YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

COHEN-MACAULAY HALKALARI

Matematikçi Kürşat Hakan ORAL

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. A. Göksel AĞARGÜN

Prof. Dr. A. Göksel AĞARGÜN

Yar. Doc. Dr. Nilgün AYGÖR

Y. Doç. Dr. Bahtiyar ?

İSTANBUL, 2005

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ iii

ÖNSÖZ iv

ÖZET v

ABSTRACT vi

1 GİRİŞ 1

2 BOYUT TEORİSİ 8

3 REGÜLER SERİLERİ VE DERECE 21

4 COHEN-MACAULAY HALKALARI 33

KAYNAKLAR 43

ÖZGEÇMİŞ 44

SİMGE LİSTESİ

$V(I)$	I	idealinin tanımladığı varyete
$ass(I)$	I	idealinin ilgili asalları
$Min(I)$	I	idealinin minimal asalları
$Spec(R)$	R	halkasının asal ideallerinin kümesi
$Zdv_R(M)$	M	modülünün R halkasındaki sıfır bölenlerinin kümesi
$\dim R$	R	halkasının boyutu
htI	I	idealinin yüksekliği
$v.\dim_R M$	M	nin vektör uzayı boyutu
$gradeI$	I	nın derecesi
$depthM$	M	nin derinliği

ÖNSÖZ

Bu çalışmada değişmeli cebir ve cebirsel geometride önemli bir yer teşkil eden Cohen-Macaulay halkalarını inceliyoruz. Cohen-Macaulay halkaları ilk olarak F.S. Macaulay'ın 1916'da k bir cisim olmak üzere $k[x_1,...,x_n]$ polinomlar halkasının her idealinin düzenli olduğunu göstermesiyle ortaya çıkmıştır. Daha sonra I. S. Cohen 1946'da bu ifadenin daha genelleştirilmiş halini, yani ekuikarakteristik regüler lokal halkalarının her idealinin düzenli olduğunu göstermiştir. Bu tarihten sonra birçok matematikçi M. Auslander, D. Buchsbaum, D. Eisenbud gibi matematikçiler bu konuyu geliştiren çalışmalar yapmışlardır. Cohen-Macaulay halkalarının şu an üç farklı birbirine denk tanımı bulunmaktadır. Biz bu çalışmada Cohen-Macaulay halkalarını her ideali düzenli olan bir halka olarak ele alacağız. Bu çalışmamda bana destek veren herkese teşekkür ediyorum.

ÖZET

Bu çalışmanın giriş bölümünde daha sonraki bölümlere temel teşkil eden bilgiler verilmektedir. 2. bölümde bir halkanın boyutu incelenmektedir. 3. bölümde ise regüler serileri ve yükseklik konuları incelenmektedir. Regüler serileri önce bir modül üzerinde daha sonra ise ideal yapısında tanımlanmaktadır. Buna bağlı olarak da bir idealin yüksekliği tanımlanmaktadır. Son bölümde ise Cohen-Macaulay halkaları anlatılmaktadır.

Anahtar kelimeler: Boyut, regüler seriler, derece, Cohen-Macaulay halkaları.

ABSTRACT

In the introduction chapter of this work, the preliminaries which will be the basis of further chapters are given. In the second chapter, the dimension of a ring is studied. In chapter 3, regular sequences and height are studied. A regular sequence is defined first on a module and then defined as an ideal structure. With respect to the latter, the grade of an ideal is defined. In the last chapter, Cohen-Macaulay rings are examined.

Keywords: Dimension, regular sequence, grade, Cohen-Macaulay rings.

1. GİRİŞ

Bu bölümde sonraki bölümlerde temel teşkil eden ve kullanılan bir takım tanımlar, özellikler ve teoremler verilecektir. Bu bölümde teoremler ve özelliklerin ispatları yapılmamıştır. İspatlar için Sharp(1990) kitabına bakılabilir.

R ile bir halka gösterilecek ve aksi belirtilmedikçe birimli ve değişmeli olacak. x , R de bir bilinmeyen olmak üzere $R[x]$ polinomlar halkası ve $R[[x]]$ de kuvvet serilerini gösterecektir.

Tanım 1.1. R ve S iki değişmeli halka ve $f: R \to S$ halka homomorfizması olsun. J , S nin bir ideali iken $f^{-1}(J)$ de R nin bir idealidir ve J^c ile gösterilir. J^c ye J idealinin R deki büzülmesi denir. Şimdi de I , R nin bir ideali olsun. $f(I)$ nın S de ürettiği ideal $f(I)S$, I^e ile gösterilir ve I idealinin S deki genişlemesi adını alır. Buradaki f homomorfizması örten ise S deki ideallerin hepsi R nin bir idealinin S deki genişlemesidir.

Özellikler 1.2. R ve S iki değişmeli halka ve $f: R \to S$ halka homomorfizması olsun. I , R nin bir ideali J de S nin bir ideali olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır;

(i) $I \subseteq I^{ec}$

(ii) $J^{ce} \subseteq J$

(iii) $I^e = I^{ece}$

(iv) $J^{cec} = J^c$

Özellikler 1.3. R değişmeli halka ve x , R de bir bilinmeyen olsun. $f: R \to R[x]$ doğal halka homomorfizmasında büzülme ve genişleme terminolojisini kullanalım. I , R nin bir ideali, her $n \in N$ ve $r_0, r_1, \ldots, r_n \in R$ için $\eta: R[x] \to \left(R/I\right)[x]$ homomorfizması $\eta\left(\sum_{i=0}^{n} r_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} \overline{r_i} x^i$ (burada $\overline{r_i} = r_i + I$ dır) olarak tanımlandığında:

(i) $Çek\eta = I^e = \left\{\sum_{i=0}^{n} r_i x^i \in R[x] : her\ i = 0,\ldots,n\ için\ \ n \in N, r_i \in I\right\}$ dir.

(ii) $I = I^{ec}$ dir.

(iii) Buradan, her $n \in N$ ve $r_0, r_1, \ldots, r_n \in R$ için $\overline{\eta}\left(\sum_{i=0}^{n} r_i x^i + I^e\right) = \sum_{i=0}^{n} \overline{r_i} x^i$ ile tanımlı bir $\overline{\eta} : R[x]/I^e \to (R/I)[x]$ halka izomorfizması elde edilir.

Tanım 1.4. R değişmeli halka ve P ile M iki ideali olsun.

(i) M R nin öz ideali ve $M \subset I \subset R$ koşulunu sağlayacak R de hiçbir I ideali yoksa M ye maksimal ideal denir.

(ii) P R nin öz ideali ve $a, b \in R$ olsun. $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa P ye asal ideal denir.

(iii) R halkasının tek bir tane maksimal ideali varsa R ye quasi-local halka denir.

(iv) R nin bütün asal ideallerinin kümesini $Spec(R)$ ile göstereceğiz.

(v) I , R nin bir ideali iken I idealinin tanımladığı varyete $Var(I) = \{P \in Spec(R) : P \supseteq I\}$ olarak tanımlanır.

Teorem 1.5. I , R değişmeli halkasının bir ideali olsun. O zaman $\sqrt{I} = \bigcap_{P \in Var(I)} P$ dır. Özel olarak $\sqrt{0} = \bigcap_{P \in Var(I)} P = \bigcap_{P \in Spec(R)} P$ olur.

Özellik 1.6. I , R değişmeli halkasının bir ideali olsun. $Var(I)$ nın minimal elemanları vardır. $Var(I)$ nın minimal elemanlarının oluşturduğu küme $Min(I)$ olarak gösterilecek.

Teorem 1.7. $n \geq 2$ olmak üzere ve $P_1, \ldots, P_n$ içerisinde en fazla ikisi asal ideal olmayan değişmeli R halkasının idealleri olsunlar. I da $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ koşulunu sağlayan R halkasının bir ideali olsun. O zaman $1 \leq j \leq n$ koşulunu sağlayan bazı j ler için $I \subseteq P_j$ olur. Bu teoremin bir sonucu olarak $a \in R$ için $aR + I \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ ise en az bir $c \in I$ için $a + c \notin \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ olur.

Tanım 1.8. R değişmeli halkası idealler için artan zincir koşulunu sağlıyor ise yani herhangi bir $I_1 \subset \ldots \subset I_n \subset \ldots$ ideal zinciri belirli bir $k \in N$ ve her $i \in N$ için $I_k = I_{k+i}$ oluyorsa R ye

Noetherian halka denir. R değişmeli halkası idealler için azalan zincir koşulunu sağlıyor ise R ye Artinian halka denir.

Tanım 1.9. Q ,R değişmeli halkasının bir öz ideali olsun. $a,b \in R$ ve $ab \in Q$ iken $a \in Q$ veya bir $n \in N$ için $b^n \in Q$ oluyorsa Q idealine asalımsı ideal denir. Her asal ideal asalımsıdır ve her asalımsı idealin radikali de bir asal ideale eşittir.

Tanım 1.10. I ,R değişmeli halkasının bir öz ideali olsun. I nın asalımsı ayrışımı demek, $I = Q_1 \cap ... \cap Q_n$ ve her $i = 1,...,n$ için $\sqrt{Q_i} = P_i$ olacak şekilde Q_i asalımsı ideallerinin bulunulması demektir (Burada P_i ler asal idealdir). Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanırsa böyle bir asalımsı ayrışıma minimal asalımsı ayrışım denir;

(i) $P_1,...,P_n$ R nin n tane farklı asal idealidir,

(ii) her $j = 1,...,n$ için $\bigcup_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^{n} Q_i \not\subset Q_j$ dir.

Bir asalımsı ayrışıma sahip ideale ayrıştırılabilir ideal denir. Ayrıca her asalımsı ayrışım gerekli işlemler yapılarak minimal hale getirilebilir.

Teorem 1.11. I ,R değişmeli halkasının ayrıştırılabilir bir ideali ve $I = Q_1 \cap ... \cap Q_n$ *her* $i = 1,...,n$ *için* $\sqrt{Q_i} = P_i$ ve

$I = Q_1' \cap ... \cap Q_{n'}'$ *her* $i = 1,...,n'$ *için* $\sqrt{Q_i'} = P_i'$ olacak şekilde I nın iki minimal asalımsı ayrışımı olsun. O zaman $n = n'$ dir ve $\{P_1,...,P_n\} = \{P_1',...,P_n'\}$ olur.

Tanım 1.12. I ,R değişmeli halkasının ayrıştırılabilir bir ideali, $I = Q_1 \cap ... \cap Q_n$ ve her $i = 1,...,n$ için $\sqrt{Q_i} = P_i$, I nın bir minimal asalımsı ayrışımı olsun. $\{P_1,...,P_n\}$ asal ideallerinin kümesine I nın ilgili asal ideallerinin kümesi denir ve $assI$ ile gösterilir. $assI$ kümesinin minimal elemanlarının oluşturduğu küme $Min(I)$ kümesine eşittir ve her bir elemanına minimal veya izole asalı denir. $assI$ kümesinin diğer elemanlarına ise I nın yerleşik asalları denir.

Burada $assI$ nın sonlu tane elemana sahip olduğunu ve dolayısıyla $Min(I)$ nın da sonlu tane elemana sahip olduğunu hatırlatalım.

Teorem 1.13. I , R değişmeli halkasının ayrıştırılabilir bir ideali ve $assI=\{P_1,...,P_n\}$ olsun.

$I=Q_1\cap...\cap Q_n$ *her* $i=1,...,n$ *için* $\sqrt{Q_i}=P_i$ ve

$I=Q_1'\cap...\cap Q_n'$ *her* $i=1,...,n$ *için* $\sqrt{Q_i'}=P_i'$ olacak şekilde I nın iki minimal asalımsı ayrışımı olsun. $1\le i\le n$ için P_i minimal asal ideal ise $Q_i=Q_i'$ olur.

Teorem 1.14. R değişmeli Noetherian halka ise her idealinin asalımsı ayrışımı vardır.

Teorem 1.15. R ve S değişmeli iki halka ve $f:R\to S$ örten halka homomorfizması olsun. $I,Q_1,...,Q_n,P_1,...,P_n$ R halkasının $Çekf$ yi kapsayan idealleri olsun.

$I=Q_1\cap...\cap Q_n$ *her* $i=1,...,n$ *için* $\sqrt{Q_i}=P_i$ I nın bir minimal asalımsı ayrışımı olması için gerek ve yeter koşul $I^e=Q_1^e\cap...\cap Q_n^e$ *her* $i=1,...,n$ *için* $\sqrt{Q_i^e}=P_i^e$ I^e nin bir minimal asalımsı ayrışımı ve $ass_S I^e=\{P^e:P\in ass_R I\}$ olmasıdır.

Bu teoremin bir sonucu olarak $f:R\to R/I$ doğal halka homomorfizmasını düşünürsek $I\subseteq J$ koşulunu sağlayan R nin herhangi bir J ideali ayrıştırılabilirdir ancak ve ancak J/I , R/I halkasında ayrıştırılabilirdir ve $ass_{R/I}J/I=\{P/I : P\in ass_R I\}$ olur.

Tanım 1.16. (i) R değişmeli halka olsun. Her $r,r'\in R$ ve $m,m'\in M$ için eğer $\cdot:R\times M\to M$ foksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa M abelyan grubuna R modülü denir;

(i) $r\cdot(m+m')=r\cdot m+r\cdot m'$

(ii) $(r+r')\cdot m=r\cdot m+r'\cdot m$

(iii) $(rr')\cdot m=r\cdot(r'\cdot m)$

(iv) $1_R\cdot m=m$.

Bu tanımda R halkası yerine cisim alınırsa eğer M ye R vektör uzayı denir ve M uzayının vektör uzayı boyutu da $v.\dim_R M$ ile gösterilir.

(ii) S , R nin çarpımsal kapalı alt kümesi, yani birimi kapsayan ve her $a,b\in S$ için $ab\in S$ olan bir alt kümesi olsun. $S^{-1}R=\left\{\frac{r}{s}:r\in R,s\in S\right\}$ kümesi bir halkadır ve bu halkaya kesir halkası denir. $f:R\to S^{-1}R$ doğal halka homorfizması ($f(r)=\frac{r}{1}$) olduğunda $I^e=S^{-1}R$ dir ancak ve ancak $I \cap S \neq \varnothing$ dir. Aynı zamanda $P \in Spec(R)$ ise $P^e = S^{-1}P \in Spec(S^{-1}R)$ dir, ve $Spec(S^{-1}R)$ ile $\{P \in Spec(R) : P \cap S = \varnothing\}$ kümesi arasında birebir eşlik vardır. M, R değişmeli halkası üzerinde bir modül ve S de çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. $S^{-1}M = \left\{\frac{m}{s} : m \in M , s \in S\right\}$ kümesi de bir $S^{-1}R$ modülüdür. I ,R nin bir ideali iken $S^{-1}(IM) = I^e S^{-1}M$ dir. L ,M nin bir alt modülü iken $S^{-1}M / S^{-1}L \cong S^{-1}(M/L)$ dir.

(iii) M ,R değişmeli halkası üzerinde bir modül olsun. $P \in Spec(R)$ iken $S = R - P$ alındığında $S^{-1}M$ yerine M_P yazılır ve M nin P deki lokalizasyonu diye okunur. $M_P \neq 0$ koşulunu sağlayan asal ideallerin kümesine M nin desteği denir ve $SuppM$ ile gösterilir. Yani $SuppM = \{P \in Spec(R) : M_P \neq 0\}$ dır.

Tanım 1.17. M, R değişmeli halkası üzerinde bir modül olsun. M modülünün R halkasındaki sıfırlaştırıcısı, $Ann_R(M)$ ile gösterilir ve

$Ann_R(M) = \{r \in R : rM = 0\} = \{r \in R : her\ m \in M\ için, rm = 0\}$ olarak tanımlanır. M modülünün R halkasındaki sıfır bölenlerinin kümesi, $Zdv_R(M)$ ile gösterilir ve $Zdv_R(M) = \{r \in R : en\, az\, bir\, 0 \neq m \in M\ için\ rm = 0\}$ olarak tanımlanır.

Teorem 1.18. M, R değişmeli halkası üzerinde bir modül olsun. I da $I \subseteq Ann(M)$ koşulunu sağlayan R halkasının bir ideali olsun. O zaman $(r + I)m = rm$ ile M, bir R/I modülüdür.

Tanım 1.19. M, R değişmeli halkası üzerinde bir modül olsun. M nin alt modüllerinin her bir kümesi artan zincir koşulunu sağlıyorsa M ye Noetherian modül denir.

Teorem 1.20. M, R değişmeli halkası üzerinde bir Noetherian modül olsun. O zaman $R/Ann(M)$ Noetherian halkadır.

Tanım 1.21. G, R değişmeli halkası üzerinde bir modül olsun. G nin bir $0 = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{n-1} \subset G_n = G$ alt modül zincirinin uzunluğu kapsamaların sayısıdır, bu zincirin uzunluğu n dir. Eğer bu zincirde her $i = 1,\ldots,n$ için G_i/G_{i-1} bir basit R modülü ise bu zincire birleşik serisi denir. G modülünün uzunluğu n olan bir birleşik serisi varsa G nin bütün birleşik serilerinin uzunluğu n dir. Ayrıca G nin bir birleşik serisi varsa G ye sonlu uzunluktadır denir.

Teorem 1.22. G, R değişmeli halkası üzerinde bir modül olsun. O zaman G sonlu uzunluktadır ancak ve ancak G hem Noetherian hem de Artinian dır.

Teorem 1.23. I, R değişmeli halkasının ayrıştırılabilir bir ideali olduğunda $Zdv_R\left(R/I\right) = \bigcup_{P \in assI} P$ olur.

Teorem 1.24. I, R değişmeli halkasının bir ideali ve $\sqrt{I}$ sonlu üreteçli olsun. O zaman bir $n \in N$ vardır öyle ki $\left(\sqrt{I}\right)^n \subseteq I$ olur.

Buradan, değişmeli Noetherian bir halkanın her ideali radikalinin bir kuvvetini kapsar.

Teorem 1.25. I, R değişmeli Noetherian halkasının bir ideali ve $J = \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n$ olsun. O zaman $J = IJ$ dir.

Teorem 1.26. (Nakayama) M, R değişmeli halkasında sonlu üreteçli bir modül olsun. I da $I \subseteq Jac(R)$ koşulunu sağlayan R nin bir ideal olsun. $M = IM$ ise $M = 0$ dır.

Teorem 1.27. (Krull'un kesişim teoremi) I, R değişmeli Noetherian halkasının $I \subseteq Jac(R)$ koşulunu sağlayan bir ideal olsun. O zaman $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = 0$ dir.

Tanım 1.28. R değişmeli Noetherian bir halka olsun. R nin tek bir maksimal ideali var ise R ye lokal halka denir.

Teorem 1.29. R değişmeli Artinian bir halka olsun. O zaman R nin bütün asal idealleri maksimaldir. Ve bu maksimal idealleri sonlu tanedir.

Teorem 1.30. R değişmeli Artinian bir halka ve $N = \sqrt{0}$,R nin nilradikali olsun. O zaman en az bir $t \in N$ vardır öyle ki $N^t = \left(\sqrt{0}\right)^t = 0$ dır.

Teorem 1.31. R değişmeli bir halka olsun. O zaman R Artinian dır ancak ve ancak R Noetherian dır ve R nin her asal ideali maksimaldir.

Teorem 1.32. R quasi-lokal halka, M maksimal ideal ve $k = R/M$ rezidü cismi olsun. G sonlu üreteçli R modülü olsun. G/MG ,R modülü M ideali tarafından sıfırlandığı için aynı zamanda R/M modülüdür(aynı zamanda k vektör uzayıdır). $g_1,\dots,g_n \in G$ olarak aldığımızdan aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $g_1,...,g_n$ G yi üretir,

(ii) $G/_{MG}$, R modülü $g_1+MG,...,g_n+MG$ tarafından üretilir,

(iii) $G/_{MG}$, k uzayı $g_1+MG,...,g_n+MG$ tarafından üretilir.

Tanım 1.33. M, R değişmeli Noetherian halkası üzerinde bir modül ve $P\in Spec(R)$ olsun. $Ann(m)=P$ olacak şekilde bir $m\in M$ bulunur ve P ye M nin ilgili asal ideali denir. İlgili asalların kümesi $Ass_R(M)$ olarak gösterilir.

Burada $Ass(M)\subseteq Supp(M)$ olduğunu ve $SuppM$ minimal elemanlarının $Ass(M)$ nin elemanları olduğunu belirtelim.

Özellikler 1.34. M, R değişmeli Noetherian halkası üzerinde bir modül olsun.

(i) $P\in assI$ dir ancak ve ancak $P\in Ass_R\left(R/_I\right)$ dir.

(ii) $Zdv_R(M)=\bigcup_{P\in Ass(M)}P$ dir.

Teorem 1.35. (Hilbert taban teoremi) R değişmeli Noetherian halka ve x bir bilinmeyen olsun. O zaman $R[x]$ polinomlar halkası da Noetherian'dır.

Teorem 1.36. R değişmeli Noetherian halka ve x bir bilinmeyen ise $R[[x]]$ kuvvet serileri halkası da Noetherian dır.

2. BOYUT TEORİSİ

R aşikar olmayan bir değişmeli halka olsun. $P_0, P_1, \ldots, P_n$, R nin asal idealleri olmak üzere , $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n$ ifadesine R nin bir asal ideal zinciri denir. Bu zincirin uzunluğu denildiğinde zincirdeki kapsamaların sayısı anlaşılır ve burada *zincirin uzunluğu* 'n' dir. Böylece tek bir asal idealden oluşan zincirin uzunluğu da 0 olur.

Böyle bir asal ideal zincirinde herhangi iki asal idealin arasına başka hiçbir asal ideal giremiyorsa (yani uzunluğu n olan bir zincirin uzunluğu n+1 olacak şekilde genişletilemiyorsa) bu zincire doygun denir. Uzunluğu n olan bir asal ideal zincirinde P_n , R nin maksimal ideali ve P_0 da (0) idealinin minimal asal ideali oluyorsa bu zincire maksimal denir.

Tanım 2.1. R değişmeli bir halka olsun. Bir P asal idealinin yüksekliği , $ht_R P$ ile gösterilir ve oluşturulan $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n = P$ asal ideal zincirlerinin uzunluğunun supremumuna eşittir (halka belli ise idealin yüksekliği htP ile gösterilir). Eğer supremumu yok ise $ht_R P = \infty$ olarak alınır.

Tanım 2.2. R aşikar olmayan değişmeli bir halka olsun. R nin boyutu, $\dim R$ ile gösterilir ve $\dim R = \sup\{htP : P \in Spec(R)\}$ olarak tanımlanır. Halkanın bu boyutuna Krull-boyutu da denir.

Özellikler 2.3. (i) (R, M) quasi-lokal halka ise $\dim R = ht_R M$ dir. Her maksimal ideal asal ideal olduğundan halkanın boyutunu $\dim R = \sup\{htM : M, R \, nin \, maksimal \, ideali\}$ şeklinde de tanımlayabiliriz. Buradan R halkasının tek maksimal ideali M olduğundan sonuç elde edilir.

(ii) S, R nin çarpımsal kapalı alt kümesi $P \in Spec(R)$ ve $P \cap S = \varnothing$ olsun. Tanım 1.16 (ii) den $ht_R P = ht_{S^{-1}R} S^{-1} P$ elde edilir.

(iii) I, R nin öz olmayan bir ideali olsun. $\dim R/I$, R deki $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n$ ve $I \subset P_0$ koşulunu sağlayan asal ideal zincirlerinin yüksekliklerinin supremumuna eşittir.

(iv) $P \in Spec(R)$ olsun. R de yükseklikleri sırasıyla n ve h olan iki asal ideal zincirini alalım, $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n = P$ ve $P = P_0' \subset P_1' \subset \ldots \subset P_h'$ olsun. Buradan R nin yüksekliği $n+h$ olan $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n = P = P_0' \subset P_1' \subset \ldots \subset P_h'$ asal ideal zinciri elde edilir. Bu sonuçla (iii) yi birleştirirsek $ht_R P + \dim R/P \leq \dim R$ elde edilir.

Örnekler 2.4.(i) R aşikar olmayan değişmeli Artinian halka olsun. O zaman Teorem 1.29 dan her asal ideali maksimal idealdir. Böylece Özellik 2.3(i) den $\dim R = 0$ bulunur.

(ii) Bir cismin tek maksimal ideali (0) ideali olduğundan boyutu 0 olur.

(iii) $R = Z$, tamsayılar halkası olsun. Z deki bütün asal idealler p asal sayı olmak üzere (p) ve (0) dır. Böylece $P \in Spec(R)$ için $ht_R P = 1$ veya $ht_R P = 0$ olur. O zaman da tamsayılar halkasının boyutu tanımdan 1 olarak bulunur. Bu esas ideal bölgesi olan halkalar için genelleştirilebilir, yani her esas ideal bölgesinin boyutu 1 dir.

Yardımcı Teorem 2.5. R değişmeli Noetherian halka ve P, R nin I öz idealinin minimal asal ideali olsun. S de $P \cap S = \varnothing$ olacak şekilde R nin çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. O zaman $S^{-1}P$ ideali de $S^{-1}R$ nin $S^{-1}I$ idealinin minimal asal idealidir.

İspat. $R \to S^{-1}R$ tasvirini doğal homomorfizma olarak düşündüğümüzde, Tanım 1.16(ii) den $P \in Spec(R)$ için $P^e \in Spec(S^{-1}R)$ dir ve $I^e \subseteq P^e$ olur. Şimdi kabul edelim ki $P^e \notin Min(I^e)$ olsun. O zaman en az bir $\vartheta \in Spec(S^{-1}R)$ vardır öyle ki $I^e \subseteq \vartheta \subseteq P^e$ olur. R nin S ile kesişimleri boş küme olan asal idealleri ile $S^{-1}R$ nin asal idealleri çakışık olduğundan en az bir $Q \in Spec(R)$ vardır öyle ki $Q \cap S = \varnothing$ ve $Q^e = \vartheta$ olur. Böylece $I \subseteq I^{ec} \subseteq \vartheta^c = Q^{ec} = Q \subseteq P^{ec} = P$ elde edilir ki bu da $P \in Min(I)$ ile çelişir.

Teorem 2.6. (Krull'un esas ideal teoremi) R değişmeli Noetherian halka ve $a \in R$ birimsel olmayan bir eleman olsun. P ideali aR esas idealinin minimal asal ideali ise $ht_R P \leq 1$ olur.

İspat. R halkasının P asal idealindeki lokalizasyonunu, yani R_P halkasını alalım. R_P halkası, maksimal ideali PR_P olan lokal halkadır. Yardımcı Teorem 2.5 den PR_P ideali $(aR)R_P = \left(\frac{a}{1}\right)R_P$ idealinin minimal ideali olur ve Özellik 2.3(ii) den $ht_R P = ht_{R_P} PR_P$ olur. Buradan hareket ederek ispatı, $P = M$ olmak üzere, (R, M) lokal halkası için yapmak yeterli olacaktır. Kabul edelim ki $ht_R M > 1$ olsun. O zaman elimizde uzunluğu 2 olan bir asal ideal zinciri bulunur, $Q' \subset Q \subset M$ olsun. M, aR esas idealinin minimal asal ideali olduğundan $Spec\left(R/aR\right) = \left\{M/aR\right\}$ olur ve böylece Teorem 1.31 den R/aR bir Artinian lokal halka olur. $Q^{(n)}$, Q nun n.sembolik kuvveti, yani $R \to R_Q$ doğal halka homomorfizması altında $Q^{(n)} = (Q^n)^{ec}$, olsun. $Q^{(n)} \supseteq Q^{(n+1)}$ olduğundan,

$\left(Q^{(1)}+aR\right)/_{aR} \supseteq \left(Q^{(2)}+aR\right)/_{aR} \supseteq \dots \supseteq \left(Q^{(n)}+aR\right)/_{aR} \supseteq \dots$ zinciri elde edilir. $R/_{aR}$ Artinian halka olduğundan bir $m \in N$ için $Q^{(m)}+aR = Q^{(m+1)}+aR$ olur. $r \in Q^{(m)}$ olsun. O zaman $r = s + ac$ olacak şekilde $s \in Q^{(m+1)}, c \in R$ vardır. Buradan $ac = r - s \in Q^{(m)}$ olur ve $Q^{(m)}$ Q-asalımsı ideal ve $a \notin Q$ olduğundan $c \in Q^{(m)}$ elde edilir. Böylece da $Q^{(m)} = Q^{(m+1)} + aQ^{(m)}$ bulunur. $a \in M$ olduğundan $Q^{(m)}/_{Q^{(m+1)}} = M\left(Q^{(m)}/_{Q^{(m+1)}}\right)$ dir. Teorem 1.26 dan $Q^{(m)}/_{Q^{(m+1)}} = 0$, yani $Q^{(m)} = Q^{(m+1)}$ elde edilir. Şimdi R_Q ya tekrar genişleme yaparsak, $\left(Q^e\right)^m = \left(Q^m\right)^e = \left(Q^m\right)^{ece} = \left(Q^{(m)}\right)^e = \left(Q^{(m+1)}\right)^e = \left(Q^e\right)^{m+1}$ olur. Sonlu üreteçli R_Q-modülü $\left(Q^e\right)^m$ye Teorem 1.26 yı bir kez daha uygularsak $\left(Q^e\right)^m = 0$ olur. Böylece R_Q lokal halkasında Q^e maksimal ideali nilpotenttir ve böylece R_Q nun bütün asal idealleri tarafından kapsanır. Fakat bu $Q'^e \subset Q^e$ zincirinin R_Q nun asal zinciri olmasıyla çelişir.

Teorem 2.7. (Krull'un genelleştirilmiş esas ideal teoremi) R değişmeli Noetherian halka ve R nin n eleman tarafından üretilebilen bir öz ideali I olsun. O zaman I nın bütün P, minimal asal idealleri için $ht_R P \le n$ olur.

İspat. n üzerine tümevarım uygulayalım. $n = 0$ iken $I = (0)$ ve $P \in Min(0)$ olduğundan $ht_R P = 0$ dır. $n = 1$ iken Teorem 2.6 yı kullandığımızda sonuç elde edilir. Şimdi n den küçük bütün doğal sayılar için ifadenin doğru olduğunu kabul edelim. Teorem 2.6 da yaptığımız gibi ispatı (R, M) lokal halkası için ispatlamak yeterli olacaktır. R Noetherian olduğundan maksimal olmayan bir $P' \in Spec(R)$ için en az bir maksimal olmayan $P'' \in Spec(R)$ vardır öyle ki $P' \subseteq P''$ ve $P'' \subset M$ zinciri doygundur. Böylece bir $Q \in Spec(R)$ için $Q \subset M$ zinciri doygun ise $ht_R Q \le n-1$ olduğunu göstermeliyiz. $I \not\subset Q$ ve $I = \sum_{i=1}^{n} c_i R$ iken $c_n \notin Q$ olarak seçelim. M, $Q + c_n R$ idealini kapsayan tek asal idealdir, böylece Teorem 1.31 den $R/_{Q + c_n R}$ Artinian lokal halka olur. Sırasıyla Teorem 1.29 ve Teorem 1.30 kullanılırsa Artinian lokal halkanın maksimal idealinin nilpotent olduğu görülür, böylece bir $h \in N$ için her $i = 1,2,\dots,n-1$ için $c_i^h \in Q + c_n R$ dir. Buradan öyle $d_1,\dots,d_{n-1} \in Q$ ve $r_1,\dots,r_{n-1} \in R$ bulunur ki her $i = 1,2,\dots,n-1$ için $c_i^h = d_i + r_i c_n$ olur. Şimdi buradan her

$i = 1,2,\ldots,n-1$ için $d_i \in Q$ olduğundan $\sum_{i=1}^{n-1} d_i R \subseteq Q$ dur. $\overline{R} = R \Big/ \sum_{i=1}^{n-1} d_i R$ olarak alalım ve

$\overline{} : R \to \overline{R}$ doğal homomorfizmasını alalım. Yukarıdaki eşitlikten dolayı $d_1,\ldots,d_{n-1},c_n$ elemanlarını kapsayan asal ideali aynı zamanda $c_1,\ldots,c_n$ elemanlarını da kapsar. Bu özellikten dolayı $d_1,\ldots,d_{n-1},c_n$ elemanlarını kapsayan tek asal ideal M dir. Böylece $\overline{M} \in Min(\overline{c_n R})$ olur ve Teorem 2.6 dan $ht_{\overline{R}}\overline{M} \leq 1$ olur. Böylece $Q \in Min\left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i R\right)$ olur. Olmasaydı eğer $\overline{Q} \subset \overline{M}$ zinciri $\overline{P} \subset \overline{Q} \subset \overline{M}$ olacak şekilde uzatılabilirdi bu da $ht_{\overline{R}}\overline{M} \leq 1$ ile çelişirdi. Sonuç olarak $Q \in Min\left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i R\right)$ olduğundan dolayı $ht_R Q \leq n-1$ elde edilir.

Sonuç 2.8. R değişmeli Noetherian halka olsun.

(i) R nin bütün asal idealleri sonlu uzunluğa sahiptir. Özel olarak bir lokal halkanın boyutu sonludur.

(ii) $P \subseteq Q$ ve $P, Q \in Spec(R)$ olsun. O zaman $htP \leq htQ$ olur. Özel olarak; $htP = htQ$ olması için gerek ve yeter koşul $P = Q$ olmasıdır.

Tanım 2.9. R değişmeli, Noetherian halka ve I da R nin bir öz ideali olsun. I idealinin yüksekliği, $ht_R I$ ile eğer halka belli ise htI ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} ht_R I = htI &= \min\{htP : P \in Spec(R) \, ve \, I \subseteq P\} \\ &= \min\{htP : P \in Min(I)\} \\ &= \min\{htP : P \in ass(I)\} \end{aligned}$$

Burada; J, R nin bir başka öz ideali ve $I \subseteq J$ ise Sonuç 2.8 den $htI \leq htJ$ olduğu görülür. Aynı şekilde Teorem 2.7 den I ideali n eleman tarafından üretildiğinde $htI \leq n$ sonucu elde edilir.

Örnek 2.10. R değişmeli Noetherian halka ve I, J de $I \subset J$ koşulunu sağlayan iki ideali olsun. Bu durumda $htI < htJ$ her zaman sağlanır mı?

Çözüm. R halkasını tamsayılar halkası olarak alıp iki ideal seçelim. $I = (4), J = (2)$ olsun. Burada $I \subset J$ dir. Fakat $htI = 1 = htJ$ dir.

Örnek 2.11. k bir cisim olmak üzere $R = k[x_1, x_2, x_3, x_4]$ olsun. R deki $I = (x_1x_3, x_2x_3, x_1x_4, x_2x_4)$ idealinin yüksekliği kaçtır?

Çözüm. $I \subset (x_1, x_2)$ ve $(x_1, x_2) \in Spec(R)$ dir. (x_1, x_2) ideali iki eleman tarafından üretildiğinden Teorem 2.7 den $ht(x_1, x_2) \leq 2$ bulunur ve $0 \subset (x_1) \subset (x_1, x_2)$ asal ideal zinciri bulunduğundan $ht(x_1, x_2) = 2$ elde edilir. Yani $htI \leq 2$ dir. $htI = 0$ ise $I = 0$ olur bu bir çelişki verir. $htI = 1$ olsun. O zaman en az bir $P \in Spec(R)$ vardır öyle ki $I \subseteq P$ ve $htP = 1$ dir. R tek türlü çarpanlara ayrılabilen halka olduğundan bir $f \in R$ indirgenemez elemanı için $P = (f)$ olur. $x_1 x_3 \in I$ olduğundan $x_1 x_3 \in P = (f)$ dir. En az bir $g \in R$ için $x_1 x_3 = fg$ olur. Buradan da $fg \in (x_1)$ bulunur ki bu da $f \in (x_1)$ veya $g \in (x_1)$ demektir. $f \in (x_1)$ ise $(f) \subset (x_1)$ olur. Sonuç 2.8(ii) den de $(f) = (x_1)$ bulunur. Bu da $x_2 x_3 \in I \subset P = (f) = (x_1)$ demek olur ki bir çelişkidir. Aynı şekilde $g \in (x_1)$ ise $f \in (x_3)$ bulunur ve buradan da aynı çelişkiye ulaşılır. Yani $htI = 2$ olmalıdır.

Yardımcı Teorem 2.12. R değişmeli Noetherian halka, $I \subseteq P$ olmak üzere I ve P R nin iki ideali olsun. P idealinin asal ideal ve $htI = htP$ olduğunu kabul edelim. O zaman $P \in Min(I)$ olur.

İspat. $P \notin Min(I)$ olsun. O halde en az bir $Q \in Spec(R)$ için $I \subseteq Q \subset P$ olur. Buradan $htI \leq htQ < htP$ olur. Yani $htQ = htP$ elde edilir. Sonuç 2.8 den $P = Q$ bulunur ki bu bir çelişkidir. Şu halde $P \in Min(I)$ olur.

Teorem 2.13. R değişmeli Noetherian halka ve $P \in Spec(R)$ olsun. $htP = n$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda n eleman tarafından üretilebilen ve yüksekliği n olan bir I ideali vardır ve bu ideal P tarafından kapsanır.

İspat. n üzerine tümevarım uygulayalım. $n = 0$ iken $I = 0$ alınabilir. İfadenin n den küçük doğal sayılar için doğru olduğunu kabul edelim. Şimdi elimizde $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n = P$ asal ideal zinciri olsun. Burada $htP_{n-1} = n-1$ dir. Aksi olsaydı P nin yüksekliğinin n olmasıyla çelişirdi. Kabulümüzden dolayı $J \subseteq P_{n-1}$ olan, $a_1, \ldots, a_{n-1}$ elemanları tarafından üretilen ve yüksekliği $n-1$ olan bir J ideali vardır. Yardımcı Teorem 2.12 den $P_{n-1} \in Min(J)$ olur ve Tanım 1.12 nin sonucundan da J nin sonlu tane yüksekliği $n-1$ olan minimal asal ideali vardır. $Min(J) = \{Q_1, \ldots, Q_t, P_{n-1}\}$ olsun. $P \not\subset P_{n-1} \cup Q_1 \cup \ldots \cup Q_t$ olduğunu görebilmek için Teorem 1.7 yi kullanacağız. $P \subseteq P_{n-1} \cup Q_1 \cup \ldots \cup Q_t$ olsaydı bazı $i = 1, \ldots, t$ için $P \subseteq P_{n-1}$ veya $P \subseteq Q_i$ olacaktı. Fakat bunların hiçbiri doğru olamaz çünkü yükseklikleri farklı. Böylece en az bir $a_n \in P-(P_{n-1} \cup Q_1 \cup \ldots \cup Q_t)$ vardır. $I=\sum_{i=1}^{n} Ra_i = J + Ra_n$ olarak tanımlayalım. I ideali n eleman tarafından üretiliyor ve $I=\sum_{i=1}^{n} Ra_i = J + Ra_n \subseteq P_{n-1} + P = P$ dir. $J \subseteq I \subseteq P$ ve $htJ = n-1$, $htP = n$ olduğundan htI, ya $n-1$ ya da n dir. $htI = n-1$ ise en az bir $P' \in Min(I)$ vardır öyle ki $htP' = n-1$ dir. $J \subseteq I \subseteq P'$ ve $htJ = n-1$ olduğundan $P' \in Min(J)$ olur ki bu da çelişkidir çünkü $a_n \notin P'$ idi. Yani sonuç olarak $htI = n$ olur.

Sonuç 2.14. R değişmeli Noetherian bir halka ve R nin n eleman tarafından üretilebilen bir öz ideali I olsun. $I \subseteq P$ ve $P \in Spec(R)$ olsun. O zaman $ht_{R/I} P/I \le ht_R P \le ht_{R/I} P/I + n$ dir.

İspat. $ht_{R/I} P/I = t$ olsun. O zaman $P_i/I \in Spec(R/I)$ vardır, öyle ki $P_0/I \subset P_1/I \subset \ldots \subset P_t/I = P/I$ dir. $P_i/I \in Spec(R/I)$ olduğundan $P_i \in Spec(R)$ dir ve böylece, R de $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_t = P$ şeklinde bir asal ideal zinciri bulunur. Yükseklik tanımından da $t \le ht_R P$ elde edilir. I ideali $b_1,\ldots,b_n$ elemanlarıyla üretilsin. $\overline{R} = R/I$ ve $\overline{} : R \to \overline{R}$ doğal homomorfizma olsun. $ht_{R/I} P/I = t$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.12 ve Teorem 2.13 ten $a_1,\ldots,a_t \in R$ bulunur öyle ki P/I ideali $\overline{R}$ de $\sum_{i=1}^{t} \overline{Ra_i}$ idealinin minimal asal idealidir. $\sum_{i=1}^{t} \overline{Ra_i} = \left(\sum_{i=1}^{t} Ra_i + I\right)\Big/ I$ olduğundan P ideali, $t+n$ eleman tarafından üretilen $\sum_{i=1}^{t} Ra_i + I = \sum_{i=1}^{t} Ra_i + \sum_{i=1}^{n} Rb_i$ idealinin minimal asal ideali olur. Teorem 1.7 den $ht_R P \le t + n = ht_{\overline{R}} P/I + n$ elde edilir.

Örnek 2.15. R değişmeli Noetherian bir halka ve $a \in R$ birimsel ve sıfır bölen olmayan bir eleman olsun. $P \in Spec(R)$ ve $a \in P$ ise $ht_{R/Ra} P/Ra = ht_R P - 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $ht_{R/Ra} P/Ra = n$ olsun. O zaman Sonuç 2.14 ten $n \le ht_R P \le n+1$ dir. $P/Ra = P_n/Ra \supset P_{n-1}/Ra \supset \ldots \supset P_1/Ra \supset P_0/Ra$ olacak şekilde bir asal ideal zinciri vardır. $a \notin Zdv(R)$ olduğundan $a \notin \bigcup_{Q \in Min(R)} Q$ dir. Böylece $Ra \supset Q$ olacak şekilde $Q \in Spec(R)$ vardır.

Buradan $P = P_n \supset P_{n-1} \supset \ldots \supset P_1 \supset P_0 \supset Q$ bir asal ideal zinciridir. Böylece $ht_R P \geq n+1$ elde edilir. Sonuç olarak $ht_R P = n+1$ bulunmuş olur.

Örnek 2.16. (R, M) lokal halka ve Q, R nin öz ideali olsun. Aşağıdaki ifadelerin denk olduğunu gösteriniz:

(i) R -modülü R/Q sonlu uzunluktadır,

(ii) $Var(Q) = \{M\}$ dir,

(iii) $ass(Q) = \{M\}$ dir,

(iv) Q, M asalımsıdır,

(v) en az bir $h \in N$ vardır öyle ki $Q \supset M^h$.

Çözüm. $(i) \Rightarrow (ii)$ R/Q ,R-modülünün uzunluğu sonlu olsun. Teorem 1.22 den R/Q hem Noetherian hem de Artinian R -modülüdür, ve Teorem 1.20 den R/Q hem Noetherian halka hem de Artinian halka olur. Teorem 1.29 dan R/Q halkasının her asal idealinin maksimal ideal olduğunu biliyoruz. R/Q lokal halka olduğundan Q yu kapsayan tek asal ideal M dir. Böylece $Var(Q) = \{M\}$ dir.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ $Var(Q) = \{M\}$ olsun. Tanım 1.12 den $ass(Q) = \{M\}$ olur. $(iii) \Rightarrow (iv)$ $ass(Q) = \{M\}$ olsun. R Noetherian halka olduğundan Q ayrıştırılabilirdir. $Q = I_1 \cap \ldots \cap I_n$, $\sqrt{I_i} = P_i \in Spec(R)$ Q nun bir minimal asalımsı ayrışımı olsun. Bu ayrışım minimal olduğundan her i için $P_i = M$ dir ve yine minimallikten $n = 1$ çıkar. Yani sonuç olarak $\sqrt{Q} = M$ elde edilir ki bu da Q nun M asalımsı olması demektir. $(iv) \Rightarrow (v)$ $\sqrt{Q} = M$ olsun. R, Noetherian olduğundan M sonlu üreteçlidir ve Teorem 1.24 den en az bir $h \in N$ için $Q \supset (\sqrt{Q})^h = M^h$ olur.

$(v) \Rightarrow (i)$ En az bir $h \in N$ için $Q \supseteq M^h$ olsun. $\sqrt{Q} \supseteq \sqrt{M^h} = M$ ve M maksimal ideal olduğundan $\sqrt{Q} = M$ olur. Böylece $Min(Q) = \{M\}$ dir. Yani R/Q nun tek asal ideali M/Q dur. Sonuç olarak R/Q Noetherian ve Artinian halkadır bu da R/Q nun Noetherian ve

Artinian R/Q-modülüdür demek olur. Buradan da R/Q Noetherian ve Artinian R-modülü elde edilir. Yani R/Q R-modülünün uzunluğu sonludur.

Sonuç 2.17. (R,M) lokal halka olsun. O zaman,

$$\dim R = \min\left\{ i \in N_0 : \sum_{j=1}^{i} Ra_j \ \textit{ideali } M \textit{ primary olacak şekilde}, \ a_1,\dots,a_i \in R \text{ var} \textit{dı} \right\} \text{ olur.}$$

İspat. $d = \min\left\{ i \in N_0 : \sum_{j=1}^{i} Ra_j \ \textit{ideali } M \textit{ primary olacak şekilde}, \ a_1,\dots,a_i \in R \text{ var} \textit{dı} \right\}$ olsun.

$\sqrt{\sum_{j=1}^{i} Ra_j} = M$ olduğundan $M \in Min\left(\sum_{j=1}^{i} Ra_j\right)$ dir ve burada Teorem 2.7 yi kullanırsak $htM \le d$ olur. Böylece $\dim R \le d$ elde edilir. Diğer taraftan Yardımcı Teorem 2.5 ve Teorem 2.6 yı kullanırsak R de minimal asal ideali M olan ve $\dim R = htM$ eleman tarafından üretilen bir Q ideali bulunur. R lokal olduğundan $ass(Q) = \{M\}$ olur ve böylece Q, M-asalımsı ideal olur. d nin minimalliğinden de $d \le \dim R$ elde edilir. Sonuç olarak $\dim R = d$ bulunmuş olur.

Tanım 2.18. (R,M) boyutu d olan bir lokal halka olsun. Bir M-primary ideal üreten R nin d elemanlı alt kümesine R için bir 'parametreler sistemi' denir.

Önerme 2.19. (R,M) lokal halka ve $a_1,\dots,a_t \in M$ olsun. O zaman $\dim R - t \le \dim R/(a_1,\dots,a_t) \le \dim R$ dir. Ayrıca $\dim R - t = \dim R/(a_1,\dots,a_t)$ olması için gerek ve yeter koşul $a_1,\dots,a_t$ nin hepsi birbirinden farklı ve R için bir paramtreler sisteminin bir alt kümesi olmasıdır.

İspat. R lokal halka olduğundan $\dim R = htM$ dir ve

$\dim R/(a_1,\dots,a_t) = ht_{R/(a_1,\dots,a_t)} M/(a_1,\dots,a_t)$ dir. Böylece Sonuç 2.14 ten

$\dim R - t \le \dim R/(a_1,\dots,a_t) \le \dim R$ elde edilir. Şimdi $\overline{R} = R/(a_1,\dots,a_t)$ ve $\overline{} : R \to \overline{R}$ doğal halka homomorfizması olsun. $\overline{M} = M/(a_1,\dots,a_t)$ ve $\dim R = d$ olsun.

$(\Rightarrow)$: $\dim \overline{R} = d - t$ olsun. O zaman $t \le d$ dir ve Sonuç 2.17 den en az bir $a_{t+1},\dots,a_d \in M$ vardır öyle ki $\{\overline{a_{t+1}},\dots,\overline{a_d}\}\ \overline{R}$ için bir parametreler sistemi olsun, yani

$(a_1,...,a_t,a_{t+1},...,a_d)\big/(a_1,...,a_t)$ $\overline{M}$-asalımsı idealdir. Buradan Teorem 1.15 den $(a_1,...,a_d)$ M-asalımsı ideal olur. Böylece Sonuç 2.17 den $\{a_1,...,a_d\}$ R için bir parametreler sistemi olur. $(\Leftarrow)$: $t \le d$ ve $a_{t+1},...,a_d \in M$ olsun öyle ki $a_1,...,a_t,a_{t+1},...,a_d$ R için bir parametreler sistemi olsun. Yani $(a_1,...,a_d)$ M-asalımsı ideal olur. Böylece Teorem 1.15 den $(\overline{a_{t+1}},...,\overline{a_d})$ $\overline{M}$-asalımsı ideal olur. Buradan Sonuç.2.17 den $d-t \ge \dim \overline{R}$ olur. Bir öncekinden de $d-t \le \dim \overline{R}$ elde edilir ve ispat biter.

Sonuç 2.20. (R,M) bir lokal halka olsun. O zaman, $\dim R \le v.\dim_{R/M} M/M^2$ dir.

İspat. M nin bir M-asalımsı ideal olduğunu düşünerek Sonuç.2.17 deki halkanın boyutunun tanımını kullanacağız. Teorem 1.32 den M/M^2, R/M vektör uzayının boyutu aynı zamanda M idealini üreten kümenin eleman sayısına eşittir. Böylece $\dim R \le v.\dim_{R/M} M/M^2$ elde edilir.

Tanım 2.21. (R,M) bir lokal halka olsun. O zaman $\dim R = v.\dim_{R/M} M/M^2$ oluyor ise R halkasına regüler lokal halka denir.

Bu tanımdan da anlaşılacağı gibi (R,M) lokal halkasının boyutu d ise M ideali d eleman tarafından üretilmiştir. Bu durumda M/M^2, R/M vektör uzayı da d eleman tarafından üretilmiş olacaktır.

Örnek 2.22.

(i) R değişmeli Noetherian halka ve P, R nin yüksekliği n olan ve $a_1,...,a_n$ elemanları tarafından üretilen bir asal ideali olsun. O zaman R nin P deki lokalizasyonu, R_P, boyutu n olan regular lokal halkadır.

R_P, tek maksimal ideali PR_P olan lokal halkadır. $htP = n$, ve $P = \sum_{i=1}^{n} Ra_i$ olduğundan

$PR_P = \left(\sum_{i=1}^{n} Ra_i\right) R_P = \sum R_P \frac{a_i}{1}$ olur. $ht_R P = ht_{R_P} PR_P = n$ olduğundan

$\dim R_P = ht_{R_P} PR_P = n$ olur. PR_P, n eleman tarafından üretildiğinden Teorem 1.32 den $PR_P\big/P^2R_P$ de n eleman tarafından üretilir. Böylece eşitlik sağlanmış olur.

(ii) R cisim olmayan bir esas ideal bölgesi ve M maksimal ideali olsun. O zaman $htM = 1$ olur ve böylece R_M boyutu 1 olan bir regüler lokal halka olur.
(iii) k bir cisim ise k 0-boyutlu bir regüler lokal halkadır.

(iv) k bir cisim ve $R = k[x_1,...,x_n]$ n değişkenli polinomlar halkası ve $a_1,...,a_n \in k$ olsun. O zaman $P = (x_1 - a_1,...,x_n - a_n) \in Spec(R)$ ise $htP = n$ olur ve R_P boyutu n olan regüler lokal halkadır.

Örnek 2.23. (R,M) bir lokal halka olsun. $R[[x]]$ kuvvet serisi halkasının da lokal halka olduğunu ve $\dim R[[x]] = \dim R + 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $N = (M,x)$ alalım. O zaman $R[[x]]/N \cong R/M$ olduğundan $N, R[[x]]$ de maksimal idealdir. $R[[x]]/(x) \cong R$ olduğundan Sonuç 2.20 den $\dim R[[x]] \leq \dim R + 1$ olur. $\dim R = d$ ise, R de uzunluğu d olan asal idealler zinciri vardır, $M = P_d \supset P_{d-1} \supset ... \supset P_1 \supset P_0$ olsun. Her $i = 1,...,d$ için $R[[x]]/P_iR[[x]] \cong R/P_i\,[[x]]$, bu da tamlık bölgesi olduğundan $P_iR[[x]] \in Spec(R[[x]])$ olur. $x \notin MR[[x]]$ olduğundan,

$N \supset MR[[x]] = P_dR[[x]] \supset P_{d-1}R[[x]] \supset ... \supset P_1R[[x]] \supset P_0R[[x]]$ zinciri $R[[x]]$ de bir asal ideal zinciridir. Buradan da $\dim R[[x]] \geq d + 1$ elde edilir ve sonuca ulaşılır.

Örnek 2.24. (R,M) regüler lokal halka ise $R[[x]]$ in de regüler lokal halka olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Örnek 2.23 ten biliyoruz ki $(R[[x]], N)$ local halkadır ve $\dim R[[x]] = \dim R + 1$ dir. Şimdi de $v.\dim_{R/M} M/M^2 = n$ olsun. O zaman $a_1,...,a_n \in R$ vardır öyle ki $a_1 + M^2,...,a_n + M^2$, M/M^2 vektör uzayını üretir. Bu da $a_1,...,a_n$ de M yi üretir, yani bir tabanıdır. Buradan da $a_1,...,a_n,x$ elemanları N yi üretir, Teorem 1.32 den de $a_1 + N^2,...,a_n + N^2$ elemanları da N/N^2 yi üretir. Bu da $v.\dim_{R[[x]]/N} N/N^2 = n + 1$ demek olur. Bulunanları birleştirirsek R nin regüler lokal halka olmasından $v.\dim_{R[[x]]/N} N/N^2 = \dim R[[x]]$ elde edilir.

Yardımcı Teorem2.25. (R,M) lokal halka ve $c \in M - M^2$ olsun. $\overline{R} = R/_{Rc}$ ve $\overline{M} = M/_{Rc}$ olarak alındığında $\overline{M}, \overline{R}$ nin maksimal idealidir. $\overline{} : R \to \overline{R}$ doğal örten halka homomorfizması olarak alındığında, $v.\dim_{R/_M} M/_{M^2} = v.\dim_{\overline{R}/_{\overline{M}}} \overline{M}/_{\overline{M}^2} + 1$ olur.

İspat. $v.\dim_{\overline{R}/_{\overline{M}}} \overline{M}/_{\overline{M}^2} = n$ olarak alalım ve $a_1,\ldots,a_n \in M$ elemanlarının doğal görüntülerinin kümesi $\overline{M}/_{\overline{M}^2}$, $\overline{R}/_{\overline{M}}$ uzayını bir bazı olsun. Teorem 1.32 den $\{\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n}\}$ $\overline{R}$ deki $\overline{M}$ idealini üretir, böylece $M/_{Rc} = \overline{M} = \sum_{i=1}^{n} \overline{R}\overline{a_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} Ra_i + Rc\right)/_{Rc}$ olur ve buradan $M = \sum_{i=1}^{n} Ra_i + Rc$ sonucu çıkar. Yani $R/_M$ uzayında $M/_{M^2}$, $a_1 + M^2,\ldots,a_n + M^2, c + M^2$ elemanları tarafından üretilir. Şimdi bu elemanların lineer bağımsız olduklarını gösterelim. $r_1,\ldots,r_n, s \in R$ alalım öyle ki $\sum_{i=1}^{n}(r_i + M)(a_i + M^2) + (s + M)(c + M^2) = 0$ olsun. Buradan $\sum_{i=1}^{n} r_i a_i + sc \in M^2$ elde edilir ve $\overline{R}$ de $\sum_{i=1}^{n} \overline{r_i a_i} \in M^2$ olur, yani $\overline{R}/_{\overline{M}}$ uzayında $\sum\left(\overline{r_i} + \overline{M}\right)\left(\overline{a_i} + \overline{M}^2\right) = 0$ olur. $\overline{a_1} + \overline{M}^2,\ldots,\overline{a_n} + \overline{M}^2$ $\overline{R}/_{\overline{M}}$ uzayında lineer bağımsız olduğundan $\overline{r_1},\ldots,\overline{r_n} \in \overline{M}$ elde edilir. Şu halde $r_1,\ldots,r_n \in M$ olur ve $\sum_{i=1}^{n} r_i a_i + sc \in M^2$ den $sc \in M^2$ bulunur. $s \notin M$ ise s birimsel olur böylece $c = s^{-1}sc \in M^2$ olur ki bu da bir çelişkidir. Sonuç olarak $s \in M$ olur bu da $a_1 + M^2,\ldots,a_n + M^2, c + M^2$ nin $R/_M$ de lineer bağımsız olmasını gerektirir.

Sonuç 2.26. (R,M) regüler lokal halka ve $c \in M - M^2$ olsun. O zaman $R/_{Rc}$ de bir regüler lokal halkadır ve $\dim R/_{Rc} = \dim R - 1$ olur.

İspat. R regüler lokal halka olduğundan ve $c \in M - M^2$ yani $M \neq M^2$ olduğundan $\dim R = v.\dim_{R/_M} M/_{M^2} \geq 1$ olur. $\overline{R} = R/_{Rc}$ ve $\overline{M} = M/_{Rc}$ olsun. O zaman $\overline{M}, \overline{R}$ nin maksimal ideali olur ve Sonuç 2.14 den $ht_{\overline{R}}\overline{M} \geq ht_R M - 1$ bulunur. Özellik 2.3(i) ve Sonuç 2.20 yi kullanırsak, $v.\dim_{\overline{R}/_{\overline{M}}} \overline{M}/_{\overline{M}^2} \geq \dim \overline{R} = ht_{\overline{R}}\overline{M} \geq ht_R M - 1 = \dim R - 1$ bulunur. R nin regülerliğini ve Yardımcı Teorem 2.25 i kullandığımızda

$\dim R - 1 = v.\dim_{R/M} M/M^2 - 1 = v.\dim_{\overline{R}/\overline{M}} \overline{M}/\overline{M}^2$ elde edilir. İlk ifadede yerine konulduğunda, $v.\dim_{\overline{R}/\overline{M}} \overline{M}/\overline{M}^2 \geq \dim \overline{R} \geq v.\dim_{\overline{R}/\overline{M}} \overline{M}/\overline{M}^2$ bulunur ki bu da $v.\dim_{\overline{R}/\overline{M}} \overline{M}/\overline{M}^2 = \dim \overline{R}$ sonucunu verir. Buradan da $\dim R/Rc = \dim R - 1$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.27. (R,M) bölge olmayan bir lokal halka olsun ve P esas ideali asal ideal olsun. O zaman $htP = 0$ dır, yani $P \in Min(0)$ dır.

İspat. $htP > 0$ olduğunu kabul edelim. $Q \subset P$ olmak üzere en az bir $Q \in Spec(R)$ vardır. P esas ideal olduğundan bir $p \in P$ için $P = Rp$ şeklindedir. $Q \subset P$ olduğundan $p \notin Q$ dur. Her $n \in N$ için $\sqrt{P^n} = P$ olduğundan $Q \subset P^n$ dir. Sonuç olarak $Q \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} P^n = 0$ (Teorem 1.27 den) olur. Bu R nin bölge olmamasıyla çelişir.

Teorem 2.28. Her regüler lokal halka bir tamlık bölgesidir.

İspat. (R,M) boyutu d olan regüler lokal halka olsun. Şimdi d üzerinden tümevarım uygulayalım. $d = 0$ ise M, 0 tarafından üretilir ve böylece $M = 0$ olur. Burada R cisim ve böylece tamlık bölgesi olur. Şimdi tümevarımsal olarak d den küçük bütün doğal sayılar için ifademiz doğru olsun. R nin tamlık bölgesi olmadığını kabul edelim. $\dim R = v.\dim_{R/M} M/M^2 = d > 0$ olsun, $M \supset M^2$ dir. $c \in M - M^2$ alalım. Sonuç 2.26 dan R/Rc lokal halkası, boyutu $d-1$ olan regüler bir halkadır. Tümevarımsal kabulümüzden $Rc \in Spec(R)$ olur. R yi tamlık bölgesi kabul etmediğimizden Yardımcı Teorem 2.27 den $htRc = 0$ olur. Tanım 1.12 nin sonucundan 0 ın sonlu tane minimal asal ideali vardır, $P_1, \ldots, P_s$ olsun. $M - M^2 \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} P_i$ olduğundan $M \subseteq M^2 \cup P_1 \cup \ldots \cup P_s$ elde edilir. Teorem 1.7 den $M \subseteq M^2$ veya bazı $i = 1, \ldots, s$ için $M \subseteq P_i$ olur bu da $d = \dim R = htM \leq htP_i = 0$ demek olur ki bu bir çelişkidir.

Tanım 2.29. (R,M) boyutu d olan regüler lokal halka olsun. R nin d elemanlı bir alt kümesi M yi üretiyorsa o kümeye parametrelerin regüler sistemi denir.

Teorem 2.30. (R,M) boyutu $d > 0$ olan regüler lokal halka olsun ve $\{u_1, \ldots, u_d\}$ R nin parametrelerinin regüler sistemi olsun. O zaman her $i = 1, \ldots, d$ için $R/(u_1, \ldots, u_i)$ lokal halkası boyutu $d-i$ olan regüler bir halkadır. Dahası, $0 \subset (u_1) \subset (u_1, u_2) \subset \ldots \subset (u_1, \ldots, u_d)$ uzunluğu d olan doygun asal ideal zinciridir.

İspat. $1 \le i \le d$ olacak şekilde $i \in N$ alalım. Önerme 2.19 dan $\overline{R} = R/(u_1, \ldots, u_i)$ lokal halkasının boyutu $d-i$ dir ve $\overline{} : R \to \overline{R}$ doğal halka homomorfizması iken $M/(u_1, \ldots, u_i) \in Max(\overline{R})$ ideali de $d-i$ eleman tarafından üretilir, $\overline{u_{i+1}}, \ldots, \overline{u_d}$. Böylece $\overline{R}$ regüler lokal halka olur ve Teorem 2.28 den tamlık bölgesi olur. Buradan $(u_1, \ldots, u_i) \in Spec(R)$ olur ve $0 \subset (u_1) \subset (u_1, u_2) \subset \ldots \subset (u_1, \ldots, u_i) \subset \ldots \subset (u_1, \ldots, u_d)$ zinciri kesindir, ve her $i = 1, \ldots, d$ için $\dim R/(u_1, \ldots, u_i) = d - i$ olur.

3. REGÜLER SERİLER ve DERECE

Bu bölümde Cohen-Macaulay halkalarının temelini oluşturan regüler seri ve derece kavramlarını anlamaya çalışacağız.

Tanım 3.1. R değişmeli Noetherian bir halka ve M sıfırdan farklı sonlu üreteçli R modülü olsun. $a_1,...,a_n \in R$ alalım. Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanırsa $(a_i)_{i=1}^n$ ye M-serisi denir:

(i) $M \neq (a_1,...,a_n)M$ ve

(ii) her $i=1,...,n$ için a_i ,R modülü $M/(a_1,...,a_{i-1})M$ nin sıfır böleni olmayacak.

$i=1$ için (ii) ifadesi a_1 in M nin sıfır böleni olmaması anlamına gelecek. Bir M-serisinin uzunluğundan bahsedildiğinde içindeki elemanların sayısı anlaşılacak. Boş küme olan M-serisinin uzunluğu sıfırdır. M-serisinin diğer bir adı da M deki regüler seridir. $M=R$ alındığında $(a_i)_{i=1}^n$ bir R-serisi olması;

(i) $R \neq (a_1,...,a_n)R = (a_1,...,a_n)$ ve

(ii) her $i=1,...,n$ için a_i nin $R/(a_1,...,a_{i-1})$ in sıfır böleni olmaması koşullarını sağlaması demek olur.

Örnek 3.2. (i) (R,M) boyutu sıfırdan büyük bir regüler lokal halka olsun. $\{u_1,...,u_d\}$, R için bir parametrelerin regüler sistemi ise $(u_i)_{i=1}^d$ bir R-serisidir.

(ii) R değişmeli Noetherian bir halka ve $x_1,...,x_n$ bilinmeyenler olsunlar. Teorem 1.35 den $S=R[x_1,...,x_n]$ polinomlar halkası da değişmeli Noetherian halkadır. x_1 ,S de sıfır bölen değildir, $S/(x_1) \cong R[x_2,...,x_n]$ olduğundan x_2 de $S/(x_1)$ de sıfır bölen değildir. Bu şekilde devam edilirse her $i=1,...,n$ için x_i nin $S/(x_1,...,x_{i-1}) \cong R[x_i,...,x_n]$ de sıfır bölen olmadığı görülür. Ayrıca $S/(x_1,...,x_n) \cong R \neq 0$ olduğundan $S \neq (x_1,...,x_n)$ olur ve böylece $(x_i)_{i=1}^n$ bir S-serisidir.

Not 3.3. L ,R değişmeli halkası üzerinde bir modül olsun ve I,J R nin iki ideali olsun. Buradan, $I(L/JL) = (IL+JL)/JL = (I+J)L/JL$ olur ve $\dfrac{(L/JL)}{I(L/JL)} \cong L/(I+J)L$ dir.

Ayrıca yine hatırlatalım ki $L_1 \cong_R L_2$ ise $Zdv_R(L_1) = Zdv_R(L_2)$ olur.

Yardımcı Teorem 3.4. R değişmeli Noetherian bir halka ve M sıfırdan farklı sonlu üreteçli R modülü olsun. $a_1,...,a_n \in R$ ve $1 \leq h \leq n$, $h,n \in Z$ olsun. O zaman $(a_i)_{i=1}^n$ bir M-serisidir ancak ve ancak $(a_i)_{i=1}^h$ bir M-serisidir ve $(a_i)_{i=h+1}^n$ bir $M/(a_1,...,a_h)M$ -serisidir.

İspat. $N = M/(a_1,...,a_h)M$ sonlu üreteçli R modülüdür. Not 3.3 ten $M/(a_1,...,a_n)M \cong N/(a_{h+1},...,a_n)N$ dir ve bu iki R modülünün ya her ikisi de sıfırdır ya da her ikisi sıfırdan farklıdır. Böylece her $i = h+2,...,n$ için $a_i \notin Zdv\left(M/(a_1,...,a_{i-1})M\right)$ dir ancak ve ancak $a_i \notin Zdv\left(N/(a_{h+1},...,a_{i-1})N\right)$ dir.

Örnek 3.5. k bir cisim ve x,y,z bilinmeyenler olmak üzere $R = k[x,y,z]$ olsun.
(i) $x, y(1-x), z(1-x)$ bir R-serisidir.

(ii) $y(1-x), z(1-x), x$ bir R-serisi değildir.

Çözüm.
(i) $I = (x, y(1-x), z(1-x))$ olsun. $I \subset (x,y,z)$ dir ve

$x \in I, y = y(1-x) + yx \in I, z = z(1-x) + zx \in I$ olduğundan $I \supset (x,y,z)$ olur. Ve böylece $I = (x,y,z)$ elde edilir. R tamlık bölgesi olduğundan $x \notin Zdv(R)$ dir. Şimdi $R/(x) \cong k[y,z]$ olduğundan $y \notin Zdv(k[y,z]) = Zdv\left(R/(x)\right)$ dir. Aynı şekilde $R/(x, y(1-x)) \cong k[z]$ olduğundan $z \notin Zdv(k[z]) = Zdv\left(R/(x, y(1-x))\right)$ dir. $R/I \cong k$ olduğundan $R \neq IR$ olur. O halde $x, y(1-x), z(1-x)$ bir R-serisidir.

(ii) $y(1-x) \notin Zdv(R)$ dir, fakat $y \notin (y(1-x))$ olduğu halde $z(1-x)y \in (y(1-x))$ olur. Bu da $z(1-x) \in Zdv\left(R/(y(1-x))\right)$ demektir. Yani $y(1-x), z(1-x), x$ bir R-serisi değildir. Bu örnek bize bir R-serisinde elemanların sırasının önemli olduğunu göstermektedir.

Yardımcı Teorem 3.6. R değişmeli Noetherian bir halka ve M sıfırdan farklı sonlu üreteçli R modülü olsun. Kabul edelim ki $a,b \in R$ bir M-serisi olsun. O zaman $a \notin Zdv_R\left(M/bM\right)$dir.

İspat. $a,b \in R$ bir M-serisi olduğundan $M \neq (a,b)M$, $a \notin Zdv_R(M)$, $b \notin Zdv_R\left(M/aM\right)$ dir. Şimdi kabul edelim ki $a \in Zdv_R\left(M/bM\right)$ olsun. O zaman en az bir $m + bM \in M/bM$ vardır öyle ki $a(m + bM) = 0$ dır, yani $am \in bM$ olur. Buradan da en az bir $m' \in M$ bulunur öyle ki $am = bm'$ olur. $b \notin Zdv_R\left(M/aM\right)$ olduğundan $m' \in aM$ olur. Böylece $m' = am''$ olacak şekilde en az bir $m'' \in M$ vardır. İlk eşitlikte yerine konursa $am = bam''$ ve böylece $a(m - bm'') = 0$ olur. $a \notin Zdv_R(M)$ olduğundan $m = bm''$ ve $m + bM = 0$ demek olur sonuç olarak da $a \notin Zdv_R\left(M/bM\right)$ bulunulmuş olur.

Sonuç 3.7. R değişmeli Noetherian bir halka ve M sıfırdan farklı sonlu üreteçli R modülü olsun. $(a_i)_{i=1}^n$ bir M-serisi ve $1 \leq h < n$ olacak şekilde $h \in Z$ alalım. O zaman $a_1,\dots,a_{h-1},a_{h+1},a_h,a_{h+2},\dots,a_n$ bir M-serisidir ancak ve ancak $a_{h+1} \notin Zdv_R\left(M/(a_1,\dots,a_{h-1})M\right)$ dir.

İspat. $N = M/(a_1,\dots,a_{h-1})M$ sonlu üreteçli R modülüdür. Yardımcı Teorem 3.4 den $(a_i)_{i=h}^n$ N-serisidir ve böylece Yardımcı Teorem 3.6 dan $a_h \notin Zdv_R\left(N/a_{h+1}N\right)$ dir ve Not 3.3 den $N/a_{h+1}N \cong M/(a_1,\dots,a_{h-1},a_{h+1})M$ olduğundan $a_h \notin Zdv_R\left(M/(a_1,\dots,a_{h-1},a_{h+1})M\right)$ bulunur.

Teorem 3.8. R değişmeli Noetherian bir halka ve M sıfırdan farklı sonlu üreteçli R modülü olsun. $n > 1$ olmak üzere $(a_i)_{i=1}^n$ bir M-serisi R nin Jacobson radikalinin elemanlarından oluşsun. O zaman σ , $\{1,\dots,n\}$ kümesinin herhangi bir permütasyonu olduğunda, $\left(a_{\sigma(i)}\right)_{i=1}^n$ serisi de bir M-serisidir.

İspat. S_n simetrik grubunda $h \in \{1,\dots,n-1\}$ olmak üzere her permütasyon $(h\,h+1)$ transformasyonların çarpımı şeklinde yazılabildiğinden ispatı sadece $\sigma = (h\,h+1)$ için yapmak yeterli olacaktır. $N = M/(a_1,\dots,a_{h-1})M$ alalım. Bu durumda Sonuç 3.7 den $a_{h+1} \notin Zdv_R(N)$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $L = (0 \underset{N}{:} Ra_{h+1})$ ve $y \in L$ olsun. $a_{h+1}y = 0$ ve $a_{h+1} \notin Zdv_R\left(N/a_hN\right)$ olduğundan $y \in a_hN$ olur. Bir $y' \in N$ için $y = a_hy'$ olur. Bunu eşitlikte yerine koyarsak $0 = a_{h+1}y = a_{h+1}a_hy'$ elde edilir. $a_h \notin Zdv_R(N)$ olduğundan

$a_{h+1}y'=0$ ve böylece $y'\in L$ bulunur. Buradan da $a_h \in Jac(R)$ olduğundan $L=a_hL$ elde edilir. L sonlu üreteçli R modül olduğundan Teorem 1.26 dan $L=0$ bulunur.

Önerme 3.9. R değişmeli Noetherian bir halka ve M sıfırdan farklı sonlu üreteçli R modülü olsun. O zaman $a_i \in R$ ve her $n \in N$ (doğal sayısı) için $(a_i)_{i=1}^{n}$ bir M-serisi olacak şekilde $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ serisi yoktur.

İspat. Böyle bir serinin olduğunu kabul edelim. Her $n \in N$ için $a_{n+1} \notin Zdv_R\left(M/(a_1,\ldots,a_n)M\right)$ olduğundan $(a_1,\ldots,a_n) \subset (a_1,\ldots,a_n,a_{n+1})$ olur. Ve buradan $a_{n+1} \notin (a_1,\ldots,a_n)$ olduğundan $(a_1) \subset (a_1,a_2) \subset \ldots \subset (a_1,\ldots,a_n) \subset \ldots$ sonsuz artan zinciri bulunur. Bu da R nin Noetherian olması ile çelişir.

Tanım 3.10. R değişmeli Noetherian bir halka ve M sıfırdan farklı sonlu üreteçli R modülü olsun. I da $M \neq IM$ koşulunu sağlayan R nin bir ideali olsun. $(a_i)_{i=1}^{n}$ M-serisinin elemanları I da olsun. Eğer $(a_i)_{i=1}^{n}$ M-serisine bir $a_{n+1} \in I$ eklendiğinde $n+1$ uzunluğunda M-serisi elde edilemiyorsa, $(a_i)_{i=1}^{n}$ M-serisine I içindeki maksimal M-serisi denir. Bir I idealinde M-serisi daima vardır, hiç olmassa boş küme vardır. I içindeki herhangi bir M-serisi maksimal olacak şekilde genişletilebilir.

Yardımcı Teorem 3.11. R değişmeli Noetherian bir halka ve M sıfırdan farklı sonlu üreteçli R modülü olsun. I da $M \neq IM$ koşulunu sağlayan R nin bir ideali olsun. Kabul edelim ki $a,b \in I$ elemanlarının her ikisi de M de sıfır bölen olmasın ve a ,I da (uzunluğu 1 olan) maksimal M-serisi olsun. O zaman b de I da maksimal M-serisi olur.

İspat. $I \subseteq Zdv_R\left(M/aM\right) = \bigcup_{P \in Ass_R\left(M/aM\right)} P$ dir ve $Ass_R\left(M/aM\right)$ sonlu bir küme olduğundan Teorem 1.7 yi kullanırsak bazı $P \in Ass_R\left(M/aM\right)$ için $I \subseteq P$ olur. Şimdi Tanım 1.33 den bazı $\gamma \in M/aM$ için $P=(0:\gamma)$ olur ve böylece en az bir $m \in M-aM$ vardır öyle ki $I(Rm) \subseteq P(Rm) \subseteq aM$ elde edilir. Özel olarak $bm \in aM$,$bm=am'$ olacak şekilde $m' \in M$ vardır. Eğer $m' \notin bM$ olsa idi en az bir $m'' \in M$ için $m'=bm''$ olur ve $bm=am'=abm''$ bulunur. $b \notin Zdv_R(M)$ olduğundan da $m=am'' \in aM$ bulunurdu ki bu da bir çelişkidir. Şimdi $r \in I$ alalım. O zaman $arm'=rbm \in baM$ olur böylece bazı $n \in M$ için $arm'=abn$ yazılır. Öyle ki $rm'=bn \in bM$ olur çünkü $a \notin Zdv_R(M)$ dir. Buradan $m' \in M-bM$ olduğundan

$I(Rm') \subseteq bM$ bulunur. Bu da $I \subseteq Zdv_R\left(M/_{bM}\right)$ demek olur. Sonuç olarak b ,I içinde bir maksimal M -serisi olur.

Teorem 3.12. R değişmeli Noetherian bir halka ve M sıfırdan farklı sonlu üreteçli R modülü olsun. I da $M \neq IM$ koşulunu sağlayan R nin bir ideali olsun. O zaman I içindeki herhangi iki maksimal M -serisinin uzunlukları eşittir.

İspat. I içinde $(a_i)_{i=1}^n$ maksimal M -serisi, $(b_i)_{i=1}^n$ M -serisi olsun. $(b_i)_{i=1}^n$ serisinin maksimal olduğunu göstermek ispat için yeterli olacaktır. Bunu da n üzerinden tümevarım ile göstereceğiz. $n=1$ ise Yardımcı Teorem 3.11 den ispatlanır. Şimdi k dan küçük doğal sayılar için hipotezimizin doğru olduğunu kabul edelim. Şimdi de I içinde $(a_i)_{i=1}^k$ maksimal M -serisi, $(b_i)_{i=1}^k$ M -serisi olsun. Her $i=1,\dots,k-1$ için $N_i = M/_{(a_1,\dots,a_i)M}$, $L_i = M/_{(b_1,\dots,b_i)M}$ ve $i=0$ için de $N_0 = M = L_0$ olsun. $i=0,1,\dots,k$ için $a_i \in I - Zdv_R(N_{i-1})$ ve $b_i \in I - Zdv_R(L_{i-1})$ vardır. Buradan $I \not\subset Zdv_R(N_{i-1})$ ve $I \not\subset Zdv_R(L_{i-1})$ olur. $Zdv_R(N_{i-1})$ ve $Zdv_R(L_{i-1})$ sonlu sayıda asal ideallerin birleşimi olduğundan Teorem 1.7 yi kullanırsak $I \not\subset Zdv_R(N_0) \cup \dots \cup Zdv_R(: N_{k-1}) \cup Zdv_R(L_0) \cup \dots \cup Zdv_R(L_{k-1})$ olur ve buradan bir $c \in I - \left\{\left[\bigcup_{i=0}^{k-1} Zdv_R(N_i)\right] \cup \left[\bigcup_{i=0}^{k-1} Zdv_R(L_i)\right]\right\}$ elemanı vardır. $c \notin Zdv_R(N_{k-1})$ olduğundan $a_1,\dots,a_{k-1},c$ de bir M -serisidir. $c \notin Zdv_R(N_{k-2})$ olduğundan Sonuç 3.7 den $a_1,\dots,a_{k-2},c,a_{k-1}$ de M -serisidir. $c \notin Zdv_R(N_{k-3})$ olduğundan Sonuç 3.7 den $a_1,\dots,a_{k-3},c,a_{k-2},a_{k-1}$ de M - serisidir. Bu yolla devam edildiğinde $c,a_1,\dots,a_{k-1}$ in de M -serisi olduğu bulunur. Benzer şekilde $c,b_1,\dots,b_{k-1}$ in de M -serisi olduğu bulunur. $c \notin Zdv_R(N_{k-1})$ ve Yardımcı Teorem 3.4 den a_k I içinde bir maksimal N_{k-1} -serisi olduğundan Yardımcı Teorem 3.11 den c de I içinde bir maksimal N_{k-1} -serisidir. Bu da $I \subseteq Zdv_R\left(N_{k-1}/_{cN_{k-1}}\right) = Zdv_R\left(M/_{(c,a_1,\dots,a_{k-1})M}\right)$ demek olur. Şimdi sıfırdan farklı $M' = M/_{cM}$ sonlu üreteçli R modülünü düşünelim. $M' \neq IM'$ dir. Yardımcı Teorem 3.4 den $(a_i)_{i=1}^{k-1}$ I içinde bir maksimal M' -serisi ve $(b_i)_{i=1}^{k-1}$ I içinde bir M' -serisi olur.

Tanım 3.13. R değişmeli Noetherian bir halka ve M sıfırdan farklı sonlu üreteçli R modülü olsun. I da $M \neq IM$ koşulunu sağlayan R nin bir ideali olsun. O zaman I içindeki bütün maksimal M-serilerinin ortak uzunluğuna I nın M-derecesi ya da I nın M deki derecesi denir ve $grade_M I$ ile gösterilir.

Özellikler 3.14. R değişmeli Noetherian bir halka ve M sıfırdan farklı sonlu üreteçli R modülü olsun. I da $M \neq IM$ koşulunu sağlayan R nin bir ideali olsun. **(i)** I da M-serisi mevcuttur, I içindeki her M-serisi maksimal olacak şekilde genişletilebilir, I içindeki her maksimal M-serisinin uzunluğu $grade_M I$ ya eşittir. **(ii)** $M = R$ alınırsa $grade_R I$ yerine $grade I$ yazılacak. **(iii)** (R,J) lokal halka olsun. O zaman $M \neq (a_1,...,a_n)M$ olduğundan her M-serisi $(a_i)_{i=1}^n$ nin elemanları J ideali içindedir (Teorem 1.26 dan, $M \neq JM$ olduğundan). Böylece R nin elemanlarından oluşan bir seri M-serisidir ancak ve ancak J içinde kapsanan bir M-serisidir. Bu durumda J idealinin derecesine M modülünün derinliği denir ve $depth_R M$ ile gösterilir. Yani $grade_M J = depth_R M$ olur.

Yardımcı Teorem 3.15. R değişmeli Noetherian bir halka ve M sıfırdan farklı sonlu üreteçli R modülü ve $(a_i)_{i=1}^n$ bir M-serisi olsun. $J = (a_1,...,a_n)$, $\overline{R} = R/J$ ve $\overline{} : R \to \overline{R}$ doğal örten halka homomorfizması olsun. Teorem 1.18 den M/JM bir $\overline{R}$ modülü olarak düşünülebilir. $a_{n+1},...,a_g \in R$ alalım. O zaman $(a_i)_{i=1}^g$ bir M-serisidir ancak ve ancak $\overline{a_{n+1}},...,\overline{a_g}$ bir M/JM-serisidir.

İspat. $\overline{M} = M/JM$ olsun. Her $i = n+1,...,g$ için $(\overline{a_{n+1}},...,\overline{a_g})\overline{M} = (a_{n+1},...,a_g)\overline{M}$ dir, ve $\overline{a_i}$ nin $\overline{M}/(\overline{a_{n+1}},...,\overline{a_{i-1}})\overline{M}$ modülündeki çarpımsal etkisi ile a_i nin çarpımsal etkisi aynıdır. Böylece, $(\overline{a_{n+1}},...,\overline{a_g})\overline{M} = (a_{n+1},...,a_g)M/JM$ olur. Buradan da $(\overline{a_{n+1}},...,\overline{a_g})\overline{M} = \overline{M}$ dir ancak ve ancak $(a_1,...,a_g)M = M$ dir.

Yardımcı Teorem 3.16. R değişmeli Noetherian bir halka ve M sıfırdan farklı sonlu üreteçli R modülü olsun. I da $M \neq IM$ koşulunu sağlayan R nin bir ideali ve $grade_M I = g$ olsun. $(a_i)_{i=1}^n$, I içinde bir M-serisi ve $J = (a_1,...,a_n)$ olarak alalım.O zaman, **(i)** $M/JM \neq I(M/JM)$dir ve $grade_{M/JM} I = g - n$ olur,

.

(ii) M/JM , R/J modülü olarak düşünüldüğünde $M/JM \neq (I/J)(M/JM)$ dir ve $grade_{M/JM}(I/J) = g-n$ olur.

İspat. $J \subseteq I$ olduğundan $I(M/JM) = IM/JM \neq M/JM$ dir. Özellik 3.14(i) den I için $a_{n+1},...,a_g \in R$ vardır öyle ki $(a_i)_{i=1}^g$ I içinde bir maksimal M-serisidir. Buradan Yardımcı Teorem 3.4 ü kullanırsak $a_{n+1},...,a_g$ nin I içinde maksimal M/JM-serisi olduğunu söyleyebiliriz. Böylece $grade_{M/JM} I = g-n$ olur. $\overline{R} = R/J$ ve $\overline{} : R \to \overline{R}$ doğal halka homomorfizması olsun. $(I/J)(M/JM) = IM/JM$ olduğundan Yardımcı Teorem 3.15 den $\overline{a_{n+1}},...,\overline{a_g}$ serisi I/J içinde maksimal M/JM-serisi olarak bulunur.

Önerme 3.17. R değişmeli Noetherian halka ve J de n elemanlı bir R-serisi tarafından üretilen ideal olsun. O zaman $htJ = n$ olur.

İspat. n üzerinden tümevarım uygulayacağız. $n=0$ ise boş kümenin ürettiği idealin yüksekliği 0 dır. $n=k$ için hipotezin doğru olduğunu kabul edelim. $(a_i)_{i=1}^{k+1}$ bir R-serisi, $J = (a_1,...,a_k,a_{k+1})$ ve $J' = (a_1,...,a_k)$ alalım. Genelleştirilmiş esas ideal teoreminden $htJ \leq k+1$ dir. Tümevarım hipotezimizden de $htJ' = k$ dır ve buradan $htJ = k+1$ veya $htJ = k$ elde edilir. $htJ = k$ ise en az bir $P \in Spec(R)$ vardır öyle ki $J \subseteq P$ ve $htP = k$ dır. $J' \subseteq J$ ve $htJ' = k$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.12 den $P \in Min(J') = ass(J')$ olur. P , $R/J' = R/(a_1,...,a_k)$ nin sıfır bölenleri tarafından kapsandığından (Teorem 1.23 den). $a_{k+1} \notin Zdv(R/J')$ ve $a_{k+1} \in P$ olduğundan çelişki elde edilir. Sonuç olarak $htJ = k+1$ bulunur.

Sonuç 3.18. R değişmeli Noetherian halka ve I öz ideali olsun. O zaman $gradeI \leq htI$ olur.

İspat. $gradeI = n$ ve $(a_i)_{i=1}^n$ I içinde bir maksimal R-serisi olsun. O zaman $(a_1,...,a_n) \subseteq I$ ve Önerme 3.17 den $gradeI = n = ht(a_1,...,a_n) \leq htI$ bulunur.

Teorem 3.19. R değişmeli Noetherian halka ve I öz ideali olsun. I , n eleman tarafından üretilebilsin ve derecesi n olsun. O zaman I uzunluğu n olan bir R-serisi tarafından üretilir.

İspat. $n=0$ ise $I=(0)$ olur ve I sıfır eleman tarafından üretilir. Şimdi $n>0$ olduğunu ve $a_1,\dots,a_n$ nin I idealinin ürettiğini kabul edelim. I içinde bir $(b_i)_{i=1}^n$ R-serisinin uygun $r_{i,j}\in R$ $(1\le i<j\le n)$ elemanlarıyla aşağıdaki matris eşitliğini sağladığını göstereceğiz

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_{1,2} & r_{1,3} & \cdots & r_{1,n-1} & r_{1,n} \\ 0 & 1 & r_{2,3} & \cdots & r_{2,n-1} & r_{2,n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & r_{3,n-1} & r_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & r_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

matrisinin diyagonallarının 1 olmasından da $\sum_{i=1}^{n} Rb_i = \sum_{i=1}^{n} Ra_i = I$ bulunur. Tümevarımsal olarak kabul edelim ki $j\in N$ ve $1\le j\le n$ için oluşturulmuş yukarıdaki özellikleri $b_i\in R$ elemanları $1\le i<j$ için sağlasın. $J=(b_1,\dots,b_{j-1})$ olsun, tabii ki $j=1$ durumunda $J=0$ olur. $(b_i)_{i=1}^{j-1}$ I içinde bir R-serisi ve $gradeI=n>j-1$ olduğundan $I\not\subset Zdv_R\left(R/J\right)$ dir. Şimdi de $(a_j,a_{j+1},\dots,a_n)\not\subset Zdv_R\left(R/J\right)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Tersini kabul edelim, yani $(a_j,a_{j+1},\dots,a_n)\subset Zdv_R\left(R/J\right)$ olsun. $c\in I=(a_1,\dots,a_n)$ alalım. O zaman $s_1,\dots,s_n\in R$ bulunur öyle ki $c=s_1a_1+\dots+s_na_n$ olur. $a_1=b_1-\sum_{k=2}^{n} r_{1,k}a_k$ olduğundan bir önceki eşitlikte a_1 yerine b_1 gelir. Aynı işlemi a_{j-1} elemanına kadar yaptığımızda uygun $t_1,\dots,t_{j-1},t_j,\dots,t_n\in R$ için $c=t_1b_1+\dots+t_{j-1}b_{j-1}+t_ja_j+\dots+t_na_n$ elde edilir. Buradan da $t_1b_1+\dots+t_{j-1}b_{j-1}$ R modülü R/J nin sıfırlayıcısı tarafından kapsanır. Kabulümüzden $(a_j,a_{j+1},\dots,a_n)\subset Zdv_R\left(R/J\right)$ olduğundan $t_ja_j+\dots+t_na_n\in Zdv_R\left(R/J\right)$ olur ve böylece $c\in Zdv_R\left(R/J\right)$ elde edilir. Bu da $I\subset Zdv_R\left(R/J\right)$ demek olur ki bu bir çelişkidir. Yani $(a_j,a_{j+1},\dots,a_n)\not\subset Zdv_R\left(R/J\right)$ olur. $Zdv_R\left(R/J\right)$ R nin sonlu tane asal idealinin birleşiminden oluştuğundan Teorem 1.7 nin sonucunu uygularsak en azından $r_{j,j+1},\dots,r_{j,n}\in R$ elemanları bulunur öyle ki $a_j+r_{j,j+1}+\dots+r_{j,n}a_n\notin Zdv_R\left(R/J\right)$ olur. Bu elemana b_j dersek $(b_i)_{i=1}^{j}$ I da bir R-serisi olur.

Aynı şekilde $(b_i)_{i=1}^{n}$ nin bir R-serisi olduğu da tümevarımla gösterilir. $\sum_{i=1}^{n} Rb_i = \sum_{i=1}^{n} Ra_i = I$ olduğundan da ispat tamamlanmış olur.

Önerme 3.20. R değişmeli Noetherien halka ve I öz ideali olsun. O zaman $gradeI = grade\sqrt{I}$ olur.

İspat. $I \subseteq \sqrt{I}$ olduğundan $gradeI \leq grade\sqrt{I}$ dır. $grade\sqrt{I} = n$ ve $(a_i)_{i=1}^{n}$ $\sqrt{I}$ içinde bir R-serisi olsun. O zaman en az bir $t \in N$ vardır her $i = 1,...,n$ için $a_i^t \in I$ olur, ve dahası $(a_i^t)_{i=1}^{n}$ bir R-serisidir, olmasaydı eğer bir $1 \leq j \leq n$ için $a_j^t \in Zdv\left(M/(a_1^t,...,a_{j-1}^t)M\right)$ olurdu ve buradan da $a_j \in Zdv\left(M/(a_1,...,a_{j-1})M\right)$ çelişkisi elde edilirdi. Böylece $gradeI \geq grade\sqrt{I}$ olur ve buradan da $gradeI = grade\sqrt{I}$ bulunur.

Sonuç 3.21. I ve J , R değişmeli Noetherian halkasının iki ideali olsun. O zaman, $grade(IJ) = grade(I \cap J) = \min\{gradeI, gradeJ\}$ dir.

İspat. $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$ olduğundan Önerme 3.20 den $grade(IJ) = grade(I \cap J)$ dır. $I \cap J \subseteq I$ ve $I \cap J \subseteq J$ olduğundan $grade(IJ) \leq gradeI$ ve $grade(IJ) \leq gradeJ$ olur. $grade(I \cap J) < \min\{gradeI, gradeJ\}$ olduğunu kabul edelim. $grade(I \cap J) = n$ ve $(a_i)_{i=1}^{n}$ $I \cap J$ içinde bir maksimal R-serisi olsun. Buradan $(a_i)_{i=1}^{n}$ I içinde R-serisidir. Özellik 3.14(i) den en az bir $a_{n+1} \in I$ vardır öyle ki $(a_i)_{i=1}^{n+1}$ bir R-serisidir. Benzer şekilde, en az bir $a'_{n+1} \in J$ vardır öyle ki $(a_i)_{i=1}^{n}, a'_{n+1}$ bir R-serisidir. Böylece a_{n+1} ve a'_{n+1} elemanlarının her ikiside $R/(a_1,...,a_n)$ R modülünde sıfır bölen değildir, aynı ifade $a_{n+1}\, a'_{n+1}$ elemanı için de geçerlidir. Fakat $a_{n+1}\, a'_{n+1} \in I \cap J$, ve $a_1,...,a_n, a_{n+1}a'_{n+1}$, $I \cap J$ içinde uzunluğu $n+1$ olan bir R-serisidir. Böylece $grade(IJ) = grade(I \cap J) = \min\{gradeI, gradeJ\}$ bulunur.

Sonuç 3.22. R değişmeli Noetherian halka ve I öz ideali olsun. O zaman $gradeI = \min\{gradeP : P \in ass(I)\} = \min\{gradeP : P \in Min(I)\}$ olur.

İspat. Önerme 3.20 den $gradeI = grade\sqrt{I}$ idi. Teorem 1.5 den $\sqrt{I} = \bigcap_{P\in ass(I)} P = \bigcap_{P\in Min(I)} P$ dır. Sonuç 3.21 i uygulanarak sonuç elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.23. R değişmeli Noetherian bir halka ve M sıfırdan farklı sonlu üreteçli R modülü ve S , R nin $S^{-1}M \neq 0$ koşulunu sağlayan çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. $(a_i)_{i=1}^n$ bir M -serisi olsun. O zaman $S^{-1}R$ nin $\left(\frac{a_i}{1}\right)_{i=1}^n$ serisi $S^{-1}M \neq \left(\frac{a_1}{1},\ldots,\frac{a_n}{1}\right)S^{-1}M$ olmak koşuluyla bir $S^{-1}M$ -serisidir.

İspat. Her $i = 1,\ldots,n$ için $\frac{a_i}{1}$ in $S^{-1}M \Big/ \left(\frac{a_1}{1},\ldots,\frac{a_{i-1}}{1}\right)S^{-1}M$ $S^{-1}R$ modülünde sıfır bölen olmadığını göstereceğiz. Şimdi $R \to S^{-1}R$ doğal homomorfizmasında $(a_1,\ldots,a_{i-1})^e = \left(\frac{a_1}{1},\ldots,\frac{a_{i-1}}{1}\right)$ dir ve Tanım 1.16 (ii) den

$$\begin{aligned} S^{-1}M \Big/ \left(\frac{a_1}{1},\ldots,\frac{a_{i-1}}{1}\right)S^{-1}M &= S^{-1}M \Big/ (a_1,\ldots,a_{i-1})S^{-1}M \\ &= S^{-1}M \Big/ S^{-1}((a_1,\ldots,a_{i-1})M) \\ &\cong S^{-1}\left(M \big/ (a_1,\ldots,a_{i-1})M\right) \end{aligned}$$

olur. $f : M \big/ (a_1,\ldots,a_{i-1})M \to M \big/ (a_1,\ldots,a_{i-1})M$ R homomorfizmasını a_i ile çarpım dönüşümü olarak düşünelim. Hipotezden f bire-birdir. Böylece $S^{-1}f : S^{-1}\left(M \big/ (a_1,\ldots,a_{i-1})M\right) \to S^{-1}\left(M \big/ (a_1,\ldots,a_{i-1})M\right)$ de bir $S^{-1}R$ homomorfizmasıdır. $S^{-1}f$ de $\frac{a_i}{1}$ ile çarpım döşümüdür. Böylece $\frac{a_i}{1}$, $S^{-1}M \Big/ \left(\frac{a_1}{1},\ldots,\frac{a_{i-1}}{1}\right)S^{-1}M$ üzerinde bir sıfır bölen değildir.

Sonuç 3.24. R değişmeli Noetherian halka ve I öz ideali S de $I \cap S = \varnothing$ koşulunu sağlayan çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. O zaman, $gradeI \leq grade_{S^{-1}R} S^{-1}I$ dır.

İspat. $gradeI = n$ ve $(a_i)_{i=1}^{n}$ I içinde bir R-serisi olsun. Tanım 1.16 (ii) den $S^{-1}I$,$S^{-1}R$ nin öz idealidir ve Yardımcı Teorem 3.23 den $\left(\frac{a_i}{1}\right)_{i=1}^{n}$, $S^{-1}I$ içinde $S^{-1}R$-serisidir. Böylece $grade_{S^{-1}R}S^{-1}I \geq n$ olur.

Teorem 3.25. (R,M) lokal halka, ve G sıfırdan farklı sonlu üreteçli R modülü olsun. O zaman her $P \in Ass(G)$ için $depthG \leq \dim R/P$ dir.

İspat. $depthG$ üzerinde tümevarım uygulayacağız. $depthG = 0$ ise halkanın boyutu negatif olmadığından ispat tamamlanır. Tümevarımsal olarak $k \in N$ için kabul edelim ki derinliği k olan sıfırdan farklı her sonlu üreteçli R modülü için ifade doğru olsun. G yi derinliği $k+1$ olan sıfırdan farklı sonlu üreteçli R modülü olsun. $k+1>0$ olduğundan en az bir $a \in M$ vardır öyle ki $a \notin Zdv_R(G)$ dir. Yardımcı Teorem 3.16(i) den $depth(G/aG) = k$ olur. Tümevarım hipotezimizden her $Q \in Ass(G/aG)$ için $depth(G/aG) \leq \dim R/Q$ olur. Şimdi $P \in Ass(G)$ alalım. P ,G nin bazı elemanlarının sıfırlayıcısı olduğundan $(0 :_G P) = \{g \in G : gP = 0\} \neq 0$ dır. $(0 :_G P) \cap aG = a(0 :_G P)$ olduğunu gösterelim. $(0 :_G P) \cap aG \supseteq a(0 :_G P)$ olduğu hemen görülür. $g \in (0 :_G P) \cap aG$ ve $g' \in G$ için $g = ag'$ olsun. $r \in P$ aldığımızda $a(rg') = rg = 0$ ve $a \notin Zdv_R(G)$ olduğundan $rg' = 0$ bulunur. Böylece $r \in (0 :_G P)$ olur. Buradan da $g = ag' \in a(0 :_G P)$ yani $(0 :_G P) \cap aG \subseteq a(0 :_G P)$ elde edilir. Şimdi $(0 :_G P) \xrightarrow{\subseteq} G \xrightarrow{\pi} G/aG$ bileşke homomorfizmasını aldığımızda çekirdeği $(0 :_G P) \cap aG = a(0 :_G P)$ ye eşit olur.

Böylece G/aG nin bir alt modülü $(0 :_G P)/a(0 :_G P)$ modülüne izomorf olur. $(0 :_G P) \neq 0$ ve $a \in M$ olduğundan Teorem 1.26 dan $(0 :_G P)/a(0 :_G P) \neq 0$ bulunur. $P + (a)$, G/aG nın bir alt modülü $(0 :_G P)/a(0 :_G P)$ yi sıfırladığından $P + (a) \subseteq Zdv(G/aG) = \bigcup_{Q \in Ass(G/aG)} Q$ olur ve Teorem 1.7 den bazı $P' \in Ass(G/aG)$ için $P + (a) \subseteq P'$ bulunur. $P \in Ass(G)$, G nin sıfır bölenlerinden oluşmaktadır ve $a \notin Zdv_R(G)$ olduğundan $a \notin P$ olur. Sonuç olarak $P \subset P'$ ve böylece $\dim R/P' < \dim R/P$ olur. Tümevarım kabulümüzden $depth(G/aG) \leq \dim R/P'$ idi. Buradan da $depthG = k+1 = depth\, G/aG + 1 \leq \dim R/P' + 1 \leq \dim R/P$ elde edilir.

Sonuç 3.26. R lokal halka ve G sıfırdan farklı sonlu üreteçli R modülü olsun. O zaman $depthG \leq \dim G$ dir.

İspat. $Supp(G)$ nin minimal P elemanları için $\dim G = \dim R/P$ dir. $P \in Ass(G)$ olduğundan Teorem 3.25 den $depthG \leq \dim R/P = \dim G$ dir

4. COHEN MACAULAY HALKALARI

Bu bölümde Cohen-Macaulay halkaları incelenmiştir.

Tanım 4.1: R değişmeli Noetherian bir halka olsun. R nin her öz idealinin yüksekliği derecesine eşit oluyorsa R ye Cohen-Macaulay halkası denir (yani her $I \subset R$ ideali için $htI = gradeI$ olacak).

Tanım 4.2. R değişmeli Noetherian bir halka olsun. Bir I öz idealinin bütün ilgili asal ideallerinin yükseklikleri eşit ise I ya düzenli denir.

I düzenli olduğunda her $P \in ass(I)$ için $htI = htP$ olur. Bu da I nın yerleşik idealinin olmadığını gösterir.

Teorem 4.3. R değişmeli Noetherian bir halka olsun. O zaman R nin bir Cohen-Macaulay halkası olması için gerek ve yeter koşul bir R-serisi tarafından üretilen her idealin düzenli olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: R nin Cohen-Macaulay olduğunu kabul edelim. $(a_i)_{i=1}^n$ bir R-serisi ve $J = (a_1,...,a_n)$ olsun. $P \in ass(J)$ alalım. Teorem 1.23 den $Zdv\, R/J = \bigcup_{P \in ass(J)} P$ olur ve $J \subseteq P$ olduğundan da $(a_i)_{i=1}^n$ P de maksimal R-serisidir. Böylece $gradeP = n$ olur. R Cohen-Macaulay olduğundan da $htP = gradeP = n$ olur. Bunu J nin bütün ilgili asal idealleri için yapabiliriz.

$(\Leftarrow)$: R-serisi tarafından üretilen her idealin düzenli olduğunu kabul edelim. I, R nin öz ideali olsun. $gradeI = n$ ve $(a_i)_{i=1}^n$ I içinde maksimal R-serisi olsun. $J = (a_1,...,a_n)$ alalım. Şimdi $I \subseteq Zdv\, R/J = \bigcup_{P \in ass(J)} P$ olduğundan Teorem 1.7 yi kullanırsak bazı $P \in ass(J)$ için $I \subseteq P$ olur. Kabulümüzde J düzenli idi, yani $htJ = htP$ ve $htJ = n$ aynı zamanda Önerme 3.17 den $htP = n$ olur. Buradan Sonuç 3.18 kullanılırsa, $n = gradeI \leq htI \leq htP = n$, $htI = n$ çıkar. Böylece R Cohen-Macaulay dir.

Teorem 4.4. R değişmeli Noetherian bir halka olsun. O zaman R Cohen-Macaulay dir ancak ve ancak her $k \in N_0$ için k eleman tarafından üretilen ve yüksekliği k olan R nin her öz ideali düzenlidir.

İspat. $(\Rightarrow)$: R Cohen-Macaulay halkası ve I, k eleman tarafından üretilen ve yüksekliği k olan R de öz ideal olsun. R Cohen-Macaulay olduğundan $gradeI = k$ dır. Böylece Teorem

3.19 dan I ideali uzunluğu k olan bir R-serisi tarafından üretilir, sonuç olarak I düzenli olur.

$(\Leftarrow)$: J, uzunluğu k olan R-serisi tarafından üretilen öz ideal olsun. Önerme 3.17 den $htJ = k$, ve J, k eleman tarafından üretildiğinden J düzenlidir. Teorem 4.3 ü kullanırsak R Cohen-Macaulay olur.

Tanım 4.5. (R,M) lokal halka olsun. Eğer $depthR = \dim R$, yani $gradeM = htM$ oluyorsa R halkasına semi-regüler halka denir.

Yukarıda Cohen-Macaulay halka tanımından her Cohen-Macaulay halkanın semi-regüler olduğu açıktır.

Önerme 4.6. (R,M) regüler lokal halkası semi-regülerdir.

İspat. $\dim R = d$ olsun. O zaman Tanım 2.21 in sonucundan M ideali d eleman tarafından üretilir. Eğer $d = 0$ olursa $M = 0$ olur ve böylece R cisim olur. Buradan da $gradeM = htM = 0$ olur. Şimdi $d > 0$ ve $u_1,...,u_d$ elemanları M yi üretsin. Örnek 3.2(i) den $(u_i)_{i=1}^{d}$, M de uzunluğu d olan bir R-serisidir. Buradan $\dim R = d \leq depthR \leq \dim R$ ve böylece $\dim R = depthR$ çıkar. Yani R semi-regülerdir.

Teorem 4.7. (R,M) lokal halka olsun. R Cohen-Macaulay dir ancak ve ancak R semi-regülerdir.

İspat. $(\Rightarrow)$: R Cohen-Macaulay halkası olsun. R nin I öz ideali için $htI = gradeI$ dır. Burada $M \subset R$ ve $I = M$ alırsak $htM = gradeM$ olur ve dolayısıyla $\dim R = depthR$ olur. Böylece R semi-regülerdir.

$(\Leftarrow)$: R semi-regüler olsun. Şu halde $\dim R = depthR$ yani $htM = gradeM$ dir. $\dim R = htM = d$ alalım. Burada Teorem 4.3 ü uygulamaya çalışacağız. $(a_i)_{i=1}^{n}$ bir R-serisi ve $J = (a_1,...,a_n)$ alalım. M tek maksimal ideal olduğundan $J \subseteq M$ ve $a_1,...,a_n \in M$ olur. $P \in ass(J)$ aldığımızda bu $P \in Ass\left(R/J\right)$ demektir ve böylece Teorem 3.25 den $depth_R\left(R/J\right) \leq \dim\left(R/P\right)$ ve Yardımcı Teorem 3.16(i) den de

$depth_R\left(R/J\right) = grade_{R/J} M = gradeM - n = depthR - n = d - n$ olur. Özellik 2.3(i) den

biliyoruz ki $htP + \dim R/P \leq \dim R = d$ dir. Böylece,

$htP \le \dim R - \dim R/_P \le d - depth_R\left(R/_J\right) = d - (d-n) = n$ ve Önerme 3.17 den $htP \ge htI = n$ olduğundan $htP = n$ çıkar. P, $ass(J)$ nin herhangi elemanı alınmıştı böylece J düzenli olur. Şimdi Teorem 4.3 ü uygularsak R nin Cohen-Macaulay olmasına ulaşırız.

Sonuç 4.8. Bir regüler lokal halka Cohen-Macaulay dir.

İspat. Sırasıyla Önerme 4.6 ve Teorem 4.7 yi uygularsak sonucu elde ederiz.

Teorem 4.9. R bir değişmeli Noetherian halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:
(i) R Cohen-Macaulay halkasıdır,

(ii) Her $P \in Spec(R)$ için $htP = gradeP$ dir,

(iii) Her M maksimal ideali için $htM = gradeM$ dir,

(iv) Her $P \in Spec(R)$ için R_P Cohen-Macaulay halkasıdır,

(v) Her M maksimal ideali için R_M Cohen-Macaulay halkasıdır.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: R Cohen-Macaulay halkası olduğundan her I öz ideali için $htI = gradeI$ dır. Özel olarak $I = P \in Spec(R)$ alınırsa $htP = gradeP$ olur.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Her maksimal ideal asal ideal olduğundan sonuç hemen çıkar. $(ii) \Rightarrow (iv)$: $P \in Spec(R)$ olsun. $htP = gradeP$ olduğundan Sonuç 3.24 ve Sonuç 3.18 i kullanırsak $htP = gradeP \le grade_{R_P} PR_P \le ht_{R_P} PR_P$ olur ve Örnek 2.3(ii) den $ht_{R_P} PR_P = htP$ elde edilir. Böylece $grade_{R_P} PR_P = ht_{R_P} PR_P$ bulunur. Yani R_P semi-regülerdir. Teorem 4.7 den de R_P Cohen-Macaulay halkası elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (v)$: Bir önceki ispatta $P = M$ alınırsa sonuç elde edilir. $(iv) \Rightarrow (v)$: Her maksimal idealin asal olmasını kullanıldığında açık olarak görülür. $(v) \Rightarrow (ii)$: $P \in Spec(R)$, $n = gradeP$ ve $(a_i)_{i=1}^n$ bir maksimal R-serisi olsun (P içinde). $J = (a_1, \ldots, a_n)$ alalım. Şimdi $P \subseteq Zdv\left(R/_J\right)$ den $P \subseteq \bigcup_{P' \in Ass_R\left(R/_J\right)} P'$ olduğundan Teorem 1.7 kullanılırsa bazı $P' \in Ass_R\left(R/_J\right) = ass(J)$ için $P \subseteq P'$ elde edilir. M maksimal ideal ve $P' \subseteq M$ olsun. Hipotezden R_M Cohen-Macaulay halkasıdır. Yardımcı Teorem 3.23 den $PR_M \subseteq P'R_M$ içinde $\frac{a_1}{1}, \ldots, \frac{a_n}{1} \in R_M$ elemanları R_M-serisidir.

$$ {R_M}\Big/{\left(\frac{a_1}{1},\ldots,\frac{a_n}{1}\right)} = {R_M}\Big/{(a_1,\ldots,a_n)} = {R_M}\Big/{JR_M} \cong \left({R}/{J}\right)_M \text{ olduğundan} $$

$$ P'R_M \in Ass_{R_M}\left(\left({R}/{J}\right)_M\right) = Ass_{R_M}\left({R_M}\Big/{\left(\frac{a_1}{1},\ldots,\frac{a_n}{1}\right)} \right) \text{ elde edilir. Böylece,} $$

$PR_M \subseteq P'R_M \subseteq Zdv_{R_M}\left({R_M}\Big/{\left(\frac{a_1}{1},\ldots,\frac{a_n}{1}\right)} \right)$, ve buradan PR_M içinde $\left(\frac{a_i}{1}\right)_{i=1}^{n}$ elemanları bir maksimal R_M-serisi oluştururlar. Yani $grade_{R_M} PR_M = n$ olur. R_M Cohen-Macaulay olduğundan $htPR_M = n$ olur.

$(ii) \Rightarrow (i)$: I, R nin bir öz ideali olsun. $htI = \min\{htP : P \in ass(I)\}$ ve $gradeI = \min\{gradeP : P \in ass(I)\}$ olduğundan ve (ii) deki kabulümüzden $htI = gradeI$ elde edilir. Bu da R nin Cohen-Macaulay halkası olduğunu gösterir.

Sonuç 4.10. Bir Cohen-Macaulay halkasının bütün kesir halkaları da Cohen-Macaulay dir.

İspat. R değişmeli Noetherian halkasının Cohen-Macaulay olduğunu kabul edelim. Teorem 4.9 dan $\varphi \in Spec(S^{-1}R)$ için $(S^{-1}R)_\varphi$ nin Cohen-Macaulay local halkası olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $\varphi \in Spec(S^{-1}R)$ için $P = \varphi^c$ $(\varphi = PS^{-1}R)$ olacak şekilde $P \in Spec(R)$ vardır ve $P \cap S = \varnothing$ dir. $(S^{-1}R)_\varphi \cong R_P$ ve R_P de Cohen-Macaulay olduğundan $(S^{-1}R)_\varphi$ Cohen-Macaulay halkasıdır.

Sonuç 4.11. Bir değişmeli Artinian halkası Cohen-Macaulay dir.

İspat. Teorem 1.31 den R Noetherian halkadır ve her P asal ideali maksimal idealdir. Yani P asal ideal ise $htP = 0$ dır. Böylece R_P boyutu 0 olan lokal halkadır. Sonuç 3.26 dan $0 \le depthR_P \le \dim R_P = 0$ bulunur yani $depthR_P = \dim R_P = 0$ olur. Böylece R_P lokal halkası semi-regülerdir, Teorem 4.7 den de Cohen-Macaulay dir. Teorem 4.9 dan da R Cohen-Macaulay olur.

Yardımcı Teorem 4.12. (R, M) lokal halkası Cohen-Macaulay olsun. O zaman her $P \in Spec(R)$ için $htP + \dim {R}/{P} = \dim R$ dir.

İspat. $P \in Spec(R)$ olsun. Özellik 2.3(iv) den $htP + \dim R/P \leq \dim R$ dir. $d = \dim R$ ve $n = htP$ alalım. R Cohen-Macaulay olduğundan $htP = gradeP$ dir. $(a_i)_{i=1}^{n}$ P içinde bir maksimal R-serisi olsun ve $J = (a_1,...,a_n)$ olsun. $P \subseteq Zdv(R/J)$ olduğundan en az bir $Q \in ass(J)$ vardır öyle ki $P \subseteq Q$ olur. R Cohen-Macaulay olduğundan J düzenlidir. Buradan $J \subseteq P \subseteq Q$ ve $htP = htQ$ olur. Yani $P = Q$ ve $P \in ass(J) = Ass_R(R/J)$ olur. R Cohen-Macaulay olduğundan, $gradeM = depthR = d$, şu halde Yardımcı Teorem 3.16 dan $depth_R R/J = grade_{R/J} M = d - n$ ve $P \in Ass_R(R/J)$ olduğundan Yardımcı Teorem 3.16 dan $\dim R/P \geq depth_R R/J = d - n = \dim R - htP$ olur. Bulunanları birleştirirsek $htP + \dim R/P = \dim R$ elde edilir.

Teorem 4.13. R değişmeli Noetherian halkası Cohen-Macaulay ve $P_0 \subset P_1 \subset ... \subset P_n$ asal ideal zinciri doygun olsun. O zaman $htP_n = htP_0 + n$ olur.

İspat. İlk önce $P,Q \in Spec(R)$ için $P \subset Q$ doygun zincirini göz önüne alalım. Teorem 4.9 dan R_Q local halkası Cohen-Macaulay dir, ve $PR_Q \subset QR_Q$ zinciri R_Q nun bir doygun asal ideal zinciridir. Buradan, $\dim R_Q/PR_Q = 1$ dir. Yardımcı Teorem 4.12 den de

$ht_{R_Q} PR_Q + 1 = ht_{R_Q} PR_Q + \dim R_Q/PR_Q = \dim R_Q$ ve bu da $htP + 1 = htQ$ ya eşittir. Şimdi $P_0 \subset P_1 \subset ... \subset P_n$ doygun asal ideal zincirini düşünelim. Her $i = 0,1,...,n$ için $htP_i = htP_{i-1} + 1$ olduğundan $htP_n = htP_{n-1} + 1 = ... = htP_0 + n$ elde edilir.

Sonuç 4.14. R bir Cohen-Macaulay halkasının homomorfik görüntüsü olsun, ve $P,Q \in Spec(R)$ idealleri $P \subset Q$ koşulunu sağlasınlar. O zaman P den Q ya giden bütün doygun asal ideallerinin uzunlukları eşittir. Bu uzunluk $ht_{R/P} Q/P$ ye eşit olur.

Teorem 4.15. R değişmeli Noetherian halka ve $a \in Jac(R)$ uzunluğu 1 olan R-serisi alalım. O zaman R nin Cohen-Macaulay halkası olması için gerek ve yeterli koşul $R/(a)$ nın Cohen-Macaulay halkası olmasıdır.

İspat. $a \in Jac(R)$ olduğundan R nin her maksimal ideali a yı kapsar, ve $R/(a)$ nın her $M/(a)$ maksimal ideali için M, R nin maksimal idealidir. Örnek 2.15 den her maksimal ideal için $ht_{R/(a)} M/(a) = ht_R M - 1$ olduğunu ve Yardımcı Teorem 3.16(ii) den

$grade_{R/(a)} M/(a) = grade_R M - 1$ olduğunu biliyoruz. Buradan da, $ht_R M = grade_R M$ dir ancak ve ancak $ht_{R/(a)} M/(a) = grade_{R/(a)} M/(a)$ elde edilir. Böylece Teorem 4.9 uygulanırsa istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.16. R değişmeli Noetherian halkası Cohen-Macaulay ve $(a_i)_{i=1}^n$ bir R-serisi olsun. O zaman $R/(a_1,\ldots,a_n)$ de bir Cohen-Macaulay halkasıdır.

İspat. n üzerinden tümevarım uygulanırsa sonuç elde edilir. $n=1$ için Teorem 4.15 den ifade doğru olur. Şimdi n den küçük bütün doğal sayılar için ifadenin doğru olduğunu kabul edelim. $(a_i)_{i=1}^n$ bir R-serisi olsun. $\overline{R} = R/(a_1,\ldots,a_{n-1})$ ve $\overline{I} = (a_1,\ldots,a_n)/(a_1,\ldots,a_{n-1})$ alındığında $\overline{R}/\overline{I} \cong R/(a_1,\ldots,a_n)$ olacağından $\overline{I} = \overline{a_n R}$ düşünüldüğünde Teorem 4.15 uygulanırsa sonuç elde edilir.

Sonuç 4.17. R değişmeli Noetherian halka olsun. O zaman $R[[x_1,\ldots,x_n]]$ kuvvet serisi Cohen-Macaulay halkasıdır ancak ve ancak R Cohen-Macaulay halkasıdır.

İspat. Teorem 1.36 dan $R[[x_1,\ldots,x_n]]$ halkası Noetherian dır. $n>1$ için $R[[x_1,\ldots,x_n]] \cong R[[x_1,\ldots,x_{n-1}]][[x_n]]$ olduğundan ispatı sadece $n=1$ için yapmak yeterli olacaktır. $x_1 = x$ alalım. $h: R[[x]] \to R$ tasvirini $h\left(\sum_{i=0}^{\infty} r_i x^i\right) = r_0$ olarak tanımladığımızda çekirdeği $xR[[x]]$ olan epimorfizma olur. Buradan $R \cong R[[x]]/xR[[x]]$ elde edilir. $x, R[[x]]$ in sıfır böleni olmadığından x $R[[x]]$-serisidir. Ayrıca, her $f \in R[[x]]$ için $1-xf$ birimsel elemandır. Böylece $x \in Jac(R[[x]])$ olur. Teorem 4.15 i uygularsak ispat tamamlanmış olur.

Yardımcı Teorem 4.18. R değişmeli Noetherian halka ve x, R de bir bilinmeyen olsun. $(a_i)_{i=1}^n$ bir R-serisi olsun. O zaman $(a_i)_{i=1}^n$ yi $R[x]$ deki sabit polinomlar olarak düşündüğümüzde $R[x]$-serisi olur.

İspat. a_1, R de sıfır bölen olmadığından $R[x]$ de de sıfır bölen değildir. Şimdi $j \in N, 2 \le j \le n$ kabul edelim. a_j nin $R[x] / (a_1, \dots, a_{j-1})R[x]$, $R[x]$-modülünde sıfır bölen olmadığını gösterelim. R bir idealini $J = a_1 R + \dots + a_{j-1} R$ olarak alalım. Özellik 1.3 den $J^e = a_1 R[x] + \dots + a_{j-1} R[x]$ olur. $\bar{\eta}$ izomorfizamasını düşünürsek $\bar{\eta}(a_j + J^e) = a_j + J$ elde edilir. a_j R-modülü, R/J de sıfır bölen olmadığından $a_j + J$ de R/J halkasında sıfır bölen değildir. Böylece $R/J[x]$ polinom halkasında da sıfır bölen değildir. Buradan da $a_j + J^e$ de $R[x]/J^e$ de sıfır bölen değildir. Son olarak $a_1 R + \dots + a_n R$, R halkasında öz ideal olduğundan $\left(R/(a_1 R + \dots + a_n R)\right)[x]$ aşikar halka değildir. Buradan da $a_1 R[x] + \dots + a_n R[x]$, $R[x]$ halkasının öz ideali olur.

Önerme 4.19. R değişmeli halka, x de R de bir bilinmeyen olsun. $R[x]$ de $\varphi_0 \cap R = \varphi_1 \cap R = \varphi_2 \cap R$ koşulunu sağlayan bir $\varphi_0 \subset \varphi_1 \subset \varphi_2$ asal ideal zinciri bulunamaz.

İspat. Böyle bir zincirin bulunduğunu kabul edelim ve $P = \varphi_0 \cap R = \varphi_1 \cap R = \varphi_2 \cap R$ olsun. O zaman her $i = 0,1,2$ için $PR[x] \subseteq \varphi_i$ ve Özellik 1.3 den $PR[x] \in Spec(R[x])$ olduğunu biliyoruz. $R[x]/PR[x]$ tamlık bölgesinde, $\varphi_0/PR[x] \subset \varphi_1/PR[x] \subset \varphi_2/PR[x]$ zinciri ayrık asal ideallerin zinciridir. $\phi : R/P \xrightarrow{\subseteq} (R/P)[x] \xrightarrow{\xi} R[x]/PR[x]$ bileşke halka homomorfizmasında ξ ,$\bar{\eta} : R[x]/PR[x] \to (R/P)[x]$ halka izomorfizmasının tersi olsun. ϕ altında her $i = 0,1,2$ için $\varphi_i/PR[x]$ in ters görüntüsü R/P nin sıfır idealine gider, biz biliyoruz ki $\xi^{-1}\left(\varphi_0/PR[x]\right) \subset \xi^{-1}\left(\varphi_1/PR[x]\right) \subset \xi^{-1}\left(\varphi_2/PR[x]\right)$ zinciri ayrık asal ideallerden oluşur. Bu da bir çelişkidir.

Sonuç 4.20. R değişmeli halka, x de R de bir bilinmeyen olsun. $R \to R[x]$ doğal homomorfizmasında genişleme ve büzülme notasyonlarını kullanacağız. P , R nin yüksekliği n olan bir asal ideali olsun. O zaman $n \le ht_{R[x]} PR[x] \le 2n$ dir. Aynı zamanda, $\vartheta^c = P$ ve $\vartheta = \vartheta^{ce} = PR[x]$ olacak şekilde $\vartheta \in Spec(R[x])$ var ise $n + 1 \le ht_{R[x]} \vartheta \le 2n + 1$ olur.

İspat. $htP = n$ ve $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n = P$ bir asal ideal zinciri olsun. Özellik 1.3 den $P_0^e \subset P_1^e \subset \ldots \subset P_n^e = \vartheta$, $R[x]$ de bir asal ideal zinciridir. Böylece $ht_{R[x]}PR[x] \geq n$ ve $ht_{R[x]}\vartheta \geq n+1$ dir. $ht_{R[x]}PR[x] = r$ olduğunu kabul edelim. O zaman $R[x]$ halkasında $\varphi_0 \subset \varphi_1 \subset \ldots \subset \varphi_{r-1} \subset \varphi_r = PR[x]$ olacak şekilde asal ideal zinciri vardır. $\varphi_r^c = P^{ec} = P$ olduğundan $\varphi_{r-1}^c \subset \varphi_r^c = P$ dir(aksi takdirde $\varphi_{r-1}^c = P$ ve $P^e = \varphi_{r-1}^{ce} \subseteq \varphi_{r-1}$ olurdu bu da bir çelişkidir.). Böylece $\varphi_0^c \subset \varphi_1^c \subset \ldots \subset \varphi_{r-1}^c \subset \varphi_r^c = P$ olur. Önerme 4.19 dan $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{r-1}$ ideallerinin üçünün ters görüntüleri aynı olamaz. Böylece $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{r-1}$ idealleri arasında $\frac{1}{2}r$ farklı ideal vardır. Buradan da $ht_R\varphi_{r-1}^c \geq \frac{1}{2}r - 1$, $n = ht_R P \geq \frac{1}{2}r$ elde edilir dolayısıyla da $r \leq 2n$ olur. Yani sonuç olarak $n \leq ht_{R[x]}PR[x] \leq 2n$ bulunur ve benzer yolla da $n+1 \leq ht_{R[x]}\vartheta \leq 2n+1$ bulunur.

Yardımcı Teorem 4.21. R değişmeli, Noetherian ve tamlık bölgesi, x de R de bir bilinmeyen olsun. $R \to R[x]$ doğal homomorfizmasında genişleme ve büzülme notasyonlarını kullanacağız. $P \in Spec(R)$ ve $htP = 1$ alındığında $ht_{R[x]}PR[x] = 1$ olur.

İspat. $htP = 1$ olduğundan en az bir $a \in P$ vardır öyle ki $a \neq 0$ dır. Şimdi biz $PR[x] \in Min(aR[x])$ olduğunu göstereceğiz. $\varphi \in Spec(R[x])$, $PR[x] \supseteq \varphi \supseteq aR[x]$ olsun. O zaman $P = P^{ec} \supseteq \varphi^c \supseteq aR$ olur ve $P \in Min(aR)$ olduğundan $P = \varphi^c$ olmalıdır. Böylece $PR[x] = P^e = \varphi^{ce} \subseteq \varphi$ dan $PR[x] = \varphi$ olur. Yani $PR[x] \in Min(aR[x])$ olur. Teorem 2.6 dan da $ht_{R[x]}PR[x] = 1$ bulunur.

Teorem 4.22. R değişmeli Noetherian bir halka, x de R de bir bilinmeyen olsun. $R \to R[x]$ doğal homomorfizmasında genişleme ve büzülme notasyonlarını kullanacağız. P , R nin yüksekliği n olan bir asal ideali olsun. O zaman $ht_{R[x]}PR[x] = n$ dir. Ayrıca $\varphi^c = P$ ve $\varphi \supset \varphi^{ce} = PR[x]$ olacak şekilde $\varphi \in Spec(R[x])$ var ise $ht_{R[x]}\varphi = n+1$ dir.

İspat. Bu teoremi ispatlarken iki iddiayı tümevarımla ispatlayacağız. $n = 0$ için $P \in Min(0)$ dır. $PR[x] \supseteq \varphi_0$ olacak şekilde $\varphi_0 \in Spec(R[x])$ alalım. O zaman $P = P^{ec} \supseteq \varphi_0^c$ ve $P \in Min(0)$ olduğundan $\varphi_0^c = P$ olur. Böylece $PR[x] = P^e = \varphi_0^{ce} \subseteq \varphi$ ve buradan da $PR[x] = \varphi_0$ ve $ht_{R[x]}PR[x] = 0$ elde edilir. Yine $n = 0$ durumunda Sonuç 4.20 den $ht_{R[x]}\varphi \geq 1$

dir. $\varphi^c = P$ ve $P \in Min(R)$ olduğundan φ içerisindeki $R[x]$ in herhangi bir asal idealinin büzülmesi P ye eşit olmalıdır. Önerme 4.19 dan den büzülmesi P olan üç tane ayrık asal ideal olmadığını biliyoruz, böylece $ht_{R[x]}\varphi \leq 1$ olur. Sonuç olarak da $ht_{R[x]}\varphi = 1$ elde edilir. Şimdi tümevarımsal olarak n den küçük pozitif tamsayılar için iki iddianın da doğru olduğunu kabul edelim. $ht_{R[x]}PR[x] > n$ olsun. O zaman $P^e \supset \varphi_0$ ve $ht_{R[x]}\varphi_0 = n$ olacak şekilde en az bir $\varphi_0 \in Spec(R[x])$ vardır. Şu halde $P = P^{ec} \supseteq \varphi_0^c$ ve dahası $\varphi_0^{ce} \subseteq \varphi_0$ olduğundan $P \neq \varphi_0^c$ olur. Yani $P \supset \varphi_0^c$ ve $ht_R \varphi_0^c < n$ dir. Tümevarım kabulümüzden $ht_R \varphi_0^c = n-1$ ve $\varphi_0^{ce} \subset \varphi_0$ olmalı. $P_0 = \varphi_0^c$ olsun. Unutmayalım ki $ht_{R/P_0} P/P_0 = 1$ ve $P_0^e \subset \varphi_0 \subset P^e$ dir. $R[x]/P_0R[x]$ halkasında asal ideallerin bir zinciri $P_0R[x]/P_0R[x] \subset \varphi_0/P_0R[x] \subset PR[x]/P_0R[x]$ olsun. Şimdi $\bar{\eta} : R[x]/P_0^e \to (R/P_0)[x]$ izomorfizmasını kullanarak $(R/P_0)[x]$ tamlık bölgesinin sıfır ideali ile $(P/P_0)(R/P_0)[x]$ asal ideali arasında bir asal ideal olduğu görünür. Bu da Yardımcı Teorem 4.21 ile çelişir. Böylece $ht_{R[x]}PR[x] \leq n$ olmalı ve Sonuç 4.20 den $ht_{R[x]}PR[x] = n$ bulunur. Şimdi $ht_{R[x]}\varphi = n+1$ olduğunu bulmalıyız. Sonuç 4.20 den $ht_{R[x]}\varphi \geq n+1$ dir. $\varphi_1 \subset \varphi$ olacak şekilde $\varphi_1 \in Spec(R[x])$ alalım. $\varphi_1^c \subset \varphi^c = P$ veya $\varphi_1^c = P$ dir. $\varphi_1^c \subset \varphi^c = P$ ise tümevarım kabulümüzden $ht_{R[x]}\varphi_1 \leq n$ dir. $\varphi_1^c = P$ ise o zaman $P^{ec} = \varphi_1^c = \varphi^c = P$ dir ve $P^e = \varphi_1^{ce} \subseteq \varphi_1 \subset \varphi$ olduğundan Önerme 4.19 dan $P^e = \varphi_1$ elde edilir. Biz $ht_{R[x]}P^e = n$ olduğunu göstermiştik. Böylece $ht_{R[x]}\varphi_1 \leq n$ bulunur. $\varphi_1 \subset \varphi$ olduğundan $ht_{R[x]}\varphi \leq n+1$ olur ve böylece $ht_{R[x]}\varphi = n+1$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.23. R değişmeli bir halka, x de R de bir bilinmeyen olsun. $R[x]$ in bir M, maksimal ideali sadece sıfır bölenlerden oluşamaz.

İspat. $M \subset Zdv(R[x])$ olsun. $x \notin Zdv(R[x])$ dir ve böylece $x \notin M$ olur. Buradan $M + xR[x] = R[x]$ olduğundan bir $f \in M$, $g \in R[x]$ için $f + xg = 1$ dir. Buradan $f = 1 - xg$ elde edilir. Böylece $f \notin Zdv(R[x])$ bulunur ki bu bir çelişkidir.

Teorem 4.24. R değişmeli Noetherian bir halka olsun. $x_1, \ldots x_n$ bilinmeyenler olmak üzere $R[x_1, \ldots, x_n]$ Cohen-Macaulay dir ancak ve ancak R Cohen-Macaulay dir.

İspat. Teorem 1.35 den $R[x_1,...,x_n]$ halkasının Noetherian olduğunu biliyoruz. $n>1$ için $R[x_1,...,x_n]=R[x_1,...,x_{n-1}][x_n]$ olduğundan teoremi $n=1$ için ispatlamak yeterli olacaktır.

$(\Rightarrow)$: $R[x]$ Cohen-Macaulay olsun. $\{x\}$ bir R-serisi ve $R[x]/(x)\cong R$ olduğundan Sonuç 4.16 dan R halkası Cohen-Macaulay bulunur.

$(\Leftarrow)$: R Cohen-Macaulay olsun. $R\to R[x]$ doğal halka homomorfizmasında genişleme ve büzülmeyi kullanalım. M, $R[x]$ in maksimal ideali olmak üzere $P=\mathrm{M}\cap R=\mathrm{M}^c$ olsun. $gradeP=n$ alınırsa R Cohen-Macaulay olduğundan $htP=n$ olur. Özellik 1.3 den den P^e maksimal değildir ve $P^e\subset\mathrm{M}$ dir. Teorem 4.22 den de $ht_{R[x]}\mathrm{M}=n+1$ olur. $gradeP=n$ olduğundan uzunluğu n olan P de bir $(a_i)_{i=1}^n$ R-serisi vardır. Yardımcı Teorem 4.18 den $(a_i)_{i=1}^n$ P^e de bir $R[x]$-serisidir ($P^e\subset\mathrm{M}$ olduğunu unutmayalım).

$\mathrm{M}/(a_1,...,a_n)R[x]$, $R[x]/(a_1,...,a_n)R[x]$ halkasının bir maksimal idealidir. Özellik 1.3 den bu halka $\left(R/(a_1,...,a_n)\right)[x]$ halkasına izomorftur ve Yardımcı Teorem 4.23 den de $\mathrm{M}/(a_1,...,a_n)R[x]$ sıfır bölenlerden oluşmuyordur. Böylece $grade_{R[x]}\mathrm{M}\geq n+1$ dir. $grade_{R[x]}\mathrm{M}\leq ht_{R[x]}\mathrm{M}=n+1$ olduğundan $grade_{R[x]}\mathrm{M}=ht_{R[x]}\mathrm{M}$ bulunur. M herhangi bir maksimal ideal olduğundan her maksimal ideal için bulunan ifade doğrudur. Teorem 4.9 dan da $R[x]$ Cohen-Macaulay olur.

Sonuç 4.25. k cisim ise $k[x_1,...,x_n]$ polinomlar halkası Cohen-Macaulay dir.

İspat. k değişmeli Noetherian (aynı zamanda Artinian) halkadır. Yardımcı Teorem 4.11 den k Cohen-Macaulay dir. Şimdi de Teorem 4.24 ü kullanırsak $x_1,...x_n$ bilinmeyenler olmak üzere $k[x_1,...,x_n]$ polinomlar halkası Cohen-Macaulay olur.

KAYNAKLAR

Atiyah, M. F. ve Macdonald, I. G., (1969), Introduction to Commutative Algebra, Adison-Wesley, Reading, Massachusetts.

Cohen, I. S., (1946), "On the structure and ideal theory of complete local rings", Trans. Amer. Math. Soc., 59:54-106.

Northcott, D. G., (1953), Ideal Theory, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics 42, Cambridge University Pres.

Sharp, R. Y., (1990), Steps in Commutative Algebra, London Mathematical Society Students Text 19, Cambridge University Press.

Zariski, O. ve Samuel, P., (1975), Commutative Algebra Vol. I-II, Graduate Texts in Mathematics 28, Springer, Berlin.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	29.07.1978	
Doğum yeri	Münih	
Lise	1991-1994	Çankaya Anadolu Lisesi
Lisans	1995-2000	Hacettepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2003-	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Çalıştığı kurum(lar)

2004-Devam ediyor YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi