168489

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIRSIZ OPERATÖR KATSAYILI BİR DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN ÖZDEĞERLERİNİN ASİMTOTİK DAVRANIŞI ve İKİNCİ DÜZENLİ İZİ

Matematikçi Pınar KANAR

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ehliman ADIGÜZELOV

İSTANBUL, 2004

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

A^*	A operatörünün eşleniği
A^{-1}	A operatörünün tersi
trA	A operatörünün matris izi
$\sigma_\infty(H)$	H den H ye tam sürekli operatörler kümesi

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı hazırlamam sırasında bana yardımcı olan değerli hocalarım Prof. Dr. Ehliman Adıgüzelov ve Prof. Dr. Akın Taşdizen'e teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

H sonsuz boyutlu ayrılabilir bir Hilbert uzayı olmak üzere, $[0,\pi]$ aralığında tanımlı, değerleri H uzayına ait olan kuvvetli ölçülebilir ve $\int_0^\pi \|f(x)\|^2 dx < \infty$ koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesi $H_1 = L_2(H;[0,\pi])$ ile gösterilir.

"Sınırsız operatör katsayılı bir diferansiyel operatörün özdeğerlerinin asimtotik davranışı ve ikinci düzenli izi" adlı bu tez çalışmasında $\mu_1 \le \ldots \le \mu_n \le \ldots$ ve $\lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots$, $H_1 = L_2(H;[0,\pi])$ uzayında sırasıyla

$l_0(y) = -y''(x) + Ay(x)$,

$l(y) = -y''(x) + Ay(x) + Q(x)y(x)$

diferansiyel ifadeleri ve aynı $y'(0) = y'(\pi) = 0$ sınır koşulu ile oluşturulan L_0 ve L operatörlerinin özdeğerleri , $n_1 < n_2 < \ldots < n_m < \ldots$ de belirli özelliğe sahip olan doğal sayı dizisi olmak üzere

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n_m} \left\{ \lambda_k^2 - \mu_k^2 - 2\sum_{j=2}^{p} (-1)^j j^{-1} \operatorname*{Res}_{\lambda=\mu_k} tr\left[\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^j\right] \right\} = \frac{1}{2}\left[tr(AQ(0)) + tr(AQ(\pi)) \right] - \frac{1}{8}\left[trQ''(0) + trQ''(\pi) \right]$$

formülü bulunmuştur. $\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n_m} \left\{ \lambda_k^2 - \mu_k^2 - 2\sum_{j=2}^{p} (-1)^j j^{-1} \operatorname*{Res}_{\lambda=\mu_k} tr\left[\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^j\right] \right\}$ limitine L operatörünün ikinci düzenli izi adı verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Saf ayrık spektrum, asimtotik davranış, matris izi, çekirdek operatör, ikinci düzenli iz.

ABSTRACT

Let H be a separable Hilbert space. We denote by $H_1 = L_2(H;[0,\pi])$ the set of all functions f satisfying condition $\int_0^\pi \|f(x)\|^2 dx < \infty$ and strongly measurable belonging to H defined on $[0,\pi]$ and with the values in H.

In this thesis with the title "The asimtotic behaviour of the eigenvalues of a differantial equation with the unbounded operator coefficient and its second regularized trace" $\mu_1 \le \mu_2 \le \ldots \le \mu_n \le \ldots$, and $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots$ are the eigenvalues of L_0 ve L , respectively; L_0 ve L are formed by the differantial expressions $l_0(y) = -y''(x) + Ay(x)$, $l(y) = -y''(x) + Ay(x) + Q(x)y(x)$ in H_1 space respectively; and their boundary condition is $y'(0) = y'(\pi) = 0$. In this work for the limit formula ,

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{n_m}\left\{\lambda_k^2 - \mu_k^2 - 2\sum_{j=2}^{p}(-1)^j j^{-1} \operatorname*{Res}_{\lambda=\mu_k} \operatorname{tr}\left[\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^j\right]\right\} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{tr}(AQ(0)) + \operatorname{tr}(AQ(\pi))\right] - \frac{1}{8}\left[\operatorname{tr}Q''(0) + \operatorname{tr}Q''(\pi)\right]$$

has been found, where $n_1 < n_2 < \ldots < n_m < \ldots$ is a natural numbers sequence with special property. The limit $\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{n_m}\left\{\lambda_k^2 - \mu_k^2 - 2\sum_{j=2}^{p}(-1)^j j^{-1} \operatorname*{Res}_{\lambda=\mu_k} \operatorname{tr}\left[\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^j\right]\right\}$ is called the second regularized trace of operator L.

Keywords: Line separated spectrum, asimtotic behaviour, matrix trace, kernel operator, second regularized trace.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada ikinci mertebeden operatör katsayılı bir diferansiyel operatörün ikinci düzenli izi incelenmiştir. H sonsuz boyutlu ayrılabilir bir Hilbert uzayı olmak üzere $[0,\pi]$ aralığında tanımlı, değerleri H uzayına ait olan kuvvetli ölçülebilir (Hille ve Philips, 1957) ve

$$\int_0^\pi \|f(x)\|^2 dx < \infty \tag{1.1}$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesini $H_1 = L_2(H;[0,\pi])$ ile gösterelim. H_1 uzayının herhangi iki f ve g elemanının iç çarpımı

$$(f,g)_{H_1} = \int_0^\pi (f(x),g(x))dx \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlanırsa, H_1 uzayı sonsuz boyutlu ayrılabilir bir Hilbert uzayı oluşturur. H_1 den H_1 e sırasıyla

$$l_0(y) = -y''(x) + Ay(x) \tag{1.3}$$

$$l(y) = -y''(x) + Ay(x) + Q(x)y(x) \tag{1.4}$$

diferansiyel ifadeleri ve aynı

$$y'(0) = y'(\pi) = 0 \tag{1.5}$$

sınır koşulu ile oluşturulan L_0 ve L gibi iki kendine eş operatör göz önüne alınmıştır.

$l_0(y)$ ve $l(y)$ ifadelerindeki $y''(x)$ türevi H uzayındaki norma göre anlaşılmaktadır. Yani

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left\| \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} - y'(x) \right\| = 0 \tag{1.6}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left\| \frac{y'(x+\Delta x) - y'(x)}{\Delta x} - y''(x) \right\| = 0 \tag{1.7}$$

dır. Ayrıca bu ifadelerde yer alan A operatörü H uzayında

$$A = A^* \geq I \quad , \quad A^{-1} \in \sigma_\infty(H) \tag{1.8}$$

koşullarının sağlayan bir operatördür.

Q(x) operatör fonksiyonunun $[0,\pi]$ aralığında dördüncü mertebeden zayıf türeve sahip olduğunu yani herhangi iki $u, v \in H$ için

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\left[\frac{Q^{(i-1)}(x+\Delta x) - Q^{(i-1)}(x)}{\Delta x} - Q^{(i)}(x)\right]u, v\right) = 0 \quad \left(i = 1,2,3,4\ ;\ Q^{(0)}(x) = Q(x)\right) \tag{1.9}$$

olduğunu varsayıyoruz.

Ek olarak her $x \in [0,\pi]$ için $Q^{(i)}(x) : H \to H$ $(i = 0,1,2,3,4)$ operatörlerinin kendine eş oldukları, $AQ(x)$, $AQ''(x), Q^{IV}(x) \in \sigma_1(H)$ ve her $u \in H$ için

$$\int_0^\pi (Q(x)u, u)dx = 0 \tag{1.10}$$

olduğu varsayılmıştır.

L_0 ve L kendine eş operatörleri saf ayrık spektruma sahiptirler.

$\mu_1 \leq \mu_2 \leq ... \leq \mu_n \leq ...$ ve $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \leq ...$, sırasıyla L_0 ve L operatörlerinin özdeğerleri olsun. Burada her bir özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır.

A operatörünün $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq ... \leq \gamma_n \leq ...$ özdeğerlerinin

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\gamma_j}{aj^\alpha} = 1 \qquad (a > 0, \alpha > 2) \tag{1.11}$$

koşulunu sağladığı kabul edilmiştir.

Bu koşul altında $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin

$$\mu_k - \mu_{n_m} \geq d_1\left(k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} - n_m^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}\right), \quad (k = n_m, n_m + 1, \ldots) \tag{1.12}$$

olacak şekilde $\{\mu_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisine sahip olduğu ispatlanmıştır.

Bu tez çalışmasında

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{n_m}\left\{\lambda_k^2 - \mu_k^2 - 2\sum_{j=2}^{p}(-1)^j j^{-1}\operatorname*{Res}_{\lambda=\mu_k} \operatorname{tr}\left[\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^j\right]\right\} \\ = \frac{1}{2}\left[\operatorname{tr}(AQ(0)) + \operatorname{tr}(AQ(\pi))\right] - \frac{1}{8}\left[\operatorname{tr}Q''(0) + \operatorname{tr}Q''(\pi)\right]\end{aligned} \tag{1.13}$$

formülü ispatlanmıştır. Burada $R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda I)^{-1}$ dır. Bu formülün birinci tarafındaki ifadeye L operatörünün ikinci düzenli izi diyeceğiz.

Skaler diferansiyel operatörlerin düzenli izi ile ilgili araştırmalar ilk olarak Gelfand ve Levitan'ın (1953) çalışması ile başlamıştır. Bu çalışmadan sonra Dikiy (1953), Halberg ve Kramer (1960), Gasimov ve Levitan (1963), Levitan (1964), Lidskiy ve Sadovniçiy (1967), Guseynov ve Levitan (1978) ve birçok başka çalışmalarda çeşitli skaler diferansiyel operatörlerin düzenli izi incelenmiştir. Bu konudaki çalışmaların listesi Levitan ve Sargsyan (1991) ve Fulton ve Pruess (1994) çalışmalarında verilmiştir.

Operatör katsayılı diferansiyel operatörlerin düzenli izi Halilova (1976), Adıgüzelov (1976), Maksudov vd. (1984), Bayramoğlu ve Adıgüzelov (1996), Albayrak vd. (1999), Adıgüzelov vd. (2001), Adıgüzelov vd. (2001), Adıgüzelov vd. (2004), Adıgüzelov ve Bakşi (2004) çalışmalarında incelenmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. Bu uzayda iç çarpımı $(.,.)$, normu da $\|.\|$ ile göstereceğiz. $-\infty \leq a < b \leq \infty$ olmak üzere bir (a,b) aralığında tanımlı, değerleri H uzayına ait olan kuvvetli ölçülebilir (Hille ve Philips, 1957) ve

$$\int_a^b \|f(x)\|^2 dx < \infty \tag{2.1}$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesini $H_1 = L_2(H;(a,b))$ ile gösterelim. H_1 in herhangi f ve g elemanlarının iç çarpımı

$$(f,g)_{H_1} = \int_a^b (f(x),g(x))\, dx \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanırsa, H_1 kümesi bir ayrılabilir Hilbert uzayı oluşturur (Kirillov, 1976). H_1 uzayında normu $\|.\|_{H_1}$ ile göstereceğiz.

$\overline{D(A)} = H$ olmak üzere A, D(A) dan H ye kendine eş bir operatör olsun. Her $x \in D(A)$, $x \neq 0$ için $(Ax,x) > 0$ ($(Ax,x) < 0$) ise A ya pozitif (negatif) operatör denir ve bu $A > 0$ $(A < 0)$ şeklinde yazılır. Her $x \in D(A)$ için $(Ax,x) \geq 0$ ($(Ax,x) \leq 0$) ise A ya negatif olmayan (pozitif olmayan) bir operatör denir ve bu $A \geq 0$ $(A \leq 0)$ şeklinde gösterilir.

A ve B kendine eş herhangi iki operatör olsun. $D(A) \subset D(B)$ ve D(A) dan H ye A-B operatörü pozitif (negatif olmayan) bir operatör ise A ya B den büyüktür (küçük değildir) denir ve $A > B$ $(A \geq B)$ olarak yazılır. A, H den H ye tam sürekli bir operatör ise $A \in \sigma_\infty(H)$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.1: A negatif olmayan kendine eş bir operatör ve B de $B^2 = A$ olacak şekilde kendine eş bir operatör ise B ye A nın karekökü denir.

Teorem 2.1: Negatif olmayan kendine eş bir A operatörünün bir tek negatif olmayan kendine eş B karekökü vardır. Eğer C,

$$AC=CA \tag{2.3}$$

olacak şekilde herhangi bir lineer operatör ise

$$BC=CB \tag{2.4}$$

dir (Lysternik ve Sobolev, 1955).

Tanım 2.2: Bir A lineer operatörünün bir λ özdeğerine karşılık gelen tüm özvektörlerin ve sıfır elemanının oluşturduğu N_λ lineer manifolduna A nın λ özdeğerine karşılık gelen özuzayı denir.

Tanım 2.3: Bir A lineer operatörünün bir λ özdeğerine karşılık gelen N_λ özuzayının boyutuna λ özdeğerinin katlılığı denir.

A operatörünün pozitif karekökü $A^{\frac{1}{2}}$ şeklinde gösterilir. $A \in \sigma_\infty(H)$ olsun. Bu durumda A^*A kendine eş negatif olmayan bir operatördür ve $(A^*A)^{\frac{1}{2}} \in \sigma_\infty(H)$ dır (Cohberg ve Krein, 1969). Bu operatörün sıfırdan farklı özdeğerleri $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_k$ $(0 \leq k \leq \infty)$ olsun. Burada her özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır. $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$ negatif olmayan bir operatör olduğundan $s_1, s_2, \ldots, s_k$ pozitif sayılardır. Bu sayılara A operatörünün s sayıları denir. Eğer $k < \infty$ ise $s_j = 0;\ j = k+1, k+2, \ldots$ kabul edilir. A nın s sayıları bazen $s_j(A)$ $(j = 1,2,\ldots)$ şeklinde de yazılabilir. $s_1(A) = \|A\|$ olduğunu belirtelim. Eğer A normal operatör yani $A^*A = AA^*$ ise o taktirde

$$s_j(A)=|\lambda_j(A)| \quad (j,=1,2,\ldots,k) \tag{2.5}$$

dır (Cohberg ve Krein, 1969). Burada $|\lambda_1(A)| \geq |\lambda_2(A)| \geq \ldots \geq |\lambda_k(A)|$, A operatörünün sıfırdan farklı özdeğerleridir.

s sayıları

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(A) < \infty \quad (p \geq 1) \tag{2.6}$$

koşulunu sağlayan tüm $A \in \sigma_\infty(H)$ operatörlerinin kümesini σ_p veya $\sigma_p(H)$ simgesiyle göstereceğiz. Burada σ_p $(p \geq 1)$ bir ayrılabilir Banach uzayıdır (Cohberg ve Krein, 1969).

Bu uzayın her A operatörünün normu

$$\|A\|_{\sigma_p(H)} = \left[\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(A)\right]^{\frac{1}{p}} \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.4: σ_1 uzayına ait olan başka bir deyişle s sayıları

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) < \infty \tag{2.8}$$

özelliğine sahip olan $A \in \sigma_1(H)$ operatörüne çekirdek operatörü denir.

$A \in \sigma_p(H)$ ve $B: H \to H$ sınırlı lineer bir operatör ise $AB, BA \in \sigma_p(H)$ ve

$$\|AB\|_{\sigma_p(H)} \leq \|B\| \|A\|_{\sigma_p(H)} \tag{2.9}$$

$$\|BA\|_{\sigma_p(H)} \leq \|B\| \|A\|_{\sigma_p(H)} \tag{2.10}$$

dır. Ayrıca $p_1 < p_2$ ise $\sigma_{p_1} \subset \sigma_{p_2}$ dir (Cohberg ve Krein, 1969).

Tanım 2.5: $A: H \to H$ bir sınırlı lineer operatör olsun. Eğer her $\{e_j\}_1^\infty$ ortonormal tabanı için $\sum_{j=1}^{\infty} (Ae_j, e_j)$ serisi yakınsak ise A operatörü sonlu matris izine sahiptir denir.

Teorem 2.2: A bir çekirdek operatörü ise her $\{e_j\}_1^\infty \subset H$ ortonormal tabanı için $\sum_{j=1}^{\infty}(Ae_j, e_j)$ serisi yakınsaktır ve bu serinin toplamı $\{e_j\}_1^\infty$ tabanının seçimine bağlı değildir (Cohberg ve Krein, 1969).

Bu $\sum_{j=1}^{\infty}(Ae_j, e_j)$ toplamına A operatörünün matris izi denir ve trA ile gösterilir.

A ve B herhangi iki çekirdek operatörü ve α, β herhangi iki sayı ise

$$tr(\alpha A + \beta B) = \alpha trA + \beta trB \tag{2.11}$$

$$trA^* = \overline{trA} \tag{2.12}$$

dır.

Teorem 2.3: $A \in \sigma_\infty(H)$, $B: H \to H$ sınırlı lineer bir operatör ve $AB, BA \in \sigma_1(H)$ ise

$$tr(AB)=tr(BA) \tag{2.13}$$

dır (Cohberg ve Krein, 1969).

Tanım 2.6: $A: H \to H$ bir sınırlı lineer operatör olsun. Bir $\varphi \in H, \varphi \neq 0$ vektörü ve λ sayısı için

$$(A - \lambda I)^n \varphi = 0 \tag{2.14}$$

olacak şekilde bir n doğal sayısı varsa φ ye A operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen esas vektörü denir.

Tanım 2.7: Sınırlı lineer bir $A: H \to H$ operatörünün bir λ özdeğerine karşılık gelen tüm esas vektörlerin ve $0 \in H$ elemanının oluşturduğu K_λ lineer manifolduna söz konusu operatörün λ özdeğerine karşılık gelen esas lineer manifoldu denir.

Tanım 2.8: Sınırlı lineer bir $A: H \to H$ operatörünün bir λ özdeğerine karşılık gelen K_λ esas lineer manifoldunun boyutuna λ özdeğerinin cebirsel katlılığı denir.

Teorem 2.4: A çekirdek operatörünün matris izi için

$$trA = \sum_{j=1}^{\upsilon(A)} \lambda_j(A) \tag{2.15}$$

dır. Burada her λ_k özdeğeri kendi cebirsel katlılık sayısı kadar toplanmıştır. $\upsilon(A)$ sıfırdan farklı özdeğerlerin cebirsel katlılıklarının toplamıdır. Eğer $A \in \sigma_p(H)$ $(1 \le p < \infty)$ ve $\{e_j\}_1^w$ $(1 \le w \le \infty)$ H'de bir ortonormal elemanlar sistemi ise

$$\sum_{j=1}^{w} \left|(Ae_j, e_j)\right|^p \le \left(\|A\|_{\sigma_p(H)} \right)^p \tag{2.16}$$

dır. Bu eşitsizlikten özel olarak A çekirdek operatörü için $|trA| \le \|A\|_{\sigma_1(H)}$ elde edilir (Cohberg ve Krein, 1969).

3. SINIRSIZ OPERATÖR KATSAYILI BİR DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN ÖZDEĞERLERİNİN ASİMTOTİK DAVRANIŞI ve İKİNCİ DÜZENLİ İZİ

3.1 Spektrumun Özellikleri ve Özdeğerler İçin Asimtotik Formül

H sonsuz boyutlu ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. $H_1 = L_2\left(H;[0,\pi]\right)$ uzayında

$$l_0(y) = -y''(x) + Ay(x) \tag{3.1}$$

diferansiyel ifadesini gözönüne alalım. Bu ifadede A, $D(A) \subset H$ olmak üzere D(A) dan H ye

$$A = A^* \geq I \quad , \quad A^{-1} \in \sigma_\infty(H) \tag{3.2}$$

koşullarının sağlayan bir operatördür. A operatörünün özdeğerleri $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq ... \leq \gamma_n \leq ...$ ve bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özelemanları da sırasıyla $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ olsun. Burada her özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır.

D_0 ile H_1 uzayının aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyonları kümesini gösterelim:

1) y(x) fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında H uzayındaki norma göre ikinci mertebeden sürekli türeve sahiptir.

2) Ay(x) fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında H uzayındaki norma göre süreklidir.

3) $y'(0) = y'(\pi) = 0$ dır.

D_0 manifoldu H_1 uzayında yoğundur ve D_0 dan H_1 e $L_0'y = l_0(y)$ şeklinde tanımlanmış L_0' operatörü simetrik bir operatördür.

Bu operatörün özdeğerleri

$$k^2 + \gamma_j \qquad (k=0,1,2,... ; j=1,2,...) \tag{3.3}$$

bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özfonksiyonları da sırasıyla

$$M_k \text{Coskx}.\varphi_j \quad (k=0,1,2,\ldots ; j=1,2,\ldots) \tag{3.4}$$

şeklindedir. Burada

$$M_k = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} & k=0 \quad \text{ise} \\ \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} & k=1,2,\ldots \quad \text{ise} \end{cases} \tag{3.5}$$

dır. Görüldüğü gibi L_0' operatörünün ortonormal özfonksiyonlar sistemi H_1 uzayının bir ortonormal tabanıdır.

Teorem 3.1.1: Özelemanlar sistemi kapalı olan her kapalı simetrik operatör kendine eştir.

İspat: H ayrılabilir bir Hilbert uzayı, $D(B) \subset H$ olmak üzere $B : D(B) \to H$ kapalı simetrik bir operatör, $\{e_j\}_1^\infty$, bu operatörün özelemanlarından oluşan ortonormal sistem ve λ da reel olmayan bir sayı olsun.

$(B-\lambda I)^{-1}$ sınırlı kapalı operatör olduğundan $D\left((B-\lambda I)^{-1}\right) = R(B-\lambda I)$ manifoldu kapalıdır. Yani H nin bir altuzayıdır.

Öte yandan $R(B-\lambda I)$ altuzayı $\{e_j\}_1^\infty$ kapalı sistemini içerdiğinden

$$R(B-\lambda I) = H \tag{3.6}$$

olmalıdır. Benzer şekilde

$$R(B-\bar{\lambda} I) = H \tag{3.7}$$

olur. Bu durumda bilindiği gibi B kendine eş operatördür.

L_0' simetrik operatörünün özelemanlar sistemi kapalı olduğundan,bu teoreme göre

$$L_0 = \overline{L_0'} \tag{3.8}$$

operatörü kendine eştir.

L_0' simetrik operatörünün özelemanlar sistemi kapalı olduğundan Teorem 3.1.1'e göre L_0' operatörünün kapanışı olan $L_0 = \overline{L_0'}$ operatörü $D(L_0)$ dan H_1 e kendine eş bir operatördür.

$Q(x)$ ile aşağıdaki koşulları sağlayan operatör fonksiyonu gösterelim:

1) $Q(x)$ dördüncü mertebeden zayıf türeve sahiptir ve

$$Q^{(2k-1)}(0) = Q^{(2k-1)}(\pi) = 0 \quad ; \quad k = 1,2 \tag{3.9}$$

dir.

2) $Q(x), Q'(x), Q''(x), Q'''(x), Q^{IV}(x)$ her $x \in [0,\pi]$ için H den H ye kendine eş operatördür.

3) Her $x \in [0,\pi]$ için $AQ(x), AQ''(x), Q^{IV}(x) \in \sigma_1(H)$ ve $\|AQ(x)\|_{\sigma_1(H)}$, $\|AQ''(x)\|_{\sigma_1(H)}$, $\|Q^{IV}(x)\|_{\sigma_1(H)}$ $[0,\pi]$ aralığında birer ölçülebilir ve sınırlı fonksiyonlardır.

4) Her $f \in H$ için

$$\int_0^\pi (Q(x)f,f)_H \, dx = 0 \tag{3.10}$$

dır.

3) koşulundan $[0,\pi]$ aralığında $\|Q(x)\| \le c$ olacak şekilde bir $c > 0$ sabitinin varlığı elde edilir. O halde her $y \in H_1$ için

$$\|Q(y)\|_{H_1}^2 = \int_0^\pi \|Q(x)y(x)\|^2 dx \le \int_0^\pi \|Q(x)\|^2 \|y(x)\|^2 dx \le c^2 \int_0^\pi \|y(x)\|^2 dx = c^2 \|y\|_{H_1}^2 \tag{3.11}$$

veya

$$\|Qy\|_{H_1} \leq c\|y\|_{H_1} \tag{3.12}$$

olur. Görüldüğü gibi Q , H_1 den H_1 e bir sınırlı lineer operatördür ve $\|Q\|_{H_1} \leq c$ dir. Ayrıca herhangi iki $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x) \in H_1$ elemanları için

$$(Qy_1, y_2)_{H_1} = \int_0^\pi (Q(x)y_1(x), y_2(x))\ dx = \int_0^\pi (y_1(x), Q(x)y_2(x))\ dx = (y_1, Qy_2)_{H_1} \tag{3.13}$$

dir.

Böylece Q , H_1 den H_1 e sınırlı kendine eş operatördür. Buna göre

$$L = L_0 + Q \tag{3.14}$$

$D(L) = D(L_0)$ dan H_1 e kendine eş bir operatör olacaktır. L_0 ve L operatörlerinin rezolventleri sırasıyla R_λ^0 ve R_λ olsun.

$$R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda I)^{-1} \ , \quad R_\lambda = (L - \lambda I)^{-1} \tag{3.15}$$

dır. Ayrıca L_0 operatörünün özdeğerleri $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_n \leq \ldots$ olsun. Burada her özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır. L_0 operatörünün özdeğerleri

$$k^2 + \gamma_j \qquad (k=0,1,2,\ldots ; j=1,2,\ldots) \tag{3.16}$$

ve $\lim\limits_{j\to\infty} \gamma_j = \infty$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = \infty$ dır.

Dolayısıyla R_μ^0 operatörünün $\left\{\dfrac{1}{\mu_n - \mu}\right\}_{n=1}^{\infty}$ özdeğerler dizisinin limiti sıfırdır. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu_n - \mu} \quad (\mu \neq \mu_n \ ; n = 1,2,3,\ldots) \tag{3.17}$$

dir.

Öte yandan L_0 operatörünün özdeğeri olmayan her μ reel sayısı için $R_\mu^0 = (L_0 - \mu I)^{-1}$ operatörü kendine eştir ve bu operatörün

$$M_k \mathrm{Coskx}.\varphi_j \quad (k=0,1,2,\ldots;\ j=1,2,\ldots) \tag{3.18}$$

ortonormal özfonksiyonlar sistemi tamdır.

Bu durumda Smirnov' den (1964) R_μ^0 operatörünün tam sürekli olduğu bilinmektedir ve

$$R_\lambda^0 - R_\mu^0 = (\lambda - \mu) R_\lambda^0 R_\mu^0 \tag{3.19}$$

formülünden her $\lambda \neq \mu_n$ $(n = 1,2,\ldots)$ sayısı için R_λ^0 operatörünün tam sürekliliği elde edilir. Bu nedenle L_0 operatörü saf ayrık spektruma sahiptir. Q , H_1 den H_1 e sınırlı kendine eş operatör olduğundan

$$L = L_0 + Q \tag{3.20}$$

operatörünün de spektrumu saf ayrık olacaktır (Smirnov,1964). L operatörünün özdeğerleri $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots$ olsun. L nin özdeğeri olmayan her μ reel sayısı için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\lambda_n - \mu} = 0 \tag{3.21}$$

dır ve dolayısıyla kendine eş $R_\mu = (L - \mu I)^{-1}$ operatörü tam sürekli olacaktır (Naimark,1968). Diğer yandan

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu \tag{3.22}$$

formülünden her $\lambda \neq \lambda_n$ $(n = 1,2,\ldots)$ için R_λ nın tam sürekli operatör olduğu sonucu çıkar. L_0 operatörünün bir λ pozitif sayısından büyük olmayan özdeğerlerinin sayısını $N(\lambda)$ ile gösterelim.

Teorem 3.1.2: $j \to \infty$ iken $\gamma_j \sim aj^{\alpha}$ $(a, \alpha > 0)$ yani

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\gamma_j}{aj^{\alpha}} = 1 \tag{3.23}$$

ise $\lambda \to \infty$ iken

$$N(\lambda) \sim d\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}} \tag{3.24}$$

dir. Burada

$$d = \frac{2}{\alpha a^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^{\pi} \cos^2 t \sin^{\frac{2}{\alpha}-1} t \, dt \tag{3.25}$$

dir.

İspat: $N(\lambda)$

$$k^2 + \gamma_j \le \lambda \qquad (k=0,1,2,\ldots;\, j=1,2,\ldots) \tag{3.26}$$

eşitsizliğini sağlayan (k,j) ikililerinin sayısına eşittir. $N(\lambda)$ nın

$$k^2 + \gamma_j \le \lambda \qquad (k, j=1,2,\ldots) \tag{3.27}$$

eşitsizliğini sağlayan (k,j) ikililerinin $N_1(\lambda)$ sayısı ile

$$\gamma_j \le \lambda \tag{3.28}$$

eşitsizliğini sağlayan j doğal sayılarının $N_2(\lambda)$ sayısının toplamına eşit olduğu yani

$$N(\lambda) = N_1(\lambda) + N_2(\lambda) \tag{3.29}$$

olduğu açıktır.

(3.23)'den görülüyor ki keyfi $j \geq n_0$ için

$$\frac{\gamma_j}{aj^{\alpha}} > \frac{1}{2} \quad \text{yani} \quad \gamma_j \geq \frac{a}{2} j^{\alpha} \tag{3.30}$$

olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı vardır. Öte yandan $A \geq I$ olduğundan $\gamma_1 \geq 1$ dir ve dolayısıyla

$$\gamma_j \geq a_1 j^{\alpha} \qquad (j = 1,2,\ldots) \tag{3.31}$$

olacak şekilde bir a_1 sayısı vardır. Buradan $\gamma_j \leq \lambda$ eşitsizliğini sağlayan j doğal sayılarının $N_2(\lambda)$ sayısının, $a_1 j^{\alpha} \leq \lambda$ eşitsizliğini sağlayan j doğal sayılarının sayısından büyük olmadığı yani

$$N_2(\lambda) \leq \left(\frac{\lambda}{a_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{3.32}$$

olduğu sonucu çıkar. Dolayısıyla

$$0 \leq \lim_{\lambda \to \infty} \frac{N_2(\lambda)}{\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} \leq \lim_{\lambda \to \infty} \frac{a_1^{-\frac{1}{\alpha}} \lambda^{\frac{1}{\alpha}}}{\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} = a_1^{-\frac{1}{\alpha}} \lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{-\frac{1}{2}} = 0 \tag{3.33}$$

veya

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{N_2(\lambda)}{\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} = 0 \tag{3.34}$$

olur. Diğer yandan Gorbaçuk'den (1975) $\lambda \to \infty$ iken

$$N_1(\lambda) \sim d\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}} \quad , \quad \left(d = \frac{2}{\alpha a^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^{\pi} \cos^2 t \sin^{\frac{2}{\alpha}-1} t \, dt \right) \tag{3.35}$$

olduğu bilinmektedir.

(3.29) eşitliğinden ve bu son bağıntılardan

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{N(\lambda)}{d\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}}=\lim_{\lambda\to\infty}\left[\frac{N_1(\lambda)+N_2(\lambda)}{d\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}}\right]=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{N_1(\lambda)}{d\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}}+d^{-1}\lim_{\lambda\to\infty}\frac{N_2(\lambda)}{\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}}=1 \tag{3.36}$$

veya $\lambda\to\infty$ için

$$N(\lambda)\sim d\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}} \tag{3.37}$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.1.3: $j\to\infty$ iken $\gamma_j\sim aj^{\alpha}$ $(a,\alpha>0)$ ise $n\to\infty$ iken

$$\mu_n\sim d_0 n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} \qquad \left(d_0=d^{-\frac{2\alpha}{2+\alpha}}\right) \tag{3.38}$$

dır.

İspat: μ_n ye eşit olan özdeğerlerin sayısı yani başka bir deyişle μ_n özdeğerlerinin katlılığı q_n olsun. O taktirde

$$\mu_{p_n}<\mu_{p_n+1}=\mu_{p_n+2}=\ldots=\mu_{p_n+q_n}=\mu_n<\mu_{p_n+q_n+1}, \tag{3.39}$$

$$p_n+1\le n\le p_n+q_n \tag{3.40}$$

olacak şekilde bir p_n doğal sayısı vardır. Dolayısıyla Teorem 3.1.2'ye göre

$$N(\mu_n)=p_n+q_n\sim d.\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}} \tag{3.41}$$

olacaktır. μ_n ye eşit olan özdeğerlerin q_n sayısı

$$K^2+\gamma_j=\mu_n \tag{3.42}$$

denklemini sağlayan (K,j) (K=0,1,2,... ; j=1,2,...) ikililerinin sayısına eşittir.

(3.42) denklemini sağlayan (K,j) ikililerini

$$K_1 < K_2 < \ldots < K_{q_n} \tag{3.43}$$

olmak üzere $(K_1, j_1), (K_2, j_2), \ldots, (K_{q_n}, j_{q_n})$ şeklinde düzenleyelim.

$K_1 < K_2 < \ldots < K_{q_n}$ sayıları negatif olmayan tamsayılar olduğundan

$$K_{q_n} \geq q_n - 1 \tag{3.44}$$

dır. Ayrıca $K_{q_n}^2 + \gamma_{j_{q_n}} = \mu_n$ eşitliğinden

$$K_{q_n}^2 < \mu_n \quad \text{veya} \quad K_{q_n} < \sqrt{\mu_n} \tag{3.45}$$

bulunur. Bunu (3.44)'de göz önüne alırsak

$$q_n < \sqrt{\mu_n} + 1 \tag{3.46}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$0 < \frac{q_n}{\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} < \frac{\sqrt{\mu_n} + 1}{\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} \leq 2\mu_n^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{3.47}$$

olur. $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = \infty$ olduğundan buradan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} = 0 \tag{3.48}$$

bulunur. (3.41) bağıntısından ve bu son eşitlikten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{d\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{N(\mu_n) - q_n}{d\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{N(\mu_n)}{d\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} = 1 \tag{3.49}$$

elde edilir. Diğer yandan (3.40)'dan ve $N(\mu_n) = p_n + q_n$ eşitliğinden

$$\frac{p_n+1}{d\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} \le \frac{n}{d\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} \le \frac{p_n+q_n}{d\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} = \frac{N(\mu_n)}{d\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} \tag{3.50}$$

bulunur. Burada $n \to \infty$ iken limite geçer ve (3.49) bağıntısı dikkate alınırsa

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n+1}{d\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} \le \lim_{n\to\infty} \frac{n}{d\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} \le \lim_{n\to\infty} \frac{N(\mu_n)}{d\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} = 1 \tag{3.51}$$

veya

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{d\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} = 1 \tag{3.52}$$

elde edilir. Bu eşitlikten

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{d\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\mu_n^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}}{d^{-1}n}\right]^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{d^{-\frac{2\alpha}{2+\alpha}}\, n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}} \tag{3.53}$$

veya $n \to \infty$ iken

$$\mu_n \sim d^{-\frac{2\alpha}{2+\alpha}}\, n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} \tag{3.54}$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Bu kez $L = L_0 + Q$ operatörünün özdeğerleri için asimtotik formül bulalım. Q , H_1 den H_1 e sınırlı kendine eş bir operatör olduğundan her $y \in H_1$ için

$$\left|(Qy, y)_{H_1}\right| \le \|Qy\|_{H_1} \|y\|_{H_1} \le \|Q\|_{H_1} \|y\|^2_{H_1} \tag{3.55}$$

veya

$$\left(-\|Q\|y, y\right)_{H_1} \le (Qy, y)_{H_1} \le \left(\|Q\|y, y\right)_{H_1} \tag{3.56}$$

olur. Buradan

$$-\|Q\|_{H_1} I \le Q \le \|Q\|_{H_1} I \tag{3.57}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$L_0 - \|Q\|_{H_1} I \le L = L_0 + Q \le L_0 + \|Q\|_{H_1} I \tag{3.58}$$

olacaktır. Bu durumda

$$\mu_n - \|Q\|_{H_1} \le \lambda_n \le \mu_n + \|Q\|_{H_1} \tag{3.59}$$

olduğu bilinmektedir (Smirnov, 1964). Buna göre

$$1 - \frac{\|Q\|_{H_1}}{\mu_n} \le \frac{\lambda_n}{\mu_n} \le 1 + \frac{\|Q\|_{H_1}}{\mu_n} \tag{3.60}$$

olur. Burada $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mu_n}{d_0\, n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}} = 1$ olduğu dikkate alınarak $n \to \infty$ iken limite geçilirse

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1 \tag{3.61}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{d_0\, n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lambda_n}{\mu_n} \frac{\mu_n}{d_0\, n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{d_0\, n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}} = 1 \tag{3.62}$$

veya $n \to \infty$ iken

$$\lambda_n \sim d_0\, n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} \tag{3.63}$$

bulunur.

3.2 Özdeğerler Dizisinin Özel Alt Dizileri

Yardımcı Teorem 3.2.1: $j \to \infty$ iken $\gamma_j \sim aj^{\alpha}$ $(a, \alpha > 0)$ ise $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin

$$\mu_k - \mu_{n_m} \geq d_1\left(k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} - n_m^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}\right), \quad (k = n_m, n_m + 1, \ldots) \tag{3.64}$$

olacak şekilde $\{\mu_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır. Burada d_1 bir pozitif sabittir.

İspat: Teorem 3.1.3'e göre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}} = d_0 \quad , \quad (d_0 > 0) \tag{3.65}$$

dır. Buna göre keyfi $n \geq n_0$ için

$$\frac{\mu_n}{n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}} \geq \frac{d_0}{2} \tag{3.66}$$

olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı vardır.

Dolayısıyla her $n \geq n_0$ için

$$a_n = \mu_n - \frac{d_0}{4} n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} \geq \frac{d_0}{4} n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} \tag{3.67}$$

dır. Buradan görüldüğü gibi

$$a_n = \mu_n - \frac{d_0}{4} n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.68}$$

dizisi alttan sınırlıdır ve $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ dur.

Bu özelliğe sahip olan $\{a_n\}_1^\infty$ dizisinin aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\{a_{n_m}\}_1^\infty$ altdizisi vardır.

$$a_{n_1} = \min_n \{a_n\} \quad \text{ve} \quad k > n_1 \text{ ise } a_k > a_{n_1}$$

$$a_{n2} = \min_{n>n_1} \{a_n\} \quad \text{ve} \quad k > n_2 \text{ ise } a_k > a_{n_2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{3.69}$$

$$a_{n_m} = \min_{n>n_{m-1}} \{a_n\} \quad \text{ve} \quad k > n_m \text{ ise } a_k > a_{n_m}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dolayısıyla $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ dizisinin

$$\mu_k - \frac{d_0}{4} k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} > \mu_{n_m} - \frac{d_0}{4} n_m^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}, \quad (k > n_m) \tag{3.70}$$

veya

$$\mu_k - \mu_{n_m} > \frac{d_0}{4}\left(k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} - n_m^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}\right), \quad (k = n_m, n_{m+1}, \ldots) \tag{3.71}$$

olacak şekilde bir $\{\mu_{n_m}\}_{m=1}^\infty$ alt dizisi vardır. Teorem ispatlanmıştır.

Aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$x^{1+\delta} - (x-1)^{1+\delta} > x^\delta \quad (x > 1\,,\, \delta > 0) \tag{3.72}$$

dır. Gerçekten

$$\frac{x^{1+\delta} - (x-1)^{1+\delta}}{x^\delta} = x - \left(\frac{x-1}{x}\right)^\delta (x-1) > x - (x-1) = 1 \tag{3.73}$$

veya

$$x^{1+\delta}-(x-1)^{1+\delta}>x^{\delta} \tag{3.74}$$

dır.

Yardımcı Teorem 3.2.2: $j\to\infty$ iken $\gamma_j \sim aj^{\alpha}$ $(a>0, \alpha>2)$ ise m nin büyük değerleri için

$$\lambda_{n_m}<\frac{1}{2}\left(\mu_{n_{m+1}}+\mu_{n_m}\right)<\lambda_{n_m+1} \tag{3.75}$$

dir. Burada $\left\{\mu_{n_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ (3.64) bağıntısını sağlayan bir dizidir.

İspat: $\left\{\mu_{n_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi (3.64) bağıntısını sağladığından

$$\mu_{n_{m+1}}-\mu_{n_m}>d_1\left((n_m+1)^{1+\delta}-n_m^{1+\delta}\right) \qquad \left(\delta=\frac{2\alpha}{2+\alpha}-1\right) \tag{3.76}$$

dir. Bu eşitsizlikten ve (3.72)'den

$$\mu_{n_{m+1}}-\mu_{n_m}>d_1 n_m^{\delta} \tag{3.77}$$

elde edilir. (3.59) ve bu eşitsizlikten yararlanarak

$$\begin{aligned}2\lambda_{n_{m+1}}-\left(\mu_{n_{m+1}}+\mu_{n_m}\right)&=2\left(\lambda_{n_{m+1}}-\mu_{n_{m+1}}\right)+\mu_{n_{m+1}}-\mu_{n_m}\\&>d_1 n_m^{\delta}+2\left(\lambda_{n_{m+1}}-\mu_{n_{m+1}}\right)\geq d_1 n_m^{\delta}-2\|Q\|_1\end{aligned} \tag{3.78}$$

bulunur. $\delta>0$ olduğundan buradan m nin büyük değerleri için

$$2\lambda_{n_{m+1}}-\left(\mu_{n_{m+1}}+\mu_{n_m}\right)>0 \tag{3.79}$$

veya

$$\frac{1}{2}\left(\mu_{n_{m+1}}+\mu_{n_m}\right)<\lambda_{n_m+1} \tag{3.80}$$

elde edilir.

(3.59) ve (3.77) eşitsizliklerinden bir daha yararlanırsak m nin büyük değerleri için

$$2\left(\lambda_{n_m} - \mu_{n_m}\right) < \mu_{n_{m+1}} - \mu_{n_m} \tag{3.81}$$

veya

$$\lambda_{n_m} < \frac{1}{2}\left(\mu_{n_m} + \mu_{n_{m+1}}\right) \tag{3.82}$$

bulunur. (3.80) ve (3.82)'den

$$\lambda_{n_m} < \frac{1}{2}\left(\mu_{n_{m+1}} + \mu_{n_m}\right) < \lambda_{n_m+1} \tag{3.83}$$

elde edilir.

3.3 Özdeğerler ve Rezolventle İlgili Bazı Bağıntılar

Teorem 3.3.1: $j \to \infty$ iken $\gamma_j \sim aj^{\alpha}$ $(a > 0, \alpha > 2)$ ise m nin büyük değerleri için

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda^2}{\lambda_k - \lambda}\right) \text{ ve } \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda^2}{\mu_k - \lambda}\right) \tag{3.84}$$

serileri $|\lambda| = b_m = 2^{-1}\left(\mu_{n_m} + \mu_{n_{m+1}}\right)$ çemberi üzerinde düzgün yakınsaktır.

İspat: Yardımcı Teorem 3.2.2'ye göre m nin büyük değerleri için

$$\lambda_{n_m} < b_m < \lambda_{n_m+1} \tag{3.85}$$

dir. Öte yandan $\mu_k > 0$ olduğundan (3.59)'dan

$$\lambda_k > -\|Q\|_1 \qquad (k = 1,2,...) \tag{3.86}$$

bulunur.

$\lim\limits_{m\to\infty} b_m = +\infty$ olduğu dikkate alınırsa (3.85) ve (3.86)'dan

$$|\lambda_k| \neq b_m \qquad (k = 1,2,...) \tag{3.87}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{\lambda^2}{\lambda_k - \lambda} \qquad (k = 1,2,...) \tag{3.88}$$

fonksiyonları m nin büyük değerleri için $|\lambda| = b_m$ çemberi üzerinde tanımlıdır ve

$$\left|\frac{\lambda^2}{\lambda_k - \lambda}\right| \leq \frac{|\lambda^2|}{\big||\lambda_k| - |\lambda|\big|} = \frac{b_m^2}{\big||\lambda_k| - b_m\big|} \tag{3.89}$$

olduğundan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^2}{\lambda_k - \lambda}$ serisinin $|\lambda| = b_m$ çemberi üzerinde düzgün yakınsaklığını göstermek için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\big||\lambda_k| - b_m\big|} \tag{3.90}$$

serisinin yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir. $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$ olduğundan keyfi $k > N$ için

$$\lambda_k > 2b_m \tag{3.91}$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı vardır. Bu nedenle $k > N$ için

$$\big||\lambda_k| - b_m\big| = \lambda_k - b_m > \lambda_k - \frac{\lambda_k}{2} = \frac{\lambda_k}{2} \tag{3.92}$$

veya

$$\frac{1}{\big||\lambda_k| - b_m\big|} < \frac{2}{\lambda_k} \tag{3.93}$$

dır.

Ayrıca (3.63) formülüne göre keyfi $k > N$ için

$$\lambda_k > d_1 k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} \tag{3.94}$$

olacak şekilde bir $d_1 > 0$ sayısı vardır. (3.93) ve (3.94)'den

$$\frac{1}{\left||\lambda_k| - b_m\right|} < \frac{2}{d_1 k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}} \qquad (k > N) \tag{3.95}$$

bulunur. Varsayım gereği $\alpha > 2$ dir ve dolayısıyla $\sum_{k=1}^{\infty} 2d_1^{-1} k^{-\frac{2\alpha}{2+\alpha}}$ serisi yakınsak seridir.

O taktirde (3.95)'den

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left||\lambda_k| - b_m\right|} \tag{3.96}$$

serisinin yakınsaklığı elde edilir. Benzer şekilde $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda^2}{\mu_k - \lambda}\right)$ serisinin de $|\lambda| = b_m$ çemberi üzerinde düzgün yakınsaklığı gösterilebilir. Teorem ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.3 ve (3.63) formülüne göre $k \to \infty$ iken

$$\lambda_k, \mu_k \sim d_0 k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} \tag{3.97}$$

dır.

Buradan görülüyor ki $\alpha > 2$ ve $\lambda \neq \lambda_k, \mu_k \quad (k = 1,2,...)$ ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_k - \lambda|} \quad \text{ve} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k - \lambda|} \tag{3.98}$$

serileri yakınsak serilerdir.

Dolayısıyla R_λ^0 ve R_λ operatörleri çekirdek operatörlerdir ve

$$tr\left(R_\lambda - R_\lambda^0\right) = trR_\lambda - trR_\lambda^0 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda} - \frac{1}{\mu_k - \lambda}\right) \tag{3.99}$$

dır (Cohberg ve Krein, 1969).

Bu eşitliği $\dfrac{\lambda^2}{2\pi i}$ ile çarpıp $|\lambda| = b_m = 2^{-1}\left(\mu_{n_m} + \mu_{n_{m+1}}\right)$ çemberi üzerinde integre edersek

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_m}\lambda^2 tr\left(R_\lambda - R_\lambda^0\right)d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_m}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda^2}{\lambda_k - \lambda}\right)d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_m}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda^2}{\mu_k - \lambda}\right)d\lambda \tag{3.100}$$

elde edilir. Teorem 3.3.1'e göre

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda^2}{\lambda_k - \lambda}\right) \quad \text{ve} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda^2}{\mu_k - \lambda}\right) \tag{3.101}$$

serileri $|\lambda| = b_m$ çemberi üzerinde düzgün yakınsak serilerdir.

Dolayısıyla (3.100)'den

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_m}\lambda^2 tr\left(R_\lambda - R_\lambda^0\right)d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_m}\frac{\lambda^2}{\lambda_k - \lambda}d\lambda - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_m}\frac{\lambda^2}{\mu_k - \lambda}d\lambda \tag{3.102}$$

bulunur. $\lambda_{n_m} < b_m < \lambda_{n_m+1}$ bağıntısından ve Yardımcı Teorem 3.2.2'den m nin büyük değerleri için

$$\{\lambda_k, \mu_k\}_1^{n_m} \subset K(0, b_m) = \{\lambda : |\lambda| > b_m\} \tag{3.103}$$

$$\lambda_k, \mu_k \subset \overline{K(0, b_m)} = \{\lambda : |\lambda| \le b_m\} \qquad (k \ge n_m + 1) \tag{3.104}$$

elde edilir.

Bu nedenle

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_m}\frac{\lambda^2}{\lambda-\mu_k}d\lambda=\begin{cases}\mu_k & ,k\le n_m \quad \text{ise}\\ 0 & ,k\ge n_m+1 \quad \text{ise}\end{cases} \tag{3.105}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_m}\frac{\lambda^2}{\lambda-\lambda_k}d\lambda=\begin{cases}\lambda_k & ,k\le n_m \quad \text{ise}\\ 0 & ,k\ge n_m+1 \quad \text{ise}\end{cases} \tag{3.106}$$

olur. Bu eşitlikler (3.102)'de yerine konulursa

$$\sum_{k=1}^{n_m=1}\left(\lambda_k^2-\mu_k^2\right)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_m}\lambda^2 tr\left(R_\lambda-R_\lambda^0\right)d\lambda \tag{3.107}$$

bulunur.

Aşağıdaki formülün sağlandığı bilinmektedir:

$$R_\lambda=R_\lambda^0-R_\lambda Q R_\lambda^0 \qquad (\lambda\in\rho(L)\cap\rho(L_0)) \tag{3.108}$$

Buradan her p doğal sayısı için

$$R_\lambda-R_\lambda^0=\sum_{j=1}^{p}(-1)^j R_\lambda^0\left(QR_\lambda^0\right)^j+(-1)^{p+1}R_\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^{p+1} \tag{3.109}$$

formülü elde edilir. Bu da (3.107)'de yerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{n_m}\left(\lambda_k^2-\mu_k^2\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_m}\lambda^2 tr\left[\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+1}R_\lambda^0\left(QR_\lambda^0\right)^j+(-1)^p R_\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^{p+1}\right]d\lambda \tag{3.110}$$

veya

$$\sum_{k=1}^{n_m}\left(\lambda_k^2-\mu_k^2\right)=\sum_{j=1}^{p}D_{mj}+D_m^{(p)} \tag{3.111}$$

bulunur. Burada

$$D_{mj}=\frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_m}\lambda^2 .\mathrm{tr}\left[R_\lambda^0\left(QR_\lambda^0\right)^j\right]d\lambda \qquad (j=1,2,\ldots) \tag{3.112}$$

$$D_m^{(p)}=\frac{(-1)^p}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_m}\lambda^2 .\mathrm{tr}\left[R_\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^{p+1}\right]d\lambda \tag{3.113}$$

dır.

Teorem 3.3.2: $j\to\infty$ iken $\gamma_j \sim aj^\alpha$ $(a>0,\alpha>2)$ ise QR_λ^0 operatör fonksiyonu $\rho(L_0)$ bölgesinde $\sigma_1(H_1)$ uzayındaki norma göre analitiktir ve

$$\left(QR_\lambda^0\right)'=Q\left(R_\lambda^0\right)^2 \tag{3.114}$$

dır.

İspat: Her $\lambda\in\rho(L_0)$ için R_λ^0 çekirdek operatörü olduğundan ve

$$R_{\lambda+\Delta\lambda}^0-R_\lambda^0=\Delta\lambda R_{\lambda+\Delta\lambda}^0R_\lambda^0 \tag{3.115}$$

yararlanarak

$$\begin{aligned}\left\|\frac{QR_{\lambda+\Delta\lambda}^0-QR_\lambda^0}{\Delta\lambda}-Q\left(R_\lambda^0\right)^2\right\|_{\sigma_1(H_1)} &=\left\|QR_{\lambda+\Delta\lambda}^0QR_\lambda^0-Q\left(R_\lambda^0\right)^2\right\|_{\sigma_1(H_1)}\\ &=\left\|QR_\lambda^0R_{\lambda+\Delta\lambda}^0-Q\left(R_\lambda^0\right)^2\right\|_{\sigma_1(H_1)}\\ &=\left\|QR_\lambda^0\left(R_{\lambda+\Delta\lambda}^0-R_\lambda^0\right)\right\|_{\sigma_1(H_1)}\\ &\le\left\|QR_\lambda^0\right\|_{\sigma_1(H_1)}\left\|\left(R_{\lambda+\Delta\lambda}^0-R_\lambda^0\right)\right\|_1\end{aligned} \tag{3.116}$$

elde edilir.

$\lim\limits_{\Delta\lambda\to 0}\left\|R^{0}_{\lambda+\Delta\lambda}-R^{0}_{\lambda}\right\|_1=0$ olduğundan buradan

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\left\|\frac{QR^{0}_{\lambda+\Delta\lambda}-QR^{0}_{\lambda}}{\Delta\lambda}-Q\left(R^{0}_{\lambda}\right)^2\right\|_{\sigma_1(H_1)}=0 \tag{3.117}$$

bulunur ki bu da $\sigma_1(H_1)$ uzayındaki norma göre

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{QR^{0}_{\lambda+\Delta\lambda}-QR^{0}_{\lambda}}{\Delta\lambda}=Q\left(R^{0}_{\lambda}\right)^2 \tag{3.118}$$

veya

$$\left(QR^{0}_{\lambda}\right)'=Q\left(R^{0}_{\lambda}\right)^2 \tag{3.119}$$

olması demektir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.3.3: $B(\lambda)$ kompleks düzlemin bir açık G bölgesinde tanımlı, değerleri $\sigma_1(H)$ uzayına ait ve bu uzayın normuna göre analitik bir operatör fonksiyon ise her n doğal sayısı için

$$tr\left[\left(B^n(\lambda)\right)'\right]=tr\left[\frac{dB^n(\lambda)}{d\lambda}\right]=n.tr\left[B'(\lambda)B^{(n-1)}(\lambda)\right] \tag{3.120}$$

dır.

İspat: Teoremi ispatlamak için önce tümevarımla

$$\left(B^n(\lambda)\right)'=\sum_{i=0}^{n-1}B^i(\lambda)B'(\lambda)B^{n-1-i}(\lambda) \tag{3.121}$$

formülünün sağlandığını gösterelim. Bu formülün $n=1$ için sağlandığı açıktır. $n=2$ olduğunda

$$\left(B^2(\lambda)\right)'=\left(B(\lambda)B(\lambda)\right)'=B'(\lambda)B(\lambda)+B(\lambda)B'(\lambda) \tag{3.122}$$

veya

$$\left(B^2(\lambda)\right)' = \sum_{i=0}^{1} B^i(\lambda)B'(\lambda)B^{1-i}(\lambda) \tag{3.123}$$

dır. (3.121) formülünün n=m için sağlandığını yani

$$\left(B^m(\lambda)\right)' = \sum_{i=0}^{m-1} B^i(\lambda)B'(\lambda)B^{m-1-i}(\lambda) \tag{3.124}$$

olduğunu varsayıp n=m+1 için sağlandığını göstermek gerekir.

$$\left(B^{m+1}(\lambda)\right)' = \left(B^m(\lambda)B(\lambda)\right)' = \left(B^m(\lambda)\right)' B(\lambda) + B^m(\lambda)B'(\lambda) \tag{3.125}$$

dır.

$\left(B^m(\lambda)\right)'$ nün (3.124) ifadesi burada yerine konursa

$$\left(B^{m+1}(\lambda)\right)' = \left[\sum_{i=0}^{m-1} B^i(\lambda)B'(\lambda)B^{m-1-i}(\lambda)\right]B(\lambda) + B^m(\lambda)B'(\lambda)$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} B^i(\lambda)B'(\lambda)B^{m-i}(\lambda) + B^m(\lambda)B'(\lambda) \tag{3.126}$$

veya

$$B^{m+1}(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} B^i(\lambda)B'(\lambda)B^{m-i}(\lambda) \tag{3.127}$$

elde edilir ki bununla da (3.121) formülü ispatlanmış olur. Varsayım gereği her $\lambda \in G$ için $B(\lambda) \in \sigma_1(H)$ olduğundan (3.121)'den

$$\operatorname{tr}\left[\left(B^n(\lambda)\right)'\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{tr}\left[B^i(\lambda)B'(\lambda)B^{n-1-i}(\lambda)\right] \tag{3.128}$$

elde edilir.

$B'(\lambda) \in \sigma_1(H)$ ve her $i \geq 0$ tamsayısı için $B^i(\lambda) \in \sigma_1(H)$ olduğundan bu son eşitlikten

$$\operatorname{tr}\left[\left(B^n(\lambda)\right)'\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{tr}\left[B'(\lambda)B^{n-1-i}(\lambda)B^i(\lambda)\right] \tag{3.129}$$

veya

$$\operatorname{tr}\left[\left(B^n(\lambda)\right)'\right] = n.\operatorname{tr}\left[B'(\lambda)B^{(n-1)}(\lambda)\right] \tag{3.130}$$

bulunur (Cohberg ve Krein, 1969). Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.3.4: Değerleri $\sigma_1(H)$ uzayına ait olan bir $B(\lambda)$ operatör fonksiyonu bir $\lambda = \lambda_0$ noktasında $\sigma_1(H)$ uzayındaki norma göre analitik ise o zaman $\operatorname{tr} B(\lambda)$ skaler fonksiyonu da bu $\lambda = \lambda_0$ noktasında analitiktir ve

$$\operatorname{tr}B'(\lambda_0) = \left[\operatorname{tr}B(\lambda)\right]'_{\lambda=\lambda_0} \tag{3.131}$$

dır.

İspat: $B(\lambda)$ λ_0 noktasında $\sigma_1(H)$ uzayında norma göre analitik olduğundan

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} \left\| \frac{B(\lambda_0 + \Delta\lambda) - B(\lambda_0)}{\Delta\lambda} - B'(\lambda_0) \right\|_{\sigma_1(H)} = 0 \tag{3.132}$$

dır. Öte yandan

$$\left| \operatorname{tr}\left[\frac{B(\lambda_0 + \Delta\lambda) - B(\lambda_0)}{\Delta\lambda} - B'(\lambda_0)\right] \right| \leq \left\| \frac{B(\lambda_0 + \Delta\lambda) - B(\lambda_0)}{\Delta\lambda} - B'(\lambda_0) \right\|_{\sigma_1(H)} \tag{3.133}$$

veya

$$\left| \frac{\operatorname{tr}B(\lambda_0 + \Delta\lambda) - \operatorname{tr}B(\lambda_0)}{\Delta\lambda} - \operatorname{tr}B'(\lambda_0) \right| \leq \left\| \frac{B(\lambda_0 + \Delta\lambda) - B(\lambda_0)}{\Delta\lambda} - B'(\lambda_0) \right\|_{\sigma_1(H)} \tag{3.134}$$

olduğundan (3.132)'den

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\left|\frac{\mathrm{tr}B(\lambda_0+\Delta\lambda)-\mathrm{tr}B(\lambda_0)}{\Delta\lambda}-\mathrm{tr}B'(\lambda_0)\right|=0 \tag{3.135}$$

elde edilir.

Dolayısıyla

$$\mathrm{tr}B'(\lambda_0)=[\mathrm{tr}B(\lambda)]'_{\lambda=\lambda_0} \tag{3.136}$$

dır. Teorem ispatlanmıştır.

Teorem 3.3.5: $j\to\infty$ iken $\gamma_j \sim aj^{\alpha}$ $(a>0, \alpha>2)$ ise

$$D_{mj}=\frac{(-1)^j}{\pi i j}\int_{|\lambda|=b_m}\lambda.\mathrm{tr}\left[\left(QR_\lambda^0\right)^j\right]d\lambda \tag{3.137}$$

dır.

İspat: Teorem 3.3.2'ye göre her j doğal sayısı için $\left(QR_\lambda^0\right)^j$ operatör fonksiyonu $\rho(L_0)$ bölgesinde $\sigma_1(H_1)$ uzayındaki norma göre analitiktir. O taktirde Teorem 3.3.3'e göre

$$\mathrm{tr}\left\{\left[\left(QR_\lambda^0\right)^j\right]'\right\}=j.\mathrm{tr}\left[\left(QR_\lambda^0\right)'\left(QR_\lambda^0\right)^{j-1}\right] \tag{3.138}$$

dir. Teorem 3.3.2'ye göre

$$\left(QR_\lambda^0\right)'=Q\left(R_\lambda^0\right)^2 \tag{3.139}$$

dir. Bu son iki eşitlikten

$$\mathrm{tr}\left\{\left[\left(QR_\lambda^0\right)^j\right]'\right\}=j.\mathrm{tr}\left[\left(QR_\lambda^0\right)^{j-1}Q\left(R_\lambda^0\right)^2\right]=j.\mathrm{tr}\left[\left(QR_\lambda^0\right)^jR_\lambda^0\right]=j.\mathrm{tr}\left[R_\lambda^0\left(QR_\lambda^0\right)^j\right] \tag{3.140}$$

bulunur. Bu bağıntı D_{mj} nin (3.112) ifadesinde göz önüne alınırsa

$$D_{mj} = \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi ij} \int\limits_{|\lambda|=b_m} \lambda^2 . \mathrm{tr}\left\{ \left[\left(QR_\lambda^0 \right)^j \right]' \right\} d\lambda \tag{3.141}$$

elde edilir. Bu formül

$$D_{mj} = \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi ij} \int\limits_{|\lambda|=b_m} \mathrm{tr}\left\{ \left[\lambda^2 \left(QR_\lambda^0 \right)^j \right]' - 2\lambda \left(QR_\lambda^0 \right)^j \right\} d\lambda$$

$$= \frac{(-1)^{j}}{\pi ij} \int\limits_{|\lambda|=b_m} \lambda \mathrm{tr}\left\{ \left(QR_\lambda^0 \right)^j \right\} d\lambda + \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi ij} \int\limits_{|\lambda|=b_m} \mathrm{tr}\left\{ \left[\lambda^2 \left(QR_\lambda^0 \right)^j \right]' \right\} d\lambda \tag{3.142}$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 3.3.4'e göre

$$\mathrm{tr}\left\{ \left[\lambda^2 \left(QR_\lambda^0 \right)^j \right]' \right\} = \left\{ \mathrm{tr}\left[\lambda^2 \left(QR_\lambda^0 \right)^j \right] \right\}' \tag{3.143}$$

dır. Dolayısıyla

$$\int\limits_{|\lambda|=b_m} \mathrm{tr}\left\{ \left[\lambda^2 \left(QR_\lambda^0 \right)^j \right]' \right\} d\lambda = \int\limits_{|\lambda|=b_m} \left\{ \mathrm{tr}\left[\lambda^2 \left(QR_\lambda^0 \right)^j \right] \right\}' d\lambda \tag{3.144}$$

olur. Bu eşitliğin sağ tarafındaki integrali aşağıdaki gibi iki eğri üzerindeki integralin toplamı şeklinde gösterelim:

$$\int\limits_{|\lambda|=b_m} \left\{ \mathrm{tr}\left[\lambda^2 \left(QR_\lambda^0 \right)^j \right] \right\}' d\lambda = \int\limits_{\substack{|\lambda|=b_m \\ \mathrm{Im}\,\lambda \geq 0}} \left\{ \mathrm{tr}\left[\lambda^2 \left(QR_\lambda^0 \right)^j \right] \right\}' d\lambda + \int\limits_{\substack{|\lambda|=b_m \\ \mathrm{Im}\,\lambda \leq 0}} \left\{ \mathrm{tr}\left[\lambda^2 \left(QR_\lambda^0 \right)^j \right] \right\}' d\lambda \tag{3.145}$$

ε_0, $b_m + \varepsilon_0 < \mu_{n_m+1}$ olacak şekilde bir pozitif sayı olmak üzere $\mathrm{tr}\left[\lambda^2 \left(QR_\lambda^0 \right)^j \right]$ fonksiyonunun

$$G_1 = \left\{ \lambda : b_m - \varepsilon_0 < |\lambda| < b_m + \varepsilon_0 , \mathrm{Im}\,\lambda > -\varepsilon_0 \right\} \tag{3.146}$$

$$G_2 = \left\{ \lambda : b_m - \varepsilon_0 < |\lambda| < b_m + \varepsilon_0 , \mathrm{Im}\,\lambda < \varepsilon_0 \right\} \tag{3.147}$$

basit bağlantılı bölgelerin analitik ve

$$\{\lambda : |\lambda| = b_m \ , \ \mathrm{Im}\,\lambda \geq 0\} \subset G_1 \tag{3.148}$$

$$\{\lambda : |\lambda| = b_m \ , \ \mathrm{Im}\,\lambda \leq 0\} \subset G_2 \tag{3.149}$$

olduğu dikkate alınırsa Leibnitz formülünü kullanarak (3.145)'den

$$\begin{aligned}\int_{|\lambda|=b_m} \left\{ \mathrm{tr}\left[\lambda^2 \left(QR_\lambda^0\right)^j\right]\right\}' d\lambda = \mathrm{tr}\left[b_m^2 \left(QR_{-b_m}^0\right)^j\right] - \mathrm{tr}\left[b_m^2 \left(QR_{b_m}^0\right)^j\right] \\ + \mathrm{tr}\left[b_m^2 \left(QR_{b_m}^0\right)^j\right] - \mathrm{tr}\left[b_m^2 \left(QR_{-b_m}^0\right)^j\right] = 0\end{aligned} \tag{3.150}$$

elde edilir.

(3.142) ve bu son eşitlikten

$$D_{mj} = \frac{(-1)^j}{\pi i j} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda.\mathrm{tr}\left[\left(QR_\lambda^0\right)^j\right] d\lambda \tag{3.151}$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

$\lim\limits_{m\to\infty} D_{m1}$ limitinin hesaplanmasında kullanacağımız aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 3.3.6: Q(x) operatör fonksiyonunun 1) koşulunu sağladığını varsayalım. Eğer her $x \in [0,\pi]$ için $AQ''(x), Q^{IV}(x) \in \sigma_1(H)$ ve $\|AQ''(x)\|_{\sigma_1(H)}$, $\|Q^{IV}(x)\|_{\sigma_1(H)}$ fonksiyonları $[0,\pi]$ aralığında ölçülebilir ve sınırlı ise

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\left(k^2+\gamma_j\right)\int_0^\pi \mathrm{Cos}2kx.\left(Q(x)\varphi_j,\varphi_j\right)dx\right| < \infty \tag{3.152}$$

dır.

İspat: $f_i(x) = (Q(x)\varphi_i, \varphi_i)$ olsun.

Kısmi integrasyon yönteminden ve $f_i'(0) = f_i'(\pi) = 0$ koşullarından yararlanırsak

$$\int_0^\pi f_i(x)\operatorname{Cos}2kx\,dx=\int_0^\pi f_i(x)\left(\frac{1}{2k}\operatorname{Sin}2kx\right)'dx=\frac{1}{2k}f_i(x)\operatorname{Sin}2kx\Big|_0^\pi-\frac{1}{2k}\int_0^\pi f_i'(x)\operatorname{Sin}2kx\,dx$$

$$=\frac{1}{2k}\int_0^\pi f_i'(x)\left(\frac{1}{2k}\operatorname{Cos}2kx\right)'dx=\frac{1}{4k^2}f_i'(x)\operatorname{Cos}2kx\Big|_0^\pi-\frac{1}{4k^2}\int_0^\pi f_i''(x)\operatorname{Cos}2kx\,dx$$

$$=-\frac{1}{4k^2}\int_0^\pi f_i''(x)\operatorname{Cos}2kx\,dx \tag{3.153}$$

elde edilir. Buradan

$$\left(k^2+\gamma_i\right)\int_0^\pi f_i(x)\operatorname{Cos}2kx\,dx=-\frac{1}{4}\int_0^\pi f_i''(x)\operatorname{Cos}2kx\,dx-\frac{\gamma_i}{4k^2}\int_0^\pi f_i''(x)\operatorname{Cos}2kx\,dx \tag{3.154}$$

bulunur. Kısmi integrasyondan tekrar yararlanır ve

$$f_i'''(0)=f_i'''(\pi)=0 \tag{3.155}$$

koşullarını göz önüne alırsak

$$\left(k^2+\gamma_i\right)\int_0^\pi f_i(x)\operatorname{Cos}2kx\,dx=-\frac{1}{4}\int_0^\pi f_i''(x)\operatorname{Cos}2kx\,dx-\frac{\gamma_i}{4k^2}\int_0^\pi f_i''(x)\operatorname{Cos}2kx\,dx$$

$$=-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2k}f_i''(x)\operatorname{Sin}2kx\Big|_0^\pi-\frac{1}{2k}\int_0^\pi f_i'''(x)\operatorname{Sin}2kx\,dx\right]-\frac{\gamma_i}{4k^2}\int_0^\pi f_i''(x)\operatorname{Cos}2kx\,dx$$

$$=-\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2k}\int_0^\pi f_i'''(x)\operatorname{Sin}2kx\,dx\right]-\frac{\gamma_i}{4k^2}\int_0^\pi f_i''(x)\operatorname{Cos}2kx\,dx$$

$$=-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4k^2}f_i'''(x)\operatorname{Cos}2kx\Big|_0^\pi-\frac{1}{4k^2}\int_0^\pi f_i^{IV}(x)\operatorname{Cos}2kx\,dx\right]-\frac{\gamma_i}{4k^2}\int_0^\pi f_i''(x)\operatorname{Cos}2kx\,dx$$

$$=\frac{1}{16k^2}\int_0^\pi f_i^{IV}(x)\operatorname{Cos}2kx\,dx-\frac{\gamma_i}{4k^2}\int_0^\pi f_i''(x)\operatorname{Cos}2kx\,dx \tag{3.156}$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\left(k^2+\gamma_i\right)\int_0^{\pi} f_i(x)\mathrm{Cos}2kx\,dx\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1}{16k^2}\int_0^{\pi}\left|f_i^{IV}(x)\right|dx+\frac{|\gamma_i|}{4k^2}\int_0^{\pi}\left|f_i''(x)\right|dx\right]$$

$$\le\left[\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\left|f_i^{IV}(x)\right|dx+\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\gamma_i\left|f_i''(x)\right|dx\right]\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2} \qquad (3.157)$$

bulunur. Ayrıca

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\left|f_i^{IV}(x)\right|dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\left[\sum_{i=1}^{n}\left|f_i^{IV}(x)\right|\right]dx\le\int_0^{\pi}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left|f_i^{IV}(x)\right|\right]dx=\int_0^{\pi}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left|\left(Q^{IV}(x)\varphi_i,\varphi_i\right)\right|\right]dx \qquad (3.158)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\gamma_i\left|f_i''(x)\right|dx\le\int_0^{\pi}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i\left|f_i''(x)\right|\right]dx=\int_0^{\pi}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left|\left(AQ''(x)\varphi_i,\varphi_i\right)\right|\right]dx \qquad (3.159)$$

dır. Varsayım gereği her $x\in[0,\pi]$ için $Q^{IV}(x)\in\sigma_1(H)$ ve $AQ''(x)\in\sigma_1(H)$ dir. Bu durumda Cohberg ve Krein'dan (1969)

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\left(Q^{IV}(x)\varphi_i,\varphi_i\right)\right|\le\left\|Q^{IV}(x)\right\|_{\sigma_1(H)} \qquad (3.160)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\left(AQ''(x)\varphi_i,\varphi_i\right)\right|\le\left\|AQ''(x)\right\|_{\sigma_1(H)} \qquad (3.161)$$

olduğu bilinmektedir. (3.157), (3.158) , (3.159), (3.160) ve (3.161) bağıntılarından

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\left(k^2+\gamma_j\right)\int_0^{\pi}\mathrm{Cos}2kx.\left(Q(x)\varphi_j,\varphi_j\right)dx\right|<c_0\left[\int_0^{\pi}\left\|Q^{IV}(x)\right\|_{\sigma_1(H)}dx+\int_0^{\pi}\left\|AQ''(x)\right\|_{\sigma_1(H)}dx\right] \qquad (3.162)$$

bulunur. Burada $c_0=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2}$ dir. $\left\|AQ''(x)\right\|_{\sigma_1(H)}$ ve $\left\|Q^{IV}(x)\right\|_{\sigma_1(H)}$ fonksiyonlarının $[0,\pi]$ aralığında sınırlı ve ölçülebilir oldukları varsayıldığından son eşitsizlikten

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\left(k^2+\gamma_i\right)\int_0^{\pi}f_i(x)\mathrm{Cos}2kx\,dx\right|<\infty \qquad (3.163)$$

elde edilir.

L_0 operatörünün $\{\mu_q\}_1^\infty$ özdeğerlerine karşılık gelen ortonormal özfonksiyonlar sistemi sırasıyla $\{\psi_q\}_1^\infty$ olsun. L_0 operatörünün

$$k^2+\gamma_j \qquad (k=0,1,2,\ldots;\ j=1,2,\ldots) \tag{3.164}$$

özdeğerlerine karşılık gelen ortonormal özfonksiyonlar sistemi sırasıyla $M_k \operatorname{Cos}kx.\varphi_j$ olduğundan

$$\psi_q(x)=M_{k_q}\operatorname{Cos}k_q x.\varphi_{j_q} \qquad (q=1,2,\ldots) \tag{3.165}$$

dır.

Teorem 3.3.7: 1, 2,3,4 koşulları sağlanıyor ve $j\to\infty$ iken $\gamma_j \sim aj^\alpha$ $(a>0, \alpha>2)$ ise

$$\lim_{m\to\infty} D_{m1}=\frac{1}{2}[\operatorname{tr}AQ(0)+\operatorname{tr}AQ(\pi)]-\frac{1}{8}[\operatorname{tr}Q''(0)+\operatorname{tr}Q''(\pi)] \tag{3.166}$$

dir.

İspat: Teorem 3.3.5'e göre

$$D_{m1}=-\frac{1}{\pi i}\int_{|\lambda|=b_m}\lambda.\operatorname{tr}\left(QR_\lambda^0\right)d\lambda \tag{3.167}$$

dir.

QR_λ^0 her $\lambda\in\rho(L_0)$ için çekirdek operatörü ve $\{\psi_n\}_1^\infty$ da H_1 uzayının bir ortonormal bazı olduğundan

$$\operatorname{tr}\left(QR_\lambda^0\right)=\sum_{q=1}^{\infty}\left(QR_\lambda^0\psi_q,\psi_q\right)_1 \tag{3.168}$$

olur.

Bu ifade (3.167)'de yerine yazılıp

$$R_\lambda^0 \psi_q = (L_0 - \lambda I)^{-1}.\psi_q = (\mu_q - \lambda I)^{-1} \psi_q \tag{3.169}$$

olduğu dikkate alınırsa

$$D_{m1} = -\frac{1}{\pi i} \int_{|\lambda| = b_m} \left(\lambda \sum_{q=1}^{\infty} \left(QR_\lambda^0 \psi_q, \psi_q \right)_1 \right) d\lambda$$

$$= -\frac{1}{\pi i} \int_{|\lambda| = b_m} \left(\lambda \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_q - \lambda} \left(Q\psi_q, \psi_q \right)_1 \right) d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi i} \sum_{q=1}^{\infty} \left(Q\psi_q, \psi_q \right)_1 \int_{|\lambda| = b_m} \frac{\lambda}{\mu_q - \lambda} \, d\lambda \tag{3.170}$$

bulunur. (3.165)'den ve

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = b_m} \frac{\lambda}{\lambda - \mu_q} \, d\lambda = \begin{cases} \mu_q & , \quad q \le n_m \ \text{ ise} \\ 0 & , \quad q > n_m \ \text{ ise} \end{cases} \tag{3.171}$$

formülünden yararlanarak

$$D_{m1} = 2 \sum_{q=1}^{n_m} \mu_q \left(Q\psi_q, \psi_q \right)_{H_1} = 2 \sum_{q=1}^{n_m} \mu_q \int_0^{\pi} \left(Q(x)\psi_q(x), \psi_q(x) \right) dx$$

$$= 2 \sum_{q=1}^{n_m} \mu_q \int_0^{\pi} \left(Q(x) M_{k_q}.\mathrm{Cos}k_q x.\varphi_{j_q}, M_{k_q}.\mathrm{Cos}k_q x.\varphi_{j_q} \right) dx$$

$$= 2 \sum_{q=1}^{n_m} M_{k_q}^2 \mu_q \int_0^{\pi} \mathrm{Cos}^2 k_q x. \left(Q(x)\varphi_{j_q}, \varphi_{j_q} \right) dx$$

$$= \sum_{q=1}^{n_m} M_{k_q}^2 \mu_q \int_0^{\pi} \left(1 + \mathrm{Cos}2k_q x \right) \left(Q(x)\varphi_{j_q}, \varphi_{j_q} \right) dx \tag{3.172}$$

bulunur.

$Q(x)$, 4) koşulunu sağladığından ve

$$M_k = \sqrt{2\pi^{-1}} \qquad (k = 1,2,...) \tag{3.173}$$

olduğundan buradan

$$D_{m1} = \frac{2}{\pi}\sum_{q=1}^{n_m}\mu_q \int_0^{\pi} \mathrm{Cos}2k_q x.\left(Q(x)\varphi_{j_q}, \varphi_{j_q}\right) dx \tag{3.174}$$

elde edilir. Teorem 3.3.6'ya göre

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(k^2 + \gamma_j\right)\int_0^{\pi} \mathrm{Cos}2kx.\left(Q(x)\varphi_j, \varphi_j\right) dx \tag{3.175}$$

serisi mutlak yakınsaktır. Bu durumda bilindiği gibi

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{q=1}^{n_m}\left(k^2 + \gamma_{j_q}\right)\int_0^{\pi} \mathrm{Cos}2k_q x.\left(Q(x)\varphi_{j_q}, \varphi_{j_q}\right)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(k^2 + \gamma_j\right)\int_0^{\pi} \mathrm{Cos}2kx.\left(Q(x)\varphi_j, \varphi_j\right)dx \tag{3.176}$$

dir. (3.174)'de $m \to \infty$ iken limite geçilir ve bu son eşitlik göz önüne alınırsa

$$\lim_{m\to\infty} D_{m1} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(k^2 + \gamma_j\right)\int_0^{\pi} \mathrm{Cos}2kx.\left(Q(x)\varphi_j, \varphi_j\right) dx \tag{3.177}$$

veya

$$\lim_{m\to\infty} D_{m1} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} k^2 \int_0^{\pi} \mathrm{Cos}2kx.\left(Q(x)\varphi_j, \varphi_j\right) dx + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j \int_0^{\pi} \mathrm{Cos}2kx.\left(Q(x)\varphi_j, \varphi_j\right)dx \tag{3.178}$$

bulunur. Burada

$$\int_0^{\pi} \mathrm{Cos}2kx.\left(Q(x)\varphi_j, \varphi_j\right) dx = -\frac{1}{4k^2}\int_0^{\pi} \mathrm{Cos}2kx.\left(Q''(x)\varphi_j, \varphi_j\right) dx \tag{3.179}$$

eşitliğini kullanırsak

$$\lim_{m\to\infty} D_{m1} = -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\pi} \mathrm{Cos}2kx.\left(Q''(x)\varphi_j,\varphi_j\right)dx + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\pi} \mathrm{Cos}2kx.\left(Q(x)\varphi_j,\gamma_j\varphi_j\right)dx \quad (3.180)$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{m\to\infty} D_{m1} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_0^{\pi} \mathrm{Cos}kx.\left(Q''(x)\varphi_j,\varphi_j\right)dx + (-1)^k\int_0^{\pi} \mathrm{Cos}kx.\left(Q''(x)\varphi_j,\varphi_j\right)dx\right] + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\pi} \mathrm{Cos}2kx.\left(Q(x)\varphi_j,A\varphi_j\right)dx \quad (3.181)$$

$$= -\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{Cos}kx.\left(Q''(x)\varphi_j,\varphi_j\right)dx\right)\mathrm{Cos}k0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{Cos}kx.\left(Q''(x)\varphi_j,\varphi_j\right)dx\right)\mathrm{Cos}k\pi\right] + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\pi} \mathrm{Cos}2kx.\left(AQ(x)\varphi_j,\varphi_j\right)dx$$

$$= -\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{Cos}kx.\left(Q''(x)\varphi_j,\varphi_j\right)dx\right)\mathrm{Cos}k0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{Cos}kx.\left(Q''(x)\varphi_j,\varphi_j\right)dx\right)\mathrm{Cos}k\pi\right] + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_0^{\pi} \mathrm{Cos}kx.\left(AQ(x)\varphi_j,\varphi_j\right)dx + (-1)^k\int_0^{\pi} \mathrm{Cos}kx.\left(AQ(x)\varphi_j,\varphi_j\right)dx\right]$$

$$= -\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{Cos}kx.\left(Q''(x)\varphi_j,\varphi_j\right)dx\right)\mathrm{Cos}k0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{Cos}kx.\left(Q''(x)\varphi_j,\varphi_j\right)dx\right)\mathrm{Cos}k\pi\right] + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \mathrm{Cos}kx.\left(AQ(x)\varphi_j,\varphi_j\right)dx\right)\mathrm{Cos}k0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \mathrm{Cos}kx.\left(AQ(x)\varphi_j,\varphi_j\right)dx\right)\mathrm{Cos}k\pi\right]$$

elde edilir. 1) ve 4) koşullarının sağlandığı göz önüne alınırsa bu son bağıntının sağ tarafındaki k ya göre olan toplamlar sürekli türeve sahip olan $\left(Q''(x)\varphi_j,\varphi_j\right)_H$ ve $\left(AQ(x)\varphi_j,\varphi_j\right)_H$ fonksiyonlarının $[0,\pi]$ aralığındaki $\{\mathrm{Cos}kx\}_{k=0}^{\infty}$ fonksiyonlarına göre Fourier serisinin sıra ile 0 ve π noktalarındaki değerleridir. Dolayısıyla,

$$\lim_{m\to\infty} D_{m1} = -\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{\infty}\left[\left(Q''(0)\varphi_j,\varphi_j\right) + \left(Q''(\pi)\varphi_j,\varphi_j\right)\right] + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\left[\left(AQ(0)\varphi_j,\varphi_j\right) + \left(AQ(\pi)\varphi_j,\varphi_j\right)\right] \quad (3.182)$$

veya

$$\lim_{m\to\infty} D_{m1} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{tr} AQ(0) + \operatorname{tr} AQ(\pi)\right] - \frac{1}{8}\left[\operatorname{tr} Q''(0) + \operatorname{tr} Q''(\pi)\right] \tag{3.183}$$

elde edilir. Teorem ispatlanmıştır.

3.4 İkinci Düzenli İzin Hesaplanması

(3.111) formülü ve Teorem 3.3.5 gereğince

$$\sum_{k=1}^{n_m}\left(\lambda_k^2 - \mu_k^2\right) = \sum_{j=1}^{p} D_{mj} + D_m^{(p)} \tag{3.184}$$

bulunur. Burada

$$D_{mj} = \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_m} \lambda^2 .\operatorname{tr}\left[R_\lambda^0\left(QR_\lambda^0\right)^j\right] d\lambda \qquad (j = 1,2,\ldots) \tag{3.185}$$

$$D_m^{(p)} = \frac{(-1)^p}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_m} \lambda^2 .\operatorname{tr}\left[R_\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^{p+1}\right] d\lambda \tag{3.186}$$

dır.

$$D_{mj} = \frac{2.(-1)^j}{j}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_m} \operatorname{tr}\left[\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^j\right] d\lambda = 2.(-1)^j.j^{-1}\sum_{k=1}^{n_m}\operatorname*{Res}_{\lambda=\mu_k}\operatorname{tr}\left[\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^j\right] \tag{3.187}$$

olduğu göz önüne alınırsa (3.184) formülü

$$\sum_{k=1}^{n_m}\left(\lambda_k^2 - \mu_k^2 - 2\sum_{j=2}^{p}(-1)^j j^{-1}\operatorname*{Res}_{\lambda=\mu_k}\operatorname{tr}\left[\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^j\right]\right) = D_{m1} + D_m^{(p)} \tag{3.188}$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 3.4.1: $j \to \infty$ iken $\gamma_j \sim aj^{\alpha}$ $\quad (0 < a < \infty, 2 < \alpha < \infty)$ ise $|\lambda| = b_m$ çemberi üzerinde

$$\left\| R_{\lambda}^{0} \right\|_{\sigma_1(H_1)} < \text{const.} n_m^{1-\delta} \qquad \left(\delta = \frac{\alpha - 2}{\alpha + 2} \right) \tag{3.189}$$

dir.

İspat: $\lambda \notin \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ için R_{λ}^{0} normal operatör olduğundan

$$\left\| R_{\lambda}^{0} \right\|_{\sigma_1(H_1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_k - \lambda|} \tag{3.190}$$

dir (Cohberg ve Krein,1969). $|\lambda| = b_m = 2^{-1}\left(\mu_{n_m} + \mu_{n_{m+1}}\right)$ olduğundan buradan

$$\left\| R_{\lambda}^{0} \right\|_{\sigma_1(H_1)} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left| |\lambda| - \mu_k \right|} \le \sum_{k=1}^{n_m} \frac{2}{\mu_{n_m} + \mu_{n_{m+1}} - 2\mu_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2\mu_k - \mu_{n_m} - \mu_{n_{m+1}}}$$

$$\le \sum_{k=1}^{n_m} \frac{2}{\mu_{n_{m+1}} - \mu_k} + \sum_{k=n_m+1}^{\infty} \frac{2}{\mu_k - \mu_{n_m}} = \sum_{k=1}^{n_m} \frac{2}{\mu_{n_{m+1}} - \mu_k} + 2\Omega_m \tag{3.191}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 3.2.1 ve (3.72) eşitsizliğinden yararlanarak

$$\sum_{k=1}^{n_m} \frac{1}{\mu_{n_{m+1}} - \mu_k} < \frac{n_m}{\mu_{n_{m+1}} - \mu_{n_m}} < \frac{n_m}{d_1((n_m + 1)^{1+\delta} - n_m^{1+\delta})} < \frac{n_m}{d_1 n_m^{\delta}} = d_1^{-1} n_m^{1-\delta} \tag{3.192}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 3.2.1 bir daha kullanılırsa

$$\Omega_m = \sum_{k=n_m+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k - \mu_{n_m}} < \sum_{k=n_m+1}^{\infty} \frac{1}{d_1(K^{1+\delta} - n_m^{1+\delta})}$$

$$= \frac{n_m}{d_1((n_m + 1)^{1+\delta} - n_m^{1+\delta})} + d_1^{-1} \sum_{k=n_m+2}^{\infty} \frac{1}{K^{1+\delta} - n_m^{1+\delta}} \tag{3.193}$$

bulunur.

Ayrıca

$$\sum_{k=n_m+2}^{\infty}\frac{1}{K^{1+\delta}-n_m^{1+\delta}}=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{n_m+i}^{n_m+i+1}\frac{dx}{(n_m+i+1)^{1+\delta}-n_m^{1+\delta}} \tag{3.194}$$

ve $x\in[n_m+i,n_m+i+1]$ için

$$\frac{1}{(n_m+i+1)^{1+\delta}-n_m^{1+\delta}}\leq\frac{1}{x^{1+\delta}-n_m^{1+\delta}} \tag{3.195}$$

olduğundan

$$\int_{n_m+i}^{n_m+i+1}\frac{dx}{(n_m+i+1)^{1+\delta}-n_m^{1+\delta}}<\int_{n_m+i}^{n_m+i+1}\frac{dx}{x^{1+\delta}-n_m^{1+\delta}} \tag{3.196}$$

ve

$$\sum_{k=n_m+2}^{\infty}\frac{1}{K^{1+\delta}-n_m^{1+\delta}}\leq\sum_{i=1}^{\infty}\int_{n_m+i}^{n_m+i+1}\frac{dx}{x^{1+\delta}-n_m^{1+\delta}}=\int_{n_m+1}^{\infty}\frac{dx}{x^{1+\delta}-n_m^{1+\delta}} \tag{3.197}$$

olur. Bu son bağıntı (3.193)'de göz önüne alınırsa

$$\Omega_m<\frac{1}{d_1((n_m+1)^{1+\delta}-n_m^{1+\delta})}+d_1^{-1}\int_{n_m+1}^{\infty}\frac{dx}{x^{1+\delta}-n_m^{1+\delta}} \tag{3.198}$$

elde edilir.

Bu eşitliğin sağ tarafindaki integrali sınırlandırmak için

$$x^{1+\delta}-n_m^{1+\delta}=t \tag{3.199}$$

dönüşümünü yapalım. O taktirde

$$\int_{n_m+1}^{\infty}\frac{dx}{x^{1+\delta}-n_m^{1+\delta}}=\int_{\alpha_m}^{\infty}\frac{1}{(1+\delta).t}\left(1+n_m^{1+\delta}\right)^{-\frac{\delta}{1+\delta}}dt \tag{3.200}$$

bulunur. Burada $\alpha_m = (n_m + 1)^{1+\delta} - n_m^{1+\delta}$ dır. (3.200)'den

$$\int_{n_m+1}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\delta} - n_m^{1+\delta}} < \frac{1}{(1+\delta)} \int_{\alpha_m}^{\infty} t^{-1-\frac{\delta}{1+\delta}} dt = -\frac{1}{(1+\delta)} \frac{1+\delta}{\delta} t^{-\frac{\delta}{1+\delta}} \Bigg|_{\alpha_m}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\delta} \left[(n_m + 1)^{1+\delta} - n_m^{1+\delta} \right]^{-\frac{\delta}{1+\delta}} < \delta^{-1} n_m^{-\frac{\delta^2}{1+\delta}} \tag{3.201}$$

elde edilir. (3.198)'den ve bu son bağıntıdan

$$\Omega_m < d_1^{-1} n_n^{-\delta} + d_1^{-1} \delta^{-1} n_m^{-\frac{\delta^2}{1+\delta}} \tag{3.202}$$

bulunur. (3.191), (3.192) ve (3.202)'den

$$\left\| R_\lambda^0 \right\|_{\sigma_1(H_1)} < \frac{6}{d_1 \delta} . n_m^{1-\delta} \tag{3.203}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

$|\lambda| = b_m$ ve m nin büyük değerleri için R_λ operatörünün normunu sınırlandıralım. $|\lambda| = b_m$ için

$$\left| |\lambda_k| - |\lambda| \right| = \left| |\lambda_k| - \frac{1}{2} \left(\mu_{n_m} + \mu_{n_m+1} \right) \right| = \frac{1}{2} \left| \mu_{n_m} + \mu_{n_m+1} - 2|\lambda_k| \right| \tag{3.204}$$

dir. $k \leq n_m$ ve m nin büyük değerleri için $|\lambda_k| < \lambda_{n_m}$ olduğundan

$$\mu_{n_m} + \mu_{n_m+1} - 2|\lambda_k| \geq \mu_{n_m} + \mu_{n_m+1} - 2\lambda_{n_m} = \mu_{n_m+1} - \mu_{n_m} + 2\left(\mu_{n_m} - \lambda_{n_m} \right)$$

$$\geq \mu_{n_m+1} - \mu_{n_m} + 2\left| \mu_{n_m} - \lambda_{n_m} \right| \tag{3.205}$$

dir. (3.59) eşitsizliğine göre buradan

$$\mu_{n_m} + \mu_{n_m+1} - 2|\lambda_k| \geq \mu_{n_m+1} - \mu_{n_m} + 2\|Q\|_{H_1} \tag{3.206}$$

elde edilir. $k \geq n_m + 1$ ve m nin büyük değerleri için $|\lambda_k| = \lambda_k \geq \lambda_{n_m+1}$ olduğundan

$$2|\lambda_k| - \mu_{n_m} - \mu_{n_m+1} \geq 2\lambda_{n_m+1} - \mu_{n_m} - \mu_{n_m+1} = \mu_{n_m+1} - \mu_{n_m} + 2(\lambda_{n_m+1} - \mu_{n_m+1})$$

$$\geq \mu_{n_m+1} - \mu_{n_m} - 2|\lambda_{n_m+1} - \mu_{n_m+1}| \tag{3.207}$$

olur. Buradan (3.59) eşitsizliği bir daha kullanılırsa

$$2|\lambda_k| - \mu_{n_m} - \mu_{n_m+1} \geq \mu_{n_m+1} - \mu_{n_m} - 2\|Q\|_{H_1} \tag{3.208}$$

bulunur. $\lim_{m\to\infty}(\mu_{n_m+1} - \mu_{n_m}) = \infty$ olduğundan (3.204), (3.206) ve (3.208)'den

$$\big||\lambda_k| - |\lambda|\big| > \frac{1}{4}(\mu_{n_m+1} - \mu_{n_m}) \tag{3.209}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 3.2.1'den ve (3.72) eşitliğinden yararlanarak bu son eşitsizlikten

$$\big||\lambda_k| - |\lambda|\big| > \frac{d_1}{4}\left[(n_m + 1)^{1+\delta} - n_m^{1+\delta}\right] > \frac{d_1}{4} n_m^{\delta} \qquad \left(\delta = \frac{\alpha - 2}{\alpha + 2}\right) \tag{3.210}$$

bulunur. Dolayısıyla $|\lambda| = b_m$ ve m nin büyük değerleri için

$$|\lambda_k - \lambda| > \frac{d_1}{4} n_m^{\delta} \tag{3.211}$$

dır. Diğer yandan R_λ operatörünün s sayıları $\left\{|\lambda_k - \lambda|^{-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ olduğundan

$$\|R_\lambda\|_{H_1} = \max_k\left\{|\lambda_k - \lambda|^{-1}\right\} \tag{3.212}$$

olacaktır (Cohberg ve Krein, 1969). (3.211) ve (3.212)'den

$$\|R_\lambda\|_{H_1} < \frac{d_1}{4} n_m^{-\delta} \qquad \left(\delta = \frac{\alpha - 2}{\alpha + 2}\right) \tag{3.213}$$

elde edilir.

Teorem 3.4.2: 1) , 2) , 3) , 4) koşulları sağlanıyor ve $j \to \infty$ iken $\gamma_j \sim aj^{\alpha}$ $(0 < a < \infty,$ $2 < \alpha < \infty)$ ise

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n_m} \left(\lambda_k^2 - \mu_k^2 - 2\sum_{j=2}^{p} (-1)^j j^{-1} \operatorname*{Res}_{\lambda=\mu_k} \operatorname{tr}\left[\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^j\right] \right) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{tr}AQ(0) + \operatorname{tr}AQ(\pi)\right] - \frac{1}{8}\left[\operatorname{tr}Q''(0) + \operatorname{tr}Q''(\pi)\right]$$

dır. Burada $p = \left[\left|\dfrac{5\alpha+6}{\alpha-2}\right|\right] + 1$ dir.

İspat: (3.185) formülünden yararlanarak

$$\left|D_m^{(p)}\right| \le \int_{|\lambda|=b_m} |\lambda|^2 \left|\operatorname{tr}\left[R_\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^{p+1}\right]\right| |d\lambda| \le b_m^2 \int_{|\lambda|=b_m} \left\|R_\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^{p+1}\right\|_{\sigma_1(H_1)} |d\lambda|$$

$$\le b_m^2 \int_{|\lambda|=b_m} \left\|R_\lambda\right\|_{H_1} \left\|\left(QR_\lambda^0\right)^{p+1}\right\|_{\sigma_1(H_1)} |d\lambda|$$

$$\le b_m^2 \int_{|\lambda|=b_m} \left\|R_\lambda\right\|_{H_1} \left\|\left(QR_\lambda^0\right)^{p}\right\|_{H_1} \left\|QR_\lambda^0\right\|_{\sigma_1(H_1)} |d\lambda|$$

$$\le b_m^2 \int_{|\lambda|=b_m} \left\|R_\lambda\right\|_{H_1} \left\|Q\right\|_{H_1}^p \left\|R_\lambda^0\right\|_{H_1}^p \left\|Q\right\|_{H_1} \left\|R_\lambda^0\right\|_{\sigma_1(H_1)} |d\lambda| \quad (2.114)$$

elde edilir.

Teorem 3.4.1'den ve (3.213) eşitsizliğinden yararlanarak

$$\left|D_m^{(p)}\right| \le \text{const}\, b_m^3 . n_m^{-(p+1)\delta} . n_m^{1-\delta} \quad (3.215)$$

ya da $b_m \le \text{const}\, n_m^{1+\delta}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\left|D_m^{(p)}\right| \le \text{const}\, n_m^{3(1+\delta)} . n_m^{-(1+p)\delta} . n_m^{1-\delta} = \text{const}\, n_m^{4-(p-1)\delta} \quad (3.216)$$

elde edilir. Buradan görülüyor ki

$$p = \left[\left[\frac{4}{\delta} + 1\right]\right] + 1 \tag{3.217}$$

ya da

$$p = \left[\left[\frac{5\alpha + 6}{\alpha - 2}\right]\right] + 1 \tag{3.218}$$

ise

$$\lim_{m \to \infty} D_m^{(p)} = 0 \tag{3.219}$$

dir. Teorem 3.3.7'den ve (3.188) ve (3.219) formüllerinden L_0 operatörünün ikinci düzenli izi için

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{n_m} \left(\lambda_k^2 - \mu_k^2 - 2\sum_{j=2}^{p} (-1)^j j^{-1} \operatorname*{Res}_{\lambda=\mu_k} \operatorname{tr}\left[\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^j\right] \right) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{tr}AQ(0) + \operatorname{tr}AQ(\pi)\right] - \frac{1}{8}\left[\operatorname{tr}Q''(0) + \operatorname{tr}Q''(\pi)\right]$$

formülü elde edilir.

3.5 Örnek

$H = L_2[0,\pi]$ olsun. $D(A)$ ile aşağıdaki koşulları sağlayan $\varphi(t)$ fonksiyonlar kümesini gösterelim:

a) $\varphi'''(t)$ $[0,\pi]$ aralığında mutlak süreklidir ve $\varphi^{iv}(t) \in L_2[0,\pi]$

b) $\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(\pi) = 0$

$$A : D(A) \to L_2[0,\pi] \;, \quad A\varphi = \frac{d^4\varphi(t)}{dt^4} \tag{3.221}$$

operatörünü göz önüne alalım.

Bu operatör

$$A = A^* \geq I \quad \text{ve} \quad A^{-1} \in \sigma_\infty(L_2[0,\pi]) \tag{3.222}$$

koşullarını sağlayan bir operatördür. A operatörünün özdeğerleri

$$\gamma_j = j^4 \quad (j = 1,2,3,...) \tag{3.223}$$

bu özdeğere karşılık gelen ortonormal özfonksiyonlar da

$$\varphi_j(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Sinjt} \quad (j = 1,2,3,...) \tag{3.224}$$

şeklindedir. $Q(x)$ olarak her $x \in [0,\pi]$ için $L_2[0,\pi]$ den $L_2[0,\pi]$ ye

$$Q(x)\varphi(t) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Cosx} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-6} \operatorname{Sinjt} \int_0^\pi \varphi(s) \operatorname{Sinjs} ds \tag{3.225}$$

operatör fonksiyonunu alalım. Bu operatör fonksiyonun 1) , 2) , 3) ve 4) koşullarını sağladığı kolayca gösterilebilir.

Ayrıca $H_1 = L_2(L_2[0,\pi];[0,\pi]) = L_2([0,\pi]x[0,\pi])$ olduğu gösterilebilir. Ele aldığımız bu örnekte L_0 ve L, $D(L_0) = D(L) \subset H_1$ olmak üzere $D(L_0)$ dan H_1 e sırasıyla

$$l_0(u) = -\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} \tag{3.226}$$

$$l(u) = -\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} + \frac{2}{\pi} \operatorname{Cosx} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-6} \operatorname{Sinjt} \int_0^\pi u(x,s) \operatorname{Sinjs} ds \tag{3.227}$$

diferansiyel ifadeleri ve aynı

$$u'_x(0,t) = u'_x(\pi,t) = 0 \tag{3.228}$$

$$u(x,0) = u''_{tt}(x,0) = u(x,\pi) = u''_{tt}(x,\pi) = 0 \tag{3.229}$$

sınır koşulları ile oluşturulan kendine eş operatörlerdir. $l_0(u)$ ve $l(u)$ ifadelerinde yer alan $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ türevi $L_2[0,\pi]$ uzayındaki norma göre anlaşılmaktadır. Yani

$$\lim_{\Delta x \to 0} \int_0^\pi \left| \frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|^2 dt = 0 \qquad (3.230)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \int_0^\pi \left| \frac{u'_x(x+\Delta x,t)-u'_x(x,t)}{\Delta x} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right|^2 dt = 0 \qquad (3.231)$$

dır. L_0 operatörünün özdeğerleri

$$K^2 + j^4 \qquad (K=0,1,2,...;\ j=1,2,3,...) \qquad (3.232)$$

ve bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özfonksiyonlar da

$$M_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} & k=0 \quad \text{ise} \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} & k=1,2,... \quad \text{ise} \end{cases} \qquad (3.233)$$

olmak üzere

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} M_k \text{Coskx.Sinjt} \qquad (k=0,1,2,...\ ;\ j=1,2,...) \qquad (3.234)$$

şeklindedir.

Bu kez de $H_1 = L_2([0,\pi]x[0,\pi])$ uzayında

$$l_1(u) = -\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} \qquad (3.235)$$

diferansiyel ifadesini göz önüne alalım. Bu ifadedeki $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ veya $\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4}$ türevleri bildiğimiz adi kısmi türevler olarak alınmıştır.

c) $u(x,t)$, $[0,\pi]x[0,\pi]$ karesinde $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ ve $\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4}$ sürekli türevlerine sahiptir.

d) $u'_x(0,t) = u'_x(\pi,t) = 0$ (3.236)

$$u(x,0) = u''_{tt}(x,0) = u(x,\pi) = u''_{tt}(x,\pi) = 0 \tag{3.237}$$

koşullarını sağlayan $u(x,t)$ fonksiyonlar kümesi D_0 olsun. D_0, H_1 uzayının yoğun bir lineer manifoldu, D_0 dan H_1 e $L'_1 = l_1(u)$ operatörü de bir simetrik operatördür. L'_1 operatörünün özdeğerleri de

$$K^2 + j^4 \qquad (K = 0,1,2,\ldots; j = 1,2,3,\ldots) \tag{3.238}$$

bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özfonksiyonlar da

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} M_k \text{Coskx.Sinjt} \qquad (k=0,1,2,\ldots ; j=1,2,\ldots) \tag{3.239}$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi L'_1 operatörünün ortonormal özfonksiyonlar sistemi H_1 uzayının bir ortonormal tabanıdır. Bu durumda Teorem 3.1.1'e göre $L_1 = \overline{L'_1}$ operatörü kendine eştir. Diğer yandan H_1 den H_1 e

$$Qu = \frac{2}{\pi} \text{Cosx} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-6} \text{Sinjt} \int_0^{\pi} u(x,s) \text{Sinjs}\, ds \tag{3.240}$$

operatörü sınırlı ve kendine eş olduğundan

$$L_2 = L_1 + Q \tag{3.241}$$

operatörü de kendine eş olacaktır.

Böylece L_0 ve L_1 , H_1 uzayında aşağıdaki özelliklere sahip olan operatörlerdir:

1) $L_0 = L_0^*$ ve $L_1 = L_1^*$

2) L_0 ve L_1 operatörleri saf ayrık spektruma sahiptir.

3) L_0 ve L_1 operatörleri aynı özdeğerlere ve aynı özfonksiyonlara sahiptir.

Bu taktirde $L_0 = L_1$ olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla $L = L_2$ olacaktır.

$\mu_1 \le \mu_2 \le \ldots \le \mu_n \le \ldots$ ve $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots$, sırasıyla L_1 ve L_2 operatörlerinin özdeğerleri ise Teorem 3.4.2 gereğince

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n_m} \left(\lambda_k^2 - \mu_k^2 - 2\sum_{j=2}^{p} (-1)^j j^{-1} \operatorname*{Res}_{\lambda=\mu_k} \operatorname{tr}\left[\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^j\right] \right) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{tr}AQ(0) + \operatorname{tr}AQ(\pi)\right] - \frac{1}{8}\left[\operatorname{tr}Q''(0) + \operatorname{tr}Q''(\pi)\right]$$

dir.

$$AQ(x)\varphi(t) = \frac{2}{\pi}\operatorname{Cos}x \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} \operatorname{Sin}jt \int_0^{\pi} \varphi(s) \operatorname{Sin}js\, ds \tag{3.242}$$

ve

$$Q''(x)\varphi(t) = -\frac{2}{\pi}\operatorname{Cos}x \sum_{j=1}^{\infty} j^{-4} \operatorname{Sin}jt \int_0^{\pi} \varphi(s) \operatorname{Sin}js\, ds \tag{3.243}$$

olduğundan

$$AQ(0) = -AQ(\pi)\ ,\ Q''(0) = -Q''(\pi) \tag{3.244}$$

dır. Dolayısıyla $L = L_2$ operatörünün düzenli izi için

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n_m} \left(\lambda_k^2 - \mu_k^2 - 2\sum_{j=2}^{p} (-1)^j j^{-1} \operatorname*{Res}_{\lambda=\mu_k} \operatorname{tr}\left[\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^j\right] \right) = 0 \tag{3.245}$$

elde edilir.

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında $H_1 = L_2(H;[0,\pi])$ uzayında

$$l(y) = -y''(x) + Ay(x) + Q(x)y(x)$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

sınır koşulları ile oluşturulan kendine eş L operatörünün ikinci düzenli izi incelenmiş ve

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{n_m}\left\{\lambda_k^2 - \mu_k^2 - 2\sum_{j=2}^{p}(-1)^j j^{-1}\operatorname*{Res}_{\lambda=\mu_k} tr\left[\lambda\left(QR_\lambda^0\right)^j\right]\right\} = \frac{1}{2}\left[tr(AQ(0)) + tr(AQ(\pi))\right] - \frac{1}{8}\left[trQ''(0) + trQ''(\pi)\right]$$

formülü bulunmuştur. Burada A, H uzayında

$$A = A^* \geq I \quad , \quad A^{-1} \in \sigma_\infty(H)$$

koşullarının sağlayan bir operatör, R_λ^0 $H_1 = L_2(H;[0,\pi])$ uzayında

$$l_0(y) = -y''(x) + Ay(x)$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

sınır koşulu ile oluşturulan kendine eş L_0 operatörünün rezolventi ve Q(x) de her $x \in [0,\pi]$ için H den H ye kendine eş çekirdek operatördür.

KAYNAKLAR

Adıgözelov, E.E., (1976), "Operatör Katsayılı İki Sturm-Liouville Operatörünün Farkının İzi Hakkında", İz. An Az SSR, Seriya Fiz-Tekn. I Mat. Nauk, No:5, 1976, 20-24 (R)*.

Adıgözelov, E.E., Avcı, H. ve Gül, E., (2001), "The Trace Formula for Sturm-Liouville Operatör with Operatör Coefficient", J. Math. Phys., Volume 42, No:6, 2001, 1611-1624.

Adıgözelov, E.E.,Baykal, O. ve Bayramov, A., (2001), "On the Spektrum and Regularized Trace of the Sturm-Liouville Problem with Spectral Parameter on the Boundary Condition and with the Operator Coefficient",International Journal of Differential Equations and Applications, Volume 2, No:3, 2001, 317-333.

Adıgözelov, E.E. ve Bakşi, Ö., (2004), "On the Regularized Trace of the Differential Operator Equation Given in a Finite Interval", Journal of Engineering anda Naturel Sciences Sigma, 2004/1, 47-55.

Adıgözelov, E.E., Bakşi, Ö. ve Baykal, O., (2004), "On a Regularized Trace of a Differential Operator with Bounded Operator Coefficient", International Math. Journal, Volume 5, No:3, 2004, 273-286.

Albayrak, İ., Bayramoğlu, M. ve Adıgözelov, E., (1999), "Formula for the Second Regularized Trace of the Sturm-Liouville Problem with a Spectral Parameter on Boundary Condition", Methods of Functional Analysis and Topology, Volume 4, No:3, 1999.

Bayramoğlu, M. ve Adıgözelov, E.E., (1996), "Sınırlı Operatör Katsayılı Tekil Sturm-Liouville Operatörünün Düzenli İzi Hakkında", Differens. Uravneniya, 1996, T.32, No:12,1587-1592.

Cohberg, I.C. ve Krein, M.G., (1969), "Introduction to the Theory of Linear Non-Self Adjoint Operators", Translation of Math. Monograph, Volume 18, Amer. Math. Soc., 1969, Providence, R.I.

Dikiy, L.A., (1953), "Gelfand-Levitanın Bir Formülü Hakkında", Upseki Mat. Nouk, 1953, T.8, No:2, 119-123 (R).

Fulton, T.C. ve Pruess, S.A., (1994), "Eigenvalue and Eigenfunction Asypmtotics for Regular Sturm-Liouville Problems", J. Math. Anal. Appl. 188, 1994, 297-340.

Gasimov, M.G ve Levitan, B.M., (1963), "İki Tekil Strurm-Liouville Operatörünün Özdeğerlerinin Farklarının Toplamı hakkında", Dokl. AN SSSR, 1963, T.151, No:5, 1014-1017 (R).

Gelfand, I.M. ve Levitan, B.M., (1953), "İkinci Mertebeden Bir Diferansiyel Operatörün Özdeğerleri için bir Formül Hakkında", Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1953, T.88, No:4, 593-596 (R).

Gorbaçuk, V.I., (1975), "Vektör Fonksiyonu Uzayında Diferansiyel Denklemler için Sınır Değer Problemlerinin Özdeğerlerinin Asimtotik Davranışı Hakkında", Ukr. Mat. Jurnal, 1975, T.27, No:5, 657-664 (R).

Guseynov, G.Ş. ve Levitan, B.M., (1978), "Sturm-Liouville Operatörü için İz Formülleri Hakkında", Vestnik MGU, Ser. Matem-Mekan., 1978, No:1, 40-49 (R).

Halberg, C.J. ve Kramer, V.A., (1960), "A Generalization of the Trace Concept", Duke Math. Journal, 1960, Vol. 27, No:4, 607-618.

* : R, kaynağın Rusça olduğunu göstermektedir.

Halilova, R.Z., (1976), "Sturm-Liouville Operatör Denkleminin İzinin Düzenlenmesi Hakkında", Funks. Analiz, Teoriya Funksi I Ik Pril.-Mahaçkala, 1976, No:3, 1. Bölüm, 154-161, (R).

Hile, E. ve Philips, R.S., (1957), "Functional Analysis and Semi-Groups", Collog. Publ. Math. Soc.,1957.

Levitan, B.M., (1964), "Sturm-Liouville Operatörü için Düzenli İzin Hesaplanması", Upseki Matem. Nauk, 1964, T.19, No:1, 161-164 (R).

Levitan, B.M. ve Sargsyan, I.S., (1991), "Sturm-Liouville and Dirac Operators", Kluzer, Dordrechz, 1991.

Lidskiy, L.A. ve Sadovniçiy, V.A. (1967), "Bir Sınıfa Ait Olan Tan Fonksiyonların Köklerinin Düzenli Toplamı", Funks. Analiz I Ego Pril., 1967, T.1, No:2, 52-59 (R).

Lysternik, L.A. ve Sobolev, V.I., (1955), "Elements of Functional Analysis", (English Translation), 1955, New York Fredrick Ungar.

Maksudov, F.G., Bayramoğlu, M. ve Adıgözelov, E.E., (1984), "On a Regularized Trace of Sturm-Liouville Operator on a Finite Interval with the Unbounded Operator Coefficient", Dokl. Akad. Nauk SSSR, English Translation: Soviet Math. Dokl.30, 1984, No:1, 169-173.

Naimark,M.A., (1968), "Linear Differential Operators", Part I,II, 1968, London.

Smirnov, V.I., (1964), "A Course of Higher Mathematics", 1964, Vol.5, New York Pergamon Press.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	15.10.1980	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1993-1997	Nişantaşı Kız Lisesi
Lisans	1997-2001	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü

Çalıştığı kurum

2001-Devam ediyor YTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Araştırma Görevlisi