1,x^2)}{(\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)} \quad , \quad J = \frac{\mathcal{J}(x^1,x^2)}{(\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)} \quad , \quad \theta = \theta(x^1,x^2) \tag{2.54}$$

bulunur.

Yukarıdaki sonuçlardan, (2.20) Codazzi denklemlerinden sadece 4. ve 5. sini, (2.21) Gauss denklemlerinden de sadece 1. sini incelememiz gerektiği ortaya çıkar. Çünkü diğer bütün denklemler sağlanmaktadır. Şimdi geri kalan üç denklemi ele alalım.

(2.20) nin 4. denklemi (2.3) ve (2.38) gereğince

$$(H + J\cos\theta)_2 + 2J\cos\theta\left(\ln\sqrt{g_{11}}\right)_2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(H + J\cos\theta)_2 + J\cos\theta\left(\ln g_{11}\right)_2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(H + J\cos\theta)_{x^2} + J\cos\theta\left(\ln g_{11}\right)_{x^2} = 0$$

şeklinde ve dolayısıyla

$$H_{x^2} + J_{x^2}\cos\theta - (J\sin\theta)\theta_{x^2} + J\cos\theta\left(\ln g_{11}\right)_{x^2} = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem de, (2.54) ve (2.49) kullanılırsa

$$\mathcal{H}_{x^2} + \mathcal{J}_{x^2}\cos\theta - (\mathcal{J}\sin\theta)\theta_{x^2} + \mathcal{J}\cos\theta\frac{\xi_{x^2}}{\xi} = 0$$

şeklini alır. İki yan $\sin\theta$ ile çarpılırsa

$$\mathcal{H}_{x^2}\sin\theta - \mathcal{J}\theta_{x^2} + \mathcal{J}_{x^2}\cos\theta\sin\theta + (\mathcal{J}\cos^2\theta)\theta_{x^2} + \mathcal{J}\cos\theta\sin\theta\frac{\xi_{x^2}}{\xi} = 0$$

bulunur.

Öte yandan, $t = J\sin\theta$ ifadesinde, t nin (2.51) ve J nin (2.54) deki ifadesi kullanılarak

$$\frac{C}{(\beta^3x^3 + \ldots + \beta^n x^n)\xi} = \frac{\mathcal{J}}{(\beta^3x^3 + \ldots + \beta^n x^n)}\sin\theta \Rightarrow$$

$$\xi = \frac{C}{\mathcal{J}\sin\theta}$$

elde edilir. Bu ifadeyi yukarıda yerine yazalım:

$$\mathcal{H}_{x^2}\sin\theta - \mathcal{J}\theta_{x^2} + \mathcal{J}_{x^2}\cos\theta\sin\theta + (\mathcal{J}\cos^2\theta)\theta_{x^2}$$
$$+ \mathcal{J}\cos\theta\sin\theta\left\{\left(\frac{-C\mathcal{J}_{x^2}\sin\theta - C\mathcal{J}(\cos\theta)\theta_{x^2}}{\mathcal{J}^2\sin^2\theta}\right)\frac{\mathcal{J}\sin\theta}{C}\right\} = 0 \Rightarrow$$

$$\mathcal{H}_{x^2}\sin\theta - \mathcal{J}\theta_{x^2} + \mathcal{J}_{x^2}\cos\theta\sin\theta + (\mathcal{J}\cos^2\theta)\theta_{x^2} - \mathcal{J}_{x^2}\cos\theta\sin\theta - (\mathcal{J}\cos^2\theta)\theta_{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\mathcal{H}_{x^2}\sin\theta - \mathcal{J}\theta_{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\mathcal{H}_{x^2}}{\mathcal{J}} = \frac{\theta_{x^2}}{\sin\theta} \tag{2.55}$$

bulunur.

Yukarıda (2.20) nin 4. denklemi için yaptığımız işlemleri (2.20) nin 5. denklemi için tekrarlayalım.

$$(H - J\cos\theta)_1 - 2J\cos\theta\left(\ln\sqrt{g_{22}}\right)_1 = 0 \Rightarrow$$

$$(H - J\cos\theta)_1 - J\cos\theta(\ln g_{22})_1 = 0 \Rightarrow$$

$$(H - J\cos\theta)_{x^1} - J\cos\theta(\ln g_{22})_{x^1} = 0$$

şeklinde ve dolayısıyla

$$H_{x^1} - J_{x^1}\cos\theta + (J\sin\theta)\theta_{x^1} - J\cos\theta(\ln g_{22})_{x^1} = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem de, (2.49) ve (2.54) kullanılırsa

$$\mathcal{H}_{x^1} - \mathcal{J}_{x^1}\cos\theta + (\mathcal{J}\sin\theta)\theta_{x^1} - \mathcal{J}\cos\theta\frac{\xi_{x^1}}{\xi} = 0$$

şeklini alır. İki yan $\sin\theta$ ile çarpılırsa

$$\mathcal{H}_{x^1}\sin\theta + \mathcal{J}\theta_{x^1} - \mathcal{J}_{x^1}\cos\theta\sin\theta - (\mathcal{J}\cos^2\theta)\theta_{x^1} - \mathcal{J}\cos\theta\sin\theta\frac{\xi_{x^1}}{\xi} = 0$$

bulunur. Bu denklemde

$\xi = \dfrac{C}{\mathcal{J}\sin\theta}$ yerine yazılırsa

$$\mathcal{H}_{x^1}\sin\theta + \mathcal{J}\theta_{x^1} - \mathcal{J}_{x^1}\cos\theta\sin\theta - (\mathcal{J}\cos^2\theta)\theta_{x^1} - \mathcal{J}\cos\theta\sin\theta\left\{\left(\frac{-C\mathcal{J}_{x^1}\sin\theta - C\mathcal{J}(\cos\theta)\theta_{x^1}}{\mathcal{J}^2\sin^2\theta}\right)\frac{\mathcal{J}\sin\theta}{C}\right\} = 0 \Rightarrow$$

$$\mathcal{H}_{x^1}\sin\theta + \mathcal{J}\theta_{x^1} - \mathcal{J}_{x^1}\cos\theta\sin\theta - (\mathcal{J}\cos^2\theta)\theta_{x^1} + \mathcal{J}_{x^1}\cos\theta\sin\theta + (\mathcal{J}\cos^2\theta)\theta_{x^1} = 0 \Rightarrow$$

$$\mathcal{H}_{x^1}\sin\theta + \mathcal{J}\theta_{x^1} = 0 \Rightarrow$$

$$\mathcal{H}_{x^1}\sin\theta = -\mathcal{J}\theta_{x^1} \Rightarrow$$

$$\frac{\mathcal{H}_{x^1}}{\mathcal{J}} = -\frac{\theta_{x^1}}{\sin\theta} \tag{2.56}$$

bulunur.

Şimdi de (2.21) deki 1. Gauss denklemini ele alalım. h ve $\bar{h}$ nin (2.38) ve (2.40) ile verilen ifadesinde (2.49) kullanılırsa,

$$h = \frac{\xi_{x^2}}{2(\beta^3x^3 + \ldots + \beta^nx^n)\xi^{3/2}}$$

ve

$$\bar{h} = \frac{\xi_{x^1}}{2(\beta^3x^3 + \ldots + \beta^nx^n)\xi^{3/2}}$$

bulunur. Bunlarla birlikte (2.48) ve (2.54) ü (2.21) in 1. denkleminde kullanalım.

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\xi_{x^2}}{2(\beta^3x^3+\ldots+\beta^nx^n)\xi^{3/2}}\right)\frac{1}{(\beta^3x^3+\ldots+\beta^nx^n)\sqrt{\xi}}$$
$$+\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\xi_{x^1}}{2(\beta^3x^3+\ldots+\beta^nx^n)\xi^{3/2}}\right)\frac{1}{(\beta^3x^3+\ldots+\beta^nx^n)\sqrt{\xi}}$$
$$+\frac{\sum_{p=3}^{n}(\beta^p)^2}{(\beta^3x^3+\ldots+\beta^nx^n)^2}+\frac{(\xi_{x^1})^2}{4(\beta^3x^3+\ldots+\beta^nx^n)^2\xi^3}$$
$$+\frac{(\xi_{x^2})^2}{4(\beta^3x^3+\ldots+\beta^nx^n)^2\xi^3}=\frac{\mathcal{J}^2-\mathcal{H}^2}{(\beta^3x^3+\ldots+\beta^nx^n)^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\xi_{x^2}}{\xi^{3/2}}\right)\frac{1}{\sqrt{\xi}}+\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\xi_{x^1}}{\xi^{3/2}}\right)\frac{1}{\sqrt{\xi}}+2\sum_{p=3}^{n}(\beta^p)^2+\frac{(\xi_{x^1})^2}{2\xi^3}+\frac{(\xi_{x^2})^2}{2\xi^3}=2\left(\mathcal{J}^2-\mathcal{H}^2\right)\ \Rightarrow$$

$$\frac{\left(2\xi_{x^2x^2}\xi-3(\xi_{x^2})^2\right)\sqrt{\xi}}{2\xi^3}\frac{1}{\sqrt{\xi}}+\frac{\left(2\xi_{x^1x^1}\xi-3(\xi_{x^1})^2\right)\sqrt{\xi}}{2\xi^3}\frac{1}{\sqrt{\xi}}+2\sum_{p=3}^{n}(\beta^p)^2$$
$$+\frac{(\xi_{x^1})^2}{2\xi^3}+\frac{(\xi_{x^2})^2}{2\xi^3}=2\left(\mathcal{J}^2-\mathcal{H}^2\right)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\xi\xi_{x^2x^2}}{\xi^3}-\frac{3(\xi_{x^2})^2}{2\xi^3}+\frac{\xi\xi_{x^1x^1}}{\xi^3}-\frac{3(\xi_{x^1})^2}{2\xi^3}+2\sum_{p=3}^{n}(\beta^p)^2+\frac{(\xi_{x^1})^2}{2\xi^3}+\frac{(\xi_{x^2})^2}{2\xi^3}=2\left(\mathcal{J}^2-\mathcal{H}^2\right)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\xi\xi_{x^2x^2}-(\xi_{x^2})^2}{\xi^3}+\frac{\xi\xi_{x^1x^1}-(\xi_{x^1})^2}{\xi^3}+2\sum_{p=3}^{n}(\beta^p)^2=2\left(\mathcal{J}^2-\mathcal{H}^2\right)\ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\xi}\left\{(\ln\xi)_{x^1x^1}+(\ln\xi)_{x^2x^2}\right\}+2\sum_{p=3}^{n}(\beta^p)^2=2\left(\mathcal{J}^2-\mathcal{H}^2\right)\ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\xi}\left\{(\ln\xi)_{x^1x^1}+(\ln\xi)_{x^2x^2}\right\}+2\left\{(\beta^3)^2+\ldots+(\beta^n)^2\right\}=2\left(\mathcal{J}^2-\mathcal{H}^2\right) \tag{2.57}$$

bulunur.

Buna göre, kendiliğinden sağlananlar dışında kalan iki Codazzi denklemi (2.55) ve (2.56), Gauss denklemi de (2.57) den ibarettir.

Şimdi b_{AB} ile göstereceğimiz ikinci esas formun katsayılarını ele alalım. $(x^1,x^2,\ldots,x^n)$ yerel koordinatlar olduğundan, herhangi bir nokta civarında $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ doğal bazı ve buna dual olan $\{dx^1, dx^2, \ldots, dx^n\}$ bazı vardır (Chen, Chern ve Lam, 1999). Şimdi $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$bazından $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ bazına geçiş yapalım. Bunun için

$$\frac{\partial}{\partial x^1} = a_{11}E_1 + a_{21}E_2 + \ldots + a_{n1}E_n$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2} = a_{12}E_1 + a_{22}E_2 + \ldots + a_{n2}E_n$$

....

$$\frac{\partial}{\partial x^n} = a_{1n}E_1 + a_{2n}E_2 + \ldots + a_{nn}E_n$$

ifadelerindeki a_{AB} leri hesaplamalıyız.

$w^A = \sqrt{g_{AA}}dx^A$ gereğince

$$w^A\left(\frac{\partial}{\partial x^B}\right) = \sqrt{g_{AA}}dx^A\left(\frac{\partial}{\partial x^B}\right) = \sqrt{g_{BB}}$$

dir. Buna göre, w^A ları yukarıdaki ilk ifadeye uygularsak

$$w^1\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right) = a_{11} = \sqrt{g_{11}}$$

$$w^2\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right) = a_{21} = 0$$

....

$$w^n\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right) = a_{n1} = 0$$

bulunur. O halde

$$\frac{\partial}{\partial x^1} = \sqrt{g_{11}}E_1$$

dir. Diğer ifadelerden benzer sonuçlar bulunur ve dolayısıyla

$$\frac{\partial}{\partial x^A} = \sqrt{g_{AA}}E_A \tag{2.58}$$

elde edilir.

Öte yandan, ikinci esas formun katsayıları

$$b_{AB} =< L\left(\frac{\partial}{\partial x^A}\right), \frac{\partial}{\partial x^B} >$$

ifadesiyle verilir (Csikos, 1998). Buna göre

$$b_{11} =< L\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right), \frac{\partial}{\partial x^1} >$$

dir. (2.58) uyarınca

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial}{\partial x^1} \quad , \quad E_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial}{\partial x^2}$$

yazılabilir. (2.3), (2.4) ve (2.5) den

$$L(E_1) = kE_1 + tE_2$$

yazılabileceğini biliyoruz. Burada E_1, E_2 nin yukarıdaki ifadeleri kullanılırsa

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right) = k\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}t\frac{\partial}{\partial x^2}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$b_{11} =< k\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}t\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^1} > \Rightarrow$$

$$b_{11} = k < \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^1} > + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}t < \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^1} >$$

bulunur. Burada

$$< \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^1} >=< \sqrt{g_{11}}E_1, \sqrt{g_{11}}E_1 >= g_{11} < E_1, E_1 >= g_{11} \tag{2.59}$$

ve

$$< \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^1} >=< \sqrt{g_{22}}E_2, \sqrt{g_{11}}E_1 >= \sqrt{g_{22}g_{11}} < E_2, E_1 >= 0 \tag{2.60}$$

ifadeleri yerine yazılırsa,

$$b_{11} = g_{11}k$$

elde edilir. b_{12} için de

$$b_{12} =< L\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right), \frac{\partial}{\partial x^2} > \Rightarrow$$

$$b_{12} =< k\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}t\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^2} > \Rightarrow$$

$$b_{12} = k < \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2} > + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}t < \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^2} >$$

yazılabilir. Burada (2.60) ve

$$< \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^2} >=< \sqrt{g_{22}}E_2, \sqrt{g_{22}}E_2 >= g_{22} < E_2, E_2 >= g_{22} \tag{2.61}$$

kullanılarak

$$b_{12} = \sqrt{g_{11}g_{22}}t$$

bulunur. Devam edilirse,

$$b_{1q} =< L\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right), \frac{\partial}{\partial x^q} > \quad \Rightarrow$$

$$b_{1q} =< k\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}t\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^q} > \quad \Rightarrow$$

$$b_{1q} = k < \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^q} > + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}t < \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^q} >$$

ifadesinde

$$< \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^q} >=< \sqrt{g_{11}}E_1, \sqrt{g_{qq}}E_q >= \sqrt{g_{11}g_{qq}} < E_1, E_q >= 0 \tag{2.62}$$

$$< \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^q} >=< \sqrt{g_{22}}E_2, \sqrt{g_{qq}}E_q >= \sqrt{g_{22}g_{qq}} < E_2, E_q >= 0 \tag{2.63}$$

kullanılması sonucunda

$$b_{1q} = 0$$

elde edilir.

Şimdi de b_{22} yi elde edelim.

$$b_{22} =< L\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right), \frac{\partial}{\partial x^2} >$$

dir.

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right) = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}t\frac{\partial}{\partial x^1} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial x^2}$$

yerine yazılırsa,

$$b_{22} =< \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}t\frac{\partial}{\partial x^1} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^2} > \quad \Rightarrow$$

$$b_{22} = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}t < \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2} > + \bar{k} < \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^2} >$$

dir. (2.60) ve (2.61) den

$$b_{22} = g_{22}\bar{k}$$

bulunur.

$$b_{2q} = < L\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right), \frac{\partial}{\partial x^q} > \quad \Rightarrow$$

$$b_{2q} = < \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} t \frac{\partial}{\partial x^1} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^q} > \quad \Rightarrow$$

$$b_{2q} = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} t < \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^q} > + \bar{k} < \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^q} >$$

ifadesinde (2.62) ve (2.63) ün kullanılması sonucunda da

$$b_{2q} = 0$$

bulunur.

Son olarak b_{pq} yu elde edelim.

$$b_{pq} = < L\left(\frac{\partial}{\partial x^p}\right), \frac{\partial}{\partial x^q} >$$

$$L(E_p) = 0 \quad , \quad L\left(\frac{\partial}{\partial x^p}\right) = 0$$

olduğundan,

$$b_{pq} = 0$$

bulunur.

Böylece ikinci esas formun katsayıları

$$b_{11} = g_{11} k, \quad b_{12} = \sqrt{g_{11} g_{22}}\, t \quad , \quad b_{22} = g_{22} \bar{k} \quad , \quad b_{1q} = b_{2q} = b_{pq} = 0$$

şeklinde elde edilir.

Sıfır olmayan katsayılar, (2.49) ve (2.51) uyarınca

$$b_{12} = \sqrt{g_{11} g_{22}}\, t = (\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)^2 \xi \frac{C}{(\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)\xi}$$

$$b_{12} = (\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n) C$$

ve (2.3) de (2.54) kullanılarak

$$b_{11} = (\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n) \frac{(\mathcal{H} + \mathcal{J}\cos\theta)}{|\mathcal{J}|\sin\theta}$$

$$b_{22} = (\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)\frac{(\mathcal{H} - \mathcal{J}\cos\theta)}{|\mathcal{J}|\sin\theta}$$

şeklinde yazılabilir.

b_{ij} lerin yukarıdaki ifadesinde ölçek dönüşümüyle $C = \in = \operatorname{sgn}\mathcal{J}$ olması sağlanabilir. Buna göre,

$$\xi = \frac{C}{\mathcal{J}\sin\theta} = \frac{\operatorname{sgn}\mathcal{J}}{\mathcal{J}\sin\theta} = \frac{1}{|\mathcal{J}|\sin\theta}$$

olur. Bu, (2.57) Gauss denkleminde yerine yazılırsa,

$$|\mathcal{J}|\sin\theta\left\{(\ln|\mathcal{J}|\sin\theta)_{x^1x^1} + (\ln|\mathcal{J}|\sin\theta)_{x^2x^2}\right\} - 2\left\{(\beta^3)^2 + \ldots + (\beta^n)^2\right\} = 2\left(\mathcal{H}^2 - \mathcal{J}^2\right) \qquad (2.64)$$

elde edilir.

Şimdi M B-hiperyüzeyinin temel büyüklüklerini toplu olarak ifade edelim:

$$\begin{aligned}
g_{11} &= g_{22} = (\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)^2 \frac{1}{|\mathcal{J}|\sin\theta} \\
g_{12} &= g_{1q} = g_{2q} = g_{pq} = 0 \ , \ g_{pp} = 1 \\
b_{11} &= (\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)\frac{(\mathcal{H} + \mathcal{J}\cos\theta)}{|\mathcal{J}|\sin\theta} \\
b_{22} &= (\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)\frac{(\mathcal{H} - \mathcal{J}\cos\theta)}{|\mathcal{J}|\sin\theta} \\
b_{12} &= \in (\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n) \\
b_{1q} &= b_{2q} = b_{pq} = 0
\end{aligned} \qquad (2.65)$$

M' yandaş hiperyüzeyi için bu büyüklükler ise, M ve M' nün şekil operatörlerinin matris temsilleri göz önüne alındığında

$$g'_{11} = g'_{22} = (\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)^2 \xi = (\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)^2 \frac{1}{|\mathcal{J}|\sin\theta}$$

$$g'_{12} = < \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2} > = < \sqrt{g'_{11}}E_1, \sqrt{g'_{22}}E_2 > = \sqrt{g'_{11}g'_{22}} < E_1, E_2 > = 0$$

$$g'_{1q} = g'_{2q} = g'_{pq} = 0$$

$$g'_{pp} = 1$$

$$b'_{11} = g'_{11}k = (\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)\frac{(\mathcal{H} + \mathcal{J}\cos\theta)}{|\mathcal{J}|\sin\theta}$$

$$b'_{22} = g'_{22}\bar{k} = (\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)\frac{(\mathcal{H} - \mathcal{J}\cos\theta)}{|\mathcal{J}|\sin\theta}$$

$$b'_{12} = -\sqrt{g'_{11}g'_{22}}\,t = -(\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)C = -\in(\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)$$

$$b'_{1q} = b'_{2q} = b'_{pq} = 0$$

olarak bulunur.

O halde M ve M' nün b_{12} ve b'_{12} dışındaki bütün temel büyüklükleri aynıdır. b_{12} ve b'_{12} arasında da $b'_{12} = -b_{12}$ bağıntısı vardır, yani bunlar da işaret farkıyla eşittir.

Tanım Eğer bir $x^1, x^2, \ldots, x^n$ ortogonal koordinat sisteminde temel büyüklükler, β^p ler sabit olmak üzere

$$g_{11} = g_{22}\,, \qquad g_{pp} = 1\,, \qquad b_{12} = \in(\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)\,, \qquad b_{1q} = b_{2q} = b_{pq} = 0$$

şeklinde ise, bu ortogonal koordinat sistemiyle oluşturulan şebekeye A-şebekesi denir.

Böylece aşağıdaki teorem elde edilir:

Temel Teorem R^{n+1} de ombilik noktası bulunmayan ve minimal olmayan bir hiperyüzeyin B-hiperyüzeyi olması için gerek ve yeter şart hiperyüzeyin bir A-şebekesine sahip olmasıdır.

3. BÜKÜLEBİLİR B-HİPERYÜZEYLERİ

Bu bölümde bükülebilir B-hiperyüzeyleri incelenecektir. Tanımı gereği, bükülebilme sonsuz sayıda izometri içerdiğinden, böyle bir hiperyüzey birden fazla A – şebekesine sahip olmalıdır.

$\mathcal{H} = c_0 =$ sabit $\Leftrightarrow$ $\theta = c =$ sabit ile (2.55) ve (2.56) sistemleri sağlanır. Buradan, aşağıdaki teorem elde edilebilir.

Teorem $H = \dfrac{c_0}{\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n}$ ortalama eğrilikli n-boyutlu bir hiperyüzey bükülebilir bir B-hiperyüzeydir ve sonsuz sayıda A-şebekesine sahiptir.

Şimdi $\mathcal{H}$ nin sabit olmadığını varsayalım. $(\zeta^1, \zeta^2, \ldots, \zeta^n)$, ikinci A - şebekesi koordinatları olsun. Bu koordinatları aşağıdaki şekilde tanımlayalım. $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ bir izometrik sistemse

$$\zeta^1 = a + b\,, \quad \zeta^2 = i(b-a)\,, \quad \zeta^p = x^p \tag{3.1}$$

ile tanımlı $(\zeta^1, \zeta^2, \ldots, \zeta^n)$ sistemi de bir izometrik sistemdir. Burada

$$a = a(u^1)\,, \quad b = \overline{a(u^1)} = b(u^2)\,, \quad a'.b' \neq 0$$

$$u^1 = x^1 + ix^2\,, \quad u^2 = x^1 - ix^2$$

dır (Eisenhart, 1960).

Şimdi yeni koordinatlarda $\overline{g}_{AB}$ ve $\overline{b}_{AB}$ leri hesaplayalım.

$$g_{11} = \frac{\partial \zeta^K}{\partial x^1}\frac{\partial \zeta^L}{\partial x^1}\overline{g}_{KL}$$

den

$$g_{11} = \frac{\partial \zeta^1}{\partial x^1}\frac{\partial \zeta^1}{\partial x^1}\overline{g}_{11} + 2\frac{\partial \zeta^1}{\partial x^1}\frac{\partial \zeta^2}{\partial x^1}\overline{g}_{12} + \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^1}\frac{\partial \zeta^2}{\partial x^1}\overline{g}_{22}$$

elde edilir.

$$\frac{\partial \zeta^1}{\partial x^1} = a' + b'\,, \quad \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^1} = i(b' - a')\,, \quad \frac{\partial \zeta^1}{\partial x^2} = i(a' - b')\,, \quad \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^2} = a' + b' \tag{3.2}$$

ifadeleri yerine yazılırsa,

$$g_{11} = (a' + b')^2\overline{g}_{11} + 2i(a' + b')(b' - a')\overline{g}_{12} - (b' - a')^2\overline{g}_{22}$$

bulunur. Benzer şekildeki işlemleri diğerleri için de yapalım.

$$g_{12} = \frac{\partial\zeta^1}{\partial x^1}\frac{\partial\zeta^1}{\partial x^2}\bar{g}_{11} + \frac{\partial\zeta^1}{\partial x^1}\frac{\partial\zeta^2}{\partial x^2}\bar{g}_{12} + \frac{\partial\zeta^2}{\partial x^1}\frac{\partial\zeta^1}{\partial x^2}\bar{g}_{21} + \frac{\partial\zeta^2}{\partial x^1}\frac{\partial\zeta^2}{\partial x^2}\bar{g}_{22}$$

ifadesi (3.2) den yararlanarak düzenlenirse,

$$g_{12} = i(a'+b')(a'-b')\bar{g}_{11} + 2(a'^2+b'^2)\bar{g}_{12} + i(b'-a')(a'+b')\bar{g}_{22}$$

elde edilir.

$$g_{22} = \frac{\partial\zeta^1}{\partial x^2}\frac{\partial\zeta^1}{\partial x^2}\bar{g}_{11} + 2\frac{\partial\zeta^1}{\partial x^2}\frac{\partial\zeta^2}{\partial x^2}\bar{g}_{12} + \frac{\partial\zeta^2}{\partial x^2}\frac{\partial\zeta^2}{\partial x^2}\bar{g}_{22}$$

ifadesinde de (3.2) kullanılırsa,

$$g_{22} = -(a'-b')^2\bar{g}_{11} + 2i(a'+b')(a'-b')\bar{g}_{12} + (a'+b')^2\bar{g}_{22}$$

bulunur. Burada $g_{11} = g_{22}$ ve $g_{12} = 0$ olduğu kullanılırsa,

$$g_{11} = (a'+b')^2\bar{g}_{11} + 2i(a'+b')(b'-a')\bar{g}_{12} - (b'-a')^2\bar{g}_{22}$$

$$0 = i(a'+b')(a'-b')\bar{g}_{11} + 2(a'^2+b'^2)\bar{g}_{12} + i(b'-a')(a'+b')\bar{g}_{22}$$

$$g_{11} = -(a'-b')^2\bar{g}_{11} + 2i(a'+b')(a'-b')\bar{g}_{12} + (a'+b')^2\bar{g}_{22}$$

olur. Buradan

$$\bar{g}_{11} = \frac{(4a'b')^2}{(4a'b')^3}g_{11} = \frac{g_{11}}{4a'b'}$$

$$\bar{g}_{12} = 0$$

$$\bar{g}_{22} = \frac{(4a'b')^2}{(4a'b')^3}g_{11} = \frac{g_{11}}{4a'b'}$$

bulunur. Böylece (2.49) ve $\zeta^p = x^p$ olduğundan

$$\bar{g}_{11} = \bar{g}_{22} = \frac{(\beta^3x^3+\ldots+\beta^nx^n)^2\xi(x^1,x^2)}{4a'b'} = (\beta^3x^3+\ldots+\beta^nx^n)^2\bar{\xi}(\zeta^1,\zeta^2) \qquad (3.3)$$

elde edilir. Burada

$$\bar{\xi} = \frac{\xi}{4a'b'} \qquad (3.4)$$

dir.

$\bar{g}_{pp}$ ler ise, (3.1) den

$$\bar{g}_{pp} = g_{pp} = 1$$

olarak bulunur.

İki yerel koordinat arasındaki

$$\frac{\partial}{\partial \zeta^A} = \frac{\partial x^B}{\partial \zeta^A}\frac{\partial}{\partial x^B}$$

dönüşüm kuralı kullanılırsa

$$\frac{\partial}{\partial \zeta^1} = \frac{(a'+b')}{4a'b'}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{i(a'-b')}{4a'b'}\frac{\partial}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta^2} = \frac{i(b'-a')}{4a'b'}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{(a'+b')}{4a'b'}\frac{\partial}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta^p} = \frac{\partial}{\partial x^p}$$

elde edilir. Buna göre

$$\bar{b}_{12} = < L\left(\frac{\partial}{\partial \zeta^1}\right), \frac{\partial}{\partial \zeta^2} > \quad \Rightarrow$$

$$\bar{b}_{12} = < \frac{(a'+b')}{4a'b'}L\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right) + \frac{i(a'-b')}{4a'b'}L\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right), \frac{i(b'-a')}{4a'b'}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{(a'+b')}{4a'b'}\frac{\partial}{\partial x^2} > \quad \Rightarrow$$

$$\bar{b}_{12} = \frac{i(a'+b')(b'-a')}{(4a'b')^2}b_{11} + \frac{(a'+b')^2}{(4a'b')^2}b_{12} + \frac{(a'-b')^2}{(4a'b')^2}b_{21} + \frac{i(a'+b')(a'-b')}{(4a'b')^2}b_{22} \quad \Rightarrow$$

$$\bar{b}_{12} = \left\{i(b'^2 - a'^2)(b_{11} - b_{22}) + 2(a'^2 + b'^2)b_{12}\right\}\frac{1}{(4a'b')^2}$$

bulunur.

A- şebekesinin tanımı ve (3.1) gereğince

$$\bar{b}_{12} = \left\{i(b'^2 - a'^2)(b_{11} - b_{22}) + 2(a'^2 + b'^2)b_{12}\right\}\frac{1}{(4a'b')^2} = \in(\beta^3\zeta^3 + \ldots + \beta^n\zeta^n)$$

olur ve $\zeta^p = x^p$ olduğu dikkate alınırsa

$$\bar{b}_{12} = \left\{i(b'^2 - a'^2)(b_{11} - b_{22}) + 2(a'^2 + b'^2)b_{12}\right\}\frac{1}{(4a'b')^2} = \in(\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n) \tag{3.5}$$

elde edilir.

(3.5) de, (3.1) ve (2.65) kullanılırsa,

$$\left\{i(b'^2 - a'^2)2\frac{\mathcal{J}\cos\theta}{|\mathcal{J}|\sin\theta}(\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n) + 2(a'^2 + b'^2)\in(\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)\right\}\frac{1}{(4a'b')^2}$$
$$= \in(\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n) \quad \Rightarrow$$

$$\left\{ i(b'^2 - a'^2)2 \in \frac{\cos\theta}{\sin\theta}(\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n) + 2(a'^2 + b'^2) \in (\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n) \right\} \frac{1}{(4a'b')^2}$$

$$= \in (\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n) \quad \Rightarrow$$

$$i(b'^2 - a'^2)\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + (a'^2 + b'^2) = 8a'^2 b'^2$$

elde edilir. Buradan da

$$(a'^2 - b'^2)\frac{(e^{2i\theta}+1)}{(e^{2i\theta}-1)} = 8a'^2 b'^2 - a'^2 - b'^2 \quad \Rightarrow$$

$$\left\{a'^2 - b'^2 - 8a'^2 b'^2 + a'^2 + b'^2\right\} e^{2i\theta} = -a'^2 + b'^2 - 8a'^2 b'^2 + a'^2 + b'^2 \quad \Rightarrow$$

$$2(a'^2 - 4a'^2 b'^2)e^{2i\theta} = 2(b'^2 - 4a'^2 b'^2) \quad \Rightarrow$$

$$e^{2i\theta} = \left(\frac{1}{a'^2} - 4\right) \Big/ \left(\frac{1}{b'^2} - 4\right) \tag{3.6}$$

elde edilir. Buna göre,

$$2i\theta = \log\left(\frac{1}{a'^2} - 4\right) - \log\left(\frac{1}{b'^2} - 4\right) \quad \Rightarrow$$

$$\theta = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1}{a'^2} - 4\right) - \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1}{b'^2} - 4\right)$$

olur.

(3.1) gereğince $a = a(u^1)$ olduğundan

$$\frac{1}{2i}\log\left(\frac{1}{a'^2} - 4\right) = f(u^1)$$

yazılabilir. Buna göre

$$\overline{f(u^1)} = -\frac{1}{2i}\log\left(\frac{1}{\bar{a}'^2} - 4\right) \quad \Rightarrow$$

$$\overline{f(u^1)} = -\frac{1}{2i}\log\left(\frac{1}{b'^2} - 4\right) = g(u^2)$$

olur. Böylece,

$$\theta = f(u^1) + g(u^2)\ , \qquad g(u^2) = \overline{f(u^1)} \tag{3.7}$$

elde edilir.

3.1 Codazzi ve Gauss Denklemleri

Şimdi yeni koordinatlarda Codazzi ve Gauss denklemlerini hesaplayalım. Bunun için öncelikle koordinatlar arasındaki dönüşümü bulmalıyız.

$$u^1 = x^1 + ix^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial u^1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^1} - i\frac{\partial}{\partial x^2}\right)$$

$$u^2 = x^1 - ix^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + i\frac{\partial}{\partial x^2}\right)$$

ve dolayısıyla

$$\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial u^1} + \frac{\partial}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2} = i\left(\frac{\partial}{\partial u^1} - \frac{\partial}{\partial u^2}\right)$$

dir. Buna göre

$$\mathcal{H}_{x^2} = i\mathcal{H}_{u^1} - i\mathcal{H}_{u^2} \quad , \quad \theta_{x^2} = i\theta_{u^1} - i\theta_{u^2}$$

olduğundan (2.55) Codazzi denklemi

$$\frac{\mathcal{H}_{u^1}}{\mathcal{J}} - \frac{\mathcal{H}_{u^2}}{\mathcal{J}} = \frac{\theta_{u^1}}{\sin\theta} - \frac{\theta_{u^2}}{\sin\theta}$$

şeklini alır. Böylece, (3.7) gereğince

$$\frac{\mathcal{H}_{u^1}}{\mathcal{J}} - \frac{\mathcal{H}_{u^2}}{\mathcal{J}} = \frac{f'}{\sin\theta} - \frac{g'}{\sin\theta}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\mathcal{H}_{x^1} = \mathcal{H}_{u^1} + \mathcal{H}_{u^2}$$

$$\theta_{x^1} = \theta_{u^1} + \theta_{u^2}$$

olduğundan (2.56) Codazzi denklemi

$$\frac{\mathcal{H}_{u^1}}{\mathcal{J}} + \frac{\mathcal{H}_{u^2}}{\mathcal{J}} = -\frac{\theta_{u^1}}{\sin\theta} - \frac{\theta_{u^2}}{\sin\theta}$$

ve dolayısıyla (3.7) uyarınca

$$\frac{\mathcal{H}_{u^1}}{\mathcal{J}} + \frac{\mathcal{H}_{u^2}}{\mathcal{J}} = -\frac{f'}{\sin\theta} - \frac{g'}{\sin\theta}$$

şeklini alır.

Codazzi denklemlerinin son şeklinden

$$\frac{\mathcal{H}_{u^1}}{\mathcal{J}} = -\frac{g'}{\sin\theta} \quad , \quad \frac{\mathcal{H}_{u^2}}{\mathcal{J}} = -\frac{f'}{\sin\theta} \tag{3.8}$$

yazılabileceği açıktır.

Şimdi de (2.64) deki Gauss denklemini yeni koordinatlarda ifade edelim.

$(\ln|\mathcal{J}|\sin\theta)_{x^2} = i(\ln|\mathcal{J}|\sin\theta)_{u^1} - i(\ln|\mathcal{J}|\sin\theta)_{u^2} \quad \Rightarrow$

$(\ln|\mathcal{J}|\sin\theta)_{x^2x^2} = -(\ln|\mathcal{J}|\sin\theta)_{u^1u^1} + 2(\ln|\mathcal{J}|\sin\theta)_{u^1u^2} - (\ln|\mathcal{J}|\sin\theta)_{u^2u^2}$

ve

$(\ln|\mathcal{J}|\sin\theta)_{x^1} = (\ln|\mathcal{J}|\sin\theta)_{u^1} + (\ln|\mathcal{J}|\sin\theta)_{u^2} \quad \Rightarrow$

$(\ln|\mathcal{J}|\sin\theta)_{x^1x^1} = (\ln|\mathcal{J}|\sin\theta)_{u^1u^1} + 2(\ln|\mathcal{J}|\sin\theta)_{u^1u^2} + (\ln|\mathcal{J}|\sin\theta)_{u^2u^2}$

olduğundan (2.64) denklemi

$$2|\mathcal{J}|\sin\theta(\ln|\mathcal{J}|\sin\theta)_{u^1u^2} - \{(\beta^3)^2 + \ldots + (\beta^n)^2\} = (\mathcal{H}^2 - \mathcal{J}^2) \tag{3.9}$$

şeklini alır.

$\mathcal{H}$ sabit olmadığı için (3.8) gereğince $f'g' \neq 0$ dır. Buna göre (3.8) den

$$\frac{\mathcal{H}_{u^1}}{g'} = \frac{\mathcal{H}_{u^2}}{f'}$$

ve dolayısıyla

$f'\mathcal{H}_{u^1} - g'\mathcal{H}_{u^2} = 0 \quad \Rightarrow$

$$\frac{du^1}{f'} = \frac{du^2}{-g'} = \frac{d\mathcal{H}}{0} \tag{3.10}$$

yazılabilir.

$$U' \equiv \frac{1}{f'} \quad , \quad V' \equiv \frac{1}{g'} \quad , \quad \eta^2 \equiv U(u^1) + V(u^2) \tag{3.11}$$

tanımlamalarını yapalım. Böylece

$\dfrac{du^1}{f'} = \dfrac{du^2}{-g'} \quad \Rightarrow$

$U'du^1 + V'du^2 = 0$

ve dolayısıyla

$U + V = C_1$

olur ve (3.10) un çözümü

$\mathcal{H} = U + V$

şeklinde elde edilir. O halde η^2 nin (3.11) deki tanımı gereğince

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\eta^2) \tag{3.12}$$

olur.

Öte yandan, (3.8) in 1. denklemi

$$\mathcal{J} = -V'\mathcal{H}_{u^1} \sin\theta$$

şeklinde yazılabilir. (3.12) gereğince $\mathcal{H}_{u^1} = U'\mathcal{H}'$ olduğundan

$$\mathcal{J} = -V'U'\mathcal{H}' \sin\theta \tag{3.13}$$

bulunur.

Buna göre $\xi = \dfrac{1}{|\mathcal{J}|\sin\theta}$ den

$$\frac{1}{\xi} = |\mathcal{J}|\sin\theta = |\mathcal{H}'||U'V'|\sin^2\theta \tag{3.14}$$

elde edilir.

Şimdi (3.11) , (3.12) , (3.13) ve (3.14) denklemlerini kullanarak (3.9) Gauss denklemini yeniden düzenleyelim.

$$\left(\ln|\mathcal{H}'||U'V'|\sin^2\theta\right)_{u^1} = \frac{\mathcal{H}'_{u^1}U'V'\sin^2\theta}{\mathcal{H}'U'V'\sin^2\theta} + \frac{\mathcal{H}'U''V'\sin^2\theta}{\mathcal{H}'U'V'\sin^2\theta} + \frac{2\mathcal{H}'U'V'\sin\theta\cos\theta\, f'}{\mathcal{H}'U'V'\sin^2\theta} \Rightarrow$$

$$\left(\ln|\mathcal{H}'||U'V'|\sin^2\theta\right)_{u^1} = \frac{\mathcal{H}''U'}{\mathcal{H}'} + \frac{U''}{U'} + \frac{2\cos\theta}{U'\sin\theta} \Rightarrow$$

$$\left(\ln|\mathcal{H}'||U'V'|\sin^2\theta\right)_{u^1u^2} = \left(\frac{\mathcal{H}''U'}{\mathcal{H}'} + \frac{U''}{U'} + \frac{2\cos\theta}{U'\sin\theta}\right)_{u^2} \Rightarrow$$

$$\left(\ln|\mathcal{H}'||U'V'|\sin^2\theta\right)_{u^1u^2} = \frac{\mathcal{H}'''U'V'\mathcal{H}' - U'V'(\mathcal{H}'')^2}{(\mathcal{H}')^2} - \frac{2g'U'\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)}{(U')^2\sin^2\theta} \Rightarrow$$

$$\left(\ln|\mathcal{H}'||U'V'|\sin^2\theta\right)_{u^1u^2} = U'V'\left(\ln|\mathcal{H}'|\right)'' - \frac{2}{U'V'\sin^2\theta}$$

olduğundan (3.9) Gauss denkleminden

$$2|\mathcal{J}|\sin\theta\left\{U'V'\left(\ln|\mathcal{H}'|\right)'' - \frac{2}{U'V'\sin^2\theta}\right\} - \left\{(\beta^3)^2 + \ldots + (\beta^n)^2\right\} = \left(\mathcal{H}^2 - \mathcal{J}^2\right)$$

yazılabilir. (3.14) gereğince

$$|U'V'|\sin\theta = \frac{|\mathcal{J}|}{|\mathcal{H}'|}$$

olduğundan, Gauss denklemi

$$2|\mathcal{J}|\sin\theta\left\{U'V'\left(\ln|\mathcal{H}'|\right)'' - \frac{2|\mathcal{H}'|}{|\mathcal{J}|\sin\theta}\right\} - \left\{(\beta^3)^2 + \ldots + (\beta^n)^2\right\} = \left(\mathcal{H}^2 - \mathcal{J}^2\right) \Rightarrow$$

$$2|\mathcal{J}|\sin\theta\, U'V'\left(\ln|\mathcal{H}'|\right)'' - 4|\mathcal{H}'| - \left\{(\beta^3)^2 + \ldots + (\beta^n)^2\right\} = \left(\mathcal{H}^2 - \mathcal{J}^2\right) \Rightarrow$$

$$\frac{2|\mathcal{J}|^2}{|\mathcal{H}'|}\left(\ln|\mathcal{H}'|\right)'' - 4|\mathcal{H}'| - \left\{(\beta^3)^2 + \ldots + (\beta^n)^2\right\} = \left(\mathcal{H}^2 - \mathcal{J}^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{J}^2\left\{2\left(\ln|\mathcal{H}'|\right)'' + 1\right\} - \left\{(\beta^3)^2 + \ldots + (\beta^n)^2\right\} = \mathcal{H}^2 + 4|\mathcal{H}'| \qquad (3.15)$$

şeklini alır.

(3.15) e göre $\mathcal{J}$ de η^2 nin bir fonksiyonu, yani

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(\eta^2) \qquad (3.16)$$

dir.

Öte yandan, (3.14) e göre

$$|U'V'|\sin\theta = \frac{|\mathcal{J}|}{|\mathcal{H}'|}$$

olduğundan,

$$|U'V'|\sin\theta = m(\eta^2) \qquad (3.17)$$

dir.

3.2 Yeni Koordinatlar

η^2 yi (3.11) in 3. denklemiyle tanımlamıştık. Şimdi $\eta^1 = i(V(u^2) - U(u^1))$, $\eta^p = x^p$ tanımlamaları ile $(\eta^1, \eta^2, \eta^3, \ldots, \eta^n)$ yeni bir ortogonal koordinat sistemini işe sokalım. Bu sistem ortogonaldir.

Gerçekten,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\eta^1} &= \frac{i(V'-U')}{4U'V'}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{(U'+V')}{4U'V'}\frac{\partial}{\partial x^2} \\
\frac{\partial}{\partial\eta^2} &= \frac{(U'+V')}{4U'V'}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{i(U'-V')}{4U'V'}\frac{\partial}{\partial x^2} \qquad (3.18) \\
\frac{\partial}{\partial\eta^p} &= \frac{\partial}{\partial x^p}
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\langle\frac{\partial}{\partial\eta^1}, \frac{\partial}{\partial\eta^2}\rangle = \langle\frac{i(V'-U')}{4U'V'}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{(U'+V')}{4U'V'}\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{(U'+V')}{4U'V'}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{i(U'-V')}{4U'V'}\frac{\partial}{\partial x^2}\rangle \quad \Rightarrow$$

$$\langle\frac{\partial}{\partial\eta^1},\frac{\partial}{\partial\eta^2}\rangle=\frac{i(V'-U')(U'+V')}{(4U'V')^2}g_{11}+\frac{(U'+V')^2}{(4U'V')^2}g_{12}$$
$$+\frac{(U'-V')(V'-U')}{(4U'V')^2}g_{12}-\frac{i(U'+V')(V'-U')}{(4U'V')^2}g_{22}$$

dir. Burada $g_{11}=g_{22}$ ve $g_{12}=0$ olduğu kullanılırsa,

$$\langle\frac{\partial}{\partial\eta^1},\frac{\partial}{\partial\eta^2}\rangle=\frac{i(V'-U')(U'+V')}{(4U'V')^2}g_{11}-\frac{i(U'+V')(V'-U')}{(4U'V')^2}g_{11}=0$$

bulunur.

$$\langle\frac{\partial}{\partial\eta^1},\frac{\partial}{\partial\eta^p}\rangle=\langle\frac{i(V'-U')}{4U'V'}\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{(U'+V')}{4U'V'}\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^p}\rangle\ \Rightarrow$$

$$\langle\frac{\partial}{\partial\eta^1},\frac{\partial}{\partial\eta^p}\rangle=\frac{i(V'-U')}{4U'V'}g_{1p}+\frac{(U'+V')}{4U'V'}g_{2p}$$

ve $g_{1p}=g_{2p}=0$ olduğu dikkate alınırsa

$$\langle\frac{\partial}{\partial\eta^1},\frac{\partial}{\partial\eta^p}\rangle=0$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\langle\frac{\partial}{\partial\eta^2},\frac{\partial}{\partial\eta^p}\rangle=\langle\frac{(U'+V')}{4U'V'}\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{i(U'-V')}{4U'V'}\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^p}\rangle\ \Rightarrow$$

$$\langle\frac{\partial}{\partial\eta^2},\frac{\partial}{\partial\eta^p}\rangle=\frac{(U'+V')}{4U'V'}g_{1p}+\frac{i(U'-V')}{4U'V'}g_{2p}\ \Rightarrow$$

$$\langle\frac{\partial}{\partial\eta^2},\frac{\partial}{\partial\eta^p}\rangle=0$$

bulunur. Ayrıca

$$\langle\frac{\partial}{\partial\eta^q},\frac{\partial}{\partial\eta^p}\rangle=\langle\frac{\partial}{\partial x^q},\frac{\partial}{\partial x^p}\rangle=0$$

olduğundan yeni koordinat sisteminin ortogonal olduğu görülmüş olur. η^1,η^2 nin tanımlarından

$$\eta^1{}_{x^1}=i(V'-U'),\quad \eta^1{}_{x^2}=U'+V'$$
$$\eta^2{}_{x^1}=U'+V',\qquad \eta^2{}_{x^2}=i(U'-V')$$

yazılabilir. Bunlardan yararlanarak yeni koordinat sisteminde g_{AB} leri hesaplayalım.

$$g_{11}=\frac{\partial\eta^1}{\partial x^1}\frac{\partial\eta^1}{\partial x^1}\bar{g}_{11}+2\frac{\partial\eta^1}{\partial x^1}\frac{\partial\eta^2}{\partial x^1}\bar{g}_{12}+\frac{\partial\eta^2}{\partial x^1}\frac{\partial\eta^2}{\partial x^1}\bar{g}_{22}\quad\Rightarrow$$

$$g_{11}=-(U'-V')^2\bar{g}_{11}-2i(U'+V')(U'-V')\bar{g}_{12}+(U'+V')^2\bar{g}_{22}\ ,$$

$$g_{12}=\frac{\partial\eta^1}{\partial x^1}\frac{\partial\eta^1}{\partial x^2}\bar{g}_{11}+\frac{\partial\eta^1}{\partial x^1}\frac{\partial\eta^2}{\partial x^2}\bar{g}_{12}+\frac{\partial\eta^2}{\partial x^1}\frac{\partial\eta^1}{\partial x^2}\bar{g}_{21}+\frac{\partial\eta^2}{\partial x^1}\frac{\partial\eta^2}{\partial x^2}\bar{g}_{22} \quad\Rightarrow$$

$$g_{12}=-i(U'-V')(U'+V')\bar{g}_{11}+2(U'^2+V'^2)\bar{g}_{12}+i(U'+V')(U'-V')\bar{g}_{22}$$

ve

$$g_{22}=\frac{\partial\eta^1}{\partial x^2}\frac{\partial\eta^1}{\partial x^2}\bar{g}_{11}+2\frac{\partial\eta^1}{\partial x^2}\frac{\partial\eta^2}{\partial x^2}\bar{g}_{12}+\frac{\partial\eta^2}{\partial x^2}\frac{\partial\eta^2}{\partial x^2}\bar{g}_{22} \quad\Rightarrow$$

$$g_{22}=(U'+V')^2\bar{g}_{11}+2i(U'+V')(U'-V')\bar{g}_{12}-(U'-V')^2\bar{g}_{22}$$

dir. Böylece $g_{11}=g_{22}$ ve $g_{12}=0$ olduğu hatırlanırsa,

$$g_{11}=-(U'-V')^2\bar{g}_{11}-2i(U'+V')(U'-V')\bar{g}_{12}+(U'+V')^2\bar{g}_{22}$$

$$0=-i(U'-V')(U'+V')\bar{g}_{11}+2(U'^2+V'^2)\bar{g}_{12}+i(U'+V')(U'-V')\bar{g}_{22}$$

$$g_{11}=(U'+V')^2\bar{g}_{11}+2i(U'+V')(U'-V')\bar{g}_{12}-(U'-V')^2\bar{g}_{22}$$

bulunur. Buradan

$$\bar{g}_{11}=-\frac{(4U'V')^2}{(4U'V')^3}g_{11}=-\frac{g_{11}}{4U'V'}=\frac{g_{11}}{4|U'V'|}$$

$$\bar{g}_{12}=0$$

$$\bar{g}_{22}=-\frac{(4U'V')^2}{(4U'V')^3}g_{11}=-\frac{g_{11}}{4U'V'}=\frac{g_{11}}{4|U'V'|}$$

elde edilir. O halde $\bar{g}_{11}=\bar{g}_{22}$ dir ve ortak değer, (2.49) gereğince önce

$$\bar{g}_{11}=\bar{g}_{22}=\frac{(\beta^3\eta^3+\ldots+\beta^n\eta^n)^2\xi}{4|U'V'|}$$

ve (3.14) ve (3.17) kullanılarak

$$\bar{\xi}(\eta^2)=\frac{1}{4|\mathcal{H}'|m^2}$$

olmak üzere

$$\bar{g}_{11}=\bar{g}_{22}=\frac{(\beta^3\eta^3+\ldots+\beta^n\eta^n)^2}{4|\mathcal{H}'|(U'V'\sin\theta)^2} \quad\Rightarrow$$

$$\bar{g}_{11}=\bar{g}_{22}=\frac{(\beta^3\eta^3+\ldots+\beta^n\eta^n)^2}{4|\mathcal{H}'|m^2}=(\beta^3\eta^3+\ldots+\beta^n\eta^n)^2\bar{\xi}(\eta^2) \tag{3.19}$$

şeklinde yazılabilir.

Öte yandan, $\eta^p=x^p$ olduğundan

$$\bar{g}_{pp}=g_{pp}=1$$

dir.

Böylece $(\eta^1, \eta^2, \eta^3, ..., \eta^n)$ ortogonal sisteminde,

$$H = \frac{\mathcal{H}(\eta^2)}{(\beta^3\eta^3 + ... + \beta^n\eta^n)} \quad , \quad J = \frac{\mathcal{J}(\eta^2)}{(\beta^3 x^3 + ... + \beta^n x^n)}$$

$$\overline{g}_{11} = \overline{g}_{22} = (\beta^3\eta^3 + ... + \beta^n\eta^n)^2 \overline{\xi}(\eta^2), \quad \overline{g}_{pp} = 1 \tag{3.20}$$

bulunur.

Buna göre, H, J ve $\overline{g}_{AB}$ ler η^1 den bağımsızdır. Dolayısıyla H, J ve $\overline{g}_{AB}$ lerin $(\eta^1, \eta^2, \eta^3, ..., \eta^n)$ noktasındaki değerleri ile $C =$ sabit olmak üzere $(\eta^1 + C, \eta^2, \eta^3, ..., \eta^n)$ noktasındaki değerleri aynıdır. O halde hiperyüzeyimiz ortalama eğrilik korunarak kendi üzerine izometrik tasvir edilebilir.

4. BÜKÜLEBİLİR B-HİPERYÜZEYLERİN BELİRLENMESİ

Bu bölümde birden fazla A – şebekesine sahip olan B – hiperyüzeylerini belirleyeceğiz.

Önce böyle bir hiperyüzeyin $(\eta^1, \eta^2, ..., \eta^n)$ ortogonal koordinat sistemine göre $\overline{b}_{AB}$ 2. esas form katsayılarını hesaplayalım. η^1 eğrisi ile birinci asal doğrultu arasındaki açıyı ϕ ile gösterelim. Buna göre,

$$\frac{\overline{b}_{11}}{\overline{g}_{11}} = H + J\cos\phi$$

olur. Burada (3.20) kullanılırsa

$$\overline{b}_{11} = (\beta^3 x^3 + ... + \beta^n x^n)\overline{\xi}(\mathcal{H} + \mathcal{J}\cos\phi)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\frac{\overline{b}_{22}}{\overline{g}_{22}} = H - J\cos\phi$$

den

$$\overline{b}_{22} = (\beta^3 x^3 + ... + \beta^n x^n)\overline{\xi}(\mathcal{H} - \mathcal{J}\cos\phi)$$

ve $\overline{g}_{11} = \overline{g}_{22}$, $\overline{g}_{12} = 0$ olduğu dikkate alınarak,

$$\frac{\overline{b}_{12}}{\sqrt{\overline{g}_{11}\overline{g}_{22} - \overline{g}_{12}^{\,2}}} = J\sin\phi$$

den

$$\overline{b}_{12} = (\beta^3 x^3 + ... + \beta^n x^n)\overline{\xi}\mathcal{J}\sin\phi$$

elde edilir.

$$\overline{b}_{1q} = \langle L\left(\frac{\partial}{\partial\eta^1}\right), \frac{\partial}{\partial\eta^q}\rangle$$

de (3.18) kullanılırsa

$$\overline{b}_{1q} = \frac{i(V' - U')}{4U'V'}b_{1q} + \frac{(U' + V')}{4U'V'}b_{2q}$$

bulunur. Oysa $b_{1q} = b_{2q} = 0$ dır, dolayısıyla

$$\overline{b}_{1q} = 0$$

olur. Benzer şekilde

$$\overline{b}_{2q} = 0$$

olduğu görülür. Son olarak,

$$\overline{b}_{pq} = < L\left(\frac{\partial}{\partial \eta^p}\right), \frac{\partial}{\partial \eta^q} > = b_{pq} = 0$$

elde edilir.

Böylece, hiperyüzeyin $(\eta^1, \eta^2, ..., \eta^n)$ ortogonal koordinat sistemine göre esas form katsayıları

$$\begin{aligned}
&\overline{b}_{11} = (\beta^3 x^3 + ... + \beta^n x^n)\overline{\xi}(\mathcal{H} + \mathcal{J}\cos\phi) \\
&\overline{b}_{22} = (\beta^3 x^3 + ... + \beta^n x^n)\overline{\xi}(\mathcal{H} - \mathcal{J}\cos\phi) \\
&\overline{b}_{12} = (\beta^3 x^3 + ... + \beta^n x^n)\overline{\xi}\mathcal{J}\sin\phi \qquad (4.1) \\
&\overline{b}_{1q} = \overline{b}_{2q} = \overline{b}_{pq} = 0 \;\; \Rightarrow \overline{b}_{Dq} = 0 \\
&\overline{g}_{11} = \overline{g}_{22} = (\beta^3 \eta^3 + ... + \beta^n \eta^n)^2 \overline{\xi}(\eta^2) \\
&\overline{g}_{12} = 0\,, \quad \overline{g}_{pq} = \begin{cases} 1, & p = q \\ 0, & p \neq q \end{cases}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Aşağıda esas formların (4.1) ile verilen ifadelerini kullanarak Codazzi ve Gauss denklemlerini yazacağız.

4.1. Codazzi Denklemleri

Hiperyüzeyin Codazzi denklemleri Γ^C_{AB} ler Christoffel sembolleri, yani

$$\Gamma^C_{AB} = \sum_D \frac{1}{2}(g_{AD,B} + g_{BD,A} - g_{AB,D})g^{DC}$$

olmak üzere

$$b_{AB,C} - b_{AC,B} = \sum_D \Gamma^D_{AC} b_{DB} - \sum_D \Gamma^D_{AB} b_{DC}$$

şeklinde yazılabilir (Csikos, 1998).

Öncelikle

(1) $\overline{b}_{11,1} - \overline{b}_{11,1} = \sum_D \overline{\Gamma}^D_{11}\overline{b}_{D1} - \sum_D \overline{\Gamma}^D_{11}\overline{b}_{D1} \;\; \Rightarrow \;\; 0 = 0$

(2) $\overline{b}_{21,1} - \overline{b}_{21,1} = \sum_D \overline{\Gamma}^D_{21}\overline{b}_{D1} - \sum_D \overline{\Gamma}^D_{21}\overline{b}_{D1} \;\; \Rightarrow \;\; 0 = 0$

$$\textbf{(3)} \quad \overline{b}_{p1,1} - \overline{b}_{p1,1} = \sum_D \overline{\Gamma}_{p1}^D \overline{b}_{D1} - \sum_D \overline{\Gamma}_{p1}^D \overline{b}_{D1} \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

$$\textbf{(4)} \quad \overline{b}_{pq,r} - \overline{b}_{pr,q} = \sum_D \overline{\Gamma}_{pr}^D \overline{b}_{Dq} - \sum_D \overline{\Gamma}_{pq}^D \overline{b}_{Dr} \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

olduğu görülür. Diğer Codazzi denklemleri

$$\textbf{(5)} \quad \overline{b}_{12,1} - \overline{b}_{11,2} = \sum_D \overline{\Gamma}_{11}^D \overline{b}_{D2} - \sum_D \overline{\Gamma}_{12}^D \overline{b}_{D1} \quad \Rightarrow$$

$$\overline{b}_{12,1} - \overline{b}_{11,2} = -\overline{\Gamma}_{12}^1 \overline{b}_{11} + (\overline{\Gamma}_{11}^1 - \overline{\Gamma}_{12}^2)\overline{b}_{12} + \overline{\Gamma}_{11}^2 \overline{b}_{22}$$

$$\textbf{(6)} \quad \overline{b}_{1p,1} - \overline{b}_{11,p} = \sum_D \overline{\Gamma}_{11}^D \overline{b}_{Dp} - \sum_D \overline{\Gamma}_{1p}^D \overline{b}_{D1} \quad \Rightarrow$$

$$\overline{b}_{11,p} = \overline{\Gamma}_{1p}^1 \overline{b}_{11} + \overline{\Gamma}_{1p}^2 \overline{b}_{12}$$

$$\textbf{(7)} \quad \overline{b}_{22,1} - \overline{b}_{21,2} = \sum_D \overline{\Gamma}_{21}^D \overline{b}_{D2} - \sum_D \overline{\Gamma}_{22}^D \overline{b}_{D1} \quad \Rightarrow$$

$$\overline{b}_{22,1} - \overline{b}_{21,2} = -\overline{\Gamma}_{22}^1 \overline{b}_{11} + (\overline{\Gamma}_{21}^1 - \overline{\Gamma}_{22}^2)\overline{b}_{12} + \overline{\Gamma}_{21}^2 \overline{b}_{22}$$

$$\textbf{(8)} \quad \overline{b}_{p2,1} - \overline{b}_{p1,2} = \sum_D \overline{\Gamma}_{p1}^D \overline{b}_{D2} - \sum_D \overline{\Gamma}_{p2}^D \overline{b}_{D1} \quad \Rightarrow$$

$$-\overline{\Gamma}_{p2}^1 \overline{b}_{11} + (\overline{\Gamma}_{p1}^1 - \overline{\Gamma}_{p2}^2)\overline{b}_{12} + \overline{\Gamma}_{p1}^2 \overline{b}_{22} = 0$$

$$\textbf{(9)} \quad \overline{b}_{12,p} - \overline{b}_{1p,2} = \sum_D \overline{\Gamma}_{1p}^D \overline{b}_{D2} - \sum_D \overline{\Gamma}_{12}^D \overline{b}_{Dp} \quad \Rightarrow$$

$$\overline{b}_{12,p} = \overline{\Gamma}_{1p}^1 \overline{b}_{12} + \overline{\Gamma}_{1p}^2 \overline{b}_{22}$$

$$\textbf{(10)} \quad \overline{b}_{pq,1} - \overline{b}_{p1,q} = \sum_D \overline{\Gamma}_{p1}^D \overline{b}_{Dq} - \sum_D \overline{\Gamma}_{pq}^D \overline{b}_{D1} \quad \Rightarrow$$

$$\overline{\Gamma}_{pq}^1 \overline{b}_{11} + \overline{\Gamma}_{pq}^2 \overline{b}_{12} = 0$$

$$\textbf{(11)} \quad \overline{b}_{pq,2} - \overline{b}_{p2,q} = \sum_D \overline{\Gamma}_{p2}^D \overline{b}_{Dq} - \sum_D \overline{\Gamma}_{pq}^D \overline{b}_{D2} \quad \Rightarrow$$

$$\overline{\Gamma}_{pq}^1 \overline{b}_{12} + \overline{\Gamma}_{pq}^2 \overline{b}_{22} = 0$$

şeklindedir. Şimdi, bu denklemlerde geçen Christoffel sembollerini (4.1) i kullanarak hesaplayalım.

$$\overline{\Gamma}_{11}^{1}=\sum_{A}\frac{1}{2}(\overline{g}_{1A,1}+\overline{g}_{1A,1}-\overline{g}_{11,A})\overline{g}^{A1}\quad\Rightarrow$$

$$=\frac{1}{2}(\overline{g}_{11,1}+\overline{g}_{11,1}-\overline{g}_{11,1})\overline{g}^{11}+\frac{1}{2}(\overline{g}_{12,1}+\overline{g}_{12,1}-\overline{g}_{11,2})\overline{g}^{21}+\frac{1}{2}(\overline{g}_{1p,1}+\overline{g}_{1p,1}-\overline{g}_{11,p})\overline{g}^{p1}\quad\Rightarrow$$

$$=\frac{(\overline{g}_{11})_{\eta^1}}{2\overline{g}_{11}}$$

dir. Benzer işlemler gerekli olan diğer Christoffel sembolleri için de yapılırsa, aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\overline{\Gamma}_{11}^{1}=\frac{(\overline{g}_{11})_{\eta^1}}{2\overline{g}_{11}}\ ,\quad \overline{\Gamma}_{22}^{2}=\frac{(\overline{g}_{22})_{\eta^2}}{2\overline{g}_{22}}\ ,\quad \overline{\Gamma}_{21}^{1}=\frac{(\overline{g}_{11})_{\eta^2}}{2\overline{g}_{11}}\ ,\quad \overline{\Gamma}_{12}^{2}=\frac{(\overline{g}_{22})_{\eta^1}}{2\overline{g}_{22}}$$

$$\overline{\Gamma}_{22}^{1}=-\frac{(\overline{g}_{22})_{\eta^1}}{2\overline{g}_{11}}\ ,\quad \overline{\Gamma}_{11}^{2}=-\frac{(\overline{g}_{11})_{\eta^2}}{2\overline{g}_{22}}\ ,\quad \overline{\Gamma}_{1p}^{1}=\frac{(\overline{g}_{11})_{\eta^p}}{2\overline{g}_{11}}\ ,\quad \overline{\Gamma}_{p2}^{2}=\frac{(\overline{g}_{22})_{\eta^p}}{2\overline{g}_{22}}\tag{4.2}$$

$$\overline{\Gamma}_{1p}^{2}=\overline{\Gamma}_{p2}^{1}=\overline{\Gamma}_{pq}^{1}=\overline{\Gamma}_{pq}^{2}=\overline{\Gamma}_{11}^{p}=\overline{\Gamma}_{12}^{p}=0$$

Buna göre (5) denklemi

$$(\overline{b}_{12})_{\eta^1}-(\overline{b}_{11})_{\eta^2}=-\overline{b}_{11}\left(\frac{(\overline{g}_{11})_{\eta^2}}{2\overline{g}_{11}}\right)+\overline{b}_{12}\left(\frac{(\overline{g}_{11})_{\eta^1}}{2\overline{g}_{11}}-\frac{(\overline{g}_{22})_{\eta^1}}{2\overline{g}_{22}}\right)-\overline{b}_{22}\left(\frac{(\overline{g}_{11})_{\eta^2}}{2\overline{g}_{22}}\right)$$

şeklini alır. Burada (4.1) i kullanarak

$$(\beta^3\eta^3+\ldots+\beta^n\eta^n)\overline{\xi}\mathcal{J}(\cos\phi)\phi_{\eta^1}-(\beta^3\eta^3+\ldots+\beta^n\eta^n)\overline{\xi}'(\mathcal{H}+\mathcal{J}\cos\phi)$$

$$-(\beta^3\eta^3+\ldots+\beta^n\eta^n)\overline{\xi}(\mathcal{H}'+\mathcal{J}'\cos\phi-\mathcal{J}(\sin\phi)\phi_{\eta^2})$$

$$=-(\beta^3\eta^3+\ldots+\beta^n\eta^n)\overline{\xi}(\mathcal{H}+\mathcal{J}\cos\phi)\frac{(\beta^3\eta^3+\ldots+\beta^n\eta^n)^2\overline{\xi}'}{2(\beta^3\eta^3+\ldots+\beta^n\eta^n)^2\overline{\xi}}$$

$$-(\beta^3\eta^3+\ldots+\beta^n\eta^n)\overline{\xi}(\mathcal{H}-\mathcal{J}\cos\phi)\frac{(\beta^3\eta^3+\ldots+\beta^n\eta^n)^2\overline{\xi}'}{2(\beta^3\eta^3+\ldots+\beta^n\eta^n)^2\overline{\xi}}$$

elde ederiz. Buradan da

$$\frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{J}}+\frac{\overline{\xi}'}{\overline{\xi}}\cos\phi+\frac{\mathcal{J}'}{\mathcal{J}}\cos\phi=(\cos\phi)\phi_{\eta^1}+(\sin\phi)\phi_{\eta^2}\tag{4.3}$$

bulunur.

Christoffel sembollerinin (4.2) ile verilen ifadeleri gereğince (7) denklemi de

$$(\bar{b}_{22})_{\eta^1} - (\bar{b}_{21})_{\eta^2} = \bar{b}_{11}\left(\frac{(\bar{g}_{22})_{\eta^1}}{2\bar{g}_{11}}\right) + \bar{b}_{12}\left(\frac{(\bar{g}_{11})_{\eta^2}}{2\bar{g}_{11}} - \frac{(\bar{g}_{22})_{\eta^2}}{2\bar{g}_{22}}\right) + \bar{b}_{22}\left(\frac{(\bar{g}_{22})_{\eta^1}}{2\bar{g}_{22}}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\bar{\xi}'}{\bar{\xi}}\sin\phi + \frac{\mathcal{J}'}{\mathcal{J}}\sin\phi = (\sin\phi)\phi_{\eta^1} - (\cos\phi)\phi_{\eta^2} \tag{4.4}$$

şeklini alır.

Kalan **(6)**, **(8)**, **(9)**, **(10)** ve **(11)** denklemlerinin her birinin bir özdeşlik olduğu görülür, yani bunlardan yeni bir denklem elde edilmez.

Elde ettiğimiz (4.3) ve (4.4) denklemleri

$$\phi_{\eta^2} = \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{J}}\sin\phi \quad , \quad \phi_{\eta^1} = \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{J}}\cos\phi + \left(\ln\left|\bar{\xi}\mathcal{J}\right|\right)' \tag{4.5}$$

denklemlerine denktir.

4.2 Gauss Denklemleri

Hiperyüzeyin Gauss denklemi,

$$\Gamma^D_{AB,C} - \Gamma^D_{AC,B} + \sum_H \left(\Gamma^H_{AB}\Gamma^D_{HC} - \Gamma^H_{AC}\Gamma^D_{HB}\right) = \sum_H \left(b_{AB}b_{CH} - b_{AC}b_{BH}\right)g^{HD}$$

şeklindedir (Csikos, 1998). Codazzi denklemleri için yukarıda yapılanları Gauss denklemleri için tekrarlayalım:

(1) $$\bar{\Gamma}^2_{11,2} - \bar{\Gamma}^2_{12,1} + \sum_H \left(\bar{\Gamma}^H_{11}\bar{\Gamma}^2_{H2} - \bar{\Gamma}^H_{12}\bar{\Gamma}^2_{H1}\right) = \sum_H \left(\bar{b}_{11}\bar{b}_{2H} - \bar{b}_{12}\bar{b}_{1H}\right)\bar{g}^{H2} \Rightarrow$$

$$\bar{\Gamma}^2_{11,2} - \bar{\Gamma}^2_{12,1} + \bar{\Gamma}^1_{11}\bar{\Gamma}^2_{12} - \bar{\Gamma}^1_{12}\bar{\Gamma}^2_{11} + \bar{\Gamma}^2_{11}\bar{\Gamma}^2_{22} - \bar{\Gamma}^2_{12}\bar{\Gamma}^2_{21} + \bar{\Gamma}^p_{11}\bar{\Gamma}^2_{p2} - \bar{\Gamma}^p_{12}\bar{\Gamma}^2_{p1}$$

$$\Rightarrow$$

$$= \left(\bar{b}_{11}\bar{b}_{21} - \bar{b}_{12}\bar{b}_{11}\right)\bar{g}^{12} + \left(\bar{b}_{11}\bar{b}_{22} - \bar{b}_{12}\bar{b}_{12}\right)\bar{g}^{22} + \left(\bar{b}_{11}\bar{b}_{2p} - \bar{b}_{12}\bar{b}_{1p}\right)\bar{g}^{p2}$$

$$\bar{\Gamma}^2_{11,2} - \bar{\Gamma}^2_{12,1} + \bar{\Gamma}^1_{11}\bar{\Gamma}^2_{12} - \bar{\Gamma}^1_{12}\bar{\Gamma}^2_{11} + \bar{\Gamma}^2_{11}\bar{\Gamma}^2_{22} - \bar{\Gamma}^2_{12}\bar{\Gamma}^2_{21} = \left(\bar{b}_{11}\bar{b}_{22} - \bar{b}_{12}\bar{b}_{12}\right)\bar{g}^{22} \Rightarrow$$

$$-\frac{\partial}{\partial\eta^2}\left(\frac{(\bar{g}_{11})_{\eta^2}}{2\bar{g}_{22}}\right) - \frac{\partial}{\partial\eta^1}\left(\frac{(\bar{g}_{22})_{\eta^1}}{2\bar{g}_{22}}\right) + \frac{(\bar{g}_{11})_{\eta^1}(\bar{g}_{22})_{\eta^1}}{4\bar{g}_{11}\bar{g}_{22}} + \frac{(\bar{g}_{11})_{\eta^2}(\bar{g}_{11})_{\eta^2}}{4\bar{g}_{11}\bar{g}_{22}}$$

$$\Rightarrow$$

$$-\frac{(\bar{g}_{11})_{\eta^2}(\bar{g}_{22})_{\eta^2}}{4\bar{g}_{11}\bar{g}_{22}} - \left(\frac{(\bar{g}_{22})_{\eta^1}}{2\bar{g}_{22}}\right)^2 = \left\{\bar{\xi}^2(\mathcal{H}^2 - \mathcal{J}^2\cos^2\phi) - \bar{\xi}^2\mathcal{J}^2\sin^2\phi\right\}\frac{1}{\bar{\xi}}$$

$$-\frac{\partial}{\partial\eta^2}\left(\frac{(\bar{g}_{11})_{\eta^2}}{2\bar{g}_{22}}\right) = \left\{\mathcal{H}^2 - \mathcal{J}^2\cos^2\phi - \mathcal{J}^2\sin^2\phi\right\}\bar{\xi} \Rightarrow$$

$$-\frac{\partial}{\partial\eta^2}\left(\frac{(\beta^3\eta^3+\ldots+\beta^n\eta^n)^2\bar{\xi}'}{2(\beta^3\eta^3+\ldots+\beta^n\eta^n)^2\bar{\xi}}\right)=\left(\mathcal{H}^2-\mathcal{J}^2\right)\bar{\xi} \quad\Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\left(\ln\left|\bar{\xi}\right|\right)''=\left(\mathcal{H}^2-\mathcal{J}^2\right)\bar{\xi} \quad\Rightarrow$$

$$2\bar{\xi}\left(\mathcal{H}^2-\mathcal{J}^2\right)+\left(\ln\left|\bar{\xi}\right|\right)''=0 \tag{4.6}$$

(2) $\bar{\Gamma}^1_{11,2}-\bar{\Gamma}^1_{12,1}+\sum_H\left(\bar{\Gamma}^H_{11}\bar{\Gamma}^1_{H2}-\bar{\Gamma}^H_{12}\bar{\Gamma}^1_{H1}\right)=\sum_H\left(\bar{b}_{11}\bar{b}_{2H}-\bar{b}_{12}\bar{b}_{1H}\right)\bar{g}^{H1} \quad\Rightarrow$

$$\bar{\Gamma}^1_{11,2}-\bar{\Gamma}^1_{12,1}+\bar{\Gamma}^1_{11}\bar{\Gamma}^1_{12}-\bar{\Gamma}^1_{12}\bar{\Gamma}^1_{11}+\bar{\Gamma}^2_{11}\bar{\Gamma}^1_{22}-\bar{\Gamma}^2_{12}\bar{\Gamma}^1_{21}+\bar{\Gamma}^p_{11}\bar{\Gamma}^1_{p2}-\bar{\Gamma}^p_{12}\bar{\Gamma}^1_{p1}$$

$$\Rightarrow$$

$$=\left(\bar{b}_{11}\bar{b}_{21}-\bar{b}_{12}\bar{b}_{11}\right)\bar{g}^{11}+\left(\bar{b}_{11}\bar{b}_{22}-\bar{b}_{12}\bar{b}_{12}\right)\bar{g}^{21}+\left(\bar{b}_{11}\bar{b}_{2p}-\bar{b}_{12}\bar{b}_{1p}\right)\bar{g}^{p1}$$

$$\bar{\Gamma}^1_{11,2}-\bar{\Gamma}^1_{12,1}+\bar{\Gamma}^2_{11}\bar{\Gamma}^1_{22}-\bar{\Gamma}^2_{12}\bar{\Gamma}^1_{21}=0 \quad\Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta^2}\left(\frac{(\bar{g}_{11})_{\eta^1}}{2\bar{g}_{11}}\right)-\frac{\partial}{\partial\eta^1}\left(\frac{(\bar{g}_{11})_{\eta^2}}{2\bar{g}_{11}}\right)+\frac{(\bar{g}_{11})_{\eta^2}(\bar{g}_{22})_{\eta^1}-(\bar{g}_{11})_{\eta^2}(\bar{g}_{22})_{\eta^1}}{4\bar{g}_{11}\bar{g}_{22}}=0 \quad\Rightarrow\quad 0=0$$

(3) $\bar{\Gamma}^1_{11,p}-\bar{\Gamma}^1_{1p,1}+\sum_H\left(\bar{\Gamma}^H_{11}\bar{\Gamma}^1_{Hp}-\bar{\Gamma}^H_{1p}\bar{\Gamma}^1_{H1}\right)=\sum_H\left(\bar{b}_{11}\bar{b}_{pH}-\bar{b}_{1p}\bar{b}_{1H}\right)\bar{g}^{H1} \quad\Rightarrow$

$$\bar{\Gamma}^1_{11,p}-\bar{\Gamma}^1_{1p,1}+\bar{\Gamma}^1_{11}\bar{\Gamma}^1_{1p}-\bar{\Gamma}^1_{1p}\bar{\Gamma}^1_{11}+\bar{\Gamma}^2_{11}\bar{\Gamma}^1_{2p}-\bar{\Gamma}^2_{1p}\bar{\Gamma}^1_{21}+\bar{\Gamma}^q_{11}\bar{\Gamma}^1_{qp}-\bar{\Gamma}^q_{1p}\bar{\Gamma}^1_{q1}=0 \quad\Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta^p}\left(\frac{(\bar{g}_{11})_{\eta^1}}{2\bar{g}_{11}}\right)-\frac{\partial}{\partial\eta^1}\left(\frac{(\bar{g}_{11})_{\eta^p}}{2\bar{g}_{11}}\right)=\frac{\partial}{\partial\eta^1}\left(\frac{\beta^p}{(\beta^3\eta^3+\ldots+\beta^n\eta^n)}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad 0=0$$

(4) $\bar{\Gamma}^1_{21,1}-\bar{\Gamma}^1_{21,1}+\sum_H\left(\bar{\Gamma}^H_{21}\bar{\Gamma}^1_{H1}-\bar{\Gamma}^H_{21}\bar{\Gamma}^1_{H1}\right)=\sum_H\left(\bar{b}_{21}\bar{b}_{1H}-\bar{b}_{21}\bar{b}_{1H}\right)\bar{g}^{H1} \quad\Rightarrow 0=0$

(5) $\bar{\Gamma}^1_{p1,2}-\bar{\Gamma}^1_{p2,1}+\sum_H\left(\bar{\Gamma}^H_{p1}\bar{\Gamma}^1_{H2}-\bar{\Gamma}^H_{p2}\bar{\Gamma}^1_{H1}\right)=\sum_H\left(\bar{b}_{p1}\bar{b}_{2H}-\bar{b}_{p2}\bar{b}_{1H}\right)\bar{g}^{H1} \quad\Rightarrow$

$$\bar{\Gamma}^1_{p1,2}-\bar{\Gamma}^1_{p2,1}+\bar{\Gamma}^1_{p1}\bar{\Gamma}^1_{12}-\bar{\Gamma}^1_{p2}\bar{\Gamma}^1_{11}+\bar{\Gamma}^2_{p1}\bar{\Gamma}^1_{22}-\bar{\Gamma}^2_{p2}\bar{\Gamma}^1_{21}+\bar{\Gamma}^q_{p1}\bar{\Gamma}^1_{q2}-\bar{\Gamma}^q_{p2}\bar{\Gamma}^1_{q1}=0 \quad\Rightarrow$$

$$\bar{\Gamma}^1_{p1,2}+\bar{\Gamma}^1_{p1}\bar{\Gamma}^1_{12}-\bar{\Gamma}^2_{p2}\bar{\Gamma}^1_{21}=0 \quad\Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta^2}\left(\frac{(\bar{g}_{11})_{\eta^p}}{2\bar{g}_{11}}\right)+\frac{(\bar{g}_{11})_{\eta^p}(\bar{g}_{11})_{\eta^2}}{4\bar{g}_{11}\bar{g}_{11}}-\frac{(\bar{g}_{22})_{\eta^p}(\bar{g}_{11})_{\eta^2}}{4\bar{g}_{22}\bar{g}_{11}}=0 \quad\Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta^2}\left(\frac{\beta^p}{(\beta^3\eta^3+\ldots+\beta^n\eta^n)}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad 0=0$$

6) $\overline{\Gamma}^2_{11,p} - \overline{\Gamma}^2_{1p,1} + \sum_H \left(\overline{\Gamma}^H_{11}\overline{\Gamma}^2_{Hp} - \overline{\Gamma}^H_{1p}\overline{\Gamma}^2_{H1}\right) = \sum_H \left(\overline{b}_{11}\overline{b}_{pH} - \overline{b}_{1p}\overline{b}_{1H}\right)\overline{g}^{H2} \quad \Rightarrow$

$$\overline{\Gamma}^2_{11,p} - \overline{\Gamma}^1_{1p}\overline{\Gamma}^2_{11} + \overline{\Gamma}^2_{11}\overline{\Gamma}^2_{2p} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{\partial}{\partial \eta^p}\left(\frac{(\overline{g}_{11})_{\eta^2}}{2\overline{g}_{22}}\right) + \frac{(\overline{g}_{11})_{\eta^p}(\overline{g}_{11})_{\eta^2}}{4\overline{g}_{11}\overline{g}_{22}} - \frac{(\overline{g}_{22})_{\eta^p}(\overline{g}_{11})_{\eta^2}}{4\overline{g}_{22}\overline{g}_{22}} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{\partial}{\partial \eta^p}\left(\frac{\xi'}{\xi}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

bulunur.

O halde hiperyüzeyin, diğerleri kendiliğinden sağlandığından, tek Gauss denklemi (4.6) denklemi olmaktadır.

Böylece Bonnet hiperyüzeylerini belirleme problemi (4.5) Codazzi denklemleri ile (4.6) Gauss denkleminin çözümüne indirgenmektedir.Burada (Soyuçok, 1995) de yapılana benzer işlemler yaparak çözümleri elde edeceğiz.

(4.5) sisteminin çözümlerini elde edelim. $\sin\phi \neq 0$ olduğundan (4.5) in 1. denklemi

$$\frac{\phi_{\eta^2}}{\sin\phi} = \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{J}} = \left(\ln\left|\tan\frac{\phi}{2}\right|\right)_{\eta^2} \tag{4.7}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$D(\eta^2) = e^{\int \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{J}} d\eta^2}$$

olmak üzere,

$$\tan\frac{\phi}{2} = C(\eta^1)D(\eta^2) \tag{4.8}$$

elde edilir. Burada $C(\eta^1)$ keyfi bir fonksiyondur. (4.7) ve (4.8) e göre

$$\phi_{\eta^1} = \frac{2C'D}{1+C^2D^2}, \quad \phi_{\eta^2} = \frac{2CD'}{1+C^2D^2} \tag{4.9}$$

ve

$$\frac{D'}{D} = \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{J}} \tag{4.10}$$

ve dolayısıyla

$$\sin\phi = \frac{2CD}{1+C^2D^2}, \quad \cos\phi = \frac{1-C^2D^2}{1+C^2D^2} \tag{4.11}$$

yazılabilir.

Şimdi de (4.5) in 2. denklemini alalım. Burada (4.9), (4.10) ve (4.11) kullanılırsa,

$$\frac{2C'D}{1+C^2D^2}=\frac{2D'}{D(1+C^2D^2)}-\frac{D'}{D}+\left(\ln\left|\bar{\xi}\jmath\right|\right)'$$

elde edilir. Her iki yanın η^1 e göre türevi alınarak,

$$C''+C''C^2D^2-2(C')^2CD^2+2CC'D'=0 \tag{4.12}$$

bulunur. İki yan $1/C^2D^2$ ile çarpılırsa,

$$\frac{C''}{C^2}\frac{1}{D^2}+C''-\frac{2(C')^2}{C}+\frac{2C'}{C}\frac{D'}{D^2}=0$$

elde edilir. Bununda η^2 ye göre türevinden

$$\frac{C''}{C^2}\left(\frac{1}{D^2}\right)'=-\frac{2C'}{C}\left(\frac{D'}{D^2}\right)'$$

bulunur.

Önce $C'D'\neq 0$ olduğunu varsayalım. Buna göre $C=C(\eta^1)$ ve $D=D(\eta^2)$ olduğundan

$$\frac{\dfrac{C''}{C^2}}{\dfrac{2C'}{C}}=-\frac{\left(\dfrac{D'}{D^2}\right)'}{\left(\dfrac{1}{D^2}\right)'}=K\,,\quad K=\text{sabit}$$

olmak zorundadır. Buradan,

$$\frac{C''}{C^2}=\frac{2C'}{C}K\quad\Rightarrow\quad C''=(C^2)'K\quad\Rightarrow$$

$$C'=KC^2+k\,,\quad k=\text{sabit} \tag{4.13}$$

ve

$$\left(\frac{D'}{D^2}\right)'=-K\left(\frac{1}{D^2}\right)'\Rightarrow$$

$$D'=-K+k_1D^2\,,\quad k_1=\text{sabit} \tag{4.14}$$

elde edilir.

Şimdi (4.13) ve (4.14) ü (4.12) de kullanalım.

$$(k_1-k)CD^2(k+KC^2)=0$$

bulunur. $C'D' \neq 0$ olduğunu varsaydığımızdan son üç çarpan sıfırdan farklıdır, dolayısıyla $k = k_1$ dir. Bu takdirde (4.13) ve (4.14)

$$C' = KC^2 + k \ , \quad D' = kD^2 - K \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dC}{KC^2 + k} = d\eta^1 \ , \quad \frac{dD}{kD^2 - K} = d\eta^2$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi K ve k nın çeşitli durumlarına göre C ve D fonksiyonlarını elde edelim.

(1) $K > 0, \quad k < 0$ olması halinde

c_1 ve c_2 integral sabiti olmak üzere,

$$C = -\frac{\sqrt{|k|}}{\sqrt{K}} \coth(\sqrt{K|k|}\eta^1 + c_1)$$

ve

$$D = -\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{|k|}} \tan(\sqrt{K|k|}\eta^2 + c_2)$$

elde edilir.

Böylece uygun ölçek ve öteleme dönüşümleri yapılarak, $K > 0, \quad k < 0$ için

$$C = -\frac{\sqrt{|k|}}{\sqrt{K}} \coth \eta^1 \ , \quad D = -\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{|k|}} \tan \eta^2$$

bulunur.

Benzer işlemler diğer durumlar için de yapılırsa,

(2) $K < 0, \quad k > 0$ için, $C = \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{|K|}} \tanh \eta^1, \qquad D = \dfrac{\sqrt{|K|}}{\sqrt{k}} \tan \eta^2$

(3) $Kk > 0$ için, $C = -\dfrac{\sqrt{|k|}}{\sqrt{|K|}} \tan \eta^1, \qquad D = \dfrac{\sqrt{|K|}}{\sqrt{|k|}} \tanh \eta^2$

(4) $Kk = 0$ için, $C = \dfrac{1}{K\eta^1}, \qquad D = K\eta^2$

elde edilir.

Şimdi her bir hal için $\tan\frac{\phi}{2}$, $\bar{\xi}\mathcal{J}$ ve $\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{H}'}$ ifadelerini hesaplayalım:

(1) Bu hal için (4.8) den

$$\tan\frac{\phi}{2} = \coth\eta^1 \tan\eta^2$$

ve (4.10) dan

$$\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{H}'} = \frac{D}{D'} = \cos\eta^2 \sin\eta^2 = \frac{\sin 2\eta^2}{2}$$

bulunur.

$\bar{\xi}\mathcal{J}$ yi belirlemek için (4.5) deki 2. Codazzi denklemini kullanmalıyız. Önce, (4.9), (4.10) ve (4.11) i kullanarak denklemi

$$\frac{2C'D}{1+C^2D^2} - \frac{D'}{D}\left\{\frac{1-C^2D^2}{1+C^2D^2}\right\} = \left(\ln\left|\bar{\xi}\mathcal{J}\right|\right)' \tag{4.15}$$

şeklinde yazalım. Bu takdirde, bu hal için denklem

$$\frac{-2\cos\eta^2\sin\eta^2}{(\cos\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2+(\sin\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2}$$

$$-\frac{1}{\cos\eta^2\sin\eta^2}\left\{\frac{(\cos\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2-(\sin\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2}{(\cos\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2+(\sin\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2}\right\}$$

$$=\left(\ln\left|\bar{\xi}\mathcal{J}\right|\right)' \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\cos\eta^2\sin\eta^2}\left\{\frac{-2(\cos\eta^2)^2(\sin\eta^2)^2-(\cos\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2+(\sin\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2}{(\cos\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2+(\sin\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2}\right\}=\left(\ln\left|\bar{\xi}\mathcal{J}\right|\right)'$$

olur. Paydaki $(\cos\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2$ ifadesi

$$(\cos\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2 = (\cosh\eta^1)^2-(\sin\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2-(\cos\eta^2)^2$$

olarak yazılabileceğinden, sol yandaki pay

$$2(\sin\eta^2)^2\left\{(\cosh\eta^1)^2-(\cos\eta^2)^2\right\}+\left\{(\cos\eta^2)^2-(\cosh\eta^1)^2\right\}$$

şeklini alır.

Paydadaki $(\cosh\eta^1)^2(\sin\eta^2)^2$ ifadesi yerine

$$(\cosh\eta^1)^2(\sin\eta^2)^2 = 1-(\cos\eta^2)^2+(\sinh\eta^1)^2-(\sinh\eta^1)^2(\cos\eta^2)^2$$

yazarsak, payda

$$1+(\sinh\eta^1)^2-(\cos\eta^2)^2=(\cosh\eta^1)^2-(\cos\eta^2)^2$$

şeklini alır.

Böylece

$$\frac{1}{\cos\eta^2\sin\eta^2}\left\{\frac{2(\sin\eta^2)^2\{(\cosh\eta^1)^2-(\cos\eta^2)^2\}+\{(\cos\eta^2)^2-(\cosh\eta^1)^2\}}{\{(\cosh\eta^1)^2-(\cos\eta^2)^2\}}\right\}=\left(\ln\left|\bar{\xi}\mathcal{J}\right|\right)' \Rightarrow$$

$$\left(\frac{2(\sin\eta^2)^2-1}{\cos\eta^2\sin\eta^2}\right)=\left(\ln\left|\bar{\xi}\mathcal{J}\right|\right)'$$

elde edilir. Buradan

$$-\left(\frac{\cos\eta^2}{\sin\eta^2}-\frac{\sin\eta^2}{\cos\eta^2}\right)=\left(\ln\left|\bar{\xi}\mathcal{J}\right|\right)' \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{1}{\cos\eta^2\sin\eta^2}\right)'=\left(\ln\left|\bar{\xi}\mathcal{J}\right|\right)' \Rightarrow$$

$$\bar{\xi}\mathcal{J}=\frac{c_0}{\sin 2\eta^2},\quad c_0=\text{sabit}$$

bulunur.

(2) Bu hal için, (4.8) den

$$\tan\frac{\phi}{2}=\tanh\eta^1\tan\eta^2$$

ve (4.10) dan

$$\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{H}'}=\frac{D}{D'}=\frac{\sin 2\eta^2}{2}$$

elde edilir.

Şimdi, bu hal için $\bar{\xi}\mathcal{J}$ yi hesaplayalım.(4.15) den

$$\frac{2\cos\eta^2\sin\eta^2}{(\cos\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2+(\sin\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2}$$

$$-\frac{1}{\cos\eta^2\sin\eta^2}\left\{\frac{(\cos\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2-(\sin\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2}{(\cos\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2+(\sin\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2}\right\}=\left(\ln\left|\bar{\xi}\mathcal{J}\right|\right)' \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\cos\eta^2\sin\eta^2}\left\{\frac{2(\cos\eta^2)^2(\sin\eta^2)^2-(\cos\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2+(\sin\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2}{(\cos\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2+(\sin\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2}\right\}$$

$$=\left(\ln\left|\bar{\xi}\mathcal{J}\right|\right)'$$

yazılabilir. Yukarıda yapılan işlemlerin benzeri burada da tekrarlanırsa, son ifade

$$-\left(\frac{(\cos\eta^2)^2-(\sin\eta^2)^2}{\cos\eta^2\sin\eta^2}\right)=\left(\ln\left|\bar{\xi}\mathcal{J}\right|\right)'$$

şeklini alır. Buradan

$$\ln\left(\frac{1}{\cos\eta^2\sin\eta^2}\right)'=\left(\ln\left|\bar{\xi}\mathcal{J}\right|\right)' \quad\Rightarrow$$

$$\bar{\xi}\mathcal{J}=\frac{c_0}{\sin 2\eta^2}, \quad c_0=\text{sabit}$$

elde edilir.

(3) Bu hal için , (4.8) den

$$\tan\frac{\phi}{2}=-\tan\eta^1\tanh\eta^2$$

ve (4.10) dan da

$$\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{H}'}=\frac{D}{D'}=\frac{\sinh 2\eta^2}{2}$$

bulunur.

$\bar{\xi}\mathcal{J}$ yi belirlemek için (4.15) kullanılırsa

$$\frac{-2\cosh\eta^2\sinh\eta^2}{(\cos\eta^1)^2(\cosh\eta^2)^2+(\sin\eta^1)^2(\sinh\eta^2)^2}$$

$$-\frac{1}{\cosh\eta^2\sinh\eta^2}\left\{\frac{(\cos\eta^1)^2(\cosh\eta^2)^2-(\sin\eta^1)^2(\sinh\eta^2)^2}{(\cos\eta^1)^2(\cosh\eta^2)^2+(\sin\eta^1)^2(\sinh\eta^2)^2}\right\}$$

$$=\left(\ln\left|\bar{\xi}\mathcal{J}\right|\right)' \quad\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\cosh\eta^2\sinh\eta^2}\left\{\frac{-2(\cosh\eta^2)^2(\sinh\eta^2)^2-(\cos\eta^1)^2(\cosh\eta^2)^2+(\sin\eta^1)^2(\sinh\eta^2)^2}{(\cos\eta^1)^2(\cosh\eta^2)^2+(\sin\eta^1)^2(\sinh\eta^2)^2}\right\}$$

$$=\left(\ln\left|\bar{\xi}\mathcal{J}\right|\right)'$$

elde edilir. Yukarıdaki hallerde yapılan işlemlerin benzeri burada da tekrarlanırsa, son elde ettiğimiz ifade

$$-\left(\frac{(\cosh\eta^2)^2+(\sinh\eta^2)^2}{\cosh\eta^2\sinh\eta^2}\right)=\left(\ln\left|\bar{\xi}\mathcal{J}\right|\right)'$$

şeklini alır. Buradan

$$\ln\left(\frac{1}{\cosh\eta^2\sinh\eta^2}\right)'=\left(\ln\left|\bar{\xi}\mathcal{J}\right|\right)' \quad\Rightarrow$$

$$\bar{\xi}\mathcal{J}=\frac{c_0}{\sinh 2\eta^2}, \quad c_0=\text{sabit}$$

bulunur.

(4) Bu hal için yine (4.8) den

$$\tan\frac{\phi}{2}=\frac{\eta^2}{\eta^1}$$

ve (4.10) dan

$$\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{H}'}=\frac{D}{D'}=\frac{K\eta^2}{K}=\eta^2$$

elde edilir.

$\bar{\xi}\mathcal{J}$ ifadesi de (4.15) den

$$\frac{-2K(\eta^2)^2-K(\eta^1)^2+K(\eta^2)^2}{K\eta^2\left\{(\eta^1)^2+(\eta^2)^2\right\}}=\left(\ln\left|\bar{\xi}J\right|\right)' \quad\Rightarrow$$

$$\frac{-\left\{(\eta^2)^2+(\eta^1)^2\right\}}{\eta^2\left\{(\eta^1)^2+(\eta^2)^2\right\}}=\left(\ln\left|\bar{\xi}J\right|\right)' \quad\Rightarrow$$

$$\frac{-1}{\eta^2}=\left(\ln\left|\bar{\xi}J\right|\right)' \quad\Rightarrow$$

$$\ln\left|\bar{\xi}J\right|=-\ln\eta^2+\ln c_0, \quad c_0=\text{sabit}$$

$$\bar{\xi}\mathcal{J}=\frac{c_0}{\eta^2}$$

olarak elde edilir.

Yukarıda $C'D' \neq 0$ olduğunu varsaymıştık. Şimdi $C'D' = 0$ olması durumunu inceleyelim. $D' = 0$ için (4.10) uyarınca

$\mathcal{H}' = 0$

bulunur. Bu hali daha önce incelediğimiz için $C(\eta^1) = \text{sabit}$ halini inceleyelim. Bu halde (4.8) den ϕ nin sadece η^2 nin bir fonksiyonu olduğu görülür.

(5) $C(\eta^1) = \text{sabit} > 0$ olsun. Uygun bir dönüşümle

$$\frac{\phi}{2} = \eta^2 \Rightarrow \phi = 2\eta^2$$

olması sağlanır.

(4.10) dan

$$\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{H}'} = \frac{D}{D'} = \frac{\sin 2\eta^2}{2}$$

ve (4.15) den

$$-\frac{D'}{D}\left\{\frac{1 - C^2D^2}{1 + C^2D^2}\right\} = \left(\ln\left|\xi J\right|\right)'$$

elde edilir. Buradan da

$$-\frac{(\cos\eta^2)^2 - (\sin\eta^2)^2}{\sin\eta^2 \cos\eta^2} = \left(\ln\left|\xi J\right|\right)' \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{1}{\cos\eta^2 \sin\eta^2}\right)' = \left(\ln\left|\xi \mathcal{J}\right|\right)' \Rightarrow$$

$$\xi \mathcal{J} = \frac{c_0}{\sin 2\eta^2}, \quad c_0 = \text{sabit}$$

bulunur.

$C(\eta^1) = \text{sabit} < 0$ olması durumunda yine (4.8) den $\phi = -2\eta^2$ elde edilir.

(4.10) ve (4.15) kullanılarak $\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{H}'}$ ve $\xi \mathcal{J}$ için **(5)** halindekiyle aynı sonuçlar bulunur.

Yukarıdaki her hal için ϕ fonksiyonu harmoniktir. Şimdi bunu gösterelim.

ϕ sadece η^1 ve η^2 ye bağlı ve $g_{11} = g_{22}$ olduğundan, $\Delta\phi = 0$ denklemi $\phi_{\eta^1\eta^1} + \phi_{\eta^2\eta^2} = 0$ şeklini alır. Dolayısıyla ϕ nin harmonik olduğunu göstermek için bu denklemin sağlandığını kanıtlamalıyız.

(1) $\phi = 2\arctan(\coth\eta^1 \tan\eta^2)$ için

$$\phi_{\eta^1} = \frac{-\sin 2\eta^2}{(\cos\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2 + (\sin\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2}$$

$$\phi_{\eta^1\eta^1} = \frac{\sin 2\eta^2 \sinh 2\eta^1}{\left[(\cos\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2 + (\sin\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2\right]^2}$$

$$\phi_{\eta^2} = \frac{\sinh 2\eta^1}{(\cos\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2 + (\sin\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2}$$

$$\phi_{\eta^2\eta^2} = \frac{-\sin 2\eta^2 \sinh 2\eta^1}{\left[(\cos\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2 + (\sin\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2\right]^2}$$

dir. Buradan $\Delta\phi = 0$ bulunur. O halde ϕ harmoniktir.

(2) $\phi = 2\arctan(\tanh\eta^1 \tan\eta^2)$ için,

$$\phi_{\eta^1} = \frac{\sin 2\eta^2}{(\cos\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2 + (\sin\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2}$$

$$\phi_{\eta^1\eta^1} = \frac{-\sin 2\eta^2 \sinh 2\eta^1}{\left[(\cos\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2 + (\sin\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2\right]^2}$$

$$\phi_{\eta^2} = \frac{\sinh 2\eta^1}{(\cos\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2 + (\sin\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2}$$

$$\phi_{\eta^2\eta^2} = \frac{\sin 2\eta^2 \sinh 2\eta^1}{\left[(\cos\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2 + (\sin\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2\right]^2}$$

olduğundan $\phi_{\eta^1\eta^1} + \phi_{\eta^2\eta^2} = 0$ bulunur. Yani ϕ harmoniktir.

(3) $\phi = -2\arctan(\tan\eta^1 \tanh\eta^2)$ için,

$$\phi_{\eta^1} = \frac{-\sinh 2\eta^2}{(\cos\eta^1)^2(\cosh\eta^2)^2 + (\sinh\eta^2)^2(\sin\eta^1)^2},$$

$$\phi_{\eta^1\eta^1} = \frac{-\sin 2\eta^1 \sinh 2\eta^2}{\left[(\cos\eta^1)^2(\cosh\eta^2)^2 + (\sinh\eta^2)^2(\sin\eta^1)^2\right]^2}$$

ve

$$\phi_{\eta^2} = \frac{-\sin 2\eta^1}{(\cos\eta^1)^2(\cosh\eta^2)^2 + (\sinh\eta^2)^2(\sin\eta^1)^2},$$

$$\phi_{\eta^2\eta^2} = \frac{\sin 2\eta^1 \sinh 2\eta^2}{\left[(\cos\eta^1)^2(\cosh\eta^2)^2 + (\sinh\eta^2)^2(\sin\eta^1)^2\right]^2}$$

ve dolayısıyla $\Delta\phi = 0$ bulunur. O halde ϕ harmoniktir.

(4) $\phi = 2\arctan\left(\frac{\eta^2}{\eta^1}\right)$ için,

$$\phi_{\eta^1} = \frac{-2\eta^2}{(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2}, \quad \phi_{\eta^1\eta^1} = \frac{4\eta^1\eta^2}{\left[(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2\right]^2}$$

ve

$$\phi_{\eta^2} = \frac{2\eta^1}{(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2}, \quad \phi_{\eta^2\eta^2} = \frac{-4\eta^1\eta^2}{\left[(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2\right]^2}$$

dir, yani $\Delta\phi = 0$ olup ϕ harmoniktir.

(5) $\phi = \mp 2\eta^2$ için,

$$\phi_{\eta^1\eta^1} = 0, \phi_{\eta^2\eta^2} = 0$$

olduğundan ϕ harmoniktir.

O halde her hal için ϕ harmoniktir.

Şimdi elde ettiğimiz sonuçları toplu olarak ifade edelim.

$$\tan\frac{\phi}{2} = \coth\eta^1 \tan\eta^2 \quad , \quad \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{H}'} = \frac{\sin 2\eta^2}{2} \quad , \quad \bar{\xi}\mathcal{J} = \frac{c_0}{\sin 2\eta^2} \tag{4.16}$$

$$\tan\frac{\phi}{2} = \tanh\eta^1 \tan\eta^2 \quad , \quad \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{H}'} = \frac{\sin 2\eta^2}{2} \quad , \quad \bar{\xi}\mathcal{J} = \frac{c_0}{\sin 2\eta^2} \tag{4.17}$$

$$\tan\frac{\phi}{2} = -\tan\eta^1 \tanh\eta^2 \quad , \quad \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{H}'} = \frac{\sinh 2\eta^2}{2} \quad , \quad \bar{\xi}\mathcal{J} = \frac{c_0}{\sinh 2\eta^2} \tag{4.18}$$

$$\tan\frac{\phi}{2}=\frac{\eta^2}{\eta^1}\ , \qquad \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{H}'}=\eta^2\ , \qquad \xi\mathcal{J}=\frac{c_0}{\eta^2} \tag{4.19}$$

$$\phi=2\eta^2(-2\eta^2)\ , \qquad \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{H}'}=\frac{\sin 2\eta^2}{2}\ , \qquad \xi\mathcal{J}=\frac{c_0}{\sin 2\eta^2} \tag{4.20}$$

Şimdi (4.6) Gauss denkleminde, yukarıda elde edilen sonuçları kullanarak her bir hale karşılık $\mathcal{H}(\eta^2)$ için diferansiyel denklemler elde edelim.

(4.16) dan $\mathcal{J}=\frac{\sin 2\eta^2}{2}\mathcal{H}'$, $\xi=\frac{2c_0}{(\sin 2\eta^2)^2\mathcal{H}'}$ elde edilir. Buna göre (4.6) dan

$$\frac{4c_0}{(\sin 2\eta^2)^2\mathcal{H}'}\left\{\mathcal{H}^2-\frac{(\sin 2\eta^2)^2}{4}(\mathcal{H}')^2\right\}+\left\{\ln\frac{2c_0}{(\sin 2\eta^2)^2|\mathcal{H}'|}\right\}''=0 \ \Rightarrow$$

$$\frac{4c_0}{(\sin 2\eta^2)^2\mathcal{H}'}\left\{\mathcal{H}^2-\frac{(\sin 2\eta^2)^2}{4}(\mathcal{H}')^2\right\}-\left\{\ln(\sin 2\eta^2)^2\right\}''-\left\{\ln|\mathcal{H}'|\right\}''=0 \ \Rightarrow$$

$$\frac{4c_0}{(\sin 2\eta^2)^2\mathcal{H}'}\left\{\mathcal{H}^2-\frac{(\sin 2\eta^2)^2}{4}(\mathcal{H}')^2\right\}+\frac{8}{(\sin 2\eta^2)^2}-\frac{\mathcal{H}'''\mathcal{H}'-(\mathcal{H}'')^2}{(\mathcal{H}')^2}=0$$

bulunur. Denklemin her iki yanını $-(\sin 2\eta^2)^2(\mathcal{H}')$ çarpalım. Böylece

$$(\sin 2\eta^2)^2\mathcal{H}'''-(\sin 2\eta^2)^2\frac{(\mathcal{H}'')^2}{\mathcal{H}'}-4\left\{2\mathcal{H}'+c_0\left(\mathcal{H}^2-\frac{(\sin 2\eta^2)^2}{4}(\mathcal{H}')^2\right)\right\}=0 \tag{4.21}$$

elde edilir.

(4.17) ve (4.20) için de $\mathcal{J}=\frac{\sin 2\eta^2}{2}\mathcal{H}'$ ve $\xi=\frac{2c_0}{(\sin 2\eta^2)^2\mathcal{H}'}$ olduğundan (4.6) Gauss denkleminde yerine yazıldığında (4.21) diferansiyel denklemi elde edilir.

(4.18) den $\mathcal{J}=\frac{\sinh 2\eta^2}{2}\mathcal{H}'$, $\xi=\frac{2c_0}{(\sinh 2\eta^2)^2\mathcal{H}'}$ bulunur. Bunlar (4.6) Gauss denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{4c_0}{(\sinh 2\eta^2)^2\mathcal{H}'}\left\{\mathcal{H}^2-\frac{(\sinh 2\eta^2)^2}{4}(\mathcal{H}')^2\right\}+\left\{\ln\frac{2c_0}{(\sinh 2\eta^2)^2|\mathcal{H}'|}\right\}''=0 \ \Rightarrow$$

$$\frac{4c_0}{(\sinh 2\eta^2)^2\mathcal{H}'}\left\{\mathcal{H}^2-\frac{(\sinh 2\eta^2)^2}{4}(\mathcal{H}')^2\right\}-\left\{\ln(\sinh 2\eta^2)^2\right\}''-\left\{\ln|\mathcal{H}'|\right\}''=0 \ \Rightarrow$$

$$\frac{4c_0}{(\sinh 2\eta^2)^2\,\mathcal{H}'}\left\{\mathcal{H}^2-\frac{(\sinh 2\eta^2)^2}{4}(\mathcal{H}')^2\right\}+\frac{8}{(\sinh 2\eta^2)^2}-\frac{\mathcal{H}'''\mathcal{H}'-(\mathcal{H}'')^2}{(\mathcal{H}')^2}=0$$

elde edilir. Bu da

$$(\sinh 2\eta^2)^2\mathcal{H}'''-(\sinh 2\eta^2)^2\frac{(\mathcal{H}'')^2}{\mathcal{H}'}-4\left\{2\mathcal{H}'+c_0\left(\mathcal{H}^2-\frac{(\sinh 2\eta^2)^2}{4}(\mathcal{H}')^2\right)\right\}=0 \qquad (4.22)$$

şeklinde yazılabilir.

(4.19) a göre $\mathcal{J}=\eta^2\mathcal{H}'$, $\xi=\dfrac{c_0}{(\eta^2)^2\mathcal{H}'}$ olup bu hal için (4.6) Gauss denklemi

$$\frac{2c_0}{(\eta^2)^2\mathcal{H}'}\left\{\mathcal{H}^2-(\eta^2)^2(\mathcal{H}')^2\right\}+\left\{\ln\frac{c_0}{(\eta^2)^2|\mathcal{H}'|}\right\}''=0 \Rightarrow$$

$$\frac{2c_0}{(\eta^2)^2\mathcal{H}'}\left\{\mathcal{H}^2-(\eta^2)^2(\mathcal{H}')^2\right\}-\left\{\ln(\eta^2)^2\right\}''-\left\{\ln|\mathcal{H}'|\right\}''=0 \Rightarrow$$

$$\frac{2c_0}{(\eta^2)^2\mathcal{H}'}\left\{\mathcal{H}^2-(\eta^2)^2(\mathcal{H}')^2\right\}+\frac{2}{(\eta^2)^2}-\frac{\mathcal{H}'''\mathcal{H}'-(\mathcal{H}'')^2}{(\mathcal{H}')^2}=0$$

şeklini alır. Buradan da

$$(\eta^2)^2\mathcal{H}'''-(\eta^2)^2\frac{(\mathcal{H}'')^2}{\mathcal{H}'}-2\left\{\mathcal{H}'+c_0\left(\mathcal{H}^2-(\eta^2)^2(\mathcal{H}')^2\right)\right\}=0 \qquad (4.23)$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

Şimdi (4.16), (4.17), (4.18), (4.19) ve (4.20) deki ifadeleri (4.1) de kullanarak, her bir hal için B-hiperyüzeylerinin temel büyüklüklerini bulalım ve karşı gelen Gauss denklemini yazalım.

(4.16) için:

$$\bar{b}_{11}=(\beta^3x^3+\ldots+\beta^nx^n)\frac{2c_0}{(\sin 2\eta^2)^2\mathcal{H}'}\left\{\mathcal{H}+\left(\frac{\sin 2\eta^2}{2}\right)\mathcal{H}'\left(\frac{(\cos\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2-(\sin\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2}{(\cos\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2+(\sin\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2}\right)\right\}$$

$$\bar{b}_{22}=(\beta^3x^3+\ldots+\beta^nx^n)\frac{2c_0}{(\sin 2\eta^2)^2\mathcal{H}'}\left\{\mathcal{H}-\left(\frac{\sin 2\eta^2}{2}\right)\mathcal{H}'\left(\frac{(\cos\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2-(\sin\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2}{(\cos\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2+(\sin\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2}\right)\right\}$$

$$\bar{b}_{12}=(\beta^3x^3+\ldots+\beta^nx^n)\frac{c_0(\sinh 2\eta^1)}{2\left\{(\cos\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2+(\sin\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2\right\}},$$

$$\bar{b}_{1q}=\bar{b}_{2q}=\bar{b}_{pq}=0, \qquad (4.24)$$

$$\bar{g}_{11}=\bar{g}_{22}=(\beta^3\eta^3+\ldots+\beta^n\eta^n)^2\frac{2c_0}{(\sin 2\eta^2)^2\mathcal{H}'},$$

$$\overline{g}_{pp} = 1,$$

$$(\sin 2\eta^2)^2 \mathcal{H}''' - (\sin 2\eta^2)^2 \frac{(\mathcal{H}'')^2}{\mathcal{H}'} - 4\left\{2\mathcal{H}' + c_0\left(\mathcal{H}^2 - \frac{(\sin 2\eta^2)^2}{4}(\mathcal{H}')^2\right)\right\} = 0$$

(4.17) için:

$$\overline{b}_{11} = (\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)\frac{2c_0}{(\sin 2\eta^2)^2 \mathcal{H}'}\left\{\mathcal{H} + \left(\frac{\sin 2\eta^2}{2}\right)\mathcal{H}'\left(\frac{(\cos\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2 - (\sin\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2}{(\cos\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2 + (\sin\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2}\right)\right\}$$

$$\overline{b}_{22} = (\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)\frac{2c_0}{(\sin 2\eta^2)^2 \mathcal{H}'}\left\{\mathcal{H} - \left(\frac{\sin 2\eta^2}{2}\right)\mathcal{H}'\left(\frac{(\cos\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2 - (\sin\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2}{(\cos\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2 + (\sin\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2}\right)\right\}$$

$$\overline{b}_{12} = (\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)\frac{c_0(\sinh 2\eta^1)}{2\left\{(\cos\eta^2)^2(\cosh\eta^1)^2 + (\sin\eta^2)^2(\sinh\eta^1)^2\right\}},$$

$$\overline{b}_{1q} = \overline{b}_{2q} = \overline{b}_{pq} = 0, \tag{4.25}$$

$$\overline{g}_{11} = \overline{g}_{22} = (\beta^3\eta^3 + \ldots + \beta^n\eta^n)^2\frac{2c_0}{(\sin 2\eta^2)^2\mathcal{H}'},$$

$$\overline{g}_{pp} = 1,$$

$$(\sin 2\eta^2)^2 \mathcal{H}''' - (\sin 2\eta^2)^2 \frac{(\mathcal{H}'')^2}{\mathcal{H}'} - 4\left\{2\mathcal{H}' + c_0\left(\mathcal{H}^2 - \frac{(\sin 2\eta^2)^2}{4}(\mathcal{H}')^2\right)\right\} = 0$$

(4.18) için:

$$\overline{b}_{11} = (\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)\frac{2c_0}{(\sinh 2\eta^2)^2 \mathcal{H}'}\left\{\mathcal{H} + \left(\frac{\sinh 2\eta^2}{2}\right)\mathcal{H}'\left(\frac{(\cos\eta^1)^2(\cosh\eta^2)^2 - (\sin\eta^1)^2(\sinh\eta^2)^2}{(\cos\eta^1)^2(\cosh\eta^2)^2 + (\sin\eta^1)^2(\sinh\eta^2)^2}\right)\right\}$$

$$\overline{b}_{22} = (\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)\frac{2c_0}{(\sinh 2\eta^2)^2 \mathcal{H}'}\left\{\mathcal{H} - \left(\frac{\sinh 2\eta^2}{2}\right)\mathcal{H}'\left(\frac{(\cos\eta^1)^2(\cosh\eta^2)^2 - (\sin\eta^1)^2(\sinh\eta^2)^2}{(\cos\eta^1)^2(\cosh\eta^2)^2 + (\sin\eta^1)^2(\sinh\eta^2)^2}\right)\right\}$$

$$\overline{b}_{12} = (\beta^3 x^3 + \ldots + \beta^n x^n)\frac{c_0(\sin 2\eta^1)}{2\left\{(\cos\eta^1)^2(\cosh\eta^2)^2 + (\sin\eta^1)^2(\sinh\eta^2)^2\right\}},$$

$$\overline{b}_{1q} = \overline{b}_{2q} = \overline{b}_{pq} = 0, \tag{4.26}$$

$$\overline{g}_{11} = \overline{g}_{22} = (\beta^3\eta^3 + \ldots + \beta^n\eta^n)^2\frac{2c_0}{(\sinh 2\eta^2)^2\mathcal{H}'},$$

$$\overline{g}_{pp} = 1,$$

$$(\sinh 2\eta^2)^2 \mathcal{H}''' - (\sinh 2\eta^2)^2 \frac{(\mathcal{H}'')^2}{\mathcal{H}'} - 4\left\{2\mathcal{H}' + c_0\left(\mathcal{H}^2 - \frac{(\sinh 2\eta^2)^2}{4}(\mathcal{H}')^2\right)\right\} = 0$$

(4.19) için:

$$\bar{b}_{11}=(\beta^3x^3+\ldots+\beta^nx^n)\frac{c_0}{(\eta^2)^2\mathcal{H}'}\left\{\mathcal{H}+\eta^2\mathcal{H}'\left(\frac{(\eta^1)^2-(\eta^2)^2}{(\eta^1)^2+(\eta^2)^2}\right)\right\},$$

$$\bar{b}_{22}=(\beta^3x^3+\ldots+\beta^nx^n)\frac{c_0}{(\eta^2)^2\mathcal{H}'}\left\{\mathcal{H}-\eta^2\mathcal{H}'\left(\frac{(\eta^1)^2-(\eta^2)^2}{(\eta^1)^2+(\eta^2)^2}\right)\right\},$$

$$\bar{b}_{12}=(\beta^3x^3+\ldots+\beta^nx^n)\frac{2c_0\eta^1}{(\eta^1)^2+(\eta^2)^2},$$

$$\bar{b}_{1q}=\bar{b}_{2q}=\bar{b}_{pq}=0, \tag{4.27}$$

$$\bar{g}_{11}=\bar{g}_{22}=(\beta^3\eta^3+\ldots+\beta^n\eta^n)^2\frac{c_0}{(\eta^2)^2\mathcal{H}'},$$

$$\bar{g}_{pp}=1,$$

$$(\eta^2)^2\mathcal{H}'''-(\eta^2)^2\frac{(\mathcal{H}'')^2}{\mathcal{H}'}-2\left\{\mathcal{H}'+c_0\left(\mathcal{H}^2-(\eta^2)^2(\mathcal{H}')^2\right)\right\}=0$$

(4.20) için:

$$\bar{b}_{11}=(\beta^3x^3+\ldots+\beta^nx^n)\frac{2c_0}{(\sin 2\eta^2)^2\mathcal{H}'}\left\{\mathcal{H}+\frac{\sin 4\eta^2}{4}\mathcal{H}'\right\},$$

$$\bar{b}_{22}=(\beta^3x^3+\ldots+\beta^nx^n)\frac{2c_0}{(\sin 2\eta^2)^2\mathcal{H}'}\left\{\mathcal{H}-\frac{\sin 4\eta^2}{4}\mathcal{H}'\right\},$$

$$\bar{b}_{12}=\mp(\beta^3x^3+\ldots+\beta^nx^n)c_0,$$

$$\bar{b}_{1q}=\bar{b}_{2q}=\bar{b}_{pq}=0, \tag{4.28}$$

$$\bar{g}_{11}=\bar{g}_{22}=(\beta^3\eta^3+\ldots+\beta^n\eta^n)^2\frac{2c_0}{(\sin 2\eta^2)^2\mathcal{H}'},$$

$$\bar{g}_{pp}=1,$$

$$(\sin 2\eta^2)^2\mathcal{H}'''-(\sin 2\eta^2)^2\frac{(\mathcal{H}'')^2}{\mathcal{H}'}-4\left\{2\mathcal{H}'+c_0\left(\mathcal{H}^2-\frac{(\sin 2\eta^2)^2}{4}(\mathcal{H}')^2\right)\right\}=0$$

Yukarıdaki her bir hal için, elde edilen Gauss denkleminden $\mathcal{H}(\eta^2)$ ortalama eğriliği bulunarak, 1. ve 2. esas formlar belirlenir. Böylece hiperyüzeylerin temel teoremi uyarınca Bonnet hiperyüzeyleri tamamiyle belirlenmiş olur.

5. SONUÇLAR

Bonnet hiperyüzeylerinin belirleme probleminde iki hal söz konusudur. **(a)** $w_p^2(E_2) = w_p^1(E_1) = T_p$ ile tanımlı fonksiyonların hepsinin birden sıfır olması hali **(b)** $T_p \neq 0$ hali.

(a) halinde, R^{n+1} deki Bonnet hiperyüzeyleri belirlenmesi probleminin tamamiyle R^3 deki Bonnet yüzeylerin belirlenmesi problemine (Soyuçok, 1995) indirgendiği görülmüştür. Bu halde Bonnet hiperyüzeyleri tabanı R^3 deki Bonnet yüzeyleri olan silindirlerdir.

(b) halinde, bir M hiperyüzeyinin bir Bonnet hiperyüzeyi olması için A-şebekesi denilen özel bir ortogonal şebekeye sahip olmasının gerek ve yeter koşul olduğu gösterilmiştir. Aynı gerek ve yeter koşulun **(a)** hali için de geçerli olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

İkinci bir izometrik sistem yardımıyla belirlenen $(\eta^1, \eta^2, ..., \eta^n)$ ortogonal koordinatlar alındığında H, J ve $\bar{g}_{AB}$ lerin $(\eta^1, \eta^2, ..., \eta^n)$ noktasındaki değeri ile $C =$ sabit olmak üzere $(\eta^1 + C, \eta^2, ..., \eta^n)$ noktasındaki değerlerinin aynı olduğu görülmüştür. Böylece hiperyüzeyin ortalama eğrilik korunarak kendi üzerine bükülebildiği sonucu elde edilmiştir.

(4.24), (4.25) ve (4.28) ile verilen Bonnet hiperyüzeyleri aynı Gauss denklemini sağladığından aynı ortalama eğriliğe sahiptir (c_0 sabiti aynı alındığında). Bu yüzden bu hiperyüzeyler birbirlerinin yandaşıdır.Yani bunlar ortalama eğrilik korunarak birbirine bükülebilirler.

(4.26) ve (4.27) ile verilen Bonnet hiperyüzeyleri için Gauss denklemi birbirinden ve yukarıdakinden farklı olduğundan ortalama eğrilikleri de farklıdır. Dolayısıyla bunlar kendi üzerlerine bükülebilirler.

Böylece R^{n+1} deki tüm bükülebilir Bonnet hiperyüzeyleri belirlenmiş olmaktadır.

KAYNAKLAR

Bobenko, A.I. ve Eitner, U., (1998), " Bonnet Surfaces and Painleve Equations", J Reine Angew Math 499: 47-79.

Bonnet, O., (1867), "Memoire sur la Theorie des Surfaces, Applicable sur une Surface Donne", J. Ec. Polyt.,25.

Cartan, E. , (1942), "Sur les Couples Surfaces Applicables avec Conservation des Courbures Principales", Bull. Sci. Math., 66:55 – 85.

Chern, S.S., (1985), " Deformations of Surfaces Preserving Principal Curvature", Differantial Geometry and Complex Analysis, H. E. Rauch Memorial Volume (I. Chavel and H. M. Farkas, eds.) Springer – Verlag,155-163.

Chern, S.S., Chen, W. H. ve Lam, K.K., (1999), Lectures on Differential Geometry, Word Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. USA.

Chern, S.S., Bryant, R.L., Gardner, R.B., Goldschmidt, H.L. ve Griffiths, P.A., (1991), Exterior Differential Systems, Mathematical sciences research institute publications, Springer – Verlag, New York.

Colares, A.G. ve Kenmotsu, K., (1989), "Isometric Deformation of Surfaces in R^3 Preserving the Mean Curvature Function", Pasific J. Math., 136:71-80.

Csikos, B., (1998), "Differential Geometry", Lectures Notes, Budapest Semesters in Mathematics.

Eisenhart, L.P. , (1960), A Treatise on the Differantial Geometry of Curves and Surfaces, Dover Publications, Inc., New York.

Hicks, N.J. , (1965), Notes on Differential Geometry, D. Van Nostrand Company, Inc., New York.

Kenmotsu, K., (1994), " An Intrinsic Characterization of H-Deformable Surfaces", J. London Math. Soc., 49:555-568.

Kobayashi, S. ve Nomizu, K., (1969), Foundations of Differential Geometry, Volum 2, Interscience, New York.

Kokubu, M., (1992), "Isometric Deformations of Hypersurfaces in a Euclidean Space Preserving Mean Curvature", Tohoku Math. J., 44:433 – 442.

Matsushima, Y., (1972), Differentiable Manifolds, Translated by E. T. Kobayashi Marcel Dekker, Inc. New York.

Roussos, I.M., (1987), " Principal Curvature Preserving Isometries of Surfaces in Ordinary Spaces", Bol. Soc. Math., 18, 2: 95 – 105.

Roussos, I.M., (1999), "Global Results on Bonnet Surfaces", J. of Geometry, 65:151-158.

Xiuxiong, C. ve Chia-Kuei, P., (1989) "Deformation of Surfaces Preserving Principal Curvatures", Lect. Notes Math., 63-70.

Soyuçok, Z., (1995), "The Problem of Non - Trivial Isometries of Surfaces Preserving Principal Curvatures", Journal of Geometry Vol. 52:173-188.

Soyuçok, Z., (1996), "The Problem of Isometric Deformations of a Euclidean Hypersurface Preserving Mean Curvature", Bull. Tech. Univ. Vol. 49: 551 – 562.

Voss, K., (1993), "Bonnet Surfaces in Spaces of Constant Curvature", Lecture Notes II of 1 st MSJ Research Institute, Sendai, Japan, 295-307.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	12.10.1972	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1986-1989	Halide Edip Adıvar Lisesi
Lisans	1989-1993	Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	1993-1995	Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
Doktora	1997-2004	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Çalıştığı kurum

1995-Devam Ediyor Marmara Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi
Araştırma Görevlisi