YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Geometrik Prog. Teori ve Çözüm Tek.

Yüksek Lisans Tezi

Aydın Demiriz

1992

T.C.
YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GEOMETRİK PROGRAMLAMA
TEORİ VE ÇÖZÜM TEKNİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Aydın DEMİRİZ

İSTANBUL - 1992

T.C.
YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GEOMETRİK PROGRAMLAMA
TEORİ VE ÇÖZÜM TEKNİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Aydın DEMİRİZ

T E Ş E K K Ü R

Hazırlamış olduğum,bu yüksek lisans tezimde yardımlarını ve çok değerli katkılarını esirgemeyen sayın hocalarım Prof. İbrahim SEZGİNMAN ve tez danışmanım Yrd.Doç.Dr. Mehmet AHLATÇIOĞLU 'na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Gerek çalışmalarımda, gersekse hazırlanmasında öncelikle manevi destekleri için sevgili aileme ve ayrıca gösterdikleri tüm itina ve sağladıkları katkılar için çalışma arkadaşlarım sayın Arş.Gör. Nazan ÇAĞLAR ve sayın Arş.Gör. Işım GENÇ'e teşekkürlerimi,en derin başarı dileklerimle birlikte sunarım.

Aydın DEMİRİZ

Mayıs - 1992

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmada, Matematiksel Programlamanın bir alt dalı olan nonlineer programlama problemleri çözümleri için geliştirilmiş olan Geometrik Programlama başlığı altındaki konunun incelemesi amaçlanmıştır. Teori ve çözüm teknikleri açısından ele alınan ve ileriki çalışmalara esas teşkil edecek olan bu çalışma, başlıca altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, konunun en geniş kapsamıyla temel tanım ve kavramlarını içerir. Matematiksel programlama ve optimizasyon için genel bilgilerden oluşur.

Geometrik programlamaya giriş ve konunun esasını oluşturan aritmetik - geometrik ortalama eşitsizliği üzerine kurulu dualite teorisi ikinci bölümde yer almaktadır.

Üçüncü ve dördüncü bölümler, geometrik programlama problemlerinin özel yapıda olması durumunda ele alınmış olan, iki alt başlığı (sırasıyla, posinomal -katsayıları pozitif olan- ve signomal katsayıları işaretten bağımsız olan- programlamadan) oluşmaktadır. Gerekli yapısal ilişkiler, primal - dual problemler arasındaki bağıntılarıyla birlikte verilmiştir.

İlk dört bölümde kurulup, oluşturulmuş olan geometrik programlama problemlerinin yapısına uymayan nonlineer problemlerin bazı özel yapıya sahip olanları için dünüşüm ve yaklaşım bağıntıları beşinci bölümde açıklanmıştır. Bu dönüşüm ve yaklaşım yöntemleri ile standart yapıda olmayan problemler,düzenlenerek standart geometrik programlama problemlerine çevrilmektedir.

Son ve altıncı bölümde geometrik programlama teorisine ait bir uygulama ve hazırlanan çalışmadan ana hatları ile elde edilen sonuçlar verilmiştir.

S U M M A R Y

In this paper prepared as the M.Sc.graduate thesis,it is purposed that to analysis of **Geometric Programming** developed to solve the nonlinear programming problem which is a branch of Mathematical Programming. This thesis considered in terms of theory and solution techniques and will be base of my further studies consists of mainly six chapters.

First chapter contains the basic definition and descriptions of the subject. It is occur with the general knowledge for Mathematical Programming and Optimization.

The introduce to geometric programming and duality theory developed upon the aritmethic-geometric mean inequilty which is the base of the subject is placed in the second chapter.

The third and fourth chapters consist of two sub_division of geometric programs when it has proper structure, respectively posinomial and signomial programs. Necessary relations are given with the primal_dual programs correlation.

For any nonlinear problems, have some particular structure and nonsuitable to the geometric programs which is performed and determined in the first four chapters; transformation and limitting techniques are explained in the fifth chapter. The problems in nonstandart form have been converting to the standart geometric programming problems with these transformation and limitting techniques.

An application of the geometric programming theory and mainly results obtaining from the prepared study are given in the last and sixth chapter.

G İ R İ Ş

Yöneylem Araştırması bilim dalının en önemli çalışma alanlarından birisi optimizasyon ve uygulamalarıdır. Optimizasyonda ise özellikle nonlineer optimizasyon, son yıllarda oldukça ilgi çekmiş ve hem teorisyenlerin hemde uygulamacıların bu konuda yaptıkları çalışmalarda artışlar gözlemlenmiştir.

Geometrik programlama, cebrik nonlineer problemlerini lineer yada nonlineer kısıtlar altında çözmek üzere geliştirilen tekniklerden birisidir. Uygulamalara olan yatkınlığı sayesinde matematiksel programlamanın nonlieer başığı altında oldukça sağlam bir yer edinmiştir. Nonlineer karakterde olan matematiksel programlama problemini,lineer bir yapıya indirgeyerek çözüme ulaşmayı amaçlar. Mühendislik alanlarında karşılaşılan problemler için bir çözüm arayışının sonucu olmakla beraber,oldukça sağlam bir matematiksel teorisi mevcuttur.

Konveks olmayan programlama problemlerini konveks problemlere dönüştürmesi,bütünsel optimum sonuçlar sağlaması ve bazı koşullar altında primal ve dual prolemlerın çözümünden, amaç fonksiyonun optimum değeri için alt ve üst sınırlar gösterebilmesi ifade edilebilecek bazı üstünlükleridir. İşte bu sağlam yapısını inceleyerek, uygulama alanlarına daha geniş bir çerçevede yerleştirilmesi için;öncelikle teorisinin öğrenilmesi gereksinimi bu çalışmanın yapılmasına neden olmuştur. Bu çalışmada geometrik programlamanın kuruluşu ve teorisinin incelenmesi, çözüm yöntemlerinin ortaya konulması amaçlanmıştır.

BÖLÜM I

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

I.1. Giriş

Geometrik programlama, 1961 yılında Clarence ZENER ile ortaya çıkmış olan özellikle ayrıştırılabilir problemlerin geniş bir sınıfındaki çalışmalar için kullanışlı olmakla beraber, oldukça genel matematiksel bir teoridir. Etkisini özellikle lineer veya nonlineer kısıtlı - nonlineer cebrik programlama problemlerinin çözümünde göstermektedir. İlk ortaya çıkartılışı tamamıyla mühendislik problemlerine çözüm algoritması arayışının sonucudur. 1961 yılında Zener'in ortaya attığı düşünce üzerine Richard DUFFIN dualite teorisini, doğrudan nonlineer programlama problemlerine uygulayarak geliştirmiştir. Böylece Geometrik Programlama doğmuş ve nonlineer optimizasyonun yeni bir alt dalı olmuştur.

Geometrik programlamanın temel yapısı kurulduktan sonra Duffin ve Zener kendilerinin kurdukları bu yeni tekniği geliştirmiş ve genişletmişlerdir. Duffin'in öğrencilerinden Elmor PETERSON, Zener ile bilikte elektrik iletim yasası üzerine ve Duffin ile eşitsizlik kısıtlarını içeren metotlar üzerine çalışmıştır. 1967 yılında Duffin, Peterson ve Zener şimdiki klasik Geometrik Programlama üzerine bir kitap yazmışlardır (*). Duffin, Peterson ve Zener yanlız pozitif katsayı bileşenli problemler için çalışmışlardır. Mühendislikte gerçek hayat problemleri için bu yeterli ise de, Passy ve Wilde tarafından teoriyi bu kısıtlı çerçeveden kurtarmak üzere çalışmalar yapılmıştır (**).

Geometrik programlama çözüm tekniğinde ondalık kuvvetleri içeren terimlerin bütün fonksiyonda pozitif katsayılı olmaları gereği mevcuttu ve negatif sayılarla işlem yapılamazdı. Eşitsizlik kısıtları orjinal algorimanın ihtiyaçları ile sınırlıydı. Dolayısıyla geometrik programlamanın negatif katsayılar ve keyfi eşitsizliklere genişletilmesi, bu yapıyı Cauchy eşitsizliğinin sınırlarına taşıyan bir yol bulunana kadar yapılamadı. Bunu sağlayacak bir metod Lagrange yöntemlerini kullanarak eşitlik kısıtlı durumlar için Wilde tarafından oluşturulmuştur; öğrencisi Passy bu genişlemeyi Kuhn - Tucker koşullarını kullanarak tamamlamıştır (**).

Kullanım alanları olarak nonlineer şebeke akış problemleri, diskrit optimal kontrol problemleri, genelleştirilmiş Fermat tipi optimal atama problemleri, Lp regresyon problemleri, (kuadratik kısıtlı) kuadratik programlama problemleri, kimyasal eşitlik problemleri ve genel cebrik programlama problemleri örnek verilebilir.

(*) Duffin R.J.,E.L. Peterson ve C. Zener, Geometric Programming Wiley, NewYork, 1967

(**) Passy U. ve D.J. Wilde, Generalized Polynomial Optimization, SIAM Applied Math., Vol.15 No.5, (Sept.,1967), pp:1344-1356

Geometrik programlama problemleri;

(i) çok kuvvetli varlık, teklik ve karakterizasyon teoremleri,
(ii) kullanışlı parametrik ve ekonomik analiz,
(iii) ayrışım kurallarını aydınlatma ve
(iv) güçlü sayısal çözüm tekniklerini içerir.

Geometrik programlama esas olarak Matematiksel programlama problemlerinin nonlineer programlama başlığı altında teori ve uygulamalara dayalı olarak geliştirilmiştir. Buna göre öncelikle matematiksel programlama modeli ve özelliklerini, ardından nonlineer programlama hakkındaki giriş bilgileri verilerek geometrik programlamaya geçiş yapılsın.

I.2. Matematiksel Programlama Kuramı

Çeşitli yollarla kısıtlanmış bir veya fazla değişkenden oluşan sayısal fonksiyonun optimizasyonu problemi, bir matematiksel programlama problemi olarak adlandırılır. Açık ifadesi ile, bu tür problemlerin amacı $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gibi n tane değişkenin değerini, aşağıdaki fonksiyonu; verilen kısıtları altında optimize edecek şekilde belirlemektir.

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1.2.1}$$

$$\text{kısıtlar;} \quad g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_k \ ; \ k=1(1)m \tag{1.2.2}$$

Genellikle n değişkenin değerinin, sayısal olarak negatif olamayacağı kabul edilir. Nonnegatiflik kısıtı, değişkenler üzerinde

$$x_i \geq 0 \ ; \ i=1(1)n \tag{1.2.3}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bununla beraber aranan, (1.2.1) 'deki amaç fonksiyon adı verilen z fonksiyonunun (minimum yada maksimum) optimal değeridir.

Ticari , ekonomik sorunların matematiksel programlama problemleri olarak formülasyonu, birçok kompleks gerçek hayat optimizasyon çalışmalarının çözümlenmesindeki başarıya yol açmıştır.

I.3. Model Sınıflandırılması

Gerçek hayat problemlerini beş ayrı yolla sınıflandırabiliriz:

(1) Problemdeki fonksiyonel ilişkiler kesin olarak bilinir (deterministik) veya kesin olmayabilir (probabilistik).

(2) (1.2.1) ve (1.2.2) bağıntılarındaki $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ve $g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $k=1(1)m$ fonksiyonları $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değişkenleri için lineerdir yada fonksiyonlar kümesindeki en az bir eleman nonlineer olabilir.

(3) Fonsiyonlar sürekli türevlenebilir (düzgün) veya türevlenemez (düzgün olmayan) olabilirler.

(4) Matematiksel programlama problemindeki $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sürekli veya tamsayı değerlerle kısıtlandırılmış olabilir.

(5) Optimizasyon zamanda sabit bir noktada (statik) veya bir zaman aralığında (dinamik) yer alabilir.

(1.2.1) - (1.2.3) ile tanımlanan model ve birçok matematiksel programlama modeli deterministiktir; verilen $x_1, x_2, \ldots, x_n$'ler ve $f, g_1, g_2, \ldots, g_n$'lerin değeri tek olarak belirlenmiştir. Ticari ve ekonomik alanlar için matematiksel programlamanın bir çok uygulamasında model fonksiyonlar lineerdir. Bunun sebebi 1947'de Dantzing [1963] tarafından oluşturulmuş, simpleks metodun lineer programlama problemlerinin çözümü için oldukça etkin bir prosedür oluşudur. Açık ki, bir veya birkaç fonksiyon nonlineer ise çözüm daha güç olacaktır. Yinede gerçek hayat problemleri ne kadar kompleks veya nonlineer olsalar bile, birçok değişken ve lineer formda kısıtlar kullanılarak modellemeleri daha basite indirgenebilir.

Matematiksel programlama problemlerini çözmek üzere oluşturulmuş algoritmaların büyük çoğunluğu, modeldeki fonksiyonların sürekli türevlenebilir olmasını gerektirir.Dolayısıyle bütün fonksiyonlar düzgün olmalıdır.Bazı algoritmalar lineer problemdeki değişkenler için tamsayı çözümler üretmek üzere oluşturulmuşlardır. Bununla beraber eğer modelde bir veya daha fazla fonksiyon nonlineer ise programlama problemini çözmek ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değişkenlerinin tamsayı değerler alacağını garantileyen etkin algoritmalar da oluşturulmuştur. Sonuç olarak (1.2.1) 'de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fonksiyonunun optimizasyonu çoğunlukla zaman içindeki bir noktada düşünülmüştür. Yani model statiktir.

Matematiksel programlama metodlarının gerçek hayat problemlerine uygulanmasındaki bir çok örnekte, fonksiyonlar yapıları gereği nonlineer, düzgün olmayan ve probabilistik olup; problemin değişkenlerinin tamsayı değerli ve problemdeki amaç fonksiyonun optimizasyonunun dinamik olarak belirlenmesi zorunluluğu ile karşılaşılır.Buna karşın problemi ifade etmek üzere seçilen model sürekli olarak lineer-düzgün-deterministik-sürekli-statik bir modeldir.Böyle örneklerde model kurucunun beklentisi,oluşturulmuş olan matematik programlama modelinin, gerçek hayat problemlerinin çözümlenmesi sırasında kullanışlı bilgi sağlayabilmesidir.

(1.2.1) - (1.2.3)'ün ifade ettiği matematiksel programlama modeli aşağıdaki şekilde iki kısıma ayrılabilir:

1. Amaç fonksiyon ve kısıtları altında,

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \{\leq, =, \geq\} \quad b_i \quad ; \quad i=1(1)m$$

$$x_j \geq 0 \quad ; \quad j=1(1)n$$

formlu yapının optimizasyonu olarak bilinen Lineer Programlama Modeli 'dir. Burada c_j, b_i ve a_{ij}'ler bilinen sabitlerdir.

2. Amaç fonksiyon ve kısıtları altında bu sefer,

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \{\leq, =, \geq\} \quad b_i \quad ; \quad i=1(1)m$$

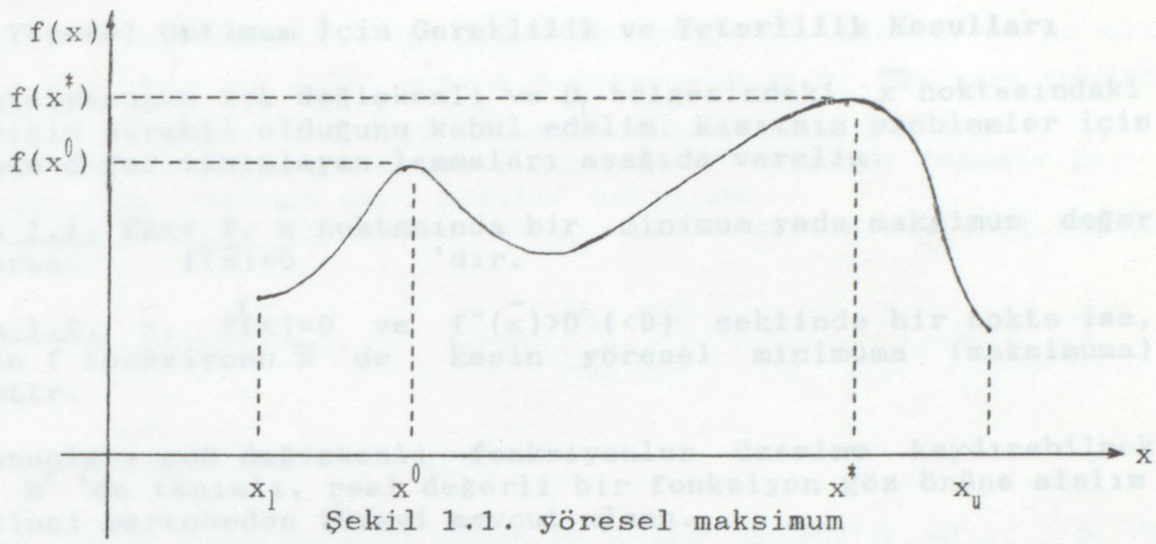
$$x_j \geq 0 \quad ; \quad j=1(1)n$$

şeklindeki yapının optimizasyonu olan, ancak $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ fonksiyon kümesinde en az bir fonksiyonun nonlineer olduğu durum için Nonlineer Programlama Modeli 'dir. Nonlineer programlama problemlerinin çözüm güçlüğünü azaltmak üzere ilk algoritmalar, Rosen [1960] ve Fiacco-McCormick [1964] tarafından geliştirilmeye başlanmıştır.

I.4. Optimizasyon Problemleri İçin Temel Kavramlar

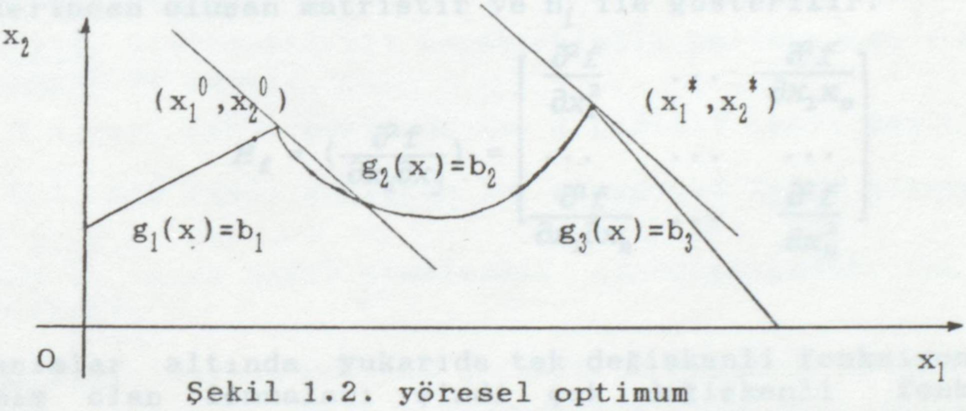
Matematiksel programlama problemlerinde nonlineer fonksiyonların tanımlanması, lineer formda oldukları durumdan daha güçtür. Nonlineer fonksiyonlarla tanımlamadaki esas güçlük, yöresel veya bütünsel minima yada maksimanın oluşumundaki belirsizliktir. Yöresel optimumun varlığı $f(x)$ fonksiyonun nonlineerliğine, bir veya daha fazla $g_i(x)$ kısıt fonksiyonlarının nonlineerliğine veya $f(x)$ ve $g_i(x)$ kısıtlarındaki nonlineerliğin ortak bir etkisine bağlı olarak ortaya çıkabilir.

Örnek olarak $f(x)$ amaç fonksiyonunun bir değişkeni için nonlineer olduğunu kabul edelim. Şekil 1.1. ile bu fonksiyon üzerindeki yöresel maksimum noktaları şöyle sıralayabiliriz. (x_l, x_u) aralığı içinde x^0 ve x^* gibi iki maksimizasyon noktası meycuttur ve $f(x^*) > f(x^0)$ 'dır. x^0 noktası yöresel (yerel) maksimum, x^* noktası bütünsel maksimumdur.



Şekil 1.1. yöresel maksimum

Fonksiyon üzerinde ifade edildiği gibi,kısıtlar altındaki yöresel optimumu şu şekilde verebiliriz. Şekil 1.2.'de verilen kısıtlarla sınırlandırılmış bölge ve lineer amaç fonksiyonu birinci bölgede orijinden itibaren artar durumda verilmiş olsun. g_2 kısıt fonksiyonunun nonlineerliğine göre (x_1^0, x_2^0) noktası yöresel maksimum ve (x_1^*, x_2^*) noktası ise bütünsel maksimumdur.



Şekil 1.2. yöresel optimum

Tanım 1.1. f fonksiyonunun D_f tanım bölgesi (domen), f 'in tanımlandığı R^n 'deki noktalar kümesidir.

Tanım 1.2. f fonksiyonu $\overline{x} \in D_f$ noktasında; tüm $x \in D_f$ noktaları için $f(\overline{x}) \leq f(x)$ olacak şekilde $\overline{x}$ 'nin bir θ aralığı $(\theta > 0)$ mevcut ise **yerel minimumdur** denir (burada $\| x - \overline{x} \| < \theta$ 'dır). Eğer her x için $f(\overline{x}) < f(x)$ şeklinde $0 < \| x - \overline{x} \| < \theta$ mevcut ise ozaman $\overline{x}$ noktası **kesin yöresel minimum nokta** adını alır.

Kesin yöresel minimumun aynı zamanda bir yöresel minimum olacağı açıktır. Ancak tersi geçerli değildir.

I.5. Yöresel Optimum İçin Gereklilik ve Yeterlilik Koşulları

f fonksiyonunun tek değişkenli ve D_f bölgesindeki $\bar{x}$ noktasındaki türevinin sürekli olduğunu kabul edelim. Kısıtsız problemler için optimum değer tanımlayan lemmaları aşağıda verelim.

Lemma 1.1. Eğer f, $\bar{x}$ noktasında bir minimum yada maksimum değer alıyorsa $f'(\bar{x})=0$ 'dır.

Lemma 1.2. $\bar{x}$, $f'(\bar{x})=0$ ve $f''(\bar{x})>0$ (<0) şeklinde bir nokta ise, ozaman f fonksiyonu $\bar{x}$ 'de kesin yöresel minimuma (maksimuma) sahiptir.

Bu sonuçları çok değişkenli fonksiyonlar üzerine kaydırabilmek için R^n 'de tanımlı, reel değerli bir fonksiyon göz önüne alalım ve ikinci mertebeden türevi mevcut olsun.

Tanım 1.3. f(x)'in gradyeni Grad f(x) veya $\nabla f(x)$ ile gösterilir ve kısmi türevlerden oluşan bir sütun vektördür:

$$\text{Grad } f(x) = \nabla f(x) = [\ \partial f/\partial x_1\ , \ \ldots\ , \ \partial f/\partial x_n\ ]$$

Tanım 1.4. f fonksiyonunun Hessian matrisi ikinci mertebe kısmi türevlerinden oluşan matristir ve H_f ile gösterilir.

$$H_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Bu tanımlar altında yukarıda tek değişkenli fonksiyonlar için verilmiş olan lemmaları şimdi çok değişkenli fonksiyonlara genişleterek gereklilik ve yeterlilik koşullarını tanımlayalım.

Teorem 1.3. (**Birinci mertebe gereklilik koşulu**): Eğer f , $\bar{x}$ noktasında bir minimum yada maksimuma sahip ise

$$\nabla f(\bar{x}) = 0$$

yazılır.

İkinci mertebe koşuluna geçmeden önce matrislerin tanımlılığı ve yarı tanımlılığı üzerinde kısaca duralım.

/

Tanım 1.5. Simetrik bir A matrisi eğer $\forall x \neq 0$ için $x^TAx > 0$ (veya $x^TAx < 0$) ise **pozitif tanımlı** (veya **negatif tanımlı**) adını alır. Yine eğer $\forall x \neq 0$ için $x^TAx \geq 0$ (veya $x^TAx \leq 0$) ise **yarı pozitif tanımlı** (veya **yarı negatif tanımlı**) olarak adlandırılır.
Tersi doğru olamamakla beraber açıktır ki, pozitif tanımlı bir A matrisi aynı zamanda yarı pozitif tanımlıdır.
Tanım 1.6. n inci dereceden $A=(a_{ij})$ kare matrisinin asal köşegen minörleri,

$$\Delta_1=\det[a_{11}] \quad , \quad \Delta_2=\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad , \ldots , \quad \Delta_n=\det A$$

şeklindeki determinantlardır.

Lemma 1.4. A kare matrisi ancak ve ancak $\Delta_1>0, \Delta_2>0, \ldots, \Delta_n>0$ ise pozitif tanımlıdır. Yine A matrisi ancak ve ancak $\Delta_1\geq 0, \Delta_2\geq 0, \ldots, \Delta_n\geq 0$ ise yarı pozitif tanımlıdır. Bunların yanı sıra ancak ve ancak $\Delta_1<0, \Delta_2>0, \ldots, (-1)^n \Delta_n>0$ ise negatif, ancak ve ancak $\Delta_1\leq 0, \Delta_2\geq 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n\geq 0$ ise yarı negatif tanımlıdır. Burada Δ_k 'lar A matrisinin asal minörleridir.
Lemma 1.5. $f(\tau)=\det(A-\tau I)$ karakteristik polinomunun τ özdeğerleri için ancak ve ancak;

i) $\forall \tau$, $\tau>0$ $(\tau\geq 0)$ şeklinde ise A pozitif (yarı pozitif) tanımlı

ii) $\forall \tau$, $\tau<0$ $(\tau\leq 0)$ şeklinde ise A negatif (yarı negatif) tanımlı adını alır.

Yapılan bu kısa hatırlatmalardan sonra aşağıdaki şu teoremleri verebiliriz.

Teorem 1.6. **(İkinci mertebe gereklilik koşulu): Eğer f fonksiyonu bir $\overline{x}$ 'de minimuma sahip ise, $\nabla f(\overline{x})=0$ ve H_f yarı pozitif tanımlı olur.**

Teorem 1.7. **(İkinci mertebe yeterlilik koşulu): Eğer $\overline{x}$, $\nabla f(\overline{x})=0$ ve $H_f(\overline{x})$ 'yi pozitif (negatif) tanımlı yapan bir nokta ise, ozaman f 'in $\overline{x}$ 'de kesin bir yöresel minimumu (maksimumu) vardır.**
İspat: $\overline{x}$ noktası civarında ikinci mertebe türeve sahip f fonksiyonu için ifade edilmiş kuadratik Taylor formülü;

$$f(x) = f(\overline{x}) + (x-\overline{x})^T \nabla f(\overline{x}) + \frac{1}{2}(x-\overline{x})^T H_f(\overline{x})(x-\overline{x}) + R(x)$$

veya,

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{R(x)}{\|x-\bar{x}\|^2} = 0$$

olduğu için hata terimini ifade dışında tutarak,

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x-\bar{x})^T \nabla f(\bar{x}) + \frac{1}{2}(x-\bar{x})^T H_f[\lambda x+(1-\lambda)\bar{x}](x-\bar{x}) \quad (1.5.1)$$

$0 \leq \lambda \leq 1$ olarak verilir. Teoremi bu bilgiyi kullanarak ispatlayalım. $x = \bar{x} + h$ şeklinde $\bar{x}$ civarındaki x için;

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + h' \nabla f(\bar{x}) + 0.5 \; h' H_f[\lambda\bar{x}+(1-\lambda)(\bar{x}+h)].h$$

olup,

$\nabla f(\bar{x}) = 0$ olduğundan

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + 0.5 \, h' H_f[\lambda\bar{x}+(1-\lambda)(\bar{x}+h)].h$$

veya

$$f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) = 0.5 \, h' H_f[\lambda\bar{x}+(1-\lambda)(\bar{x}+h)].h \quad (1.5.2)$$

bulunur. Bu ifadenin sağ tarafı x 'nin δ_komşuluğu içindeki tüm h değerleri için negatiftir. Yöresel maksimum tanımından bu durumda $f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) \leq 0$ olduğu için $\bar{x}$ bir yöresel maksimum olacaktır. İkinci mertebeden $\partial^2 f(x)/\partial x_i \partial x_j$ kısmi türevleri $\bar{x}$ 'nin uygun bir δ_komşuluğunda $\lambda\bar{x} + (1-\lambda)(\bar{x}+h)$ noktası ile elde edilen $\partial^2 f[\lambda\bar{x}+(1-\lambda)(\bar{x}+h)] / \partial x_i \partial x_j$ türevininki ile aynı işaretli olur. Böylece (1.5.2) eşitliğinin sağ tarafı, sadece $h' H_f(\bar{x}) h < 0$ ise negatiftir. Yani, $\bar{x}$'de değer alan $H_f(\bar{x})$ Hessian matrisi $\bar{x}$ 'nin bir maksimizasyon noktası olduğunu belirlemek üzere, negatif tanımlı olacaktır.

Yöresel maksimum ve minimum için verilmiş olan bu koşullar bazı konvekslik özelliklerini gösteren problemler için bütünsel koşullar ve sonuçlar olarak yeniden düzenlenebilirler. Bu tür durumlarda herhangi yöresel minimumun aynı zamanda bütünsel minimum olduğunu söyleyebiliriz. Fonksiyonun kesin konveks olduğu bilindiğinde yöresel minimum için yeterlilik koşulları üretilebilir. Bu amaçla, ön bilgi oluşturması için kısaca konveks yapılar üzerinde duralım.

Tanım 1.7. f verilen bir fonksiyon ve tanım bölgesinde $x_1 \neq x_2$ iki ayrı nokta olsun. Eğer tüm $\lambda \in [0,1]$ değerleri için;

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

ise, f fonksiyonu **konvekstir**. Yukarıdaki ifade de eğer eşitlik mevcut değilse f fonksiyonu **kesin konvekstir** denir.

Teorem 1.8. f ikinci mertebeden türevlenebilir olsun.f'in Hessian matrisi ancak ve ancak yarı pozitif tanımlıysa f konveks C kümesi üzerinde konvekstir.

Bu teorem esasta bütün x 'ler için sağlandığında, sürekli ikinci türeve sahip boyutsuz bir f fonksiyonunun konveksliği için gerek ve yeter şart olan,

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} \geq 0$$

eşitsizliğinin çok boyutlu karşılığıdır. Aşağıdaki teorem ile konveks fonksiyonların optimizasyonunda yöresel - bütünsel analiz arasındaki bağıntıyı ifade edebiliriz.

Teorem 1.9 Eğer f, C konveks kümesi üzerinde tanımlı bir konveks fonksiyon ise, f'in yöresel minimumu aynı zamanda bütünsel minimumudur.

ispat : İspatı çelişki teorisini kullanarak yapalım. f, $\overline{x}$ 'de yöresel minimuma sahip ve $f(x^*)<f(\overline{x})$ şeklinde $x^* \in C$ mevcut olsun.

f'in konveksliğinden hareketle, tüm $\lambda \in (0,1)$ için;

$$f[\lambda x^*+(1-\lambda)\overline{x}] \leq \lambda f(x^*)+(1-\lambda)f(\overline{x}) < \lambda f(\overline{x})+(1-\lambda)f(\overline{x}) = f(\overline{x})$$

elde edilir. $\overline{x}$ ve x^* arasındaki doğru parçasının verilen aralık bağıntısı $f(\overline{x})$ 'den kesinlikle daha küçük değer alır. Bu $\overline{x}$ 'nin yöresel minimumluğunu bozar.

I.6. Nonlineer Denklemlerin Çözümü

Nonlineer programlama problemlerinde kullanılan birçok algoritmik yöntem,aynı andaki nonlineer denklemleri çözme gereksinimi duyar. Bu tip denklemlerden oluşan kümenin çözümü için en iyi bilinen yöntem olan Newton-Raphson'u ele alalım.N tane fonksiyonun kümesi

$$f_j(x_1, \ldots, x_n) \; ; \; j=1(1)n$$

olsun.

Amacımız, $\forall$ j için $f_j(x^*)=0$ şeklindeki x_n değerlerini bulmak olsun.

Bir $x_k^*=(x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk})'$ noktasındaki $f_j(x_k^*)$ fonksiyon değerleri ve

$$\nabla f_j(x_k^*) = \left[\frac{\partial f_j(x_k^*)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_j(x_k^*)}{\partial x_n} \right]' \quad ; \quad j=1(1)n$$

matrisi, kısmi türevlerin tümünün x_k^*'daki değerleri alınmak üzere, elde edilmiş olsun.

$f_j(x^*)$ 'ın x_k^* noktası civarında Taylor serisine açılımı ;

$$f_j(x^*) = f_j(x_k^*) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j(x_k^*)}{\partial x_i}(x_{i,k+1} - x_{i,k}) + R(x_k^*) = 0$$

şeklindedir. Yüksek dereceden terimleri göz önüne almayarak:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j(x_k^*)}{\partial x_i} x_{i,k+1} = -f_j(x_k^*) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j(x_k^*)}{\partial x_i} x_{i,k} \quad ; \quad j=1(1)n$$

veya matrisiyel formda ;

$$\nabla' f_j(x_k^*)\, x_{k+1}^* = -f_j(x_k^*) + \nabla' f_j(x_k^*)\, x_k^* \quad ; \quad j=1(1)n \qquad (1.6.1)$$

x_k^*, $f_j(x_k^*)$ ve $\nabla f_j(x_k^*)$ bilindiği için bu n lineer denklem x_{k+1}^* için n tane $x_{n,k+1}$ koordinata sahiptir. Böylece Newton-Raphson metodu x^*'ın daha iyi yaklaşımını sağlamak için $\nabla f_j(x_{k+1}^*)$ türev değerlerini kullanır. x^* ise $f_j(x^*)=0$ 'ı sağlayan noktadır.

$$J_k = \left[\frac{\partial f_j(x_k^*)}{\partial x_i}\right] = \left[\nabla f_1(x_k^*), \ldots, \nabla f_n(x_k^*) \right]' \qquad (1.6.2)$$

ve

$$f^*(x_k^*) = [\, f_1(x_k), \ldots, f_n(x_k) \,]'$$

olsun. Ozaman (1.6.1) denklemi,

$$J_k^* x_{k+1}^* = J_k^* x_k^* - f^*(x_k^*)$$

olarak yazılabilir veya J_k^* singüler olmadığı için,

$$x_{k+1}^* = x_k^* - (J_k^*)^{-1} f(x_k) \qquad (1.6.3)$$

elde edilir.

I.7. Kısıtlı Optimizasyon ve Lagrange Çarpanları

Problemimizi ,

$$P: \quad \text{minimum} \quad z = f(x)$$
$$\text{kısıtlar;} \quad g_i(x) \le 0 \quad ; \quad i=1(1)m$$

şeklinde $f(x)$ amaç fonksiyonunu ve $g_i(x)$ kısıtlarını konveks olmak üzere seçelim. $g(x) = [\ g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)\ ]^T$ 'dır.

Tanım 1.9. $u = [\ u_1, u_2, \ldots, u_m]$, m gerçel değerli bir vektör olsun. P problemi için **Lagrange Fonksiyonu** amaç fonksiyon ve ağırlıklandırılmış kısıtların toplamıdır. Yani,

$$L(x,u) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) = f(x) + ug(x)$$

olup, u_i'ler **Lagrange Çarpanları** olarak adlandırılır.

Tanım 1.10. Bir $(\bar{x},\bar{u})$ noktası eğer,

$$L(\bar{x},u) \le L(\bar{x},\bar{u}) \le L(x,\bar{u}) \quad ; \quad \forall\ x,u \ge 0$$

şeklinde ise lagrange fonksiyonunun **Eyer Noktası** adını alır.

Lemma 1.10. $L(x,u)$ lagrange fonksiyonunun eğer bir $(\bar{x},\bar{u})$ eyer noktası mevcut ise, x noktası P problemi için bir optimum çözüm olacaktır.

ispat : Eyer nokta tanımının birinci kısmı,

$$f(\bar{x}) + u.g(\bar{x}) \le f(\bar{x}) + \bar{u}.g(\bar{x})$$

veya basitçe,

$$(u - \bar{u}).g(\bar{x}) \le 0$$

şeklinde ifade edilebilir. Şimdi $g(\bar{x}) \le 0$ 'dır çünkü, eğer $g_k(\bar{x}) > 0$ yapacak bir k mevcut ise $u_k=\bar{u}_k+1$, $u_i=\bar{u}_i$, $i \ne k$ kümesini oluşturur ve yukarıdaki eşitsizliğe ters düşer. Dolayısıyle $g(\bar{x}) \le 0$ olup $\bar{x}$, P için tüm kısıtları sağlar. Ayrıca $\bar{u}.g(\bar{x})=0$'dır, aksi halde $\bar{u}_k > 0$ şeklinde bazı k 'lar mevcut olur. u_k, $u_i=\bar{u}_i$, $i \ne k$ alarak yukarıdaki eşitsizlik yine bozulur.

Eyer noktasının tanımının ikinci kısmı,

$$f(\bar{x}) + \bar{u}.g(\bar{x}) \le f(x) + \bar{u}.g(x)$$

veya $\bar{u}.g(\bar{x})=0$ 'dan yararlanarak

$$f(\bar{x}) \le f(x) + \bar{u}.g(x)$$

şeklinde kurulabilir.

$\bar{u} \ge 0$ ve x, P problemi için mümkün çözüm ise (böylece $g(x) \le 0$ 'dır) yine $\bar{u}.g(\bar{x}) \le 0$ 'dan

$$f(\bar{x}) \le f(x)$$

olur. Bu ise, $\bar{x}$ 'nin P için optimal çözüm olduğunu gösterir.

I.8. Kuhn - Tucker Optimallik Koşulları

$f(x)$ amaç fonksiyon ve $g_i(x)$ kısıtları türevlenebilir olmak üzere P problemi ve L lagrange fonksiyonunu göz önüne alalım. Lagrange fonksiyonunun x 'e bağlı gradyeni,

$$\nabla_x L(x,u) = L_x(x,u) = \left[\frac{\partial L(x,u)}{\partial x_1}, \frac{\partial L(x,u)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial L(x,u)}{\partial x_n} \right]^T$$

ile gösterilir ve $L_u(x,u) = g(x)$ uygun olarak tanımlanır.

<u>Tanım 1.11.</u> P problemi için Kuhn-Tucker optimallik koşulları,

$$L_x(\bar{x},\bar{u}) \ge 0$$

$$\bar{x}^T L_x(\bar{x},\bar{u}) = 0$$

$$\bar{x} \ge 0$$

$$L_u(\bar{x},\bar{u}) \ge 0$$

$$\bar{u}\, L_u(\bar{x},\bar{u}) = 0$$

$$\bar{u} \ge 0$$

olarak verilir. Lagrange fonksiyonu için bir $(\bar{x},\bar{u})$ eyer noktası mevcut ise bu nokta Kuhn-Tucker koşullarını sağlayacaktır.

Birinci mertebe koşullar olduklarından , hem minimizasyon ve hem de maksimizasyon problemleri için geçerlidirler. Ayrımı sağlayan, ekstremumları gösteren ikinci mertebe koşullardır.

B Ö L Ü M II

GEOMETRİK PROGRAMLAMA PROBLEMLERİNİN GENEL YAPISI

II.1. Matematiksel İfadesi

Terminoloji ve notasyonlara bağlı oluşturulmuş olan en genel form aşağıdaki şekilde ifade edilebilir (*).

$$\textit{minimum} \quad g_0(x) = \sum_{j=1}^{T_0} \sigma_{0j} c_{0j} \prod_{i=1}^{n} (x_i)^{a_{0ij}}$$

$$\textit{kısıtlar} \quad g_k(x) = \sum_{j=1}^{T_k} \sigma_{kj} c_{kj} \prod_{i=1}^{n} (x_i)^{a_{kij}} \le \sigma_k \quad ; \quad k=1(1)m$$

$$x_i > 0 \quad ; \quad i=1(1)n$$

olup, burada

$\sigma_{kj} = \pm 1$, $\sigma_{0j} = \pm 1$, $\sigma_k = \pm 1$ ve $c_{kj} > 0$, $c_{0j} > 0$

şeklinde tanımlıdır.

a_{kij} , a_{0ij} : işaretten bağımsız sabitler,

T_k : k ıncı kısıttaki terim sayısı (k=1(1)m),

T_0 : amaç fonksiyondaki terim sayısıdır.

Eğer tüm σ değerleri pozitifse program posinomal-pozitif katsayılı olarak adlandırılır. Bu tip bir posinomal n değişken, T terim ve

$\max_j \{ \sum_{k=1}^{s} a_{kj} \}$ derecesinde oluşacaktır. Örneğin,

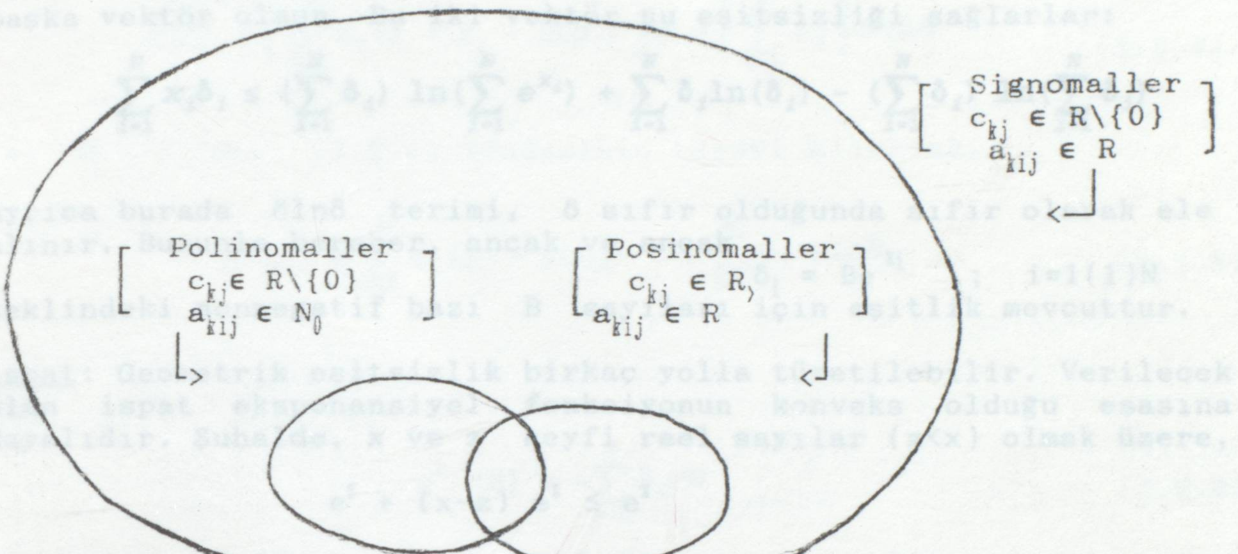
$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 x_2 x_3^3 - \sqrt{2}\, x_2^4 + (5/7) x_1^5 x_2^3 + x_2$$

fonksiyonu üç değişken ve dört terimden oluşmuş, derecesi sekiz olan bir yapıdadır. Posinomal fonksiyonda a_{kij} kuvvet değerleri herhangi reel sayılar olabilir.Ancak c_{kj} katsayılarına pozitiflik şartı getirilmiştir. Buna göre yukarıdaki örnek fonksiyon $-\sqrt{2}$ katsayı bulunduran terim içerdiğinden posinomal olamaz. Ayrıca

$$f(x_1,x_2) = 2.31 x_1 x_2^2 + x_1^{-1} x_2^{0.5} + x_1^{0.19}$$

fonksiyonu bir posinomal olup, tam sayı olmayan kuvyetler içerdiği için polinomal değildir. Sonuç olarak $f(x) = \pi x^5$ hem posinomal, hemde bir polinomal olup; $f(x) = -x^{0.5}$ ise ne posinomal, nede bir polinomaldir. Ancak a_{kij} 'lerin yine herhangi reel sayılar ve c_{kj} 'lerinde sıfır olmayan herhangi reel değerler alabildiği signomal fonksiyonlar -katsayıları işaretten bağımsız-sınıfındadır. Signomaller kuvvet terimleri dışında polinomallere benzerdir. Signomaller ve alt kümeleri sayılabilecek posinomaller ile polinomaller arasındaki bağınıtı şu şekilde verilebilir.

(*) Wilde D.J. ve S. Beightler, Foundatins of Optimization, Printece - Hall , Englwood Cliffs, N.J., 1967



Bu iki (posinomal , signomal) sınıf için kısıtlı ve kısıtsız geometrik programlama programları ileriki bölümlerde incelenecek, çözüm algoritmaları oluşturulacaktır.

II.2 Dualite Teorisi

Bu bölümde konvekslik ve konveks programlama teorilerini kullanarak geometrik programlama için dualite teorisini kuralım. Buna esas oluşturmak üzere aritmetik ve geometrik oranla ilişkili klasik eşitsizliğin bir genellemesini ifade edelim. Euclid uzayı üzerinde, vektörlerin sabit üretimi için bir eşitsizlik olduğundan bu bağıntıyı geometrik eşitsizlik olarak adlandırmamız yerinde olacaktır.

Başlangıç olarak a ve b pozitif sayıları için en basit durumdaki aritmetik ve geometrik ortalama eşitsizliği olan,

$$(1/2)(a+b) \geq (a*b)^{1/2}$$

bağıntısını ele alalım. Eşitlik ancak a=b ise geçerlidir. Geometrik anlamı ile ifadesi; a ve b dikdörtgenin kenarları ise geometrik ortalama aynı alana sahip bir karenin kenarına eşit olmasıdır. En genel hali ile geometrik eşitsizliği şu teorem ile verebiliriz.

<u>Lemma 2.1.</u> (Geometrik Eşitsizlik ve Temel Yardımcı Lemma) : x, N bileşenli keyfi bir vektör, δ ise nonnegatif N bileşenli bir başka vektör olsun. Bu iki vektör şu eşitsizliği sağlarlar:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i\delta_i \le \left(\sum_{i=1}^{N}\delta_i\right)\ln\left(\sum_{i=1}^{N} e^{x_i}\right) + \sum_{i=1}^{N}\delta_i\ln(\delta_i) - \left(\sum_{i=1}^{N}\delta_i\right)\ln\left(\sum_{i=1}^{N}\delta_i\right)$$

ayrıca burada $\delta\ln\delta$ terimi, δ sıfır olduğunda sıfır olarak ele alınır. Bununla beraber, ancak ve ancak

$$\delta_i = Be^{x_i} \quad ; \quad i=1(1)N$$

şeklindeki nonnegatif bazı B sayıları için eşitlik mevcuttur.

<u>ispat</u>: Geometrik eşitsizlik birkaç yolla türetilebilir. Verilecek olan ispat eksponansiyel fonksiyonun konveks olduğu esasına dayalıdır. Şuhalde, x ve z keyfi reel sayılar (z<x) olmak üzere,

$$e^z + (x-z)\,e^z \le e^x$$

yazılabilir. Çünkü üstel fonksiyonun gösterdiği eğriye z 'de teğet olan doğru kesinlikle o eğrinin altındadır. Bununla beraber eşitsizlik ancak z=x olduğunda eşitlik haline dönüşecektir. $y = e^z$ alarak, her x ve her pozitif y için

$$y + (x - \ln y)y \le e^x$$

sonucu çıkartılır. Burada $x = \ln y$ için eşitlik korunur. Böylece her $x = (x_1, \ldots, x_N)$ vektörü ve her $y = (y_1, \ldots, y_N)$ pozitif vektörü için;

$$\sum_{i=1}^{N} y_i + \sum_{i=1}^{N}(x_i - \ln y_i)y_i \le \sum_{i=1}^{N} e^{x_i}$$

olup, $x_i = \ln y_i$ i=1(1)N eşitlik koşuludur. Keyfi fakat pozitif δ sabit vektörü seçerek, keyfi x ve pozitif θ için;

$$\sum_{i=1}^{N}\theta\delta_i + \sum_{i=1}^{N}[x_i - \ln(\theta\delta_i)]\theta\delta_i \le \sum_{i=1}^{N} e^{x_i} \qquad (2.2.1)$$

sonucuna ulaşılır. Bununla beraber eşitsizlik ancak ve ancak

$$x_i = \ln\delta_i + \ln\theta \quad ; \; i=1(1)N \qquad (2.2.2)$$

için geçerli olur.(2.2.1) eşitsizliğinin sol tarafı düzenlenerek,

$$f(\theta) \le \sum_{i=1}^{N} e^{x_i} \qquad (2.2.3)$$

elde edilir ki, burada

$$f(\theta) = \left[\sum_{i=1}^{N} \delta_i (1 + x_i - \ln\delta_i) \right] \theta - \left[\sum_{i=1}^{N} \delta_i \right] \theta \ln\theta \qquad (2.2.4)$$

ve $\theta > 0$ 'dır. (2.2.4) ifadesinin türevi alınarak,

$$f'(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \delta_i (x_i - \ln\delta_i) - \left(\sum_{i=1}^{N} \delta_i \right) \ln\theta \qquad (2.2.5)$$

ve

$$f''(\theta) = -\sum_{i=1}^{N} \delta_i / \theta \qquad (2.2.6)$$

elde edilir.

(2.2.6) 'dan $\theta>0$ için $f(\theta)$ 'nın kesin konkav olduğu söylenebilir.

Çünkü, $\sum_{i=1}^{N} \delta_i$ toplamı pozitiftir. Şuhalde (2.2.5) 'in sonucu olarak, $f(\theta)$ tekil maksimum θ' noktasına sahiptir ve

$$\ln \theta' = \left[\sum_{i=1}^{N} \delta_i (x_i - \ln\delta_i) \right] / \left[\sum_{i=1}^{N} \delta_i \right] \qquad (2.2.7)$$

ile verilir. θ' 'nün değerini (2.2.4) 'de yerine yazıp, (2.2.3) eşitsizliğini kullanarak, logaritmik fonksiyon monoton artan olduğu için;

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \delta_i \right) \theta' \le \sum_{i=1}^{N} e^{x_i}$$

veya

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{N} \delta_i\right) + \ln \theta' \le \ln\left(\sum_{i=1}^{N} e^{x_i}\right)$$

elde edilir. O zaman keyfi x ve pozitif δ için (2.2.7) 'den

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \delta_i \le \left(\sum_{i=1}^{N} \delta_i\right) \ln\left(\sum_{i=1}^{N} e^{x_i}\right) + \sum_{i=1}^{N} \delta_i \ln(\delta_i) - \left(\sum_{i=1}^{N} \delta_i\right) \ln\left(\sum_{i=1}^{N} \delta_i\right)$$

sonucuna ulaşılır. (2.2.2) ve (2.2.7) 'ye göre bu eşitsizlik ancak ve ancak,

$$x_i = \ln\delta_i + \left[\sum_{j=1}^{N} \delta_j (x_j - \ln\delta_j) \right] / \left[\sum_{j=1}^{N} \delta_j \right] \quad ; \quad i=1(1)N$$

veya bazı B pozitif sayıları için, eşiti olarak

$$x_i = \ln\delta_i - \ln B$$

şeklinde elde edilir. Bu, Lemma 2.1 'i δ'nın bütün bileşenleri pozitif olduğunda gerçekler. Eğer δ 'nın bütün bileşenleri sıfır ise,her iki taraf sıfır olacağı için eşitsizlik yine gerçeklenir.

Kalan durum, δ 'nın bazı bileşenlerinin pozitif ve bazılarınında sıfır olduğu durumdur. Genel yapıyı bozmadan $1 \le s \le N$ olmak üzere,

$$\delta_i > 0 \quad , \quad i=1(1)s$$

ve

$$\delta_i = 0 \quad , \quad i=s+1(1)N$$

olarak kabul edelim.Henüz ispatlandığı üzere,

$$\sum_{i=1}^{s} x_i\delta_i \le (\sum_{i=1}^{s} \delta_i) \ln(\sum_{i=1}^{s} e^{x_i}) + \sum_{i=1}^{s} \delta_i \ln(\delta_i) - (\sum_{i=1}^{s} \delta_i) \ln(\sum_{i=1}^{s} \delta_i)$$

veya (2.2.9) 'u kullanarak,

$$\sum_{i=1}^{N} x_i\delta_i \le (\sum_{i=1}^{N} \delta_i) \ln(\sum_{i=1}^{s} e^{x_i}) + \sum_{i=1}^{N} \delta_i \ln(\delta_i) - (\sum_{i=1}^{N} \delta_i) \ln(\sum_{i=1}^{N} \delta_i)$$

olduğu biliniyor. e^{x_i} , $i=s+1(1)N$ için pozitif olduğuna göre,

$$\sum_{i=1}^{N} x_i\delta_i < (\sum_{i=1}^{N} \delta_i) \ln(\sum_{i=1}^{N} e^{x_i}) + \sum_{i=1}^{N} \delta_i \ln(\delta_i) - (\sum_{i=1}^{N} \delta_i) \ln(\sum_{i=1}^{N} \delta_i)$$

sonucu yazılabilir, çünkü logaritmik fonksiyon monoton artandır. Şuhalde geometrik eşitsizlik δ 'nın bazı bileşenleri pozitif ve sıfır olduğunda da kesin bir eşitsizliktir.

$i=1(1)N$ için

$$\delta_i = Be^{x_i}$$

şeklindeki B sayısı mevcut olmadığı için Lemma 2.1 'in ispatı tamamlanmış olur.

Geometrik eşitsizliğin en genel hali için verilen bu ispatı kullanarak bazı özel halleri de ifade edebiliriz. δ 'nın bütün bileşenleri pozitif ve

$$\sum_{i=1}^{N} \delta_i = 1 \tag{2.2.10}$$

normalite koşulunu sağlasın.
Bu koşul altında geometrik eşitsizlik,

$$\sum_{i=1}^{N} \delta_i (x_i - \ln\delta_i) \leq \ln(\sum_{i=1}^{N} e^{x_i}) \tag{2.2.11}$$

şeklini alır.

x keyfi ve δ_i pozitif olduğu için,

$$x_i = \ln(\delta_i T_i) \quad ; \quad i=1(1)N \tag{2.2.12}$$

olarak seçebiliriz. Burada T_i 'ler sabit ancak keyfi sayılardır.
Ozaman (2.2.11) eşitsizliğinden ;

$$\sum_{i=1}^{N} \delta_i \ln T_i \leq \ln(\delta_i T_i) \tag{2.2.13}$$

sonucu çıkar. (2.2.12) 'ye ve Lemma 2.1 'in ikinci sonucuna göre bu eşitsizlik yanlız ve ancak,

$$\delta_i = B\delta_i T_i \quad ; \quad i=1(1)N \tag{2.2.14}$$

şeklindeki bazı pozitif B sayıları mevcut ise bir eşitlik olabilecektir.
Eksponansiyel fonksiyon monoton artan olduğundan (2.2.13) 'den hareketle,

$$\prod_{i=1}^{N} T_i^{\delta_i} \leq \sum_{i=1}^{N} \delta_i T_i \tag{2.2.15}$$

olduğu yazılabilir. Bu gösterim pozitif T_i ve

$$\sum_{i=1}^{N} \delta_i = 1 \tag{2.2.16}$$

normalite koşulunu sağlayan pozitif δ_i 'ler için yapılmıştır.
(2.2.14) koşulunun bir sonucu olarak, (2.2.15) eşitsizliği yanlız ve ancak

$$T_i = T \quad ; \quad i=1(1)N \tag{2.2.17}$$

şeklinde bir pozitif T sayısı mevcut ise eşitlik olabilecektir.

(2.2.15) eşitsizliğinin sol tarafı pozitif T_i i=1(1)N sayılarına ait **ağırlıklı geometrik ortalama** adını alır. Burada ağırlıklar normalleştirilmiş pozitif δ_i i=1(1)N sayılarıdır.

(2.2.15) eşitsizliğinin sağ tarafı ise normalleştirilmiş aynı pozitif δ_i ağılıkları ile aynı T_i sayılarının **ağırlıklı aritmetik ortalaması** olarak ifade edilir. Şuhalde pozitif T_i sayılarının ağırlıklı geometrik ortalamasının, ağırlıklı aritmetik ortalamaya eşit olması için ancak ve ancak her T_i 'nin biribirine eşit olması gerekecektir.

Yine Lemma 2.1 'deki geometrik eşitsizliği şu uygun dönüşümlerle yeni bir formda yazabiliriz: $\mu_i > 0$ i=1(1)N olmak üzere, $\sum_{i=1}^{N}\mu_i = \mu$ olsun . $\delta_i = \mu_i/\mu$ olarak seçelim.

$x_i > 0$, $\delta_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^{N}\delta_i = 1$ olmak üzere (2.2.15) bağıntısından,

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \geq \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i} \tag{2.2.18}$$

olduğu göz önüne alınırsa;

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \geq \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i}{\mu_i/\mu}\right)^{\mu_i/\mu} = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i}{\mu_i}\right)^{\mu_i/\mu} \mu^{\mu_i/\mu}$$

$$= \mu^{\sum_{i=1}^{N}\mu_i/\mu} \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i}{\mu_i}\right)^{\mu_i/\mu}$$

$$= \mu \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i}{\mu_i}\right)^{\mu_i/\mu}$$

$$\rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^{\mu} \geq \mu^{\mu} \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i}{\mu_i}\right)^{\mu_i}$$

olur ve buradan;

$$\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^{\sum_{i=1}^{N}\mu_i} \geq \left[\prod_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i}{\mu_i}\right)^{\mu_i}\right] \left(\sum_{i=1}^{N} \mu_i\right)^{\sum_{i=1}^{N}\mu_i} \tag{2.2.19}$$

şeklinde de yazılabilir.

II.3. Primal ve Dual Problemler

Daha önce de ifade edildiği gibi geometrik programlama problemi şu yapıdaki özel bir nonlineer programlama problemidir.
Amaç fonksiyon;

$$minimum \quad g_0(x) = \sum_{j=1}^{T_0} c_{0j} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{0ij}} \tag{2.3.1}$$

kısıtlar;

$$g_k(x) = \sum_{j=1}^{T_k} c_{kj} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{kij}} \le 1 \quad ; \quad k=1(1)m \tag{2.3.2}$$

Bununla beraber, problemdeki değişkenlerin kesin pozitifliği yani $i=1(1)N$ için $x_i > 0$ koşulu mevcuttur. Bu problem Bölüm I'de verilen problem ile σ_{kj} katsayıları 1 seçilmek üzere aynıdır. Bu durumda tüm

$$\sum_{j=1}^{T_k} c_{kj} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{kij}} \quad ; \quad k=1(1)m \tag{2.3.3}$$

ifadeleri birer posinomal (pozitif polinomal) olacaktır. Bu tür problemleri, üstten 1 ile sınırlı posinomallerden oluşan kısıtlar kümesi altındaki bir posinomalin minimizasyonu şeklinde göz önüne alabiliriz. Bu yapıdaki problemler üzerine yapılmış çalışmalar, esas olarak mühendislik dizaynındaki uygulamalardan ortaya çıkmıştır. Değişkenlerin kesin pozitif olmaları zorunluluğu, problemlerin fiziksel yapılarının sonucu olduğu için doğaldır.

Geometrik programlama da esas teorik materyal (2.3.1) ve (2.3.2) bağıntılarının ifade ettikleri problemin dualidir. Dual problem şu şekilde yazılır:
Amaç fonksiyon;

$$\max_{\delta} \quad v(\delta) = \prod_{k=0}^{m} \prod_{j=1}^{T_k} \left(\frac{c_{kj}}{\delta_{kj}}\right)^{\delta_{kj}} \left[\prod_{k=1}^{m} (\lambda_k)^{\lambda_k} \right] \tag{2.3.4}$$

Kısıtlar;

$$\sum_{j=1}^{T_0} \delta_{0j} = 1 \quad (\textit{Normalite Koşulu}) \tag{2.3.5}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{T_k} a_{kij}\delta_{kj} = 0 \quad ; \; i=1(1)n \quad (\textit{Ortagonalite Koşulu}) \tag{2.3.6}$$

$$\delta_{kj} \ge 0 \quad ; \quad j=1(1)T_k \quad k=0(1)m \tag{2.3.7}$$

olup, burada λ'lar δ değişkenlerine bağlı olarak

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^{T_k} \delta_{kj} \quad ; \; k=1(1)m \tag{2.3.8}$$

şeklinde tanımlanır.

Dual problemin, primal problemden elde edilişi hakkında kısa bir açıklama verelim. $v(\delta)$ dual fonksiyonundaki c_{kj} faktörleri $g_k(x)$,k=1(1)m posinomallerinin katsayılarıdır. δ_{kj}'nin primal problemde j'inci

$$c_{kj}x_1^{a_{k1j}} \ldots x_n^{a_{knj}}$$

terim ile ifade edildiğini söyleyebiliriz, dolayısıyla $g_k(x)$ k=0(1)m 'in her terimi; $\delta_1, \ldots, \delta_n$ dual değişkenlerinin bir ve yalnız bir tanesiyle ifade edilir.Her $v(\delta)$'nın her$(\lambda_k)^{\lambda_k}$ faktörü $g_k(x) \leq 1$ kısıtından gelir. Normalite koşulu λ_0 'ı bir yaptığı için primal fonksiyondan bu tip faktörler ortaya çıkmaz.Normalite koşulu dual problemin, primal $g_0(x)$ fonksiyonu ve kısıtlarındaki $g_k(x)$,k=1(1)m posinomalleri arasındaki ayıracı olan tek kısmıdır. Son olarak ortagonalite koşulundaki a_{ij} katsayı matrisi primal problemin kuvvet matrisidir.

II.4. Primal _ Dual Bağıntısı

Primal veya dual bir problemi, kısıtlarını sağlayan en az bir nokta mevcut ise tutarlı (uygun) olarak adlandırabiliriz. Yine primal problemi pozitif bileşenli ve

$$g_k(x^*) < 1 \quad ; \; k=1(1)m \tag{2.4.1}$$

özelliğine sahip en az bir x^* vektörü mevcut ise kesin tutarlı olarak adlandıralım.

Şimdi, geometrik programlamada dualite için ilk ve formülasyonu için temel sayılabilecek teoremleri ifade edelim.

<u>Teorem 2.2.</u> Primal problemi kesin tutarlı kabul edelim ve böylece $g_0(x)$ primal fonksiyon, primal kısıtları sağlayan en az bir noktada kısıtlanmış minimum değerine ulaşır. Ozaman,

(i) Bu probleme karşılık gelen dual problem tutarlıdır ve $v(\delta)$ dual fonksiyon,dual kısıtlarını sağlayan noktada kısıtlandırılmış maksimum değerine ulaşır.

(ii) Dual fonksiyonun kısıtlandırılmış maksimum değeri, primal fonksiyonun kısıtlandırılmış minimum değerine eşittir.

(iii) Eğer x' primal problem için minimizasyon noktası ise;

$$L(x,\mu) = g_0(t) + \sum_{k=1}^{m} \mu_k [g_k(t)-1] \tag{2.4.2}$$

Lagrange fonksiyonu için, $x_i>0$ ve $\mu_k \geq 0$ keyfi değişkenlerine ait

$$L(x',\mu) \leq g_0(x') = L(x',\mu') \leq L(x,\mu') \tag{2.4.3}$$

özelliğine sahip olmak üzere μ_k' ; $k=1(1)m$ şeklinde nonnegatif lagrange çarpanları mevcuttur. Bununla beraber $x=x'$ ve $\mu=\mu'$ olmak üzere; bileşenleri,

$$\delta_{0j}' = \frac{C_{0j} x_1^{a_{01j}} \ldots x_n^{a_{0nj}}}{g_0(x)}$$

$$\delta_{kj}' = \mu_k \frac{C_{kj} x_1^{a_{k1j}} \ldots x_n^{a_{knj}}}{g_0(x)} \; ; \; j=1(1)T_k \tag{2.4.4}$$

şeklinde olan dual probleme ait bir δ' maksimizasyon vektörü mevcuttur. Ayrıca

$$\lambda_k(\delta') = \frac{\mu_k'}{g_0(x')} \; ; \; k=1(1)m \tag{2.4.5}$$

şeklindedir.

(iv) Eğer δ', dual problem için bir maksimizasyon noktası ise primal problem için her x' minimizasyon noktası aşağıdaki denklem sistemini sağlar:

$$c_{kj} x_1^{a_{k1j}} \ldots x_n^{a_{knj}} = \begin{cases} \delta_j' v(\delta') & ; j \in T_0 \\ \dfrac{\delta_j'}{\lambda_k(\delta')} & ; j \in T_k \end{cases} \tag{2.4.6}$$

Burada k, $\lambda_k(\delta')>0$ için bütün pozitif tamsayılar üzerinde sınırlı olup, (2.4.4) bağıntısı uygun μ_k' $k=1(1)m$ lagrange çarpanları ve minimal x' vektörlerinden, δ' vektörünün maksimizasyonunu elde etmek için bir formül verir. Diğer yandan (2.4.6) bağıntısı ise δ' maksimal vektöründen x' minimal vektörünün elde edilmesi için bir metod oluşturur. (2.4.6) bağıntısının her iki tarafının logaritması alınarak $\log x_i$ $i=1(1)n$ değişkenleri için lineer denklem sistemi şekline getirilebilir. Böylece x' değişkenlerinin minimum değerleri δ' 'nün maksimum değerinden elde edilebilir. Son olarak (2.4.5) 'de $\lambda_k(\delta')$ sayıları sabit faktörler olmakla birlikte primal problem için lagrange çarpanlarıdır.

Geometrik programlama için birinci dualite teoreminin ilk hipotezi; primal kısıtları sağlayan bir noktanın, $g_0(x)$ primal fonksiyonunu kendi minimumuna taşıdığını ifade etmesidir. Şimdi verilecek ve dualite için ikinci temel teorem sayılabilecek olan teorem, bu hipotez için yeterlilik koşulunu sağlayarak birinci teoremi tamamlar.

Teorem 2.3. Primal problem tutarlı ve dual problemin kısıtlarını sağlayan δ^* noktası mevcut ise $g_0(x)$ primal fonksiyonu, primal kısıtlarını sağlayan x' noktasında minimum değerine ulaşır.

Bu iki teorem için ispatlar, primal ve dual problemler arasındaki bazı bağıntılar ifade edildikten sonra verilecektir.

Dual problemde değişken sayısı, değişkenleri primal problemin terimlerine karşılık geldiğine göre, T olup;

$$T = \sum_{k=0}^{m} T_k$$

şeklindedir. Normalite koşulu ve ortagonalite koşulları n+1 tane lineer eşitsizlik kısıtını verir. Değişkenlerin eliminasyonundan dual problem, $d = T-(n+1)$ boyutlu alt uzayda kısıtsız olarak göz önüne alınabilir. Bu d değeri, geometrik programlama problemi için zorluk derecesi olarak adlandırılır. Dual problemin tanımını yaparken yazılmış olan amaç fonksiyon, ne konveks nede konkavdır. Çünki bir nonnegatif fonksiyondur. Buna ek olarak maksimizasyonu logaritmasının maksimizasyonu ile eşittir. Yani,

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{T_k} \delta_{kj}\log\left(\frac{C_{kj}}{\delta_{kj}}\right) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \log\lambda_k \qquad (2.4.7)$$

ifadesi ele alınabilir. δ için bu ifadenin konkav olduğu ileride ispatlanmıştır. (2.3.4) ve (2.3.8) arasında verilen dual program bir konveks programlama problemidir ve herhangi yöresel minimum noktası, aynı zamanda bütünsel minimumu olacaktır.

Lemma 2.1 ile verilmiş olan geometrik eşitsizlik, geometrik programlamada primal_dual fonksiyonlar arasındaki şimdi bir lemma ile verilecek olan en temel bağıntıyı ispatlayabilmek için gereklidir.

Lemma 2.4. x, primal problemin kısıtlarını ve δ, dual problemin kısıtlarını sağlasınlar. Ozaman

$$g_0(x) \geq v(\delta) \qquad (2.4.8)$$

olur.

Bununla beraber, aynı koşullar altında yanlız ve ancak,

$$\delta_{0j} = c_{0j} \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{a_{0ij}}}{g_0(x)} \quad ; \quad j=1(1)T_0$$

$$\delta_{kj} = \lambda_k c_{kj} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{kij}} \quad ; \quad j=1(1)T_k \, , \; k=1(1)m \qquad (2.4.9)$$

şeklinde iseler,

$$g_0(x) = v(\delta) \qquad \text{olur.}$$

İspat:

$$g_k(x) = \sum_{j=0}^{T_k} c_{kj} u_j(x)$$

şeklindeki posinomal $g_k(x)$'in her $u_j(x)$ terimi pozitif olduğundan,

$$t_j = \log u_j(x) \quad , \; j=1(1)T_k \qquad (2.4.10)$$

olarak tanımlayabiliriz ve ozaman geometrik eşitsizlikten;

$$\{\sum_{T_k} \delta_{kj}\} \log g_k(x) \geq \sum_{T_k} \delta_{kj} \{\log u_j(t) - \log \delta_{kj}\} + \{\sum_{T_k} \delta_{kj}\} \log\{\sum_{T_k} \delta_{kj}\}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin,

$$\lambda_k(\delta) = \sum_{T_k} \delta_{kj}$$

olmak üzere, Lemma 2.1 'in bir sonucu olarak elde edilen (2.2.19) bağıntısı ile

$$g_k(x)^{\lambda_k(\delta)} \geq \Big[\prod_{T_k} \Big(\frac{u_j(x)}{\delta_{kj}}\Big)^{\delta_{kj}} \Big] \lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)} \quad ; \quad k=1(1)m \qquad (2.4.11)$$

şekline getirildiğinde, benzeştiği görülebilir. Aslında δ değeri

$$\lambda_0(\delta) = \sum_{T_k} \delta_{0j} = 1$$

normalite koşulunu sağlayacağı için,

$$g_0(x) \geq \prod_{T_0} \Big[\frac{u_j(x)}{\delta_{kj}} \Big]^{\delta_{kj}} \qquad (2.4.12)$$

olur. Aynı zamanda (2.3.11) eşitsizliğinin bir sonucudur.

Yani,

$$1 \ge g_k(x)^{\lambda_k(\delta)} \ge \left[\prod_{T_k} \left(\frac{u_j(x)}{\delta_{kj}}\right)^{\delta_{kj}}\right] \lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)} \quad ; \quad k=1(1)m \qquad (2.4.13)$$

olacaktır. Çünkü x, zorlayıcı olan $1 \ge g_k(x)$,k=1(1)m kısıtını sağlar. (2.4.12) eşitsizliğinde çarpma ve (2.4.13) eşitsizliğinin gösterdiği sonuçlardan,

$$g_0(x) \ge \left[\prod_{k=1}^{m} \left(\frac{u_j(x)}{\delta_{kj}}\right)^{\delta_{kj}}\right] \prod_{k=1}^{m} \lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)} \qquad (2.4.14)$$

bağıntısına ulaşılır. $u_j(x)$ primal problemin j inci terimi olduğu için,

$$\left(\frac{u_j(x)}{\delta_{kj}}\right)^{\delta_{kj}} = \left(\frac{C_{kj}}{\delta_{kj}}\right)^{\delta_{kj}} x_1^{a_{k1j}\delta_{kj}} \ldots x_n^{a_{knj}\delta_{kj}}$$

elde edilir. Bu ifadeyi (2.4.14) 'de yerine yazarak,

$$g_0(x) \ge v(\delta)\, x_1^{\sum_{k=1}^{m} a_{k10}\delta_{k0}} \ldots x_n^{\sum_{k=1}^{m} a_{kn0}\delta_{k0}}$$

olur ki, δ

$$\sum_{k=1}^{m} a_{kij}\delta_{kj} = 0 \quad ; \quad i=1(1)n$$

ortagonalite koşulunu sağladığı için,

$$g_0(x) \ge v(\delta)$$

bağıntısını ifade etmektedir. Bu sonuç Lemma'nın birinci kısmını ispatlar.

Şimdi, x ve δ sırasıyla primal ve dual problemleri sağlamak üzere $g_0(x) = v(\delta)$ kabul edelim. Ozaman (2.4.13) bağıntısındaki bütün eşitsizlikler ve (2.4.14) eşitsizliği birer eşitlik olur. Böylece,

$$g_k(x)^{\lambda_k(\delta)} = 1 \quad ; \quad k=1(1)m \qquad (2.4.15)$$

olur ve Lemma 2.1 'in ikinci sonucu olarak,

$$\delta_j = B_k\, u_j(x) \quad ; \quad j \in T_k \;,\; k=1(1)m \qquad (2.4.16)$$

şeklinde B_k ,k=1(1)m nonnegatif sayıları vardır.

(2.4.16) 'da T_k üzerinden toplam alındığında,

$$\lambda_k(\delta) = B_k\, g_k(x) \quad ; \; k=0(1)m \tag{2.4.17}$$

eşitliği elde edilir ve böylece,

$$B_0 = \frac{1}{g_0(x)} \tag{2.4.18}$$

olur, çünkü $\lambda_0(\delta) = 1$ 'dir.

(2.4.16) ve (2.4.18) eşitlikleri (2.4.9) bağıntısının bir kısmının sağlandığını gösterir. Eğer, $B_k=0$ ise (2.4.7)'den $\lambda_k(\delta)=0$ olur ki, bu ise $k=1(1)m$ için $\delta_k = 0$ anlamındadır. Dolayısıyla (2.4.9) bağıntısının $g_0(x) = v(\delta)$ olduğu durumda sağlandığı görülmüş olur.

Primal dual kısıtlara ek olarak x ve δ 'nın (2.4.9) bağıntısını da sağladıklarını kabul edelim. Ohalde Lemma 2.1'in ikinci sonucu (2.4.12) eşitsizliğinin bir eşitlik olacağını ifade eder. Buna ek olarak (2.4.13)'deki her eşitsizlik birer eşitliktir. $\lambda_k(\delta)=0$ ise $k\in T_k$ için $\delta_k=0$ olup, dolayısıyla (2.4.13)'deki her iki eşitsizlik gerçekte eşitliktir. Kalan durum $\lambda_k(\delta)$ 'nın pozitif olması halidir. Ozaman (2.4.9) bağıntısı $g_k(x)=1$ olduğunu gösterir. Bu ifade ve Lemma 2.1 'in ikinci sonucu (2.4.13)'deki her iki eşitsizliğin de birer eşitlik olduğunu ortaya koyar. Böylece (2.4.12) eşitsizliği ve (2.4.13)'deki tüm eşitsizlikler birer eşitliğe dönüşecektir, dolayısıyla $g_0(x) = v(\delta)$ 'dır. Şuhalde geometrik programlamanın temelini oluşturan esas teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Bu şekilde tamamlanmış olan teorem, $g_0(x)$ primal fonksiyonunun kesin minimum değerinin, $v(\delta)$ dual fonksiyonun kesin maksimum değerinden daha büyük ve eşit olduğunu ispatlar. Bu değerlerin eşitliğini gösterebilmek için (2.4.9) bağıntısını ve primal-dual kısıtlarını sağlayan sırasıyla x ve δ vektörlerinin varlığı gösterilmelidir. Bu amaçla, geometrik programlamada dualite için birinci ve ikinci sayılabilecek olan ve daha önce ifade ettiğimiz Teorem 2.2 ve Teorem 2.3 'ün ispatları yapılsın.

Teorem 2.2. için ispat: Birinci dereceden kuvvet argümanına sahip eksponansiyel fonksiyonun ve tüm lineer fonksiyonların konveks olduğu söylenebilir.

$$g(x) = \sum_j c_j\, x_1^{a_{1j}} \ldots x_n^{a_{nj}} = \sum_j c_j p(x_i)$$

posinomalinde $x_i=e^{z_i}$,$i=1(1)n$ dönüşümü yapılsın. Dönüştürülmüş fonksiyon c_j 'ler pozitif olmak üzere,

$$g(z) = \sum_j c_j\, e^{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} z_i}$$

şeklinde olup, pozitif eksponansiyel bir fonksiyondur. x_i'ler tüm pozitif reel sayılar üzerinde değer aldığı için, z_i 'ler tüm reel sayılar üzerinde değerlidir.Buna göre primal problem için kurulan dönüştürülmüş program şu şekilde ifade edilebilir:

Pozitif bir $g_0(z)$ fonksiyonunun $g_1(z)\le 1, \ldots ,g_m(z)\le 1$ kısıtları altındaki minimum değerinin belirlenmesi problemi olacaktır.Burada

$$g_k(z) = \sum_{j\in T_k} c_{kj} e^{\sum_{i=1}^{n} a_{kij} z_i} \qquad ; \; k=0(1)m$$

olup, a_{kij}'ler keyfi reel sayılar ve c_{kj} 'ler pozitif reel sayılardır. Bu açıklamanın ışığı altında

$$P(z) = e^{\sum_{i=1}^{n} a_{kij} z_i}$$

dönüşüm fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon için oluşturulan $\nabla^2 P(z)$ Hessian matrisi yarı pozitif tanımlıdır. Ohalde, Teorem 1.8'e göre P(z) 'in konveks olduğu söylenebilir. c_{kj} 'ler pozitif olarak göz önüne alındığına göre, bu tip konveks fonksiyonların pozitif bir lineer kombinasyonu olan

$$g(z) = \sum_{j=1}^{T_k} c_{kj} e^{\sum_{i=1}^{n} a_{kij} z_i}$$

dönüştürülmüş primal fonksiyon da konveks olur. Bu bize dönüştürülmüş problem için Kuhn-Tucker koşullarını uygulayabilme olanağını verir.

Primal problem kesin tutarlı ve $g_0(x)$ primal amaç fonksiyonu kısıtlarını sağlayan x' minimizasyon noktasına sahip olsun. Ozaman dönüştürülmüş primal program kesin tutarlıdır ve $g_0(x)$ primal amaç fonksiyonunun öyle bir z' minimum noktası mevcuttur ki, burada;

$$z_i' = \log x_i' \qquad ; \; i=1(1)n \qquad (2.4.19)$$
$$g_k(z') \le 1 \qquad ; \; k=1(1)m \qquad (2.4.20)$$

şeklindedir. Şuhalde,

$$G_k(z) \equiv \begin{cases} g_k(z) & ; \; k=0 \\ g_k(z)-1 & ; \; k=1(1)m \end{cases} \qquad (2.4.21)$$

olarak alıp, Kuhn-Tucker teoremini uygulayarak,

$$L(z,\mu) = g_0(z) + \sum_{k=1}^{m} \mu_k \, [g_k(z)-1] \qquad (2.4.22)$$

lagrange fonksiyonuna ait z ve $\mu_k \geq 0$ değişkenleri için

$$L(z',\mu) \leq g_0(z') = L(z',\mu') \leq L(z,\mu') \qquad (2.4.23)$$

özelliğine sahip μ_k' ,k=1(1)m nonnegatif lagrange çarpanlarının varlığını söyleyebiliriz. Böylece z' , L(z,μ') için bir kısıtsız minimum noktadır; dolayısıyla,

$$\frac{\partial L}{\partial z_q}(z', \mu') = 0 \quad ; \quad q=1(1)n$$

$$\sum_{T_0} a_{0qj} c_{0j} e^{\sum_{i=1}^{n} a_{0ij} z_i'} + \sum_{k=1}^{m} \mu_k' \left(\sum_{T_k} a_{kqj} c_{kj} e^{\sum_{i=1}^{n} a_{kij} z_i'}\right) = 0 \quad ; \quad q=1(1)n \qquad (2.4.24)$$

anlamındadır. Bunları $g_0(z')$ ile bölerek,

$$\delta_{kj}' = \begin{cases} \dfrac{c_{0j} e^{\sum_{i=1}^{n} a_{0ij} z_i}}{g_0(z')} & ; \; j \in T_0 \\[2ex] \dfrac{\mu_k' c_{kj} e^{\sum_{i=1}^{n} a_{kij} z_i'}}{g_0(z')} & ; \; j \in T_k, \; k=1(1)m \end{cases} \qquad (2.4.25)$$

bileşenli δ' vektörünün, dual problemin ortagonalite koşulunu sağladığı görülür. Ayrıca $\mu_k' \geq 0$ olduğundan δ' pozitiflik koşulunu sağlar. Dolayısıyla dual problem tutarlıdır. (2.4.25) bağıntısını kullanarak,

$$\lambda_k(\delta') = \frac{\mu_k' g_k(z')}{g_0(z')} \quad ; \quad k=1(1)m$$

bulunur. (2.4.24) bağıntısının eşitlik kısmından

$$\mu_k' \; [\; g_k(z')-1 \;] = 0$$

olur ki, bu yüzden $\lambda_k(\delta') = \mu_k' / g_0(z')$; k=1(1)m olacaktır.

Dolayısıyla (2.4.25) bağıntısı,

$$\delta'_{kj} = \begin{cases} \dfrac{c_{0j} e^{\sum_{i=1}^{n} a_{0ij} z'_i}}{g_0(z')} & ; j \in T_0 \\ \lambda_k(\delta) c_{kj} e^{\sum_{i=1}^{n} a_{kij} z'_i} & ; j \in T_k \, , \; k=1(1)m \end{cases} \tag{2.4.26}$$

olarak yazılabilir.

(2.4.26) bağıntısını x' 'ye bağlı olarak yazmak için (2.4.19) kullanıldıktan sonra Lemma 2.4 'ün ikinci sonucundan

$$g_0(x') = v(\delta')$$

olduğunu belirtebiliriz. Böylece geometrik programlamanın birinci dualite teoreminin ilk üç adımı ispatlanmış olur. Kalan kısım için ispatı şu şekilde ifade edebiliriz.

x' ,primal problem için bir minimum nokta ve δ' ,dual problem için bir maksimum nokta olsunlar. İspatlandığı üzere $g_0(x')=v(\delta')$ olduğu bilinmektedir. Lemma 2.4 'ün ikinci sonucu kullanılarak x' ve δ' 'nün (2.4.9) bağıntısını sağladıkları gösterilebilir. Dolayısıyla bağıntı $\lambda_k(\delta)>0$ için k bütün tamsayılar üzerinde değerlendirilmek üzere,

$$c_{kj} x_1^{a_{k1j}} \ldots x_n^{a_{knj}} = \begin{cases} \delta_{0j} v(\delta) & ; j \in T_0 \\ \dfrac{\delta_{kj}}{\lambda_k(\delta)} & ; j \in T_k \end{cases}$$

şeklindedir. Böylece geometrik programlama için birinci dualite teoreminin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.3. için ispat : Kolaylığı açısından yine dönüştürülmüş primal problemi ele alalım. Bu yolla kuvvet matrisi (a_{ij}) için sütun uzayı düşünülebilecektir. Bu uzayın bileşenleri,

$$x_i = \sum_{j=1}^{T_k} a_{ij} z_i \quad ; \; i=1(1)n \, , \; k=1(1)m \tag{2.4.27}$$

formunda olan x vektörlerinden oluşur. x vektör değişkenine göre pozitif eksponansiyel $g_k(z)$ fonksiyonu,

$$g_k(z) = \sum_{T_k} e^{x_i} \tag{2.4.28}$$

şeklindedir.

Primal program ve dolayısıyla dönüştürülmüş primal program tutarlıdır ve M_A, g_0 için kısıtlandırılmış infumum olmak üzere,

$$g_k(z^q) \leq 1 \quad ; \; k=1(1)m \;,\; q=1,2,\; \ldots \qquad (2.4.29)$$

ve

$$\lim_{q\to\infty} g_0(z^q) = M_A \qquad (2.4.30)$$

özelliklerine sahip vektörler $(z^q)_{q=0}^{\infty}$ dizisi mevcuttur. (2.4.27) bağıntısı (a_{ij}) kuvvet matrisi için sütun uzayındaki vektörlerin artan bir $\{x^q\}_{q=0}^{\infty}$ dizisini verir. x^q 'nun her bileşeni q sonsuza yaklaştıkça üstten sınırlı olmalıdır. Aksi halde, (2.4.28) bağıntısı, (2.4.29) veya (2.4.30) ile çelişen en az bir $\{g_k(z^q)\}_{q=0}^{\infty}$ dizisinin üstten sınırlı olduğunu gösterir.

(2.4.27) bağıntısını kullanarak,

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i^* x_i^q = \sum_{j=1}^{T_k} \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_i^* a_{ij}\right) z^q = 0 \quad ; \; q=1,2,\ldots \qquad (2.4.31)$$

olduğu gözlemlenir, çünkü δ^* dual problemin ortagonalite koşullarını sağlar. x^q 'nun her bir bileşeni q 'nun sonsuza yaklaştığı oranda üstten sınırlı olacağı için (2.4.31) bağıntısı aracılığı ile bu bileşenlerin her biri alttan sınırlı olur. Çünkü δ_i^* ; i=1(1)n için pozitiftir. Buradan q 'nun sonsuza yaklaşması ile z^q 'da sınırlı olacaktır. Çünkü (a_{ij}) kuvvet matrisinin rangı n'dir. Dolayısıyla, $(z^q)_{q=0}^{\infty}$ dizisi z' limit noktasına sahiptir. Bu durumda (2.4.29) ve (2.4.30) bağıntılarının bir sonucu olarak ve $g_k(x)$ 'in sürekliliğinden,

$$g_k(z') \leq 1 \quad ; \; k=1(1)m$$

ve

$$g_0(z') = M_A$$

olacaktır. $x_i' = e^{z_i}$ alarak $g_0(x)$ primal fonksiyonun, primal kısıtları sağlayan x' noktasında kısıtlandırılmış minimum değerini aldığı sonucu çıkartılır. Böylece dualitenin ikinci teoremi için de ispat tamamlanmış olur.

<u>Lemma 2.5.</u> (**Log v 'nin Konkavlığının İspatı**): Dual fonksiyonun logaritması;

$$\log v(\delta) = \sum_{j=1}^{T_k} \delta_j(\log c_j - \log \delta_j) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(\delta) \log \lambda_k(\delta)$$

pozitif $\delta_j > 0$, $j=1(1)T_k$ için tanım bölgesinde konkavdır.

<u>ispat</u>: H, logv 'nin Hessian matrisi olsun. Elemanları

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 \log v}{\partial \delta_i \partial \delta_j} \quad ; \; i,j=1(1)T_k$$

şeklindedir. Elemanter hesaplamalar H 'ın parçalanarak;

$$H = \begin{bmatrix} H_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & H_m \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabileceğini göstermiştir. Burada,

$$H_0 = \begin{bmatrix} -\delta_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\delta_2^{-1} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & -\delta_{T_0}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$H_k = \begin{bmatrix} (\lambda_k^{-1}-\delta_{T_k}^{-1}) & \lambda_k^{-1} & \dots & \lambda_k^{-1} \\ \lambda_k^{-1} & (\lambda_k^{-1}-\delta_{T_{k+1}}^{-1}) & \dots & \lambda_k^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_k^{-1} & \lambda_k^{-1} & \dots & (\lambda_k^{-1}-\delta_{T_m}^{-1}) \end{bmatrix} \; ; \; k=1(1)m$$

şeklindedirler. H 'dan elde edilen kuadratik form,

$$Q(y) = \sum_k \sum_j y_k H_{kj} y_j$$

olup, açık olarak;

$$Q(y) = -\sum_{j=0}^{T_0} \frac{y_j^2}{\delta_j} + \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{\lambda_k^2(y)}{\lambda_k(\delta)} - \sum_{j=1}^{T_k} \frac{y_j^2}{\delta_j}\right] \qquad (2.4.32)$$

ifadesine indirgenebilir. Teorem 1.7 'den hareketle sadece Q(y) fonksiyonunun yarı negatif tanımlı olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Bunun için Cauchy eşitsizliğini kullanarak,

$$\left(\sum_{j\in T_k} y_j\right)^2 = \left(\sum_{j\in T_k} \frac{y_j}{\delta^{1/2}}\delta^{1/2}\right)^2 \le \left(\sum_{j\in T_k} \delta_j\right)\left(\sum_{j\in T_k} \frac{y_j^2}{\delta_j}\right)$$

olur ki,

$$\sum_{j\in T_k} \frac{y_j^2}{\delta_j} - \frac{\lambda_k^2(y)}{\lambda_k(y)} \ge 0$$

elde edilir. (2.4.32) 'den ve δ_j'lerin pozitifliklerinden, Q(y) ≤ 0 olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

B Ö L Ü M III

POSİNOMAL GEOMETRİK PROGRAMLAMA

III.1. Kısıtsız Problemler

Öncelikle herhangi bir kısıt bulunmaksızın, bir posinomal fonksiyonun minimizasyonunu geometrik programlama problemi olarak ele alalım. Burada yalnızca optimal $\overline{x}=(\overline{x}_1, \ldots ,\overline{x}_n)^T$ çözümünün pozitif bileşenli $(\overline{x}_i>0, i=1(1)n)$ olacağını kabul edelim. Problem,

$$P : \min_{x>0} \quad z = f(x) = \sum_{j=1}^{T} c_j p_j(x) = \sum_{j=1}^{T} c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}$$

şeklinde olacaktır. $\overline{x}$ 'yi minimum aldığımıza göre birinci mertebe koşulu Teorem 1.3 'den $\nabla f(\overline{x})=0$ olmalıdır. Yani,

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{T} c_j a_{ij} \overline{x}_1^{a_{1j}} \ldots \overline{x}_i^{a_{ij}-1} \ldots \overline{x}_n^{a_{nj}} = 0 \quad ; i=1(1)n$$

olur. $\overline{x}_i>0$ olduğundan yukarıdaki her eşitlik sırasıyla $\overline{x}_i$ ile çarpılıp

$$\sum_{j=1}^{T} c_j a_{ij} f_j(\overline{x}) = 0 \quad ; \quad i=1(1)n \tag{3.1.1}$$

elde edilir. $\overline{x}$ optimal noktası için nonlineer denklem sistemi çözmek yerine,

$$\overline{\lambda}_j = \frac{c_j p_j(\overline{x})}{\overline{z}} \quad ; \quad j=1(1)T$$

ağırlıklarını tanımlayalım. Burada, $\overline{z}$ optimal amaç fonksiyon değerini alsın. Yani,

$$\overline{z} = f(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{T} c_j p_j(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{T} c_j \prod_{i=1}^{n} \overline{x}_i^{a_{ij}}$$

olup; ayrıca c_j, $p_j(\overline{x})$ ve $\overline{z}$ pozitif olduklarından $\overline{\lambda}_j>0$, $j=1(1)T$ olacaktır. Ayrıca $\overline{\lambda}_j$'lerin tanımından $\overline{\lambda}_1+\overline{\lambda}_2+\ldots+\overline{\lambda}_T = 1$ olup, daha önce ifade edildiği üzere normalite koşuludur. (3.1.1) 'de elde edilmiş olan nonlineer n eşitsizliği $\overline{z}$ ile bölerek;

$$\frac{\sum_{j=1}^{T} c_j a_{ij} f_j(\overline{x})}{\overline{z}} = \sum_{j=1}^{T} a_{ij} \frac{c_j f_j(\overline{x})}{\overline{z}} = \sum_{j=1}^{T} a_{ij} \lambda_j = 0 \quad ; \quad i=1(1)n$$

elde edilir ki, ortagonalite koşuludur. Geometrik olarak $\overline{\lambda}_j$ vektörünün $a_{ij}=(a_{i1},\ldots,a_{iT})'$,i=1(1)n vektörleri ile ortagonal olduğunu ifade eder. Bu tanımlamalara göre,

$$z=(\overline{z})^{\sum_{j=1}^{T}\overline{\lambda}_j}=\prod_{j=1}^{T}(\overline{z})^{\overline{\lambda}_j}$$

$$=\prod_{j=1}^{T}\left(\frac{c_j p_j(\overline{x})}{\overline{\lambda}_j}\right)^{\overline{\lambda}_j}$$

$$=\prod_{j=1}^{T}\left(\frac{c_j}{\overline{\lambda}_j}\right)^{\overline{\lambda}_j}\prod_{j=1}^{T}(p_j(\overline{x}))^{\overline{\lambda}_j}$$

olur, ancak;

$$\prod_{j=1}^{T}(p_j(\overline{x}))^{\overline{\lambda}_j}=\prod_{j=1}^{T}\left(\prod_{i=1}^{n}\overline{x}_i^{\,a_{ij}}\right)^{\overline{\lambda}_j}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{T}\overline{x}_i^{\,a_{ij}\overline{\lambda}_j}\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(\overline{x}_i)^{\sum_{j=1}^{T}a_{ij}\overline{\lambda}_j}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(\overline{x}_i)^{0}=1$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\overline{z}=\prod_{j=1}^{T}\left(\frac{c_j}{\overline{\lambda}_j}\right)^{\overline{\lambda}_j}$$

bulunur. Bu ifade λ_j ağırlıklarının optimal olmaları mecburiyeti olmadanda korunur. Buradan hareketle şu lemmayı verebiliriz.

<u>Lemma 3.1.</u> $\lambda_j>0$,j=1(1)T değerleri normalite ve n ortagonalite koşulunu sağlayan pozitif ağırlıklar olsun. Ozaman,

$$z=\prod_{j=1}^{T}\left(\frac{c_j p_j}{\lambda_j}\right)^{\lambda_j}=\prod_{j=1}^{T}\left(\frac{c_j}{\lambda_j}\right)^{\lambda_j}$$

yazılabilecektir.

Tanım 3.1.

$$\prod_{j=1}^{T} \left(\frac{c_j p_j}{\lambda_j}\right)^{\lambda_j}$$ ifadesi predual fonksiyon ve

$$\prod_{j=1}^{T} \left(\frac{c_j}{\lambda_j}\right)^{\lambda_j}$$ ifadesi ise dual fonksiyon olarak adlandırılır.

Açıktır ki, $\bar{\lambda}_j$ optimal ağırlıkları biliniyorsa $\bar{z}$ optimal amaç fonksiyon değeri Lemma 3.1 kullanılarak hesaplanabilecektir. $\bar{\lambda}_j$ ve $\bar{z}$ optimal değerleri için $\bar{x}_i$ 'ler yine Lemma 3.1 'deki predual fonksiyon yardımı ile,

$$\bar{\lambda}_j \bar{z} = c_j p_j(\bar{x}) = c_j \prod_{i=1}^{n} \bar{x}_i^{a_{ij}} \quad ; \quad j=1(1)T$$

için

$$\log(\bar{\lambda}_j \bar{z}) = \log c_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \log \bar{x}_i \quad ; \quad j=1(1)T$$

şeklindeki lineer denklem sisteminin çözümünden hesaplanabilir.

$$z = f(x) = \sum_{j=1}^{T} c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}$$

amaç fonksiyonunu kullanarak λ_j , j=1(1)T pozitif ağırlıkları için herhangi bir küme seçerek, Lemma 2.1 'deki geometrik eşitsizliğin (2.2.15) sonucuna göre;

$$z = \sum_{j=1}^{T} c_j p_j = \sum_{j=1}^{T} \left(\frac{c_j p_j}{\lambda_j}\right) \lambda_j \geq \prod_{j=1}^{T} \left(\frac{c_j p_j}{\lambda_j}\right)^{\lambda_j} \qquad (3.1.2)$$

şeklinde yazılabilecektir. Eşitsizlik $\forall\, x_i>0$,i=1(1)n ve $\forall\, \lambda_j \geq 0$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_T = 1$ için gerçeklenir. Eğer $\bar{x}_i$ ve $\bar{\lambda}_j$ değerleri $\bar{z} = [c_j p_j(\bar{x})] / \bar{\lambda}_j$ olacak şekilde seçilirse, geometrik eşitsizlik tanımına uygun olarak, eşitlik durumunu sağlayacaktır.

<u>Lemma 3.2.</u> $\overline{x}$ ve $\overline{z}$, P probleminin optimal çözüm noktasını ifade etsin ve $\overline{\lambda}_j = [c_j p_j(\overline{x})] / \overline{z}$, j=1(1)T olsun. Ozaman normalite koşulunu sağlayan herhangi $\lambda_j > 0$,j=1(1)T kümesi için;

$$z \geq \prod_{j=1}^{T} \left(\frac{c_j p_j}{\lambda_j} \right)^{\lambda_j}$$

olacaktır. Belirtildiği gibi eşitlik durumu $z=\overline{z}$, $p_j = p_j(\overline{x})$ ve $\lambda_j = \overline{\lambda}_j$,j=1(1)T için mevcuttur.

$\overline{z}$ ve $\overline{x}$ optimal değerlerinin Lemma 3.2 'de kullanıldığı kabul edilirse,

$$\overline{z} \geq \prod_{j=1}^{T} \left(\frac{c_j p_j(\overline{x})}{\lambda_j} \right)^{\lambda_j}$$

olur.

Bu eşitsizlik λ_j ,j=1(1)T 'nin fonksiyonu olan sağ taraf ifadesinin üstten $\overline{z}$ ile sınırlı olduğunu gösterir. Bu uç değer ancak $\lambda_j = \overline{\lambda}_j$,j=1(1)T için sağlanır. $\overline{z}$ 'nin belirlenmesi için yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı maksimize edilir. Problem $p_j(\overline{x}) = \overline{p}_j$ bilinmeyen faktörlerini içermektedir. Bu açıklamaların ışığı altında aşağıdaki şekilde bir problem kurulabilir.

$$P_D \quad : \max_{\lambda} \quad z_d(\lambda) = \prod_{j=1}^{T} \left(\frac{c_j}{\lambda_j} \right)^{\lambda_j}$$

$$kısıtlar\ ; \quad \sum_{j=1}^{T} a_{ij}\lambda_j = 0 \quad ; \quad i=1(1)n$$

$$\sum_{j=1}^{T} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j > 0 \quad ; \quad j=1(1)T$$

Bu kısıtlı optimizasyon problemi λ_j dual değişkenleri ile dual problem olarak düzenlenecektir. Amaç fonksiyon $z_d(\lambda)$ Tanım 1.3 'deki dual fonksiyondur. Bütün kısıtlar lineerdir ve uygun çözümler kümesi konvekstir.

$\overline{z}$ için yine alt sınır ifadesi olan

$$\prod_{j=1}^{T} \left(\frac{c_j p_j(\overline{x})}{\lambda_j} \right)^{\lambda_j}$$

bağıntısının maksimizasyonu yerine yukarıdaki problemin göz önüne alınmasının sebebi, P_D 'nin kısıtları altında Lemma 3.1 'e göre değerlerinin eşit oluşudur. Bununla beraber dual problem için tek çözümün $\overline{\lambda}_j$,j=1(1)T olduğu gösterilebilir.

Lemma 3.3. P_D dual probleminin tek optimal çözümü $\overline{\lambda}_j = c_j p_j(\overline{x})/\overline{z}$ j=1(1)T ile verilir.

ispat : λ_j^* ,j=1(1)T optimal çözümünün elde edilmiş olduğunu varsayalım. Daha önceki incelememizden $\overline{\lambda}_j$,j=1(1)T 'nin bir optimum çözüm olduğu bilinmektedir. Lemma 3.1 'e uygun olarak,

$$\overline{z} = z_d(\lambda^*) = \prod_{j=1}^{T} \left(\frac{c_j}{\lambda_j^*} \right)^{\lambda_j^*} = \prod_{j=1}^{T} \left(\frac{c_j \overline{p}_j}{\lambda_j^*} \right)^{\lambda_j^*}$$

ve diğer yandan, geometrik eşitsizliğin (3.1.2) bağıntısından hareketle,

$$\overline{z} = \sum_{j=1}^{T} c_j \overline{p}_j = \sum_{j=1}^{T} \left(\frac{c_j \overline{p}_j}{\lambda_j^*} \right) \lambda_j^* \geq \prod_{j=1}^{T} \left(\frac{c_j \overline{p}_j}{\lambda_j^*} \right)^{\lambda_j^*}$$

olup, eşitlik yanlız ve ancak $c_j \overline{p}_j / \lambda_j^*$,j=1(1)T 'lerin tümü eşit olduğu durumda geçerli olacak ve genel değerlerinin $\overline{z}$ olması gerektiği görülebilecektir. Buradan,

$$\frac{c_j \overline{p}_j}{\lambda_j^*} = \overline{z} \quad ; \quad j=1(1)T \quad \text{veya} \quad \lambda_j^* = \frac{c_j \overline{p}_j}{\overline{z}} = \overline{\lambda}_j \quad ; \quad j=(1)1T$$

olduğu görülür.

$\overline{z}$ ve $\overline{\lambda}_j$,j=1(1)T değerleri hesaplandıktan sonra sayfa 34 'de ifade edildiği şekilde $\overline{x}_i$,i=1(1)n çözümleri aranabilir. Dual problemin şu andaki formunun çözümü yerine Lemma 2.5'da verildiği şekilde logaritmik formunun kullanılması tercih edilebilir. Bu dönüşüm tam anlamı ile monotondur ve konkavlığı yine lemma ile verilmiştir. Ohalde Teorem 2.2 'den haraketle dual problem için bütünsel maksimum, primal problem için bütünsel minimum ile aynı olacaktır. Dolayısıyle dualite farkı oluşmayacaktır. Genelde dual problemini çözmek primali çözmekten kolaydır. Ayrıca primal ve dual için uygun çözümler, optimal olmasalar bile optimal amaç fonksiyon değeri için üst ve alt sınırlar ürettiklerinden dolayı kullanışlıdırlar.

III.2. Kısıtlı Problemler

Temel oluşturması açısından yalnız tek bir posinomal kısıttan oluşan problem göz önüne alınsın. Ohalde problem,

$$P: \quad \min_{x} \quad z = \sum_{j=1}^{T} c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}$$

$$kısıt: \quad \sum_{j=1}^{s} d_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{b_{ij}} \leq 1$$

$$x_i > 0 \quad ; \quad i=1(1)n$$

olur. Amaç fonksiyonu

$f(x) = \sum_{j=1}^{T} c_j \, p_j(x)$ şeklinde ve kısıt için $q_j(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{b_{ij}}$

alarak,

$$g(x) = \sum_{j=1}^{s} d_j \, q_j(x)$$

şeklinde ele alalım.

(2.2.18) ile (2.2.19) bağınıları arasında ağırlıklar toplamının bir olmaması durumu için verilmiş olan ilişkilerin ışığı altında f(x) amaç fonksiyonu için $\lambda > 0$ toplamlı nonnegatif λ_j, j=1(1)T ($\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_T = \lambda$) ve g(x) kısıt fonksiyonu için $\mu > 0$ toplamlı yine nonnegatif μ_j, j=1(1)s ($\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_s = \mu$) ağırlıkları oluşturulsun. Ozaman,

$$[\, f(x) \,]^{\lambda} = (\sum_{j=1}^{T} c_j \, p_j)^{\lambda} \geq \lambda^{\lambda} \prod_{j=1}^{T} \left(\frac{c_j \, p_j}{\lambda_j} \right)^{\lambda_j}$$

$$1 \geq [\, g(x) \,]^{\mu} = (\sum_{j=1}^{s} d_j \, q_j)^{\mu} \geq \mu^{\mu} \prod_{j=1}^{s} \left(\frac{d_j \, q_j}{\mu_j} \right)^{\mu_j}$$

olur.

Bu eşitsizliklerin sol uçlarının çarpımı yine sağ uçlarının çarpımından büyük veya eşit olmalıdır, yani;

$$[\, f(x)\,]^{\lambda} \geq \lambda^{\lambda}\, \mu^{\mu} \left[\prod_{j=1}^{T} \left(\frac{c_j\, p_j}{\lambda_j} \right)^{\lambda_j} \right] \left[\prod_{j=1}^{s} \left(\frac{d_j\, q_j}{\mu_j} \right)^{\mu_j} \right]$$

olur. Bu bağıntıda λ_j ağırlıkları için normalite ve ortagonalite koşullarının sağlanması zorunludur, ancak μ_j ağırlıkları için sadece ortagonalite koşulu gerçeklenmelidir. Lemma 3.1 yeniden düzenlenerek μ_j ağırlıkları için normalite koşuluna ihtiyaç duyulmadığı gösterilebilir.

<u>Lemma 3.4.</u> P geometrik programlama probleminde incelenen eşitsizlikte normalite ve ortagonalite koşullarının sağlandığını kabul edelim: yani,

$$\sum_{j=1}^{T} \lambda_j = 1 \quad , \quad \sum_{j=1}^{T} a_{ij}\lambda_j = 0 \quad , \quad \sum_{j=1}^{s} b_{ij}\mu_j = 0 \quad ; \; i=1(1)n$$

olsun. Ozaman,

$$f(x) \geq \mu^{\mu} \left[\prod_{j=1}^{T} \left(\frac{c_j}{\lambda_j} \right)^{\lambda_j} \right] \left[\prod_{j=1}^{s} \left(\frac{d_j}{\mu_j} \right)^{\mu_j} \right]$$

ifadesi herhangi uygun x için geçerlidir. Düzenlenirse,

$$f(x) \geq \left[\prod_{j=1}^{T} \left(\frac{c_j}{\lambda_j} \right)^{\lambda_j} \right] \left[\prod_{j=1}^{s} \left(\frac{d_j\, \mu}{\mu_j} \right)^{\mu_j} \right]$$

olarak yazılabilir. Tüm sağ tarafta yeniden düzenleme yapılırsa şu sonuç elde edilir.

<u>Sonuç 3.5.</u> Lemma 3.4'ün 2n sayıdaki denklemli ortagonalite koşulu birleştirilerek n kısıta indirgenebilir:

$$\sum_{j=1}^{T} a_{ij}\lambda_j + \sum_{j=1}^{s} b_{ij}\mu_j = 0 \quad ; \quad i=1(1)n$$

Kısıt bulunmaması durumu ile kıyaslayarak, incelenen P primal probleminin P_D duali,

$$P_D \ : \ \max \ z_d(\lambda,\mu) = \left[\prod_{j=1}^{T}\left(\frac{C_j}{\lambda_j}\right)^{\lambda_j}\right]\left[\prod_{j=1}^{s}\left(\frac{d_j\mu}{\mu_j}\right)^{\mu_j}\right]$$

$$kısıtlar : \ \sum_{j=1}^{T} a_{ij}\lambda_j + \sum_{j=1}^{s} b_{ij}\mu_j = 0 \quad ; \quad i=1(1)n$$

$$\sum_{j=1}^{T}\lambda_j = 1$$

$$\lambda_j > 0 \ , \ j=1(1)T \quad ; \quad \mu_j \geq 0 \ , \ j=1(1)s$$

şeklinde formüle edilebilir.

$\overline{x}$,primal problem için optimal çözüm ve ($\overline{\lambda}$, $\overline{\mu}$) ise dual problem için optimal çözüm olsun. Lemma 3.4. 'ün sonucu olarak

$$f(\overline{x}) \geq z_d(\ \overline{\lambda}\ ,\ \overline{\mu}\ )$$

olduğu bilinmektedir. Kısıtsız durumda olduğu gibi dualiteden dolayı hata oluşmaz,bu nedenle eşitlik korunur. İki farklı durumu da ele alalım.

Durum 1. Kısıt zorlayıcıdır, yani $g(\overline{x})=1$ 'dir. Lemma 3.4 'den, geometrik eşitsizlik için normalite ve ortagonalite koşulları kullanılırsa eşitlik gerçeklenecektir.

Durum 2. Kısıt zorlayıcı değildir,yani $g(\overline{x})<1$ 'dir. μ_j,j=1(1)s oluşturulsun ve yine

$$\lim_{\mu_j \to 0^+}\left(\frac{d_j\mu}{\mu_j}\right)^{\mu_j} = 1$$

şeklindeki bağıntı göz önüne alınsın. Ozaman dual fonksiyon,

$$z_d(\lambda,\mu) = z_d(\lambda,0) = \prod_{j=1}^{T}\left(\frac{C_j}{\lambda_j}\right)^{\lambda_j}$$

şeklini alacak ve P_D problemi kısıtsız problemde olduğuna benzer bir yapı kazanacaktır. Primal problemde kısıtlı durum, dualite farkı oluşmayacağı için kısıtsız duruma genişletilebilir.

Kuhn-Tucker teorisini kullanarak optimallik için gerekli koşulların,

$$\bar{\lambda}_j \bar{z} = c_j \bar{p}_j \quad ; \; j=1(1)T$$

$$\bar{\mu}_j = \bar{\mu} d_j \bar{p}_j \quad ; \; j=1(1)s$$

olduğunu gösterilebilir. Bazı j 'ler için $\mu_j > 0$ ise primal kısıt tamdır, yani $g(\bar{x})=1$ 'dir. Diğer bir deyişle , eğer kısıt tam değil ise yani, $g(\bar{x})<1$ ise $\bar{\mu}_j=0$, $j=1(1)s$ 'dir.

__Teorem 3.6.__ λ_j ve μ_j,kısıtlı P problemi için ağırlıklar olsun. Optimallikte şu eşitlikler korunur:

$$\sum_{j=1}^{T} \bar{\lambda}_j = 1$$

$$\sum_{j=1}^{T} a_{ij} \bar{\lambda}_j + \sum_{j=1}^{s} b_{ij} \bar{\mu}_j = 0 \quad ; \; i=1(1)n$$

$$\bar{\lambda}_j \bar{z} = c_j \bar{p}_j \quad ve \quad \bar{\lambda}_j > 0 \quad ; \; j=1(1)T$$

$$\bar{\mu}_j = \bar{\mu} d_j \bar{q}_j \quad ve \quad \bar{\mu}_j \geq 0 \quad ; \; j=1(1)s$$

$$\sum_{j=1}^{s} \bar{\mu}_j = \bar{\mu}$$

Bununla beraber,en az bir $\bar{\mu}_j > 0$ ise,ozaman tüm $\mu_j > 0$, $j=1(1)s$ ve $g(\bar{x})=1$ olur. Aksi halde $g(\bar{x})<1$ ise $\bar{\mu}_j=0$, $j=1(1)s$ şeklindeki çözüm mevcuttur.

ispat : P problemi yeniden düzenlensin: (Lagr.Çarp.)

$$P: \min_{z,x,\lambda,\mu} z$$

$$\text{kısıtlar}: \quad z\lambda_j = c_j p_j(x) \quad ; \quad j=1(1)T \qquad u_j$$

$$\mu_j' = d_j q_j(x) \quad ; \quad j=1(1)s \qquad v_j$$

$$\sum_{j=1}^{T} \lambda_j = 1 \qquad u_0$$

$$\sum_{j=1}^{s} \mu_j \leq 1 \qquad v_0$$

x_i değişkenleri için pozitiflik kısıtı yazılmamıştır, çünkü kısıt bağıntılarına göre λ_j ve μ_j' değişkenlerinin mutlak pozitifliği söz konusudur.

P problemi için lagrange fonksiyonu u_j, v_j, u_0, v_0 lagrange çarpanları olmak üzere,

$$L = z - \sum_{j=1}^{T} u_j[z\lambda_j - c_j p_j(x)] - \sum_{j=1}^{s} v_j[\mu_j' - d_j q_j(x)]$$

$$+ u_0[\sum_{j=1}^{T} \lambda_j - 1] + v_0[\sum_{j=1}^{s} \mu_j' - 1]$$

şeklindedir. Optimallik için Kuhn-Tucker koşulları ise şunlardır:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial z} = 1 - \sum_{j=1}^{T} u_j \lambda_j$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{T} \overline{u}_j c_j \frac{\partial p_j(\overline{x})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{s} \overline{v}_j d_j \frac{\partial q_j(\overline{x})}{\partial x_i} \quad ; \quad i=1(1)n$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = -\overline{u}_j z_0 + u_0 \quad ; \quad j=1(1)T$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \mu_j} = -\overline{v}_j + v_0 \quad ; \quad j=1(1)s$$

$$\overline{v}_0 \geq 0 \quad , \quad \overline{v}_0 [\sum_{j=1}^{s} \mu_j' - 1] = 0$$

$$\sum_{j=1}^{T} a_{ij}\,\overline{\lambda}_j + \sum_{j=1}^{s} b_{ij}\,\overline{\mu}_j = 0 \qquad ; \quad i=1(1)n$$

şeklinde elde edilir. Çünkü $\sum_{j=1}^{s} \overline{\mu}_j{}' = 1$ 'dir. Dolayısıyla $\overline{\mu}_j{}'$ değişkenleri basit yapıdaki kısıt ağırlıklarıdır.

Durum 4. Optimallikte $g(\overline{x})<1$ olsun.

$$1 > g(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{s} d_j \overline{q}_j = \sum_{j=1}^{s} \overline{\mu}_j'$$

ve tamamlayıcı

$$\overline{v}_0 \; [\sum_{j=1}^{s} \mu_j' - 1] = 0$$

kısıt bağıntısından, $\overline{v}_0=0$ olur.
Yukarıda olduğu gibi adi

$$\overline{\mu}_j = \frac{\overline{v}_0}{z}\,\overline{\mu}_j'$$

kısıt ağırlıkları tanımlansın.

$\overline{v}_0=0$ olduğundan tümü sıfır olur, böylece $\overline{\mu} = \sum_{j=1}^{s} \overline{\mu}_j$ elde edilir.

Dolayısıyla, $\overline{\mu}_j = \overline{\mu}\, d_j \overline{q}_j$, $j=1(1)s$ geçerlidir ve teoremin ispatı tamamlanmış olur.
Temelde aynı olan, zorluk derecesi kısıtlı problemler için yeni bir değer alır. Yani, amaç fonksiyonun terimleri ile beraber kısıttaki terimler için problemin zorluk derecesi $T + s - (n+1)$ olarak belirlenir.

Lemma 3.4 ve Sonuç 3.5 'den elde edilen gelişime bağlı olarak dual problemimizin yeni yapısı;

$$P_D \; : \max_{\lambda>0,\,\mu\geq 0} \; z_d(\lambda,\mu) = \Big[\prod_{j=1}^{T} \Big(\frac{c_j}{\lambda_j}\Big)^{\lambda_j}\Big]\Big[\prod_{j=1}^{s} \Big(\frac{d_j\mu}{\mu_j}\Big)^{\mu_j}\Big]$$

$$\textit{kısıtlar} : \quad \sum_{j=1}^{T} \lambda_j = 1 \quad , \quad \sum_{j=1}^{s} \mu_j = \mu$$

$$\sum_{j=1}^{T} a_{ij}\lambda_j + \sum_{j=1}^{s} b_{ij}\mu_j = 0 \quad ; \quad i=1(1)n$$

olarak yazılabilir. Yine buradan hareketle aşağıdaki lemma ile zayıf dualiteyi ifade edebiliriz.

Lemma 3.7. $\tilde{x}$,P problemi için ve ($\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$) ise P_D problemi için mümküm çözümler olsunlar. Ozaman $z_d(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) \leq z \leq f(\tilde{x})$ 'dir.

Şimdi, tek kısıtlı problemler yerine m kısıtlı genel posinomal geometrik programlama problemleri göz önüne alınsın. m kısıtlı ve her kısıtında s_k , k=1(1)m terimi olan primal problem:

$$P \; : \; \min_{x>0} \quad z = \sum_{j=1}^{T} c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}$$

$$kısıtlar \; : \; \sum_{j=1}^{s_k} d_{kj} \prod_{i=1}^{n} x_i^{b_{kij}} \leq 1 \quad ; \; k=1(1)m$$

şeklinde olsun. Önceki problemde olduğu gibi,

$$q_{kj} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{b_{kij}} \quad , \quad p_j = \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}$$

olmak üzere amaç fonksiyon ve kısıtlar sırasıyla;

$$f(x) = \sum_{j=1}^{T} c_j \, p_j \quad , \quad g_k(x) = \sum_{j=1}^{s_k} d_{kj} \, q_{kj} \quad ; \; k=1(1)m$$

olacaktır. Problem için pozitif λ_j ve negatif olmayan μ_{kj} ağırlıklarını,

$$\lambda_j z = c_j \, p_j \quad ; \; j=1(1)T$$

$$\mu_{kj} = \mu_k \, d_{kj} \, q_{kj} \quad ; \; j=1(1)s_k \, , \; k=1(1)m$$

şeklinde tanımlayalım. Burada,

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{s_k} \mu_{kj} \quad ; \; k=1(1)m$$

şeklindedir.

Tek kısıtlı problem için Teorem 3.6 'da olduğu gibi, şimdi çok kısıtlı problem için gerekli optimallik koşullarını veren teoremi ifade edelim.

Teorem 3.8. m kısıtlı P problemi için ağırlıklar λ_j ve μ_{kj} olsun. Optimallikte şu koşullar geçerlidir:

$$\sum_{j=1}^{T} \bar{\lambda}_j = 1$$

$$\sum_{j=1}^{T} a_{ij}\,\bar{\lambda}_j + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{s_k} b_{kij}\,\bar{\mu}_{kj} = 0 \quad ; \; i=1(1)n$$

$$\bar{\lambda}_j \bar{z} = c_j\, \bar{p}_j \quad ve \quad \bar{\lambda}_j > 0 \quad ; \; j=1(1)T$$

$$\bar{\mu}_{kj} = \bar{\mu}_k\, d_{kj}\,\bar{q}_{kj} \quad ve \quad \bar{\mu}_{kj} \geq 0 \quad ; \; j=1(1)s_k \,,\; k=1(1)m$$

$$\sum_{j=1}^{s_k} \bar{\mu}_{kj} = \bar{\mu}_k \quad ; \; k=1(1)m$$

ispat : (Referans: Beightler & Phillips _ 1976)

m kısıtlı primal probleme ait P_D dual problem,

$$P_D \; : \max z_d(\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_m) = \left[\prod_{j=1}^{T}\left(\frac{c_j}{\lambda_j}\right)^{\lambda_j}\right]\prod_{k=1}^{m}\left[\prod_{j=1}^{s_k}\left(\frac{d_{kj}\,\mu_k}{\mu_{kj}}\right)^{\mu_{kj}}\right]$$

$$kısıtlar: \quad \sum_{j=1}^{T} a_{ij}\lambda_j + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{s_k} b_{kij}\,\mu_{kj} = 0 \quad ; \quad i=1(1)n$$

$$\sum_{j=1}^{T} \lambda_j = 1$$

$$\sum_{j=1}^{s_k} \mu_{kj} = \mu_k \quad ; \quad k=1(1)m$$

$$\lambda_j > 0 \; ; \; j=1(1)T \;, \quad \mu_{kj} \geq 0 \; ; \; j=1(1)s_k \,,\; k=1(1)m$$

şeklindedir. Bu problem için de yine tek kısıtlı problemler için sunulmuş olan zayıf dualitelik ve optimumda dualite farkının oluşmayacağı sonuçları incelenebilir.

m kısıtlı problem için zorluk derecesi, kısıtların her birine ait farklı ağırlıklar tanımlanmış olduğundan,

$$T + \sum_{k=1}^{m} s_k - (n+1)$$

olarak hesaplanır.

Geometrik programlama problemlerinin çözümündeki esas güçlük, zorluk derecesinin pozitif olduğu durumda karşımıza çıkar. Bu durumlarda birkaç özel yöntem kullanılabilir. İlk olarak problem normalite ve ortagonalite koşulları altında ağırlıklar için alt ve üst sınırlar belirlenecek şekilde çözülür ve zayıf dualite yardımıyla optimal amaç fonksiyon değeri sınırlandırılmış olur. Diğer bir yöntem, problemdeki terimlerin eksiltilerek zorluk derecesinin azaltılmasıdır. Son olarak, normalite ve ortagonalite koşullarını bir veya birkaç ağırlık cinsinden çözmek ve kısıtsız yapısıyla ele alınacak olan maksimizasyon araştırmasının Vekil dual fonksiyon üzerinde yapılmasıdır.

III.3. Kısıtlı Posinomal Problem İçin Çözüm Algoritması

$$P \; : \; \min_{x>0} \; z = \sum_{j=1}^{T} c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}$$

$$\textit{kısıtlar} \; : \; \sum_{j=1}^{s_k} d_{kj} \prod_{i=1}^{n} x_i^{b_{kij}} \le 1 \quad ; \; k=1(1)m$$

şeklindeki m kısıtlı P problemini ve normalite ve ortagonalite koşullarının oluşturdukları,

$$\Lambda \; : \quad \sum_{j=1}^{T} \lambda_j = 1$$

$$\sum_{j=1}^{T} a_{ij}\lambda_j + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{s_k} b_{kij}\,\mu_{kj} = 0 \quad ; \; i=1(1)n$$

(Λ) sistemini göz önüne alalım. P probleminin pozitif elemanlı $R_{)}^{n}$ 'de bir x optimal çözümüne sahip olduğu kabul edilsin.

0. Adım: Kısıtları göz önüne almadan, kısıtsız durumdaki problem için $x^{\wedge}$ çözümünü bul. $x^{\wedge}$ uygun mu ?
   a) Evet ise, $x^{\wedge}$ optimal çözümdür. Dur.
   b) Hayır ise, 1.Adıma geç.

1. Adım: (Λ) sisteminin katsayılar matrisi sıfırdan farklı olmak üzere

$$T + \sum_{k=1}^{m} s_k - (n+1) > 0 \quad mi \; ?$$

   a) Evetse, 3.Adıma geç.
   b) Hayırsa, 2.Adıma geç.

2. Adım: Normalite ve ortagonalite koşulları için tek $(\overline{\lambda}, \overline{\mu}_1, .., \overline{\mu}_m)$ çözümünü bul. Primal amaç foksiyonun optimal değeri, dualiteden

$$\overline{z} = \prod_{j=1}^{T} \left(\frac{c_j}{\overline{\lambda}_j} \right)^{\overline{\lambda}_j}$$

olarak hesaplanır ve karşılık gelen terim değerleri $c_j p_j(\overline{x}) = \overline{\lambda}_j \overline{z}$, j=1(1)T 'nin sonucudur. Eğer yeterli sayıda denklem mevcut ise optimal $\overline{x}$ çözümü $\log \overline{x}_i$'ye göre lineer olan,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \log \overline{x}_i = \log \left(\frac{\overline{\lambda}_j \overline{z}}{c_j} \right) \quad ; \quad j=1(1)T$$

denklem sisteminden hesaplanabilir. Eğer $\log \overline{x}_i$'lerin sayısı deklem sayısından fazla, yani n>T ise 3.Adıma geç.

3. Adım: Şu üç yaklaşımdan birisi seçilir;
- Ağırlıkları sınırlandırarak : 4.Adıma geç.
- Terimleri eksilterek : 5.Adıma geç.
- Dual uzayda inceleme : 6.Adıma geç.

4. Adım: (Ağırlıkların sınırlandırılması): Bu adımda normalite ve ortagonalite koşullarının lineer dönüşümlerini oluşturarak $\lambda_j, \overline{\mu}_{j1}, .., \overline{\mu}_{jm}$ optimal ağırlıkları için elde edilecek alt ve üst sınırlar aranır. Eğer daha detaylı bir çalışma gerekiyorsa, bu koşulları sağlayan bir $\tilde{\lambda}$ deneme değeri, $c_j p_j(x) = \lambda_j z$,j=1(1)T eşitliği yardımı ile $\tilde{x}$ deneme çözümünü elde etmek için kullanılabilir. Ozaman $(\overline{z})$ optimal çözümü için sınırlar;

$$\left[\prod_{j=1}^{T} \left(\frac{c_j}{\lambda_j} \right)^{\lambda_j} \right] \prod_{k=1}^{m} \left[\prod_{j=1}^{s_k} \left(\frac{d_{kj}\, \overline{\mu}_k}{\overline{\mu}_{kj}} \right)^{\overline{\mu}_{kj}} \right] \le \overline{z} \le \sum_{j=1}^{T} c_j\, p_j(\tilde{x})$$

olur. Eğer sınırlar yeterince küçük ise dur. Aksi halde, 5.Adım veya 6.Adıma geç.

5. Adım: (Terimlerin Eksiltilmesi): Optimumda önemsiz olabilecek $c_j p_j(x)$ terimlerini göz önüne almayarak zorluk derecesi küçültülebilir. İndirgenmiş problemin çözümlendirilmesi eğer, zorluk derecesi sıfır oluyarsa 2.Adımdan, aksi halde 3.Adımdan işlem sürdürülerek yapılır.

6. Adım: (Dual uzayda inceleme) : P_D dual problemi ya kısıtsız nonlineer optimizasyon için uygun bir yöntem yada vekil dual fonksiyon kullanılarak istenen doğruluk derecesinde çözülür. $\tilde{\lambda}$ deneme çözümü, $c_j p_j(x) = \lambda_j z$, j=1(1)T denkleminden $\tilde{x}$ deneme çözümüne ulaşmak için kullanılır. Sınırlar 4.Adımda verilmiş olan bağıntılar ile bulunur. Eğer sınırlar yeterince küçük ise dur.Aksi halde P_D dual probleminin çözümü için artan doğrulukla 6.Adımı tekrar uygula.

III.4. Örnek Problem

Konuya açıklık kazandırması açısından kısıtsız bir posinomal amaç fonksiyonun minimizasyonu problemini inceleyelim. Amaç fonnksiyon şu şekilde olsun:

$$P: \quad \min \ z = 32x + 44x^{-1} + 8x^{2}$$
$$x>0$$

Problemin zorluk derecesi T=3 ve n=1 için, T-(n+1)=3-(1+1)=1'dir. Problemin normalite ve ortagonalite koşulları,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$
$$\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$$

olup yalnızca iki denklem yazılabılecektir. T-(n+1)>0 olduğundan Bu problemin çözümünü üç farklı metodu kullanarak yapabiliriz.

a.) Bu iki denklemi toplayarak,

$$2\lambda_1 + 3\lambda_3 = 1 \Longrightarrow \lambda_1 = 1/2 - 3/2\,\lambda_3 \quad \text{olur.}$$

$\lambda_j>0$ olmaları gerektiğinden optimumda $\lambda_1 \in (0,1/2)$ olmalıdır.

$$2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 1$$
$$-\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \qquad \lambda_1 + 3\lambda_2 = 2 \Longrightarrow \lambda_2 = 2/3 - 1/3\,\lambda_1 < 2/3$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$
$$-\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \qquad 2\lambda_2 - \lambda_3 = 1 \Longrightarrow \lambda_2 = 1/2 + 1/2\,\lambda_3 > 1/2$$

olup böylece optimumda $\lambda_2 \in (1/2,2/3)$ ve son olarak,

$$2\lambda_1 + 3\lambda_3 = 1 \Longrightarrow \lambda_3 = 1/3 - 2/3\,\lambda_1 \quad \text{için}$$

λ_1 'in sınırından hareketle $\lambda_3 \in (0,1/3)$ olmalıdır.

En dar aralık $\lambda_2 \in (1/2,2/3)$ için elde edilmiştir. Bu nedenle $\lambda_2=3/5$ olarak (aralığın orta noktasını) almak akıllıca olacaktır. Normalite ve ortagonalite koşullarından $\lambda_1=\lambda_3=1/5$ olur. λ_j ağırlılarının değerlerini optimal yada optimale yakın kabul ederek ve

$z=\dfrac{c_j p_j}{\lambda_j}$; $j=1(1)3$ 'yı kullanarak, $\dfrac{32x}{1/5}=\dfrac{44x^{-1}}{3/5}=\dfrac{8x^2}{1/5}$ birinci ve üçüncüden $x>0$ olduğundan $x=4$ ve $z=267$ elde edilir.

Dual fonksiyon değeri;

$$z_d(\lambda)=\prod_{j=1}^{3}\left(\frac{c_j}{\lambda_j}\right)^{\lambda_j}=\left(\frac{32}{1/5}\right)^{1/5}\left(\frac{44}{3/5}\right)^{3/5}\left(\frac{8}{1/5}\right)^{1/5}=75.93$$

şeklindedir. Herhangi bir primal uygun çözüm, optimal amaç fonksiyon değeri için bir üst sınır ve dual çözüm ise bir alt sınır oluşturduğu için

$$75.93 \le \bar{z} \le 267$$ elde edilir.

Üst sınır için x değeri hesaplanırken kullanılan üçlü bağıntıdan I ve III için $x = 4$, I ve II için $x = 0.677$, II ve III için $x=1.2239$ değerleri tek tek elde edilmelidir. Buradan,

$x = 0.677$ için $z = 90.32$
$x = 1.2239$ için $z = 87.10$ hesaplanır.

Şuhalde optimumda,

$\bar{\lambda}_1 \in (0,1/2)$, $\bar{\lambda}_2 \in (1/2,2/3)$, $\bar{\lambda}_3 \in (0,1/3)$ ve
$\bar{z} \in [75.93,87.10]$ yazılabilir.

b.) Bu tip problemlerde yaklaşık çözüm elde etmek üzere kullanılabilecek diğer bir yöntem, optimumda önemi olamayacağı belirtilebilen terimlerin problemden çıkartılmalarıdır. Bu problem için $8x^2$ teriminin optimumda önemsiz olacağını (önceki bilgilerin ışığı altında) söyleyebiliriz. Bunun için gösterge λ_3'ün üst sınırının 1/3 olması şeklinde söylenebilir. $8x^2$'li terim çıkarılarak problemin zorluk derecesi sıfıra indirgenir. Bu durum da normalite ve ortagonalite koşulları,

$$\lambda_1+\lambda_2=1$$
$$\lambda_1-\lambda_2=0$$

olur. Dolayısıyla $\lambda_1=\lambda_2=1/2$ olup, $\dfrac{32\bar{x}}{\lambda_1}=\dfrac{44\bar{x}^{-1}}{\lambda_2}$

bağıntısını kullanarak,

$$\frac{31\bar{x}}{1/2} = \frac{44\bar{x}^{-1}}{1/2} \rightarrow$$

$\bar{x} = 1.1726$ elde edilir. Orjinal problem için dual fonksiyon, $(8/0)^0=1$ özelliğini kullanarak;

$$z_d(\lambda) = z_d(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0) = (\frac{32}{1/2})^{1/2}(\frac{44}{1/2})^{1/2}(\frac{8}{0})^0 = 75.05$$

olup, z optimal değeri için yeni alt sınırdır.

$x=1.1726$ değerini kullanarak, $z=f(x)=86.05$ elde edilir ki,

$$\bar{z} \in [75.05, 86.05]$$

optimal $\bar{z}$ için yeni bir aralıktır.

c.) Dual fonksiyon için yeniden bir düzenleme yapılsın. Normalite ve ortagonalite koşulları,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$$

dır. λ_1 ve λ_2 'yi λ_3 cinsinden ifade edelim;

$$\lambda_1 = 1/2 - 3/2\,\lambda_3 \quad , \quad \lambda_2 = 1/2 + 1/2\,\lambda_3$$

Bu değerleri dual fonksiyona taşıyalım:

$$z_d(\lambda) = (\frac{32}{\lambda_1})^{\lambda_1}(\frac{44}{\lambda_2})^{\lambda_2}(\frac{8}{\lambda_3})^{\lambda_3}$$

$$= \left[\frac{32}{\frac{1}{2}(1-3\lambda_3)}\right]^{\frac{1}{2}(1-3\lambda_3)}\left[\frac{44}{\frac{1}{2}(1+\lambda_3)}\right]^{\frac{1}{2}(1+\lambda_3)}(\frac{8}{\lambda_3})^{\lambda_3}$$

$$z_d(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = z_d[\frac{1}{2}(1-3\lambda_3), \frac{1}{2}(1+\lambda_3), \lambda_3] = z_d(\lambda_3)$$

olup indirgenmiş dual fonksiyon adını alır. Lemma 3.2. 'den tekil optimal çözüm olan $\bar{\lambda}_3$ için $z_d(\lambda_3)$ maksimize edilir. $z_d(\lambda)$ yerine $\log z_d(\lambda)$ 'yı kullanalım:

$$\log z_d(\lambda_3) = \frac{1}{2}(1-3\lambda_3)\log\frac{64}{1-3\lambda_3} + \frac{1}{2}(1+\lambda_3)\log\frac{88}{1+\lambda_3} + \lambda_3\log\frac{8}{\lambda_3}$$

$$= -\frac{1}{2}(1-3\lambda_3)\log\frac{1-3\lambda_3}{64} - \frac{1}{2}(1+\lambda_3)\log\frac{1+\lambda_3}{88} - \lambda_3\log\frac{\lambda_3}{8}$$

elde edilir.

Bu konkav fonksiyonu λ_3 değişkeni için maksimize etmek üzere, birinci mertebeden türevi alınıp sıfıra eşitlenir:

$$\frac{3}{2}(1+\log\frac{1-\lambda_3}{64}) - \frac{1}{2}(1+\log\frac{1+\lambda_3}{88}) - (1+\log\frac{\lambda_3}{8}) = 0$$

$$\rightarrow 0 = \frac{3}{2}\log\frac{1-3\lambda_3}{64} - \frac{1}{2}\log\frac{1+\lambda_3}{88} - \log\frac{\lambda_3}{8}$$

$$= \log\left[(1-3\lambda_3)^{3/2}(1+\lambda_3)^{-1/2}(\lambda_3)^{-1}\right] - \log(64^{3/2}88^{-1/2}8^{-1})$$

$$(1-3\lambda_3)^{3/2}(1+\lambda_3)^{-1/2}(\lambda_3)^{-1} = 64^{3/2}88^{-1/2}8^{-1} = \frac{32}{\sqrt{22}}$$

olup, bu tek değişkenli denklemin çözümü; üçüncü dereceden polinom kökleri aranarak veya Newton-Ralphson kullanılarak hesaplanır. Sonuç $\bar{\lambda}_3 \approx 0.08846$ olup,

$$\bar{\lambda}_1 = 1/2 - 3/2\ \bar{\lambda}_3 = 0.36731$$

$$\bar{\lambda}_2 = 1/2 + 1/2\ \bar{\lambda}_3 = 0.54423$$

olarak bulunur.

$$\frac{32\bar{x}}{\bar{\lambda}_1} = \frac{44\bar{x}^{-1}}{\bar{\lambda}_2} \rightarrow \bar{x}^2 = 0.92801 \rightarrow \bar{x} = 0.96333$$

için optimum değer $\bar{z} = 32\bar{x}/\ \bar{\lambda} = 83.9255$ veya dual fonksiyondan,

$$z_d(\lambda) = (\frac{32}{\bar{\lambda}_1})^{\bar{\lambda}_1}(\frac{44}{\bar{\lambda}_2})^{\bar{\lambda}_2}(\frac{8}{\bar{\lambda}_3})^{\bar{\lambda}_3}$$

$$= (\frac{32}{0.36731})^{0.36731}(\frac{44}{0.54423})^{0.54423}(\frac{8}{0.08846})^{0.08846}$$

$$z_d(\lambda) = 83.9255$$

olarak tam doğrulukla elde edilebilir.

BÖLÜM IV

SİGNOMAL GEOMETRİK PROGRAMLAMA

IV.1. Giriş

Gerçek hayat problemlerinin formülasyonunda genellikle negatif bileşenli terimlerle karşılaşılabilinecektir. Eğer geometrik program bir veya daha fazla negatif bileşenli terim içeriyorsa formülasyonlarımızı bu defa signomal programlama -katsayıları işaretten bağımsız- problemleri olarak oluşturalım.
Kısıtlar altında P problemini,

Program 1:

$$P \; : \; \min_{x>0} \quad z = \sum_{j=1}^{T_0} c_{0j} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{0ij}}$$

$$kısıtlar \; : \; \sum_{j=1}^{T_k} c_{kj} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{kij}} \leq 1 \; ; \quad k=1(1)m$$

genel yapısı ile seçelim. Burada terim katsayılarını $c_{0j} \neq 0$ ve $c_{kj} \neq 0$ olmak üzere göz önüne aldığımızda, signomal terimlerden oluşan signomal programlama problemi karşımıza çıkacaktır.

$\sigma_{0j} = \dfrac{c_{0j}}{|c_{0j}|}$ ve $\sigma_{kj} = \dfrac{c_{kj}}{|c_{kj}|}$ şeklinde işaret fonksiyonunu tanımlayıp $k=0(1)m$ adet fonksiyondaki her terimin katsayısını σ_{kj} ile ifade edelim. Bu durumda, T terim N değişkenli nonlineer amaç fonksiyon ve m eşitsizlik kısıtından oluşan problem şu şekilde ifade edilir:

$$\min \quad z = g_0(x) = \sum_{j=1}^{T_0} \sigma_{0j} \, c_{0j} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{0ij}} \tag{4.1.1}$$

$$kısıtlar \quad g_k(x) = \sum_{j=1}^{T_k} \sigma_{kj} \, c_{kj} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{kij}} \leq \sigma_k \; ; \quad k=1(1)m \tag{4.1.2}$$

olup,

$$\sigma_{kj} = \mp 1 \quad ; \quad j=1(1)T_k \, , \; k=0(1)m$$

$$\sigma_k = \mp 1 \quad ; \quad k=1(1)m$$

$$c_{kj} > 0 \quad ; \quad j=1(1)T_k \, , \; k=0(1)m$$

$$x_i > 0 \quad ; \quad i=1(1)n$$

şeklindedir.

Görülebileceği gibi, yukarıdaki formülasyon T+m tane ek değişken içermektedir. σ_{kj} ,j=1(1)T_k ,k=1(1)m ile tanımlı T değişken, her kısıtta σ_k ,k=1(1)m değişkenleri eşitliğin sağ tarafındaki ±1 değerlerini ifade ederken, terimlerdeki işaretleri belirlemesi için kullanılmıştır. Bu değişkenlerin değerleri problemin formüle edilişinden belirlidirler ve işaret fonksiyonu yardımı ile gösterilirler. Bu bölümde de amacımız Bölüm III 'de olduğu gibi signomal problem için lineer kısıtlı uygun bir form oluşturmaya yönelik özel bir yapı kurmaktır. Bu amaçla, çalışmalarımızı iki esas başlık altında birleştirelim. Birincisi amaç fonksiyondaki tüm işaret fonksiyonlarını pozitif yani, $g_k(x)$ kısıtları signomalken $g_0(x)$ amaç fonksiyonunun posinomal olduğu durumdaki yapının kurulması. İkincsi ise, tümü signomal terimlerden oluşan genelleştirilmiş geometrik programın kurulması olsun.

IV.2. Posinomal Amaç Fonksiyon ve Signomal Eşitsizlik Kısıtları

Amaç fonksiyondaki tüm işaret fonksiyonları pozitif olduğundan, Program 1 şu yapıya indirgenebilir.

Program 2:

$$\min \quad : \quad g_0(x) = \sum_{j=1}^{T_0} c_{0j} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{0ij}} \tag{4.2.1}$$

$$\textit{kısıtlar} \quad : \quad g_k(x) = \sum_{j=1}^{T_k} \sigma_{kj} c_{kj} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{kij}} \le \sigma_k \quad ; \; k=1(1)m \tag{4.2.2}$$

$$x_i > 0 \quad ; \; i=1(1)n$$

$$\sigma_k = \mp 1 \quad ; \; k=1(1)m$$

$$\sigma_{kj} = \mp 1 \quad ; \; j=1(1)T_k \, , \; k=1(1)m$$

Kısıtları şu formda yazabiliriz:

$$f_k(x) = f_k = \sigma_k \left[1 - \sigma_k \sum_{j=1}^{T_k} \sigma_{kj} \, c_{kj} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{kij}}\right] \ge 0 \quad ; \; k=1(1)m \tag{4.2.3}$$

Bölüm III 'de olduğu gibi amaç fonksiyondaki her terim için,

$$\delta_{0j} = \frac{c_{0j} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{0ij}}}{g_0(x)} \quad ; \; j=1(1)T_0 \tag{4.2.4}$$

ağırlıklarını tanımlayalım. Kısıt terimleri için ağırlıklar ise, şimdilik terimlerin mutlak değerleridir ve eğer optimallikte kısıt zorlayıcı ise (σ_{kj} ile çarpılmış) her terimin katsayısı σ_{η} 'ye toplamlı olmalıdır. Dolayısıyla,

$$\delta_{kj} = c_{kj} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{kij}} \quad ; \; j=1(1)T_k \, , \; k=1(1)m \tag{4.2.5}$$

olur. $x_0 = g_0(x)$ olarak alalım. (4.2.3), (4.2.4) ve (4.2.5) denklemlerini kullanarak $g_k(x) \le \sigma_k$,$k=1(1)m$ kısıtları altında $g_0(x)$ 'in maksimizasyonu problemi,

$$\min \quad x_0$$

$$\textit{kısıtlar}: \quad x_0 \delta_{0j} = c_{0j} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{0ij}} \quad ; \; j=1(1)T_0$$

$$f_k = \sigma_k \, [1 - \sigma_k \sum_{j=1}^{T_k} \sigma_{kj} \, \delta_{kj}] \ge 0 \quad ; \; k=1(1)m$$

$$\delta_{kj} - c_{kj} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{kij}} = 0 \quad ; \; j=1(1)T_k \, , \; k=1(1)m$$

$$1 - \sum_{j=1}^{T_0} \delta_{0j} = 0$$

şeklini alır. $x_i = e^{u_i}$, $i=1(1)n$ olarak seçilirse problem;

$$\min \quad e^{u_0}$$

$$\textit{kısıtlar}: \quad e^{u_0} [\frac{\delta_{0j}}{c_{0j}}] = Exp[\sum_{i=1}^{n} a_{0ij} \, u_i] \quad ; \; j=1(1)T_0$$

$$f_k = \sigma_k \, [1 - \sigma_k \sum_{j=1}^{T_k} \sigma_{kj} \, \delta_{kj}] \ge 0 \quad ; \; k=1(1)m$$

$$\frac{\delta_{kj}}{c_{kj}} = Exp[\sum_{i=1}^{n} a_{kij} \, u_i] \quad ; \; j=1(1)T_k \, , \; k=1(1)m$$

$$1 - \sum_{j=1}^{T_0} \delta_{0j} = 0$$

yapısına ulaşacaktır. Logaritması alınarak,

Program 3:

$$\min \quad u_0$$

$$\textit{kısıtlar}: \qquad \sum_{j=1}^{T_0} \delta_{0j} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{0ij}u_i - u_0 = \ln[\frac{\delta_{0j}}{c_{0j}}] \qquad ; j=1(1)T_k\ , k=1(1)m$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kij}u_i = \ln[\frac{\delta_{kj}}{c_{kj}}] \qquad ; j=1(1)T_k\ , k=1(1)m$$

$$f_k = \sigma_k\ [1 - \sigma_k \sum_{j=1}^{T_k} \sigma_{kj}\ \delta_{kj}] \qquad ; k=1(1)m$$

elde edilir. Tanımları gereği ağırlıklar nonnegatif ve $u_0, \ldots, u_n$ değişkenleri ise işaret açısından kısıtsız olacaklardır.

Program 3 için karşılık geldikleri kısıtlara ait lagrange çarpanlarını w_0, λ_{0j}, λ_{kj} ve w_k şeklinde ele alıp lagrange fonksiyonu oluşturulsun. Optimumda bu çarpanlara, ağırlıklara ve u_i'lere ait bir lagrange fonksiyonu mevcut olacaktır. Son m kısıt birer eşitsizlik olduklarından,eşitlik kısıtlarından farklı işlem göreceklerdir. Eğer bu kısıtlardan herhangi biri optimallikte zorlayıcı olmazsa ($f_k(x)>0$), karşılık gelen w_k lagrange çarpanı sıfır olmalıdır; eğer kısıt zorlayıcı ise $f_k(x)=0$'dır. Eşitsizlik kısıtlarının bu iki olasılığı Kuhn-Tucker tamamlayıcı ağırlık koşulları ile

$$w_k\ f_k(x) = 0 \quad ;k=1(1)m \tag{4.2.6}$$

şeklinde kapsanmıştır.

Ayrıca amacımız $g_0(x)$'i minimize etmek olduğundan ve tüm kısıtlar $f_k(x) \equiv f_k > 0$ olarak yazılabileceğinden w_k ,k=1(1)m 'ler için nonnegatiflik zorunlu olacaktır ($w_k \geq 0$,k=1(1)m).Dolayısıyla $w_k f_k(x)$ terimleri , değerini değiştirmeksizin lagrange fonksiyonuna eklenebilir.

Program 3 için lagrange fonksiyonu;

$$
\begin{aligned}
L(u,w,\delta,\lambda) = {} & u_0 - w_0\left[1-\sum_{j=1}^{T_0}\delta_{0j}\right] \\
& - \sum_{j=1}^{T_0}\lambda_{0j}\left[\ln\left(\frac{\delta_{0j}}{c_{0j}}\right) + u_0 - \sum_{i=1}^{n} a_{0ij}u_i\right] \\
& - \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{T_k}\lambda_{kj}\left[\ln\left(\frac{\delta_{kj}}{c_{kj}}\right) - \sum_{i=1}^{n} a_{kij}u_i\right] \\
& - \sum_{k=1}^{m} w_k\sigma_k\left[1-\sigma_k\sum_{j=1}^{T_k}\sigma_{kj}\delta_{kj}\right]
\end{aligned}
\tag{4.2.7}
$$

şeklindedir. Primal bir kararlı noktası için gereklilik koşulları birinci türevler yardımı ile şu şekilde elde edilir:

$$\frac{\partial L}{\partial u_0} = 1 - \sum_{j=1}^{T_0}\lambda_{0j} = 0 \tag{4.2.8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_{0j}} = w_0 - \frac{\lambda_{0j}}{\delta_{0j}} \quad ; j=1(1)T_0 \tag{4.2.9}$$

Bu iki denklem (4.2.4) ile birleştirilebilir. Bu ise, δ_{0j} 'nin aşağıdaki şekilde, toplamlarının 1 olacağını gösterir.

$$w_0 = 1 \tag{4.2.10}$$

$$\lambda_{0j} = \delta_{0j} \quad ;j=1(1)T_0 \tag{4.2.11}$$

(4.2.11) denklemi, amaç fonksiyonun terimleri için λ_{0j} lagrange çarpanlarının açıkça δ_{0j} ağırlıklarına karşılık geldiklerini ifade eder. $g_0(x)$ bir posinomal olduğundan, λ_{0j} değişkenleri gerçek ağırlıklardır. Yani $0 < \lambda_{0j} \le 1$,$j=1(1)T_0$ olup, toplamları 1'dir.

Şimdi, lagrange fonksiyonunun δ_{kj} $(k \neq 0)$ kısıt ağırlıklarına göre türevlerini göz önüne alalım:

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_{kj}} = -\frac{\lambda_{kj}}{\delta_{kj}} + w_k\,\sigma_k^2\,\sigma_{kj} = 0$$

ve $\sigma_k^2 = 1$ olduğundan işaretini göz önüne almayarak,

$$\lambda_{kj} = w_k \, \delta_{kj} \, \sigma_{kj} \qquad (4.2.12)$$

olarak yazılabilir. (4.2.12) eşitliğinin her iki tarafının j üzerinden toplamı alınır ve σ_k ile çarpılırsa;

$$\sigma_k \sum_{j=1}^{T_k} \lambda_{kj} = w_k \sigma_k \sum_{j=1}^{T_k} \sigma_{kj} \, \delta_{kj} = w_k \quad ; \; k=1(1)m \qquad (4.2.13)$$

olur çünkü,her zorlayıcı kısıt için $\sigma_{kj}\delta_{kj}$'lerin toplamları σ_k'dır. Bu yüzden eğer $w_k \neq 0$ (kısıtı zorlayıcı) ise, (4.2.12) ve (4.2.13) eşitliklerini kullanarak,

$$\delta_{kj} = \frac{\lambda_{kj}}{w_k \sigma_{kj}} = \lambda_{kj} \left[\sigma_k \sigma_{kj} \sum_{j=1}^{T_k} \lambda_{kj} \right]^{-1} \quad ; \; j=1(1)T_k \, , \; k=1(1)m \qquad (4.2.14)$$

tanımlanabilir. Böylece u_i $(i \neq 0)$ 'ye göre türevlerinden elde edilebilen λ_{kj} lagrange çarpanlarından ağırlıklar hesaplanabilir:

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=1}^{T_k} \lambda_{kj} \, a_{kij} = 0 \quad ; \; i=1(1)n \qquad (4.2.15)$$

burada i=0 için tüm işaret fonksiyonları pozitiftir yani,

$$\sigma_{01} = \sigma_{02} = \ldots = \sigma_{0T_0} = 1 \qquad (4.2.16)$$

şeklindedir. (4.2.15) bağıntıları kısıtlı durum için ortagonalite koşullarıdır. δ_{kj} ağırlıkları yerine değişkenler λ_{kj} lagrange çarpanlarıdır. (4.2.8) 'in normalite koşulu gerçek ağırlıklara eşit olan amaç fonksiyon terimleri için çarpanları içerir. Karşıt olarak (4.2.14) 'ün δ_{kj} değişkenleri,işaret fonksiyonu ve λ_{kj}'ler cinsinden bir fonksiyon olarak tanımlanır. Tüm bunlar için gerek şart, $\sigma_{kj}\delta_{kj}$ değerlerinin $\sigma_k=\pm 1$ toplamlı ve her $\sigma_{kj}\delta_{kj}$ teriminde işaret kısıtının mevcut olmamasıdır.

u_i, λ_{kj} lagrange çarpanları ve $f_k(x)$ kısıt fonksiyonlarına ait (4.2.7) lagrange fonksiyonundan yararlanarak, $\delta_0=1$ olmasından hareketle dual problem kurulabilir.

$$L(\lambda, u, \delta, f) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=1}^{T_k} \lambda_{kj} \left[\ln\left(\frac{\delta_{kj}}{c_{kj}}\right) \right]$$
$$- (u_0 - 1)\left[1 - \sum_{j=1}^{T_0} \lambda_{0j}\right] - \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=1}^{T_k} a_{kij} \lambda_{kj} - \sum_{k=1}^{m} w_k f_k(x) \qquad (4.2.17)$$

veya eşiti olmak üzere, $w_k f_k(x)=0$,k=1(1)m için;

$$L(\lambda,u,\delta) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{T_k}\lambda_{kj}\left[\ln(\frac{c_{kj}}{\delta_{kj}})\right]$$

$$- (u_0-1)\left[1-\sum_{j=1}^{T_0}\lambda_{0j}\right] - \sum_{i=1}^{n}u_i\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{T_k}a_{kij}\lambda_{kj} \qquad (4.2.18)$$

elde edilir.

Wilde-Beightler'in çalışmalarından hareketle yukarıdaki fonksiyon (u_0-1) ve u_1, ... ,u_n değişkenleri yeni lagrange çarpanları olarak göz önüne alınarak, yeni bir yönlendirici optimizasyon problemi şeklinde ele alınabilir. Bu yeni formülasyonda λ_{kj} değişkenleri karar değişkenleridir.

Bu denk problem için amaç fonksiyon,

$$z(\lambda) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{T_k}\lambda_{kj}\left[\ln(\frac{c_{kj}}{\delta_{kj}})\right] \qquad (4.2.19)$$

şeklindedir. λ_{kj} bağımsız dual değişkenler;

$$\sum_{j=1}^{T_0}\lambda_{0j} = 1 \qquad (4.2.20)$$

normalite koşulunu ve n tane

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{T_k}a_{kij}\lambda_{kj} = 0 \quad ; \quad i=1(1)n \qquad (4.2.21)$$

ortagonalite koşulunu sağlamalıdır. Burada (4.2.14) 'den

$$\delta_{kj} = \lambda_{kj}\left[\sigma_k\sigma_{kj}\sum_{j=1}^{T_k}\lambda_{kj}\right]^{-1}$$

şeklindedir.

(4.2.14) denklemini kullanarak bu dual problem λ_{kj} ,$j=1(1)T_k$, k=1(1)m karar değişkenleri cinsinden tek olarak ifade edilebilir.

$$z(\lambda) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{T_k} \lambda_{kj}\left[\ln\left(\frac{c_{kj}\sigma_k\sigma_{kj}\sum_{j=1}^{T_k}\lambda_{kj}}{\lambda_{kj}}\right)\right] \qquad (4.2.22)$$

kısıtlar : $$\sum_{j=1}^{T_0}\lambda_{0j} = 1 \qquad (4.2.23)$$

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{T_k} a_{kij}\lambda_{kj} = 0 \quad ; \quad i=1(1)n \qquad (4.2.24)$$

Şimdi λ_{kj} çözüm değişkenlerinin karakterlerinin belirlenmesi gereklidir. (4.2.14) denklemi,

$$\delta_{kj} = \lambda_{kj}\left[\sigma_{kj}\sigma_k\sum_{j=1}^{T_k}\lambda_{kj}\right]^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla (4.2.13) denklemi,

$$\lambda_{kj} = \sigma_{kj}\delta_{kj}w_k \quad ; \; j=1(1)T_k,\; k=1(1)m$$

yapısına getirilir. Burada $\lambda_{kj}>0$ ve $w_k\geq 0$ olup, ayrıca λ_{kj} 'de σ_{kj} 'nin işaretini alır. Bu yüzden eğer, $\sigma_{kj}=1$ ise $\lambda_{kj}\geq 0$ ve $\sigma_{kj}=-1$ ise $\lambda_{kj}\leq 0$ 'dır. Görüldüğü gibi (4.2.22)-(4.2.24) ile verilen formülasyon, ne Passy nede daha sonra Wilde-Beightler tarafından oluşturulmuş olan dual problemi tanımlamamaktadır. Burada dual değişkenler karşılık gelen terimlerin işareti doğrultusunda pozitif yada negatif değerler alabilmektedirler.

Çözüm vektörü nonnegatif olacak şekilde bir dual problem kuralım. Yukarıdaki sonuçtan hareketle yeni dual değişkenler,

$$\gamma_{kj} = \sigma_{kj}\lambda_{kj} \geq 0 \qquad (4.2.25)$$

olarak tanımlansın. Bu yeni değişkenleri (4.2.22), (4.2.23) ve (4.2.24) denklemlerinde yerlerine yazarak;

$$z(\gamma) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{T_k} \sigma_{kj}\gamma_{kj}\left[\ln\left(\frac{c_{kj}\sigma_k\sum_j \gamma_{kj}\sigma_{kj}}{\gamma_{kj}}\right)\right]$$

kısıtlar : $$\sum_{j=1}^{T_0}\gamma_{0j} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{T_k}\gamma_{kj}\sigma_{kj}a_{kij} = 0 \quad ; \quad i=1(1)n$$

$$\gamma_{kj} \geq 0 \quad ; \quad j=1(1)T_k,\; k=1(1)m$$

problemini oluşturalım. Amaç fonksiyondaki T terime karşılık gelen değişkenler için n+1 tane lineer kısıtlı denklem mevcuttur ve tüm signomal kısıtlar için $T = T_0+T_1+ \dots T_m$ şeklindedir. Bu nedenle problemin zorluk derecesi $T-(n+1)$ 'dir. Zorluk derecesi sıfır ise çözüm tektir ve dual değişkenin γ_{kj}^* optimal değeri biliniyorsa, tüm terimler için δ_{kj}^* optimal ağırlıkları, (4.2.14) bağıntısı ve $\gamma_{kj} = \sigma_{kj} \lambda_{kj}$ eşitliğinden yararlanarak kolaylıkla hesaplanabilir.

Benzeşimi sağlamak amacıyla, $z(\gamma)$ 'nın eksponansiyeli alınarak elde edilecek olan;

$$d(\gamma) = \exp[z(\gamma)] = \prod_{k=0}^{m} \prod_{j=1}^{T_k} \left[\frac{C_{kj}\gamma_{k0}}{\gamma_{kj}}\right]^{\sigma_k \gamma_{kj}}$$

$$\textit{kısıtlar} \; : \qquad \sum_{j=1}^{T_0} \gamma_{0j} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=1}^{T_k} \sigma_{kj} a_{kij} \gamma_{kj} = 0 \qquad ; \; i=1(1)n$$

$$\gamma_{k0} = \sigma_k \sum_{j=1}^{T_k} \sigma_{kj} \gamma_{kj}$$

$$\gamma_{kj} \geq 0 \qquad ; \; j=1(1)T_k \, , \; k=1(1)m$$

programı $d(\gamma)$ dual fonksiyonu için Dual Geometrik Program olarak tanımlanabilir. γ_{k0} 'nın karakteri (4.2.14) denkleminden kolayca: $\delta_{kj}=\gamma_{kj}/\gamma_{k0}$ olarak belirlenebilir. Bu nedenle δ_{kj} tanımı gereği pozitif ve γ_{kj} tanımı gereği nonnegatif olduğundan $\gamma_{k0} \geq 0$ 'dır. (4.2.12) denklemi ve $\gamma_{kj} = \sigma_{kj} \lambda_{kj}$ değişken dönüşümü ile δ_{kj} değişkenleri primal (w_k ,k=1(1)m) lagrange çarpanlarıyla ilişkilidir. Dual geometrik programın dual çözüm vektörü ve Program 2 'nin primal karar değişkenleri arasındaki bu önemli bağıntıyı kuralım.

(4.2.14) denklemi yeniden göz önüne alınsın:

$$\delta_{kj} = \lambda_{kj} \left[\sigma_k \sigma_{kj} \sum_{j=1}^{T_k} \lambda_{kj}\right]^{-1} \qquad ; \; j=1(1)T_k \, , \; k=1(1)m$$

Dolayısıyla,

$$\delta_{kj} = \frac{\sigma_{kj}\gamma_{kj}}{\sigma_k \sigma_{kj} \sum_{j=1}^{T_k} \lambda_{kj}} \quad veya \quad \delta_{kj} = \frac{\gamma_{kj}}{\sigma_k \sum_{j=1}^{T_k} \sigma_{kj}\gamma_{kj}} = \frac{\gamma_{kj}}{\gamma_{ko}}$$

$$ve \qquad \delta_{0j} = \gamma_{0j} \qquad olur.$$

Bu sebeple primal karar değişkenlerini şu T denklemli,

$$C_{0j} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{0ij}} = g_0(x)\ \gamma_{0j} \quad ; \quad j=1(1)T_0 \tag{4.2.26}$$

$$C_{kj} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{kij}} = g_k(x)\ \gamma_{kj} \quad ; \quad j=1(1)T_k\ ,\ k=1(1)m \tag{4.2.27}$$

sisteminin n benzer çözümü ile yeniden elde edilebilir.

Bu aşamada problemin henüz bir maksimizasyon mu, minimizasyon mu yoksa dual fonksiyon yada logaritması için özel bir noktanın bulunması mı olduğuna karar verilmemiştir. Bu noktaya kadar belirlenmiş olan ise, u_0'ı yöresel minimum yapan herhangi γ dual değişkenlerinin optimallikte

$$z(\gamma_0) = u_0^0$$

şeklinde elde edilecek oluşlarıdır. u_0^0 yöresel minimum noktasında (4.2.18) 'deki lagrange fonksiyonunda bulunan bütün kısıt terimleri sıfır olacağından bu sonuç doğrudur ve γ^0 'ı belirleyen λ^0 karşılık değişkenleri için dual kısıt terimleri ortadan kalkacaktır. Zorluk derecesi sıfır ise normalite ve ortagonalite koşulları tek çözüme sahip olacaktır. Bu durumda lineer dual kısıt kümesi çözülerek, ayrıca $z(\gamma^0)=u_0^0$ bağıntısı ve $u_0=\ln g_0$ tanımından $g_0(x^0)$ hesaplanarak minimum çözüm bulunabilir, ozaman $z(\gamma^0)=\ln d(\gamma^0)$ olduğundan $g_0(x^0)=d(\gamma^0)$ elde edilir. w_k ve δ_{kj} değişkenlerinin nonnegatiflikleri (4.2.6) denkleminin tamamlayıcı esnekliği ile bir kararlı nokta için Kuhn-Tucker koşullarını tamamlar. Bu sabit kararlı nokta, sadece önceden $g_0(x)$ 'in bir minimuma sahip olduğu kabul edildiğinde, $g_0(x)$ için bir minimum olacaktır. Bu durumda zorluk derecesi sıfır olduğunda tek sabit nokta mevcut olacağından $g_0(x^0)=g_0(x^*)$ bütünsel minimumdur.

Bu kısmın sonucu olarak Program 2 'nin çözümünde üç farklı olasılık verilsin.

<u>Olasılık 1</u>: Tüm işaret fonksiyonları pozitif olduğunda, $g_0(x)$ 'in minimum çözümü $d(\gamma)$'yı maksimum yapılarak bulunabilir. Bu durumda $d(\gamma)$ için sadece bir tek maksimum çözüm mevcuttur ve bu $g_0(x)$ için bütünsel minimumdur:

$$d(\gamma^*) = g_0(x^*)$$

Olasılık 2: Bir veya daha fazla işaret fonksiyonu negatif ise, dual geometrik program için kararlı nokta yine primal program için de kararlıdır. Bu kararlı noktanın kesin bir yöresel minimum olduğunu söylenebilir. Yüksek mertebeden koşullar kontrol edilmelidir.

Olasılık 3: Zorluk derecesi sıfır olduğunda x^* değerini sağlayan γ^* dual değerini elde etmek için tümüne ihtiyaç duyulan kısıt denklemleri ((4.2.26) ve (4.2.27) ilişkileri yoluyla) kullanılır. Primal programın minimum çözümü olduğu söylenirse, bu değer aynı zamanda bir bölgesel minimumdur.

IV.3. Karışık Kısıtlar ve Negatif İşaretli Fonksiyonlar İçin Geometrik Programlama

İşaret fonksiyonlarının bir kısmı veya tümü negatif olsunlar. Bu durumda kısıt kümesi konveks olmayacaktır. Amaç fonksiyon alttan sıfır ile sınırlı ve sürekli bir fonksiyon olduğundan, kısıtları sağlayan noktaların varlığını ispatlayan bir minimuma sahip olmalıdır. u^* primal problem için mümkün yöresel minimum olsun. Bu kararlı noktasında yada göz önüne alınan u^* yöresel minimumda değerlendirildiğinde primal problem için lagrange fonksiyonunun

$$z(\gamma) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{T_k} \sigma_{kj}\, \gamma_{kj} \ln(c_{kj}\, \gamma_{kj}^{-1} \sum_{j=1}^{T_k} \gamma_{kj}) \qquad (4.3.1)$$

dönüştürülmüş dual fonksiyon için normalite ve ortagonalite dual kısıtlarını sağlayacak nonnegatif γ dual değişkenlerine bağlı olarak kısıtlanmış yöresel optimum veya kararlı noktasının bulunması ile aynı olduğu gösterilmiştir.

Genel Bir Kararlı Noktada $d(\gamma)$'nın Yapısı: Herhangi bir dual kararlı noktada (4.2.6) tamamlayıcı esneklik koşulu korunmalıdır. Ozaman (4.2.16) ve (4.2.25) denklemleri δ_{kj}'lerin pozitiflikleri ile,

$$f_k(x)\ \gamma_{kj} = 0 \quad ;\ j=1(1)T_k\ ,\ k=1(1)m \qquad (4.3.2)$$

olduğu sonucuna ulaşılır. Eğer k 'ıncı kısıt zorlayıcı değilse ($f_k>0$) ozaman karşılık gelen tüm γ_{kj} ($j=1(1)T_k$) dualleri sıfır olur ve sonuç olarak dual değişkenler kümesinin sınırlarında dual kısıtlar sağlanır. Bu nedenle γ_{kj} değişmeksizin $z(\gamma)$ için bir yöresel minimum sağlar. Diğer bir ifadeyle, eğer k 'ıncı kısıt zorlayıcı ($f_k=0$) ise, karşılık gelen γ_{kj} dualleri pozitif olup, nokta dual kısıt kümesinde yer alır. Passy ve Wilde bu durumda $z(\gamma)$ 'nın γ_{kj}'ye göre sabit olması gerektiğini de göstermişlerdir.

Sonuç olarak, γ^0 dual vektörü tasarlanan minimum yerine u_0 için karşılık gelen kısıtlanmış yöresel maksimumu üretir ve bu yine bir kararlı noktadır. Dolayısıyla dual işlemlerle elde edilmiş herhangi bir noktanın özel karakterli olduğunu göstermek için deneme ve kontroller yapılmalıdır. u_0 konveks olduğundan, Kuhn-Tucker nonnegatifliği ve tamamlayıcı esneklik koşulları u_0^* çözüm vektörünü bir yöresel minimum ($\text{lmin}\ u_0$) olarak belirtmek için yeterlidir.

Bu nedenle primal minimizasyon problemi için çözüm,

$$u_0^* = \min\,[\text{lmin}\ u_0] \qquad (4.3.3)$$

olarak yazılır. Dönüştürülmüş dual fonksiyon yapısında;

$$u_0^* = \min z(\gamma^0)$$

olarak ifade edilir. Diğer bir ifadeyle, bölgesel minimumu garantilemek için her biri dual uzayda $z(\gamma)$ 'yı maksimum yaparak hesaplanan tüm primal minimumlardan en küçüğü bulunmalıdır. Passy ve Wilde bu işlemi pseudo minimizasyon olarak adlandırmışlardır. Bu teknik signomal programların çözümü için kullanışlı bir sınır olarak gözüksede,gerçekte işlemi sadece diğer tüm konveks olmayan programlama tekniklerine indirger. Bu yöntem en azından bölgesel çözüm elde etmek için sistematik bir prosedür oluşturur.

Bu sonuç geometrik programlama algoritmasını signomal kısıtlılar kümesi üzerine genişletir.

IV.4. Negatif Amaç Fonksiyon Katsayıları

Amaç fonksiyonda negatif katsayılı terimler mevcut olsun. Bu tür problemlerin oluşması $g_0(x^*)$ optimal maliyetlerinin pozitif yada negatif olup olmadığına bağlıdır. Signomal programlar için en genel formülasyon;

$$\textit{minimum} \quad g_0(x) = \sum_{j=1}^{T_0} \sigma_{0j} C_{0j} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{0ij}} \qquad (4.4.1)$$

$$\textit{kısıtlar} \quad g_k(x) = \sum_{j=1}^{T_k} \sigma_{kj} C_{kj} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{kij}} \le \sigma_k \;;\quad k=1(1)m \qquad (4.4.2)$$

$$x_i > 0 \quad ; \quad i=1(1)m$$

şeklinde yazılabilecektir.

IV.4.I. Pozitif Değerli Amaç Fonksiyon: Signomal amaç fonksiyonun optimallikte değerinin pozitif ($g_0(x)>0$) olduğunu varsayalım. Bu durumda formülasyonun aşağıdaki gibi verileceği açıktır:

$$\min \quad x_0$$

$$\textit{kısıtlar} \ : \quad \hat{g}_0(x) = \sum_{j=1}^{T_0} \sigma_{0j} c_{0j} x_0^{-1} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{0ij}} \le 1 \tag{4.4.3}$$

$$g_k(x) = \sum_{j=1}^{T_k} \sigma_{kj} c_{kj} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{kij}} \le \sigma_k \quad ; \quad k=1(1)m \tag{4.4.4}$$

$$x_i > 0 \quad ; \; i=1(1)n$$

Burada $\hat{g}_0(x) \equiv x_0^{-1} g_0(x)$ şeklindedir.
Kurulmuş olan bu formülasyon Kısım 4.2'deki Program 2 ile tamamen aynıdır. Burada orjinal programa bir tek değişken ve yeni bir terim eklenmiş oldu. Dolayısıyla zorluk derecesinde bir değişiklik oluşmayacaktır. Bununla beraber, x_0 primal değişkeni ile ifade edilen dual kısıt ilişkisi:

$$\gamma_{00} = 1 \qquad \text{(normalite koşulu)}$$

$$\gamma_{00} - \sigma_{01}\gamma_{01} - \sigma_{02}\gamma_{02} - \ldots - \sigma_{0T_0}\gamma_{0T_0} = 0 \qquad \text{(ortagonalite koşulu)}$$

şeklindedir. Bu iki eşitliği birleştirirsek,

$$\sigma_{01}\gamma_{01} + \sigma_{02}\gamma_{02} + \ldots + \sigma_{0T_0}\gamma_{0T_0} = 1 \tag{4.4.5}$$

elde edilir.

Karşılık gelen işaret fonksiyonları negatif olduğundan toplamları yerine farkları alınan dual değişkenler ile (4.4.5) bağıntısı, orjinal amaç fonksiyon için bir normalite kısıtı gibi görünür. Bu eşitlik **genelleştirilmiş normalite koşulu** olarak adlandırılır. Dolayısıyla önceki bölümlerde olduğu gibi, pratikte ne (4.4.3) denkleminin yazılmasına, ne de amaç fonksiyonun (4.4.1)'den x_0 'a dönüştürülmesine gerek vardır. Bunun yerine genelleştirilmiş (4.4.5) normalite koşulu ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ orjinal değişkenleri için ortagonalite koşulu kullanılabilir. Problemin çözümünde orjinal problemdeki sayıda denklem, dual değişken ve zorluk derecesi bulunacaktır. Negatif terimlerden gelen kuvvetlerin işaret değişiminden emin olunmalıdır. Bu zorunluluktan, problemin orjinal formu yerine amaç fonksiyon için;

$$\sum_{j=1}^{T_0} \sigma_{0j}\, \gamma_{0j} = 1 \tag{4.4.6}$$

normalite koşulu kullanılarak kurtulunabilir.

Bu durum için ortagonalite koşulu yine,

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=1}^{T_k}\sigma_{kj}a_{kij}\gamma_{kj}=0 \quad ; \quad i=1(1)n$$

olup, dual amaç fonksiyon ve γ_{k0} 'lar da daha önce tanımlandığı gibidir.

IV.4.II. **Negatif Değerli Amaç Fonksiyon:** Amaç fonksiyonun optimal değerinin negatif ($g_0^{*}(x)<0$) olduğunu kabul edelim. Bu sonuç için Kısım IV.4.I'deki durum

$$x_0 \le g_0(x) \qquad (4.4.7)$$

bağıntısını koruyacak şekilde dönüştürülmelidir. Buradan

$$x_0^{-1}g_0(x) \ge 1$$

veya

$$(-1.0)x_0^{-1}g_0(x) \le -1 \qquad (4.4.8)$$

elde edilir. (4.4.8) bağıntısı, her σ_{0j} ,j=1(1)T_0 ve eşitsizliğin sağ tarafındaki işaret farkı dışında aynı formdadır. Amaç fonksiyon yine x_0'ın minimizasyonu ve dual kısıtlar kümesi,

$$\gamma_{00}=1$$

$$\gamma_{00}+(-1)^2\sum_{j=1}^{T_0}\sigma_{0j}\gamma_{0j}=0$$

bağıntılarını korur. Buradan,

$$\sum_{j=1}^{T_0}\sigma_{0j}\gamma_{0j}=-\gamma_{00}=-1$$

olduğu görülebilir. Daha önce olduğu gibi problemi x_0 'ın minimizasyonu şeklinde yeniden formüle etmeye gerek yoktur. Yanlıca dikkat edilmesi gereken, genelleştirilmiş normalite koşulunun

$$\sum_{j=1}^{T_0}\sigma_{0j}\gamma_{0j}=-1 \qquad (4.4.9)$$

bağıntısı ile verilecek olmasıdır. Dual geometrik program için ortagonalite koşulu yine aynıdır. Bununla beraber optimallikte $g_0(x)$'in değeri

$$g_0^{*}(x)=-(\min x_0)^{-1}=-(x_0^{*})^{-1} \qquad (4.4.10)$$

olduğu için, $d^{*}(\gamma)$ dual çözümü değildir. Optimallikte primal ve dual problemlerin eşitliğini hedeflediğimiz için dual problemi aşağıdaki formda ele almalıyız:

$$d(\gamma) = -1\left[\prod_{k=0}^{m}\prod_{j=1}^{T_k}\left[\frac{C_{kj}\gamma_{k0}}{\gamma_{kj}}\right]^{\sigma_k\gamma_{kj}}\right]^{-1} \tag{4.4.11}$$

Her iki durumda $g_0^{\ddagger}(x)$ 'in işareti olan, yeni bir σ_0 işaret fonksiyonu tanımlayarak tek fonksiyon ile ifade edilebilir.Ozaman genelleştirilmiş normalite koşulu (4.4.6) ve (4.4.7) denklemleri aracılığıyla,

$$\sum_{j=1}^{T_0}\sigma_{0j}\gamma_{0j} = \sigma_0 \ (= \pm 1) \tag{4.4.12}$$

ile verilebilir. Bir çok problemde σ_0 'ın değeri genelde bilinir. Ortagonalite koşulu homogen olduğundan σ_0 'ın işaretinin değiştirilmesi diğer tüm γ_{kj} dual değişkenlerinin işaretlerini değiştirir.Dolayısıyla σ_0 için yanlış bir başlangıç tahmini sadece tüm dual değişkenlerin yanlış işaret (hepsinin negatif) almalarına sebep olacaktır, ancak mutlak değerce doğru olacaklardır. σ_0 ve dual değişkenler bir kere belirlendiğinde dual fonksiyon,

$$d(\gamma) = \sigma_0\left[\prod_{k=0}^{m}\prod_{j=1}^{T_k}\left[\frac{C_{kj}\gamma_{k0}}{\gamma_{kj}}\right]^{\sigma_k\gamma_{kj}}\right]^{\sigma_0}$$

şeklinde hesaplanabilir. Şuhalde dual fonksiyon daha önce geliştirilmiş tüm yollar aracılığıyla,şimdi negatif değerli kabul edebildiğimiz primali ile bağlantılıdır.

U. Passy ve D.J. Wilde (*), bazı ek koşullar geliştirmişlerdir. Bunları da, kütle haraketi yasasını tanımlayan denklemlere benzerliklerinden dolayı denge denklemleri olarak tanımlamişlardır. Yukarıda oluşturulmuş normalite ve ortagonalite koşullarına ek olarak bu nonlineer denge koşulları,değişkenleri kadar denklemden oluşan bir sistem verir. Bunlar,

$$\prod_{k=0}^{m}\prod_{j=1}^{T_k}\left[\frac{\delta_{k0}}{\delta_{kj}}\right]^{\sigma_{kj}\nu_{dkj}} = \prod_{k=0}^{m}\prod_{j=1}^{T_k} C_{kj}^{\ \sigma_{kj}\nu_{dkj}} \quad ; \ d=1(1)D \tag{4.4.13}$$

$$D = \sum_{k=0}^{m} T_k - (n+1)$$

ve burada ν_d ,d=1(1)D (ν_{dkj} bileşenli) σ_0=0 için normalite ve ortagonalite koşullarının lineer bağımsız çözümleridir.

(*) Passy U. ve D.J.Wilde,Mass Action and Polynomial Optimization , Journal of Engineering Mathematics, 3, 4, 325-355, 1969.

BÖLÜM V

STANDART OLMAYAN GEOMETRİK PROGRAMLAMA

Geometrik programlama için sınır teşkil eden bir yönü, nonlineer programların genelleştirilmiş polinomaller (posinomal yada signomal) olarak belirlenemeyişi ve dolayısıyla geometrik programlama metotları kullanılarak çözüm araştırmasının başarıyla yapılamaz oluşudur. Bu bölümde ele alınacak konu, standart formda olmayan birkaç tür problemin geometrik programlamaya uyarlanışı için dönüşümlerin tanımlanmasıdır.

V.1. Fonksiyonel Dönüşümler

Geometrik programlama algoritmalarının, yalnızca signomal yapı içeren nonlineer problemlerin çözümünde değil, aynı zamanda diğer bazı tür fonksiyonları içeren problemlere uygulanışlarında da güçlüklerle karşılaşılır. Bununla beraber, bu tür fonksiyonlar değişkenlerinde yapılacak uygun değişikliklerle posinomal yada signomal formlara dönüştürülebilirler. Aşağıdaki yapıda bir nonlineer programlama problemi göz önüne alınsın:

$$\text{minimum } g(x) = f(x) + [\, q(x)\,]^{a} h(x) \qquad , \; x>0, \; a>0$$

ve burada $f(x)$, $g(x)$ ve $h(x)$ tek yada çok terimli signomaller olsunlar. Bu genelleştirilmiş formülasyon, geometrik programlama kullanılarak doğrudan çözülemez; yinede basit bir dönüşümle standart geometrik programlama yapısına getirilebilir.

$$p = q(x)$$

olsun ve aşağıdaki şekilde, denkleme yerleştirilsin:

$$\text{minimum} \quad \bar{g}(x) = f(x) + p^{a} h(x)$$

$$\text{kısıt} : \quad p^{-1} [q(x)] \le 1$$

$$x, p \ge 0$$

Eşitsizlik kısıtlı, dengi olan bu problemin kuruluşundaki mantık şu şekilde açıklanabilir. $g(x)$ minimum yapılacağı için $q(x)$ 'i p ile değiştirerek, p 'nin minimizasyonda mümkün olduğu kadar küçük kalacağını gösteren $p \ge q(x)$ 'in doğruluğundan söz edebiliriz. Dolayısıyla optimumda $p=q(x)$'dir. Burada $h(x)$ ve $g(x)$ çok terimli ifadeler olabilir ve $\bar{g}(x)$'nin optimal (minimum) çözümü kesinlikle $g(x)$ 'in optimal çözümü ile aynıdır.

V.2. Genelleştirilmiş Polinomaller

Duffin, Peterson ve Zener tarafından (* ifadesi),

$$G(x) = \sum_{j=1}^{T} \prod_{i=1}^{u} \frac{[p_{ji}(x)]^{a_{ji}}}{[1 - q_{ji}(x)]^{\beta_{ji}}} \tag{5.2.1}$$

ile tanımlanan genelleştirilmiş polinomalin, hem minimize edilecek amaç fonksiyon olarak, hemde primal x değişkenlerinin sağlayacağı bir kısıt fonksiyonu olarak kullanılabileceği gösterilmiştir. Burada $p_{ji}(x)$ ve $q_{ji}(x)$ fonksiyonları çok terimli fonksiyonlar ve α_{ji}, β_{ji} sabitleri pozitif sayılardır. Ayrıca $1-q_{ji}(x)$ ve $p_{ji}(x)$ fonksiyonlarının pozitif kabul edilmesi uygundur. Aksi halde, dönüştürülmüş eşitsizlik kısıtlarının yönünün problemin çözümünden önce tahmin edilmesi gerekecektir. Basit bir uygulama yardımı ile bu genelleştirilmiş polinomallerin ortaya çıkışını inceleyelim. (* ifadesi)

$$G(x) = f(x) + \frac{q(x)}{[u(x) - h(x)]^a} \tag{5.2.2}$$

ifadesini minimum yapan pozitif x'ler belirlensin. Burada f,q ve h posinomal, u tek terimli polinomal ve a pozitif değerli sabittir.

Yukarıdaki problemle ilişkili olarak şimdilik şu,

$$g(x,v) = f(x) + \frac{q(x)}{v^a}$$

posinomal fonksiyonunun minimizasyonunu

$$\frac{v}{u(x)} + \frac{h(x)}{u(x)} \le 1$$

kısıtı altında inceleyelim. Burada v bağımsız ek değişkendir. u(x) tek terimli bir posinomal olduğundan bu problem standart posinomal programlama yapısındadır. Açıktır ki, ancak ve ancak x^f, G(x) 'i minimum yapıyorsa bu problemi de çözer. g(x,v) için kısıtlandırılmış minimum değer G(x) 'in minimum değerine eşittir. Yukarıdaki formülasyon posinomal olduğundan bağlantı, g(x,v) 'nin minimizasyonu problemi için çözümün bütünsel minimum çözüm olmasıdır. g(x) 'in çözümünün eşitliğinden, g(x) için de bir bütünsel çözüm elde edilmiş olur. Bu oluşum benzer şekilde signomal formlara da uygulanabilir fakat, dualinde konveks olmayan problemler ortaya çıkar.

V.3. Posinomal Yaklaşımlar

Posinomal geometrik programlama problemlerinde maksimum dual çözümün, primal problem için bütünsel çözüm olma özelliğinden dolayı, signomal geometrik programları posinomal programlara dönüştürebilecek yaklaşımlardan söz edebiliriz. Buna ait bir örnek kurulsun.

<u>Pseudo posinomaller</u>: Bu tür fonksiyonların oluşturduğu sınıfın önemli bir üyesi,

$$G(x) = \sum_{j=1}^{T} c_j \prod_{i=1}^{n} [f_i(x_i)]^{a_{ij}} \tag{5.3.1}$$

ile tanımlanan pseudo posinomaldir. Burada $f_i(x_i)$, gerçel değerli x_n değişkeninin bir pozitif fonksiyonu olup, x_n'e göre birinci türevi açık olmayan bir yapıdadır. Daha önce tanımlamış olduğumuz gibi bu posinomalde de c_j'ler pozitif sabitler ve a_{ij}'ler herhangi reel sayılardır. Ayrıca $G(x)$ her x için pozitiftir.

$G(x)$ 'i minimum yapan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değerleri aransın. Bunun için birinci mertebeden kısmi türev olan gereklilik koşulu;

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{T} c_j a_{kj} [f_k(x_k)]^{a_{kj}-1} \left[\frac{\partial f_k}{\partial x_k}\right] \prod_{i \neq k} [f_i(x_i)]^{a_{ij}} = 0$$

veya eğer $\frac{\partial f_k}{\partial x_k} \neq 0$ *ise,*

$$\sum_{j=1}^{T} c_j a_{kj} \prod_{i=1}^{n} [f_i(x_i)]^{a_{ij}} = 0 \quad ; \quad k=1(1)n \tag{5.3.2}$$

şeklindedir. Bu denklemler (3.1.1) ve önceki birkaç denklemle oldukça benzeşir. Bu denklemlere dayanarak değişkenlerinde dönüşüm yapabiliriz. Dual ağırlıklarını,

$$\lambda_j = \frac{c_j \prod_{i=1}^{n} [f_i(x_i)]^{a_{ij}}}{G(x)} \quad ; \quad j=1(1)T \tag{5.3.3}$$

olarak tanımlayalım. Daha önce olduğu gibi toplamları birdir:

$$\sum_{j=1}^{T} \lambda_j = 1 \tag{5.3.4}$$

Ortagonalite koşullarını elde etmek için (5.3.3) bağıntısını (5.3.2) 'de oluşturarak ve sıfırdan farklı $G(x)$ ile bölerek,

$$\sum_{j=1}^{T} a_{ij} \lambda_j = 0 \quad ; \quad i=1(1)n \tag{5.3.5}$$

bulunur. Posinomaller için olduğu gibi, x_j^* değeri bilinmeden λ_j için elde edilen sonuçlardan $G^* \equiv G(x^*)$ değeri (5.3.5) 'de göz önüne alınarak bulunabilir.

$$G^{*}=\prod_{j=1}^{T}(G^{*})^{\lambda_j}=\prod_{j=1}^{T}\left[\frac{c_j\prod_{i=1}^{n}[f_i(x_i)]^{a_{ij}}}{\lambda_j}\right]^{\lambda_j}$$

$$=\prod_{j=1}^{T}\left(\frac{c_j}{\lambda_j}\right)^{\lambda_j}\prod_{i=1}^{n}[f_i(x_i)]^{\sum_{j=1}^{T}a_{ij}\lambda_j}$$

$$=\prod_{j=1}^{T}\left(\frac{c_j}{\lambda_j}\right)^{\lambda_j}=d(\lambda^{*})$$

şeklindedir.

Optimal $f_i(x_i^*)$ değerleri,(5.3.3) kullanılarak yeniden $\log[f_i(x_i^*)]$ 'ye göre lineer denklemlerden oluşan,

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\log[f_i(x_i^*)]=\log\left[\frac{\lambda_j G^{*}}{c_j}\right]\quad ;\ j=1(1)T \tag{5.3.6}$$

sistemi kullanılarak hesaplanabilir. Otaktirde optimal x_i^* değerlerine $f_i(x_i^*)$ 'ın sayısal sonucundan ulaşılabilir.

V.4. Tek Terim Yaklaşımları

Uygun dönüşümlerin yer aldığı diğer bazı çalışmalar primal programın, signomallerden daha genel yapıdaki fonksiyonlar içermesine olanak tanır. Kesin sonuç veren yukarıdaki dönüşüm metotlarına ek olarak, Duffin, Peterson ve Zener (*) şu yaklaşım çözümünü oluşturmuşlardır. Örneğin, G(x) bir posinomal ve h(x) ne posinomal nede signomal olmak üzere,

$$f(x) = G(x) + h(x)$$

kabul edelim. Burada kullanılan teknik h(x) 'in tek terimli posinomale yaklaştırılmasıdır. Bu işlem yapılırken, her x_j 'nin değişim aralığının tahmin edilmesi gerekir. $\hat{x}_j$ 'lar bu aralığın geometrik ortası olsun. (*) 'da geliştirilen yöntemi kullanılarak $\hat{x}=(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots,\hat{x}_n)$ 'yı işlem noktası olarak alalım. Geometrik program çözdüğümüz için noktanın bileşenleri pozitif olarak kabul edilir. Amacımız h(x)'i tek terimli bir posinomale, diyelim u(x) 'e yaklaştırmaktır.

(*) Duffin R.J.,E.L. Peterson ve C.M. Zener,Geometric Programming Wiley, NewYork, 1967

Bu yaklaşımı şu şekilde yazabiliriz:

$$u(x) = c\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} = u(\hat{x}) \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{x_i}{\hat{x}_i}\right]^{a_i} \qquad (5.4.1)$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \frac{a_i}{x_i}\, u(x) \quad ; \quad i=1(1)n \qquad (5.4.2)$$

olur. Dolayısıyla h(x) 'in

$$h(x) = h(\hat{x}) \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\hat{x}_i}\right)^{a_i} \qquad (5.4.3)$$

şeklindeki yaklaşımı yapılabilir. Burada a_i 'ler (5.4.2) denkleminden yaklaşımda ortaya çıkan,

$$a_i = \frac{\hat{x}_i}{h(\hat{x})}\left[\frac{\partial h(x)}{\partial x_i}\right]_{x_i=\hat{x}_i} \quad ; \quad i=1(1)n \qquad (5.4.4)$$

şeklindeki değerlerdir.

Eğer h(x^) pozitif ise, ozaman (5.4.3) denklemini kullanarak f(x) bir posinomale yaklaştırılır. Bu yaklaşım x^ işlem noktasında, f(x) ve posinomalin aynı birinci türeve ve türev değerine sahip oldukları şeklindeki bir yaklaşımdır. Bu tür yaklaşımların belirtildiği kadar doğrulukla yapılamasına rağmen,genel nonlineer yapının posinomal yapıya dönüşümü için anlamlıdır.

V.5. Posinomal Formda Logaritmik Terimler

Yine birçok uygulamada matematiksel modelin kurulması sırasında logaritmik terimlerle karşılaşılabilmektedir. Temel geometrik programlama yapısında problem formülasyonu için Kısım 5.3 'deki durum oluşması haricinde bu tür terimler kullanılamazlar. Bununla beraber, logaritmik formu temel geometrik programlama yapısına dönüştürmek için uygun yakınsama işlemleri kullanılır. ϕ keyfi reel sayısının,

$$\log\phi = \int_1^{\phi} \frac{dx}{x} = \int_1^{\phi} x^{-1}dx$$

şeklinde tanımlanan logaritmasını göz önüne alalım. Küçük bir pozitif pozitif ϵ sayısı tanımlansın ve

$$\log\phi = \int_1^{\phi} x^{\epsilon-1}\, dx$$

olarak kabul edilsin.Dolayısıyla $\log\phi = \phi^{\epsilon}/\epsilon - 1/\epsilon$ olur ve limitte

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left[\frac{\phi^{\epsilon}}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon}\right] \to \log\phi$$

şeklindedir. Bu işlem sayısal olarak geçerlidir, çünkü ϵ sıfıra yaklaşırken x^{ϵ}'un bir olacağı açıktır. Dolayısıyla $\ln\phi$, $\epsilon \to 0$ için

$$\epsilon^{-1}[\,\phi^{\epsilon} - 1\,]$$

ile yaklaştırılır. Bu yaklaşımı uygulamak için şu şekildeki bir nonlineer programlama problemini göz önüne alalım:

$$\text{minimum} \quad Y(x) = f(x) + \log[G(x)]$$

Ayrıca, $G(x)$ tek terimli bir posinomal ve $f(x)$ genel geometrik programlama terimi olsun. Eğer $G(x)$ tek terimli posinomal değil ise Kısım 4.5 'de kullanılan metotla dönüşüm yapılabilir. ϵ'u küçük bir sayı olarak kullanarak, yaklaşımı şu şekilde yapılabilir:

$$\text{minimum} \quad Y(x,\epsilon) = f(x) + \epsilon^{-1}[G(x)]^{\epsilon} - \epsilon^{-1} \qquad (5.5.1)$$

Bu problem standart (kısıtsız) geometrik programlama yapısındadır. Bundan da ileri olarak, tek terimli $G(x)$ fonksiyonu dönüşüm ile fonksiyondan çıkartılarak, Kısım 5.1 'deki metot kullanılarak

$$\begin{array}{ll} \text{minimum} & f(x) + \epsilon^{-1}z^{\epsilon} - \epsilon^{-1} \\ \text{kısıt :} & z^{-1}[G(x)] \leq 1 \end{array}$$

şeklinde kullanılabilir. Bu durumda problem temel yapıdadır. Eğer $f(x)$ ve $G(x)$ 'in her ikiside posinomal ise dual geometrik program bütünsel (minimum) çözüm için tek olacak şekilde çözülebilir.

V.6. Eksponansiyel Terimler

Nonlineer dizayn problemlerinde sık sık ortaya çıkan diğer bir genel fonksiyon, eksponansiyel terimler içeren yapıda olanlardır. Uygun yakınsama teknikleri yardımı ile bu yapı da genel geometrik programlama teorisi içinde çözülebilir. Şu problemi göz önüne alalım:

$$\text{minimum} \quad Y(x) = f(x) + c.e^{g(x)}$$

Burada $f(x)$ posinomal yada signomal, $g(x)$ tek terimli posinomal ve c negatif olmayan keyfi sabittir.

$$e^{z} = \lim_{\phi \to \infty}\left[\left(1 + \frac{z}{\phi}\right)^{\phi}\right]$$

olduğu bilinir. Dolayısıyla yukarıdaki probleme yeterince büyük ϕ için şu yaklaşım bağıntısı kullanılarak istenen doğrulukla yaklaşılabilir:

$$minimum \quad y(x,\phi) = f(x) + c\left[1 + \frac{g(x)}{\phi}\right]^{\phi}$$

bu yaklaşım problemi standart geometrik programlama yapısında değildir, buna rağmen Kısım 5.1 'deki yöntem kullanılarak yeniden kurulabilir. Dolayısıyla eşiti olan şu problem ele alınır:

$$\text{minimum} \quad y(x,\phi,\beta) = f(x) + c.\beta^{\phi}$$

$$\text{kısıt:} \quad \beta^{-1} + \beta^{-1}\phi^{-1}g(x) \leq 1$$

Bu yaklaşım dönüşümün yapılışı sırasında, dönüştürülmüş problemde terim sayısı bir artar.

V.7. Eşitlik Kısıtları

Standart basitlikteki geometrik programlama formülasyonunda primal problemde sadece $g_k(x) \leq \sigma_k$,$k=1(1)m$ eşitsizlik kısıtlarına yer verilmiştir. Oysa bazı uygulamalarda kesin eşitlik kısıtlarına ihtiyaç duyulabilecektir. Bu güçlüğün çözümlenmesi için en basit yöntem, her eşitlik kısıtının iki eşitsizlik kısıtı ile ifade edilmesidir.Bu yaklaşımdaki esas güçlük,zorluk derecesinin oldukça büyümesidir.

Problem şu iki yöntemden birisi kullanılarak çözülebilir:birincisi belirsiz yada tahmin metotları, diğeri ise bilimsel mantık kullanmaktır.

Problemde yer alan eşitlik kısıtları için birinci adım optimal durumdaki yapılarından hareketle zorlayıcı mı yoksa bağlayıcı mı olduklarına karar vermektir. Herhangi eşitlik kısıtı $\{\leq,\geq\}$'dan uygun eşitsiziliğin seçimi ile optimallikte bağlayıcı olmaya zorlar. Dolayısıyla problemdeki her eşitlik için bir eşitsizlik bağıntısı tahmin edilir ve elde edilen problem çözülür. Eğer, optimallikte bir veya daha fazla kısıt zorunlu yada bağlayıcı olmaktan çıkarsa eşitlik kısıtı için yapılan tahmin değiştirilmeli ve yeniden çözüm yapılmalıdır. Geçersiz gibi görünsede kısıt için doğru tahmin, eldeki problemin fiziksel bilgisi ile genellikle oluşturulabilir.

İkinci metot ise (mümkün olduğunda) eşitsizlik formunun doğru kullanımının belirlenmesinde özel yöntemler kullanmaktır.

Formel olarak, primal eşitlik kısıtının eşitsizlik kısıtı olarak yer değiştirilmesi, orjinal kısıtları sağlayan C mümkün noktalar kümesinin, C' kümesini kapsadığı anlamındadır.

Blau ve Wilde (*),bu ikinci metodu aşağıdaki maddeleri kullanarak eşitsizlik kısıtının tahminen belirlenmesini belirsizlik yapısına katan, çalışmalar yapmışlardır.Bu yöntem:

a.) Eşitlik, amaç fonksiyondaki tek bir değişken için çözülür,
b.) Kısıtları kaldırıp, kısıtsız amaç fonksiyonunun minimizasyonunda değişkenin sıfır yada sonsuza mı yakınsadığı belirlenir,
c.) Bu değişken için sıfır yada sonsuzu hariç tutacak şekilde kesin pozitifliği korumak üzere eşitsizliğin belirlenmesidir.

Eğer herhangi bir eşitlik için bu yöntem uygulanamıyor ise, iki eşitsizlik kısıtı ile yerdeğiştirilir.

(*) Blau G.E. ve D.J. Wilson, Generalized Polynomial Programming Canadian Journal of Chemistry Engineering, Vol.47, 1969

BÖLÜM VI

SONUÇ

VI.1. Uygulama Problemi

İlk beş bölümde kurulmuş olan geometrik programlama teorisine ait ve daha önce çözülmüş, geniş bir örneği çalışmamıza katalım. Öncelikle, yapılmış uygulama çalışmalarından ve konunun ortaya çıkışına neden olan temel problemler hakkında, kısa bir ön bilgi verilmesi yararlı olacaktır.

Geometrik programlamanın yayınlanmış uygulamaları M.J. Rijckaert tarafından tanıtılmıştır. Kimya mühendisliği alanından seçilmiş olan klasik optimizasyon problemleri, mühendisklik dizaynında geometrik programlamanın özelliklerini açıklamışlardır. Sonraları J.Folkers ve A. Templeman geometrik programlama için iki uygun örnek belirlemişlerdir. Her iki örneğide, optimizasyon tekniklerinin yeterince kullanılamadığı "gemi inşaa ve köprü yapısı" konularından seçmişlerdir.

İlk olarak Clarence Zener tarafından lineer terimlerin toplamlarından oluşan denklemler kümesini çözerek,kesin tahminler altındaki minimizasyonu problemini incelemiştir. Konunun ilk uygulamaları elektrik mühendisliği alanından geliştirilmiştir. Bu tarihlerde elektrik transformatörlerinin dizaynı, oldukça ilgi çeken bir uygulamaydı.

Bu problemin dikkatlice incelenmesi R.J. Duffin, E.L. Peterson ve C.M. Zener tarafından yapılmıştır. Ayrıca dual formülasyonun ele alınışı ile transformatörler için bir yasa oluşturmuşlardır. R. Schinzinger de aynı tip problemle ilgilenmiş ve geometrik programlamanın diğer tekniklere göre etkinliğini vurgulamıştır.

Zener ve Duffin, geometrik programlamayı verilen yeni ve geçerli özgün değerler için bir minimum toplam maliyete sahip bir kok kömürünün optimal üretim dizaynına uygulamışlardır. Okyanusun üst seviyesinden güneş enerjisi toplayan makinenin sıcaklığı kısıtı altında bir su gücü jenaratorünün optimal dizaynı, geometrik programlamanın Duffin, Peterson ve Zener tarafından ele alınmış diğer bir örneğidir. Elektrik mühendiliği alanında yapılmış olan ilk çalışmaların çoğu posinomal programlardan oluşmaktadır.

Geometrik programlama kimya mühendisliği alanında mümkün uygulamaları için verimli bir yer edinmiştir. T.K. Sherwood kimya mühendisliğindeki uygulamalara yönelen ilk kişi olmuş ve petrol boru hattı probleminin çözümü için kullanışlılığını göstermiştir.

Sabit ısı genişlemesine sahip bir kondansatörün en ekonomik boyutlarının belirlenmesi M.Avriel ve Wilde 'nin, oluşturdukları yöntemle çözdükleri ilk problemdir. Daha sonra stokastik problem olarak da ifade etmişlerdir. Passy ve Wilde dual geometrik programlama formülasyonu ve hidrojen ve oksijenin 750 br basınç altındaki karışımının kimyasal bağıntısı arasında güçlü bir ilişki kurmuşlardır. Dual geometrik program ve kimyasal eşitlik problemleri arasındaki denk formülasyonun geometrik programlama uygulamasında güçlü hesaplama etkisi mevcuttur.

Birçok diğer uygulama, kimyasal reaktör dizaynı alanında kurulmuştur. Avriel tarafından ifade edilmiş olan problem

$$2A \rightarrow R$$

ikinci mertebe reaksiyon için bir reaktörün dizaynını amaçlayan posinomal bir programdır. Ancak sonraları birçok problem σ_{kj} ve σ_k negatif işaret fonksiyonlarını içeren optimal reaktör dizaynı ile ilgili olup, dolayısıyla signomal programlar ve dönüştürülmüş programlar sınıfında yer almışlardır.

Bu tip bir problemin oldukça geniş ve detaylı bir örneği G. Blau ve Wilde tarafından verilmiştir. İzotermal reaktör için optimal işlem koşullarını ve reaksiyon için ısı değişim miktarını da

$$A \rightarrow B$$

$$A + B \rightarrow E$$

olarak belirlemişlerdir. Bu sistem için matematik model, bir amaç fonksiyonu ve 9 nonlineer eşitsizlik kısıtından oluşur. Zorluk derecesi 27'dir. Problem lagrange algoritması kullanılarak Newton Ralphson yöntemi üzerine kurulmuştur.Bu ise primal formülasyondan oluşturulmuş lagrange fonksiyonunun gradyeninin bileşenlerini sıfıra taşır. Yine Passy ve Wilde, karıştırma kazanlarının içinde oluşan akışta ısı seçimi problemini de ele almışlardır.

Avriel ve A.Williams üç aşamalı ısı değişim katarını bir signomal program olarak oluşturup, optimum dizaynını formüle etmişlerdir ve tüm geometrik programlama metodunu kullanarak çözmüşlerdir.

R.T.Kermoda posinomal formda üç farklı problem çözerek geometrik programlamanın kimya mühendisliğine uyarlanışını ifade etmiştir. Bu problemlerin ilki,verilen bir hacmi elde edebilmek için filtre basıncının toplam zaman ihtiyacının minimize edilmesidir. Diğeri gazın optimum ara adım basıncını p_1 basıncından p_2 'ye 4 adımda minimum bir yöntemle sıkıştırmak için hesaplama yapılmasıdır. Son problem ise vanasız bir boru hattı için optimum boru çapının belirlenmesi ile ilgilidir.

D.T. Phillips ve C.S. Beightler makine mühendisliğinde geometrik programlamanın kullanışını optimum mesafe ve dönüş hızının bulunması çalışması ile göstermişlerdir. Her iki problemde posinomal yapıdadır.

Bu bölümde ele alacağımız örnek uygulama,yine bir optimum reaktör dizaynı problemidir [8].

VI.1.1. Optimal Reaktör Dizaynı

Bu aşamada geometrik programlamanın tamamlanışını, biribiri ile bağlantılı reaktör tanklarında bir akışın optimal ısı ve bulundurulma süresini içeren bir örnek ile verelim.

Birçok diğer uygulama arasından bu problemin seçilmesinin gerçekte üç esas sebebi vardır. Birincisi kimya mühendisliği alanında optimizasyon teorisinin kullanımının klasik bir göstergesi ve daha önceden de birkaç farklı metotla çözülmüş olmasıdır. Bu ise çözüm prosedürümüzü daha önce kullanılmış tekniklerle kıyaslamayı mümkün kılacaktır.

İkinci ve en az ilki kadar önemli bir sebep, bu modelin en genel yapıdaki geometrik programlama uygulanırken ortaya çıkabilecek bazı güçlükleri bulundurması ve çözümlerinin gösterilmiş olmasıdır.

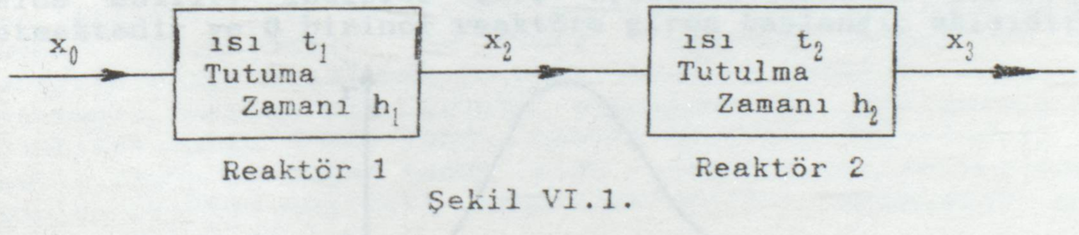
Üçüncü bir sebep, kimya mühendisliği alanından orjinal bir örnek de olsa bu problemin özel bir bilgiye ihtiyaç göstermemesidir. Dolayısıyla bu alana yakın olmayan kişiler tarafındanda kolayca anlaşılabilirdir. Ayrıca kullanılan işleyiş bu özel modelin herhangi bir özgün biçiminden etkilenmez. Bu yüzden diğer bazı uygulamalarda da kullanılabilir.

Şu enzim reaksiyonunu göz önüne alalım (*):

$$E + S \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} ES$$

$$ES \xrightarrow{k_2} E + P$$

Bu reaksiyonda bir E enzimi ve S maddesi etkileşerek kompleks ES ara maddesini oluşturarak, değerli bir P ürünü elde edilmektedir. Bu reaksiyon, sürekli bir ara bağlantı ile biribirine bağlanmış olan iki adet reaksiyon kazanından oluşan bir düzenekte gerçekleştirilsin. Geliştirilen model için enzim ve ürünlerin gerçek isimleri gerekli değildir. Şuhalde E, S, ES ve P 'yi bu maddeleri temsil eden ifadeler olarak alalım.



Şekil VI.1.

(*) Laidler K.J. , Chemical Kinetics, NewYork, McGraw Hill Book Co., 1950

Bu işlemin mümkün olduğu kadar yararlı olmasını sağlamak,prosesin yeterli bir matematik modelini kurmak ve bu modelin optimizasyonu çalışmasını yapmakla sağlanabilir.

1.) Her reaktör için ısının sabit olması gereklidir.Reaksiyon ile gerçekleşen faydadaki değişim, birim zaman başına P ürün miktarı olan üretim oranı r ve T arasındaki çizimle verilebilir(Şekil 2).

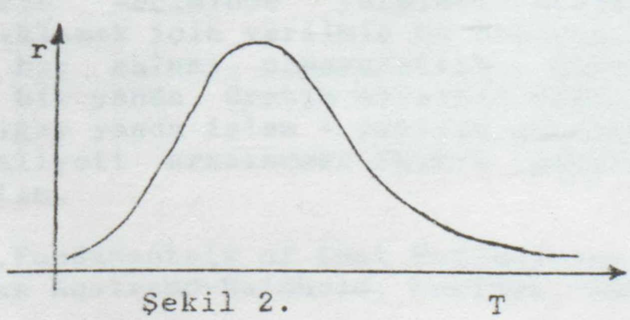
Bu eğrinin özel şekli, T 'deki artışın daha fazla P vermesine bağlı olarak reksiyonun etkinleşmesinde ve T 'deki artış sürdüğü zaman P 'nin üretiminin azalması ile sonuçlanan enzimin geriye etkinleşmesinde ısının ortak etkisi ile meydana gelir. Bu bir optimal T ısısının varlığını gösterir.

2.) Sürekli bir boru ile bağlanmış bir reaksiyon kazanı için h tutulma zamanı,reaktör hacminin ve akış oranı hacminin biribirine oranıdır. Bu akış oranı hacmi belirli bir değerde sabit kabul edilir. Tutulma zamanının arttırılması P'nin daha fazla üretimini sağlayacaktır.Fakat diğer taraftan daha geniş hacimli bir reaktör talebi yaratacaktır ve dolayısıyla daha büyük bir yatırım ve işletim maliyetine sebep olacaktır. Ohalde burada da bir optimal h değeri mevcuttur.

3.) Reaksiyon iki reaktörün içindeki akış sırasında oluşturulduğu için,bu durumda tek bir reaktörde olduğundan daha geniş ayrıntılı fayda ve dönüşüm sağlayacaktır. Belirlememiz gereken, birinci ve ikinci reaktör arasındaki toplam faydayı bu yolla ayırırken birinci reaktörde oluşan reaksiyonun büyüklüğüdür. Gerçekten ayrı ayrı ve biribirinden bağımsız optimize edilen her rektör dizaynı probleminde yapılan aşırı işlemle, optimal faydanın verilmesi hatalı olabilecektir.

Bu kimyasal işlem için matematiksel model, her reaktöre ait üç değişken içerecektir: T ısısı, h tutulma zamanı ve S maddesinin karışım yoğunluğu x 'dir. Bu üç değişken bir tek denge bağıntısı aracılığı ile sınırlandırılmıştır. Bu denge S için formüle edilecektir ve bu, reaktörden çıkan S miktarının, reaktöre giren miktar ve P 'ye etki eden miktar arasındaki fark olduğunu ifade eder.

Buna göre birinci reaktör için $x_1 = x_0 - r_1 h_1$ (6.1.1)
elde edilir. İndisler akış içindeki reaktör sayısını ifade etmektedir ve 0 birinci reaktöre giren başlangıç akışıdır.



Şekil 2.

İkinci reaktör için kütle dengesi $x_2 = x_1 - r_2 h_2$ (6.1.2) olarak yazılabilir. Bu problem için r reaksiyon oranı,

$$r = \frac{k_2(T)\,[E]^0\,[S]}{K_m(T) + a\,[S]} \tag{6.1.3}$$

şeklinde verilir. Burada a bilinen bir sabit ve $k_2(T)$ ve $K_m(T)$ ısının deneysel olarak belirlenebilen ifadeleridir. [] parantezli ifadeler yoğunluğu gösterir ve ^{0} indisi toplam enzim yoğunluğu

$$[E]^0 = [E] + [ES]$$

için yazılmıştır.

r 'nin ifadesinde şu sayısal değerleri yerleştirerek;

$$a = 0.1 \qquad k_2(T) = 1.7\ 10^{13}\ e^{-\frac{1830}{RT}}$$

$$[E]^0 = 10^{-13} \qquad K_m(T) = 4e^{-\frac{3240}{RT}} + 2e^{-\frac{830}{RT}}$$

için,

$$r = \frac{1.7x}{4t + 2t^{-0.71} + 0.1t^{-1.3}x} \tag{6.1.4}$$

elde edilir. t değişkeni T ısısının birebir bir fonksiyonu olup,

$t = e^{-\frac{1410}{RT}}$ şeklindedir ve T yerine karar değişkeni olarak kullanılabilir.

Oran ifadesinin yukarıdaki (6.1.4) şekli kimyasal kinetikte oldukça geneldir. Dolayısıyla model sadece bu örnek için sınırlandırılmamış olup, halen reaksiyonların geniş bir sınıfı için de geçerlidir. Optimizasyon prosesini işletmek için, optimum değer amaç fonksiyona oldukça bağlı olduğundan, öncelikle hedeflerimizi belirlememiz gerekir.

Problemin ekonomik ihtiyaçlarıyla kişisel ihtiyaçları,mühendislik maliyetleri ile birlikte incelemek (**), dizayn eden kişiye en uygun kriterlerin seçiminde yardımcı olacaktır. Geometrik programlamayı açıklamak için verilmiş bu örnekte, bu incelemeleri yapmanın fazlaca bir anlamı olmayacaktır. Çalışmamız için amaç fonksiyonumuzu " bir yanda üretim akışının değerindeki artışına bağlı fayda ve diğer yanda işlem - yatırım maliyetlerinden oluşan toplam reaktör maliyeti arasındaki farkın maksimize edilmesi " olarak kabul edelim.

(**) Bauman H.C.,Fundamentals of Cost Engineering in the Chemical Industry, Van Nostrand-Reinhold, NewYork, 1964.

Amaç fonksiyonun birinci kısmının P 'deki yoğunluk artışı ile orantılı olacağını varsayalım. Reaksiyonun yapısından dolayı bu, S'in yoğunluğundaki azalma ile orantılı olduğu kabulü ile aynı anlamdadır. Gerçekte reaksiyondan çıkan her mol S, bir mol P verecektir. Dolayısıyla,

$$c_1\ [\ (x_0-x_1) + (x_1-x_2)\ ]$$

ifadesi amaç fonksiyonun ilk kısmı için matematiksel yazımdır. x_0 başlangıç yoğunluğu, problemin bir sayısal girdisidir. Burada, x_0=10 mol/l olarak göz önüne alınacaktır.

Toplam reaktör maliyetinin tutulma zamanı ile belirleneceği kabul edilir ve

$$c_2\ [\ h_1^{\alpha} + h_2^{\alpha}\ ]$$

ile ilişkilidir. α için 0.67 değeri (**)'dan mantıklı bir tahmin olarak ele alınabilir.

Ozaman, amaç fonksiyonun tamamı,

$$\max\ [\ c_1(x_0-x_1) + c_1(x_1-x_2) - c_2\ (\ h_1^{\alpha} + h_2^{\alpha}\ )\ ]$$

veya $c = \dfrac{c_2}{c_1}$ alarak;

$$\max \sum_{i=1}^{2} [\ (x_{i-1} - x_i) - c\, h_i^{\alpha}\ ] \qquad (6.1.5)$$

şeklinde yazılabilir. c'nin değeri, problemin ekonomisi detaylı bir şekilde incelenerek bulunabilir ve bu örnek için 0.4 olarak kabul edilmiştir.

Şuhalde matematiksel programlama problemi;

amaç fonksiyon;

$$\max \sum_{i=1}^{2} [\ (x_{i-1}-x_i) - 0.4h_i^{0.67}\ ] \qquad (6.1.6)$$

kısıtlar:

$$x_0 = x_1 + r_1 h_1 \qquad (6.1.7)$$

$$x_1 = x_2 + r_2 h_2 \qquad (6.1.8)$$

$$r_i = \frac{1.7x_i}{4t_i + 2t_i^{-0.71} + 0.1t_i^{-1.3}x_i}\ ;\ i=1,2 \qquad (6.1.9)\ (6.1.10)$$

ve

$$x_1,\ x_2,\ h_1,\ h_2,\ t_1,\ t_2 \geq 0 \qquad (6.1.11)$$

şeklindedir.

x_1, x_2 değişkenleri için X_1, X_2 ile belirtilmek üzere,

$$X_1 = x_0 - x_1$$

$$X_2 = x_1 - x_2$$

dönüşümü yapılsın. Bu S 'in yoğunluğundaki azalma yada P 'nin yoğunluğundaki artmadır. Bu dönüşüme göre kurulan yapı, X_1 ve x_2 nin diğer fonksiyonlarını amaç fonksiyon olarak kullanan modeller içinde geçerlidir.

(6.1.7) ve (6.1.8) kısıtları (6.1.6)'dan h_i 'leri elde etmek için kullanılır. (6.1.9) ve (6.1.10) bağıntılarının paydalarını y_1 ve y_2 sembolleri olarak alır ve maksimizasyon problemini bir minimizasyon problemine dönüştürebiliriz. Bazı aritmetik işlemler yapılarak problem;

$$\min \quad -X_1 - X_2 + 0.4X_1^{0.67}r_1^{-0.67} + 0.4X_2^{0.67}r_2^{-0.67} \qquad (6.1.12)$$

kısıtlar;

$$0.0588r_1y_1 + 0.1X_1 = 1 \qquad (6.1.13)$$

$$0.0588r_2y_2 + 0.1X_1 + 0.1X_2 = 1 \qquad (6.1.14)$$

$$4t_1y_1^{-1} + 2t_1^{-0.71}y_1^{-1} + 0.0588r_1t_1^{-1.3} = 1 \qquad (6.1.15)$$

$$4t_2y_2^{-1} + 2t_2^{-0.71}y_2^{-1} + 0.0588r_2t_2^{-1.3} = 1 \qquad (6.1.16)$$

$$X_1,\ X_2,\ t_1,\ t_2,\ y_1,\ y_2,\ r_1,\ r_2 \geq 0 \qquad (6.1.17)$$

şeklini alır.

Geometrik Programlama İle Çözüm

(6.1.12)-(6.1.17) arasındaki problem henüz geometrik programlama tekniklerinin kullanımı için uygun bir formülasyon değildir.Çünkü kısıtlar birer eşitlik olarak ifade edilmişlerdir. Daha önce de belirildiği gibi bu durumlarda izlenebilecek yollardan birisi,her eşitlik kısıtını iki eşitsizlik kısıtı ile ifade etmektir. Fakat bu yöntem problemin zorluk derecesini yaklaşık iki katına çıkarıp sayısal çözümünü oldukça güçleştirecektir.

Yukarıdaki eşitliklere (6.1.13)-(6.1.17) sağlayan uygun noktalar kümesi C 'yi C' 'ne genişletecek bir eşitsizlik işareti katılsın. Bu yapı ancak ve ancak,

$$\min g_0(\underline{x}) > \min g_0(\underline{x}=X_1,X_2,t_1,t_2,y_1,y_2,r_1,r_2),$$

$$\underline{x} \in \bar{C} \cap C \quad , \underline{x} \in C$$

ise mükemmel olarak kurulabilir.

Gerçekte bu koşullar altında, minimizasyon işlemi x vektörünü optimumda tüm kısıtlarını aktif yapan C kümesinde olmaya zorlar. Blau ve Wilde beşinci bölümün sonunda verilen (sf:71) metodu oluşturmuşlardır. Eğer herhangi bir eşitlik kısıtı için bu kural uygulanamıyor ise iki eşitsizlikle ifade edilmelidir. Bu metot (6.1.13) için uygulansın:

a.) $$r_1 = \frac{1 - 0.1X_1}{0.0588y_1}$$

b.) (6.1.12) amaç fonksiyonunun kısıtsız minimizasyonu araştırıldığında (tek değişkenli bir fonksiyonun optimum değerinin bulunması), r_1'in sonsuza yakınsadığı görülür. Ohalde, amaç fonksiyonun optimum değerinin sonsuza yükselmemesi için r_1 değişkenine bir üst sınır yazılır.

c.) $$r_1 \le \frac{1 - 0.1X_1}{0.0588y_1}$$

veya

$$0.0588r_1y_1 + 0.1X_1 \le 1$$

Benzer yaklaşımlar kullanılarak problem şu yeni forma getirilir:

P:

$$\min \quad -X_1 - X_2 + 0.4X_1^{0.67}r_1^{-0.67} + 0.4X_2^{0.67}r_2^{-0.67} \qquad (6.1.18)$$

kısıtlar;

$$0.0588r_1y_1 + 0.1X_1 \le 1 \qquad (6.1.19)$$

$$0.0588r_2y_2 + 0.1X_1 + 0.1X_2 \le 1 \qquad (6.1.20)$$

$$4t_1y_1^{-1} + 2t_1^{-0.71}y_1^{-1} + 0.0588r_1t_1^{-1.3} \le 1 \qquad (6.1.21)$$

$$4t_2y_2^{-1} + 2t_2^{-0.71}y_2^{-1} + 0.0588r_2t_2^{-1.3} \le 1 \qquad (6.1.22)$$

$$X_1,\ X_2,\ t_1,\ t_2,\ y_1,\ y_2,\ r_1,\ r_2 \ge 0 \qquad (6.1.23)$$

Bu yapı amaç fonksiyonu signomal, kısıtları posinomal olan geometrik programlama programını ifade eder. Zorluk derecesi 6'dır.

Dual geometrik program için amaç fonksiyonu (sf:63),

$$\sigma_0 \left[\prod_{k=0}^{m} \prod_{j=1}^{T_k} \left(\frac{c_{kj}\,\gamma_{kj}}{\gamma_{kj}} \right)^{\sigma_{kj}\gamma_{kj}} \right]^{\sigma_0} \qquad (6.1.24)$$

olup burada,

$c_1=1.0$	$c_4=0.4$	$c_7=0.0588$	$c_{10}=4.0$	$c_{13}=4.0$
$c_2=1.0$	$c_5=0.0588$	$c_8=0.1$	$c_{11}=2.0$	$c_{14}=2.0$
$c_3=0.4$	$c_6=0.1$	$c_9=0.1$	$c_{12}=0.0588$	$c_{15}=0.0588$

ve $\sigma_{01,02} = -1$, tüm diğerleri için $\sigma_{kj} = +1$ 'dir.

Dual geometrik programlamanın kısıtları, dual değişkenlerin pozitiflikleriyle beraber normalite ve ortagonalite koşullarıdır. Normalite koşulunu formüle etmek için min g_0'ın işareti hakkında bir tahmin yapılmalıdır. Herzaman kolaylıkla yapılabilir. İşlemin min $g_0 < 0$ 'a göre uygun olmasını beklediğimiz için,

$$\sigma_0 = \text{sign}(\min g_0) = -1$$

alabiliriz. Bu kabul altında eğer problem tutarsız bir yapı gösterirse problem bu kez $\sigma_0=+1$ için çözülmelidir. Bu taktirde normalite koşulu,

$$-\gamma_{01} - \gamma_{02} + \gamma_{03} + \gamma_{04} = -1 \qquad (6.1.25)$$

ve ortagonalite koşulları,

$$\begin{aligned}
X_1 &: \text{için} & -\gamma_{01} + 0.67\gamma_{03} + \gamma_{12} + \gamma_{22} &= 0 \\
X_2 &: \text{için} & -\gamma_{02} + 0.67\gamma_{04} + \gamma_{23} &= 0 \\
r_1 &: \text{için} & -0.67\gamma_{03} + \gamma_{11} + \gamma_{33} &= 0 \\
r_2 &: \text{için} & -0.67\gamma_{04} + \gamma_{21} + \gamma_{43} &= 0 \\
y_1 &: \text{için} & \gamma_{11} - \gamma_{13} - \gamma_{32} &= 0 \qquad (6.1.26) \\
y_2 &: \text{için} & \gamma_{21} - \gamma_{41} + \gamma_{42} &= 0 \\
t_1 &: \text{için} & \gamma_{31} - 0.71\gamma_{32} - 1.3\gamma_{33} &= 0 \\
t_2 &: \text{için} & \gamma_{14} - 0.71\gamma_{42} - 1.3\gamma_{43} &= 0
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu dual yapı (6.1.24) 'ün bir ekstremumu için, (6.1.25) ve (6.1.25) kısıtları altında,dual değişkenlerin pozitif tanımlı oldukları göz önüne alınarak çözülebilir.

Bu problemin çözümü için (sf:63) 'de (4.4.13) ile verilen bağıntılardan elde edilen ek denge koşulları göz önüne alınsın. Tekniğin etkinliği üzerine tartışmaktan çok,bu yaklaşım geometrik programlamada (6.1.25) ve (6.1.26) 'nın homogen kısmından oluşturulan bu tip nonlineer denklemlerin kullanımını göstermek üzere seçilmiştir.

Normalite ve ortagonalite koşullarında $\sigma_0=0$ alınarak elde edilmiş homojen denklemler, D (=T-n-1) lineer bağımsız çözüme;

$$\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_d, \ldots, \underline{v}_D$$

sahiptir ve kolaylıkla elde edilebilir. Homojen denklemler

$$\underline{A}\,\underline{\gamma} = \underline{0} \qquad (6.1.27)$$

ile sitematik olarak, $\underline{A}$ matrisi T*(n+1) boyutlu ve $\underline{A}_1, \ldots, \underline{A}_T$ sütun vektörlerinden oluşacak şekilde yazılabilir. $\underline{A}$ 'dan D sütun kaldırıldığında,singüler olmayan $\underline{B}$ kare matrisi elde edilir. Eğer böyle bir matris oluşmazsa,(6.1.27) 'nin D 'den daha fazla lineer bağımsız çözümü elde edilebilir. $\underline{B}$ matrisi mevcut olsun ve $\underline{A}$ 'nın ilk n+1 sütunundan oluşturulsun. D*D boyutlu lineer denklemlerden oluşan,

$$\underline{B}\,\underline{V}_d = -\underline{A}_{n+1+d} \qquad ; \; d=1(1)D$$

sistemi çözülür. $\underline{V}_d$ vektörü kullanılarak, $\underline{\epsilon}_d$ vektörü D boyutlu ve ve bileşenleri $\varepsilon_{dk}=0$; d=1(1)D, k=1(1)D ; $k \neq d$

$\varepsilon_{dk}=1$; d=1(1)D, k=1(1)D ; k=d

olmak üzere;

$\underline{v}_d=(\underline{V}_d,\underline{\varepsilon}_d)$,d=1(1)D şeklinde oluşturulabilir.

Burada problemin zorluk derecesi 6 'dır ve dolayısıyla bu, hesaplanması gereken lineer bağımsız $\underline{v}_d$ vektörlerinin sayısıdır. Bu tip vektörlerin bir kümesi:

v_{dkj}

kj \d	1	2	3	4	5	6
01	-1	-1	-1	0	0	0
02	-1	0	0	0	0	0
03	0	-1	0	0	0	0
04	0	0	-1	0	0	0
11	0	-0.379	0	0	-0.743	0
12	1	-0.33	-1	1	0	0
21	0	0	-0.379	0	0	-0.743
22	0	0	0	-1	0	0
23	-1	0	0.67	0	0	0
31	0	-0.379	0	0	0.257	0
32	0	0	0	0	-1	0
33	0	-0.291	0	0	0.743	0
41	0	0	-0.379	0	0	0.257
42	0	0	0	0	0	-1
43	0	0	-0.291	0	0	0.743

Bu $\underline{v}_d$ (d=1(1)6) vektörlerinden denge eşilikleri daha önce verilen formüllere göre türetilir. Bunlar;

$$\delta_{01}^{-1}\,\delta_{02}\,\delta_{12}\,\delta_{23}\,\delta_{10}^{-1}\,\delta_{20}^{-1} = K_1$$

$$\delta_{01}\,\delta_{03}\,\delta_{11}^{-0.379}\,\delta_{12}^{0.67}\,\delta_{31}^{-0.379}\,\delta_{33}^{-0.291}\,\delta_{10}^{0.709}\,\delta_{30}^{0.67} = K_2$$

$$\delta_{01}\,\delta_{04}\,\delta_{12}^{-1}\,\delta_{21}^{-0.379}\,\delta_{23}^{0.67}\,\delta_{31}^{-0.379}\,\delta_{33}^{-0.291}\,\delta_{10}\,\delta_{20}^{-0.291}\,\delta_{30}^{0.67} = K_3$$

$$\delta_{12}\,\delta_{22}^{-1}\,\delta_{10}^{-1}\,\delta_{20} = K_4$$

$$\delta_{11}^{-0.743}\,\delta_{31}^{0.257}\,\delta_{32}^{-1}\,\delta_{33}^{0.743}\,\delta_{10}^{0.743} = K_5 \qquad (6.1.28)$$

$$\delta_{21}^{-0.743}\,\delta_{41}^{0.257}\,\delta_{42}^{-1}\,\delta_{43}^{0.743}\,\delta_{20}^{0.743} = K_6$$

şeklindedir ve K_d ,d=1(1)6 sabitleri (4.4.13) bağıntısından elde edilir. $\sigma_{10}=\sigma_{20}=\sigma_{30}=\sigma_{40}=+1$ olduğundan dual fonksiyonun bağımlı değişkenleri,

$$\delta_{10} = \delta_{11} + \delta_{12}$$

$$\delta_{20} = \delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23}$$

$$\delta_{30} = \delta_{31} + \delta_{32} + \delta_{33} \qquad (6.1.29)$$

$$\delta_{40} = \delta_{41} + \delta_{42} + \delta_{43}$$

şeklinde yazılabilir.

(6.1.25), (6.1.26), (6.1.28) ve (6.1.29) bağıntıları T+m bilinmeyenli T+m demklemden oluşan bir sistem teşkil eder. Bu lineer ve nonlineer denklemlerden oluşan sistemi çözmek için şu şekildeki bir prosedürü uygulayalım (*). Denge denklemlerinin logaritması alınsın ve δ için bir δ' değeri kabul edilsin. Denge çözümlerinin logaritmik yapısı δ' civarında Taylor serileri yaklaşımı ile lineerleştirilir.

Aşağıdaki şekilde, sistematik olarak ifade edilmiş olan ve lineer denklemlerden oluşan bir sistem elde edilir:

$$\begin{aligned} a_{11}\Delta\delta_1' + a_{12}\Delta\delta_2' + \ldots + a_{1T+m}\Delta\delta_{T+m}' &= b_1 \\ a_{21}\Delta\delta_1' + a_{22}\Delta\delta_2' + \ldots + a_{2T+m}\Delta\delta_{T+m}' &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p1}\Delta\delta_1' + a_{p2}\Delta\delta_2' + \ldots + a_{pT+m}\Delta\delta_{T+m}' &= b_p \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{T+m1}\Delta\delta_1' + a_{T+m2}\Delta\delta_2' + \ldots + a_{T+mT+m}\Delta\delta_{T+m}' &= b_{T+m} \end{aligned} \qquad (6.1.30)$$

Burada $\Delta\delta_i' = \delta_i - \delta_i'$ olup, $\underline{\delta}'$ ise $\underline{\delta}$ için keyfi nonnegatif bir değerdir.

Yukarıdaki tekniğin $\underline{\delta}'$ için yakınsamadığını kabul edelim. (T+m) lineer denklemden oluşan sistemi ozaman, 2(T+m) lineer eşitsizlik ile yer değiştirilir.

Bu nedenle (6.1.30) 'un p inci eşitliğini ele alalım:

$$f_p \equiv a_{p1}\Delta\delta_1' + a_{p2}\Delta\delta_2' + \ldots + a_{pT+m}\Delta\delta_{T+m}' = b_p \qquad (6.1.31)$$

$b_p \geq 0$ kabul edelim. Ozaman (6.1.31) eşitliği aşağıdaki gibi iki eşitsizlik ile yerdeğiştirilebilir:

$$0 \leq f_p(\underline{\delta}) \leq b_p \qquad (6.1.32.a)$$

(6.1.31) denklemi $\Delta\delta_p'$ doğrulayıcılarının, $f_p(\underline{\delta})$ pozitif ve b_p ye eşit olacak şekilde seçilmeleri gerektiğini gösterir. (6.1.32) eşitsizlikleri yanlızca $f_p(\underline{\delta})$ 'nın 0 ve b_p arasında pozitif değer almasını sağlayacak dengeleyicileri gerektirir.

Benzer olarak eğer $b_p < 0$ ise, eşitlik

$$b_p \leq f_p(\underline{\delta}) \leq 0 \qquad (6.1.32.b)$$

eşitsizliği ile yer değiştirilir. Ayrıca negatif olmayan

(*) Hellindex L.J. ve M.J. Rijckaert, " A Solution Procedure For Geometric Programming Problems With Degree Of Difficulty ", Presented at 7.th Mathematical Programming Symposium,The Hauge Holland, 1970.

$\delta_p^0 \geq 0$ p=1(1)T+m başlangıç noktasının

$$\Delta \delta_p' \geq -\delta_p' \quad ; \; p=1(1)T+m \qquad (6.1.33)$$

kısıt kümesi eklenerek varlığı ispatlanır. δ_p^0 p=1(1)T+m başlangıç noktası (6.1.32.a) veya (6.1.32.b) ve (6.1.33) eşitsizliklerini sağlayacak şekilde seçilecektir. Bir amaç fonksiyon tanımlanırsa δ_p^0 ,p=1(1)T+m noktasi lineer programlama ile hasaplanabilir.

Yapılmış olan çalışmalar, lineer program için iyi bir amaç fonksiyonun,

$$\min \sum_{j \in J} \Delta \delta_j' \qquad (6.1.34)$$

olarak alınabileceğini göstermiştir. Burada,

$$J = \{ \; j \,|\, \delta_j < 0 \;\; , \; \delta_j\text{'den başlayan yerleştirmede l iterasyon sonra} \; \}$$

olup, bu işlemden sonraki yeni başlangıç noktası, amaç fonksiyonlu lineer programın ve (6.1.32.a) veya (6.1.32.b) ve (6.1.33) kısıtlarının cozümü olacaktır. Lineer programın değişkenleri için herhangi bir işaret kısıtı mevcut değildir.

Aşikar (her zaman mümkün $\Delta \delta_p'=0$,i=1(1)T+m trivial) çözümden kaçınmak için (6.1.32.a) veya (6.1.32.b) 'nin eşitsizliklerinden birisi değiştirilebilir.Örneğin en geniş $|b_p|$ mutlak değere sahip olan eşitsizlik,

$$\epsilon \leq |f_p(\underline{\delta})| \leq b_p$$

şeklinde küçük pozitif bir ϵ kullanılarak yeniden ele alınabilir.

(6.1.25), (6.1.26), (6.1.28) ve (6.1.29) 'un çözümü P problemi için tasarlanan minimum yada bütünsel bir çözüm değildir. Aslında (6.1.28) 'de negatif işaretlerin varlığı problemi konveks programlama sınıfının dışına iter. Dolayısıyla P problemi birden fazla çözümü içeriyor olabilir ((6.1.28) nonlineer denklemleri fazla çözümeleri gösterebilir).

Yukarıdaki çözüm prosedürü bu problem için denenmiş, birçok başlangıç noktası için yakınsama da hata ortaya çıkmıştır. Fakat başlangıç tahminine bağlı olarak, iki farklı denge çözümü elde edilmiştir:
Birinci denge çözümü (A);

$\gamma_{01}=1.0694$ $\gamma_{04}=0.2089$ $\gamma_{21}=0.1335$ $\gamma_{31}=0.0690$ $\gamma_{41}=0.0603$

$\gamma_{02}=0.3685$ $\gamma_{11}=0.1380$ $\gamma_{22}=0.6632$ $\gamma_{32}=0.0689$ $\gamma_{42}=0.0731$

$\gamma_{03}=0.2290$ $\gamma_{12}=0.2528$ $\gamma_{23}=0.2285$ $\gamma_{33}=0.0155$ $\gamma_{43}=0.0065$

olup, orjinal problem için maksimum faydayı 6.05 olarak verir.

İkinci denge çözümü (B);

$$\delta_{01}=0.0778 \quad \delta_{04}=0.4093 \quad \delta_{21}=0.2574 \quad \delta_{31}=0.0073 \quad \delta_{41}=0.1197$$

$$\delta_{02}=1.3542 \quad \delta_{11}=0.0123 \quad \delta_{22}=0.0620 \quad \delta_{32}=0.0051 \quad \delta_{42}=0.1377$$

$$\delta_{03}=0.0226 \quad \delta_{12}=0.0006 \quad \delta_{23}=1.0800 \quad \delta_{33}=0.0028 \quad \delta_{43}=0.0169$$

olup, orjinal problem için maksimum faydayı 5.70 olarak verir.

Açıktır ki, B aranılan optimal çözüm olamaz, çünkü A 'da daha iyi bir çözüm elde edilmiştir. Yukarıda kullanılan optimizasyon kriteri signomal formların varlığı altında sadece bir yöresel optimum için gerekli olacaktır. Dolayısıyla A çözümünün, (6.1.18) amaç fonksiyonu ve (6.1.19)'dan (6.1.23)'e kadar olan kısıtlardan oluşan problemde yeterliliği test edilir.

Şuhalde karşılık gelen birinci primal çözüm,

$$X_1 = 6.47 \quad r_1 = 1.01 \quad t_1 = 0.666 \quad y_1 = 5.93$$

$$X_2 = 2.23 \quad r_2 = 0.40 \quad t_2 = 0.595 \quad y_2 = 5.53$$

olarak hesaplanır. Optimallik koşullarının yeterliliğinin kontrolü için kullanılan test ikinci mertebe analize dayandırılmıştır. Wilde ve Beightler tarafından benzer bir yöntem hazırmanmıştır. S_{dd} ile yazılan matris, amaç fonksiyon ve kısıtların Hessian matrisi, lagrange çarpanları, jakobyen ve kontrol matrisinden elde edilir. Sonra kisıtların karar değişkenlerine göre birinci türevleri eklenir. A için S_{dd} matrisi;

$$\begin{bmatrix} 3.48336 & -3.92478 & -0.23826 & -0.03677 \\ -3.92478 & 29.09268 & -0.08646 & -0.10650 \\ -0.23826 & -0.08646 & 1.93812 & -0.00081 \\ -0.03677 & -0.10650 & -0.00081 & 2.02794 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu pozitif tanımlı bir matristir, böylece A çözümü P problemi için yöresel bir maksimumdur. Ele alınan birçok başlangıç noktasından daha iyi bir çözüm elde edilemediği için A çözümü bütünsel çözüm olarak belirtilebilir.

VI.2. Genel Sonuç

Bu çalışma ile amaçlanan, nonlineer programlama problemlerine bir çözüm yaklaşımı olarak geliştirilmiş olan Geometrik Programlama nın teorisini oluşturan konuların incelenmesidir. Gerekli yapısal bağlantılar öğrenilmiş ve kurulmuş olan konular arası ilişkiler ortaya çıkartılmıştır. Özellikle konuya adını veren Geometrik Eşitsizlik bağıntısının teoride kullanılan yapısına getirilişi, primal ve dual programlar ve çözümleri arasındaki ilişkiyi ifade eden teoremlerin ispatlarıyla verilmiş olması, sonraki bölümlerde temel hareket noktasını oluşturmuştur.

Konuyu sınırlandıran iki alt başlığı (posinomal ve signomal programlama) ayrı ayrı ele alınmış ve optimumda problemin çözümü üzerindeki etkileri ortaya konmuştur. Standart olmayan nonlineer programlama problemlerinden, bazı özel yapıya sahip olanları için dönüşüm bağıntıları verilmiştir. Bu bağıntılara ait uygulamalara referans Kaynaklar-2 'dir. Son bölümde verilmiş olan problem, geometrik programlamanın önemli uygulama alanlarından Kimya Mühendisliği 'ne ait bir örnektir. Bununla beraber, hem konuya açıklık getirmesi ve hemde konu için oldukça özgün bir uygulama olmasından dolayı seçilmiştir.

Edinilen tüm bilgilerin ışığı altında Geometrik Programlama, ileriki çalışmalarımda da yine temel konuyu oluşturacaktır.

K A Y N A K L A R

1.) AVRIEL M., Advances in Geometric Programming, Plenum Press, New York, 1980.

2.) BEIGHTLER C.,PHILLIPS D., Applied Geometric Programming, John Wiley and Sons Inc., New York, 1976.

3.) DUFFIN, PETERSON, ZENER, Geometric Programming, John Wiley and Sons Inc., New York, 1967.

4.) MCCORMICK G., Nonlinear Programme Theory, Algorithms and Applications, John Wiley and Sons Inc., New York, 1983.

5.) EISELT H. A., PEDERZOLI G., SANDLBLOM C. L., Continues Optimization Models, Walter De Gruyter, Berlin, 1987.

6.) PFAFFENBERG R.C., WALKER D.A., Mathematical Programming for Economics and Bussiness, IOWA State University, 1976.

7.) AOKI M., Introduction to Optimization Techniques - Fundamentals and Application of Nonlinear Programming, The MacMillan Company, New York, 1971.

8.) FOX R.L., Optimization Mathematics for Engineering Design, Reading, Mass., Addison Wesley Pub. Co., Netherland, 1971 (Optimizasyon modelleri, kısıtlı - kısıtsız problemler, Fletcher -Revees, Davidon -Fletcher -Povel 'a ait mühendislik uygulamaları)

Ö Z G E Ç M İ Ş

Adı Soyadı : Aydın DEMİRİZ

Doğum Tarihi : 26.Ocak.1968

Doğum Yeri : Bingöl

İlk Öğrenimi : 1975-79 yılları arasındaki ilk öğrenimini Ankara Mimar Kemal İlkokulu'nda tamamladı.

Orta Öğrenimi : 1979-82 yılları arasında, Ankara Namık Kemal Orta Okulu'nda sürdürdüğü eğitimini tamamlayıp, 1982 yılında Ankara Anıttepe Lisesi'nde orta öğrenimine devam etti. 1984-1985 öğretim yılı sonunda İstanbul Mehmet Beyazıd Lisesi 'nden mezun oldu.

Yüksek Öğrenimi : 1985 yılında, Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başladığı eğitimini 1989 yılında tamamladı.

Görevi : Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi.