67838

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

OPERATÖR KATSAYILI STURM-LIOUVILLE DENKLEMİNİN GREEN FONKSİYONU VE AYRILMA PROBLEMİNİN İNCELENMESİ

Zerrin OER

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi: 28 Nisan 1997
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU (Y.T.Ü.)
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Metin ARIK (B.Ü.)
: Prof. Dr. Mahir HASANOV (İ.T.Ü.)

ÜNİVERSİTE YAYIN NO:YTÜ.EN.DR.-97.0334/ENSTİTÜ YAYIN NO:EN.FBE-97.012
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ BASIM-YAYIN MERKEZİ / İSTANBUL-1997

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Sayı : **EN.FBE-97.012**

Oer, Zerrin.
Operatör Katsayılı Sturm-Liouville Denkleminin Green Fonksiyonu ve Ayrılma Probleminin İncelenmesi / Zerrin Oer.

Kaynakça var.

ISBN 975-461-041-X

Y.T.Ü. Kütüphane ve Dokümantasyon Merkezi Sayı : **YTÜ.EN.DR-97.0334**

Baskı:Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayın Merkezi Matbaası-İstanbul
Tel : (0212) 259 70 70/2252

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında büyük bir özveriyle bana yardımcı olan, destek ve yol göstericiliğini esirgemeyen hocam Sayın Prof.Dr.Mehmet BAYRAMOĞLU' na en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca destek ve yardımlarından dolayı Sayın Prof.Yaşar ÖZDEMİR' e. Sayın Prof.Tahir ŞİŞMAN' a. Sayın Prof.Akın TAŞDİZEN' e, Sayın Prof.Dr. Nizamettin ŞİRİNOĞLU' na, Arş.Gör. Serpil ÖZTÜRK' e, Işın DEMİRİZ' e ve manevi desteklerinden dolayı Sayın Meşkure SARGUT' a, Sayın Cemalnur SARGUT' a ve aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

H ayrılabilir Hilbert uzayı olsun. $a < x < b$ $(-\infty \leq a < x < b \leq \infty)$ aralığında tanımlanmış değerleri H a ait kuvvetli ölçülebilir ve

$$\int_a^b \|f(x)\|_H^2 dx < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar kümesini $H_1 = L_2(a, b; H)$ ile gösterelim. H_1 e ait $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının iç çarpımını

$$(f, g)_1 = \int_a^b (f(x), g(x))_H dx$$

formülü ile tanımlarsak H_1 bir ayrılabilir Hilbert uzayı oluşturur.

Birinci bölümde $H_1 = L_2(0, \infty; H)$ uzayında

$$-y'' + Q(x)y$$

Sturm-Liouville diferansiyel ifadesi ve h kompleks sayı olmak üzere

$$y'(0) - hy(0) = 0$$

sınır koşulu ile oluşturulan L operatörünün Green fonksiyonu incelenmiştir.

İkinci bölümde ise $L_2(-\infty, \infty; H)$ uzayında

$$-y'' + Q(x)y$$

ifadesi ile oluşturulan operatör için ayrılma teoremi ispatlanmıştır. Her iki bölümde $Q(x)$, x in herbir değerinde H da dönüşüm yapan kendine eş, alttan sınırlı ve tersi tam sürekli operatördür.

SUMMARY

Let H be seperable Hilbert space. Let us represent the set of functions by $H_1 = L_2(a, b; H)$ which is defined in the interval $a < x < b(-\infty \leq a < x < b \leq \infty)$ whose values belong to H, strongly measurable and satisfying the condition

$$\int_a^b \|f(x)\|_H^2 dx < \infty$$

If we define the inner product of $f(x)$ and $g(x)$ functions belonging to H_1, by the formula

$$(f, g)_1 = \int_a^b (f(x), g(x))_H dx$$

H_1 forms a seperable Hilbert space.

In the first chapter, Green function of L operator formed by

$$-y'' + Q(x)y$$

Strum-Liouville differantial expression in $H_1 = L_2(0, \infty; H)$ space and when h is complex number,

$$y'(0) - hy(0) = 0$$

boundary condition is studied.

In the second chapter, seperation theorem for the operator formed by

$$-y'' + Q(x)y$$

expression in $L_2(-\infty, \infty; H)$ space has been proved.

Also in both chapter, $Q(x)$ is an operator which transforms at H in each value of x, is self adjoint, lower bounded and its inverse is completely continous.

1.0 GİRİŞ

Bu çalışmada kendine eş operatör katsayılı Sturm-Liouville operatörünün Green Fonksiyonunu ve ayrılma problemi incelenecektir. Sözü edilen problemler iki bölümde verilecektir.

H ayrılabilir Hilbert uzayı olsun. $a < x < b \quad (-\infty \leq a < x < b \leq \infty)$ aralığında tanımlanmış değerleri H a ait kuvvetli ölçülebilir ve

$$\int_a^b \|f(x)\|_H^2 dx < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar kümesini $H_1 = L_2(a, b; H)$ ile gösterelim. H_1 e ait $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının iç çarpımını

$$(f, g)_1 = \int_a^b (f(x), g(x))_H dx$$

formülü ile tanımlarsak H_1 bir ayrılabilir Hilbert uzayı oluşturur.

Birinci bölümde $H_1 = L_2(0, \infty; H)$ uzayında

$$-y'' + Q(x)y \tag{1.1}$$

Sturm-Liouville diferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0 \tag{1.2}$$

sınır koşulu ile oluşturulan L operatörünün Green fonksiyonu incelenmiştir. Burada $Q(x)$, x in $[0, \infty)$ a ait her bir değerinde H da kendine eş alttan sınırlı operatör, h ise herhangi kompleks sayıdır. $Q(x)$ üzerine eklenen koşullar, L operatörü ve bunun Green fonksiyonunun tanımı tezin birinci bölümünde gösterilmiştir.

(1.1) ifadesi ile $L_2(-\infty, \infty; H)$ uzayında oluşturulan operatörün Green fonksiyonu ilk olarak 1968 de B.M.Levitan (Levitan, 1968) tarafından incelenmiştir. 1969 yılında $2n$. mertebeden operatör katsayılı

$$(-1)y^{(2n)} + \sum_{j=2}^{2n} Q_j(x) y^{(2n-j)} \qquad , \qquad -\infty < x < \infty$$

diferansiyel ifadesi ile oluşturulan operatörün Green fonksiyonu ve özdeğerlerinin asimptotik ifadesi M.Bayramoğlu (Bayramoğlu. 1971) tarafından incelenmiştir. (1.1) ifadesinde $Q(x)$ katsayısının H da normal operatör olma halini E.G.Kleyman (Kleyman. 1977) ele almıştır. Daha sonra bu konu ile ilgili farklı diferansiyel ifadeler pek çok matematikçi tarafından incelenmiştir. (Duşdurov. 1982). Tezin bu kısmında ilk olarak sınır koşulunda kompleks sayı bulunan yani kendine eş olmayan hal incelenecektir.

İkinci bölümde $L_2(-\infty.\infty:H)$ uzayında (1.1) ifadesi ile oluşturulan operatör için ayrılma teoremi ispatlanmıştır. Ayrılma dediğimizde. $Q(x)$ operatör fonksiyonu hangi koşulları sağladığında

$$y(x) \in L_2(-\infty.\infty:H) \quad \text{ve} \quad -y'' + Q(x)y \in L_2(-\infty.\infty:H)$$

iken

$$-y'' \in L_2(-\infty.\infty:H) \quad . \quad Q(x)y(x) \in L_2(-\infty.\infty:H)$$

olduğu anlaşılacaktır.

Bu problem skaler Sturm-Liouville problemi için ilk olarak ingiliz matematikçiler W.N.Everitt ve M.Giertz nin çeşitli makalelerinde (Everitt et. al. 1973) (Everitt et. al. 1977) incelenmiştir.

Operatör katsayılı diferansiyel ifadelerle oluşturulan operatör için ayrılma problemi ile Alma-Atada M. Otelbayev ve öğrencileri, Düşenbede K. Boymatov ve öğrencileri. Baküde M. Gasımov, F. Maksudov. M. Bayramoğlu ve öğrencileri uğraşmışlardır. Diğer bilim merkezlerinde de bu konu ile çalışmalar yapılmıştır.

2.0 YARI EKSENDE VERİLMİŞ OPERTÖR KATSAYILI STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN GREEN FONKSİYONU

2.1.ÖN BİLGİLER

H ayrılabilir Hilbert uzayı olsun. Eğer x in J $(J = (a,b) - \infty \leq a < x < b \leq \infty)$ aralığından alınmış her bir değerine H dan bir $f(x)$ elemanı karşılık gelirse o zaman J de $f(x)$ eleman veya vektör değerli fonksiyon verilmiştir denir. Eğer J den alınmış her bir x e H da dönüşüm yapan bir $A(x)$ operatörü karşılık getirilmişse o zaman J de operatör değerli $A(x)$ fonksiyonu verilmiştir denir. Vektör (operatör) değerli fonksiyonların limiti, sürekliliği, türevi ve integrali v.s. skaler değerli fonksiyonların (matris değerli fonksiyonların) tanımlarına benzer şekildedir. (Kato, 1980)

$H_1 = L_2(J,H)$ ile J aralığında tanımlanmış değerleri H a ait Bochner anlamında kuvvetli ölçülebilir (Yosida, 1980) ve

$$\int_J \|f(x)\|^2 dx < \infty$$

koşulunu sağlayan $f(x)$ fonksiyonlar kümesi olsun. H_1 e ait $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının skaler çarpımını

$$(f,g)_1 = \int_J (f(x), g(x)) dx$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $(f,g)_1$ H daki skaler çarpımı gösterir. Bu şekilde tanımlanmış bir uzay $(\ )_{H_1}$ skaler çarpımı ile bir Hilbert uzayı olur. H nın ayrılabilirliğinden dolayı H_1 uzayının da ayrılabilirliği ispatlanır.

A ayrılabilir H Hilbert uzayında tanım kümesi $\mathcal{D}(A)$ olan kendine eş operatör olsun. Eğer $f \in \mathcal{D}(A)$ iken

$$(Af,f) \geq \gamma(f,f) \qquad ((Af,f) \leq \beta(f,f))$$

koşulunu sağlayan reel γ (reel β) sayısı varsa A ya alttan (üstten) sınırlı operatör denir. Özel olarak $\gamma > 0$ $(\beta < 0)$ ise A operatörüne pozitif (negatif) tanımlı operatör denir.

Eğer $f \in D(A)$

$$(Af, f) \geq 0 \qquad ((Af, f) \leq 0)$$

ise A operatörüne pozitif (negatif) operatör denir.

$A = A^*$ alttan sınırlı ve tersi A^{-1} tam sürekli (kompakt) operatör olsun.

A^{-1} in özdeğerlerini

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq ... \geq \mu_n \geq ... \qquad (\lim_{n \to \infty} \mu_n = 0)$$

ve karşılık gelen ortonormal özvektörlerini

$$e_1, e_2, ..., e_n, ...$$

ile gösterelim.

Eğer $A = B^{-1}$ ise o zaman B operatörünün özdeğerleri

$$\lambda_1 = \frac{1}{\mu_1}, \lambda_2 = \frac{1}{\mu_2}, ..., \lambda_n = \frac{1}{\mu_n}, ...$$

özvektörleri ise

$$e_1, e_2, ..., e_n, ...$$

dir. Yani A operatörünün spektrumu sadece

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \leq ... \qquad (\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty)$$

özdeğerlerinden ibaret olacaktır. Bundan dolayı alttan sınırlı kendine eş ve tersi tam sürekli olan operatöre saf ayrık spektruma sahip operatör denir. Şimdi $A = A^*$ ve saf ayrık spektruma sahip olsun. A nın özdeğerlerini

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n ...$$

karşılık gelen ortonormal özvektörlerini ise

$$e_1, e_2, ..., e_n, ...$$

ile gösterelim. Bu takdirde spektral açılım teoremine göre (Mıkusınskı et. al, 1990) keyfi $x \in H$ için

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$$

ve $x \in \mathcal{D}(A)$ olduğunda

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k) e_k$$

özvektörlere göre açılım formülleri doğrudur. Bu açılım formülleri sembolik olarak

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} (., e_k) e_k \tag{2.1}$$

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (., e_k) e_k \tag{2.2}$$

şeklinde yazılır. Burada I, H uzayında birim operatördür ve son iki ifadeye sırası ile birimin ve A operatörünün spektral açılımı denir. $f(\lambda)$ bütün eksende tanımlanmış sürekli fonksiyon olsun. Tanıma göre $f(A)$ operatörü (2.2) formülü yardımı ile

$$f(A) = \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda_k)(., e_k) e_k \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır. $f(A)$ operatörünün tanım kümesi

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(\lambda_k)|^2 |(x, e_k)|^2 < \infty \tag{2.4}$$

koşulunu sağlayan $x \in H$ elemanlarından oluşur.

$f(A)$ nın $x \in \mathcal{D}(f(A))$ etkisi, yani $f(A)x$ elemanı

$$f(A)x = \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda_k)(x, e_k) e_k$$

şeklinde gösterilebilir. Eğer $f(x)$ fonksiyonu sınırlı bir fonksiyon ise o zaman $f(A)$ operatörüde sınırlı olur ve $f(A)$ nın normu

$$\|f(A)\| = \sup_{\lambda \in S} |f(\lambda)|$$

formülü ile bulunur. Burada S kümesi A operatörünün spektrumudur:

$$S = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...\}$$

Örneğin; $e^{-\lambda}$ fonksiyonuna karşılık gelen e^{-A} operatörü,

$$e^{-A} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k} (., e_k) e_k$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\lambda_k \geq 0$ ise o zaman

$$\epsilon^{-\lambda_k} \leq 1$$

ve bundan dolayı

$$\epsilon^{-A} \leq I$$

olur.

A, H ayrılabilir Hilbert uzayında tam sürekli operatör olsun. O zaman A^*A tamsürekli pozitif operatördür. A^*A nın özdeğerlerini

$$s_1^2 \geq s_2^2 \geq ...s_n^2 \geq ... \qquad (s_n \geq 0)$$

ile gösterelim. $s_1, s_2, ..., s_n, ...$ sayılarına A operatörünün s sayıları denir. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n \tag{2.5}$$

serisi yakınsak ise A operatörüne çekirdek operatör.

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2 \tag{2.6}$$

serisi yakınsak ise A operatörüne Hilbert-Schmidt $(H-S)$ operatörü denir. (2.5) serisinin toplamını $\|A\|_1$ ile (2.6) serisinin toplamını $\|A\|_2$ ile gösterelim:

$$\|A\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \qquad \|A\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\|A\|_1$ sayısına A operatörünün çekirdek normu, $\|A\|_2$ ye ise A nın Hilbert-Schmidt $(H-S)$ normu denir.

Çekirdek operatörler kümesi σ_1 ile, $(H-S)$ operatörler kümesi σ_2 ile gösterilir. σ_1 ve σ_2 kümeleri operatörlerin toplamı operatörlerle sayının çarpımı işlemine göre lineer uzay oluşturur. σ_1 ve σ_2 lineer uzaylarında A elemanının normu sırasıyla $\|A\|_1$ ve $\|A\|_2$ ile tanımlanırsa σ_1 ve σ_2 uzayları Banach uzayı oluşturur. Her zaman

$$\sigma_1 \subset \sigma_2$$

sağlanır. H da tanımlanmış bütün lineer sınırlı operatörler kümesi $\mathcal{B}(H)$ olsun $\mathcal{B}(H)$ kümesi iki operatörün toplamı, operatörlerle sayının çarpımı ve operatörün normu işlemlerine göre bir Banach uzayı oluşturur. Eğer

$$A \in \mathcal{B}(H) \quad , \quad B \in \sigma_1$$

ise o zaman AB , $BA \in \sigma_1$ ve

$$\|AB\|_1 \leq \|A\|\|B\|_1 \quad , \quad \|BA\|_1 \leq \|A\|\|B\|_1$$

olur. Aynı şekilde eğer

$$A \in \mathcal{B}(H) \quad B \in \sigma_2$$

ise o zaman AB , $BA \in \sigma_2$ ve

$$\|AB\|_2 \leq \|A\|\|B\|_2 \quad , \quad \|BA\|_2 \leq \|A\|\|B\|_2$$

olur. $A \geq 0$, $A \in \sigma_2$ ise o zaman A nın $s-$sayıları A nın özdeğerleri olur.

2.2. YARI EKSENDE VERİLMİŞ OPERATÖR KATSAYILI STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN GREEN FONKSİYONUNUN İNCELENMESİ

Bu bölümde

$$-y'' + Q(x)y + \mu y \tag{2.7}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0 \tag{2.8}$$

(2.7) diferansiyel ifadesi ve (2.8) sınır koşulu ile oluşturulan L operatörünün Green fonksiyonunu bulacağız. Burada $Q(x)$ x in $[0,\infty)$ aralığından alınmış her bir değerinde H Hilbert uzayında dönüşüm yapan operatör. h kompleks sayı. $\mu > 0$ reel sayıdır.

1-) $Q(x) = Q^*(x)$ operatörlerinin tanım kümesi olan $\mathcal{D}$. x den bağımsız ve $\overline{\mathcal{D}} = H$ olsun.

2-) $f \in \mathcal{D}$ için $(Q(x)f, f) \geq (f, f)$ ve $Q^{-1}(x)$ H da tam sürekli olsun.

3-) $|x - s| \leq 1$ olduğunda

$$\|[Q(s) - Q(x)]Q^{-a}(x)\| \leq c|x - s| \qquad 0 < a < \frac{3}{2}$$

olsun. (c=sbt. > 0)

4-) $|x - s| \leq 1$ olduğunda

$$\|Q^{1/2}(x)Q^{-1/2}(s)\| \leq c$$

olsun.

5-) $F(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_j(x))^{3/2}}$. $\int_0^\infty F(x)dx < \infty$ olsun. Burada, $\alpha_1(x) \leq \alpha_2(x) \leq \ldots \leq \alpha_n(x) \leq \ldots$ $Q(x)$ in özdeğerleridir.

$\mathcal{D}(L)$ ile $[0,\infty)$ aralığında tanımlanmış değerleri $\mathcal{D}$ ye ait ve aşağıdaki özelliklere sahip $y(x)$ fonksiyonlar kümesini gösterelim.

1-) $y(x)$ ve $y'(x)$ $[0,\infty)$ aralığının her sonlu aralığında mutlak süreklidir.

2-) $y'(0) - hy(0) = 0$

3-) $-y''(x) + Q(x)y(x) \in L_2(0,\infty; H)$

Tanım kümesi $\mathcal{D}(L)$ ve $y(x) \in \mathcal{D}(L)$ olmak üzere

$$Ly = -y'' + Q(x)y$$

ifadesi ile tanımlanan operatörü L ile gösterelim. L ye (2.7) ifadesi ve (2.8) koşulu ile oluşturulan operatör diyelim.
Aşağıdaki özellikleri sağlayan $G(x, s, \mu)$ fonksiyonuna (2.7) ve (2.8) ile oluşturulan L operatörünün Green fonksiyonu diyeceğiz.

1-) $G(x, s, \mu)$ $0 \leq x, s < \infty$ aralığında H da dönüşüm yapan x ve s in sürekli fonksiyonu olan operatör fonksiyondur.
2-) $x \neq s$ değerlerinde $G(x, s, \mu)$ nün birinci türevi sürekli ve

$$G'_s(x, x+0, \mu) - G'_s(x, x-0, \mu) = -I$$

3-) $G(x, s, \mu)$ ikinci türeve sahip operatör fonksiyon ve

$$-G''_{ss}(x, s, \mu) + G(x, s, \mu)Q(s) + \mu G(x, s, \mu) = 0 \qquad (x \neq s)$$

4-) $G'_s(x, 0, \mu) - hG(x, 0, \mu) = 0$

(2.7) (2.8) probleminin Green fonksiyonunu bulmak için

$$-y'' + Q(\xi)y + \mu y = f \tag{2.9}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0 \tag{2.10}$$

sınır değer probleminin Green fonksiyonunu bulalım. Burada ξ sabit sayıdır.
$\chi = (Q(\xi) + \mu I)^{1/2}$ olmak üzere (2.9) (2.10) probleminin Green fonksiyonu

$$G_{0,\xi}(x, s, \mu) = \frac{\chi^{-1}}{2}(e^{-\chi|x-s|} - (h-\chi)(h+\chi)^{-1}e^{-\chi(x+s)}) \tag{2.11}$$

dır. $G_{0,\xi}(x, s, \mu)$ Green fonksiyonu

$$\frac{\partial^2 G_{0,\xi}}{\partial s^2}(x, s, \mu) + (Q(\xi) + \mu I)G_{0,\xi}(x, s, \mu) = 0 \qquad (x \neq s)$$

denklemi ve

$$\frac{\partial G_{0,\xi}}{\partial s}(x,s,\mu)\bigg|_{s=0} - hG_{0,\xi}(x,s,\mu)\bigg|_{s=0} = 0$$

sınır koşulunu sağlar.

(2.7) diferansiyel ifadesi ve (2.8) sınır koşulu ile oluşturulan operatörün Green fonksiyonu $G(x,s,\mu)$ yü

$$G(x,s,\mu) = r(x-s)G_{0,\xi}(x,s,\mu) + G_1(x,s,\mu) \tag{2.12}$$

şeklinde arayalım. Burada $r(x,s)$

$$r(x-s) = \begin{cases} 1 & |x-s| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |x-s| > 1 \end{cases} \tag{2.13}$$

herhangi skaler değerli, kompakt support, keyfi mertebeden sürekli türeve sahip bir fonksiyondur.

(2.12) ifadesi diferansiyel ifadeyi sağlamalı yani

$$-G''_{ss} + Q(s)G + \mu G = \delta(x-s)I \tag{2.14}$$

veya

$$-G''_{ss} + Q(s)G + \mu G = 0 \qquad x \neq s$$

dır. (2.14) i aşağıdaki şekilde yazalım

$$-G''_{ss} + Q(s)G + \mu G = -G''_{ss} + Q(\xi)G + (Q(s) - Q(\xi))G + \mu G = \delta(x-s)I \tag{2.15}$$

(2.12) dan türev alınırsa

$$\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} = \frac{\partial^2}{\partial s^2}[r(x-s)G_{0,\xi}] + \frac{\partial^2 G_1}{\partial s^2}$$

bulunur.

$$\frac{\partial r G_{0,\xi}}{\partial s} = -r'(x-s)G_{0,\xi} + r(x-s)\frac{\partial G_{0,\xi}}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2 r G_{0,\xi}}{\partial s^2} = r''(x-s)G_{0,\xi} - 2r'(x-s)\frac{\partial G_{0,\xi}}{\partial s} + r(x-s)\frac{\partial^2 G_{0,\xi}}{\partial s^2} \tag{2.16}$$

dir. (2.16) yı, (2.15) da yerine yazalım.

$$-r''(x-s)G_{0,\xi}+2r'(x-s)\frac{\partial G_{0,\xi}}{\partial s}-r(x-s)\frac{\partial^2}{\partial s^2}G_{0,\xi}-\frac{\partial^2}{\partial s^2}G_1$$
$$+Q(\xi)r(x-s)G_{0,\xi}+Q(\xi)G_1+(Q(s)-Q(\xi))G_{0,\xi}r(x-s) \tag{2.17}$$
$$+(Q(s)-Q(\xi))G_1+\mu r(x-s)G_{0,\xi}+\mu G_1=\delta(x-s)I$$

$$-\frac{\partial^2 G_{0,\xi}}{\partial s^2}+Q(\xi)G_{0,\xi}+\mu G_{0,\xi}=\delta(x-s)I$$

olduğundan (2.17) ifadesi

$$-r''(x-s)G_{0,\xi}+2r'(x-s)\frac{\partial G_{0,\xi}}{\partial s}-\frac{\partial^2}{\partial s^2}G_1+Q(s)G_1$$
$$+(Q(s)-Q(\xi))r(x-s)G_{0,\xi}+\mu G_1=0$$

olur. Buradan

$$G_1(x,s,\mu)=\int_0^\infty\Big\{-r(x-\eta)G_{0,\xi}(Q(\eta)-Q(\xi))+r''(x-\eta)G_{0,\xi}$$
$$-2r'(x-\eta)\frac{\partial G_{0,\xi}}{\partial\eta}\Big\}G(\eta,s,\mu)d\eta \tag{2.18}$$

bulunur. Bu ifade ξ nin bütün değerlerinde geçerli olduğundan $\xi=x$ değerinde de sağlanır. (2.18) de ξ yerine x yazalım.

$$G_1(x,s,\mu)=\int_0^\infty\Big\{-r(x-\eta)G_{0,x}(Q(\eta)-Q(x))$$
$$+r''(x-\eta)G_{0,x}-2r'(x-\eta)\frac{\partial G_{0,x}}{\partial\eta}\Big\}G(\eta,s,\mu)d\eta \tag{2.19}$$

$G_{0,x}(x,\eta,\mu)$ yü $g(x,\eta,\mu)$ ile gösterelim. (2.19) denklemi

$$G_1(x,s,\mu)=-\int_0^\infty\Big\{+r(x-\eta)g(x,\eta,\mu)(Q(\eta)-Q(x))-r''(x-\eta)g(x,\eta,\mu)$$
$$+2r'(x-\eta)\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta}\Big\}G(\eta,s,\mu)d\eta$$

olur. (2.12) dan

$$G(x,s,\mu)=r(x-s)g(x,s,\mu)-\int_0^\infty\Big\{r(x-\eta)g(x,\eta,\mu)[Q(\eta)-Q(x)]$$
$$-r''(x-\eta)g(x,\eta,\mu)+2r'(x-\eta)\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta}\Big\}G(\eta,s,\mu)d\eta \tag{2.20}$$

bulunur. Burada $\chi = (Q(x) + \mu I)^{1/2}$ olmak üzere

$$g(x,s,\mu) = \frac{\chi^{-1}}{2}(e^{-\chi|x-s|} - (h-\chi)(h+\chi)^{-1}e^{-\chi(x+s)})$$

dır. (2.20) ifadesi (2.7)-(2.8) probleminin (formal olarak) Green fonksiyonu için elde edilen integral denklemidir.

Biz bu integral denklemin çözüme sahip olduğunu ve elde edilen çözümün (2.7)-(2.8) probleminin gerçekten Green fonksiyonu olduğunu göstereceğiz.

(2.20) denklemi aşağıda tanımlanan uzaylarda gözönüne alınacaktır.

X_1 **uzayı:** $A(x,\xi)$, H da tanımlanmış $(0 \leq x, \xi < \infty)$ operatör fonksiyon olmak üzere

$$\int_0^\infty dx \left\{ \int_0^\infty \|A(x,\xi)\|^2 d\xi \right\} < \infty \qquad \text{olsun.}$$

Bu uzayda norm

$$\|A\|_{X_1} = \sqrt{\int_0^\infty dx \int_0^\infty \|A(x,\xi)\|_H^2 d\xi}$$

formülü ile tanımlanırsa X_1 uzayı Banach uzayı oluşturur..

X_2 **uzayı:** $A(x,\xi)$, H da tanımlı $(0 \leq x, \xi < \infty)$ $(H-S)$ operatör değerli fonksiyon olmak üzere

$$\int_0^\infty dx \left\{ \int_0^\infty \|A(x,\xi)\|_2^2 d\xi \right\} < \infty \qquad \text{olsun.}$$

Bu uzayda norm

$$\|A\|_{X_2} = \sqrt{\int_0^\infty dx \int_0^\infty \|A(x,\xi)\|_2^2 d\xi}$$

ile tanımlanırsa X_2 uzayı Banach uzayı oluşturur.

(2.20) denkleminde $r(x-s)g(x,s,\mu) \in X_2$ olduğu ve

$$\int_0^\infty \Big\{ r(x-\eta)g(x,\eta,\mu)[Q(\eta) - Q(x)] - r''(x-\eta)g(x,\eta,\mu) + 2r'(x-\eta)\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta} \Big\} G(\eta,s,\mu)d\eta$$

nın bu uzayda Büzen operatör olduğu gösterilirse (2.20) denkleminin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanmış olur. $r(x-s)g(x,s,\mu) \in X_2$ yani

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \|r(x-s)g(x,s,\mu)\|_2^2 dx ds < \infty$$

olduğunu gösterelim.

Önce $\|r(x-s)g(x,s,\mu)\|_2^2$ normunu bulalım. $g(x,s,\mu)$, x,s ve μ nün her bir değerinde normal operatördür. $|r(x-s)|<c$ olduğundan

$$\|r(x-s)g(x,s,\mu)\|_2^2 \le c^2\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i(x,s,\mu)|^2$$

olur. Burada $\lambda_i(x,s,\mu)$ $g(x,s,\mu)$ operatörünün özdeğerleridir.

$$\begin{aligned}\|r(x-s)g(x,s,\mu)\|_2^2 \le{}& \|r(x-s)\chi^{-1}\epsilon^{-\chi|x-s|}\|_2^2\\ &+\|r(x-s)(h+\chi)^{-1}(h-\chi)\epsilon^{-\chi(x+s)}\|_2^2\end{aligned} \tag{2.21}$$

dir. Kendine eş operatörün spektral açılımına göre

$$\begin{aligned}\|r(x-s)\chi^{-1}\epsilon^{-\chi|x-s|}\|_2^2 &\le c^2\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\epsilon^{-\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}\,|x-s|}}{\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}}\right)^2\\ &\le c^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\epsilon^{-2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}\,|x-s|}}{\alpha_j(x)+\mu}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\|r(x-s)\chi^{-1}\epsilon^{-\chi|x-s|}\|_2^2dxds &= \int_0^{\infty}dx\Big\{\int_0^{x}\|r(x-s)\chi^{-1}\epsilon^{-\chi(x-s)}\|_2^2ds\\ &\qquad+\int_x^{\infty}\|r(x-s)\chi^{-1}\epsilon^{-\chi(s-x)}\|_2^2ds\Big\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\le c^2\int_0^{\infty}dx\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\epsilon^{-2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}\,x}}{\alpha_j(x)+\mu}\int_0^{x}\epsilon^{2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}\,s}ds\\ &\qquad+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\epsilon^{2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}\,x}}{\alpha_j(x)+\mu}\int_x^{\infty}\epsilon^{-2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}\,s}ds\Big\}\\ &\le c^2\int_0^{\infty}dx\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\epsilon^{-2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}\,x}\;\frac{\epsilon^{2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}\,s}}{2(\alpha_j(x)+\mu)^{3/2}}\Big|_0^x\\ &\qquad+\sum_{j=1}^{\infty}\epsilon^{2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}\,x}\;\frac{\epsilon^{-2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}}}{-2(\alpha_j(x)+\mu)^{3/2}}\Big|_x^{\infty}\Big)\\ &\le c^2\int_0^{\infty}dx\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2(\alpha_j(x)+\mu)^{3/2}}-\frac{\epsilon^{-2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}}}{2(\alpha_j(x)+\mu)^{3/2}}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2(\alpha_j(x)+\mu)^{3/2}}\Big)\\ &\le c^2\int_0^{\infty}dx\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha_j(x)+\mu)^{3/2}}-\frac{\epsilon^{-2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}}}{2(\alpha_j(x)+\mu)^{3/2}}\Big)\end{aligned}$$

$\alpha_j(x) \geq 1$. $\mu > 0$ olduğundan $e^{-2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}} < e^{-2} < 1$ dir. Buna göre son ifade

$$\leq c^2 \int_0^\infty dx \left(\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2(\alpha_j(x)+\mu)^{3/2}} \right) \leq$$

(koşul 5) kullanılarak)

$$\leq c^2 \int_0^\infty dx \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{\alpha_j(x)^{3/2}} < \infty \tag{2.22}$$

bulunur. Şimdi ikinci terimi değerlendirelim.

$$\|r(x-s)\chi^{-1}(h+\chi)^{-1}(h-\chi)\epsilon^{-\chi(x+s)}\|_2^2$$
$$\leq c^2 \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{\epsilon^{-\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}\ (x+s)}}{\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}} \left|(h-\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}).(h+\sqrt{\alpha_j(x)+\mu})^{-1}\right| \right)^2 \leq$$

Burada $\left|(h-\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}).(h+\sqrt{\alpha_j(x)+\mu})^{-1}\right| < c$ olduğu gözönüne alındı.

$$\leq c^2 \sum_{j=1}^\infty \frac{\epsilon^{-2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}\ (x+s)}}{\alpha_j(x)+\mu} \qquad \text{dir.}$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \|r(x-s)\chi^{-1}(h+\chi)^{-1}(h-\chi)\epsilon^{-\chi(x+s)}\|_2^2 dx ds$$
$$\leq c^2 \int_0^\infty dx \left(\sum_{j=1}^\infty \frac{\epsilon^{-2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}\ x}}{\alpha_j(x)+\mu} \int_0^\infty \epsilon^{-2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}\ s} ds \right)$$
$$\leq c^2 \int_0^\infty dx \left(\sum_{j=1}^\infty \epsilon^{-2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}\ x} \frac{\epsilon^{-2\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}\ s}}{-2(\alpha_j(x)+\mu)^{-3/2}} \Bigg|_0^\infty \right)$$

(koşul 5) kullanılarak)

$$\leq c^2 \int_0^\infty dx \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{\alpha_j(x)^{3/2}} < \infty \tag{2.23}$$

bulunur. (2.22) ve (2.23) den

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \|r(x-s)g(x,s,\mu)\|_2^2 dx ds < \infty$$

olur. Yani $r(x-s)g(x,s,\mu)$ X_2 uzayına aittir.

$$\|A\| \leq \|A\|_2$$

özelliğinden $\|r(x-s)g(x,s,\mu)\| \leq \|r(x-s)g(x,s,\mu)\|_2$ olduğu gözönüne alınırsa

$$r(x-s)g(x,s,\mu) \in X_1 \tag{2.24}$$

olduğu çıkar.

Teorem: Eğer B Banach uzayında lineer A operatörü $\|A\| \leq \alpha < 1$ eşitsizliğini sağlıyorsa o zaman $(I+A)^{-1}$ var ve sınırlıdır.

Şimdi $\mu > 0$ değerlerinde

$$NA = \int_0^\infty \left\{ r(x-\eta)g(x,\eta,\mu)[Q(\eta)-Q(x)] - r''(x-\eta)g(x,\eta,\mu) + 2r'(x-\eta)\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta} \right\} A(\eta,s)d\eta \tag{2.25}$$

operatörünün X_2 uzayında büzen operatör olduğunu gösterelim.

$NA = N_1A + N_2A + N_3A$ olmak üzere N_1A yı sınırlandıralım.

$$\begin{aligned} N_1A &= \int_0^\infty r(x-\eta)g(x,\eta,\mu)[Q(\eta)-Q(x)]A(\eta,s)d\eta \\ &= \int\limits_{|x-\eta|\leq 1} r(x-\eta)g(x,\eta,\mu)[Q(\eta)-Q(x)]A(\eta,s)d\eta \\ &+ \int\limits_{|x-\eta|>1} r(x-\eta)g(x,\eta,\mu)[Q(\eta)-Q(x)]A(\eta,s)d\eta = a_1 + b_1 \end{aligned}$$

$$\|N_1A\|_2 \leq \|a_1\|_2 + \|b_1\|_2 \qquad \|N_1A\|_2^2 \leq 2(\|a_1\|_2^2 + \|b_1\|_2^2)$$

özelliğini ve $(H-S)$ operatörünün normu için aşağıdaki teoremi kullanacağız.

Teorem: A sınırlı, B $(H-S)$ operatörü ise o zaman AB ve BA $(H-S)$ operatörü olur ve

$$\|AB\|_2 \leq \|A\|\|B\|_2 \qquad \|BA\|_2 \leq \|B\|_2\|A\|$$

sağlanır. (Bu teoremin ispatı (Kato, 1980) bulunabilir.)

$$\|a_1\|_2^2 = \| \int\limits_{|x-\eta|\leq 1} r(x-\eta)g(x,\eta,\mu)[Q(\eta)-Q(x)]A(\eta,s)d\eta\|_2^2 \tag{2.26}$$

$$\leq \Big(\int\limits_{|x-\eta|\leq 1} \|r(x-\eta)g(x,\eta,\mu)[Q(\eta)-Q(x)]\|.\|A(\eta,s)\|_2 d\eta \Big)^2$$

$$\|r(x-\eta)g(x,\eta,\mu)[Q(\eta)-Q(x)]\| \leq \|r(x-\eta)g(x,\eta,\mu)Q^a(x)\|.\|Q^{-a}[Q(\eta)-Q(x)]\|$$

şeklinde yazalım. Koşul 3) den

$$\leq c|x-\eta|\|Q^a(x)r(x-\eta)g(x,\eta,\mu)\|$$

bulunur. Böylece (2.26) nin sağ tarafı

$$\Big(\int\limits_{|x-\eta|\leq 1} \|r(x-\eta)g(x,\eta,\mu)[Q(\eta)-Q(x)]\|.\|A(\eta,s)\|_2 d\eta \Big)^2$$

$$\leq c^2 \Big(\int\limits_{|x-\eta|\leq 1} |(x-\eta)|\|Q^a(x)r(x-\eta)g(x,\eta,\mu)\|.\|A(\eta,s)\|_2 d\eta \Big)^2$$

şeklini alır.

$$\int\limits_{|x-\eta|\leq 1} |(x-\eta)|\|Q^a(x)r(x-\eta)g(x,\eta,\mu)\|.\|A(\eta,s)\|_2 d\eta$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{|x-\eta|\leq 1} |(x-\eta)|^{1+\varepsilon}|(x-\eta)|^{-\varepsilon}\|Q^a(x)\lambda^{-2-\varepsilon}\|\|\lambda^{1+\varepsilon}\epsilon^{-\lambda|x-\eta|}\|\|A(\eta,s)\|_2 d\eta \tag{2.27}$$

dır. $\|Q^a(x)\chi^{-2-\varepsilon}\|$ yı sınırlandıralım.

$$\begin{aligned}\|Q^a(x)(Q(x)+\mu I)^{1/2(-2-\varepsilon)}\| &= \sup_{0\leq x<\infty} \alpha_1^a(x)(\alpha_1(x)+\mu)^{1/2(-2-\varepsilon)} \\ &\leq \sup_{0\leq x<\infty} (\alpha_1(x)+\mu)^a(\alpha_1(x)+\mu)^{-\frac{2+\varepsilon}{2}} \\ &\leq \sup_{0\leq x<\infty} (\alpha_1(x)+\mu)^{a-\frac{2+\varepsilon}{2}}\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ nu $\zeta = a - \frac{2+\varepsilon}{2} < 0$ olacak şekilde seçelim.

O zaman

$$\|Q^a(x)\chi^{-2-\varepsilon}\| \leq \frac{c}{\mu^\zeta} \qquad \zeta > 0 \tag{2.28}$$

bulunur. $\||(x-\eta)|^{1+\varepsilon}\chi^{1+\varepsilon}r(x-\eta)e^{-\chi|x-\eta|}\|$ yı sınırlandıralım.

$$\begin{aligned}&\| \; |(x-\eta)|^{1+\varepsilon}\chi^{1+\varepsilon}r(x-\eta)e^{-\chi|x-\eta|}\| \\ &= \sup_{\alpha_j(x)+\mu\geq 1} |(x-\eta)|^{1+\varepsilon}r(x-\eta)(\alpha_j(x)+\mu)^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon)}e^{-|(x-\eta)|(\alpha_j(x)+\mu)^{\frac{1}{2}}} < \infty\end{aligned} \tag{2.29}$$

(2.27), (2.28) ve (2.29) den

$$\begin{aligned}\|a_1\|_2^2 &\leq \frac{c^2}{\mu^{2\zeta}}\Big(\int_{|x-\eta|\leq 1} |x-\eta|^{-\varepsilon}\|A(\eta,s)\|_2 d\eta\Big)^2 \\ &= \frac{c^2}{\mu^{2\zeta}} \int_{|x-\eta|\leq 1} |x-\eta|^{-\varepsilon}\|A(\eta,s)\|_2 d\eta \int_{|x-\eta'|\leq 1} |x-\eta'|^{-\varepsilon}\|A(\eta',s)\|_2 d\eta'\end{aligned} \tag{2.30}$$

yazabiliriz. (2.30) eşitsizliğinin $[0,\infty)$ aralığında x e göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \|a_1\|_2^2 dx \leq \frac{c}{\mu^{2\zeta}} \int_0^\infty \Big[&\int_{|x-\eta|\leq 1} |x-\eta|^{-\varepsilon}\|A(\eta,s)\|_2 d\eta \\ &\int_{|x-\eta'|\leq 1} |x-\eta'|^{-\varepsilon}\|A(\eta',s)\|_2 d\eta'\Big] dx\end{aligned}$$

bulunur. $\eta - x = u \quad , \quad \eta' - x = u'$ dönüşümü yapılırsa son ifadenin sağ tarafı

$$\frac{c^2}{\mu^{2\zeta}}\int_0^\infty dx \int\limits_{|u|\le 1} |u|^{-\varepsilon}\|A(\eta,s)\|_2 du \int\limits_{|u'|\le 1} |u'|^{-\varepsilon}\|A(\eta',s)\|_2 du'$$

$$= \frac{c^2}{\mu^{2\zeta}}\int\limits_{|u|\le 1} |u|^{-\varepsilon} du \int\limits_{|u'|\le 1} |u'|^{-\varepsilon} du' \int_0^\infty \|A(x+u,s)\|_2\|A(x+u',s)\|_2 dx$$

$$\le \frac{c^2}{\mu^{2\zeta}}\int\limits_{|u|\le 1} |u|^{-\varepsilon} du \int\limits_{|u'|\le 1} |u'|^{-\varepsilon} du' \Big(\int_0^\infty \|A(x+u,s)\|_2^2 dx\Big)^{1/2}\Big(\int_0^\infty \|A(x+u',s)\|_2^2 dx\Big)^{1/2}$$

$$\le \frac{c^2}{\mu^{2\zeta}}\int\limits_{|u|\le 1} |u|^{-\varepsilon} du \int\limits_{|u'|\le 1} |u'|^{-\varepsilon} du' \Big(\int_u^\infty \|A(v,s)\|_2^2 dv\Big)^{1/2}\Big(\int_{u'}^\infty \|A(v',s)\|_2^2 dv'\Big)^{1/2}$$

$$\le \frac{c^2}{\mu^{2\zeta}}\int\limits_{|u|\le 1} |u|^{-\varepsilon} du \int\limits_{|u'|\le 1} |u'|^{-\varepsilon} du' \Big(\int_0^\infty \|A(v,s)\|_2^2 dv\Big)^{1/2}\Big(\int_0^\infty \|A(v',s)\|_2^2 dv'\Big)^{1/2}$$

$$\le \frac{c^2}{\mu^{2\zeta}}\Big(\int\limits_{|u|\le 1} |u|^{-\varepsilon} du\Big)^2 \int_0^\infty \|A(v,s)\|_2^2 dv \le \frac{c^2}{\mu^{2\zeta}}\int_0^\infty \|A(v,s)\|_2^2 dx$$

şeklini alır. Böylece

$$\|a_1\|_{X_2}^2 \le \frac{c^2}{\mu^{2\zeta}}\int_0^\infty \|A(x,s)\|_2^2 dx$$

bulunur. Yani

$$\|a_1\|_{X_2} \le \frac{c}{\mu^{\zeta}}\|A(x,s)\|_{x_2} \tag{2.31}$$

dir. $|x-\eta|>1$ olduğunda $r(x-\eta)=0$ olduğundan $b_1=0$ dır.

N_2A ve N_3A nın sınırlandırılması için aşağıdaki Lemmaları verelim.

Lemma 2.1: $K(x,s)$ x ve s in (a,b) den $(-\infty\le a<b\le\infty)$ alınmış her bir değerinde H da sınırlı bir operatör olsun. Eğer

$$\int_a^b \|K(x,s)\|dx < M \qquad \text{ve} \qquad \int_a^b \|K(x,s)\|ds < M$$

ise o zaman

$$Af(x) = \int_a^b K(x,s)f(s)ds$$

integral operatörü $L_2(a,b,H)$ Hilbert uzayında sınırlı operatördür ve

$$\|A\|_{L_2(a,b;H)} \leq M$$

dir. Bu Lemmanın ispatı aşağıdaki bilinen Lemmaya dayanır. (Smirnov, 1964)

Lemma 2.2: $(a,b)\times(a,b)$ de tanımlanmış $K(x,s)$ operatör fonksiyonu

$$\int_a^b |K(x,s)|ds \leq M \qquad ve \qquad \int_a^b |K(x,s)|dx \leq M$$

koşullarını sağlıyorsa

$$Bf(x) = \int_a^b K(x,s)f(s)ds$$

operatörü $L_2(a,b)$ uzayında sınırlı bir operatördür ve

$$\|B\| \leq M$$

dir. Yani,

$$\|Bf\|^2 = \int_a^b |Bf(x)|^2dx = \int_a^b \left|\int_a^b K(x,s)f(s)ds\right|^2 dx$$
$$\leq M^2 \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

dir.

Lemma 2.1 in İspatı:

$$\|Af(x)\|^2_{L_2(a,b;H)} = \int_a^b \|Af(x)\|^2_H\, dx$$
$$= \int_a^b \left\|\int_a^b K(x,s)f(s)ds\right\|^2_H dx$$
$$\leq \int_a^b \left\{\int_a^b \|K(x,s)f(s)\|ds\right\}^2 dx$$

Lemma 2.2. den

$$\int_a^b \left\{\int_a^b \|K(x,s)\|\,\|f(s)\|\,ds\right\}^2 dx \leq M^2 \int_a^b \|f(x)\|^2 dx$$

dir.Böylece

$$\|Af\|^2_{L_2(a,b;H)} \leq M^2 \int_a^b \|f(x)\|^2 dx$$

veya

$$\|Af\|_{L_2(a,b;H)} \leq M\|f\|_{L_2(a,b;H)}$$

bulunur.

Lemma 2.3: $K(x,s)$ Lemma 2.1 deki özelliklere sahip olsun. O zaman

$$TA(x,s) = \int_a^b A(\xi,s)K(\xi,x)d\xi$$

integral operatörü X_2 uzayında sınırlı operatördür ve

$$\|T\|_{x_2} \leq M$$

İspat:

$$\begin{aligned}
\|TA\|^2_{x_2} &= \int_a^b \int_a^b \|TA\|_2^2 dx ds \\
&= \int_a^b \int_a^b \left\| \int_a^b A(\xi,s)K(\xi,x)d\xi \right\|_2^2 dx ds \\
&\leq \int_a^b \int_a^b \left[\int_a^b \|A(\xi,s)K(\xi,x)\|_2 d\xi \right]^2 dx ds \\
&\leq \int_a^b \int_a^b \left[\int_a^b \|A(\xi,s)\|_2 \|K(\xi,x)\| d\xi \right]^2 dx ds \\
&\leq M^2 \int_a^b \left[\int_a^b \|A(\xi,s)\|_2^2 d\xi \right] ds \\
&= M^2 \|A\|^2_{x_2}
\end{aligned}$$

Böylece $\|TA\|^2_{x_2} \leq M\|A\|^2_{x_2}$ veya $\|T\| \leq M$ dir. Bu Lemma $X_1, X_3^{(p)}, \ldots$ uzayları için de geçerlidir.

Lemma 2.3 ü kullanarak N_2A ve N_3A operatörlerinin $\mu > 0$ nin büyük değerinde büzen operatör olduğunu gösterelim.

N_2A nin çekirdeği $r''(x-\eta)g(x,\eta,\mu)$ yü gözönüne alalım.

$|r''(x-\eta)| < c$ olduğundan

$$\|r'(x-\eta)g(x,\eta,\mu)\| \le c\|g(x,\eta,\mu)\|$$

olur.

$$\int_0^\infty \|r''(x-\eta)g(x,\eta,\mu)\|d\eta \le \frac{c}{\mu^\zeta} \tag{2.32}$$

olduğunu gösterelim.

$$\|r''(x-\eta)g(x,\eta,\mu)\| \le c(\|g_1(x,\eta,\mu)\| + \|g_2(x,\eta,\mu)\|) \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}
\|g_1(x,\eta,\mu)\| &= \|\chi^{-1}e^{-\chi|x-\eta|}\| \\
&= \Big\|\sum_{j=1}^{\infty}(\alpha_j(x)+\mu)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}|x-\eta|}(.,e_j)e_j\Big\| \\
&\le \frac{e^{-\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}|x-\eta|}}{(\alpha_j(x)+\mu)^{-1/2}} \\
&\le \frac{1}{\sqrt{\mu}}e^{-\sqrt{\mu}|x-\eta|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \|r''(x-\eta)\chi^{-1}e^{-\chi|x-\eta|}\|d\eta &\le \frac{c}{\sqrt{\mu}}\int_0^\infty e^{-\sqrt{\mu}|x-\eta|}d\eta \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left(\int_0^x e^{-\sqrt{\mu}(x-\eta)}d\eta + \int_x^\infty e^{\sqrt{\mu}(x-\eta)}d\eta\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left(e^{-\sqrt{\mu}x}\frac{1}{\sqrt{\mu}}e^{\sqrt{\mu}\eta}\Big|_0^x - e^{-\sqrt{\mu}x}\frac{1}{\sqrt{\mu}}e^{-\sqrt{\mu}\eta}\Big|_x^\infty\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mu}}(2-e^{-\sqrt{\mu}}) < \frac{c}{\mu}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\|g_2(x,\eta,\mu)\| = \|\chi^{-1}(h+\chi)^{-1}(h-\chi)e^{-\chi(x+\eta)}\|$$

da aynı işlemlerle sınırlandırılır ve böylece

$$\int_0^\infty \|r''(x-\eta)g(x,\eta,\mu)\|d\eta \le \frac{c}{\mu^\zeta} \qquad , \qquad \zeta > 0$$

bulunur. Lemma 2.3 den

$$\|X_2\|_{X_2} < \frac{c}{\mu^{\zeta}} \qquad , \qquad \zeta > 0$$

elde edilir.

$\mu > 0$ büyük değerlerinde

$$\|X_2\|_{X_2} \leq \frac{c}{\mu^{\zeta}} \qquad , \qquad \zeta > 0$$

olacak şekilde seçebiliriz. Benzer şekilde

$$\|X_3\|_{X_2} \leq \frac{c}{\mu^{\zeta}} \qquad , \qquad \zeta > 0$$

bulunur. Bununla XA operatörünün $\mu > 0$ ın büyük değerlerinde X_2 uzayında büzen operatör olduğunu ispatladık.

$r(x-\eta)g(x,\eta,\mu) \in X_2$ olduğunda (2.7) denkleminin $\mu > 0$ ın büyük değerlerinde X_2 uzayında çözümünün varlığını ve tekliğini gösterdik. Benzer şekilde X_1 uzayınında da çözümün varlığı ve tekliği gösterilir.

Lemma 2.4: Eğer $Q(x)$ operatör fonksiyonları 1) - 5) koşullarını sağlıyorsa o zaman X operatörü $\mu > 0$ büyük değerlerinde $X_1, X_2, X_3^{(p)}$ uzaylarının her birinde büzen operatördür.

Bize gerekli olacak H da dönüşüm yapan $A(x,\eta)$ operatör fonksiyonlarından oluşan ve normu aşağıdaki gibi tanımlanan $X_1^{(s)}, X_2^{(s)}$ ve $X_4^{(s)}$ uzaylarını verelim.

$$\|A(x,\eta)\|^2_{X_1^{(s)}} = \int_0^{\infty} dx \left\{ \int_0^{\infty} \|A(x,\eta)Q^s(\eta)\|^2 d\eta \right\}$$

$$\|A(x,\eta)\|^2_{X_2^{(s)}} = \int_0^{\infty} dx \left\{ \int_0^{\infty} \|A(x,\eta)Q^s(\eta)\|_2^2 d\eta \right\}$$

$$\|A(x,\eta)\|_{X_4^{(s)}} = \sup_{0 \leq x < \infty} \int_0^{\infty} \|A(x,\eta)Q^s(\eta)\| d\eta$$

Bu uzaylar ilk olarak B.M.Levitan (Levitan, 1968) tarafından tanımlanmış ve Banach uzayı oldukları ispatlanmıştır.

Lemma 2.4. ün ispatına benzer şekilde aşağıdaki Lemma ispatlanabilir.

Lemma 2.5: $Q(x)$ operatör fonksiyonu Lemma 2.4. ün koşullarını sağlıyorsa o zaman $\mu > 0$ büyük değerlerinde N operatörü $X_1^{(s)}, X_2^{(s)}, X_4^{(s)}$ uzaylarının her birinde büzen operatördür.

$$G(x,s,\mu) = r(x-s)g(x,s,\mu) - NG(\eta,s,\mu)$$

integral denklemini gözönüne alalım. Lemma 2.5. e göre $r(x-s)g(x,s,\mu)$ terimi Lemmada verilen uzaylara ait ise o zaman integral denklemin $\mu > 0$ değerlerinde çözüme sahiptir ve çözümde $X_1^{(s)}, X_2^{(s)}, X_4^{(s)}$ uzaylarına ait olacaktır.

Biz daha önce $r(x-s)g(x,s,\mu)$ nün X_2 uzayına ait olduğunu gösterdik. Bundan dolayı (2.20) integral denkleminin $\mu > 0$ ın büyük değerlerinde çözümü X_2 ye ait olacaktır. Aşağıdaki Lemmayı ispatlayalım.

Lemma 2.6: $Q(x)$ operatör fonksiyonu 1) ve 2) koşullarını sağlasın ve ek olarak $|x-s| \leq 1$ iken

$$\|Q^{1/2}(x)Q^{-1/2}(s)\| \leq c \tag{2.35}$$

olsun. Bu takdirde

$$\frac{\partial^2[r(x-s)g(x,s,\mu)]}{\partial s^2} \in X_4^{(-1/2)} \qquad x \neq s$$

yani

$$\sup_{0\leq x<\infty} \int_0^\infty \|\frac{\partial^2(rg)}{\partial s^2} Q^{-1/2}(s)\| ds < \infty$$

olur.

İspat:

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\le x<\infty}\int_0^\infty \left\| \frac{\partial^2\left((r-s)g(x,s,\mu)\right)}{\partial s^2} Q^{-1/2}(s)ds \right\| \\
&= \sup_{0\le x<\infty}\int_0^\infty \left\| \frac{\partial^2 r(x-s)}{\partial s^2} g(x,s,\mu) - 2\frac{\partial r(x-s)}{\partial s}\frac{\partial g(x,s,\mu)}{\partial s} \right. \\
&\qquad \left. + r(x-s)\frac{\partial^2 g(x,s,\mu)}{\partial s^2} Q^{-1/2}(s)\right\| ds \\
&\le \sup_{0\le x<\infty}\int_0^\infty \left\| \frac{\partial^2 r(x-s)}{\partial s^2} g(x,s,\mu) Q^{-1/2}(s)\right\| ds \\
&\qquad + 2\sup_{0\le x<\infty}\int_0^\infty \left\| \frac{\partial r(x-s)}{\partial s}\frac{\partial g}{\partial s}(x,s,\mu) Q^{-1/2}(s)\right\| ds \\
&\qquad + \sup_{0\le x<\infty}\int_0^\infty \left\| r(x-s)\frac{\partial^2 g(x,s,\mu)}{\partial s^2} Q^{-1/2}(s)\right\| ds
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

(2.36) da üçüncü toplamı sınırlandıralım.

$$
\left\| r(x-s)\frac{\partial^2 g(x,s,\mu)}{\partial s^2} Q^{-1/2}(s)\right\| \le c\left\| \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} Q^{-1/2}(s)\right\|
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{c}{2}\left\| \left[\lambda e^{-\lambda|x-s|} - \lambda(h-\lambda)(h+\lambda)^{-1}e^{-\lambda(x+s)}\right] Q^{-1/2}(s)\right\| \\
&\le c\left(\left\|\lambda e^{-\lambda|x-s|}Q^{-1/2}(s)\right\| + \left\|\lambda(h-\lambda)(h+\lambda)^{-1}e^{-\lambda(x+s)}Q^{-1/2}(s)\right\|\right) \\
&\le c\Big(\left\|\lambda e^{-\lambda|x-s|}Q^{-1/2}(x)Q^{1/2}(x)Q^{-1/2}(s)\right\| \\
&\qquad + \left\|(h-\lambda)(h+\lambda)^{-1}\lambda e^{-\lambda(x+s)}Q^{-1/2}(x)Q^{1/2}(x)Q^{-1/2}(s)\right\| \Big)
\end{aligned}
$$

(2.35) dan

$$
\begin{aligned}
&\le c\left(\left\|e^{-\lambda|x-s|}\lambda Q^{-1/2}(x)\right\| + \left\|(h-\lambda)(h+\lambda)^{-1}\lambda e^{-\lambda(x+s)}Q^{-1/2}(x)\right\|\right) \\
&\le c\left(\left\|e^{-\lambda|x-s|}\lambda Q^{-1/2}(x)\right\| + \left\|e^{-\lambda(x+s)}\lambda Q^{-1/2}(x)\right\|\right)
\end{aligned}
$$

spektral açılıma göre

$$
\le c\left(e^{-\sqrt{\alpha_1(x)+\mu}|x-s|}\sqrt{\alpha_1(x)+\mu}\,\alpha_1^{-1/2}(x) + e^{-\sqrt{\alpha_1(x)+\mu}(x+s)}\sqrt{\alpha_1(x)+\mu}\,\alpha_1^{-1/2}(x)\right)
$$

$x\ge 0 \quad s\ge 0$ için $x+s\ge |x-s|$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
&\le c\alpha_1^{-1/2}(x)\sqrt{\alpha_1(x)+\mu}\,e^{-\sqrt{\alpha_1(x)+\mu}|x-s|} \\
&\le c(\mu)e^{-\sqrt{\alpha_1(x)+\mu}|x-s|}
\end{aligned}
$$

bulunur Böylece

$$\left\| r(x-s)\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(x,s,\mu)Q^{-1/2}(s)\right\| \leq c(\mu)e^{-\sqrt{\alpha_1(x)+\mu}|x-s|}$$

olur. Buradan

$$\sup_{0\leq x<\infty}\int_0^\infty \left\| r(x-s)\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(x,s,\mu)Q^{-1/2}(s)\right\| ds \leq c(\mu)\sup_{0\leq x<\infty}\int_0^\infty e^{-\sqrt{\alpha_1(x)+\mu}|x-s|}ds$$
$$= c(\mu)\sup_{0\leq x<\infty}\left(\int_0^x e^{-\sqrt{\alpha_1(x)+\mu}(x-s)}ds + \int_x^\infty e^{-\sqrt{\alpha_1(x)+\mu}(s-x)}ds\right)$$
$$= c(\mu)\sup_{0\leq x<\infty}\frac{1}{\sqrt{\alpha_1(x)+\mu}} < c(\mu) < \infty \tag{2.37}$$

elde edilir. (Burada $\alpha_1(x)\geq 1$, $\mu>0$ olduğu gözönüne alındı.)

(2.36) eşitsizliğinin ikinci toplamıda benzer şekilde sınırlandırılır. Bununla Lemma 2.6 ispatlanmış olur.

N operatörünün $\mu>0$ büyük değerinde $X_4^{(-1/2)}$ uzayında büzen operatör olduğunu gözönüne alırsak Lemma 2.5 den $G(x,s,\mu)$ operatör fonksiyonunun bu uzaya ait olduğunu görürüz.

2.3.GREEN FONKSİYONUNUN BİRİNCİ TÜREVİ

(2.20) denkleminin s değişkenine göre formal olarak türevini alalım.

$$\frac{\partial G}{\partial s}(x,s,\mu)=\frac{\partial}{\partial s}[r(x-s)g(x,s,\mu)]-\int_0^\infty\Big\{r(x-\eta)g(x,\eta,\mu)(Q(\eta)-Q(x))$$
$$-r''(x-\eta)g(x,\eta,\mu)+2r'(x-\eta)\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta}\Big\}\frac{\partial G}{\partial s}(\eta,s,\mu)d\eta \tag{2.38}$$

$X_3^{(p)}$ $(p\geq 1)$ Banach uzayında aşağıdaki integral denklemi gözönüne alalım.

$$K(x,s,\mu)=\frac{\partial}{\partial s}(rg)-\int_0^\infty\Big\{r(x-\eta)g(x,\eta,\mu)(Q(\eta)-Q(x))$$
$$-r''(x-\eta)g(x,\eta,\mu)+2r'(x-\eta)\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta}\Big\}K(\eta,s,\mu)d\eta \tag{2.39}$$

$\frac{\partial}{\partial s}(r(x-s)g(x,s,\mu))\in X_3^{(p)}$ yani $\sup\limits_{0\leq x<\infty}\int_0^\infty\|\frac{\partial}{\partial s}(rg)\|^p ds<\infty$ olduğu gösterelim. Bizim için

$\frac{\partial}{\partial s}(rg)\in X_3^{(1)}\equiv X_3$ olması yeterlidir.

$$\frac{\partial}{\partial s}(r(x-s)g(x,s,\mu))=-r'(x-s)g(x,s,\mu)+r(x-s)\frac{\partial g}{\partial s}(x,s,\mu)$$

$r(x-s)\frac{\partial g}{\partial s}(x,s,\mu)\in X_3$ olduğunu gösterelim, diğer terimleride benzer şekilde gösterilir.

$$\frac{\partial g}{\partial s}(x,s,\mu)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\epsilon^{-\lambda(s-x)}+\frac{1}{2}(h+\lambda)^{-1}(h-\lambda)\epsilon^{-\lambda(x+s)} & x<s\\ \frac{1}{2}\epsilon^{-\lambda(x-s)}+\frac{1}{2}(h+\lambda)^{-1}(h-\lambda)\epsilon^{-\lambda(x+s)} & s<x\end{cases} \tag{2.40}$$

$s>x$ için ilk terimi sınırlandıralım.

$\sup\limits_{0\leq x<\infty}\int_x^\infty\|-\frac{1}{2}r\epsilon^{-\lambda(s-x)}\|ds<\infty$ olduğunu gösterelim.

$|r|<c$ olduğundan,

$$\|-\frac{1}{2}r\epsilon^{-\lambda(s-x)}\|\leq\frac{1}{2}c\|\epsilon^{-\lambda(s-x)}\|\leq\frac{1}{2}c\epsilon^{-\sqrt{\alpha_1(x)+\mu}(s-x)}$$

$$\sup_{0\leq x<\infty}\int_x^\infty\|-\frac{1}{2}r\epsilon^{-\lambda(s-x)}\|ds\leq\frac{1}{2}c\sup_{0\leq x<\infty}\int_x^\infty\epsilon^{-\sqrt{\alpha_1(x)+\mu}(s-x)}ds$$
$$\leq\frac{1}{2}c\sup_{0\leq x<\infty}\left[-\frac{1}{\sqrt{\alpha_1(x)+\mu}}\epsilon^{-\sqrt{\alpha_1(x)+\mu}(s-x)}\Big|_x^\infty\right]$$

$$-\frac{1}{2}c \sup_{0\le x<\infty}\left[-\frac{1}{\sqrt{\alpha_1(x)+\mu}}e^{\sqrt{\alpha_1(x)+\mu}\,x}e^{-\sqrt{\alpha_1(x)+\mu}\,s}\Big|_x^{\infty}\right]$$

$\mu > 0 \qquad \alpha_1(x) \geq 1 \qquad$ olduğundan,

$$\leq \frac{1}{2}c \sup_{0\le x<\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha_1(x)+\mu}}\right] \leq \frac{c}{\sqrt{\mu}}$$

Diğer terimlerde benzer şekilde sınırlandırılarak sonuçta, $\mu > 0$ büyük değerlerinde

$$\frac{\partial}{\partial s}(rg) \in X_3$$

bulunur. Buna göre $K(x,s,\mu)$ de $X_3^{(p)}$ uzayının ve özel olarak $X_3^{(1)} \equiv X_3$ uzayının elemanıdır.

$s < x$ olduğunu varsayalım ($s > x$ içinde benzer şekilde incelenir). (2.39) denkleminin ∞ dan s e kadar integralini alırsak,

$$\int_{\infty}^{s} K(x,s,\mu)ds = rg(x,s,\mu) - \int_{0}^{\infty}\Big\{r(x-\eta)g(x,\eta,\mu)(Q(\eta)-Q(x)) \\ -r''g(x,\eta,\mu)+2r'(x-\eta)\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta}\Big\}\int_{\infty}^{s}K(\eta,s,\mu)ds\,d\eta \tag{2.41}$$

(2.41) denklemi (2.20) denklemi ile aynı olur. (2.20) denklemi tek çözüme sahip olduğundan

$$\int_{\infty}^{s} K(x,s,\mu)\,ds = G(x,s,\mu) \tag{2.42}$$

olur. $s \neq x$ için $K(x,s,\mu)$ operatör fonksiyonu sürekli ise yani $h \to 0$ iken,

$$\|K(x,s+h,\mu) - K(x,s,\mu)\| \to 0$$

ise o zaman (2.42) eşitliğinden s e göre türev alabiliriz ve

$$K(x,s,\mu) = \frac{\partial G}{\partial s}(x,s,\mu) \tag{2.43}$$

olur.

Şimdi $K(x,s,\mu)$ operatör fonksiyonunun sürekliliğini inceleyelim. (2.39) denklemini aşağıdaki şekilde yazalım.

$$K(x,s,\mu) - \frac{\partial(rg)}{\partial s} = -\int_0^{\infty}\Big\{rg(x,\eta,\mu)(Q(\eta)-Q(x)) - r''g(x,\eta,\mu) \\ +2r'g'(x,\eta,\mu)\Big\}\frac{\partial rg}{\partial s}(\eta,s,\mu)d\eta - \int_0^{\infty}\Big\{rg(x,\eta,\mu)(Q(\eta)-Q(x)) \\ -r''g(x,\eta,\mu)+2r'g'(x,\eta,\mu)\Big\}\{K(\eta,s,\mu)-\frac{\partial rg}{\partial s}(\eta,s,\mu)\}d\eta \tag{2.44}$$

$$L(x,s,\mu) = K(x,s,\mu) \quad \frac{\partial rg}{\partial s}(x,s,\mu)$$

$$l(x,s,\mu) = -\int_0^\infty \Big\{ rg(x,\eta,\mu)(Q(\eta) - Q(x)) - r''g(x,\eta,\mu) + 2r'g'(x,\eta,\mu)\Big\} \frac{\partial rg}{\partial s}(\eta,s,\mu)d\eta$$

şeklinde gösterelim. Böylece (2.44) denklemi

$$L(x,s,\mu) = l(x,s,\mu) - \int_0^\infty \Big\{ rg(x,\eta,\mu)(Q(\eta) - Q(x)) - r''g(x,\eta,\mu) + 2r'g'(x,\eta,\mu)\Big\} L(\eta,s,\mu)d\eta \tag{2.45}$$

şeklini alır ve buradan

$$\Delta L(x,s,\mu) = \Delta l(x,s,\mu) - \int_0^\infty \Big\{ rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\Big\} \Delta L(\eta,s,\mu)d\eta \tag{2.46}$$

elde edilir. Burada

$$\Delta L(x,s,\mu) = L(x,s+h,\mu) - L(x,s,\mu)$$

$$\Delta l(x,s,\mu) = l(x,s+h,\mu) - l(x,s,\mu)$$

dır. (2.46) denklemini

$$\Delta L = \Delta l - N(\Delta L) \tag{2.47}$$

şeklinde yazalım.

Elemanları H uzayında dönüşüm yapan sınırlı $A(x,\eta)$ operatör fonksiyonları $(0 \leq x, \eta < \infty)$ olan ve normları

$$\|A(x,\eta)\|_{X_5} = \sup_{0 \leq x < \infty} \sup_{0 \leq \eta < \infty} \|A(x,\eta)\|_H$$

şeklinde tanımlanan Banach uzayını X_5 ile gösterelim. Lemma 2.4 de olduğu gibi N operatörü $\mu > 0$ büyük değerlerinde X_5 uzayında da büzen operatör olduğu gösterilir.

Buna göre $(I+N)^{-1}$ var ve sınırlıdır.

$$\|(I+N)^{-1}\|_{X_5} = A$$

olsun. (2.47) denkleminden

$$\|\Delta L\|_{X_5} \leq A\|\Delta l\|_{X_5} \tag{2.48}$$

bulunur. Burada $A = \|(I+N)^{-1}\|$ dir.

Lemma 2.7: Keyfi $\varepsilon > 0$ için öyle $\delta > 0$ vardır ki, $|h| < \delta$ olduğunda

$$\|L(x, s+h, \mu) - L(x, s, \mu)\|_{X_5} < \varepsilon \tag{2.49}$$

olur.

İspat: (2.48) den görüldüğü gibi lemmanın ispatı için aşağıdaki ifadenin doğruluğunu göstermek yeterlidir:

Keyfi $\varepsilon > 0$ için $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon)$ varsa ki, $|h| < \delta$ oldugunda

$$\|\Delta l\|_{X_5} < \frac{1}{A}\varepsilon \tag{2.50}$$

olur.

Sabit δ için $\zeta \geq \delta$ seçelim ve

$$\begin{aligned}
\Delta l(x, s, \mu) &= \int_0^{s-\zeta} \{rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\}\Delta_s \frac{\partial rg}{\partial s}(\eta, s, \mu)d\eta \\
&+ \int_{s-\zeta}^{s+\zeta} \{rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\}\Delta_s \frac{\partial rg}{\partial s}(\eta, s, \mu)d\eta \\
&+ \int_{s+\zeta}^{\infty} \{rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\}\Delta_s \frac{\partial rg}{\partial s}(\eta, s, \mu)d\eta \\
&= a_1 + a_2 + a_3
\end{aligned}$$

şeklinde yazalım.

$\|a_1\|_{X_5}$ i sınırlandıralım. a_1 için $\eta < s-\zeta$ dır yani, $s-\eta > \zeta$ $\quad -\eta+h+s > \zeta+h$ ve buradan $|h| < \delta$ olduğundan $-\eta + h + s > \zeta + h > \zeta - \delta$ olur. Buna göre η ve s in bu değerlerinde

$$\Delta \frac{\partial rg}{\partial s}(\eta, s, \mu) = \int_0^h \frac{\partial^2 rg}{\partial s^2}(\eta, s+t, \mu)dt$$

doğrudur. Böylece

$$\|\Delta \frac{\partial rg}{\partial s}(\eta, s, \mu)\|_H = \| \int_0^{|h|} \frac{\partial^2 rg}{\partial s^2}(\eta, s+t, \mu)\|_H dt$$

$$\leq \int_0^{|h|} \|[r''g - 2r'g' + rg''](\eta, s+t, \mu)\| dt$$

$$\leq \int_0^{|h|} [\|(r''g)(\eta, s+t, \mu)\|_H + \|(2r'g')(\eta, s+t, \mu)\|_H + \|(rg'')(\eta, s+t, \mu)\|_H] dt$$

olur.

$\int_0^{|h|} \|r\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(\eta, s+t, \mu)\|_H dt$ yi sınırlandıralım.

$\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}$ türevinin bir terimini alarak sınırlandırmayı yapalım, diğer terimlerde benzer şekilde sınırlandırılır.

$$\int_0^{|h|} \|r\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(\eta, s+t, \mu)\|_H dt = \frac{1}{2}\int_0^{|h|} \|r\chi\epsilon^{-\chi(s+t-\eta)}\|_H dt$$

$$\leq c\int_0^{|h|} \sup_{\alpha_1(x)+\mu\geq 1} (\alpha_1(x)+\mu)^{\frac{1}{2}} \epsilon^{-(s+t-\eta)(\alpha_1(x)+\mu)^{\frac{1}{2}}} dt$$

$$\leq \int_0^{|h|} \frac{1}{2} \sup_{\alpha_1(x)+\mu\geq 1} (\alpha_1(x)+\mu)^{\frac{1}{2}}(s+t-\eta)\epsilon^{-(s+t-\eta)(\alpha_1(x)+\mu)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{s+t-\eta} dt$$

$t \geq 0$ olmak üzere $t\epsilon^{-t} \leq 1$ olduğundan

$$\leq c\int_0^{|h|} \frac{dt}{s+t-\eta} \leq \frac{c}{2}\int_0^{|h|} \frac{dt}{\zeta-\delta} = \frac{c}{2(\zeta-\delta)}|h| < \frac{c\delta}{2(\zeta-\delta)}$$

bulunur. Böylece

$$\|a_1\|_{X_5} \leq \frac{c\delta}{2(\zeta-\delta)} \tag{2.51}$$

bulunur. Benzer işlemler $\|a_2\|_{X_5}$ ve $\|a_3\|_{X_5}$ içinde yapıldığında sonuçta [Levitan,1968]

$$\|\Delta l(\eta, s, \mu)\|_{X_5} \leq \varepsilon$$

bulunur. Böylece

$$K(x, s, \mu) - \frac{\partial rg}{\partial s}(x, s, \mu)$$

operatör fonksiyonunun s e göre sürekli olduğunu gösterdik.

$s = x$ noktasında $\frac{\partial rg}{\partial s}(x, s, \mu)$ hangi sıçrayışa sahip ise $\frac{\partial G}{\partial s}(x, s, \mu)$ de aynı sıçrayışa sahiptir.

$\frac{\partial rg}{\partial s}(x, s, \mu)$ nün sürekliliğini inceleyelim.

$\frac{\partial rg}{\partial s} = -r'g + r\frac{\partial g}{\partial s}$ olduğundan ikinci toplamın birinci terimi için işlem yapalım.

$r(x-s)$ fonksiyonu ifadesinden görüldüğü gibi $r\frac{\partial g}{\partial s}$, $\frac{\partial g}{\partial s}$ ile $x=s$ noktasında aynı sıçrayışa sahiptir.

$s<x$ için,

$$\|\frac{\partial g}{\partial s}(x,s+h,\mu)-\frac{\partial g}{\partial s}(x,s,\mu)\|_H$$

ifadesini sınırlandıralım. $t=x-s$ olsun. $\alpha_1(x)=\lambda$ olmak üzere spektral açılım formülünden

$$\begin{aligned}\|e^{-(t-h)\lambda}-e^{-t\lambda}\|_H &\leq \sup_{(\lambda+\mu)\geq 1}|e^{-(t-h)\sqrt{(\lambda+\mu)}}-e^{-t\sqrt{(\lambda+\mu)}}|\\ &\leq \sup_{(\lambda+\mu)\geq 1}|e^{-t\sqrt{(+\mu)}}(e^{h\sqrt{(\lambda+\mu)}}-1)|\\ &\leq \sup_{1\leq(\lambda+\mu)\leq N}|e^{-t\sqrt{(\lambda+\mu)}}(e^{h\sqrt{(\lambda+\mu)}}-1)|\\ &\quad+\sup_{(\lambda+\mu)\geq N}|e^{-t\sqrt{(\lambda+\mu)}}(e^{h\sqrt{(\lambda+\mu)}}-1)|\\ &=J_1+J_2\end{aligned}$$

J_2 için: $h\to 0$ olduğundan dolayı $|h|<t$ kabul edebiliriz. Buna göre $\forall\varepsilon>0$ için N yi öyle büyük seçebiliriz ki, $\lambda+\mu>N$ olduğunda

$$|e^{(t+h)\sqrt{\lambda+\mu}}-e^{t\sqrt{\lambda+\mu}}|\leq\frac{\varepsilon}{2} \tag{2.52}$$

olur.

J_1 için: N yi sabit tutalım. $1\leq\lambda+\mu\leq N$ olmak üzere h yı öyle seçebiliriz ki

$$|e^{h\sqrt{\lambda+\mu}}-1|\leq\frac{\varepsilon}{2} \tag{2.53}$$

olur.

(2.52) ve (2.53) den

$$|e^{-(t-h)\lambda}-e^{-t\lambda}|_H\leq\varepsilon$$

bulunur. Diğer terimler içinde benzer işlem yapılırsa

$$\|\frac{\partial g}{\partial s}(x,s+h,\mu)-\frac{\partial g}{\partial s}(x,s,\mu)\|_H\leq\varepsilon$$

bulunur.

$x \neq s$ için $\frac{\partial}{\partial s}(rg)$ nin sürekli olması, $x \neq s$ için $K(x,s,\mu) = \frac{\partial G}{\partial s}(x,s,\mu)$ nünde sürekli olduğunu gösterir.

$x = s$ sıçrama noktası için $\frac{\partial}{\partial s}(rg)$ yi inceleyelim.

$\frac{\partial}{\partial s}(rg) = -r'g + r\frac{\partial g}{\partial s}$ dir. $r'g$ süreklidir. (2.40) denkleminde ikinci terimler sürekli olduğundan ilk terimleri inceleyelim. $h > 0$ varsayalım.

$$r\frac{\partial g}{\partial s}\bigg|_{s=x+h} = -\frac{1}{2}r\epsilon^{-h\chi} \qquad r\frac{\partial g}{\partial s}\bigg|_{s=x-h} = \frac{1}{2}r\epsilon^{-h\chi}$$

$$\left[r\frac{\partial g}{\partial s}\bigg|_{s=x+h} + \frac{1}{2}I\right]\chi^{-2} = -\frac{1}{2}(r\epsilon^{-h\chi} - I)\chi^{-2} = \alpha(x,s,h)$$

olsun.

$$\|\alpha(x,s,h)\| = \| -\frac{1}{2}(r\epsilon^{-h\chi} - I)\chi^{-2}\|$$

$$\leq \frac{c}{2}\sup_{1\leq(+\mu)\leq N}\left|(\epsilon^{-h(\lambda+\mu)^{\frac{1}{2}}} - 1)\frac{1}{\lambda+\mu}\right| + \frac{c}{2}\sup_{(\lambda+\mu)\geq N}\left|(\epsilon^{-h(\lambda+\mu)^{\frac{1}{2}}} - 1)\frac{1}{\lambda+\mu}\right| \tag{2.54}$$

$1 \leq \lambda + \mu \leq N$ olduğunda h ı öyle küçük seçebiliriz ki,

$$|\epsilon^{-h(\lambda+\mu)^{\frac{1}{2}}} - 1| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

olur. $\varepsilon > 0$ keyfi sayı olsun. $(\lambda + \mu) \geq N$ olduğunda N yi öyle büyük seçebiliriz ki,

$$\frac{1}{\lambda+\mu} < \frac{1}{2}\varepsilon$$

sağlanır.

Böylece $\varepsilon > 0$ için $\exists\delta = \delta(\varepsilon)$ vardır ki, $0 < h < \delta$ olduğunda

$$\|\alpha(x,s,h)\|_H < \varepsilon$$

olur. Benzer şekilde $h \to 0$ iken $(h > 0)$

$$\sup_{0\leq x<\infty}\sup_{0\leq s<\infty}\left\|\left[r\frac{\partial g}{\partial s}\bigg|_{s=x-h} - \frac{1}{2}I\right]\chi^{-2}\right\|_H \to 0 \tag{2.55}$$

olduğu ispatlanır.

Buradan,

$$\sup_{0\le x<\infty}\sup_{0\le s<\infty}\left\|\left[\frac{\partial rg}{\partial s}\bigg|_{s=x+h}-\frac{\partial rg}{\partial s}\bigg|_{s=x-h}+I\right]\chi^{-2}\right\|_H\to 0\quad(h\to 0)\tag{2.56}$$

ve

$$\sup_{0\le x<\infty}\sup_{0\le s<\infty}\left\|\left[\frac{\partial G}{\partial s}\bigg|_{s=x+h}-\frac{\partial G}{\partial s}\bigg|_{s=x-h}+I\right]\chi^{-2}\right\|_H\to 0\quad(h\to 0)\tag{2.57}$$

olduğu ispatlanır.

$f\in\mathcal{D}=\mathcal{D}(Q(x))$ olsun. f elemanının $(Q(x)+\mu I)$ operatörünün tanım kümesine ait olduğu açıktır.

$Q(x)+\mu I$ operatörünü f fonksiyonuna uygulayalım. $(Q(x)+\mu I)f=g$ olsun. $Q(x)+\mu I$ nin tersi olduğundan

$$f=\chi^{-2}g$$

olur. (2.57) den

$$\left\|\left[\frac{\partial G}{\partial s}\Big|_{s=x+h}-\frac{\partial G}{\partial s}\Big|_{s=x-h}+I\right]f\right\|\le\left\|\left[\frac{\partial G}{\partial s}\Big|_{s=x+h}-\frac{\partial G}{\partial s}\Big|_{s=x-h}+I\right]\chi^{-2}\right\|_H\|g(x)\|_H$$

$$<\varepsilon\|g(x)\|_H$$

elde edilir. Böylece $x=s$ sıçrama noktasında sıçrayışının $-f$ e eşit olduğunu gösterdik. Yani

$$G'_s(x,x+0,\mu)-G'_s(x,x-0,\mu)=-I\tag{2.57'}$$

dır. Bununla $G(x,s;\mu)$ operatör fonksiyonun $s=x$ noktasında sıçrayışa sahip olduğunu gösterdik.

2.4.GREEN FONKSİYONUNUN İKİNCİ TÜREVİ

$$\frac{\partial G}{\partial s} = \frac{\partial rg}{\partial s} - \int_0^\infty \{rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\}\frac{\partial G}{\partial s}(\eta,s,\mu)d\eta \qquad (2.58)$$

ifadesini aşağıdaki şekilde yazalım.

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial s} - \frac{\partial rg}{\partial s} = & -\int_0^\infty \{rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\}\frac{\partial rg}{\partial s}(\eta,s,\mu)d\eta \\ & -\int_0^\infty \{rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\}\Big[\frac{\partial G}{\partial s} - \frac{\partial rg}{\partial s}\Big]d\eta\end{aligned} \qquad (2.59)$$

$$\mathcal{L}(x,s,\mu) = \frac{\partial G}{\partial s} - \frac{\partial rg}{\partial s} \quad \text{ve}$$

$$l(x,s,\mu) = -\int_0^\infty \{rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\}\frac{\partial rg}{\partial s}(\eta,s,\mu)d\eta$$

olmak üzere (2.59) denklemi

$$\mathcal{L}(x,s,\mu) = l(x,s,\mu) - \int_0^\infty \{rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\}\mathcal{L}(\eta,s,\mu)d\eta$$

şeklini alır. Bu denklemin s 'e göre türevi alınırsa:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = \frac{\partial l}{\partial s} - \int_0^\infty \{rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s}d\eta$$

bulunur.

$$\frac{\partial rg}{\partial s}(x,x+0,\mu) - \frac{\partial rg}{\partial s}(x,x-0,\mu) = -I$$

kullanılarak

$$\frac{\partial l}{\partial s} = \{rg(Q(s) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\} - \int_0^\infty \{rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\}\frac{\partial^2 rg}{\partial s^2}d\eta$$

$$\equiv l_1(x,s,\mu)$$

bulunur. l_1 in $X_1^{(-\frac{1}{2})}$ uzayına ait olduğunu gösterirsek Lemma 2.5 'e göre aşağıdaki denklemin çözümü var ve çözüm $X_1^{(-\frac{1}{2})}$ uzayına ait olur.

$$M(x,s,\mu) = l_1(x,s,\mu) - \int_0^\infty \{rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\}M(\eta,s,\mu)d\eta \qquad (2.60)$$

$l_1(x,s,\mu) \in X_4^{(-\frac{1}{2})}$ olduğunu gösterelim.

$$l_1(x,s,\mu) = rg(Q(s)-Q(x)) - r''g + 2r'g'$$
$$- \int_{|\eta-s|\le 1} \{rg(Q(\eta)-Q(x)) - r''g + 2r'g'\} \frac{\partial^2 rg}{\partial s^2} d\eta$$
$$- \int_{|\eta-s|>1} \{rg(Q(\eta)-Q(x)) - r''g + 2r'g'\} \frac{\partial^2 rg}{\partial s^2} d\eta$$
$$= a_1 + a_2 + a_3$$

$|\eta - s| > 1$ olduğunda $a_3 = 0$ dır. $a_1 \in X_4^{(-\frac{1}{2})} olur.$

$\|a_2 Q^{-\frac{1}{2}}(s)\|$ yi sınırlandıralım.

$$\|a_2 Q^{-\frac{1}{2}}(s)\| = \| \int_{|\eta-s|\le 1} [\{rg(Q(\eta)-Q(x)) - r''g + 2r'g'\} \frac{\partial^2 rg}{\partial s^2}] Q^{-\frac{1}{2}}(s) d\eta\|$$
$$\le \int_{|\eta-s|\le 1} \|[\{rg(Q(\eta)-Q(x)) - r''g + 2r'g'\} \frac{\partial^2 rg}{\partial s^2}] Q^{-\frac{1}{2}}(s)\| d\eta$$
$$\le \int_{|\eta-s|\le 1} \|(rg(Q(\eta)-Q(x) - r''g + 2r'g')(rg'' + r''g - 2r'g') Q^{-\frac{1}{2}}(s)\| d\eta$$
$$\le \int_{|\eta-s|\le 1} \|(rg(Q(\eta)-Q(x)) - r''g + 2r'g') r''g Q^{-\frac{1}{2}}(s)\| d\eta$$
$$+ \int_{|\eta-s|\le 1} \|(rg(Q(\eta)-Q(x)) - r''g + 2r'g')(-2r'g') Q^{-\frac{1}{2}}(s)\| d\eta$$
$$+ \int_{|\eta-s|\le 1} \|(rg(Q(\eta)-Q(x)) - r''g + 2r'g') rg'' Q^{-\frac{1}{2}}(s)\| d\eta$$
$$= J_1 + J_2 + J_3 \tag{2.61}$$

Burada $\|J_3\|$ ü sınırlandıralım.

$$\|J_3\| = \int_{|\eta-s|\le 1} \|\{rg[Q(\eta)-Q(x)] - r''g + 2r'g'\} rg'' Q^{-\frac{1}{2}}(s)\| d\eta$$
$$= \int_{|\eta-s|\le 1} \|\{rg[Q(\eta)-Q(x)] - r''g + 2r'g'\}$$
$$r(\frac{1}{2}\chi e^{-|\eta-s|\chi} - \chi(h-\chi)(h+\chi)^{-1} e^{-\chi(\eta+s)}) Q^{-\frac{1}{2}}(s)\| d\eta$$

birinci terim alınarak işleme devam edilirse,

$$\int_{|\eta-s|\leq 1}\|\{rg[Q(\eta)-Q(x)]-r''g+2r'g'\}e^{-|\eta-s|(Q(\eta)+\mu I)^{\frac{1}{2}}}Q^{-\frac{1}{2}}(s)\|d\eta$$
$$\leq \int_{|\eta-s|\leq 1}\|\{rg[Q(\eta)-Q(x)]-r''g+2r'g'\}e^{-|\eta-s|(Q(\eta)+\mu I)^{\frac{1}{2}}}\|$$
$$\|(Q(\eta)+\mu I)^{\frac{1}{2}}Q^{-\frac{1}{2}}(s)\|d\eta$$

$|\eta-s|\leq 1$ olduğunda $\|Q^{\frac{1}{2}}(\eta)Q^{-\frac{1}{2}}(s)\|\leq c$ koşulu kullanılarak

$$\leq c\int_{|\eta-s|\leq 1}\|\{rg[Q(\eta)-Q(x)]-r''g+2r'g'\}e^{-|\eta-s|\lambda}\|d\eta$$

bulunur. Bu integrali Lemma 2.4 deki gibi sınırlandırabiliriz. Diğer terimlerde sınırlandırılarak sonuçta

$$l_1\in X_1^{(-\frac{1}{2})}$$

bulunur.

(2.60) denkleminin çözümünün $f\in D\{Q(x)\}$ olduğunda

$$\frac{\partial L}{\partial s}(f)=M(f)\qquad (\eta\neq s)$$

denklemini sağladığını gösterelim.

$f\in D\{Q(x)\}$ olsun. O zaman (2.60) denklemi

$$M(f)=l_1(f)-\int_0^{\infty}\{rg[Q(\eta)-Q(x)]-r''g+2r'g'\}M(f)d\eta$$

şeklini alır. Bu ifadenin s_0 dan s e kadar integralini alalım.

$$\int_{s_0}^{s}M(x,s,\mu)(f)ds=\int_{s_0}^{s}l_1(x,s,\mu)(f)ds-\int_0^{\infty}\{rg[Q(\eta)-Q(x)]-r''g+2r'g'\}$$
$$\{\int_{s_0}^{s}M(\eta,s,\mu)(f)ds\}d\eta$$

Buradan

$$[\mathcal{L}(x,s,\mu)-\mathcal{L}(x,s_0,\mu)]=[l(x,s,\mu)-l(x,s_0,\mu)]f$$
$$-\int_0^{\infty}[rg(Q(\eta)-Q(x))-r''g+2r'g'][\mathcal{L}(\eta,s,\mu)-\mathcal{L}(\eta,s_0,\mu)]fd\eta \tag{2.62}$$

bulunur.

$$\int_{s_0}^{s} l_1(x,s,\mu)(f)ds = [l(x,s,\mu) - l(x,s_0,\mu)]f \tag{2.63}$$

olduğunu gösterirsek (2.62) denkleminin çözümünün tekliğinden aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\int_{s_0}^{s} M(x,s,\mu)ds = [\mathcal{L}(x,s,\mu) - \mathcal{L}(x,s_0,\mu)](f) \tag{2.64}$$

Buradan

$$M(x,s,\mu)(f) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s}(f) \tag{2.65}$$

bulunur.

$$\mathcal{L}(x,s,\mu) = \frac{\partial G}{\partial s}(x,s,\mu) - \frac{\partial rg}{\partial s}(x,s,\mu)$$

olduğundan (2.65) dan ve Lemma 2.6 dan $\eta \neq s$ de $\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}$ nin varlığı ve $X_4^{(-\frac{1}{2})}$ uzayına ait olduğu çıkar. Böylece geriye (2.63) ün ispatı kalır.

$$l(x,s,\mu) = -\int_0^\infty \{rg(Q(\eta) - Q(x) - r''g + 2r'g'\}\frac{\partial rg}{\partial s}(\eta,s,\mu)d\eta$$

dır. (s_0, s) açık aralığında keyfi $\bar{s}$ seçelim. O zaman $Q^{-1}(s)Q(\bar{s})$ de H da sınırlı operatördür. Gerçekten $s > \bar{s}$, $s = \bar{s} + k + r$ (k tamsayı $0 < r < 1$) olsun. $|x - s| \leq 1$ iken $\|Q(x)Q^{-1}(s)\| < c$ olduğunu varsayalım.

$$Q^{-1}(s)Q(\bar{s}) = Q^{-1}(s)Q(s-1)Q^{-1}(s-1)...Q^{-1}(\bar{s}+r)Q(\bar{s})$$

özdeşliği doğrudur. $Q^{-1}(s)Q(\bar{s})$ nin sınırlı olduğu yukarıdaki özdeşlikten ve koşuldan elde edilir.

l yi f e uygulayalım.

$$\begin{aligned}
l(x,s,\mu)(f) &= \int_0^\infty \left\{rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\right\}\frac{\partial(rg)}{\partial s}(\eta,s,\mu)(f)d\eta \\
&= \int\limits_{|x-\eta|\leq 1} \left\{rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\right\}\frac{\partial(rg)}{\partial s}(\eta,s,\mu)(f)d\eta \\
&\quad + \int\limits_{|x-\eta|>1} \left\{rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\right\}\frac{\partial(rg)}{\partial s}(\eta,s,\mu)(f)d\eta \\
&= a + b
\end{aligned}$$

$|x-\eta| > 1$ olduğunda $b = 0$ dır.

$a(x.s.\mu)$ yü iki halde inceleyelim.

1-) $|x-s| > 2$ olması halinde :

$$|\eta - s| \geq |x-s| - |x-\eta| > 1$$

integral altındaki fonksiyon kendisi ve s e göre türevi sınırlı operatördür.

2-) $|x-s| \leq 2$ olması halinde :

$$f = Q^{-1}(\eta)h \qquad h \in H$$

yazalım. Bu halde de integral altındaki operatörün kendisinin ve s e göre türevinin sınırlı olduğunu görüyoruz.Buradan (2.63) ün doğruluğu elde edilir.

$x \neq s$ için $G(x.s.\mu)$ Green Fonksiyonunun aşağıdaki denklemi sağladığını gösterelim:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} = G(x.s.\mu)[Q(s) + \mu I] \tag{2.66}$$

$$\frac{\partial G}{\partial s} = \frac{\partial (rg)}{\partial s} - \int_0^\infty \left[rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g' \right] \frac{\partial G}{\partial s}(\eta.s.\mu)d\eta$$

denkleminin s e göre türevini alırsak.

$$\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 (rg)}{\partial s^2} - \frac{\partial K}{\partial s} \tag{2.67}$$

olur. Burada

$$K = \int_0^\infty \left[rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g' \right] \frac{\partial G}{\partial s}(\eta.s.\mu)d\eta$$

$$K = \int_0^s \left[rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g' \right] \frac{\partial G}{\partial s}(\eta.s.\mu)d\eta + \int_s^\infty \left[rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g' \right] \frac{\partial G}{\partial s}(\eta.s.\mu)d\eta$$

dır. (2.57′) kullanılarak s e göre türevi

$$\frac{\partial K}{\partial s} = - \left\{ rg(Q(s) - Q(x)) - r''g + 2r'g' \right\} + \int_0^\infty \left\{ rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g' \right\} \frac{\partial^2 G}{\partial s^2}(\eta.s.\mu)d\eta$$

olur. Bu türev (2.67) de yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 r}{\partial s^2}g + 2\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial g}{\partial s} - r\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} &= \left\{rg(Q(s) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\right\} \\ &- \int_0^\infty \left\{rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\right\}\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}(\eta, s, \mu)d\eta\end{aligned} \tag{2.68}$$

bulunur. $g(x, s, \mu)$ denklemi sağladığından yani

$$-\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + (Q(x) + \mu I)g = 0 \qquad s \neq x$$

olduğundan

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} = (Q(x) + \mu I)g$$

olur. (2.68) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} - r''g + 2r'g' - rg(Q(x) + \mu I) &= \left\{rg(Q(s) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\right\} \\ &- \int_0^\infty \left\{rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\right\}\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}(\eta, s, \mu)d\eta\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} = rg[Q(s) + \mu I] - \int_0^\infty \left\{rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\right\}\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}(\eta, s, \mu)d\eta \tag{2.69}$$

$f \in D$ için

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}(f) &= rg[Q(s) + \mu I](f) \\ &- \int_0^\infty \left\{rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\right\}\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}(\eta, s, \mu)(f)d\eta\end{aligned} \tag{2.70}$$

elde edilir.

$[Q(s) + \mu I]f = \alpha$ olsun. Buna göre (2.70) i

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}[Q(s) + \mu I]^{-1}\alpha &= rg(x, s, \mu)\alpha \\ &- \int_0^\infty \left\{rg(Q(\eta) - Q(x)) - r''g + 2r'g'\right\}\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}[Q(s) + \mu I]^{-1}\alpha d\eta\end{aligned} \tag{2.71}$$

şeklinde yazabiliriz. (2.71) denklemi (2.20) denklemi ile karşılaştıralım. (2.20) nin tek çözüme sahip olduğunu gözönüne alırsak,

$$\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}[Q(s)+\mu I]^{-1}\alpha = G(x,s,\mu)\alpha \tag{2.72}$$

yı elde ederiz. Son eşitlikte $[Q(s)+\mu I]^{-1}\alpha = f$ ve $\alpha = [Q(s)+\mu I]f$ olduğunu gözönüne alırsak (2.72) ifadesi

$$\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}f = G(x,s,\mu)[Q(s)+\mu I]f \tag{2.73}$$

şeklinde yazılır. Burada her bir $s \geq 0$ için f elemanlar kümesi H da yoğun olduğundan (2.73) den

$$-\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} + G(x,s,\mu)[Q(s)+\mu I] = 0 \qquad (x \neq s)$$

bulunur.

2.5.SINIR KOŞULUNUN SAĞLANMASI

$G(x,s,\mu)$ nün

$$\frac{\partial G}{\partial s}(x,s,\mu)\bigg|_{s=0} - hG(x,s,\mu)\bigg|_{s=0} = 0 \tag{2.74}$$

sınır koşulunu sağladığını gösterelim.

$$G(x,s,\mu) = r(x-s)g(x,s,\mu) - \int_0^\infty \{rg(Q(\eta)-Q(x)) - r''g + 2r'g'\}\, G(\eta,s,\mu)d\eta$$

denkleminin $s=0$ noktasındaki türevi

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial s}(x,s,\mu)\bigg|_{s=0} &= \frac{\partial(r(x-s)g(x,s,\mu))}{\partial s}\bigg|_{s=0} \\ &- \int_0^\infty \{rg(Q(\eta)-Q(x)) - r''g + 2r'g'\}\,\frac{\partial G(\eta,s,\mu)}{\partial s}\bigg|_{s=0} d\eta\end{aligned} \tag{2.75}$$

dır.

$$\begin{aligned}hG(x,s,\mu)\bigg|_{s=0} &= r(x-s)g(x,s,\mu)h\bigg|_{s=0} \\ &- \int_0^\infty \Big\{rg(Q(\eta)-Q(x)) - r''g + 2r'g'\Big\}G(\eta,s,\mu)\bigg|_{s=0} hd\eta\end{aligned} \tag{2.76}$$

(2.75) ve (2.76), (2.74) de yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial s}(x,s,\mu)\bigg|_{s=0} - hG(x,s,\mu)\bigg|_{s=0} &= \frac{\partial(rg)}{\partial s}\bigg|_{s=0} \\ - \int_0^\infty \Big\{rg(Q(\eta)-Q(x)) - r''g + 2r'g'\Big\}\frac{\partial G}{\partial s}\bigg|_{s=0} &- rgh\bigg|_{s=0} \\ + \int_0^\infty \Bigg[\Big\{rg(Q(\eta)-Q(x)) - r''g + 2r'g'\Big\}hG(\eta,s,\mu)\bigg|_{s=0}\Bigg]d\eta\end{aligned} \tag{2.77}$$

(2.77) denkleminde

$$\frac{\partial(rg)}{\partial s}\bigg|_{s=0} - hrg\bigg|_{s=0} = 0$$

olduğundan denklem

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial s}\bigg|_{s=0} - hG\bigg|_{s=0} &= -\int_0^\infty \Big\{rg(Q(\eta) - Q(x)) + 2r'g' - r''g\Big\}\frac{\partial G}{\partial s}\bigg|_{s=0} d\eta \\ &+ \int_0^\infty \Big\{rg(Q(\eta) - Q(x)) + 2r'g' - r''g\Big\}hG(\eta,s,\mu)\bigg|_{s=0} d\eta \\ &= -\int_0^\infty \Big\{rg(Q(\eta)-Q(x))+2r'g'-r''g\Big\}\left[\frac{\partial G}{\partial s} - hG(\eta,s,\mu)\right]_{s=0} d\eta\end{aligned}$$

şeklini alır.

(2.20) denklemiyle karşılaştırdığımızda Nonhomogen denklemin tek çözümü olduğundan karşılık gelen homogen denkleminde tek çözümü yani sadece sıfır çözümü vardır.

Böylece

$$\frac{\partial G}{\partial s}(x,s,\mu) - hG(x,s,\mu) = 0$$

bulunur. Bununla aşağıdaki teorem ispatlanmış oldu.

Teorem 2.1: 1)-5) koşulları sağlanıyor ise o zaman μ nün büyük değerlerinde L operatörünün rezolventi $(L+\mu I)^{-1}$ integral operatörüdür ve bunun çekirdeği $G(x,s,\mu)$ $(0 \le x, s < \infty)$ Green fonksiyonu olarak bilinen operatör değerli fonksiyon olmak üzere aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1) $G(x,s,\mu)$ (x,s) değişkenlerinin kuvvetli sürekli fonksiyonudur.

2) Kuvvetli anlamda $\frac{\partial G}{\partial s}$ mevcuttur ve

$$\frac{\partial G}{\partial s}(x,x+0,\mu) - \frac{\partial G}{\partial s}(x,x-0+\mu) = -I$$

3) $$-G''_{ss} + G[Q(s)+\mu I] = 0 \qquad (s \neq x)$$

4) $$\frac{\partial G}{\partial s}|_{s=0} - hG|_{s=0} = 0$$

ispattan görüldüğü gibi $G(x,s,\mu)$ fonksiyonu

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \|G(x,s,\mu)\|_2^2 dx ds < \infty$$

koşulunu sağlıyor ve bundan dolayı $G(x,s,\mu)$ çekirdeği ile oluşturulan integral operatör H_1 de $(H-S)$ operatörü olur.

$Q(x)$ in 1)-5) özellillerini sağlamasına ait örnekler (Kostyuchenko et. al, 1967) çalışmasında verilmiştir.

Örnek 2.1. Özel olarak $H = R^n$ (n boyutlu Euclid uzayı halinde) ise o zaman

$$Q(x) = \begin{pmatrix} q_{11}(x) & q_{12}(x) & \dots & q_{1n}(x) \\ q_{21}(x) & q_{22}(x) & \dots & q_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ q_{n1}(x) & q_{n2}(x) & \dots & q_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

olur ve (2.7) (2.8) problemi denklemler sistemi için sınır değer problemine indirgenir. Eğer $n = 1$ ise o zaman (2.7) - (2.8) problemi singüler kendine eş olmayan adi Sturm-Liouville problemine indirgenir. Elde ettiğimiz sonuç (Teorem 2.1) Sturm-Liouville problemi için de ilk olarak bulunmuştur. İşlemlerden görüldüğü gibi kullandığımız yöntem (parametriks yöntemi olarak bilinen) H nin sonsuz boyutlu ve $Q(x)$ sınırsız operatör halini de kapsamaktadır.

Örnek 2.2. Kuantum mekaniğinde rastlanan basit yerel olmayan karşılıklı etkiye sahip Schödinger operatörünü gözönüne alalım (Dolph, 1961).

$$A\psi = -\Delta\psi + \int v(r)v(r')\psi(r')dr'$$

$r = (x, y, z) \qquad r' = (x', y', z')$

A ya karşılık gelen sınır değer problemini yazalım.

$$-\Delta U + \int\int\int_s K(x, x')U(x')dx' = \lambda U \tag{2.78}$$

$$U\Big|_c = 0 \quad , \quad \left[\frac{\partial U}{\partial x_1} - hU\right]\Big|_{x_1=0} = 0 \tag{2.79}$$

$x = (x_1, x_2, x_3) \qquad x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$

Burada s tabanı ϱ düzlem bölgesi olan silindir:

$$(x_2, x_3) \in \varrho \qquad\qquad 0 \le x_1 < \infty$$

c silindirin sınırıdır $K(x, x')$ çekirdeğinin

$$K(x, x') = \overline{K(x', x)}$$

ve

$$\int_s\int_s |K(x, x')|^2 dx dx' < \infty \quad (dx = dx_1 dx_2 dx_3 \ , \ dx' = dx'_1 dx'_2 dx'_3)$$

olduğunu varsayalım. Bu halde (2.78) (2.79) problemi

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + Q(x_1)U = \lambda U \tag{2.80}$$

$$U'(0) - hU(0) = 0 \tag{2.81}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$Q(x_1)U = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} + \int\int\int_s K(x, x')U(x')dx'$$

dır. Böylece (2.78) (2.79) probleminin Green fonksiyonu tezde incelediğimiz (2.80) (2.81) probleminin Green fonksiyonunun incelenmesine indirgenir.

3.0 BÜTÜN EKSENDE TANIMLANMIŞ OPERATÖR KATSAYILI STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN AYRILMA PROBLEMİ

3.1. PROBLEMİN ORTAYA KONULMASI

$L_2(J)$ $(J=(a,b)$ $-\infty \le a < b \le \infty)$ Hilbert uzayında

$$-y'' + Q(x)y \tag{3.1}$$

Sturm-Liouville diferansiyel denklemini gözönüne alalım. Burada $Q(x)$ reel değerli sürekli bir fonksiyondur.

(3.1) ifadesi ile L operatörünü oluşturalım. L nin tanım kümesi $\mathcal{D}(L)$, aşağıdaki özellikleri sağlayan $y(x) \in L_2(J)$ lerden oluşsun:

1-) $y(x)$, J de birinci türeve sahip ve $y'(x)$ türev fonksiyonu J ye ait her bir sonlu aralıkta mutlak sürekli olsun.

2-) $y'' + Q(x)y \in L_2(J)$ olsun.

$y(x) \in \mathcal{D}(L)$ olduğunda $Ly = -y'' + Q(x)y$ olduğunu kabul edelim. Böyle tanımlanmış L operatörüne (3.1) diferansiyel ifadesi ile oluşturulan operatör denir. Genelde (3.1) ifadesi ile oluşturulan her bir operatöre Sturm-Liouville operatörü denir. Böyle operatörün incelenmesine (özdeğerlerin bulunması, özvektörlerin tam sistem oluşturması v.s. problemleri) Sturm-Liouville problemi denir.

(3.1)de x in değişim kümesi sonlu aralık ve $Q(x)$ bu aralıkta sürekli ise o zaman L operatörüne regüler, aksi takdirde L ye singüler operatör denir.

Gözönüne alacağımız halde serbest değişken x in tanım kümesi sonsuz aralık olacaktır. Başka bir deyişle çalışmamızda operatör katsayılı singüler Sturm-Liouville operatörü olacaktır.

Singüler Sturm-Liouville problemi Matematiğin, Kuantum Fiziğinin birçok problemlerinin incelenmesinde büyük öneme sahiptir. Bundan dolayı Sturm-Liouville problemine ait onlarca kitap (Levitan et. al, 1991) (Titchmarsh, 1962) ve yüzlerce makale yazılmıştır(Fulton et. al, 1994).1967 yılında İngiliz Matematikçiler Everitt W.N. ve M.Girtz seri makaleler ve çalışmalarla $Q(x)$, reel değerli fonksiyon olmak üzere (3.1) ifadesi ile oluşturulan L operatörü için ayrılma tanımını vermiş ve $Q(x)$ in çeşitli koşullarda L operatörü için ayrılma teoremleri ispatlamışlardır.

Operatörün ayrılma tanımının kendisi de çeşitli olarak tanımlanır. Bunlardan çok kullanılan birini verelim.

Tanım: $y \in L_2(J)$ ve $Ly = -y'' + Q(x)y \in L_2(J)$ olduğunda, $-y''(x) \in L_2(J)$ ise o zaman L ye ayrılabilir operatör denir.

Tanımdan görüldüğü gibi L ayrılabilirse o zaman $Q(x)y$ de $L_2(J)$ uzayına ait olur. Daha sonra bu problem genel diferansiyel ifadeler için genelleştirilmiştir. 1970 yıllarından bu yana operatör katsayılı diferansiyel ifadelerin ayrılma problemleri Alma-Atada M.Otelbayev (Otelbayev, 1990), Düşenbede K.Baymatov, Bakü-de M.Gasimov, F.Maksudov,M.Bayramoğlu ve öğrencileri uğraşmışlardır. Yapılan çalışmalar çok fazla olduğundan bunları incelemeyeceğiz fakat yeri geldiğinde söz edeceğiz.

Biz bu bölümde (3.1) ifadesinde $Q(x)$, x in her bir değerinde ayrılabilir Hilbert uzayında kendine eş operatör olduğunda, bu ifade ile oluşturulan L operatörünün ayrılabilirliğini inceleyeceğiz.

Ortaya konulan problemin açık olması için özel bir halde L operatörünün ayrılabilirliğini gösterelim. Bunun için ayrılabilirliğin bir başka tanımını kullanalım:

Tanım: $y(x) \in L_2(J)$, $Ly = -y'' + Q(x)y \in L_2(J)$ olduğunda $\sqrt{|Q(x)|}\,y \in L_2(J)$ ve $y' \in L_2(J)$ ise o zaman L operatörüne ayrılabilir denir.

$Q(x)$ üzerine bazı zayıf koşullar eklendiğinde L nin bu anlamda ayrılabilirlik problemi W.N.Everitt ve M.Giertz'in (Everitt et. al, 1973) çalışmasında incelenmiştir. Basitlik için J yerine $R_1^+ = [0, \infty)$ alarak L nin ayrılabilirliğini gösterelim.

Önerme: $J = R_1^+$ olsun. Eğer $Q(x) \geq 0$ $(x \in R_1^+)$ ise o zaman L operatörü ayrılabilirdir.

İspat: $b > 0$ herhangi sonlu sayı ve $y(x) \in \mathcal{D}(L)$ olsun. $y(x) \in L_2(R_1^+)$ olduğundan $y(x) \in L_2(0, b)$ olur.

$Q(x)$ sürekli olduğundan $Q(x)y(x) \in L_2(0, b)$ olacaktır. Diğer taraftan

$$-y''(x) + Q(x)y(x) \in L_2(R_1^+)$$

olduğundan

$$-y''(x)+Q(x)y(x) \in L_2(0,b)$$

yazabiliriz.

$Q(x)y(x) \in L_2(0,b)$ yi gözönüne alırsak son ifadeden $-y''(x) \in L_2(0,b)$ bulunur. Böylece $y(x)$ ve $-y''(x)+Q(x)y$ fonksiyonlarının $L_2(R_1^+)$ anlamında iç çarpımı yazabiliriz:

$$\begin{aligned}(y,-y''+Q(x)y) &= \int_0^\infty y(x)\Big[-y''(x)+Q(x)y(x)\Big]dx\\ &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b y(x)\Big[-y''(x)+Q(x)y(x)\Big]dx\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\int_0^b y(x)\Big[-y''(x)\Big]dx+\int_0^b Q(x)y^2(x)dx\right)\\ &= -\lim_{b\to\infty}\left[y(x)y'(x)\Big|_0^b-\int_0^b (y'^2(x)+Q(x)y^2(x)dx\right]\end{aligned}$$

İkinci toplam bir pozitif sayıya veya $+\infty$ a eşit olacaktır. Eğer pozitif sayıya eşitse o zaman

$$\int_0^\infty y'^2 dx \qquad \text{ve} \qquad \int_0^\infty Q(x)y^2(x)dx$$

sonlu olacaktır yani $y'(x) \in L_2(R_1^+)$ ve $\sqrt{Q(x)}y(x) \in L_2(R_1^+)$ olur. Eğer ikinci toplamın limiti $+\infty$ ise o zaman

$$\lim_{b\to\infty} y(b)y'(b)=+\infty$$

olmalıdır. $y(x) \in L_2(0,\infty)$ olduğunda $\lim_{b\to\infty} y(b)y'(b) = +\infty$ olamaz. Çünkü $(y^2)'|_{x=b} = 2y(b)y'(b) \to \infty$ ise $y^2(x)$ monoton artan sürekli fonksiyon olur ki bu da $\int_0^\infty y^2(x)dx < \infty$ koşuluna aykırıdır.

Böylece $y(x) \in \mathcal{D}(L)$ olduğunda

$$y'(x) \in L_2(R_1^+) \quad \text{ve} \quad \sqrt{Q(x)}y(x) \in L_2(R^+)$$

olduğu ispatlandı.

Sturm-Liouville operatörünün $Q(x)$ üzerine eklenen çeşitli koşullar içinde ayrılabilirliğine ait çalışmalar vardır. Bu tür çalışmaların büyük bir kısmı K.T. Minbayev ve M.Otelbayev (Minbayev et. al, 1988) kitabında yer almıştır.

Şimdi $Q(x)$ in alttan sınırlı olmadığı halde, ayrılma probleminin sağlanmadığına ait bir örnek verelim.

Örnek 3.1. $Q(x) = -4x^2 + \frac{2}{x^2} - 2\frac{\cos x^2}{\sin x^2}$ olmak üzere $y'' + Q(x)y$ ifadesini $L_2(1,\infty)$ uzayında gözönüne alalım.

$y = \frac{\sin x^2}{x}$ olsun. $\frac{\sin x^2}{x} \in L_2(1,\infty)$

$$-y'' + Q(x)y = 0 \in L_2(1,\infty)$$

olmasına rağmen

$$y'' = -4x\sin x^2 - 2\frac{\cos x^2}{x} + 2\frac{\sin x^2}{x^3} \notin L_2(1,\infty)$$

dır. Böylece

$$-y'' - \left(4x^2 - \frac{2}{x^2} + 2\frac{\cos x^2}{\sin x^2}\right)y \qquad 1 \le x < \infty$$

diferansiyel operatörü ayrılabilir değildir.

3.2.OPERATÖR KATSAYILI STURM-LIOUVILLE DENKLEMİNİN AYRILABİLİRLİĞİ

$H_1 = L_2(-\infty, \infty; H)$ da

$$-y'' + Q(x)y \tag{3.2}$$

diferansiyel ifadesini gözönüne alalım. $Q(x)$, x in $(-\infty, \infty)$ aralığında alınmış her bir değerinde H da dönüşüm yapan bir kendine eş operatör olmak üzere aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım:

1) $Q(x)$ operatör ailesi x den $(-\infty < x < \infty)$ bağımsız olarak aynı tanım kümesine sahip olsun. Bu kümeyi $\mathcal{D}$ ile gösterelim.

2) $Q(x) \geq I$ ve $\forall f \in \mathcal{D}$ için $Q(x)f$ $(-\infty, \infty)$ aralığında kuvvetli sürekli bir fonksiyon olsun.

3) $|x - y| \leq 2$ olduğunda

$$\|(Q(x) - Q(y))Q^{-1}(y)\| < \delta$$

olsun. $\delta > 0$ herhangi bir sayıdır.

(3.2) ifadesi ile L_0 operatörünü oluşturalım. L_0 ın tanım kümesi $\mathcal{D}(L_0)$ aşağıdaki şartları sağlayan $y(x)$ fonksiyonlarından oluşsun:

1) $y(x)$, $(-\infty, \infty)$ da kompakt supportta sahip. $Q(x)y(x)$ sürekli olsun.

2) $-y''(x) + Q(x)y(x) \in L_2(-\infty, \infty; H)$ olsun.

$$L_0 y = -y'' + Q(x)y \quad , \quad y \in \mathcal{D}(L_0)$$

operatörünü oluşturduk. $Q(x)$ lerin tanım kümesi olan $\mathcal{D}$, H de hemen her yerde yoğun olduğundan ve $\forall f \in \mathcal{D}$ için $Q(x)f$. $(-\infty, \infty)$ da sürekli olduğundan dolayı L_0 operatörünün tanım kümesi $\mathcal{D}(L_0)$ $L_2(-\infty, \infty; H)$ uzayında hemen her yerde yoğun lineer manifold oluşturur.

L_0, $L_2(-\infty, \infty; H)$ da alttan sınırlı simetrik operatördür. L_0 ın kapanması olan L nin kendine eş operatör olduğunu varsayalım.

Biz bu çalışmamızda L operatörünün ayrılabilirliğini inceleyeceğiz. Ayrılabilirliğin tanımına göre $y(x)$, $\mathcal{D}(L)$ ye ait herhangi fonksiyon olduğunda $y''(x)$ ve $Q(x)y(x)$ fonksiyonlarınında $L_2(-\infty, \infty; H)$ uzayına ait olduklarını göstereceğiz.

L operatörünün regüler λ değerlerindeki (λ komplex sayı) rezolventini $R_\lambda = (L + \lambda I)^{-1}$ ile gösterelim. Rezolventin tanımına göre R_λ operatörü H_1 uzayında sınırlı bir operatördür.

Aşağıdaki yardımcı teoremi ispatlayalım.

Lemma 3.1: Eğer $Q(x)R_\lambda$operatörü H_1 de sınırlı ise o zaman L operatörü H_1 de ayrılabilirdir.

İspat: $y(x)$, $\mathcal{D}(L)$ ye ait keyfi eleman olsun. O zaman

$$(L + \lambda I)y = f \qquad f \in H_1$$

olacaktır. Buradan

$$y = R_\lambda f$$

ve

$$Q(x)y = Q(x)R_\lambda f$$

yazabiliriz. $Q(x)R_\lambda$ sınırlı operatör olduğundan $Q(x)R_\lambda f \in H_1$ yani $Q(x)y \in H_1$ olacaktır.

3.3. L OPERATÖRÜNÜN AYRILABİLİRLİĞİ İÇİN LOKALİZASYON METODU

L operatörünün ayrılabilirliğini göstermek için lokalizasyon metodunu kullanacağız. Bu metodla

$$-y'' + Q(x)y$$

diferansiyel ifadesi ile çeşitli aralıklarda operatörler oluşturulur ve bunların yardımıyla gözönüne alınan operatörün özellikleri elde edilir.

Bu metod ilk kez R.İsmagilov (Ismagilov. 1963) tarafından kullanılmış. M. Otelbayev (Otelbayev. 1977) ve öğrencileri (Minbayev et. al. 1988) tarafından geliştirilmiştir.

L_j ile $L_2(j-1, j+1; H)$ uzayında

$$-y'' + Q(x)y \qquad j-1 < x < j+1 \tag{3.3}$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y(j-1) = y(j+1) = 0$$

sınır şartları ile oluşturulan operatörü gösterelim.

Burada $j = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ herhangi tamsayıdır. Herbir L_j operatörü kendine eşlenik pozitif tanımlı operatördür.

$w(x)$, $(-\infty, \infty)$ da tanımlanmış sonsuz türeve sahip ve aşağıdaki özellikleri sağlayan fonksiyon olsun.

$$w(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le 1 \\ 0 & |x| \ge 1.5 \end{cases}$$

$\varphi_j(x) = w(x-j)$ $\qquad j = 0, \pm1, \pm2, \ldots$olsun. $e_j(x)$ ile

$$e_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |x-j| \le 1 \\ 0 & |x-j| > 1 \end{cases}$$

fonksiyonunu gösterelim.

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} e_j(x) = 1 \tag{3.4}$$

olduğu kolayca görülür. $f \in H_1$ olsun. $\lambda > 0$ olmak üzere M_λ ile

$$M_\lambda f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j (L_j + \lambda I)^{-1} \psi_j f$$

operatörünü gösterelim.

$$(L + \lambda I) M_\lambda f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (L + \lambda I) \varphi_j (L_j + \lambda I)^{-1} \psi_j f \tag{3.5}$$

$(j - 1.5, j + 1.5)$ açık aralığında $L + \lambda I$ ve $L_j + \lambda I$ opreatörleri çakıştığından ve $\varphi_j(x)$, $(j - 1.5, j + 1.5)$ açık aralığında sonlu desteğe sahip olduğundan

$$\begin{aligned} (L + \lambda I) M_\lambda f = & - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\varphi_j'' (L_j + \lambda I)^{-1} \psi_j f + 2\varphi_j' \frac{d}{dx} (L_j + \lambda I)^{-1} \psi_j f \right] \\ & + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j (L_j + \lambda I)(L_j + \lambda I)^{-1} \psi_j f \\ & = B_\lambda f + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j \psi_j f \end{aligned} \tag{3.6}$$

yazabiliriz. Burada

$$B_\lambda f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\varphi_j'' (L_j + \lambda I)^{-1} \psi_j f + 2\varphi_j' \frac{d}{dx} (L_j + \lambda I)^{-1} \psi_j f \right]$$

dir. $\varphi_j \psi_j = \psi_j$ ve (3.4) şartını gözönüne alırsak, (3.6) ifadesi

$$(L + \lambda I) M_\lambda f = (I + B_\lambda) f \tag{3.7}$$

şeklini alır. (3.7) nin her iki tarafına $(L + \lambda I)^{-1}$ operatörünü uygularsak

$$M_\lambda f = (L + \lambda I)^{-1} (I + B_\lambda) f \tag{3.8}$$

yazabiliriz. $(I + B_\lambda) = g$ veya $f = (I + B_\lambda)^{-1} g$ olsun. O zaman (3.8) eşitliği

$$M_\lambda (I + B_\lambda)^{-1} g = (L + \lambda I)^{-1} g \tag{3.9}$$

olur.

H_1 de dönüşüm yapan B_λ operatörünün normunu değerlendirelim. $f \in H_1$ olsun.

$$\|B_\lambda f\|^2 = \|\sum_{j=-\infty}^{\infty}[\varphi_j''(L_j+\lambda I)^{-1}\psi_j f + 2\varphi_j'\frac{d}{dx}(L_j+\lambda I)^{-1}\psi_j f]\|^2$$

$$\leq 8\sum_{j=-\infty}^{\infty}\|\varphi_j''(L_j+\lambda I)^{-1}\psi_j f\|^2 + 8\sum_{j=-\infty}^{\infty}\|\varphi_j'\frac{d}{dx}(L_j+\lambda I)^{-1}\psi_j f\|^2 \tag{3.10}$$

(3.10) eşitsizliğinin bulunmasında φ_j' ve φ_{j+k} $(k \geq 2)$ fonksiyonlarının desteklerinin kesişmediği gözönüne alınmıştır. (3.10) un sağ tarafındaki birinci toplama ait terimleri değerlendirelim.

$$\|\varphi_j''(L_j+\lambda I)^{-1}\psi_j f\|^2 \leq \frac{c^2}{\lambda^2}\|\psi_j f\|^2 = \frac{c^2}{\lambda^2}\int_{-\infty}^{\infty}\|\psi_j f\|_H^2 dx = \frac{c^2}{\lambda^2}\int_{j-1}^{j+1}\|f(x)\|_H^2 dx \tag{3.11}$$

Böylece

$$\|\varphi_j''(L_j+\lambda I)^{-1}\psi_j f\|^2 \leq \frac{c^2}{\lambda^2}\int_{j-1}^{j+1}\|f(x)\|_H^2 dx$$

bulunur. İkinci toplam

$$\left\|\varphi_j'\frac{d}{dx}(L_j+\lambda I)^{-1}\psi_j f\right\|^2 \leq c^2\|\frac{d}{dx}(L_j+\lambda I)^{-1}\|^2\|\psi_j f\|^2 \leq c^2\|\frac{d}{dx}(L_j+\lambda I)^{-1}\|^2\int_{j-1}^{j+1}\|f(x)\|^2 dx$$

dır. Aşağıdaki Lemmayı ispatlayalım.

Lemma 3.2: $\|\frac{d}{dx}(L_j+\lambda I)^{-1}\| \leq c\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ $(\lambda > 0)$ eşitsizliği doğrudur.

İspat: $-y'' + Q(x)y = f$ denkleminin her iki yanını $y(x)$ ile skaler çarpıp $y(j-1) = y(j+1) = 0$ ı gözönüne alalım. O zaman

$$\int_{j-1}^{j+1}(-y'' + Q(x)y, y)dx = \int_{j-1}^{j+1}(f, y)dx$$

$$\int_{j-1}^{j+1} [\|y'\| + (Q(x)y, y)]\, dx = \int_{j-1}^{j+1} (f, y) dx$$

olur. Bu eşitsizlikte $Q(x) = Q^*(x) \geq I$ olduğunu gözönüne alır ve Schwartz eşitsizliğini kullanırsak

$$\int_{j-1}^{j+1} \|y'\|^2 dx \leq \left(\int_{j-1}^{j+1} \|f(x)\|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{j-1}^{j+1} \|y(x)\|^2 dx\right)^{1/2}$$

elde ederiz.

$$y(x) = (L_j + \lambda I)^{-1} f(x)$$

olduğundan

$$\|y(x)\|^2_{\Delta_j} \leq \frac{1}{\lambda^2} \|f\|^2_{\Delta_j} = \frac{1}{\lambda^2} \int_{j-1}^{j+1} \|f(x)\|^2 dx$$

olur. Burada $\Delta_j = (j-1, j+1)$ dır.

$$\int_{j-1}^{j+1} \|y'\|^2 dx \leq \frac{1}{\lambda} \int_{j-1}^{j+1} \|f(x)\|^2 dx$$

$$y' = \frac{d}{dx} (L_j + \lambda I)^{-1} f$$

olduğunu gözönüne alırsak sonuncu eşitsizlikten

$$\left\|\frac{d}{dx} (L_j + \lambda I)^{-1} f\right\|_{\Delta_j} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|f\|_{\Delta_j}$$

elde edilir. f , $L_2(\Delta_j)$ nin keyfi elemanı olduğundan

$$\left\|\frac{d}{dx} (L_j + \lambda I)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

bulunur. Böylece (3.10) daki ikinci toplama ait terimler

$$\left\|\varphi_j' \frac{d}{dx} (L_j + \lambda I)^{-1} \psi_j f\right\|^2 \leq \frac{c}{\lambda} \int_{j-1}^{j+1} \|f(x)\|^2 dx \qquad \lambda \geq 1 \tag{3.12}$$

olur. (3.10), (3.11), (3.12) eşitsizliklerini gözönüne alarak,

$$
\begin{aligned}
\|B_\lambda f\|^2 &\le \frac{c^2}{\lambda^2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{j-1}^{j+1}\|f(x)\|^2dx + \frac{c}{\lambda}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{j-1}^{j+1}\|f(x)\|^2dx \\
&\le \frac{c_1}{\lambda}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{j-1}^{j+1}\|f(x)\|^2dx \\
&= \frac{c_1}{\lambda}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\int_{j-1}^{j}\|f(x)\|^2dx + \int_{j}^{j+1}\|f(x)\|^2dx\right) \\
&= \frac{c_1}{\lambda}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{j-1}^{j}\|f(x)\|^2dx + \frac{c_1}{\lambda}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{j}^{j+1}\|f(x)\|^2dx \\
&= \frac{2c_1}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\|f(x)\|^2dx = \frac{2c_1}{\lambda}\|f\|^2
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece

$$\|B_\lambda\| \le 2\frac{c_1}{\lambda}$$

olur. Buradan λ nın büyük pozitif değerlerinde $\|B_\lambda\|$ nın istenildigi kadar küçük olduğu görünür. Bundan dolayı

$$M_\lambda = (L+\lambda I)^{-1}(I+B_\lambda)$$

formülünü

$$(L+\lambda I)^{-1} = M_\lambda(I+B_\lambda)^{-1}$$

şeklinde yazabiliriz.

Lemma 3.3: Eğer $Q(x)M_\lambda$ sınırlı ise o zaman L operatörü ayrılabilirdir.

İspat: Lemma 3.1 e göre $Q(x)(L+\lambda I)^{-1}$ sınırlı ise o zaman L ayrılabilirdir.

$$(L+\lambda I)^{-1} = M_\lambda(I+B_\lambda)^{-1}$$

eşitliğinden Lemma 3.3 ün ispatı elde edilir.

Lemma 3.4: Eğer $\sup_j \|Q(x)(L_j+\lambda I)^{-1}\| < \infty$ ise o zaman $Q(x)M_\lambda$ operatörü sınırlıdır.

İspat:

$$
\begin{aligned}
\|Q(x)M_\lambda f\|^2 &= \left\| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j(x)Q(x)(L_j+\lambda I)^{-1}\psi_j f \right\|^2 \\
&\leq 4 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\|\varphi_j Q(x)(L_j+\lambda I)^{-1}\psi_j f\right\|^2 \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\|\varphi_j Q(x)(L_j+\lambda I)^{-1}\right\|^2 \|\psi_j f\|^2 \\
&\leq \sup_j \left(\left\|\varphi_j Q(x)(L_j+\lambda I)^{-1}\right\|^2 \right) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|\psi_j f\|^2 \\
&= 2A\|f\|_{H_1}^2
\end{aligned}
$$

Böylece $\|Q(x)M_\lambda f\|^2 \leq 2A\|f\|^2$ olur. Buradan

$$\|Q(x)M_\lambda\| \leq \sqrt{2A}$$

bulunur ve Lemma ispatlanmış olur.

$\sup_j \|Q(x)(L_j+\lambda I)^{-1}\|$ nin sonlu olduğunu gösterelim. $|x-y| \leq 2$ olduğunda

$$\|(Q(x)-Q(y))Q^{-1}(y)\| \leq \delta \tag{3.13}$$

olduğunu varsayalım. ($\delta =$ sbt. > 0)

Aşağıdaki sınır değer problemini gözönüne alalım.

$$-y'' + Q(x)y = f$$

$$y(j-1) = y(j+1) = 0$$

Bu problemi

$$-y'' + (-Q(j)+Q(x))y + Q(j)y = f \tag{3.14}$$

$$y(j-1) = y(j+1) = 0$$

şeklinde yazalım.

$$-y'' + Q(j)y = v$$

ve

$$A_j y = -y'' + Q(j)y$$

olsun. O zaman $v = A_j y$ olur. Bunları gözönüne alırsak (3.14) ü şu şekilde yazabiliriz.

$$\begin{aligned} f = L_j y &= A_j y + (Q(x) - Q(j))y \\ &= v + (Q(x) - Q(j))A_j^{-1} v \qquad (3.15) \\ &= (I + (Q(x) - Q(j))A_j^{-1})v \end{aligned}$$

$(Q(x) - Q(j))A_j^{-1}$ operatörünün normunu değerlendirelim. Bunun için ifadeyi

$$(Q(x) - Q(j))A_j^{-1} = (Q(x) - Q(j))Q(j)^{-1}(Q(j)A_j^{-1})$$

şeklinde yazalım. (3.13) koşulunu kullanırsak.

$$\|(Q(x) - Q(j))A_j^{-1}\| \leq \delta \|Q(j)A_j^{-1}\| \qquad (3.16)$$

yazabiliriz. Şimdi aşağıdaki Lemmayı ispatlayalım.

Lemma 3.5: $Q(j)A_j^{-1}$ operatörler kümesi 1 ile düzgün sınırlıdır.

$$\|Q(j)A_j^{-1}\| \leq 1$$

İspat: Lemmayı $Q(j)$ operatörünün özvektörlerine göre açılışı formülünü kullanarak ispatlayacağız.

$\|Q(j)A_j^{-1}\| \leq 1$ olduğunu göstermek için A_j^{-1} operatörünü bulalım.

$$A_j y = -y'' + Q(j)y = f(x) \qquad f(x) \in L_2(j-1, j+1; H) \qquad (3.17)$$

$$y(j-1) = 0 \qquad y(j+1) = 0 \qquad (3.18)$$

problemini gözönüne alalım. Burada $Q^{-1}(j)$ tam sürekli operatördür ve spektrumu saf ayrıktır.

$Q(j)$ nin özdeğerleri

$$\alpha_1(j) \leq \alpha_2(j) \leq \ldots$$

bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler

$$g_1(j), g_2(j), \ldots$$

olsun. Bunlar H da baz oluşturur.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x) g_k(j) \qquad & h_k(x) &= (f(x), g_k(j)) \\ y_j(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} y_{k,j}(x) g_k(j) \qquad & y_{k,j}(x) &= (y(x), g_k(j)) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Bu denklemleri (3.17) de yerine yazarsak

$$-\sum_{k=1}^{\infty} y_k''(x) g_k(j) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(j) y_k(x) g_k(j) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x) g_k(j)$$

$$\begin{gathered} -y_k''(x) + \alpha_k(j) y_k = h_k(x) \qquad k = 1, 2, \ldots \\ \sum_{k=1}^{\infty} y_k(x) g_k(j) \Big|_{x=j-1} = 0 \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k(x) g_k(j) \Big|_{x=j+1} = 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} y_k(j-1) g_k(j) = 0 \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k(j+1) g_k(j) = 0 \end{gathered} \tag{3.20}$$

bulunur. Böylece (3.17) , (3.18) problemi

$$-y_k''(x) + \alpha_k(j) y_k = h_k(x) \tag{3.21}$$

$$y_k(j-1) = 0 \quad , \quad y_k(j+1) = 0 \tag{3.22}$$

problemine dönüşür. Bu problemi çözmek için

$$-y_k'' = \lambda y_k$$

$$y_k(j-1) = y_k(j+1) = 0$$

probleminin özdeğer ve normalleştirilmiş öz fonksiyonlarını bulalım.

$-y'' = \lambda y$ denkleminin genel çözümü;

$$y = c_1 \cos \sqrt{\lambda}\, x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}\, x$$

dir. Sınır koşullarından

$$y(j-1) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\,(j-1) + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,(j-1) = 0$$

$$y(j+1) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\,(j+1) + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,(j+1) = 0$$

elde ederiz. Sistemin sıfırdan farklı çözümünün olması için

$$\begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda}\,(j-1) & \sin\sqrt{\lambda}\,(j-1) \\ \cos\sqrt{\lambda}\,(j+1) & \sin\sqrt{\lambda}\,(j+1) \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır. Buradan $\sin 2\sqrt{\lambda} = 0$ bulunur. Özdeğerler

$$\lambda = \frac{k^2\pi^2}{4}$$

dür. Bunlara karşılık gelen normalize edilmiş özvektörler;

j tek ise;

$$\varphi_{k,j} = \sin\frac{k\pi}{2}x \tag{3.23}$$

j çift olduğunda, k tek ise;

$$\varphi_{k,j} = \cos\frac{k\pi}{2}x \tag{3.24}$$

k çift ise;

$$\varphi_{k,j} = \sin\frac{k\pi}{2}x \tag{3.25}$$

dir.

$$y_{k,j} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m + \alpha_k(j)}(h_k, \varphi_{m,j})\varphi_{m,j} \tag{3.26}$$

$$(h_k, \varphi_{m,j}) = \int_{j-1}^{j+1} h_k(x)\varphi_{m,j}(x)dx$$

(3.26) yı (3.19) da gözönüne alalım.

$$y_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m + \alpha_k(j)}(h_k, \varphi_{m,j})\varphi_{m,j}\right) g_k(j)$$

$$\begin{aligned} Q(j)A_j^{-1}f &= Q(j)y_j(x) \\ &= Q(j)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m + \alpha_k(j)}(h_k, \varphi_{m,j})\varphi_{m,j}\right) g_k(j) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m + \alpha_k(j)}(h_k, \varphi_{m,j})\varphi_{m,j}\right) Q(j)g_k(j) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(j)}{\lambda_m + \alpha_k(j)}(h_k, \varphi_{m,j})\varphi_{m,j}\right] g_k(j) \end{aligned} \tag{3.27}$$

Böylece

$$Q(j)A_j^{-1}f = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha_k(j)}{\lambda_m+\alpha_k(j)}(h_k,\varphi_{m,j})\varphi_{m,j}\right]g_k(j)$$

olur. $\{\varphi_{m,j}(x)\}_{m=1}^{\infty}$ fonksiyonları $L_2(j-1,j+1)$ uzayında tam ortonormal sistem, $\{g_k(j)\}_{j=1}^{\infty}$ elemanları ise H da tam ortonormal sistem oluşturduğundan dolayı $\{\varphi_{m,j}(x)g_k(j)\}_{m=1,k=1}^{\infty}$ Hilbert uzayında tam ortonormal sistem oluşturur. $\{\varphi_{m,j}(x)g_k(j)\}_{m=1,k=1}^{\infty}$ sistemi $L_2(j-1,j+1;H)$ da tam ortonormal sistem oluşturduğundan dolayı Parseval eşitliğini kullanırsak (3.27) den

$$\|Q(j)A_j^{-1}f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_k(j)}{\lambda_m+\alpha_k(j)}\right)^2|(h_k,\varphi_{m,j})|^2 \tag{3.28}$$

yazabiliriz. $\alpha_k(j)\geq 1$ olduğundan $\frac{\alpha_k(j)}{\lambda_m+\alpha_k(j)}<1$ olur. Buradan

$$\|Q(j)A_j^{-1}f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|(h_k,\varphi_{m,j})|^2 = \|f\|^2$$

veya

$$\|Q(j)A_j^{-1}f\| \leq \|f\|$$

olur, yani $\|Q(j)A_j^{-1}\|\leq 1$ dir. Böylece $Q(j)A_j^{-1}$ operatörlerinin düzgün sınırlı olduğunu gösterdik.

Lemmaya göre (3.16)

$$\|(Q(x)-Q(j))A_j^{-1}\|\leq\delta$$

olur. $\delta<1$ olduğunu varsayalım. O zaman (3.15) den

$$v=(I+(Q(x)-Q(j))A_j^{-1})^{-1}f$$

elde edilir.

$$T_j=(I+(Q(x)-Q(j))A_j^{-1})^{-1}$$

olsun. Son ifade

$$v=T_jf$$

şeklini alır. Buradan

$$y(x)=A_j^{-1}T_jf$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}\|Q(x)y(x)\| &= \|(Q(x)Q^{-1}(j))(Q(j)A_j^{-1}T_jf)\| \\ &\le \|Q(x)Q^{-1}(j)\|c\|T_jf\| \\ &\le \|Q(x)Q^{-1}(j)\|c_1\|f\|_{L_2(\Delta_j)}\end{aligned} \tag{3.29}$$

olur. Burada

$$\|(Q(x)-Q(j))Q^{-1}(j)\| \le \delta$$

şartını gözönüne alırsak,

$$\|Q(x)Q^{-1}(j)-I\| \le \delta$$

olur. Bundan dolayı (3.29) eşitsizliği

$$\|Q(x)y(x)\| \le c_2\|f\|_{L_2(\Delta_j)}$$

şeklini alır. Burada $y(x)=L_j^{-1}f$ olduğunu gözönüne alırsak, son eşitsizlik

$$\|Q(x)L_j^{-1}f\| \le c_2\|f\|_{L_2(\Delta_j)}$$

şeklini alır. $\|L_j(L_j+\lambda I)^{-1}\| \le c_1 \quad (\lambda>0)$ gözönüne alınırsa, o zaman

$$\|Q(x)(L_j+\lambda I)^{-1}f\| \le c\|f\|_{L_2(\Delta_j)}$$

veya

$$\|Q(x)(L_j+\lambda I)^{-1}\| \le c$$

bulunur. Bununla ayrılabilirlik teoremi ispatlanmış oldu.

NOT: $|x-y|\le 2$ olduğunda

$$\|(Q(x)-Q(y))Q^{-1}(y)\| \le \delta$$

koşulunu aşağıdaki koşulla değiştirebiliriz.

$\delta>0$ keyfi sayısı için $\exists\ \varepsilon>0$ sayısı olsun ki $|x-y|\le\varepsilon$ olduğunda

$$\|(Q(x)-Q(y))Q^{-1}(y)\| \le \delta$$

olsun. Bu halde ayrılabilirliği ispatlamak için adım uzunluğu olan 2 yerine ε , $\varphi_j(x)$ ve $w(x-j)$ yerine $\varphi_{j,\varepsilon}(x) = w(\frac{x}{\varepsilon} - j)$ almak gerekir.

Elde ettiğimiz sonucu teorem şeklinde ifade edelim.

Teorem 3.1: 1) - 3) koşulları sağlandığında L operatörü H_1 uzayında ayrılabilirdir.

Örnek 3.2. Ω, xy düzleminde düzgün sınırlı herhangi bölge olsun. Üç boyutlu uzayın $T = \Omega \times (-\infty, \infty)$ silindirinde

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + q(x,y,z)u \tag{3.30}$$

diferansiyel ifadesini gözönüne alalım. Burada $q(x,y,z)$ T silindirinde tanımlanmış pozitif değerli sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca $|x-\xi| \leq 2$ olduğunda

$$|(q(x,y,z) - q(x,y,\xi))q^{-1}(x,y,z)| \leq c$$

şartını sağladığını varsayalım.

$L_2(T)$ uzayında (3.30) ifadesi tanımlanmış ve tanım kümesi

$$U|_{(x,y,z)\in\partial\Omega} = 0$$

koşulunu sağlayan elemanlardan ibaret olan operatörü, operatör katsayılı diferansiyel ifade şeklinde yazalım. Burada $\partial\Omega$, Ω nın sınırıdır.

$$-\frac{d^2 u}{dz^2} + Q(z)u$$

$Q(z)$, z nin $(-\infty, \infty)$ dan alınmış her bir değerinde $H = L_2(\Omega)$ uzayında

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + q(x,y,z)u$$

ifadesi ve $u|_{x,y\in\partial\Omega} = 0$ koşulu ile oluşturulan operatör olsun. $Q(z)$ operatörü $L_2(\Omega)$ da kendine eş tersi tam sürekli olan bir operatördür. $q(x,y,z)$ fonksiyonu pozitif olduğundan dolayı $Q(z)$ operatörü pozitiftir.

$Q(z)$ nin 1) - 3) koşullarını sağladığı A.G.Kostyuchenko, B.M.Levitan (Kostyuchenko et. al, 1967) tarafından gösterilmiştir. Buna göre $u \in L_2(T)$ ve

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + q(x,y,z)u \quad \in \quad L_2(T)$$

ise

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L_2(T) \quad \text{ve} \quad -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + q(x,y,z)u \in L_2(T)$$

olur. Örneklerin sayısını çoğaltmak mümkündür.

Örnek 3.3. $H = R^3$ ün üç boyutlu Euclid uzayı ve

$$Q(x) = \begin{pmatrix} |x|+2 & 1 & 1 \\ 1 & |x|+2 & 1 \\ 1 & 1 & |x|+2 \end{pmatrix}$$

olsun. $Q(x)$ in 1) - 3) koşullarını sağladığı görülür.

Bundan dolayı

$$-y'' + Q(x)y$$

ifadesiyle oluşturulan operatör $L_2(-\infty,\infty; R^3)$ uzayında ayrılabilirdir.

SONUÇ

İki bölümden oluşan bu tez çalışmasının birinci bölümünde $L_2(0,\infty;H)$ uzayında

$$L(y) = -y'' + Q(x)y \qquad , \qquad 0 \le x < \infty$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0$$

sınır koşulu ile oluşturulan operatörün Green fonksiyonu incelenmiştir. Burada H ayrılabilir Hilbert uzayı, $Q(x)$ x in $[0,\infty)$ dan alınmış herbir değerinde H da kendine eş, tersi tam sürekli operatör, h ise kompleks sayıdır.

İkinci bölümde $L_2(-\infty,\infty;H)$ uzayında $L(y)$ ifadesi ile oluşturulan operatör için ayrılma problemi çözülmüştür.

KAYNAKLAR

BAYRAMOĞLU, M., Operatör Katsayılı Adi Diferansiyel Denklemlerin Özdeğerlerinin Asimptotik Davranışı, "Fonksiyonel Analiz ve Uygulamaları" Sbornik, Bakü : Bilim, 1971, 144-166 (R)(*)

DOLPH, C.L., Recent Developments in Some Non-Self-Adjoint Problems of Mathematical Physics, Bull. Amer. Math.Soc.67 N1 (1961) 1-69

DUŞDUROV, M.G., Yarı Eksende Verilmiş Normal Operatör Katsayılı Sturm-Liouville Denkleminin Green Fonksiyonu Üzerine Dep. VINITI,No:32 49-82, M. (R)

EVERITT, W.N., GIERTZ, M.A., Dirichlet Type Result For Ordinary Differantial Operators, Math.Ann, 1973, Vol.203, No:2, p:119-128

EVERITT, W.N., GIERTZ, M.A., An Example Conserning The Seperation Property For Differantial Operators, Proc.Roy.Soc. Edinburg A, 1973, Vol.71, p:159-165

EVERITT, W.N., GIERTZ, M.A., Inequalities And Seperation For Schrödinger Type Operators in $L_2(R_n)$, Proc.Roy.Soc. Edinburg A, 1977, Vol.79, p:257-265

FULTON, T.C., PRUESS, S.A., Eigenvalue And Eigenfunction Asymtotics For Regular Sturm-Liouville Problems, J.Math.Anal.Appl., 188(1994), 297-340

İSMAGİLOV, R., Sturm-Liouville Operatörünün Kendine Eşliği UMN,18, No:5, (1963), 161-166

KATO,T., Perturbation Theory For Linear Operators, Berlin-Heidelberg-New York; Springer-Verlag, 1980

KLEYMAN, E.G., Normal Operatör Katsayılı Sturm-Liouville Denkleminin

---

* (R), kaynağın Rusça olduğunu gösterir.

Green Fonksiyonu Üzerine, Vestnik, Mosk.Univ., No:5(1977), 47-53 (R)

KOSTYUCHENKO, A.G. and LEVITAN, B.M., Asymtotic Behaviour of The Eigenvalue of The Sturm-Liouville Operator Problem, Funct.Analysis Appl. 1, 1967, 75-83

LEVITAN, B.M., Operatör Katsayılı Sturm-Liouville Probleminin Green Fonksiyonunun İncelenmesi, Mat.Sb. 76(118), No:2, 1968, 239-270 (R)

LEVITAN, B.M. and SARGSYAN, I.S., Strum-Liouville And Dirac Operators, Kluzer, Dordrechz, 1991

MIKUSINSKI, J. and DEBNATH, C.J., Introduction To Hilbert Space With Applications, Academic Press Inc., New York, 1990

MİNBAYEV, K.T., OTELBAYEV, M., Ağırlıklı Fonksiyonel Uzaylar Ve Diferansiyel Operetörlerinin Spektrumu, Moskova "Nauka", 1988 (R)

OTELBAYEV ,M., Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Sınırlandırılması IZV.AN KAZ.SSR, No:5 (1977), 45-48 (R)

OTELBAYEV, M., Sturm-Liouville Operatörünün Spektrumunun Davranışı, Alma-Ata:Bilim, 1990 (R)

SMIRNOV, V.I., A Course Of Higher Mathematics, Vol.5, New York: Pergamon Press, 1964

TITCHMARSH, E.C., "Eigenfunctions Expansions Associated With Second Order Differantial Equations", 2nd ed., Vol.I, Oxford Univ.Press, London, 1962

YOSIDA, K., Functional Analysis, Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1980

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Zerrin OER
Doğum Tarihi	: 13.01.1967
Doğum Yeri	: Üsküdar
İlk Öğretim	: 1972-1977 Üsküdar Hattat İsmail Hakkı İlkokulu
Orta Öğretim	: 1977-1983 Üsküdar Kız Lisesi
Lisans Öğretimi	: 1984-1988 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Öğretimi	: 1988-1990 Y.T.Ü.Fen Bilimleri Enstitüsü
Göreve Başlama	: 1989 Y.T.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi
Doktora Öğretimi	: 1990- Y.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü