YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Laplace Dönüşümleri ve Uygulamaları

Yüksek Lisans Tezi

B. Belgin Göktürk

2004

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ VE UYGULAMALARI

Matematikçi Burçin Belgin GÖKTÜRK

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yrd.Doç.Dr. Servet ES

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Servet ES

Y.Doç.Dr. Coşkun Güler

Doç.Dr.Mustafa Bayram

İSTANBUL, 2004

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ

$\forall$	Her
$\lvert f(t) \rvert$	f(t) fonksiyonunun mutlak değeri
$f(t) * g(t)$	f(t) ve g(t) fonksiyonlarının evrişimi
$F'(s)$	F(s) nin birinci mertebeden türevi
$F^n(s)$	F(s) nin n inci mertebeden türevi
$\lim\limits_{a \to \infty} b$	a sonsuza giderken b nin limiti
L	Laplace dönüşümü
L^{-1}	Ters Laplace dönüşümü
IR	Reel sayılar kümesi
Re(s)	s kompleks sayısının reel kısmı
u(x-c)	Birim basamak fonksiyonu
u(x-c) f(x-c)	Pozitif x doğrultusunda f(x) fonksiyonunun c birim ötelenmesi
$\Gamma(n)$	Gamma fonksiyonu
$\delta_0(t)$	Sıfır basamaklı Dirac delta fonksiyonu
$\Rightarrow$	ise

ŞEKİL LİSTESİ

ÖNSÖZ

Ünlü Fransız matematikçisi Pierre Simon De Laplace (1749-1827), t reel değişkenli bir f fonksiyonunu s değişkenli F fonksiyonuna dönüştüren bir dönüşüm tanımlamıştır. Bu dönüşüme ise kendi adıyla anılan Laplace dönüşümü adını vermiştir.

Bu dönüşüm adi ya da kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlenmesinde uygulanan bir teknik olarak geliştirilmiştir. Bu teknik ayrıca fiziksel matematikte de simgesel hesap adıyla bilinen yöntemin esasını oluşturmaktadır.

Bu çalışmada Laplace dönüşümü ve temel özellikleri araştırıldı. Laplace ve ters Laplace dönüşümü arasındaki bağlantı incelendi. Diferansiyel denklem çözümlerinde karşılaşabileceğimiz özel fonksiyonların Laplace dönüşümleri hesaplandı. Bu dönüşüm adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümüne uygulandı.

Tezimi hazırlarken bana yardımcı olan ve yönlendiren hocam, Sayın Y. Doç. Dr. Servet Es'e, çalışmalarım süresince beni destekleyen aileme ve yardımlarını esirgemeyen arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunuyorum.

ÖZET

Bu çalışmada özellikle başlangıç değer problemlerinin çözümünde çok kullanışlı yöntemlerden biri olan Laplace dönüşümü ele alınmıştır. Her bölüm tanımlarla başlar ve her teoremden sonra ispatı ve açıklayıcı örneği verilir.

Birinci bölümde bazı hatırlatmalara yer verilmiştir. Laplace dönüşümü tanımlanmış ve varlığı için yeter koşul açıklanmıştır. Laplace transformasyonunun temel teoremleri ispatlanmıştır. Bazı özel fonksiyonların dönüşümünün nasıl hesaplanacağı örneklerle açıklanmıştır.

İkinci bölümde ters Laplace dönüşümü ve özellikleri özetlenmiştir. Bu dönüşüm örneklerle açıklanmaya çalışılmıştır.

Üçüncü bölümde birim basamak fonksiyonu, gamma fonksiyonu, periyodik fonksiyon ve Dirac delta fonksiyonu açıklanmış ve Laplace dönüşümleri hesaplanmıştır.

Dördüncü bölüm Duhamel formülü ve uygulanmasına ayrılmıştır.

Beşinci bölümde Heaviside açılım teoremleri ve formülü anlatılmıştır.

Altıncı bölümde Laplace dönüşümü yardımıyla lineer diferansiyel denklemlerin çözümü verilmiştir.

Yedinci bölüm konvolüsyona ayrılmış ve konvolüsyon yardımıyla başlangıç değer problemlerinin çözüm yöntemi anlatılmıştır.

Sekizinci bölümde Laplace dönüşümü kismi diferansiyel denklemlerin çözümüne uygulanmıştır.

Son bölümde ise bu çalışmanın sonuçları özetlenmiştir.

Anahtar kelimeler: Laplace dönüşümü, ters Laplace dönüşümü, diferansiyel denklem, başlangıç değer problemi, konvolüsyon

ABSTRACT

In this study, Laplace transform that is especially useful in the solution of initial-value problems has handled. Every chapter starts with definitions and it is followed by theorems, proves and examples.

In the first chapter there are some revisions. Laplace transform is defined and sufficient condition for the existence of transform is explained. Basic theorems of Laplace transform are also proved. However, it is explained how to calculate the transform of basic functions by examples.

In the second chapter inverse Laplace transform and its basic properties are summarized. Some examples are solved to explain this transform.

In the third chapter step function, gamma function, periodic function and Dirac delta function are explained and their Laplace transforms are calculated.

Fourth chapter is reserved for Duhamel formula and its applications.

In the fifth chapter it is explained Heaviside expansion theorems and formula.

In the sixth chapter the solution of linear differential equations by Laplace transform is given.

Seventh chapter is reserved for convolution and the solution of initial-value problems is explained by using convolution.

In the eighth chapter Laplace transform is applied to the solution of partial differential equations.

In the last part the results of this study is summarized.

Keywords: Laplace transform, inverse Laplace transform, differential equation, initial-value problem, convolution

1. GİRİŞ

Laplace dönüşümü lineer sabit katsayılı adî ve kismî türevli diferansiyel denklemleri çözmek için çok kullanışlı yöntemlerden biridir. Bu yöntem lineer sabit katsayılı diferansiyel denklemlere ilişkin başlangıç değer problemlerini lineer cebirsel denklem sistemine dönüştürmede kolaylık sağlamaktadır.

Pierre Simone De Laplace (1749-1827), altın çağda analizin ve fonksiyonlar teorisinin gelişme sürecine katkıda bulunan matematikçiler arasındadır. Laplace'ın çalışmalarının ürünü olan bu yöntem lineer devrelerde, sistemler kuramında ve kontrol teorisinde de kullanılmaktadır.

Bu çalışmada öncelikle Laplace dönüşümünün temel teoremleri üzerinde duruldu. Daha sonra, ters Laplace dönüşümü özetlendi. Diferansiyel denklem çözümlerinde kullanılan bazı özel fonksiyonların Laplace dönüşümleri üzerinde duruldu ve tüm bu özelliklerin adî ve kismî türevli diferansiyel denklemlerin çözümüne uygulanmasına çalışıldı.

1.1 Laplace Dönüşümü

İntegral dönüşümler, lineer diferansiyel denklemleri çözmek için çok kullanışlı yöntemlerdendir. İntegral dönüşüm,

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t) f(t) dt \qquad (1.1)$$

biçimindedir. Verilen f fonksiyonu bir integral yardımıyla diğer F fonksiyonuna dönüştürülür. F fonksiyonuna f in dönüşümü ve K ya dönüşümün çekirdeği denir. (1.1) bağıntısını kullanmamızdaki genel amaç; f i F e dönüştürerek daha basit bir problem biçimine getirmek, bu problemi çözmek ve daha sonra F dönüşümünden istenen f fonksiyonunu elde etmektir. Uygun şekilde α ve β integrasyon sınırlarını belirleyerek ve K çekirdeğini seçerek problemi lineer diferansiyel problemine dönüştürebiliriz.

IR nin $[0,\infty[$ aralığı üzerinde tanımlı gerçek ya da karmaşık değerli bir f(t) fonksiyonu verilsin. O zaman t gerçek ya da karmaşık olmak üzere f nin $L\{f(t)\}$ ya da F(s) ile gösterilen Laplace dönüşümü

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \qquad (1.2)$$

ile tanımlanır. Laplace dönüşümü sıfırdan sonsuza giden bir integral olarak tanımlandığından öncelikle bu çeşit integrallerin bazı özelliklerini gözden geçirmek gerekir. İntegralin sınırları sonsuz olduğu için bu integral bir belirsiz integraldir ve aşağıdaki gibi sonlu aralık üzerindeki integrallerin limiti olarak tanımlanır.

$$\int_0^\infty f(t)dt = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(t)dt \tag{1.3}$$

Burada A pozitif reel sayıdır. $\forall$ A>a için a dan A ya integrali mevcutsa ve A$\to \infty$ a giderken limit mevcutsa o zaman belirsiz integralin bu limit değerine yakınsadığı söylenir. Aksi taktirde integral ıraksar ya da integralin varlığından söz edilemez. Her iki olasılık aşağıda örneklenmektedir.

1.1.1 Örnek:

$f(t) = e^{ct}$, $t \geq 0$ olsun. c sıfırdan farklı reel bir sabittir. O zaman,

$$\int_0^\infty e^{ct}\, dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{ct} dt = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{ct}}{c}\Big|_0^A = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{c}(e^{cA} - 1)$$

c<0 ise integral yakınsar ve c>0 ise ıraksar.

c = 0 ise integral tekrar ıraksar.

1.1.2 Örnek:

$f(t) = \frac{1}{t}$, $t \geq 1$ olsun. O zaman

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} = \lim_{A\to\infty} \int_1^\infty \frac{dt}{t} = \lim_{A\to\infty} \ln A$$

elde edilir. $\lim_{A\to\infty} \ln A = \infty$ olduğundan belirsiz integral ıraksar.

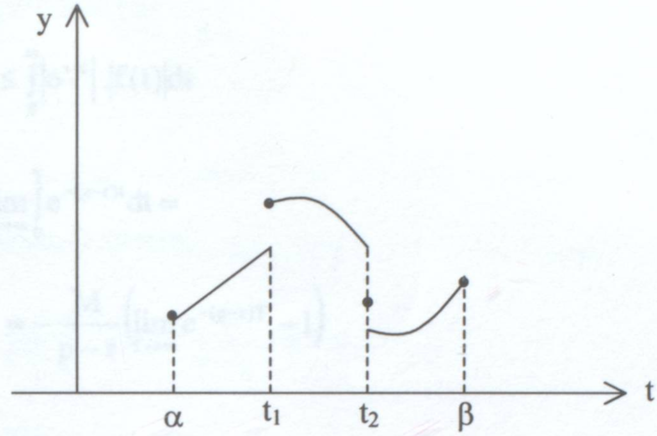
1.2 Parça Parça Süreklilik

f fonksiyonu $\alpha \leq t \leq \beta$ aralığında $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ sonlu aralıklarıyla parçalanabiliyorsa bu aralıkta parçalı süreklidir.

1) f fonksiyonu her $t_{i-1} < t < t_i$ açık alt aralığında süreklidir.

2) f, her bir alt aralığın uç noktalarında sonlu bir limite yaklaşır.

$\forall\, \beta > a$ için f, $\alpha \leq t \leq \beta$ aralığında parçalı sürekli ise $t \geq a$ için de parçalı süreklidir denir. Parçalı sürekli fonksiyon örneği Şekil 1.1 de gösterilmektedir.



Şekil 1.1 Parçalı sürekli fonksiyon

1.3 Eksponansiyel Mertebeden Fonksiyonlar

$|f(t)| \leq Me^{at}$ veya $|e^{-at}f(t)| \leq M$ olacak şekilde $a \geq 0$ reel sayısı ve t_0, M pozitif sabitleri varsa her $t > t_0$ için f(t) ye $t \to \infty$ için eksponansiyel mertebesi a olan bir fonksiyon denir.

1.3.1 Örnek :

$f(t) = e^{at}$ sin bt fonksiyonu eksponansiyel mertebesi a olan bir fonksiyondur.

$$|f(t)| = e^{at}|\sin bt| \leq e^{at} \quad \text{ve} \quad |f(t)| \leq Me^{at}, \quad M \geq 1$$

bulunur.

1.3.2 Örnek:

$f(t) = e^{t^2}$ fonksiyonu eksponansiyel mertebeden değildir. $e^{-at}|f(t)| = e^{-at+t^2}$ fonksiyonu $t \to \infty$ için sınırsızdır.

1.4 Teorem (Laplace Dönüşümünün Varlığı):

f(t), $[0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli ve r dereceden sınırlı fonksiyon ise o zaman her Re(s)>r eşitsizliğini sağlayan bütün s ler için (1.2) integrali yakınsaktır, yani $L\{f(t)\}$Laplace dönüşümü vardır.

İspat:

$s = p + iq$, yani Re (s) = p olsun. O zaman

$$|e^{-st}| = |e^{-pt}.e^{-iqt}| = e^{-pt}|e^{-iqt}| = e^{-pt}$$

$$\left(|e^{-iqt}| = |\cos qt - i\sin qt| = 1\right)$$

olduğunu göz önüne alırsak,

$$|Lf(t)| = \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right| \le \int_0^\infty \left|e^{-st}\right| . |f(t)| dt$$

$$\le M \int_0^\infty e^{-(p-r)t} dt = M \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-(p-r)t} dt =$$

$$-\frac{M}{p-r} \lim_{T\to\infty} e^{-(p-r)t} \Big|_0^T = -\frac{M}{p-r}\left(\lim_{T\to\infty} e^{-(p-r)T} - 1\right)$$

$$= \frac{M}{p-r}, \qquad p > r$$

bulunur. Yani (1.2) integrali yakınsaktır.

(1.2) integralinin yakınsaklığı durumunda, f (t) nin Laplace dönüşümü,

$$L\{f(t)\} = F(s) \quad \text{veya} \quad F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \tag{1.4}$$

ile gösterilir.

1.5 Teorem (Doğrusallık Özelliği):

$f_1(t)$ ve $f_2(t)$ fonksiyonları 1.4 teoreminin koşullarını sağlıyorsa, o zaman keyfi c_1 ve c_2 sabitleri için

$$L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 L\{f_1(t)\} + c_2 L\{f_2(t)\} \tag{1.5}$$

eşitlikleri doğrudur. (1.5) e **Laplace dönüşümünün doğrusallık özelliği** denir.

İspat:

$$L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] dt$$

$$= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t) dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t) dt$$

$$= c_1 L\{f_1(t)\} + c_2 L\{f_2(t)\}$$

1.5.1 Örnekler:

Aşağıdaki fonksiyonların Laplace dönüşümlerini bulalım.

a) $f(t) = 1$ ve $t > 0$ olsun. O zaman,

$$L\{1\}=\int_0^\infty e^{-st}dt=\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}dt=\lim_{A\to\infty}\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^A$$

$$=\frac{1}{s}\ ,\quad s>0$$

b) $f(t)=e^{at}, t\geq 0$ olsun. O zaman,

$$L\{e^{at}\}=\int_0^\infty e^{-st}.e^{at}dt=\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-(s-a)t}dt=\frac{1}{s-a},\ \ s>a$$

c) $f(t)=\sin at, t\geq 0$ olsun. O zaman,

1. yol: $\sin at=\dfrac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}$ olduğundan b şıkkından

$$L\{\sin at\}=L\left\{\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}\right\}=\frac{1}{2i}L\{e^{iat}\}-\frac{1}{2i}L\{e^{-iat}\}$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\frac{s-ia}{s+ia}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{s+ia}{s-ia}}\right)$$

$$=\frac{\cancel{s}+ia-\cancel{s}+ai}{2i(s^2+a^2)}=\frac{\cancel{2}a\cancel{i}}{\cancel{2}\cancel{i}(s^2+a^2)}$$

$$=\frac{a}{s^2+a^2}$$

bulunur.

2. yol: $L\{\sin at\}=\int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt,$ L' hospital yardımıyla

$$L\{\sin at\}=\lim_{A\to\infty}\left[\frac{-e^{-st}\cos at}{a}\Big|_0^A-\frac{s}{a}\int_0^A e^{-st}\cos at\,dt\right]$$

$$=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{a}+\left(-\frac{s}{a^2}e^{-st}\sin at\Big|_0^A-\frac{s}{a^2}\int\sin at\,e^{-st}dt\right)$$

$$F(s)=\frac{1}{a}-\frac{s}{a^2}F(s)$$

bulunur. Buradan,

$$F(s)=L\{\sin at\}=\frac{a}{s^2+a^2}, \qquad s>0$$

elde edilir.

Not: L {sin at} ve L {cos at} aşağıdaki yöntemle de bulunabilir.

e^{iat} = cos at + i sin at olduğundan her iki tarafın Laplace dönüşümünü alalım :

$$L\{e^{iat}\}=\int_0^\infty e^{-st}\cos at+i\int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt$$

$$\frac{1}{s-ai}=L(\cos at)+i\,L(\sin at)$$

$$(s+ai)$$

olur. Buradan,

$$\frac{s+ai}{s^2+a^2}=L(\cos at)+i\,L(\sin at)$$

$\dfrac{s}{s^2+a^2}+i\dfrac{a}{s^2+a^2}=L(\cos at)+i\,L(\sin at)$ bulunur. Reel ve sanal kısımları birbirine eşitleyelim:

$$L(\cos at)=\frac{s}{s^2+a^2} \quad \text{ve} \quad L(\sin at)=\frac{a}{s^2+a^2}$$

sonucuna ulaşılır.

d) f(t) = t olsun.

$$L(t)=\int_0^\infty e^{-st}t\,dt=\lim_{A\to\infty}\int_0^A te^{-st}dt$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left[t\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)-1.\left(\frac{e^{-st}}{s^2}\right)\right]\Big|_0^A$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-sA}}{s^2}-\frac{Ae^{-sA}}{s}\right)$$

$$=\frac{1}{s^2}, \quad s>0$$

e) $L\{e^{at}\cosh bt\}=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}\cosh bt\,dt$

$$= \int_0^{\infty} e^{t(a-s)}\left(\frac{e^{bt}+e^{-bt}}{2}\right)dt$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{e^{t(a-s+b)}+e^{t(a-s-b)}}{2}dt$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_0^{R} \frac{e^{t(a-s+b)}}{2}dt + \lim_{R\to\infty}\int_0^{R} \frac{e^{t(a-s-b)}}{2}dt$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{\begin{matrix}(a-s+b)\\(a-s-b)\end{matrix}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\begin{matrix}(a-s-b)\\(a-s+b)\end{matrix}}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{(a-s-b)+(a-s+b)}{(a-s)^2-b^2}\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{2(a-s)}{(a-s)^2-b^2}\right]$$

$$= \frac{s-a}{(s-a)^2-b^2} \qquad s>|b|$$

Bazı fonksiyonların Laplace dönüşümleri ekler bölümünde verilmiştir. L $\{f(t)\}$ ya da F(s) nin Laplace dönüşümünü düşünelim. Genellikle s parametresi kompleks olabilir. Fakat şimdilik s nin reel değerlerini düşüneceğiz. s nin kompleks değerli örneğine 5. bölümde yer verilecektir.

1.6 Teorem (Birinci Geçiş veya Öteleme Özelliği):

L $\{f(t)\}$ = F(s) ise

L $\{e^{at} f(t)\}$= F(s-a) (1.6)

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$L\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}f(t)dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}f(t)dt$$

$$= F(s-a)$$

olur.

1.6.1 Örnek:

L $(e^{at}\cos h\, bt)$ = ?

$L(\cosh bt) = \dfrac{s}{s^2 - b^2}$ $s > |b|$ (sy. 68) olduğundan

$$L(e^{at}\cosh bt) = \frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}$$

bulunur.

1.7 Teorem (İkinci Geçiş veya Öteleme Özelliği) :

$L\{f(t)\} = F(s)$ ise

$$G(t) = \begin{cases} f(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases} \qquad \text{olmak üzere,}$$

$$L\{G(t)\} = e^{-as}F(s) \tag{1.7}$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$L\{G(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}G(t)dt = \int_0^a e^{-st}G(t)dt + \int_a^\infty e^{-st}G(t)dt$$

$$= \int_0^a e^{-st}.0\,dt + \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt$$

$$= \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt$$

bulunur. Burada t-a = v dönüşümü yapılırsa

$$L\{G(t)\} = \int_0^\infty e^{-s(a+v)}f(v)dv = e^{-as}\int_0^\infty e^{-sv}f(v)dv$$

$$= e^{-as}F(s)$$

bulunur.

1.7.1 Örnek:

$$f(t) = \begin{cases} e^{t-\pi} & t > \pi \\ 0 & t < \pi \end{cases} \quad \text{ise} \qquad L\{f(t)\} = ?$$

$L\{e^t\} = \dfrac{1}{s-1}$ olduğundan

$$L\{f(at)\} = \frac{e^{-\pi s}}{s-1}$$

bulunur.

1.8 Teorem (Skala Değişim Özelliği):

$L\{f(t)\} = F(s)$ ise keyfi $a > 0$ için

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \tag{1.8}$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$L\{f(at)\} = \int_0^\infty f(at)\, e^{-st} dt$$

Burada $u = at$, $dt = \dfrac{du}{a}$ dönüşümü yapılırsa,

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(u)\, e^{-s\frac{u}{a}}\, du = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

bulunur.

1.8.1 Örnek:

$L\{\cos 4t\} = ?$

$L\{\cos t\} = \dfrac{s}{s^2+1}$ (sy. 68) olduğundan,

$$L\{\cos 4t\} = \frac{1}{4}\frac{\frac{s}{4}}{\left(\frac{s}{4}\right)^2+1} = \frac{1}{4}\frac{\frac{s}{4}}{\frac{s^2+16}{16}} = \frac{s}{s^2+16}$$

bulunur.

1.9 Teorem:

$L\{f(t)\} = F(s)$ olmak üzere

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^n(s) \quad \text{dir.} \tag{1.9}$$

İspat : $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,f(t)dt$ olmak üzere her iki tarafın s ye göre türevini alırsak,

$$F'(s)=\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

$$=\int_0^\infty \frac{d\,e^{-st}f(t)}{ds}dt=-\int_0^\infty e^{-st}t\,f(t)\,dt$$

$$-F'(s)=\int_0^\infty e^{-st}\left[t\,f(t)\right]dt$$

$$-F'(s)=L\{t\,f(t)\}$$

bulunur. Şimdi F" (s) yi hesaplayalım:

$$F''(s)=\left[F'(s)\right]'$$

$$-\left[-F'(s)\right]'=L\,t\,\{t\,f(t)\}$$

$$(-1)^2F''(s)=L\{t^2f(t)\}$$

Bu şekilde devam edersek,

$$(-1)^3F'''(s)=L\{t^3\,f(t)\}$$

$$\vdots$$

$$(-1)^n\,F^n(s)=L\{t^n\,f(t)\}$$

bulunur (Halilov, 2003).

1.9.1 Örnek:

$$L\{t^n\}=?$$

$L\{t^n.1\}$ olduğu gözönüne alınarak f(t) = 1 kabul edelim:

O zaman $L\{1\}=\dfrac{1}{s}$ ve

$$L\{t^n\}=(-1)^n\left(\frac{1}{s}\right)^n=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

bulunur.

1.9.2 Örnek:

$L\{t\, e^{3t} \cos 4t\} = ?$

$L\{t \cos 4t\}$ yi bulmak için f(t) =cos 4t kabul edelim.

O zaman,

$$L(\cos 4t) = \frac{s}{s^2+16} \qquad \text{ve} \qquad L(t \cos 4t) = (-1)^1\left(\frac{s}{s^2+16}\right)'$$

$$= -\left[\frac{1(s^2+16) - 2s.s}{(s^2+16)^2}\right]$$

$$= \frac{s^2-16}{(s^2+16)^2}$$

$L\{e^{3t}\ t \cos 4t\}$ ise birinci geçiş özelliği yardımıyla

$$L\{e^{3t} t \cos 4t\} = \frac{(s-3)^2 - 16}{\left[(s-3)^2+16\right]^2}$$

bulunur.

1.10 Teorem :

$L\{f(t)\} = F(s)$ ise

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(p)\, dp \tag{1.10}$$

olur.

$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \phi(s)$ olmak üzere 1.9 teoreminden yararlanarak,

$$L\left\{t.\frac{f(t)}{t}\right\} = (-1)' \ \phi'(s) \Rightarrow F(s) = -\phi'(s)$$

bulunur. Yukarıdaki ifadenin her iki tarafının [s,S] aralığı üzere integralini alalım:

$$\phi(s) - \phi(S) = \int_s^S F(p)\, dp$$

$S \to \infty$ a giderken limite geçersek, *

$$\phi(s) = \int_s^\infty F(p)\,dp$$

bulunur. Yani

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(p)\,dp$$

elde edilir.

1.10.1 Örnek:

$\dfrac{\sin h\,3t}{t}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$L(\sin h\,3t) = \frac{3}{s^2 - 9}$$

$$L\left(\frac{\sin h\,3t}{t}\right) = 3\int_s^\infty \frac{dp}{p^2 - 9} = \frac{1}{2}\lim_{S\to\infty}\int_s^S\left(\frac{1}{p-3} - \frac{1}{p+3}\right)dp$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{S\to\infty}\ln\frac{p-3}{p+3}\Big|_s^S$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{S\to\infty}\ln\frac{S-3}{S+3} - \frac{1}{2}\ln\frac{s-3}{s+3}$$

$$\lim_{S\to\infty}\ln\frac{S-3}{S+3} = 0, \qquad s > 3 \text{ olduğundan}$$

$$L\left\{\frac{\sin h\,3t}{t}\right\} = \frac{1}{2}\ln\frac{s+3}{s-3}$$

bulunur.

1.11 Teorem (Fonksiyonun Türevinin Laplace Dönüşümleri):

Varsayalım ki f sürekli f ', $0 \le t \le A$ aralığında parçalı sürekli olsun. $t \ge M$ için $|f(t)| \le K.e^{at}$ koşulunu sağlayan K, a, ve M sabitleri varolsun. O zaman $s > a$ için $L\{f'(t)\}$ vardır ve

$$L\{f'(t)\} = s\,L\{f(t)\} - f(0) \tag{1.11}$$

eşitliği sağlanır.

---

* $L(f(t)) = F(s)$ olmak üzere $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$ dır.

İspat:

Bu teoremi ispatlamak için

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)\,dt$$

integralini düşünelim. $t_1, t_2, ..., t_n$ f' nün sürekli olduğu $0 \leq t \leq A$ aralığındaki noktalar olsun.

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)\,dt = \int_0^{t_1} e^{-st} f'(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f'(t)dt + ... + \int_{t_n}^{A} e^{-st} f'(t)dt$$

Aşağıdaki her terimi integre edersek ve $A \rightarrow \infty$ için limit alırsak

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^{t_1} + e^{-st} f(t)\Big|_{t_1}^{t_2} + ... + e^{-st} f(t)\Big|_{t_n}^{A}$$

$$+ s\left[\int_0^{t_1} e^{-st} f(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t)\,dt + ... + \int_{t_n}^{A} e^{-st} f(t)\,dt\right]$$

bulunur. f, sürekli olduğundan integralleri birleştirerek

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)\,dt = e^{-sA} f(A) - f(0) + s\int_0^A e^{-st} f(t)\,dt$$

eşitliği elde edilir. $A \rightarrow \infty$ a giderken, $s > a$ için $e^{-sA} f(A) \rightarrow 0$ dır. Buradan $s > a$ için

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$$

bulunur.

Yukarıdaki teorem yardımıyla aynı koşulları sağlayan f' ve f'' için $s > a$ koşuluyla f'' nün Laplace dönüşümünü

$L\{f''(t)\} = sL\{f'(t)\} - f'(0) = s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$ olarak elde ederiz.

f fonksiyonu ve türevleri de gerekli koşulları sağlamak şartıyla n. mertebeden türev $f^{(n)}$-nin Laplace dönüşümünü

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n L\{f(t)\} - s^{(n-1)} f(0) - s^{(n-2)} f'(0) - ... f^{(n-1)}(0) \quad (1.12)$$

olarak buluruz.

(1.12) formülüne **başlangıç fonksiyonunun diferansiyellenmesi formülü** denir.

1.11.1 Örnek:

$f(t) = t \sin 3t$ fonksiyonunun 3. mertebeden türevinin görüntüsünü bulunuz.

Verilen fonksiyon için $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) = 6$.

ve $L\{\sin 3t\} = \dfrac{3}{s^2+9} = F(s)$ dir. Buradan,

$$L\{t \sin 3t\} = (-1)^1 F'(s) = \frac{6s}{(s^2+9)^2}$$

olur. (1.12) formülüne göre

$$L\{t \sin 3t\}^{(3)} = s^3 \frac{3}{s^2+9} - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

$$= \frac{3s^3}{s^2+9} - 6$$

bulunur.

1.12 Teorem (Fonksiyonun İntegralinin Laplace Dönüşümü):

$$L\{f(u)\} = F(s) \text{ ise } \qquad L\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{F(s)}{s} \text{ dir.} \tag{1.13}$$

İspat:

$\int_0^t f(u)\,du = \phi(t)$ olsun. O zaman,

$$\phi'(t) = f(t) \tag{1.14}$$

ve $\phi(0) = 0$ dır. (1.14) ün Laplace dönüşümünü alarak

$$L\{\phi'(t)\} = s\,L\{\phi(t)\} - \phi(0) = s\,L\{\phi(t)\}$$

$$F(s) = s\,L\{\phi(t)\}$$

Buradan,

$$L\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{F(s)}{s} \tag{1.15}$$

bulunur. (1.15) formülüne **başlangıç fonksiyonunun integrallenmesi formülü** denir.

1.12.1 Örnek :

$e^t \int_0^t e^{a\tau} \sin\beta\tau d\tau$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım:

$f(u) = e^{au} \sin\beta u \Rightarrow L\{f(u)\} = \dfrac{\beta}{(s-a)^2+\beta^2}$ dır. (1.15) formülüne göre

$$L\left\{\int_0^t e^{a\tau} \sin\beta\tau d\tau\right\} = \frac{\beta}{s\left[(s-a)^2+\beta^2\right]}$$

olur. Buradan, birinci geçiş özelliğine göre,

$$L\left\{e^t \int_0^t e^{a\tau} \sin\beta\tau d\tau\right\} = \frac{\beta}{(s-1)\left[(s-a-1)^2+\beta^2\right]}$$

bulunur.

1.13 Örnekler

Aşağıdaki fonksiyonların Laplace dönüşümlerini bulunuz.

a) $f(t) = \begin{cases} 2\sin 3t, & 0 \le t < \pi/3 \\ e^{2t}, & \pi/3 \le t \end{cases}$

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = 2\int_0^{\pi/3} e^{-st} \sin 3t\, dt + \int_{\pi/3}^\infty e^{-st}.e^{2t} dt \tag{1.16}$$

$$\int_0^{\pi/3} e^{-st} \sin 3t\, dt = \frac{3}{s^2+9}\left(1+e^{-s\pi/3}\right) \text{ ve } \int_{\pi/3}^\infty e^{-st} e^{2t} dt = \frac{e^{\frac{\pi}{3}(2-s)}}{s-2}$$

bulunur. Bu değerler (1.16) da yerine yazılırsa

$$L\{f(t)\} = \frac{6}{s^2+9}\left(1+e^{-s\pi/3}\right) + \frac{e^{\pi/3(2-s)}}{s-2}$$

bulunur.

b) $f(t) = \sin\sqrt{t}$

Bu fonksiyonun Laplace dönüşümünü seri açılım formülünü kullanarak bulalım:

$$\sin\sqrt{t} = \sqrt{t} - \frac{(\sqrt{t})^3}{3!} + \frac{(\sqrt{t})^5}{5!} - \frac{(\sqrt{t})^7}{7!} + \ldots = t^{1/2} - \frac{t^{3/2}}{3!} + \frac{t^{5/2}}{5!} - \frac{t^{7/2}}{7!} + \ldots$$

Her iki yanın Laplace dönüşümünü alırsak ve ileride ayrıntılı olarak inceleyeceğimiz gamma fonksiyonundan yararlanırsak,

$$L\{\sin\sqrt{t}\} = \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} - \frac{\Gamma(5/2)}{3!\,s^{5/2}} + \frac{\Gamma(7/2)}{5!\,s^{7/2}} - \frac{\Gamma(9/2)}{7!\,s^{9/2}} + \ldots$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}\left\{1 - \left(\frac{1}{2^2 s}\right) + \left(\frac{1}{2^2 s}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} - \left(\frac{1}{2^2 s}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \ldots\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} e^{-1/2^2 s} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} e^{-1/4s}$$

buluruz.

c) $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$

1.10 teoreminden yararlanalım:

$L\{\sin t\} = \dfrac{1}{s^2+1}$ dir. O zaman

$$L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{1}{p^2+1}\,dp = \lim_{S\to\infty} \int_s^S \frac{dp}{p^2+1} = \lim_{S\to\infty} \arctan p \Big|_s^S$$

$$= \lim_{S\to\infty} \arctan S - \lim_{S\to\infty} \arctan s$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan s$$

olur.

d) $f(t) = e^{-3x} x \int_0^x \frac{1}{t} e^{3t} \sin 2t\, dt$

$L\{f(t)\} = L\left\{e^{-3x} x \int_0^x \frac{1}{t} e^{3t} \sin 2t\, dt\right\}$ yi hesaplamak için önce

$L\left\{\frac{1}{t} e^{3t} \sin 2t\right\}$ yi bulalım. 1.10 teoremi ve birinci geçiş özelliği yardımıyla

$$L\left\{e^{3t} \frac{\sin 2t}{t}\right\} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s-3}{2}$$

bulunur. Buradan, 1.12 teoreminden,

$$L\left\{\int_0^x \frac{e^{3t}\sin 2t}{t}dt\right\} = \frac{\pi}{2s} - \frac{1}{s}\text{arc tan}\frac{s-3}{2}$$

elde edilir. Yine, 1.9 teoreminden

$$L\left\{x\int_0^x \frac{e^{3t}\sin 2t}{t}dt\right\} = (-1)\frac{d}{ds}L\left\{\int_0^x \frac{e^{3t}\sin 2t\, dt}{t}\right\}$$

$$= (-1)\left\{\frac{\pi}{2s} - \frac{1}{s}\text{arc tan}\frac{s-3}{2}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2s^2} - \frac{1}{s^2}\text{arc tan}\,\frac{s-3}{2} + \frac{2}{\left[(s-3)^2+4\right]}.\frac{1}{s}$$

bulunur.

$$L\left\{e^{-3x}x\int_0^x \frac{1}{t}e^{3t}\sin 2t\, dt\right\} = \frac{\pi}{2(s+3)^2} - \frac{1}{(s+3)^2}\text{arc tan}\,\frac{s}{2} + \frac{2}{(s^2+4)}.\frac{1}{s}$$

bulunur.

e) $f(t) = \sin^3 2t = \sin 2t.\sin^2 2t = \frac{1}{2}\sin 2t(1-\cos 4t)$

$$= \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{2}\sin 2t.\cos 4t$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(-2t) + \sin 6t\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{4}\sin 6t$$

olduğundan,

$$L\left\{\sin^3 2t\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) + \frac{1}{\cancel{4}_2}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) - \frac{1}{\cancel{4}_2}\frac{\cancel{6}^3}{s^2+36}$$

$$= \frac{3}{2(s^2+4)} - \frac{3}{2(s^2+36)}$$

bulunur.

2. TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

2.1. Tanım:

f(t) fonksiyonunun Laplace dönüşümü,

$L\{f(t)\} = F(s)$

olmak üzere, f(t) fonksiyonuna, F(s) fonksiyonunun **ters Laplace dönüşümü** denir ve

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} \tag{2.1}$$

ile gösterilir.

2.1.1 Örnek:

$L\{e^{-t}\} = \dfrac{1}{s+1}$ olduğundan $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}$

olur.

2.2 Ters Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Laplace dönüşümünün sağladığı bir takım özellikleri ters Laplace dönüşümü de sağlamaktadır.

$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ olsun.

1) Ters Laplace dönüşümünün doğrusallık özelliği :

$$L^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\} = c_1 L^{-1}\{F_1(s)\} + c_2 L^{-1}\{F_2(s)\} \tag{2.2}$$

2) Ters Laplace dönüşümünün birinci öteleme özelliği:

$$L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t) \tag{2.3}$$

3) Ters Laplace dönüşümünün ikinci öteleme özelliği:

$$L^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = \begin{cases} f(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases} \tag{2.4}$$

4) Ters Laplace dönüşümünün skala değişim özelliği:

$$\frac{1}{a} L^{-1}\left\{F\left(\frac{s}{a}\right)\right\} = f(at) \tag{2.5}$$

5) Türetilmiş fonksiyonların ters Laplace dönüşümleri :

$$L^{-1}\left\{\frac{d}{ds^n}F(s)\right\} = (-1)^n t^n \, f(t) \tag{2.6}$$

6) İntegrallerin ters Laplace dönüşümleri :

$$L^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(p)\,dp\right\} = \frac{f(t)}{t} \tag{2.7}$$

2.2.2 Örnekler:

Yukarıdaki özellikleri kullanarak aşağıdaki fonksiyonların ters Laplace dönüşümlerini bulunuz.

a) $L^{-1}\left\{\dfrac{s^2+2s-1}{s^3-2s^2+2s-1}\right\} = ?$

Önce, $\dfrac{s^2+2s-1}{s^3-2s^2+2s-1}$ ifadesini basit kesirlere ayırmaya çalışalım:

$$\frac{s^2+2s-1}{s^3-2s^2+2s-1} = \frac{s^2+2s-1}{s^3-1-2s\,(s-1)} = \frac{s^2+2s-1}{(s-1)(s^2+s+1)-2s\,(s-1)}$$

$$= \frac{s^2+2s-1}{(s-1)(s^2-s+1)}$$

$$\frac{s^2+2s-1}{(s-1)(s^2-s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2-s+1}$$

$$\qquad\qquad\qquad\quad (s^2-s+1) \qquad\quad (s-1)$$

ifadesinde gerekli işlemler yapılırsa,

A=2, B= -1 ve C = 3

bulunur. Buradan,

$$\frac{s^2+2s-1}{s^3-2s^2+2s-1} = \frac{2}{s-1} + \frac{-s+3}{s^2-s+1} = \frac{2}{s-1} - \frac{s-\frac{1}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{\frac{5}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

eşitliği elde edilir. Her iki tarafın ters Laplace dönüşümü alınırsa,

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2+2s-1}{(s-1)(s^2-s+1)}\right\} = 2e^t - e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{5}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

bulunur.

b) $L^{-1}\left\{\dfrac{s^3+3s^2-4s+6}{(s^2+2)(s^2-4)}\right\}=?$

$\dfrac{s^3+3s^2-4s+6}{(s^2+2)\ (s^2-4)}$ ifadesini basit kesirlere ayırmaya çalışalım :

$$\frac{s^3+3s^2-4s+6}{(s^2+2)\,(s-2)\,(s+2)}=\frac{As+B}{s^2+2}+\frac{C}{s-2}+\frac{D}{s+2} \tag{2.8}$$

Her iki yanı (s-2) ile çarpıp $s \to 2$ için limit hesaplarsak,

$$\lim_{s\to 2}\frac{s^3+3s^2-4s+6}{(s^2+2)\,(s+2)}=\lim_{s\to 2}\left[\frac{(As+B)\,(s-2)}{s^2+2}+C+\frac{D(s-2)}{(s+2)}\right]$$

$$\frac{8+3.4-8+6}{6.4}=C\Rightarrow\frac{18}{6.4}=C\Rightarrow C=\frac{3}{4}$$

bulunur. Şimdi her iki yanı (s+2) ile çarpıp $s\to -2$ için limit hesaplarsak,

$$\lim_{s\to -2}\frac{s^3+3s^2-4s+6}{(s^2+2)(s-2)}=\lim_{s\to -2}\left[\frac{(As+B)\,(s+2)}{s^2+2}+\frac{C(s+2)}{(s-2)}+D\right]$$

$$\frac{-8+12+8+6}{6.(-4)}=D\Rightarrow D=\frac{18}{6(-4)}\Rightarrow D=-\frac{3}{4}$$

bulunur. A ve B yi bulmak için (2.8) denkleminde sırasıyla s = 0 ve s =1 koyalım:

$$s=0 \ \text{ için } \ \frac{6}{2(-4)}=\frac{B}{2}+\frac{3}{4(-2)}-\frac{3}{4.2}$$

$$-\frac{3}{4}=\frac{B}{2}-\frac{3}{8}-\frac{3}{8}\Rightarrow B=0$$

$$s=1 \ \text{ için } \ -\frac{2}{3}=\frac{A}{3}-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\Rightarrow A=1$$

elde edilir ve bu değerler (2.8) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{s^3+3s^2-4s+6}{(s^2+2)\,(s-2)\,(s+2)}=\frac{s}{s^2+2}+\frac{3}{4(s-2)}-\frac{3}{4(s+2)}$$

bulunur. Her iki tarafın ters Laplace dönüşümünü alalım:

$$L^{-1}\left\{\frac{s^3+3s^2-4s+6}{(s^2+2)\,(s-2)\,(s+2)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\}+\frac{3}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}-\frac{3}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

$$=\cos\sqrt{2}t+\frac{3}{4}e^{2t}-\frac{3}{4}e^{-2t}$$

$$=\cos\sqrt{2}\,t+\frac{3}{2}\mathrm{sh}\,2t$$

c) $L^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\}=?$

$F(s)=\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)=L\{f(t)\}$ olsun. Ters Laplace dönüşümünün beşinci özelliğinden

$$F'(s)=\frac{-2}{s(s^2+1)}=-2\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right)$$

bulunur. Buradan,

$$L^{-1}\{F'(s)\}=-2(1-\cos t)=-t\,f(t)$$

elde edilir.

$$f(t)=\frac{2(1-\cos t)}{t}$$

bulunur (Spiegel, 1965).

3. BAZI ÖZEL FONKSİYONLARIN LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ

3.1 Birim Basamak Fonksiyonu

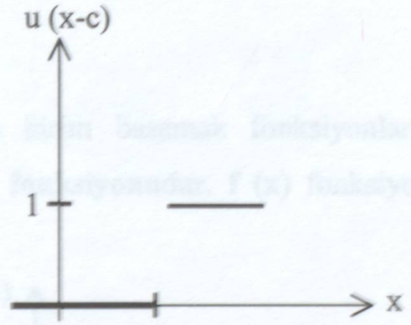
Birim basamak fonksiyonu u(x-c),

$$u(x-c)=\begin{cases}0, & x<c\\ 1, & x>c\end{cases} \tag{3.1}$$

olarak tanımlanır. Özel olarak c = 0 için

$$u(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

birim basamak fonksiyonuna **Heaviside**[**] **fonksiyonu** denir.



Şekil 3.1.1 Birim basamak fonksiyonu

3.2 Teorem:

$L\{u(x-c)\}=\frac{1}{s}e^{-cs}$ olduğunu ispatlayınız.

İspat: $L\{u(x-c)\}=\int_0^\infty e^{-sx}u(x-c)dx=\int_0^c e^{-sx}0dx+\int_c^\infty e^{-sx}.1dx$

$$=\int_c^\infty e^{-sx}dx=\lim_{R\to\infty}\int_c^R e^{-sx}dx$$

$$=\lim_{R\to\infty}\frac{e^{-sR}-e^{-sc}}{-s}=\frac{1}{s}e^{-sc} \qquad (s>0)$$

3.2.1 Örnek:

f(x) = u(x-2) -2u(x-3)+u(x-4) fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

[**] Heaviside (1850-1925) elektrik ve manyetiği incelemiştir. Vektörel çözümleme yöntemleri geliştirmiştir. İyonlaşmış bir atmosfer katmanının varlığını ileri sürmüştür.

$$u(x-2)=\begin{cases}0\ , & x<2\\ 1\ , & x\geq 2\end{cases}\ ,u(x-3)=\begin{cases}0\ , & x<3\\ 1\ , & x\geq 3\end{cases}\ ,u(x-4)=\begin{cases}0\ , & x<4\\ 1\ , & x\geq 4\end{cases}$$

$x<2$ ise $f(x) = 0 - 2\ .0 + 0 = 0$

$2 \leq x < 3$ ise $f(x) = 1 - 2\ .\ 0 + 0 = 1$

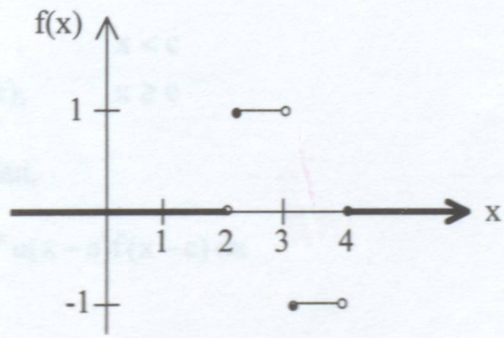
$3 \leq x < 4$ ise $f(x) = 1 - 2\ .\ 1 + 0 = -1$

$4 \leq x$ ise $f(x) = 1 - 2\ .\ 1 + 1 = 0$

Böylece f(x) fonksiyonunu tanımlayalım :

$$f(x)=\begin{cases}0 & ,\ x<2\\ 1 & ,\ 2\leq x<3\\ -1 & ,\ 3\leq x<4\\ 0 & ,\ 4\leq x\end{cases}$$

f(x) fonksiyonu sonlu sayıda birim basamak fonksiyonlarının kombinasyonu ile elde edilmiştir ve bu bir **basamak fonksiyonu**dur. f (x) fonksiyonunun grafiği Şekil 3.1.2 de gösterilmiştir.



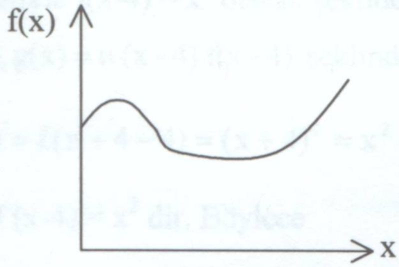
Şekil 3.1.2 Basamak fonksiyonu f (x) in grafiği

3.3 Ötelemeler

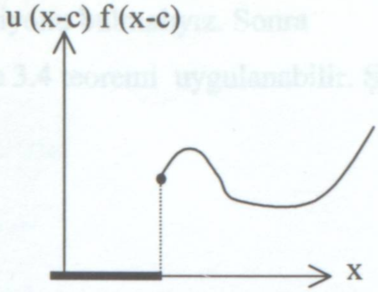
$x \geq 0$ için tanımlı bir f(x) fonksiyonu için

$$u(x-c)f(x-c)=\begin{cases}0 & ,x<c\\ f(x-c) & ,x\geq c\end{cases} \tag{3.2}$$

fonksiyonu pozitif x doğrultusunda f(x) fonksiyonunun c birim ötelenmesini temsil eder. Örneğin, eğer f(x) Şekil 3.1.3 deki grafikle verilmişse, bu durumda u(x-c) f(x-c) nin grafiği Şekil 3.1.4 deki gibidir.



Şekil 3.1.3 f(x) fonksiyonunun grafiği



Şekil 3.1.4 f(x) in c birim ötelenmiş çizimi

3.4 Teorem:

Eğer F(s) = L{(f(x)} ise, bu durumda

$$L\{ u(x-c) f(x-c) \} = e^{-cs} F(s) \tag{3.3}$$

ve tersine

$$L^{-1}\left\{e^{-cs}F(s)\right\} = u(x-c)f(x-c) = \begin{cases} 0 & . \quad x < c \\ f(x-c), & x \geq c \end{cases} \tag{3.4}$$

eşitliği sağlanır.

İspat :

$$u(x-c)f(x-c) = \begin{cases} 0 & . \quad x < c \\ f(x-c), & x \geq c \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$L\{u(x-c)\, f(x-c)\} = \int_0^\infty e^{-sx} u(x-c) f(x-c)\, dx$$

$$= \int_c^\infty e^{-sx} f(x-c)\, dx$$

eşitliği elde edilir. x - c = u dönüşümü yapılırsa

$$L\{u\,(x-c)\, f(x-c)\} = \int_0^\infty e^{-sc}.\, e^{-su} f(u)\, du = e^{-sc}F(s)$$

bulunur.

3.4.1 Örnek:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 4 \\ x^2 & , \quad x \geq 4 \end{cases} \quad \text{ise} \quad L\{g(x)\} \quad \text{i}$$

bulunuz.

Öncelikle f(x-4) = x^2 olacak şekilde bir f(x) fonksiyonu bulmalıyız. Sonra g(x), g(x) = u (x - 4) f(x - 4) şeklinde yazılabilir ve 3.4 teoremi uygulanabilir. Şimdi, eğer

$$f(x) = f(x+4-4) = (x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$$

ise f (x-4) = x^2 dir. Böylece

$$L\{f(x)\} = L\{x^2\} + 8\,L\{x\} + 16\,L\{1\} = \frac{2}{s^3} + \frac{8}{s^2} + \frac{16}{s}$$

olduğundan

$$L\{g(x)\} = L\{u\,(x-4)\,f(x-4)\} = e^{-4s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{8}{s^2} + \frac{16}{s}\right)$$

elde edilir.

3.4.2 Örnek:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 2 \\ e^{x-5} & , \quad x \geq 2 \end{cases} \quad \text{ise} \quad L\{g(x)\} \text{ i}$$

bulunuz.

$$e^{x-5} = f(x-2) \Rightarrow f(x+2-2) = e^{x+2-5} = e^{x-3}$$

$$L\{f(x)\} = L\{e^{x-3}\} = L\{e^{x}.e^{-3}\} = \frac{e^{-3}}{s-1}$$

$$L\{g(x)\} = e^{-2s}.\frac{e^{-3}}{s-1} = \frac{e^{-2s-3}}{s-1}$$

olur.

3.4.3 Örnek:

$$f(t) = \begin{cases} 3, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & 2 \leq t < 3 \\ -1, & 3 \leq t < 5 \\ 2, & 5 \leq t \end{cases} \tag{3.5}$$

fonksiyonunu basamak fonksiyonunun yardımıyla bir eşitlikle yazıp görüntüsünü bulun.

$$u(t-2) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t \end{cases} \quad , \quad u(t-3) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3 \\ 1, & 3 \leq t \end{cases}$$

$$u(t-5)=\begin{cases}0, & 0\le t<5\\ 1, & 5\le t\end{cases}$$

olduğu gözönüne alınarak uygun çarpanlar belirlenirse

$$f(t)=3-3u(t-2)-u(t-3)+3u(t-5)$$

fonksiyonu elde edilir. Buradan Laplace dönüşümü hesaplanırsa,

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{s}(3-3e^{-2s}-e^{-3s}+3e^{-5s})$$

elde edilir.

3.5 Örnekler:

Aşağıdaki fonksiyonların ters Laplace dönüşümlerini bulun.

a) $\dfrac{e^{-5s}}{s+3}$ **b)** $\dfrac{e^{-2s}}{s^2+9}$

a) $L^{-1}\left(\dfrac{1}{s+3}\right)=e^{-3t}$ $L\left(u(t-5).e^{-3(t-5)}\right)=e^{-5s}\dfrac{1}{s+3}$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-5s}}{s+3}\right)=u(t-5)e^{-3(t-5)}$$

b) $L^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2+9}\right)=\dfrac{1}{3}\sin 3t$

$$L\left(\frac{1}{3}u(t-2).\sin 3(t-2)\right)=e^{-2s}.\frac{1}{s^2+9}$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^2+9}\right)=\frac{1}{3}u(t-2)\sin 3(t-2)$$

bulunur.

3.6 Gamma Fonksiyonu

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx \qquad (n>0) \qquad (3.6)$$

eşitliğiyle belirlenen $\Gamma(n)$ fonksiyonuna **Gamma fonksiyonu** denir. Buna göre aşağıdakileri ispatlayalım:

a) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ (3.7)

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx \qquad (3.8)$$

olmak üzere (3.8) de kısmi integrasyon uygulayalım:

$x^n = u$ ve $e^{-x}\,dx = dv$ olsun. Buradan,

$nx^{n-1}\,dx = du$, $-e^{-x} = v$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = -x^n.e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}.nx^{n-1}dx$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left(-x^n e^{-x}\Big|_0^r + n\int_0^r e^{-x}x^{n-1}dx\right.$$

$$= n\Gamma(n)$$

bulunur.

b) $\Gamma(n+1) = n!$ (3.9)

$n = 0 \Rightarrow \quad \Gamma(1) = 1$

$n = 1 \Rightarrow \quad \Gamma(2) = 1!$

$n = 2 \Rightarrow \quad \Gamma(3) = 2!$

$\vdots$

$n = n-1 \Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)!$

$n = n \Rightarrow \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n.(n-1)! = n!$

elde ederiz.

c) (3.6) da $\quad n = \dfrac{1}{2} \quad$ alalım:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x} dx = \sqrt{\pi} \qquad (3.10)$$

olduğunu gösterelim :

$x = y^2 \Rightarrow dx = 2ydy \quad , \qquad x = 0 \Rightarrow y = 0 \quad , \qquad x = \infty \Rightarrow y = \infty$

değişken dönüşümü yaparsak,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = 2\int_0^\infty y^{-1} e^{-y^2} y dy = 2\int_0^\infty e^{-y^2} dy \tag{3.11}$$

elde ederiz. Şimdi $\int_0^\infty e^{-y^2} dy$ nin eşitini bulalım:

Bu integrali hesaplamak için

$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} du\, dv$ iki katlı integralini ele alalım.

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} du\, dv = \lim_{r\to\infty}\left(\int_0^r \int_0^r e^{-(u^2+v^2)} du\, dv\right)$$

$u = R\cos\varphi$, $\quad v = R\sin\varphi \quad du\,dv = RdRd\,\varphi$

değişken dönüşümü yapalım:

$$\lim_{r\to\infty}\left(\int_{R=0}^{r} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} e^{-R^2} RdRd\varphi\right) = \frac{\pi}{2}\lim_{r\to\infty}\int_{R=0}^{r} e^{-R^2} RdR$$

$$= \frac{\pi}{4}\lim_{r\to\infty}\int_0^r e^{-R^2} dR^2 = \frac{\pi}{4}\lim_{r\to\infty}\left(-e^{-R^2}\right)\Big|_{R=0}^{r}$$

$$= \frac{\pi}{4}\lim_{r\to\infty}\left(-e^{-r^2} + e^0\right) = \frac{\pi}{4}$$

bulunur. $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} dudv$ integralini düzenlersek,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} du\, dv = \int_0^\infty e^{-u^2} du \int_0^\infty e^{-v^2} dv = \frac{\pi}{4}$$

bulunur. Buradan

$$\int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{3.12}$$

eşitliği elde edilir. Bu değer (3.11) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} \tag{3.13}$$

bulunur.

Yukarıdaki formüllerden yararlanarak aşağıdaki özellikleri verebiliriz.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{2}{3}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{2}\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)\Rightarrow\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)=-2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\sqrt{\pi}=-\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^\infty=\left(-e^{-\infty}+e^0\right)=1$$

$\Gamma(1)=0\,.\,\Gamma\,(0)\Rightarrow 1=0\,.\,\Gamma(0)$ ve buradan $\Gamma(0)$ sonsuz olur.

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Rightarrow\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1.3}{2^2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Rightarrow\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{1.3.5}{2^3}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)=\frac{2m-1}{2}.\Gamma\left(\frac{2m-1}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)=\frac{1.3.5...(2m-1)}{2^m}\sqrt{\pi}$$

bulunur.

d) $L\{t^n\}=\dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ (3.14)

$L\{t^n\}=\int_0^\infty e^{-st}t^n dt$ dir. $st=\tau$ değişken dönüşümü yapalım:

$sdt=d\tau$, $t=0\Rightarrow\tau=0$, $t=\infty\Rightarrow\tau=\infty$

$$L\{t^n\}=\int_0^\infty e^{-st}t^n dt=\int_0^\infty e^{-\tau}\left(\frac{\tau}{s}\right)^n\frac{d\tau}{s}=\frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty\tau^{n+1-1}e^{-\tau}d\tau$$

$$=\frac{1}{s^{n+1}}\Gamma(n+1)$$

Buradan,

$$L\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad (n > -1)$$

bulunur.

3.6.1 Örnekler:

1) Aşağıdaki fonksiyonların görüntülerini bulun.

a) $t^3 + 3t^{5/2} + 2t^{3/2} + 1$

$$L(t^3) = \frac{3!}{s^4} \quad , \quad L\left(t^{5/2}\right) = \frac{\Gamma\left(7/2\right)}{s^{7/2}} = \frac{1.3.5}{2^3}\frac{\sqrt{\pi}}{s^{7/2}} = \frac{15\sqrt{\pi}}{8\,s^{7/2}}$$

$$L(1) = \frac{1}{s} \quad , \quad L\left(t^{3/2}\right) = \frac{\Gamma\left(5/2\right)}{s^{5/2}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.\frac{1}{s^{5/2}}$$

$$L\left(t^3 + 3t^{5/2} + 2t^{3/2} + 1\right) = \frac{6}{s^4} + 3.\frac{15\sqrt{\pi}}{8\,s^{7/2}} + \frac{3\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{s^{5/2}} + \frac{1}{s}$$

b) $L\left\{\left(1+\sqrt{t}\right)^4\right\}$

$$L\left\{\left(1+\sqrt{t}\right)^4\right\} = \binom{4}{0}1^4 + \binom{4}{1}1^3\left(\sqrt{t}\right) + \binom{4}{2}.1\left(\sqrt{t}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(\sqrt{t}\right)^3 + \binom{4}{4}\left(\sqrt{t}\right)^4$$

$$= 1 + 4\sqrt{t} + 6t + 4t^{3/2} + t^2$$

$$L\left(\sqrt{t}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} \quad , \quad L(t) = \frac{1}{s^2}, \quad L(t^{3/2}) = \frac{\Gamma\left(5/2\right)}{s^{5/2}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4s^{5/2}}$$

$$L\left(t^2\right) = \frac{2}{s^3}$$

$$L\left\{\left(1+\sqrt{t}\right)^4\right\} = \frac{1}{s} + 4\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} + 6.\frac{1}{s^2} + 4.\frac{3\sqrt{\pi}}{4s^{5/2}} + \frac{2}{s^3}$$

bulunur.

2) Gamma fonksiyonunu kullanarak aşağıdaki fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü bulun.

$$\frac{s+3}{(s+1)^{7/2}} = \frac{s}{(s+1)^{7/2}} + \frac{3}{(s+1)^{7/2}} = \frac{s+1}{(s+1)^{7/2}} + \frac{2}{(s+1)^{7/2}}$$

$$=\frac{1}{(s+1)^{5/2}}+\frac{2}{(s+1)^{7/2}} \tag{3.15}$$

$$L\left(t^{3/2}\right)=\frac{\Gamma\left(5/2\right)}{s^{5/2}} \quad \text{ve} \quad L\left(e^{-t}t^{3/2}\right)=\frac{\Gamma\left(5/2\right)}{(s+1)^{5/2}}$$

olduğu gözönüne alınarak

$$\frac{1}{(s+1)^{5/2}}=\frac{L\left(e^{-t}t^{3/2}\right)}{\Gamma\left(5/2\right)}, \qquad \frac{1}{(s+1)^{7/2}}=\frac{L\left(e^{-t}t^{5/2}\right)}{\Gamma\left(7/2\right)}$$

ve buradan

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^{5/2}}\right)=\frac{e^{-t}t^{3/2}}{\Gamma\left(5/2\right)} \quad \text{ve} \quad L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^{7/2}}\right)=\frac{e^{-t}t^{5/2}}{\Gamma\left(7/2\right)} \tag{3.16}$$

elde edilir.

(3.15) eşitliğinde her iki tarafın ters Laplace dönüşümü alınarak (3.16) değerleri yerine yazılırsa,

$$L^{-1}\left(\frac{s+3}{(s+1)^{7/2}}\right)=\frac{e^{-t}t^{3/2}}{\frac{1.3}{4}.\sqrt{\pi}}+2\frac{e^{-t}t^{3/2}}{\frac{1.3.5}{8}\sqrt{\pi}}$$

$$=\frac{4}{3\sqrt{\pi}}e^{-t}t^{3/2}+\frac{16}{15\sqrt{\pi}}e^{-t}t^{5/2}$$

bulunur.

3.7 Periyodik (Devirli) Fonksiyon:

3.8 Teorem:

$[0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli ve P periyotlu f(t) fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$L\{f(t)\}=\frac{\int_0^P e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-Ps}} \tag{3.17}$$

dir.

İspat:

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

integralini sonsuz integral serileri biçiminde yazalım:

$$\int_0^P e^{-st} f(t)dt + \int_P^{2P} e^{-st} f(t)dt + \int_{2P}^{3P} e^{-st} f(t)dt + \ldots$$

$$+ \int_{nP}^{(n+1)P} e^{-st} f(t)\, dt + \ldots$$

n= 0, 1, 2, ..., olmak üzere her integralde t = u+n P değişken dönüşümünü yapalım:

$$\int_{nP}^{(n+1)P} e^{-st} f(t)dt$$

integraline karşılık gelen dönüşüm

$$\int_0^P e^{-s(u+nP)} f(u+nP)\, du \tag{3.18}$$

şeklindedir. n= 0,1,2, … değerleri için her integralde bu dönüşüm yapılır ve P periyotlu f(t) fonksiyonu için f(u) = f(u+P) = f(u+2P) = ... =f(u+nP) olduğu gözönünde bulundurulursa

$$\int_0^P e^{-su} f(u)\, du + e^{-Ps} \int_0^P e^{-su} f(u)\, du + e^{-2Ps} \int_0^P e^{-su} f(u)\, du + \ldots$$

$$+ e^{-nPs} \int_0^P e^{-su} f(u)\, du + \ldots$$

$$= \left[1 + e^{-Ps} + e^{-2Ps} + \ldots + e^{-nPs} + \ldots\right] \int_0^P e^{-su} f(u)\, du \tag{3.19}$$

elde edilir.

$\left[1 + e^{-Ps} + e^{-2Ps} + \ldots + e^{-nPs} + \ldots\right]$ sonsuz toplamı $r = e^{-ps} < 1$ olmak üzere bir geometrik seridir. Bu seri $\dfrac{1}{1 - e^{-Ps}}$ ye yakınsadığından (3.19) integralinden

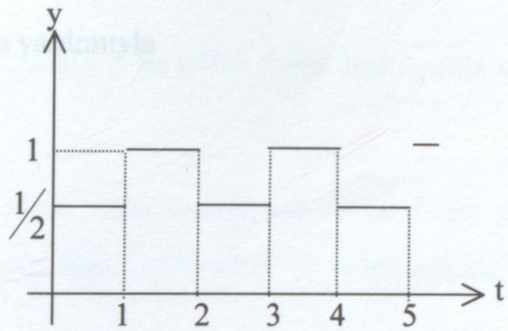
$$\frac{\int_0^P e^{-su} f(u)\, du}{1 - e^{-Ps}}$$

bulunur. Böylece,

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^P e^{-st} f(t)\, dt}{1 - e^{Ps}} \tag{3.20}$$

bulunur.

3.8.1 Örnek :



Şekil 3.8.1 Devirli fonksiyon

Yukarıdaki devirli fonksiyonun görüntüsünü bulun.

Şekil 3.8.1 de verilen fonksiyonun periyodu 2 olduğundan

$$f(t) = \begin{cases} 1/2, & 0 \le t < 1 \\ 1, & 1 \le t < 2 \end{cases}$$

formülüyle belirlenir. (3.20) formülüne göre

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[\int_0^1 e^{-st} \frac{1}{2} dt + \int_1^2 e^{-st}.1\, dt \right]$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[-\frac{1}{2s} e^{-st} \Big|_0^1 - \frac{e^{-st}}{s} \Big|_1^2 \right]$$

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{2s}} \left[-\frac{1}{2s}\left(e^{-s} - 1\right) + \left(-\frac{1}{s}\right)\left(e^{-2s} - e^{-s}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[-\frac{e^{-s}}{2s} + \frac{1}{2s} - \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s} \right]$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[\frac{-e^{-s} + 1 - 2e^{-2s} + 2e^{-s}}{2s} \right]$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[\frac{e^{-s} - 2e^{-2s} + 1}{2s} \right]$$

bulunur.

3.9 Dirac Delta Fonksiyonu ve Özellikleri

Keyfi h>0 parametresi için,

$$\delta_0(t,h) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}, & t \in [0,h) \\ 0, & t \in (-\infty,0) \cup [h,\infty) \end{cases} \tag{3.21}$$

ya da basamak fonksiyonu yardımıyla

$$u(t-0) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

$$u(t-h) = \begin{cases} 0, & t < h \\ 1, & t > h \end{cases}$$

olduğunu gözönüne alarak

$$\delta_0(t,h) = \frac{1}{h}[u(t) - u(t-h)] \tag{3.22}$$

fonksiyonunu düşünelim. Keyfi h>0 için,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t,h)\, dt = \frac{1}{h}\int_0^h dt = 1 \tag{3.23}$$

bulunur ve $h \to 0$ için

$$\delta_0(t) = \lim_{h\to 0} \delta_0(t,h) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ +\infty & t = 0 \end{cases}$$

olduğunu kabul edelim ve (3.22) den $h \to 0$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t)\, dt = 1 \tag{3.24}$$

olur. $\delta_0(t)$ fonksiyonuna sıfır basamaklı **Dirac*** delta fonksiyonu** denir (Halilov, 2003).

Sıfır basamaklı $\delta_0(t)$ Dirac fonksiyonu gözönüne alınarak bir basamaklı $\delta_1(t)$ ve n basamaklı $\delta_n(t)$ Dirac fonksiyonları da tanımlanmaktadır, fakat biz burada sadece $\delta_0(t)$ ile ilgileneceğiz. Matematiğe Dirac tarafından kazandırılan bu fonksiyonlar ani itiş

*** Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) görece kavantum kuramının yaratıcılarındandır. Pozitronun varlığını öngördü. Dört tane diferansiyel denklemle elektronun hareketini tanımladı. Erwin Schrödinger ile 1933 Nobel fizik ödülünü paylaştı.

problemlerinin öğrenilmesinde çok önemlidir. Dirac delta fonksiyonu bir başka şekilde ise aşağıdaki gibi tanımlanır :

$t_0 \geq 0$ olmak üzere t_0 da sürekli her f fonksiyonu için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_0 - u)\, f(u)\, du = f(t_0) \tag{3.25}$$

eşitliği sağlanmaktadır. Buradaki δ ya **Dirac delta fonksiyonu** adı verilir.

3.10 Teorem:

Tanımlı olduğu bölgede Dirac delta fonksiyonu tektir. Bunu göstermek için D bölgesinde tanımlı iki tane $\delta(t)$ ve $M(t)$ fonksiyonlarının var olduğunu kabul edelim ve bu fonksiyonlar (3.24) eşitliğini sağlasın.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\,(t_0 - u) M(u)\, du = M(t_0)$$

$\delta(t)$ de t_0 da sürekli olduğundan $v = t_0 - u$ değişken dönüşümünü yaparsak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\,(t_0 - u)\, M(u) du = M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(v)\, M(t_0 - v) dv = \delta(t_0)$$

bulunur. Buradan

δ ve M nün sürekli olduğu tüm t değerlerinde $\delta(t) = M(t)$ dir. yani D bölgesinde Dirac delta fonksiyonu tektir (Borrelli, 1998).

Şimdi ise $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$ olduğunu başka bir yolla, yani

$$u(t) = \begin{cases} 0\,, & t < 0 \\ 1\,, & t \geq 0 \end{cases}$$

birim basamak fonksiyonu yardımıyla gösterelim:

$f(t) = u(t)$ olsun. (3.25) eşitliğinden

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\,(t - \tau)\, u\,(\tau)\, d\tau$$

olur. $\tau = t - v$ dönüşümü yapılırsa

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) u(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(v)\, u\,(t - v)\, dv$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \delta(v)\, dv$$

olur. Burada u(t-v) fonksiyonu

$$u(t-v) = \begin{cases} 1, & t \geq v \\ 0, & t < v \end{cases}$$

biçimindedir. $\forall\, t > 0$ için $u(t) = 1$ olduğundan $t \to \infty$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

olur.

Şimdi, $\delta_0(t)$ nin Laplace dönüşümünü (3.21) yardımıyla hesaplayalım:

$$L\{\delta_0(t,h)\} = \lim_{h \to 0} \delta_0(t,h)$$

$$L\{\delta_0(t,h)\} = \frac{1}{h}\left[L\{u(t)\} - L\{u(t-h)\}\right]$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st}\delta_0(t,h) = \int_0^{h} e^{-st}\frac{1}{h}dt + \int_h^{\infty} e^{-st}.0\, dt$$

$$L\{\delta_0(t,h)\} = \frac{1}{h}\int_0^{h} e^{-st}dt = \frac{1}{h}\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^h = \frac{1}{hs}\left(1-e^{-hs}\right)$$

bulunur. Her iki tarafın $h \to 0$ için limitini alırsak,

$$\lim_{h \to 0} L\{\delta_0(t,h)\} = \lim_{h \to 0}\frac{1}{hs}\left(1-e^{-hs}\right) = 1$$

$$L\{\delta_0(t)\} = 1$$

bulunur.

3.11 $\delta_0(t)$ için Kayma Özelliği

$L\{\delta_0(t-t_0\} = e^{-t_0 s}$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim:

$$L\{\delta_0(t-t_0) = \lim_{h \to 0} L\{\delta_0(t-t_0,h)\} = \lim_{h \to 0}\frac{1}{h}L[u(t-t_0) - u(t-t_0-h)]$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{s}e^{-t_0 s} - \frac{1}{s}e^{-(t_0+h)s}\right]$$

$$= e^{-t_0 s} \lim_{h \to 0} \frac{1}{hs}(1 - e^{-hs}) = e^{-t_0 s}$$

Buradan,

$$L\{\delta_0(t - t_0)\} = e^{-t_0 s}$$

bulunur. İleride başlangıç değer problemlerinin çözümünde Dirac delta fonksiyonu kullanılacaktır.

4. DUHAMEL FORMÜLÜ ve UYGULANMASI

4.1 Duhamel Formülü

$[0, \infty]$ aralığında $f(t)$ fonksiyonu sürekli, $\varphi(t)$ fonksiyonu da sürekli türeve sahipse, o zaman,

$$L^{-1}\{sF(s)\phi(s)\} = f(t)\,\varphi(0) + \int_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)\,d\tau \tag{4.1}$$

formülü doğrudur.

Burada, $L\{f(t)\} = F(s)$ ve $L\{\varphi(t)\} = \phi(s)$ ile gösterilmektedir.

(4.1) i ispatlamak için 7. Bölümde ayrıntılı inceleyeceğimiz

$$L^{-1}\{F(s)\phi(s)\} = \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau$$

konvolüsyon formülünü yazıp sağ tarafın t parametresine göre türevini alalım:

$$\left(\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau\right)'_t = f(t)\varphi(0) + \int_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)d\tau$$

Başlangıç fonksiyonunun türev formülünden, yani

$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s)$ eşitliğinden,

$$\left(\int_0^t f(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau\right)'_t = L^{-1}\{sF(s)\phi(s)\}$$

bulunur.

NOT: $\Psi(t) = \int f(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau$ integralinin türevi hesaplanırken $\Psi(0) = 0$ alınmıştır.

Duhamel formülündeki $\int_0^t f(\tau)\,\varphi'(t-\tau)\,d\tau$ integraline **Duhamel integrali** denir.

Duhamel formülünün yardımıyla başlangıç değerleri sıfır olan

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(t), \tag{4.2}$$

$(a_0 \neq 0, t > 0)$

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0 \tag{4.3}$$

problemi çözülebilir.

Bu problemi çözebilmek için (4.2) eşitliğinde y yerine x alalım ve eşitliğin sağ tarafı da 1 e eşit olsun:

$$a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + a_2x^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}x' + a_nx = 1, \qquad (t>0) \tag{4.4}$$

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$$

yardımcı problemini ele alalım. $L\{x(t)\} = x(s)$, $L\{y(t)\} = y(s)$, $L\{f(t)\} = F(s)$ olduğunu gözönüne alalım. (4.2) ve (4.4) problemlerinin Laplace dönüşümünü alırsak,

$$y(s) = \frac{F(s)}{P_n(s)} \tag{4.5}$$

$$x(s) = \frac{1}{sP_n(s)} \tag{4.6}$$

Burada $P_n(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_{n-1}s + a_n$ kabul edilmiştir. (4.5) ve (4.6) eşitlikleri yardımıyla,

$$y(s) = sF(s)\,x(s) \tag{4.7}$$

bulunur. (4.7) eşitliğine Duhamel formülünü uygularsak,

$$L^{-1}\{sF(s)\,x(s)\} = f(t)\,x(0) + \int_0^t f(\tau)x'(t-\tau)\,d\tau$$

$$L^{-1}\{sF(s)\,x(s)\} = \int_0^t f(\tau)x'(t-\tau)\,d\tau$$

elde edilir. Buradan,

$$L^{-1}\{sF(s)\,x(s)\} = L^{-1}\{y(s)\} = y(t) = \int_0^t f(\tau)\,x'(t-\tau)\,d\tau \tag{4.8}$$

olur.

Şimdi, bu formülün kullanılışını bir örnekle açıklayalım:

4.1.1 Örnek:

$y''+y' = t$, $y(0) = y'(0) = 0$ problemini Duhamel formülünün yardımıyla çözünüz.

$x''+x' = 1$, $x(0) = x'(0) = 0$ yardımcı problemini ele alalım. Her iki tarafın Laplace dönüşümünü alırsak,

$$s^2x(s) - sx(0) - x'(0) + sx(s) - x(0) = \frac{1}{s}$$

bulunur. Buradan başlangıç değerleri yazılarak

$$x(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

bulunur.

$$x(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+1}$$

eşitliğinden x(s) yi basit kesirle ayırırsak,

$$x(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

elde edilir ve her iki tarafın ters Laplace dönüşümünü alırsak

$x(t)=t-1+e^{-t}$ ve buradan

$x'(t) = 1-e^{-t}$

olur. Şimdi (4.8) formülü yardımıyla $f(t) = t$ ve $x'(t) = 1-e^{-t}$ olduğunu gözönünde bulundurarak

$$\int_0^t \tau\left(1-e^{-(t-\tau)}\right)d\tau = \int_0^t \tau\, d\tau - \int_0^t \tau\, e^{-t+\tau} d\tau$$

$$= \frac{\tau^2}{2}\Big|_0^t - e^{-t}\int_0^t \tau\, e^{\tau} d\tau$$

$$= \frac{\tau^2}{2}\Big|_0^t - e^{-t}\left[t\,e^t - e^t + 1\right]$$

$$= \frac{t^2}{2} - t + 1 - e^{-t}$$

bulunur.

5. HEAVISIDE AÇILIM TEOREMLERİ ve FORMÜLÜ

5.1 Teorem:

P(s) ve Q(s), P(s) nin derecesi Q(s) nin derecesinden daha küçük olan polinomlar olsun. Q(s) nin n farklı α_k, k= 1,2,3, ..., n köke sahip olduğunu varsayalım. O zaman,

$$L^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}e^{\alpha_k t} \tag{5.1}$$

formülü elde edilir. Bu formüle **Heaviside açılım formülü veya teoremi** denir.

İspat:

Q (s) nin $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ n farklı kökü olduğundan basit kesirlere ayırırsak,

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{A_1}{s-\alpha_1}+\frac{A_2}{s-\alpha_2}+...+\frac{A_k}{s-\alpha_k}+...+\frac{A_n}{s-\alpha_n} \tag{5.2}$$

elde ederiz. Her iki yanı s $-\alpha_k$ ile çarpıp $s \to \alpha_k$ için L' Hospital kuralını uygulayalım:

$$\lim_{s\to\alpha_k}\left[(s-\alpha_k)\frac{P(s)}{Q(s)}\right]=\lim_{s\to\alpha_k}\left[\frac{A_1}{(s-\alpha_1)}(s-\alpha_k)+\frac{A_2(s-\alpha_k)}{s-\alpha_2}+...+\frac{A_k}{(s-\alpha_k)}(s-\alpha_k)+...+\frac{A_n}{(s-\alpha_n)}(s-\alpha_k)\right]$$

$$\lim_{s\to\alpha_k}\frac{P(s)}{Q(s)}(s-\alpha_k)=A_k=\lim_{s\to\alpha_k}P(s)\lim_{s\to\alpha_k}\left(\frac{s-\alpha_k}{Q(s)}\right)$$

$$=P(\alpha_k).\lim_{s\to\alpha_k}\frac{1}{Q'(s)}=\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$$

Burada $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ Q(s) nin kökleri olduğundan Q (α_k)= 0 dır.

Buradan,

$$A_1=\frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)},\ A_2=\frac{P(\alpha_2)}{Q'(\alpha_2)},.....,\quad A_n=\frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)}$$

bulunur. Bu değerler (5.2) de yerine yazılırsa

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}\frac{1}{(s-\alpha_1)}+...+\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}.\frac{1}{(s-\alpha_k)}+...+\frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)}.\frac{1}{(s-\alpha_n)}$$

eşitliği elde edilir. Her iki yanın Laplace dönüşümünü alarak

$$L^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\}=\frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}.e^{\alpha_1 t}+...+\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}e^{\alpha_k t}+...+\frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)}e^{\alpha_n t}$$

Heaviside formülünü elde ederiz.

5.1.1 Örnek:

$L\{f(t)\} = (s^2+2)\,/\,s(s+1)\,(s+2)$ olduğuna göre f(t) nedir?

Paydanın kökleri s = 0, s= -1 ve s= -2 dir. Buradan,

$P(s) = s^2 + 2$ ve $Q'(s) = 3s^2 + 6s + 2$

$P(0) = 2 \quad P(-1) = 3 \quad P(-2) = 6$

$Q'(0) = 2 \quad Q'(-1) = -1 \quad Q'(-2) = 2$

Bulunur. Heaviside formülünden

$$f(t) = \frac{2}{2}e^{0t} + \frac{3}{-1}e^{-t} + \frac{6}{2}e^{-2t} = 1 - 3e^{-t} + 3e^{-2t} \text{ bulunur.}$$

5.2 Teorem:

P(s) ve Q(s), P(s) nin derecesi Q (s) nin derecesinden daha küçük olan polinomlar ve

$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\}$ olsun. $(s-a)^r$, Q(s) nin bir çarpanı ve $\phi(s)$, Q (s) nin $(s-a)^r$ çarpanı dışındaki bütün çarpanları olmak üzere f(t) nin $(s-a)^r$- ya tekabül eden terimleri

$$\left[\frac{\phi^{(r-1)}(a)}{(r-1)!} + \frac{\phi^{(r-2)}(a)}{(r-2)!}\frac{t}{1!} + \ldots + \frac{\phi'(a)t^{r-2}}{1!(r-2)!} + \phi(a)\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\right]e^{at} \tag{5.3}$$

biçimindedir.

İspat:

$(s-a)^r$ paydanın çarpanı olduğundan $\frac{P(s)}{Q(s)}$ yi basit kesirlere ayırırsak

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \equiv \frac{\phi(s)}{(s-a)^r} = \frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \ldots + \frac{A_{r-1}}{(s-a)^{r-1}} + \frac{A_r}{(s-a)^r} + h(s) \tag{5.4}$$

buluruz. Burada, h(s) diğer toplamları göstermektedir. Bunu$(s-a)^r$ ile çarpalım:

$$\phi(s) = A_1(s-a)^{r-1} + A_2(s-a)^{r-2} + \ldots + A_{r-1}(s-a) + A_r + h(s).(s-a)^r$$

s = a yazarsak

$\phi(a) = A_r$

olur. $\phi(s)$ nin türevini alırsak

$$\phi'(s) = A_1(r-1).(s-a)^{r-2} + A_2(r-2)(s-a)^{r-3} + ...$$

$$+ A_{r-1} + \left[r(s-a)^{r-1} h(s) + (s-a)^r h'(s)\right]$$

buluruz. s yerine tekrar a yazarsak

$$\phi'(a) = A_{r-1}$$

ve bu şekilde türetmeye devam edersek

$$\phi''(a) = 2!A_{r-2}$$

$$\phi'''(a) = 3!A_{r-3}$$

. . . .

$$\phi^{(r-1)}(a) = (r-1)!A_1$$

ya da $A_{r-k} = \dfrac{\phi^{(k)}(a)}{k!}$ $\qquad k = 0,1,2,...,r-1$

buluruz. Bu değerler (5.4) de yerine yazılırsa

$$\frac{\phi^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}.\frac{1}{s-a} + \frac{\phi^{(r-2)}(a)}{(r-2)!}\frac{1}{(s-a)^2} + ... + \frac{\phi'(a)}{1!(s-a)^{r-1}} + \phi(a)\frac{1}{(s-a)^r} \tag{5.5}$$

ve buradan $L^{-1}\left(\dfrac{1}{(s-a)^n}\right) = \dfrac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$

formülü yardımıyla (5.5) in ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$\frac{\phi^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}e^{at} + \frac{\phi^{(r-2)}(a)te^{at}}{(r-2)!.1!} + ... + \frac{\phi'(a)\,t^{r-2}}{1!(r-2)!}e^{at} + \phi(a)\frac{t^{r-1}e^{at}}{(r-1)!}$$

bulunur.

5.3 Teorem:

$f(t) = L^{-1}\left\{\dfrac{P(s)}{Q(s)}\right\}$ olmak üzere, P(s) ve Q(s), P(s) nin derecesi Q(s) nin derecesinden daha küçük olan polinomlar ve f(t) nin Q(s) nin $\left[(s+a)^2 + b^2\right]$ çarpanına tekabül eden terimleri

$$\frac{e^{-at}}{b}(\phi_i \cos bt + \phi_r \sin bt)$$

biçimindedir. Burada ϕ_i ve ϕ_r , $\phi(-a+ib)$ nin reel ve imajiner kısımlarıdır. $\phi(s)$ ise Q(s) nin $\left[(s+a)^2+b^2\right]$çarpanı dışındaki bütün çarpanları ve P(s) nin bir kısmıdır.

İspat:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \equiv \frac{\phi(s)}{(s+a)^2+b^2} = \frac{As+B}{(s+a)^2+b^2} + h(s)$$

biçiminde yazalım. Burada h(s), Q(s) nin diğer bütün çarpanlarını göstermektedir. Bu özdeşliği $(s+a)^2+b^2$ ile çarparsak,

$$\phi(s) = As + B + \left[(s+a)^2+b^2\right]h(s)$$

bulunur. $s=-a+ib$ yazarsak $(s+a)^2+b^2$ değeri sıfırlanır.

Buradan,

$$\phi(-a+ib) = (-a+ib)A + B$$

ya da

$$\phi_r + i\phi_i = (-aA+B) + ibA$$

bulunur. Reel ve sanal terimleri birbirine eşitleyelim:

$$\phi_r = -aA + B \quad \text{ve} \quad \phi_i = bA$$

A ve B yi çözersek

$$A = \frac{\phi_i}{b} \qquad \text{ve} \qquad B = \frac{b\phi_r + a\phi_i}{b}$$

bulunur. Buradan $(s+a)^2+b^2$ çarpanına karşılık gelen basit kesir

$$\frac{As+B}{(s+a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\frac{\phi_i s + (b\phi_r + a\phi_i)}{(s+a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\left[\frac{(s+a)\phi_i}{(s+a)^2+b^2} + \frac{b\phi_r}{(s+a)^2+b^2}\right]$$

dir. Her iki yanın ters Laplace dönüşümünü alırsak $\frac{1}{b}\left[\phi_i\, e^{-at}\cos bt + \phi_r\, e^{-at}\sin bt\right]$ bulunur.

5.3.1 Örnek:

$y'''+4y''+14y'+20y = -2e^{-2t}$ diferansiyel denkleminin y(0) = y' (0) = 0 ve y'' (1) için çözümünü bulunuz.

Verilen denklemin her iki yanının Laplace dönüşümünü alalım:

$$\left(s^3L(y)-1\right)+4s^2L\{y\}+14\,s\,L\{y\}+20\,L\{y\}=-\frac{2}{s+2}$$

$$L\{y\}=\frac{1}{s^3+4s^2+14s+20}\left(1-\frac{2}{s+2}\right)=\frac{s}{\left(s^3+4s^2+14s+20\right)(s+2)}$$

$s = -2$ paydanın bir köküdür. $s^3 + 4s^2 + 14s + 20$ ifadesinin de bir kökü $s = -2$dir. O zaman

$s^3 + 4s^2 + 14s + 20 = (s+2)(s^2 + 2s + 10)$

olur.

$$L\{y\}=\frac{s}{(s+2)^2(s^2+2s+10)}$$

Buradan 5.2 deki teorem yardımıyla $(s+2)^2$ ye karşılık gelen terimleri bulmaya çalışalım:

$$\phi(s)=\frac{s}{s^2+2s+10} \qquad \text{ve} \qquad \phi'(s)=\frac{-s^2+10}{(s^2+2s+10)^2}$$

$$\phi(-2)=-\frac{1}{5} \qquad \text{ve} \qquad \phi'(-2)=\frac{3}{50}$$

$(s+2)^2$-ye karşılık gelen terimler

$$\left(\frac{3}{50}-\frac{t}{5}\right)e^{-2t}=\frac{(3-10\,t)\,e^{-2t}}{50} \tag{5.6}$$

şeklindedir. Şimdi, 5.3 teki teoremden yararlanalım:

$s^2+2s+10 \equiv (s+1)^2+3^2$ için

$$\phi(s)\equiv\frac{s}{(s+2)^2}$$

dir.

Buradan,

$$\phi(-a+ib)=\phi(-1+3i)=\frac{-1+3i}{[(-1+3i)+2]^2}$$

$$=\frac{-1+3i}{(1+3i)^2}=\frac{-1+3i}{-8+6i}=\frac{13-9i}{50}$$

ve $\phi_r=\dfrac{13}{50}$, $\phi_i=-\dfrac{9}{50}$

bulunur. 5.3 teki teoremden $s^2 + 2s + 10$ a karşılık gelen terim

$$\frac{1}{3}\,\frac{e^{-t}(-9\cos 3t+13\sin 3t)}{50} \tag{5.7}$$

dir. (5.6) ve (5.7) yi eklersek

$$y=\frac{(3-10t)e^{-2t}}{50}+\frac{e^{-t}(-9\cos 3t+13\sin 3t)}{150}$$

bulunur.

6. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ YARDIMIYLA LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

6.1 Çözüm Yöntemi

n inci mertebeden lineer, sabit katsayılı diferansiyel denklemi için tanımlanmış Cauchy problemini ele alalım:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = b(t) \tag{6.1}$$

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \tag{6.2}$$

b(t) fonksiyonunun Laplace dönüşümünün olduğunu ve bunun

$$B(s) = L\{b(t)\}$$

ile gösterildiğini varsayarak, (6.1) denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşümünü uygulayalım:

$$a_0 L\{y^{(n)}\} + a_1 L\{y^{(n-1)}\} + \ldots + a_{n-1} L\{y'\} + a_n L\{y\} = B(s) \tag{6.3}$$

(1.12) formülü uyarınca

$$L\{y^{(n)}\} = s^n L\{y\} - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \ldots - y^{n-1}(0) \tag{6.4}$$

$$= s^n L\{y\} - s^{n-1} y_0 - s^{n-2} y_1 - \ldots - y_{n-1}$$

$$L\{y^{(n-1)}\} = s^{n-1} L\{y\} - s^{n-2} y(0) - s^{n-3} y'(0) - \ldots - y^{(n-2)}(0)$$

$$= s^{n-1} L\{y\} - s^{n-2} y_0 - s^{n-3} y_1 - \ldots - y_{n-2}$$

. . . .

$$L\{y'\} = sL\{y\} - y(0) = sL\{y\} - y_0$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n) L\{y\} -$$

$$- y_0 (a_0 s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \ldots + a_{n-2} s + a_{n-1}) -$$

$$- y_1 (a_0 s^{n-2} + a_1 s^{n-3} + \ldots + a_{n-3} s + a_{n-2}) -$$

$$- \ldots - y_{n-2} (a_0 s + a_1) - y_{n-1} a_0 = B(s)$$

elde edilir. Son bağıntıdan $L\{y\}$ çözülürse

$$L\{y\} = \frac{q(s)}{p(s)} \tag{6.5}$$

bulunur. Burada,

$$q(s) = B(s) + y_0(a_0 s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + ... + a_{n-1}) + ... + y_{n-1}\ a_0$$

$$p(s) = a_0\ s^n + a_1\ s^{n-1} + ... + a_{n-1}\ s + a_n$$

olarak bellidir. (6.5) eşitliğinin her iki tarafına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{q(s)}{p(s)}\right\}$$

elde edilir.

6.2 Örnekler

1) $y''(t) + w^2\ y\ (t) = A\ \delta_1\ (t)$, $y\ (0) = y'(0) = 0$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Probleme Laplace dönüşümünü uygularsak

$$s^2 y(s) - sy(0) - y'(0) + w^2 y(s) = L\{A\delta_1(t)\}$$

$$y(s)\ (s^2 + w^2) = As$$

$$y(s) = \frac{As}{s^2 + w^2}$$

bulunur. Her iki tarafın ters Laplace dönüşümünü alalım:

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{As}{s^2 + w^2}\right\}$$

$$y(t) = A\cos wt$$

olur.

2) $y''(t) + w^2 y(t) = A\delta_0(t - t_0) + \beta\delta_1(t - t_1)$

$$y(0) = y_0 \quad , \quad y'(0) = y'_0$$

başlangıç değer problemini çözünüz.

Probleme Laplace dönüşümünü uygulayalım:

$$s^2 y(s) - sy(0) - y'(0) + w^2 y(s) = Ae^{-t_0 s} + Bs\ e^{-t_1 s}$$

$$y(s)=\frac{Ae^{-t_0 s}}{s^2+w^2}+\frac{Bs\,e^{-t_1 s}}{s^2+w^2}+\frac{sy_0}{s^2+w^2}+\frac{y_0'}{s^2+w^2}$$

bulunur. Her iki tarafın ters Laplace dönüşümünü alalım:

$$L^{-1}\{y(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{Ae^{-t_0 s}}{s^2+w^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{Bse^{-t_1 s}}{s^2+w^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{sy_0}{s^2+w^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{y_0'}{s^2+w^2}\right\}$$

$$=\frac{Au(t-t_0)}{w}\sin w\,(t-t_0)+Bu(t-t_1)\cos w(t-t_1)$$

$$+\,y_0\cos wt+y_0'\,\frac{\sin wt}{w}$$

bulunur.

3)

$$y''+2y'+2y=\begin{cases}-1, & 0\le t<1\\ 0, & 1\le t<2\\ 1, & 2\le t<3\\ 0, & 3\le t\end{cases}\qquad y(0)=0,\ y'(0)=1$$

başlangıç değer problemini çözünüz.

Önce denklemin sağ tarafını

f(t) = -1 + u(t-1) +u(t-2) -u(t-3)

şeklinde yazalım ve her iki tarafın Laplace dönüşümünü alalım:

$$L\{f(t)\}=-\frac{1}{s}(1-e^{-s}-e^{-2s}+e^{-3s})$$

$$y(s)\,(s^2+2s+2)-1=-\frac{1}{s}\ (1-e^{-s}-e^{-2s}+e^{-3s})$$

Buradan,

$$y(s)=\frac{1}{s^2+2s+2}-(1-e^{-s}-e^{-2s}+e^{-3s})\frac{1}{s(s^2+2s+2)}$$

bulunur.

$$\frac{1}{s(s^2+2s+2)}=\frac{1}{2s}+\frac{-\frac{1}{2}s-1}{s^2+2s+2}$$ eşitliği yukarıda yerine yazılırsa,

$$y(s)=\frac{1}{(s+1)^2+1}-\frac{1}{2}(1-e^{-s}-e^{-2s}+e^{-3s})\left[\frac{1}{s}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}-\frac{1}{(s+1)^2+1}\right]$$

elde edilir.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=1,\ L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\}=e^{-t}\cos t,\ L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}=e^{-t}\sin t$$

formülleri gözönüne alınarak ve ötelenmiş fonksiyonun ters Laplace dönüşümü kullanılarak

$$y(t)=e^{-t}\sin t-\frac{1}{2}(1-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t)$$

$$+\frac{1}{2}u(t-1)\left[1-e^{-(t-1)}\cos(t-1)-e^{-(t-1)}\sin(t-1)\right]$$

$$+\frac{1}{2}u(t-2)\left[1-e^{-(t-2)}\cos(t-2)-e^{-(t-2)}\sin(t-2)\right]$$

$$-\frac{1}{2}u(t-3)\left[1-e^{-(t-3)}\cos(t-3)-e^{-(t-3)}\sin(t-3)\right]$$

bulunur.

4) $f(t)=\begin{cases}a, & 0\le t<b\\ 0, & b\le t\end{cases}$ olmak üzere

$$x''-x=f(t),\quad x(0)=x'(0)=0$$

başlangıç değer problemini çözünüz.

$x''-x=f(t)$ eşitliğinin her iki tarafının Laplace dönüşümünü alalım:

$$s^2x(s)-x(s)=L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^b a.e^{-st}dt+\int_b^\infty 0\,dt$$

$$x(s)\left[s^2-1\right]=a\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^b$$

olduğundan,

$$x(s)=\frac{-a\,e^{-sb}}{s(s^2-1)}+\frac{a}{s(s^2-1)}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlik basit kesirlere ayrılırsa

$$x(s)=\frac{a\,e^{-sb}}{s}-\frac{a\,e^{-sb}}{s^2-1}-\frac{a}{s}+\frac{as}{s^2-1}$$

bulunur. Her iki tarafın ters Laplace dönüşümü alınırsa,

x(t) = a u (t-b) - a u (t-b) cosh (t-b) - a + a cos ht

bulunur.

5) x' = 4x +2y,x (0) = 0

y' = -x + y, y (0) = -1

$L\{x(t)\}=x(s)$ ve $L\{y(t)\}=y(s)$ olduğunu kabul edip eşitliklere Laplace dönüşümünü uygularsak,

$$\begin{aligned} s\,x(s)&=4x(s)+2y(s)\\ sy(s)+1&=-x(s)+y(s)\end{aligned} \qquad \text{veya} \qquad \begin{cases} x(s)\,(s-4)-2y(s)=0\\ x(s)\,(1)+y(s)\,(s-1)=-1\end{cases}$$

doğrusal cebirsel sistemini elde ederiz. Burada,

$$\Delta=\begin{vmatrix} s-4 & -2\\ 1 & s-1\end{vmatrix}=s^2-5\,s+6 \quad , \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} 0 & -2\\ -1 & s-1\end{vmatrix}=-2 \quad , \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} s-4 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=4-s$$

olduğunu gözönüne alıp Cramer kuralını uygularsak,

$$x(s)=\frac{-2}{s^2-5s+6}, \qquad y(s)=\frac{4-s}{s^2-5s+6}$$

olur.

$$L^{-1}\{x(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{-2}{s^2-5s+6}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{2}{s-2}-\frac{2}{s-3}\right\}$$

$$=2e^{2t}-2e^{3t}$$

$$L^{-1}\{y(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{4-s}{(s-2)(s-3)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{-2}{s-2}+\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$=-2\,e^{2t}+e^{3t}$$

yani,

$x(t) = 2\,e^{2t} - 2\,e^{3t}$ ve $y(t) = -2\,e^{2t} + e^{3t}$

7. KONVOLÜSYON

7.1 Teorem (İki Fonksiyonun Konvolüsyonu) Evrişim Teoremi:

f(t) ve g(t) fonksiyonlarının evrişimi

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \tag{7.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $F(s) = L\{f(t)\}$ ve $G(s) = L\{g(t)\}$ ise (7.2)

$H(s) = F(s)\ G(s) = L\{h(t)\}$

dir.

İspat:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi) d\xi$$

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-s\eta} g(\eta) d\eta$$

olduğuna göre buradan,

$$F(s)\ G(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi) d\xi . \int_0^\infty e^{-s\eta} g(\eta) d\eta \tag{7.3}$$

olarak bulunur. Birinci integral ikinci integralin değişkenine bağlı olmadığından F(s) G(s) yi

$$F(s)\ \ G(s) = \int_0^\infty g(\eta) d\eta \int_0^\infty e^{-s(\xi+\eta)} f(\xi)\ d\xi \tag{7.4}$$

biçiminde yazabiliriz. η sabit olmak üzere $\xi = t - \eta$ dönüşümü yapılırsa (7.3) integrali t ye bağlı

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\eta) d\eta \ \int_\eta^\infty e^{-s(\xi+\eta)} f(t-\tau) dt \tag{7.5}$$

integraline dönüşür. $\eta = \tau$ alınırsa (7.5) denklemi

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\tau) d\tau \ \int_\tau^\infty e^{-st} f(t-\tau) dt \tag{7.6}$$

denklemi haline gelir. İntegral sırası değiştirilirse

$$F(s)\,G(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \tag{7.7}$$

elde edilir. Böylece,

$$F(s)\,G(s) = \int_0^\infty e^{-st}h(t)\,dt \tag{7.8}$$

$$= L\{h(t)\}$$

eşitliğinden ispat tamamlanır.

Evrişim teoreminin açık bir sonucu olarak

$$L^{-1}\{F(s)\,G(s)\} = f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$$

dir. (7.1) eşitliğine f(t) ve g(t) fonksiyonlarının bürümü adı da verilir.

7.1.1 Örnek:

$f(t) = t^{\alpha}$ ve $g(t) = t^{\beta}, \quad \alpha, \beta \geq 0$

fonksiyonlarının konvolüsyonunu hesaplayınız.

$$t^{\alpha} * t^{\beta} = \int_0^t \tau^{\alpha}(t-\tau)^{\beta}\,d\tau$$

integrandına $\tau = tx$ dönüşümü uygularsak,

$$t^{\alpha} * t^{\beta} = t^{\alpha+\beta+1}\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\,dx = \beta(\alpha+1, \beta+1)\,t^{\alpha+\beta+1}$$

bulunur. Burada,

$$\beta(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx, \qquad \alpha,\beta > 0$$

fonksiyonuna **beta fonksiyonu** veya **birinci türden Euler integrali** denir.

7.2 Konvolüsyonun Özellikleri

f(t), g(t) ve h(t) fonksiyonlarının D de tanımlı olduğunu varsayalım:

a) Kapalılık özelliği : $f * g$ de D de tanımlıdır.

b) Değişme özelliği : $f * g = g * f$

c) Birleşme özelliği : $(f * g) * h = f * (g * h)$

d) Dağılma özelliği : $(f+g) * h = f * h = f * h + g * h$

7.3 Ters Dönüşümü Bulmada Konvolüsyonun Kullanılması

$L(1)=\frac{1}{s}$ ve $L\left(e^{at}\right)=\frac{1}{s-a}$ oluğundan,

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-a)}\right\}=\int_0^t 1.e^{a\tau}d\tau=\frac{e^{at}}{a}\Big|_0^t=\frac{e^{at}}{a}-\frac{1}{a}=\frac{e^{at}-1}{a}$$

bulunur.

7.4 Başlangıç Değer Probleminin Konvolüsyon YardımıylaÇözümü

f(t) nin D bölgesinde tanımlı olduğunu varsayalım ve aşağıdaki başlangıç değer problemini düşünelim:

$$y''+y'-6y=f(t) \qquad y(0)=y'(0)=0$$

Her iki tarafın Laplace dönüşümünü alalım:

$$(s^2+s-6)\ L\{y\}=L\{f(t)\}$$

Buradan,

$$L\{y\}=\frac{L\{f(t)\}}{s^2+s-6}$$

bulunur. Ters Laplace dönüşümünü alarak ve konvolüsyon teoremini uygulayarak

$$y=f*L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s-6}\right\}$$

bulunur.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s-6}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{5(s-2)}-\frac{1}{5(s+3)}\right\}$$

$$=\frac{1}{5}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{-3t}$$

Sonuç olarak

$$y(t)=\int_0^t\left(\frac{1}{5}e^{2(t-\tau)}-\frac{1}{5}e^{-3(t-\tau)}\right)f(\tau)\,d\tau$$

elde edilir.

7.4.1 Örnek:

$$\int_0^t e^{2(t-\tau)} y(\tau)d\tau = t^2e^t$$

integral denklemini konvolüsyon yardımıyla çözünüz.

$L\{y(t)\} = y(s)$ olduğunu kabul edip her iki tarafın Laplace dönüşümünü alalım:

$$L\left\{\int_0^t e^{2(t-\tau)} y(\tau)d\tau\right\} = L\{t^2e^t\}$$

$$= \frac{2!}{(s-1)^3}$$

Burada, $\varphi(t-\tau) = e^{2(t-\tau)} \Rightarrow \varphi(t) = e^{2t}$

$$L\{\varphi(t)\} = \frac{1}{s-2} = \phi(s)$$

$L\{y(t)\} = y(s)$ dir.

Konvolüsyon formülünü uygulayalım:

$$y(s).\phi(s) = \frac{2!}{(s-1)^3}$$

$$y(s)\frac{1}{s-2} = \frac{2!}{(s-1)^3} \Rightarrow y(s) = \frac{2(s-2)}{(s-1)^3}$$

$$L\{y(t)\} = \frac{2(s-2)}{(s-1)^3} = \frac{2(s-1-1)}{(s-1)^3} = \frac{2(s-1)}{(s-1)^3} - \frac{2}{(s-1)^3}$$

$$L\{y(t)\} = \frac{2}{(s-1)^2} - \frac{2}{(s-1)^3}$$

olur. Her iki tarafın ters Laplace dönüşümünü alırsak

$$y(t) = 2te^t - 2\left(\frac{t^2e^t}{-2}\right)$$

$$y(t) = 2t\,e^t + t^2e^t$$

$$y(t) = t(2+t)\,e^t$$

bulunur.

Burada,

$$L\{e^t\} = \frac{1}{s-1}, \quad L\{te^t\} = (-1)^1 F'(s)$$

$$= (-1)\,(-1)\frac{1}{(s-1)^2}$$

$$= \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$L\{t^2 e^t\} = (-1)^2 F''(s)$$

$$= \frac{-2}{(s-1)^3}$$

olduğu gözönüne alınarak,

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = te^t \qquad \text{ve} \qquad L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\} = \frac{t^2e^t}{-2}$$

eşitlikleri kullanılmıştır.

8. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN KISMÎ DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI

8.1 Çözüm Yöntemi

Laplace dönüşümü lineer, sabit katsayılı ve iki bağımsız değişkenli kısmî diferansiyel denklemlerin çözümünde de kullanılmaktadır.

Başlangıç ve sınır şartları belli olan kısmî diferansiyel denklemin bağımsız değişkenlerden birine, genellikle t ye göre Laplace dönüşümü yapılır.

f(x,t) nin x e göre kısmî türevinin Laplace dönüşümü ise

$$L\left[\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right] = \int_0^{\infty} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} e^{-st} dt$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} f(x,t) e^{-st} dt$$

$$= \frac{d}{dx} L[f(x,t)] = \frac{dF(x,s)}{dx} \qquad (8.1)$$

dır. F(x,s) t nin fonksiyonu değildir ve son eşitlikteki türev, kismî türev şeklinde değildir. Bu formül, x in daha yüksek mertebeden türevleri için de geçerlidir. Buradaki eşitlikte x bağımsız değişken ve s parametre gibi gözönüne alınır. Diferansiyel denklemin genel çözümündeki katsayılar s nin fonksiyonu olacaklardır. Keyfi sabitler ise sınır şartlarının yardımıyla bulunur. Sonra elde edilen eşitliğin Laplace dönüşümü hesaplanarak çözüm bulunur.

8.2 Örnekler:

1) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

şeklindeki kısmî diferansiyel denklemin, $u(x,0) = 3 \sin 2\pi x$, $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$ şartlarını gerçekleyen çözümünü bulunuz.

Çözüm:

Verilen kısmî diferansiyel denklemi

$$\frac{\partial\, u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (8.2)$$

şeklinde yazabiliriz. Sözkonusu kısmî diferansiyel denklemle ilgili başlangıç şartları

$$u\,(x,0) = 3 \sin 2\pi\, x \qquad (8.3)$$

ve sınır şartları

$$u\,(0,t) = 0 \tag{8.4}$$

$$u\,(1,t) = 0 \tag{8.5}$$

biçimindedir. Sözkonusu (8.2) numaralı eşitliğin, t ye göre Laplace transformasyonunu alalım:

$$L\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right] = L\left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right] \tag{8.6}$$

olur. (8.6) numaralı eşitliğin her iki tarafındaki terimlerin Laplace transformasyonu hesaplanırsa,

$$L\left[\frac{\partial\, u(x,t)}{\partial t}\right] = s\, U(x,s) - u(x,0) \tag{8.7}$$

$$L\left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right] = \frac{d^2 U(x,s)}{dx^2} \tag{8.8}$$

bulunur. (8.7) ve (8.8) değerleri (8.6) da yerine yazılırsa,

$$sU\,(x,s) - u(x,0) = \frac{d^2 U(x,s)}{dx^2}$$

veya

$U = U\,(x,s) = L\{u(x,t)\}$ alınıp

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - s\,U = -u(x,0) \tag{8.9}$$

bulunur.

Problemde verilen (8.3) numaralı başlangıç şartı gözönüne alınırsa, (8.9) numaralı eşitlik,

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - sU = -3\sin 2\pi x \tag{8.10}$$

olur. Görüldüğü gibi (8.10) numaralı eşitlik bir adî diferansiyel denklemdir. Sözkonusu (8.10) numaralı adi diferansiyel denklemin genel çözümü,

$U_g = U_h + U_ö$

şeklindedir. (U_h, denklemin homojen çözümü; $U_ö$ ise denklemin özel çözümüdür.)

Bilindiği gibi U_h çözümü,

$$\frac{d^2U}{dx^2} - sU = 0 \tag{8.11}$$

eşitliğinin çözümüyle bulunur. Buradan,

$$\lambda^2 - s = 0 \Rightarrow \quad \lambda_1 = \sqrt{s} \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = -\sqrt{s}$$

bulunur. Homojen çözümü,

$$U_h = c_1\, e^{\sqrt{s}x} + c_2\, e^{-\sqrt{s}x} \tag{8.12}$$

bulunur. (Keyfi sabitler $c_1(s)$, $c_2(s)$ şeklinde de gösterilebilir. Diğer taraftan $U_ö$ özel çözümünü hesaplayalım:

$$U_ö = A \sin 2\pi x \tag{8.13}$$

$$U_ö' = A.2\pi \cos 2\pi x$$

$$U_ö'' = A.4\pi^2.(-\sin 2\pi x)$$

Türev değerlerini (8.10) eşitliğinde yerine yazalım:

$$-4A\pi^2 \sin 2\pi x - s\,(A \sin 2\pi x) = -3 \sin 2\pi x$$

$$\sin 2\pi x(-4A\pi^2 - sA) = -3 \sin 2\pi x$$

sin $2\pi x$ in katsayıları birbirine eşitlenirse

$$A(-4\pi^2 - s) = -3 \text{ ve}$$

$$A = \frac{3}{s + 4\pi^2}$$

bulunur. Bu değer (8.13) de yerine yazılarak

$$U_ö = \frac{3}{s + 4\pi^2} \sin 2\pi x \tag{8.14}$$

bulunur.

Öte yandan (8.4) ve (8.5) numaralarıyla gösterilen sınır şartlarının Laplace transformasyonları hesaplanır. Daha sonra transformasyonu yapılan sınır şartlarından istifade edilerek (8.12) numaralı eşitlikteki c_1 ve c_2 keyfi sabitleri tayin edilebilir.

$$L\{u(0,t)\} = U(0,s) = 0 \tag{8.15}$$

$$L\{u(1,t)\} = U(1,s) = 0 \tag{8.16}$$

olup bu değerler (8.12) de yerine yazılırsa,

$$\left.\begin{array}{ll} x=0 \quad \text{için} & c_1 + c_2 = 0 \\ x=1 \quad \text{için} & c_1 e^{\sqrt{s}} + c_2 e^{-\sqrt{s}} = 0 \end{array}\right\} \tag{8.17}$$

bulunur. (8.17) numaralı sisteminin çözümünden $c_1 = c_2 = 0$ elde edilir. Dolayısıyla U_g ile ifade edilen genel çözüm (8.12) ve (8.14) yardımıyla

$$U_g = U_h + U_ö = \frac{3}{s+4\pi^2}\sin 2\pi x \tag{8.18}$$

elde edilir. (8.18) numaralı eşitliğin ters Laplace transformasyonu alınarak, (8.2) numaralı kısmi diferansiyel denkleminin aranan u(x,t) çözümü bulunur. Buna göre,

$$u(x,t) = L^{-1}\{U\} = L^{-1}\left\{\frac{3}{s+4\pi^2}\sin 2\pi x\right\}$$

olup,

$$u(x,t) = 3\,e^{-4\pi^2}\sin 2\pi x$$

elde edilir.

2) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = 16x + 20\sin x$

şeklindeki kısmî diferansiyel denklemin,

$y(x,0) = 16x + 12\sin 2x - 8\sin 3x, \quad y_t(x,0) = 0, \quad y(0,t) = 0, \quad y(\pi,t) = 0$ şartlarını

gerçekleyen çözümünü bulunuz.

Çözüm:

Verilen kısmî diferansiyel denklemi

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + y = 16x + 20\sin x \tag{8.19}$$

şeklinde yazabiliriz. Sözkonusu kısmî diferansiyel denklemle ilgili başlangıç şartları

$$y(x,0) = 16x + 12\sin 2x - 8\sin 3x \tag{8.20}$$

$$y_t(x,0) = 0 \tag{8.21}$$

ve sınır şartları

$$y(0,t) = 0, \tag{8.22}$$

$$y(\pi,t) = 0 \tag{8.23}$$

dır. Sözkonusu (8.19) numaralı eşitliğin, t ye göre Laplace transfarmasyonunu alalım:

$$L\left[\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\right] - 4\,L\left[\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right] + L[y(x,t)] = L[16x + 20\sin x] \tag{8.24}$$

$$L\left[\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right] = s^2\,Y(x,s) - sy(x,0) - \frac{\partial y(x,0)}{\partial t} \tag{8.25}$$

$$L\left[\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right] = \frac{d^2 Y(x,s)}{dx^2} \tag{8.26}$$

elde edilir. (8.25) ve (8.26) değerleri (8.24) de yerine konusa,

$$s^2 Y(x,s) - sy(x,0) - \frac{\partial y(x,0)}{\partial t} - 4\left[\frac{d^2 Y(x,s)}{dx^2}\right] + Y(x,s) = (16x + 20\sin x)\frac{1}{s}$$

veya

$Y = Y(x,s) = L[y(x,t)]$ alınıp

$$s^2 Y - sy(x,0) - \frac{\partial y(x,0)}{\partial t} - 4\frac{d^2 Y}{dx^2} + Y = (16x + 20\sin x)\frac{1}{s} \tag{8.27}$$

olur. (8.20) ve (8.21) başlangıç şartları gözönüne alınırsa, (8.27) numaralı eşitlik

$$s^2 Y - s(16x + 12\sin 2x - 8\sin 3x) - 4\frac{d^2 Y}{dx^2} + Y = (16\,x + 20\,\sin x)\frac{1}{s} \tag{8.28}$$

şeklinde bir adi diferansiyel denklemdir. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} - \frac{Y(1+s^2)}{4} = -\frac{s(16x + 12\sin 2x - 8\sin 3x)}{4} - \frac{16x}{4s} - \frac{20\sin x}{4s} \tag{8.29}$$

elde edilir. (8.29) numaralı eşitliğin Y_h homojen çözümü

$$Y_h = c_1 e^{\frac{\sqrt{s^2+1}}{2}x} + c_2\, e^{\frac{-\sqrt{s^2+1}}{2}x} \tag{8.30}$$

şeklindedir.

Diğer taraftan $Y_{\ddot{o}}$ özel çözümü ise

$$\frac{d^2Y}{dx^2}-\frac{Y}{4}(s^2+1)=4\left(-s-\frac{1}{s}\right)x-5\frac{\sin x}{s}-3s\sin 2x+8s\sin 3x \tag{8.31}$$

denkleminin sağ tarafına göre belirlenirse

$$Y_ö=Ax+B\sin x+C\sin 2x+D\sin 3x \tag{8.32}$$

biçiminde olacaktır. Gerekli türevler hesaplanır ve (8.29) da yerine yazılırsa,

$$Y_ö'=A+B\cos x+2C\cos 2x+3D\cos 3x$$

$$Y_ö''=-B\sin x-4C\sin 2x-9D\sin 3x$$

$$-B\sin x-4C\sin 2x-9D\sin 3x-\frac{(s^2+1)}{4}(Ax+B\sin x+C\sin 2x+D\sin 3x)$$

$$=4\left(-s-\frac{1}{s}\right)x-5\frac{\sin x}{s}-3s\sin 2x+2s\sin 3x$$

bulunur. Denklemi düzenlersek

$$-x\left(\frac{A(s^2+1)}{4}\right)+\sin x\left(-B-\frac{B}{4}(s^2+1)\right)+\sin 2x\left(-4C-\frac{C(s^2+1)}{4}\right)$$

$$+\sin 3x\left(-9D-\frac{D(s^2+1)}{4}\right)=4x\left(\frac{-s^2-1}{s}\right)-5\frac{\sin x}{s}-3s\sin 2x+2s\sin 3x$$

elde edilir ve Buradan,

$$\frac{-A(s^2+1)}{4}=\left(\frac{-s^2-1}{s}\right)^4 \Rightarrow \frac{A}{4}=\frac{4}{s}\Rightarrow A=\frac{16}{s}$$

$$B\left(-1-\frac{1}{4}(s^2+1)\right)=\frac{-5}{s}\Rightarrow B\left(\frac{-4-s^2-1}{4}\right)=\frac{-5}{s}\Rightarrow B=\frac{+20}{(s^2+5)s}$$

$$C\left(-4-\frac{s^2+1}{4}\right)=-3s\Rightarrow C\left(\frac{-16-s^2-1}{4}\right)=-3s\Rightarrow C=\frac{12s}{s^2+17}$$

$$D\left(-9-\frac{s^2+1}{4}\right)=2s\Rightarrow D\left(\frac{-s^2-37}{4}\right)=2s\Rightarrow D=\frac{-8s}{s^2+37}$$

bulunur. Bu değerler (8.32) de yerine yazılırsa

$$Y_ö = \frac{16}{s}x + \frac{20}{(s^2+5)s}\sin x + \frac{12s\sin 2x}{s^2+17} + \frac{-8s\sin 3x}{s^2+37} \tag{8.33}$$

elde edilir.

Öte yandan (8.22) ve (8.23) numaralı denklemlerle gösterilen sınır şartlarının Lplace transformasyonları hesaplanır. Daha sonra transformasyonu yapılan sınır şartlarından istifade edilerek (8.30) numaralı eşitlikteki c_1 ve c_2 keyfi sabitleri tayin edilebilir.

$$L\{y(0,t)\} = Y(0,s) = 0$$

$$L\{y(\pi,t)\} = Y(\pi,s) = 16\pi$$

olup, bu değerler (8.30)da yerine yazılırsa,

$$\left.\begin{array}{ll} x = 0 \quad \text{için} & c_1 + c_2 = 0 \\ x = \pi \quad \text{için} & c_1 e^{\frac{\sqrt{s^2+1}}{2}\pi} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{s^2+1}}{2}\pi} = 0 \end{array}\right\} \tag{8.34}$$

bulunur. (8.34) numaralı denklem sisteminin çözümünden $c_1 = c_2 = 0$ elde edilir. U_g ile ifade edilen genel çözümü bulabilmek için (8.33) denklemi düzenli olarak yazılırsa

$$Y_ö = \frac{16x}{s} + \frac{4}{s}\sin x - \frac{4s}{s^2+5}\sin x + \frac{12s}{s^2+17}\sin 2x - \frac{8s}{s^2+37}\sin 3x \tag{8.35}$$

elde edilir. Buradan Y_g genel çözümü

$$Y_g = Y_h + Y_ö = Y_ö$$

bulunur. (8.35) denkleminin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa

$$y(x,t) = 16x + 4\sin x - 4\cos\sqrt{5}t \sin x + 12\sin 2x\cos\sqrt{17}t \tag{8.36}$$
$$-8\sin 3x\cos\sqrt{37}t$$

elde edilir.

9. SONUÇ

L {F(t)}= F(s) olmak üzere, Laplace dönüşümü ile ilgili aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz.

1) Bu dönüşümdeki genel amaç; f(t) yi F(s) e dönüştürerek daha basit bir problem biçimine getirmek, bu problemi çözmek ve daha sonra F dönüşümünden istenen f fonksiyonunu elde etmektir.

2) s, kompleks ya da reel sayı olabilir.

3) Laplace dönüşümünün temel özellikleri, doğrusallık, birinci geçiş, ikinci geçiş ve skala değişim özellikleridir.

4) $L\{f(t)\} = F(s)$ olmak üzere $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$ dır.

5) $L\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n L\{f(t)\} - s^{(n-1)}f(0) - s^{(n-2)}f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$

formülüne başlangıç fonksiyonunun diferansiyellenmesi formülü denir.

6) $L\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$

formülüne başlangıç fonksiyonunun integrallenmesi formülü denir.

7) $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ olmak üzere f(t) fonksiyonuna F(s) fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü denir.

8) Ters Laplace dönüşümünün de temel özellikleri doğrusallık, birinci geçiş, ikinci geçiş ve skala değişim özellikleridir.

9) Ters Laplace dönüşümü hesaplanırken öncelikle verilen fonksiyonu basit kesirlere ayırmaya çalışmalıdır.

10) Sonlu sayıda birim basamak fonksiyonlarının kombinasyonu ile elde edilen fonksiyon bir basamak fonksiyonudur.

11) $x \geq 0$ için tanımlanmış bir f(x) fonksiyonu için u(x-c) f(x-c) fonksiyonu x doğrultusunda f(x) fonksiyonunun c birim ötelenmesini temsil eder.

12) $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$ eşitliğiyle belirlenen $\Gamma(n)$ fonksiyonuna Gamma fonksiyonu denir.

13) Dirac fonksiyonları ani itiş problemlerinin öğrenilmesinde çok önemlidir.

14) Tanımlı olduğu bölgede Dirac delta fonksiyonu tektir.

15) Duhamel formülünün yardımıyla başlangıç değerleri sıfır olan

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t)$$

problemi çözülebilirdir.

16) $L^{-1}\{f(t)\} = F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$ olmak üzere Q(s) nin kökleri kompleks olduğunda Heaviside açılım formülü kullanışlı yöntemlerdendir.

17) f(x,t) nin x e göre kısmî türevinin Laplace dönüşümü

$$L\left\{\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right\} = \frac{dF(x,s)}{dx}$$

biçimindedir.

KAYNAKLAR

Borrelli, R.L. ve Coleman, C.S., (1998), Differential Equations A Modeling Perspective.

Boyce, W.E. ve Di Prima R.C., (1996), Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.

Bronson, R., (1993), Schaum's Outlines Diferansiyel Denklemler.

Eren, Ş. ve Razbonyalı, M., (2004), Diferansiyel Denklemler, T.C. Maltepe Üniversitesi Mühendislik Fakültesi.

Halilov, H., (2003), Diferansiyel Denklemler ve Lineer Cebrin Elemanları, Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi.

Spiegel, M.R., (1965), Laplace Dönüşümleri.

Uyan, B., (1980), Çözümlü Problemlerle Diferansiyel Denklemler, Fourier Serileri, Laplace Transformasyonları.

Wylie, C.R., (1979), Differential Equations.

EKLER

Ek 1 Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Ek 2 Bazı Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri

EK 1

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN GENEL ÖZELLİKLERİ

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

	f(t)	F(s)
1)	$c_1f_1(t)+c_2f_2(t)$	$c_1F_1(s)+c_2F_2(s)$
2)	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
3)	$G(t)=\begin{cases} f(t-a) & t>a \\ 0 & t<a \end{cases}$	$e^{-as}F(s)$
4)	$a\,f(at)$	$F\left(\dfrac{s}{a}\right)$
5)	$t\,f(t)$	$-F'(s)$
6)	$t^2f(t)$	$F''(s)$
7)	$t^nF(t)$	$(-1)^nF^n(s)$
8)	$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(p)\,dp$
9)	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
10)	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
11)	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$
12)	$\int_0^t f(u)\,du$	$\dfrac{F(s)}{s}$
13)	$f(t)=f(t+T)$	$\dfrac{1}{1-e^{-ST}}\int_0^T e^{-su}f(u)\,du$

EK 2

BAZI FONKSİYONLARIN LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ

	f (t)	F(s)
1)	1	$\frac{1}{s}$
2)	t	$\frac{1}{s^2}$
3)	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, 0!=1$	$\frac{1}{s^n}\quad n=1,2,3,\ldots$
4)	$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$	$\frac{1}{(s-a)^n}\quad n>0$
5)	$\frac{\sin at}{a}$	$\frac{1}{s^2+a^2}$
6)	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
7)	$\frac{e^{bt}\sin at}{a}$	$\frac{1}{(s-b)^2+a^2}$
8)	$\frac{\sinh at}{a}$	$\frac{1}{s^2-a^2}$
9)	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
10)	$\frac{e^{bt}\sinh at}{a}$	$\frac{1}{(s-b)^2-a^2}$
11)	$e^{bt}\cosh at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$
12)	$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
13)	$\delta(t)$	1
14)	$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
15)	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	07.06.1981	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1994-1998	Şehremini Lisesi (Y.D.A)
Lisans	1998-2002	Mimar Sinan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2002-2004	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı
Çalıştığı Kurum	2003-2004	Fen Bilimleri Merkezi Dersanesi