T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FARKLI DÖNÜŞÜMLER ALTINDA SABİT NOKTA DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ

MUHAMMED ABDUSSAMED MALDAR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI

DANIŞMAN
PROF. DR. VATAN KARAKAYA

İSTANBUL, 2016

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FARKLI DÖNÜŞÜMLER ALTINDA SABİT NOKTA DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ

Muhammed Abdussamed MALDAR tarafından hazırlanan tez çalışması 12.08.2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA
Yıldız TeknikÜniversitesi

Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI
Maltepe Üniversitesi

Doç. Dr. Yusuf ZEREN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK
İstanbul Ticaret Üniversitesi

Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY
Yıldız Teknik Üniversitesi

Bu çalışma, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'nun BİDEB 2210 numaralı burs programı ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Gerek tez konusunun belirlenmesinde gerek çalışmanın sonraki süreçlerinde daima desteğini hissettiğim, görüşleriyle tezin daha nitelikli olmasına katkı sağlayan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Vatan KARAKAYA'ya teşekkürü bir borç bilirim.

BİDEP 2210 kapsamında tezi maddi olarak destekleyen TÜBİTAK'a ve matematiksel problemlerin çözümünde sunmuş oldukları desteklerden ötürü Dr. Kadri DOĞAN'a, Yunus ATALAN'a ve Faik GÜRSOY'a ayrıca teşekkürlerimi sunarım.

Tez izleme komitesinde bulunan Sayın Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ ve Sayın Doç. Dr. Yusuf ZEREN hocalarıma en içten duygularımla teşekkür ederim. Tez savunma sınavı jüri üyeliğini kabul ederek beni onurlandıran Sayın Sayın Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI, Sayın Doç. Dr. Yusuf ZEREN, Sayın Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY ve Sayın Necip ŞİMŞEK hocalarıma en samimi teşekkürlerimi sunarım.

Ağustos, 2016

Muhammed Abdussamed MALDAR

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ

$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^{+}$	X üzerinde üzerinde tanımlı uzaklık fonksiyonu
$\\|\bullet\\| : X \rightarrow \mathrm{F}$	X üzerinde tanımlı norm fonksiyonu
(X, d)	X Metrik uzayı
$(X, \\|\bullet\\|)$	X Normlu uzayı
$T : X \rightarrow Y$	X ten Y ye tanımlı T dönüşümü
F_T	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
F	Cisim ($\mathrm{F} = \mathbb{R}$ yada $\mathbb{C}$)
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{+}$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

ÖZET

FARKLI DÖNÜŞÜMLER ALTINDA SABİT NOKTA DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ

Muhammed Abdussamed MALDAR

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Bu çalışmada, Branciari [43] tarafından ortaya konulan integral tip dönüşüm temel alınarak bazı operatörlerin integral versiyonu tanımlandı. Tanımlanan integral tip dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşmada bazı iterasyon yöntemlerinin kullanılabileceği gösterildi. Ayrıca, bazı integral tip operatörler kullanılarak Picard-Mann Hibrid iterasyon yöntemi [92], Ishikawa iterasyon yöntemi [76] ve yeni multistep iterasyon yöntemi [93] için kararlılık sonuçları elde edildi. Bir sonraki aşamada ise Picard-Mann Hibrid iterasyon yöntemi [92] ve Noor iterasyon yöntemi [77] kullanılarak bazı integral tip dönüşümler için yaklaşım operatörü tanımlanıp veri bağımlılıkları araştırıldı. Son olarak bazı iterasyon yöntemlerinin integral tip operatörler için yakınsaklıklarının denkliği incelendi.

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta dönüşüm sınıfları, İntegral tip dönüşümler, İterasyon yöntemi, Yakınsaklık, Yakınsamaların denkliği, Kararlılık, Sabit noktaların veri bağlılığı.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

INVESTIGATION OF FIXED POINT RESULTS UNDER VARIOUS FIXED POINT MAPPINGS

Muhammed Abdussamed MALDAR

Department of Mathematics Engineering

PhD. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

In this study, the integral version of some operations based on integral mapping, which has been introduced by Branciari [43], have been defined. Some iteration methods have been displayed to be used in fixed point convergences of integral type mappings defined. Moreover, the results of stability have been obtained through the use of some integral mappings for Picard-Mann Hybrid iteration method [92], Ishikawa iteration method [76] and new multistep iteration method [93]. In the next stage, data dependences have been examined via defining approach operator for some integral mappings by using Picard-Mann Hybrid iteration method [92] and Noor iteration method [77]. Finally, equivalence of convergences of some iteration methods for integral mappings has been analyzed.

Key words: Fixed point mapping classes, Integral type mapping, Iterative scheme, Convergence, Equivalence of convergences, Stability, Data dependence of fixed points

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Sabit nokta teorisi matematiğin önemli bir dalı olup, bu teori bir dönüşümün sabit noktalarının varlığını ve sabit noktaların nasıl bulunması gerektiğini inceler. Bu teori, çok önemli bir matematiksel araç olup, matematiksel modellemeden optimizasyon teorisi, denge problemleri, varyasyonel eşitsizlikler ve oyun teorisine; fizikten ekonomi, tıp ve yönetim bilimlerine kadar birçok bilim dalı ile bağlantılıdır, bkz [1-14].

Genel olarak tam metrik uzaylar ve normlu lineer uzaylar olmak üzere iki yönde gelişim gösteren sabit nokta teorisi çalışmaları, konveks metrik uzay, fuzzy metrik uzay ve normlu uzaylar gibi çok çeşitli matematiksel yapılar üzerinde yoğunlaşmıştır. Bu çalışmalar tam metrik uzaylar üzerinde tanımlı contraction ve contraction tipi dönüşümler; normlu lineer uzaylarda ise kompakt ve konveks alt kümelerde tanımlı sürekli dönüşümler üzerinde yoğunlaşmıştır. Bunlardan bazıları, bkz [15-35].

Normlu lineer uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları, Brouwer [36] ile başlamıştır. Bu çalışma "$\left[a,b\right]\subset\mathbb{R}$ olmak üzere $f:\left[a,b\right]\to\left[a,b\right]$ sürekli bir dönüşüm ise, f nin $\left[a,b\right]$ aralığında bir sabit noktası vardır" şeklinde ifade edilmiştir. Bu teoremi 1912 yılında, "$C\subseteq\mathbb{R}^n$ de kapalı bir yuvar olsun. Bu durumda $T:C\to C$ sürekli dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir" şeklinde Brouwer [37] tarafından genişletilmiştir.

İyi bilinen ve en önemli sabit nokta teoremlerinden biri Banach Sabit Nokta teoremi "$\left(X,d\right)$ bir tam metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in X$ için, $d\left(Tx,Ty\right)\le\lambda\cdot d\left(x,y\right)$, $0\le\lambda<1$ se T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir" [38] şeklinde 1922 yılında ortaya konulmuştur. Banach'ın sabit nokta teoremi [38], genel bir teoremdir; fakat contraction şartı sebebiyle kısıtlanmaktadır.

1930 yılında da J. Schauder [37], Brouwer'ın sabit nokta teoremini geliştirerek "X bir Banach uzayı C, X in boş olmayan herhangi bir kompakt konveks alt kümesi ve $T: C \to C$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda, T en az bir sabit noktaya sahiptir" ifadesini ispatlamıştır. Banach sabit nokta teoremi, Brouwer ve Schauder sabit nokta teoremlerinden farklı olarak bir operatörün sabit noktasının tekliğinin nasıl bulunabileceğini göstermektedir.

Sabit nokta teorisinin temelini teşkil eden bu teoremler pek çok araştırmacı tarafından çeşitli çalışmalar yapılarak genelleştirilmiştir. Bu amaçla Browder [39], Kirk [40], Kanan [41], Zamfirescu [42] başta olmak üzere bu temel sonuçları genelleştirerek bazı çıkarımlarda bulunmuş ve çeşitli sonuçlar elde etmişlerdir.

Bu doğrultuda 2002 yılına gelindiğinde ise Branciari integral tip contraction ile ilgili çalışmalar yaparak Banach contraction prensibinin integral versiyonunu ispatlamıştır. Branciari "(X,d) bir tam metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $\varphi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir ve Lebesgue-integrallenebilir olsun. Her $x, y \in X$ için $\int_0^{d(Tx,Ty)} \varphi(t)dt \le c \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)dt$ olacak şekilde $c \in (0,1)$ mevcut ise T dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır." bkz [43]. Bu teormin ispatlaması sonraki çalışmalara kaynak teşkil etmiş, bu sayede araştırmacılar integral tip contraction ile alakalı çalışmalarını geliştirme fırsatı yakalamışlardır. Rhoades [44] ise Branciari teoremi [43] ile aynı şartlar altında Her $x, y \in X$ için

$$\int_0^{d(Tx,Ty)} \varphi(t)dt \le k \int_0^{m(x,y)} \varphi(t)dt \tag{1.1}$$

olacak şekilde $k \in (0,1)$ mevcut,

$m(x,y) = \max\{d(x,y), d(x,f(x)), d(y,f(y)), \dfrac{d(x,f(y)) + d(y,f(x))}{2}\}$ ve her $x, y \in X$

için

$$\int_0^{d(Tx,Ty)} \varphi(t)dt \le k \int_0^{M(x,y)} \varphi(t)dt \tag{1.2}$$

olacak şekilde $k \in (0,1)$ mevcut ve

$M(x,y) = \max\{d(x,y), d(x,f(x)), d(y,f(y)), d(x,f(y)), d(y,f(x))\}$ şeklinde ifade ederek (1.1) ve (1.2) eşitsizliklerini tanımlamıştır [44]. (1.2) şartı Ciric şartının [45] integral versiyonudur. Olatinwo [46] ise (X,d) bir tam metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $\psi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ monoton azalmayan fonksiyon ve $\varphi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir ve Lebesgue-integrallenebilir olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\int_0^{d(Tx,Ty)} \varphi(t)dt \le \psi\left(\int_0^{d(x,Tx)} \varphi(t)dt\right) + k \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)dt$$

için $k \in (0,1)$ mevcut olacak şekilde tanımlamış ve Mann iterasyonunun [47] kararlılık ile ilgili sonuçlarını elde etmiştir.

Rhoades [43], Olatinwo [46], [48-50], Karapınar ve d. [51], Achour ve d. [52], integral tip dönüşümler üzerine çalışma yapan araştırmacılardan bazılarıdır, bu çalışmaları devam ettiren diğer araştırmacılar için [53-73] arasındaki çalışmalara bakınız.

Belirli dönüşümlerin sabit noktalarının hesaplanmasını sağlayan yöntemlere iterasyon denilir. İterasyon yöntemleri özellikle, lineer olmayan problemlerin çözümlerinde yaygın olarak kullanılan matematiksel araçlardır. Bir problemde, iterasyon tarafından üretilen dizinin limiti problemin çözümünü verir. İterasyon yöntemleri bilimde geniş uygulama alanlarına sahip olduklarından, birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve bunun sonucunda çok sayıda iterasyon yöntemi tanıtılmış ve geliştirilmiştir. İlk olarak 1890'da Picard [74] tarafından tanımlanan bu yöntem bazı yönleriyle eksik görüldüğünden takip eden yıllarda 1953 yılında Mann [47], 1955'te Krasnoselskij [75], 1974 yılında Ishikawa [76], 2000 yılında Noor [77] tarafından yeni iterasyonlar geliştirilmiştir. Bu yöntemler geliştirilerek uygulamaya devam edilmektedir.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmada, integral tip dönüşümler hakkında bilgi verilerek literatürde elde edilmiş bazı dönüşümlerin integral tip versiyonu tanımlanacaktır. Yaygın olarak kullanılan bazı iterasyon yöntemleri tarafından üretilen dizilerin, integral tip dönüşümlerin sabit noktasına yakınsaklığının bazı sonuçları elde edilecektir. Ayrıca, integral tip dönüşümler için bazı iterasyon yöntemlerinin kararlılık sonuçları elde edilecektir. Son olarak, bu iterasyon yöntemleri kullanılarak integral tip dönüşümlerin sabit noktalarının veri bağlılığı incelenerek, bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıklarının denkliğine değinilecektir.

1.3 Hipotez

Bu çalışmada, literatürdeki bazı dönüşümlerin integral versiyonunun tanımlarına yer verildi. Tanımlanan bu dönüşümlerin sabit noktaları bazı iterasyon yöntemleri için belirli şartlar altında yakınsaktırlar. Ayrıca Harder ve Hick [96], [97] tarafından ortaya konulan kararlılık tanımı kullanılarak; (2.30) Picard-Mann Hibrid iterasyonunun (3.4) şartı ile; (2.27) Ishikawa iterasyonunun (3.5) şartı ile, (2.29) üç adımlı iterasyonunun ve (2.31) ile verilen yeni multistep iterasyon yöntemlerinin (2.7) şartı sağlayan integral tip dönüşümlerine göre T-kararlıdır. Bir sonraki aşamada ise (3.4) ve (3.6) ile verilen integral tip dönüşümler için yaklaşım operatörü tanımlanarak bunların (2.30) Picard-Mann Hibrid iterasyon yöntemi ve (2.28) Noor iterasyon yöntemi kullanılarak veri bağımlılıkları gösterilmiştir. Son olarak, bazı integral tip dönüşümler kullanılarak, (2.30) ile verilen Picard-Mann Hibrid iterasyonun, (2.26) ile verilen Mann iterasyonuna ve (2.26) ile verilen Mann iterasyonun, (2.31) ile verilen yeni multistep iterasyonuna denk olup olmadığının tespiti bu tezin hipotezlerini oluşturmaktadır.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bir ön hazırlık amacıyla analize, fonksiyonel analize, sabit noktaya dair temel tanım, lemmalar ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1 Analiz Kaynaklı Bazı Kavramlar

Tanım 2.1 (Metrik Uzay) X , boştan farklı bir cümle olmak üzere ;

(M1) $\forall x, y \in X$, $d(x,y) \in \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$

(M2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M3) $\forall x, y \in X,\ d(x,y) = d(y,x)$

(M4) $\forall x, y, z \in X,\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

aksiyomlarını sağlayan $d : X \times X \to \mathbb{R}^{+}$ fonksiyonuna X için bir metrik , (X,d) ikilisine de metrik uzay denir [78].

Tanım 2.2 $X = (X,d)$ bir metrik uzay olmak üzere (x_n) , X 'de bir dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde $x \in X$ varsa (x_n) dizisi yakınsaktır denir [78].

Tanım 2.3 $X = (X,d)$ bir metrik uzay olmak üzere (x_n) , X 'de bir dizi olsu $\forall \varepsilon > 0$ ve her $m, n > \mathbb{N}$ için

$d(x_n, x_m) < \varepsilon$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ varsa (x_n) dizisi Cauchy dizisi olarak adlandırılır [79].

Tanım 2.4 (X, d) bir metrik uzay olsun . Eğer X 'de her Cauchy dizisi X 'de bir noktaya yakınsıyorsa X 'e tam metrik uzay denir [79].

Tanım 2.5 $X = (X, d)$ ve $Y = (Y, \rho)$ iki metrik uzay, $f : X \to Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için,

$d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

veya denk bir ifade ile,

$f(B(x_0; \delta)) \subseteq B(f(x_0); \varepsilon)$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, f ye x_0 noktasında süreklidir denir. f , X 'in her noktasında sürekli ise, f ye X de süreklidir denir [79].

Tanım 2.6 $X = (X, d)$ ve $Y = (Y, \rho)$ iki metrik uzay, $f : X \to Y$ bir dönüşüm verilsin. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $\delta > 0$ reel sayısı

$d(x, y) < \delta$

özelliğini sağlayan her $x, y \in X$ için

$\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

olacak şekilde varsa veya denk bir ifade ile, her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $\delta > 0$ sayısı ve her $x \in X$ için

$f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$

olacak şekilde varsa f fonksiyonuna düzgün süreklidir denir [79].

Tanım 2.7 (Lineer uzay) X boş olmayan bir cümle ve K, reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$+: X \times X \to X$

$\cdot: K \times X \to X$

ikili işlemleri aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X cümlesine K üzerinde bir lineer (vektör) uzay adı verilir.

Her $\alpha, \beta \in K$ ve $x, y, z \in X$ için

(L1) $x + y = y + x$ dir.

(L2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.

(L3) $x + \theta = x$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır.

(L4) Her bir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde $(-x) \in X$ vardır.

(L5) $1.x = x$ dir.

(L6) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ dir.

(L7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ dir.

(L8) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ dir [78].

Tanım 2.8 (Lineer Altuzay) X bir lineer uzay ve M de X ' in bir alt cümlesi olsun. $x, y \in M$ ve α, β skaler olmak üzere $\alpha x + \beta y \in M$ ise M ye X 'in bir lineer alt uzayı denir [78].

Tanım 2.9 (Konveks Küme) L bir reel lineer uzay ve $A \subseteq \mathrm{L}$ olsun. Her $x, y \in A$ için

$$C = \{z \in \mathrm{L} : z = \alpha x + (1 - \alpha) y, 0 \le \alpha \le 1\} \subseteq A$$

ise, A kümesine konvekstir denir [80].

Tanım 2.10 (Normlu Lineer Uzay) X , K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X,\|\cdot\|)$ çiftine de normlu lineer uzay denir.

(N1) $\|x\| \geq 0$

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\lambda \in K$

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

Her normlu lineer uzay $d(x.y) = \|x - y\|$ metriği ile üretilir ve norm tarafından üretilen metrik olarak adlandırılır [81].

Tanım 2.11 (Yakınsak Dizi) $(X,\|.\|)$ bir normlu uzay ve $s = (s_n)$, X ‘ de bir dizi olsun.

$\forall \varepsilon > 0$ ve her $n > N(\varepsilon)$ için

$\|s_n - s\| < \varepsilon$

olacak şekilde $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa (s_n) dizisine $s \in X$ ‘ e yakınsıyor denir [79].

Tanım 2.12 (Cauchy Dizisi) $(X,\|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $s = (s_n)$, X ’de bir dizi olsun.

$\forall \varepsilon > 0$ ve her $m,n > N(\varepsilon)$ için

$\|s_n - s_m\| < \varepsilon$

olacak şekilde $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa (s_n) dizisine X normlu uzayında bir Cauchy dizisi denir [79].

veya

$(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayında bir (x_n) Cauchy dizisidir. $\Leftrightarrow$ Her $\forall\varepsilon>0$ sayısı için $\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ öyle ki $\forall n>n_\varepsilon$ ve $\forall p\in\mathbb{N}$ için $\|x_{n+p}-x_n\|<\varepsilon$ dur [78].

Tanım 2.13 (Banach Uzayı) Bir $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse, bu $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı denir [78].

Tanım 2.14 (Kuvvetli Yakınsaklık) X bir normlu lineer uzay ve $(x_n)\in X$ olmak üzere;

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

olacak şekilde bir $x\in X$ varsa (x_n), kuvvetli yakınsak olarak adlandırılır [78].

Tanım 2.15 (Zayıf Yakınsaklık) X bir normlu lineer uzay ve $(x_n)\in X$ olmak üzere; Her $f\in X^{'}$ için $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x)$ olacak şekilde bir $x\in X$ varsa (x_n), zayıf yakınsak olarak adlandırılır ve $x_n\xrightarrow{w}x$ şeklinde gösterilir [79].

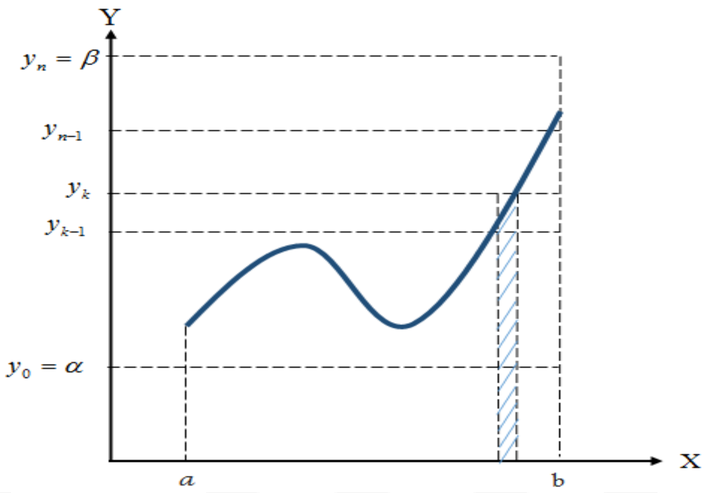
Tanım 2.16 (Lebesgue İntegrali) $f(x)$ fonksiyonu, $[a,b]$ kapalı aralığında sınırlı ve ölçülebilir olsun. α ve β, $\alpha<f(x)<\beta$ olacak şekilde iki gerçel sayı olarak verilsin. $[\alpha,\beta]$ aralığını,

$$\alpha=y_0<y_1<\ldots<y_{n-1}<y_n=\beta$$

olacak şekilde, $y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}$ noktalarıyla n tane alt aralığa bölelim. Bu nokta Y ekseni üzerindedir. $[\alpha,\beta]$ aralığını bu biçimde bölerek elde edilen noktaların kümesine bu aralığın bölüntüsü denir. $k=1,2,3,\ldots,n$ olmak üzere, $y_{k-1}<f(x)<y_k$ olacak şekilde, E_k kümesi $[a,b]$ kapalı aralığındaki tüm x noktaların kümesi olsun. Yani, E_k kümesi, $k=1,2,3,\ldots,n$ sayıları için,

$$E_k=\{x:\ y_{k-1}\le f(x)\le y_k\}$$

şeklinde tanımlansın. $f(x)$ fonksiyonu ölçülebilir olduğundan, E_k kümelerinin her biri ölçülebilir ve bu kümeler ayrıktır. Yani, $i \neq j$ için $E_i \cap E_j = \varnothing$ olur.



Şekil 2.1 İntegral bölüntüleri

$S = \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k)$ ve $s = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_k)$ ifadelerini, sırasıyla üst ve alt toplamlar diye tanımlansın. $[\alpha, \beta]$ aralığının mümkün olan tüm bölüntüleri için,

$I = \inf(S)$ ve $J = \sup(s)$

olarak tanımlansın. Bu biçimdeki değerler her zaman vardır ve bunları tanım olarak,

$I = \int_{a}^{-b} f(x)dx$ ve $J = \int_{-a}^{b} f(x)dx$

ile gösterilip adlarına ise sırasıyla, $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ kapalı aralığındaki üst ve alt integralleri denir. $I \leq J$ dir.

Eğer tüm bölüntüler için, $I = J$ ise veya

$$I = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_k) = J$$

oluyorsa $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilirdir denir [82].

2.2 Sabit Nokta ve Bazı Dönüşüm Sınıfları

Tanım 2.17 (Sabit Nokta) X boştan farklı bir küme ve $T:X\to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. $Tx=x$ eşitliğini sağlayan bir $x\in X$ noktasına T dönüşümünün sabit noktası denir. Diğer değişle $Tx=x$ eşitliğini sağlayan her bir $x\in X$ noktası T nin sabit noktasıdır. T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi F_T veya $Fix(T)$ ile gösterilir [84].

X boştan farklı bir küme ve $T:X\to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x\in X$ için $T^n x=T(T^{n-1}x)$ olacak şekilde $T^n x$ dizisini tanımlayalım. $T^n x$, $x\in X$ 'in T altındaki $n.$ iterasyonu denir [84].

$T:X\to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

a. $n\in\mathbb{N}$ için $F_T\subset F_{T^n}$ dir.

b. $n\in\mathbb{N}$ için $F_{T^n}=\{x\}$ ise, $F_T=\{x\}$ dir. Bunun tersi genelde doğru değildir [84].

Örnek 2.18 $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun.

a) $X=\mathbb{R}$ ve $Tx=x^2+3x+2$ için sabit noktası $F_T=\{-2,-1\}$

b) $X=\mathbb{R}$ ve $Tx=x+5$ için sabit noktası $F_T=\varnothing$

c) $X=\mathbb{R}$ ve $Tx=(x^2-x)x$ için sabit noktaları $F_T=\{0,2\}$

d) $X=\{1,2,3\}$ ve $T(1)=3,\ T(2)=2,\ T(1)=1$ için $F_{T^2}=\{1,2,3\}$ iken $F_T=\{2\}$ dir [84].

Tanım 2.19 (Lipschitzian Dönüşüm) (X,d) bir metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)\le\lambda\cdot d(x,y) \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir $\lambda>0$ sayısı mevcut ise T ye Lipschitzian (veya λ-Lipschitzian) dönüşüm denir [84].

T Lipschitzian dönüşümü düzgün süreklidir. Çünkü, her $\varepsilon>0$ için $d(x,y)<\delta=\dfrac{\varepsilon}{\lambda}\Rightarrow d(Tx,Ty)\le\lambda d(x,y)<\varepsilon$ dur [81].

Örnek 2.20 $X=\mathbb{R},\ d(x,y)=|x-y|$ ve $Tx=4x$ olsun. Bu durumda,

$$d(Tx,Ty)=|4x-4y|=4|x-y|=4d(x,y)$$

elde edilir. Böylece herhangi bir $\lambda \geq 4$ için, T dönüşümü Lipschitz şartını sağlar.

Tanım 2.21 (Contraction (Büzülme-daraltan) Dönüşüm) (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir Lipschitzian dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \lambda \cdot d(x,y) \tag{2.2}$$

olacak şekilde bir $0 \leq \lambda < 1$ mevcut ise T ye contraction dönüşüm denir [84].

Örnek 2.22 $X=\mathbb{R},\ d(x,y)=|x-y|$ ve $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ Tx=\frac{2}{3}x+1$ olsun. Bu durumda,

$$d(Tx,Ty)=\left|\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y\right|=\frac{2}{3}|x-y|=\frac{2}{3}d(x,y)$$

elde edilir. $\frac{2}{3}\in[0,1)$ için, T contraction dönüşümdür. $F_T=\{3\}$ dir.

Tanım 2.23 (Contractive Dönüşüm) (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$d(Tx,Ty) < d(x,y) \tag{2.3}$$

ise T ye contractive dönüşüm denir [85].

Örnek 2.24 $X=\mathbb{R},\ d(x,y)=|x-y|$ alışılmış metriği olsun. $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ve $Tx=\ln(e^x+1)-\frac{1}{15}$ olsun. Bu durumda, dönüşüm contractive olup, contraction değildir.

$T'x=\frac{e^x}{e^x+1}<1$ ve $0<T'x<1$ dir. Ortalama değer teoreminden $T'c=\frac{Tx-Ty}{x-y}$ dir.

$T'c<1$ olduğundan

$T'c=\frac{Tx-Ty}{x-y}<1 \Rightarrow |Tx-Ty|<|x-y|$ dir.

Tanım 2.25 (Nonexpansive (Genişlemeyen) Dönüşüm) (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d\left(Tx,Ty\right)\leq d\left(x,y\right) \tag{2.4}$$

ise T ye nonexpansive dönüşüm denir [84].(Sabit noktalarının var olması gerekmez.)

Örnek 2.26 $X=\mathbb{R},\ d\left(x,y\right)=\left|x-y\right|,\ T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ve $Tx=x+17$ olsun. Bu durumda,

$$d\left(Tx,Ty\right)=\left|x+17-y-17\right|=\left|x-y\right|=d\left(x,y\right)$$

olduğundan her $x,y\in X$ için $d\left(Tx,Ty\right)\leq d\left(x,y\right)$ şartı sağlanmış olur. Dolasıyla T nonexpansive dönüşümdür. Fakat T döüşümü contraction dönüşüm ne de contractive dönüşümdür.

Her $x,y\in X$ için $d\left(Tx,Ty\right)=d\left(x,y\right)$ ise T 'ye izometri dönüşümü denir [84].

Tanım 2.27 (Pseudo-Contractive Dönüşüm) X bir Hilbert uzayı, K da X in boş olmayan bir alt kümesi ve $T:K\to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y\in K$ için

$$\left\|Tx-Ty\right\|^2\leq\left\|x-y\right\|^2+\left\|Tx-Ty-(x-y)\right\|^2 \tag{2.5}$$

olacak şekilde $T:K\to K$ dönüşümüne Psedo-contractive dönüşüm denir [85].

Tanım 2.28 (Reich Dönüşümü) $\left(X,d\right)$ bir metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in X$ için

$$d\left(Tx,Ty\right)\leq ad\left(x,y\right)+bd\left(Ty,y\right)+cd\left(Tx,x\right) \tag{2.6}$$

olacak şekilde bir $a+b+c<1$ mevcut ise T 'ye Reich contraction dönüşümü denir [86].

Tanım 2.29 (İntegral Type Contraction) $\left(X,d\right)$ bir tam metrik uzay, $T:X\to X$ bir dönüşüm ve $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ her $\varepsilon>0$ için $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt>0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir ve Lebesgue-integrallenebilir olsun. Her $x,y\in X$ için

$$\int_0^{d(Tx,Ty)}\varphi(t)dt\leq c\int_0^{d(x,y)}\varphi(t)dt \tag{2.7}$$

olacak şekilde $c\in\left(0,1\right)$ mevcut ise İntegral tip contraction dönüşüm denir [43].

Ciric [45] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanan genel contraction şartlarından biridir.

Tanım 2.30 (Quasi Contraction) (X,d) bir tam metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)\leq h\cdot\max\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),d(x,Ty),d(y,Tx)\} \tag{2.8}$$

olacak şekilde bir $h\in(0,1)$ sayısı varsa, T'ye bir quasi contraction denilir [45].

2004 yılında Berinde [87], aşağıdaki zayıf contraction şartlarını tanımlayarak bazı sabit nokta teoremleri elde etti.

Tanım 2.31 (Zayıf Contraction) (X,d) bir tam metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)\leq\delta d(x,y)+Ld(Tx,y) \tag{2.9}$$

$$d(Tx,Ty)\leq\delta d(x,y)+Ld(Ty,x) \tag{2.10}$$

$$d(Tx,Ty)\leq\delta d(x,y)+Ld(Tx,x) \tag{2.11}$$

veya

$$d(Tx,Ty)\leq\delta d(x,y)+Ld(Ty,y) \tag{2.12}$$

olacak şekilde bir $\delta\in(0,1)$ sabiti ve bir $L\geq 0$ mevcut ise, T ye bir zayıf contraction denilir [87].

2.3 Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Lipschitzian, nonexpansive, contractive ve contraction gibi dönüşümlerin bazılarının sabit noktası olmadığı halde, bazılarının bir veya birden fazla sabit noktası olabilir. Bu bölümde, bazı dönüşümlerin sabit noktalarının var ve bu sabit noktaların hangi koşullar altında tek olduğunu teoremlerle ifade edeceğiz.

Teorem 2.32 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ olmak üzere $f:[a,b]\to[a,b]$ sürekli bir dönüşüm ise, f'nin $[a,b]$ aralığında bir sabit noktası vardır [36].

Bu teorem "Aradeğer Teoremi"nin bir sonucudur. Bu teoremi Brouwer 1912 yılında $\mathbb{R}^n$ üzerinde genişletmiştir.

Teorem 2.33 (Brouwer Sabit Nokta Teoremi) C, $\mathbb{R}^n$ de kapalı bir yuvar olsun. Bu durumda $f:C\to C$ sürekli dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir [37].

Brouwer'ın bu teoremi herhangi bir sonsuz boyutlu Banach uzayında geçerli değildir.

Teorem 2.34 (Shauder Sabit Nokta Teoremi) X bir Banach uzayı C, X in boş olmayan herhangi bir kompakt konveks alt kümesi ve $f:C\to C$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda, f en az bir sabit noktaya sahiptir [37].

Teorem 2.35 (Banach Sabit Nokta Prensibi) (X,d) bir tam metrik uzay ve $T:X\to X$ bir daralma (contraction) dönüşümü ise T dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır [38].

İspat $x_0\in X$ keyfi bir eleman olmak üzere $\theta\in[0,1)$ sayısı verilsin ve $x_{k+1}=T(x_k)$, $k=1,2,\ldots$ biçiminde (x_n) dizisini tanımlansın. Bu durumda

$$d(x_2,x_3)=d(T(x_1),T(x_2))\le\theta\cdot d(x_1,x_2)$$

$$\begin{aligned}d(x_n,x_{n+1})&=d(T(x_{n-1}),T(x_n))\le\theta\cdot d(x_{n-1},x_n)\\&\le\theta^2\cdot d(x_{n-2},x_{n-1})\\&\;.\\&\;.\\&\;.\\&\le\theta^{n-1}\cdot d(x_1,x_2)\end{aligned}$$

olacaktır. (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu gösterilecektir. $m<n$ olmak üzere m ve n doğal sayıları seçilsin.

$$\begin{aligned}d(x_m,x_n)&\le d(x_m,x_{m+1})+d(x_{m+1},x_{m+2})+\cdots+d(x_{n-1},x_n)\\&\le(\theta^{m-1}+\theta^m+\cdots+\theta^{n-2})d(x_1,x_2)\\&\le\theta^{m-1}\cdot\frac{1}{1-\theta}d(x_1,x_2)\end{aligned}$$

olacaktır. Herhangi bir $\varepsilon>0$ sayısı için

$$m>N \text{ iken } \theta^{m-1}\cdot\frac{1}{1-\theta}d(x_1,x_2)<\varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir N doğal sayısı vardır. Böylece (x_n) bir Cauchy dizisi olur. (X,d) uzayı tam olduğundan (x_n) Cauchy dizisi $x^* \in X$ elemanına yakınsar.

Şimdi ise $x^* = T(x^*)$ olduğu gösterilecektir.

$$
\begin{aligned}
d(x^*,\varphi(x^*)) &\leq d(x^*,x_n) + d(x_n,\varphi(x_n)) + d(\varphi(x_n),\varphi(x^*)) \\
&\leq (1+\theta)d(x^*,x_n) + d(x_n,x_{n+1})
\end{aligned}
$$

olur. Verilen $\varepsilon > 0$ sayısına göre n sayısını

$$
d(x^*,x_n) < \frac{\varepsilon}{2(1+\theta)} \text{ ve } d(x_n,x_{n+1}) < \frac{\varepsilon}{2}
$$

olacak biçimde belirlernirse $d(x^*,T(x^*)) < \varepsilon$ eşitsizliğini elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi bir sayı olduğundan $x^* = T(x^*)$ sonucuna ulaşılır.

$x^* \in X$ elemanının tekliğini görilecektir. Bir $y^* \in X$ elemanı için de $y^* = T(y^*)$ eşitliği sağlansın.

$$
\begin{aligned}
d(x^*,y^*) = d(\varphi(x^*),\varphi(y^*)) &\leq \theta \cdot d(x^*,y^*) \\
(1-\theta)\cdot d(x^*,y^*) &\leq 0
\end{aligned}
$$

olacaktır. Bu durumda $d(x^*,y^*) = 0$ ve dolayısıyla $x^* = y^*$ olduğu görülür.

Örnek 2.36 $X = \mathbb{R},\ C = [0,1] \subset X,\ T: C \to C,\ Tx = \dfrac{x}{2}$ olsun. $x_0 = \dfrac{1}{5}$ olarak seçelim.

$$
\begin{aligned}
&x_1 = Tx_0 = \frac{1}{5}, \\
&x_2 = Tx_1 = T^2x_o = \frac{1}{25}, \\
&x_3 = Tx_2 = T^2x_1 = T^3x_0 = \frac{1}{125}, \\
&\vdots \\
&x_n = Tx_{n-1} = T^2x_{n-2} = \cdots = T^nx_0
\end{aligned}
$$

şeklinde bir dizi elde ederiz. $n \to \infty$ için limit alınırsa, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ dolayısıyla T dönüşümünün sabit noktası 0 dir. Sabit nokta tanımı kullanılarak

$$
Tx = x \Rightarrow \frac{x}{2} = x \Rightarrow x = 2x \Rightarrow x = 0
$$

dır.

Teorem 2.37 (Kannan Teoremi) (X,d) bir tam metrik uzay ve $T:X\to X$ aşağıdaki şartı sağlayan bir dönüşüm olsun, her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)\le a\cdot\left[d(x,Tx)+d(y,Ty)\right] \tag{2.13}$$

olacak şekilde en az bir $a\in[0,1/2)$ sayısı mevcut olsun. Bu durumda T dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır [41].

İspat $x_0\in X$ ve $x_n=T^n x_0,\ n=0,1,2,\ldots$ (2.24) ile verilen Picard iterasyonu [74] olsun. Bu durumda (2.13) eşitsizliğinden

$$d(x_n,x_{n+1})=\frac{a}{1-a}\cdot d(x_{n-1},x_n),\ n=1,2,\ldots \tag{2.14}$$

olduğu elde edilir.

$a\in[0,1/2)$ için $0\le\dfrac{a}{1-a}<1$ olduğundan, Banach contraction prensibinin ispatındakine benzer şekilde $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu ve bu durumda yakınsak bir dizi olduğu sonucuna ulaşılır. $x\in X$, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin limiti olsun. Bu durumda,

$$d(x,Tx)\le d(x,x_n)+d(x_n,Tx)\le d(x,x_n)+a\left[d(x,x_{n-1})+d(x,Tx)\right]$$

olup, buradan da

$$d(x,Tx)\le\frac{1}{a}\cdot d(x,x_n)+\frac{a}{1-a}d(x_{n-1},x_n),\ \forall n\in\mathbb{N} \tag{2.15}$$

olduğu elde edilir. (2.14) ve (2.15) eşitsizliklerinden

$$d(x,Tx)\le\frac{1}{a}\cdot d(x,x_n)+\left(\frac{a}{1-a}\right)^n d(x_0,x_1),\ n=1,2,\ldots \tag{2.16}$$

olup, (2.16) te $n\to\infty$ için limiti alınmasıyla $d(x,Tx)=0\Leftrightarrow x=Tx$, yani sabit noktasının var olduğu gösterildi. Böylece her bir $x_0\in X$ ve $(n\to\infty)$ için $x_n\to x$ dir.

Teorem 2.38 (Chatterjea Teoremi) (X,d) bir tam metrik uzay ve $T:X\to X$ aşağıdaki şartı sağlayan bir dönüşüm olsun, her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)\le b\cdot\left[d(x,Ty)+d(y,Tx)\right] \tag{2.17}$$

olacak şekilde en az bir $b\in\left[0,1/2\right)$ sayısı mevcut olsun. Bu durumda T bir Picard operatörüdür [88].

Teorem 2.39 (Reich Sabit Nokta Teoremi) (X,d) bir tam metrik uzay, $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. T dönüşümü (2.6) şartını sağlıyor ise T dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır [86].

İspat $x\in X$ ve $x_n=T^nx, n=0,1,2,\dots$ Picard iterasyonu olsun. Bu durumda $x=T^nx, y=T^{n-1}x,\ n\ge 1$ için alınırsa

$$d\left(T^{n+1}x,T^nx\right)\le ad\left(T^nx,T^{n-1}x\right)+bd\left(T^{n+1}x,T^nx\right)+cd\left(T^{n-1}x,T^nx\right) \tag{2.18}$$

Yukarıdaki eşitsizlik düzenlenirse $\rho=\dfrac{a+b}{1-c}$ olarak alınırsa

$$d\left(T^{n+1}x,T^nx\right)\le \rho d\left(T^nx,T^{n-1}x\right) \tag{2.19}$$

$\rho<1$olacak şekilde (2.19) elde edilir. (2.19) eşitsizliği bu şekilde devam edilerek düzenlenirse

$$d\left(T^{n+1}x,T^nx\right)\le \rho^n d(Tx,x) \tag{2.20}$$

Her $m>n$ için

$$d\left(T^mx,T^nx\right)\le\frac{\rho^n}{1-\rho}d(Tx,x)$$

elde edilir. Bu yüzden $x_n=T^nx,\ n=0,1,2,\dots$ dizisi Cauchy dizisidir. O halde$T^nx\to z$ vardır. Şimdi $T(z)=z$ olduğu ve $T^{n+1}x\to T(z)$ olduğu gösterilecektir.

Gerçekten $x=T^nx,\ \ y=z$ alınırsa

$$d\left(T^{n+1}x,Tz\right) \leq ad\left(T^{n}x,z\right)+bd\left(T^{n+1}x,T^{n}x\right)+cd\left(Tz,z\right)$$
$$\leq a\rho^{n}d\left(Tx,x\right)+bd\left(T^{n+1}x,z\right)+\frac{c}{1-b}d\left(T^{n}x,z\right)\to 0$$

elde edilir. Birbirinden farklı iki sabit noktası $x \neq y$ olsun. O halde

$$d(x,y)=d(Tx,Ty)\leq ad(x,y)+bd(Tx,x)+cd(Ty,y)=ad(x,y)$$

$x = y$ elde edilir.

Uyarı Teorem 2.39 deki a,b,c reel sayı değerleri aşağıdaki şekilde alınırsa

i) $b = c = 0$ alınırsa Banach sabit nokta teoremi [38] elde edilir.

ii) $b = c,\ a = 0$ olarak alınırsa Kannan sabit nokta teoremi [41] elde edilir.

Teorem 2.40 (Genelleştirilmiş Reich Sabit Nokta Teoremi) $\left(X,d\right)$ bir tam metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y \in X$ için

$$d(Tx,Ty)\leq ad(x,y)+bd(Tx,x)+cd(Ty,y)+ed(Tx,y)+fd(Ty,x) \tag{2.21}$$

olacak şekilde negatif olmayan $a,\ b,\ c,\ e,\ f$ sayılar ve $a+b+c+e+f<1$ mevcut ise T dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır [89].

Teorem 2.41 (Branciari Sabit Nokta Teoremi) $\left(X,d\right)$ bir tam metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $\varphi:\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{R}_{+}$ her $\varepsilon > 0$ için $\int_{0}^{\varepsilon}\varphi(t)dt > 0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir ve Lebesgue-integrallenebilir olsun. Her $x,y \in X$ için $\int_{0}^{d(Tx,Ty)}\varphi(t)dt \leq c\int_{0}^{d(x,y)}\varphi(t)dt$ olacak şekilde $c \in \left(0,1\right)$ mevcut ise T dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır [43].

İspat $x \in X$ keyfi olmak üzere $x_{n+1}=T\left(x_{n}\right)=T^{n}\left(x\right),\ n=0,1,2,\ldots$ biçiminde $\left\{x_{n}\right\}$ dizisini tanımlayalım.

1. adım: Herhangi bir $x \in X$ noktası ve $\{T^{n}x\}$ dizisi için

Bu durumda $c \in (0,1)$ için

$$\int_0^{d(T^{n+1}x,T^n x)} \varphi(t)dt \le c\int_0^{d(T^n x,T^{n-1}x)} \varphi(t)dt \le \cdots \le c^n \int_0^{d(Tx,x)} \varphi(t)dt$$

elde edilir ve aynı zamanda $n \to \infty$ için

$$\int_0^{d(T^{n+1}x,T^n x)} \varphi(t)dt \to 0$$

dır.

2. adım: Cauchy dizisi oldğunu gösterelim.

(X,d) metrik uzayında bir $\{T^n x\}$ Cauchy dizisidir. $\Leftrightarrow$ Her $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\varepsilon$ ve $\forall p \in \mathbb{N}$ için $d(T^{n+p}x,T^n x) < \varepsilon$ dur.

$$\int_0^{d(T^{n+p}x,T^n x)} \varphi(t)dt \le c^n \frac{1}{(1-c)} \int_0^{d(Tx,x)} \varphi(t)dt \tag{2.22}$$

$n \to \infty$ oldunda ve $c < 1$ iken $c^n \to 0$ olduğundan $\{T^n x\}$ Cauchy dizisidir. (X,d) uzayı tam olduğundan (x_n) Cauchy dizisi $x^* \in X$ elemanına yakınsar.

3. adım: Sabit noktasının varlığı (X,d) tam metrik uzay olduğundan dolayı $\lim_{n\to\infty} T^n x = x$ olacak şekilde $x \in X$ noktası vardır. x noktasının sabit nokta olduğunu gösterilecektir. $\int_0^{\|Tx-x\|} \varphi(t)dt > 0$ olsun.

$$0 < d(Tx,x) \le d(T^{n+1}x,x) + d(T^{n+1}x,Tx)$$

$\lim_{n\to\infty} T^n x = x$ olduğundan dolayı $n \to \infty$ için $d(T^{n+1}x,x) \to 0$ noktasına yakınsar.

$$\int_0^{d(T^{n+1}x,Tx)} \varphi(t)dt \le c\int_0^{d(T^n x,x)} \varphi(t)dt$$

$n \to \infty$ için $d(T^n x,x) \to 0$ noktasına yakınsar elde edilir. $0 < c < 1$ ve $0 < \|Tx - x\| \le 0$ olduğundan dolayı $Tx = x$ olur.

4. adım: Sabit noktanın tekliği: $x, y \in X$ noktaları için $y = Ty,\ x = Tx$ olsun.

$$0 \le \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)dt = \int_0^{d(Tx,Ty)} \varphi(t)dt \le c\int_0^{d(x,y)} \varphi(t)dt$$

ve

$d(Ty,y)=0,\ d(Tx,x)=0$ ve $0<c<1$ olduğu içino halde

$$0 \leq \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)dt \leq 0 \Rightarrow d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$$

dir. Sabit noktası tekdir.

Branciari sabit nokta teoremi $\varphi(t)=1$ olarak alınırsa Banach contraction prensibi elde edilmiş olunur.

Teorem 2.42 (X,d) bir tam metrik uzay ve $T:X\to X$ dönüşümü (2.9) veya (2.10) şartlarını sağlayan bir zayıf contraction olsun. $F_T=\{x\in X: Tx=x\}\neq\emptyset$ olsun, bu durumda $\{x_n\}$ Picard iterasyon dizisi bazı $x\in F_T$ ye yakınsar [87].

Teorem 2.43 (X,d) bir tam metrik uzay ve $T:X\to X$ dönüşümü (2.11) veya (2.12) şartlarını sağlayan bir zayıf contraction olsun. $F_T=\{x_*\in X: Tx_*=x_*\}\neq\emptyset$ olsun, bu durumda T dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır [87].

Teorem 2.44 (X,d) bir tam metrik uzay ve $T:X\to X$ dönüşümü

Eğer her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)\leq \delta M(x,y)+LN(x,y) \tag{2.23}$$

$M(x,y)=\max\{d(x,y),d(Tx,x),d(Ty,y),d(Tx,y),d(Ty,x)\}$ ve

$N(x,y)=\max\{d(Tx,x),d(Ty,y),d(Tx,y),d(Ty,x)\}$ olacak şekilde $\delta\in(0,1)$ sabiti ve $L\geq 0$ şartlarını sağlayan bir hemen hemen contraction olsun.

Bu durumda

(i) T bir tek sabit noktaya sahiptir, yani $F_T=\{x_*\in X\}$ dır;

(ii) $x_*\in F_T$ ye yakınsar [90].

2.4 Bazı İterasyon Yöntemleri

Bu bölümde literatürde yaygın olarak kullanılan iterasyon yöntemlerini tanıtacaktır.

Bir dönüşümün sabit noktasını yada noktalarını bulurken çeşitli iterasyon yöntemleri kullanılır. Bunların bazıları, Picard itersayon methodu [74], Krasnoselskij iterasyonu

[75], Mann iterasyonu [47], Ishikawa iterasyonu [76], Noor iterasyonu [77] vb. iterasyon yöntemleridir. Bu iterasyon yöntemlerini sıra halinde ifade edilirse:

Picard iterasyon yöntemi [74] Cauchy tarafından kullanıldığı bilinmektedir. Bu yöntem ilk olarak 1890 yılında Picard [74] tarafından başlangıç değerle diferansiyel denklemlerinin çözümünün varlığı ve tekliğinin ispatında kullanıldığı görülmektedir.

Tanım 2.45 (Picard İterasyon Metodu) (X,d) bir metrik uzay, $C \subseteq X$ kapalı bir alt küme ve $T:C \to C$ bir dönüşüm olsun. Verilen bir $x_0 \in X$ için

$$x_{n+1} = T(x_n) = T^n(x_0),\ n = 0,1,2,\ldots \tag{2.24}$$

şeklinde tanımlanır. Picard iterasyonu, ardışık yaklaşımlar dizisi olarak da adlandırılır [74].

Picard iterasyonu tam metrik uzayda tanımlı contraction dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşmak için kullanılan iterasyonlardan biridir. Contraction dönüşüm yerine farklı bir sınıftan bir dönüşüm alınırsa Picard itereasyonu, dönüşümün sabit noktasına yakınsamayabilir. Bu durum göz önünde bulunduran Krasnoselskij [75] aşağıdaki iterasyon yöntemini tanımlamıştır.

Tanım 2.46 (Krasnoselskij İterasyonu) $(X,\|\bullet\|)$ bir reel normlu uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Krasnoselskij iterasyonu, $x_0 \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + \lambda T x_n,\ n = 0,1,2,\ldots \tag{2.25}$$

şeklinde tanımlanır [75].

Krasnoselskij iterasyonu $\lambda = 1$ için Picard iterasyonuna (2.24) indirgenir.

Bu iterasyon yöntemi 1954 yılında Krasnoselskij [75] tarafından tanımlanmıştır. Nonexpansive dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşımda bulunmak amacıyla kullanılan en genel iterasyon yöntemi Mann iterasyonudur. Mann iterasyon yöntemi, Krasnoselskijiterasyon yönteminden daha önce 1952 yılında bir matris formunda tanımlanmıştır.

Tanım 2.47 (Mann İterasyonu) X bir normlu uzay, $C \subseteq X$ in bir boş olmayan konveks alt küme, $T:C \to C$ bir dönüşüm olsun. Keyfi bir $x_0 \in C$ için,

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n,\ n \in \mathbb{N} \tag{2.26}$$

$\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n \in [0,1]$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartlarını sağlayan bir negatif olmayan reel sayıların dizisi olsun. Bu durumda $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine Mann iterasyonu denilir [47].

α_n dizisi $\alpha_n = \lambda$ (sabit) olarak alınırsa, bu durumda Mann iterasyonu, Krasnoselskij iterasyonuna (2.25) indirgenir.

Mann iterasyonunun pseudo-contractive dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsamadığı ancak 1974 yılında Ishikawa [76] tarafından tanımlanan bu iterasyon yöntemi bir pseudo-contractive dönüşümün sabit noktasına yakınsadığını göstermiştir.

Tanım 2.48 (Ishikawa İterasyonu) X bir normlu uzay, $C \subseteq X$ in bir boş olmayan konveks alt küme, $T : C \to C$ bir dönüşüm olsun. Keyfi bir $x_0 \in C$ için,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n, n = 0,1,2,\cdots \end{cases} \tag{2.27}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\} \in [0,1]$ dir. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ dir. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine Ishikawa iterasyonu denilir [76].

$\beta_n = 0$ için Ishikawa iterasyonu Mann iterasyonuna (2.26) indirgenir.

2000 yılında M.A. Noor [77] tarafından, aşağıdaki üç adımlı iterasyon yöntemi tanımlandı.

Tanım 2.49 (Noor İterasyon Yöntemi) $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(T, x_n) = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T z_n \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \tag{2.28}$$

alınmasıyla elde edilen iterasyon yöntemine Noor iterasyon yöntemi denilir [77].

Tanım 2.50 X bir normlu uzay, $C \subseteq X$ in bir boş olmayan konveks alt küme, $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. Keyfi bir $x_0 \in C$ için,

$$\begin{cases} f(T, x_n) = (1-\alpha_n - \beta_n)\, y_n + \alpha_n T y_n + \beta_n T z_n, \\ \qquad y_n = (1 - a_n - b_n)\, z_n + a_n T z_n + b_n T x_n \\ \qquad z_n = (1-c_n) x_n + c_n T x_n,\ n = 0,1,2,\cdots \end{cases} \tag{2.29}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n + \beta_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty} \in [0,1]$, $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) = \infty$ dir [91].

Tanım 2.51 (Picard-Mann Hibrid İterasyonu) X bir normlu uzay, $C \subseteq X$ kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. Verilen bir $x_0 \in X$ için

$$\begin{cases} x_{n+1} = T(y_n), \\ y_n = (1-\alpha_n) x_n + \alpha_n T x_n \ , n = 0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{2.30}$$

olacak şekilde $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n \in (0,1)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartlarını sağlayan bir negatif olmayan reel sayıların dizisi var ise $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine Picard-Mann Hibrid iterasyonu denilir [92].

Tanım 2.52 (New Multistep iteration) X bir normlu uzay, $C \subseteq X$ in bir boş olmayan alt küme, $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. Keyfi bir $x_0 \in C$ için,

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)\, y_n^1 + \alpha_n T y_n^1, \\ y_n^1 = (1-\beta_n^1)\, y_n^2 + \beta_n^1 T y_n^2, \\ y_n^2 = (1-\beta_n^2)\, y_n^3 + \beta_n^2 T y_n^3, \\ \cdots \\ y_n^{s-1} = (1-\beta_n^{s-1})\, x_n + \beta_n^{s-1} T x_n,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ya da

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)\, y_n^1 + \alpha_n T y_n^1, \\ y_n^i = (1-\beta_n^i)\, y_n^{i+1} + \beta_n^i T y_n^{i+1},\ \text{i=1},\cdots,\text{ s-2} \\ y_n^{s-1} = (1-\beta_n^{s-1})\, x_n + \beta_n^{s-1} T x_n,\ n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{2.31}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\} \in [0,1)$ ve i=1,$\cdots$, s-2 dir [93].

2.5 Bazı Önemli Tanımlar ve Lemmalar

Bu kısımda çalışmamızda kullanacağımız bazı tanımlar ve lemmalar vereceğiz.

Lemma 2.53 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ iki pozitif reel sayı dizileri olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha_{n+1} \leq (1-\lambda_n)\alpha_n + \beta_n,$$

olacak şekilde $\lambda_n \in [0,1]$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$, ve $n \to \infty$ için $\dfrac{\beta_n}{\lambda_n} \to 0$ oluyorsa $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ dır [94].

Lemma 2.54 Herhangi bir pozitif $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha_{n+1} \leq (1-\mu_n)\alpha_n + \mu_n \gamma_n$$

olacak şekilde $\mu_n \in (0,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = \infty$ dir. O halde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} \alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty} \gamma_n$$

[95].

Lemma 2.55 (X,d) bir tam metrik uzay ve $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir ve Lebesgue integrallenebilir olsun. $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}, \{v_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ için

$$\left| d(u_n, v_n) - \int_0^{d(u_n,v_n)} \varphi(t)dt \right| \leq a_n$$

olacak şekilde $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ şartını sağlayan bir $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset (0,1)$ dizisi vardır [46].

Tanım 2.56 (Kararlılık) $(X, \|\bullet\|)$ normlu uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $n \geq 0$, $x_0 \in X$ için $x_{n+1} = f(T, x_n)$ iterasyonu olmak üzere ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ nokta dizisi T nin sabit noktasına yakınsasın. Herhangi bir $y_n \subset X$ dizisi ve

$\varepsilon_n = \|y_{n+1} - f(T, y_n)\|$, $(n = 0,1,2,...)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = p$ oluyor ise *T* kararlıdır denir [96-97].

Tanım 2.57 (Veri Bağımlılığı) $T, S : C \to C$ iki operatör olsun. $x \in C$

$\|Tx - Sx\| \le \varepsilon$

olacak şekilde sabit $\varepsilon > 0$ sayısı varsa *S* ye *T* nin yaklaşım operatörü denir [84].

Tanım 2.58 $a,b \ge 0$ için $\int\limits_0^{a+b} \varphi(t)dt \le \int\limits_0^{a} \varphi(t)dt + \int\limits_0^{b} \varphi(t)dt$ oluyorsa integral alt toplamsaldır denir.

Örnek 2.59 $a,b \ge 0$ $\varphi(x) = \dfrac{1}{x+1}$ integrali alt toplamsaldır.

$\int\limits_0^{a+b} \dfrac{1}{x+1} dx = \ln(a+b+1)$, $\int\limits_0^{a} \dfrac{1}{x+1} dx = \ln(a+1)$, $\int\limits_0^{b} \dfrac{1}{x+1} dx = \ln(b+1)$

$a.b \ge 0$ dır. $a+b+1 \le ab+a+b+1 = a(b+1)+(b+1) = (b+1)(a+1)$

$\ln(a+b+1) \le \ln((b+1)(a+1)) = \ln(b+1) + \ln(a+1)$

$\int\limits_0^{a+b} \dfrac{1}{x+1} dx \le \int\limits_0^{a} \dfrac{1}{x+1} dx + \int\limits_0^{b} \dfrac{1}{x+1} dx$ alt toplamsaldır [98].

BÖLÜM 3

İNTEGRAL TİP DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI İTERASYONLARIN YAKINSAKLIKLARI

Bu bölümde tanımlanan integral tip dönüşüm ile yeni tanımlamış olduğumuz integral tip dönüşüm sınıfları için bazı iterasyon yöntemleri kullanılarak yakınsaklıklarını inceleyeceğiz.

Banach contraction teoremi [38] bir tam metrik uzaydan kendisi üzerine olan dönüşümlerle ilgilenir. Teoremdeki dönüşümün contraction olması şartı teoremin uygulamasında kısıtlamalar getirmektedir. Bu sebeple birçok araştırmacı farklı uzaylar veya farklı türden dönüşüm sınıflarını kullanarak bu teoremin çok sayıda genelleştirmelerini elde etmişlerdir. Bu amaçla Branciari [43] tarafından Teorem 2.41 de (2.7) şartı ile Banach contraction teoreminin integral versiyonunu tanmladı. Rhoades [44] ise $\left(X,d\right)$ bir tam metrik uzay, $T:X\to X$ bir dönüşüm ve $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ her $\varepsilon>0$ için $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt>0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir ve Lebesgue-integrallenebilir olsun. Her $x,y\in X$ için

$$\int_0^{d(Tx,Ty)}\varphi(t)dt\le k\int_0^{m(x,y)}\varphi(t)dt \tag{3.1}$$

olacak şekilde $k\in\left(0,1\right)$ mevcut ve

$m(x,y)=\max\{d(x,y),d(x,f(x)),d(y,f(y)),\dfrac{d(x,f(y))+d(y,f(x))}{2}\}$ ve her $x,y\in X$ için

$$\int_0^{d(Tx,Ty)} \varphi(t)dt \le k \int_0^{M(x,y)} \varphi(t)dt \tag{3.2}$$

olacak şekilde $k \in (0,1)$ mevcut ve burada

$M(x,y) = \max\{d(x,y), d(x,f(x)), d(y,f(y)), d(x,f(y)), d(y,f(x))\}$ dır. İfadelerini tanımlamıştır.

(X,d) bir tam metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $v,\psi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ monoton azalmayan fonksiyon ve $\varphi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir ve Lebesgue-integrallenebilir olsun. Her $x,y \in X$ için

$$\int_0^{d(Tx,Ty)} \varphi(t)dt \le \psi\left(\int_0^{d(x,Tx)} \varphi(t)dv(t)\right) + k \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)dv(t) \tag{3.3}$$

olacak şekilde $k \in (0,1)$ mevcut olduğunu Olatinwo [46] tanımlayarak bazı sonuçlarını elde etti.

Bölüm 3'te, Bölüm 2'de bahsedilen dönüşümlerin birçoğunu özel hal olarak barındıran bazı yeni integral tip dönüşümler tanımlanarak bu yeni dönüşümler yardımıyla ele alınan konulara ilişkin elde edilen orijinal sonuçlara yer verilecektir.

Riech integral tip dönüşüm olarak adlandırılan ilk yeni dönüşümümüz aşağıdaki şekilde tanımlandı.

Tanım 3.1 $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $\varphi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir olsun. Her $x,y \in X$ için

$$\int_0^{\|Tx-Ty\|} \varphi(t)dt \le a\int_0^{\|x-y\|} \varphi(t)dt + b\int_0^{\|Tx-x\|} \varphi(t)dt + c\int_0^{\|Ty-y\|} \varphi(t)dt \tag{3.4}$$

olacak şekilde $a+b+c<1$ şartını sağlayan a,b,c negatif olmayan sayılar olmak üzere, (3.4) eşitsizliği elde edilir.

Bu yeni dönüşümümüz özel durumları aşağıdaki şekilde açıklanabilir.

(3.4) eşitsizliğinde $\varphi(t)=1$ alınırsa 1971 yılında Simon Riech tarafından (2.6) da tanımlanan dönüşüm elde edilir. $b=c=0$ alınırsa contraction dönüşümü elde edilir. $b=c=\frac{1}{2},\ a=0$ olarak alınırsa Kannan dönüşümü [41] elde edilir.

Teorem 2.37 ile verilen (2.13) eşitsizliğinin integral versiyonu olan ikinci yeni dönüşümümüz aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 3.2 $T:X\to X$ bir dönüşüm ve $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ her $\varepsilon>0$ için $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt>0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir olsun. Her $x,y\in X$ için

$$\int_0^{\|Tx-Ty\|}\varphi(t)dt\le a\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt+b\int_0^{\|Ty-y\|}\varphi(t)dt \tag{3.5}$$

olacak şekilde $a,b\in[0,\tfrac{1}{2})$ şartını sağlayan sayılar olmak üzere, (3.5) eşitsizliği elde edilir. (3.5) eşitsizliğinde $\varphi(t)=1$ ve $a=b$ alınırsa (2.13) ile verilen eşitsizlik elde edilir.

Üçüncü yeni dönüşümümüz:

Tanım 3.3 $T:X\to X$ bir dönüşüm ve $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ her $\varepsilon>0$ için $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt>0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir olsun. Her $x,y\in X$ için

$$\int_0^{\|Tx-Ty\|}\varphi(t)dt\le a\int_0^{\|Tx-y\|}\varphi(t)dt+b\int_0^{\|Ty-x\|}\varphi(t)dt \tag{3.6}$$

olacak şekilde $a,b\in[0,\tfrac{1}{2})$ şartını sağlayan sayılar olmak üzere, (3.6) eşitsizliği tanımlanır. (3.6) eşitsizliğinde $\varphi(t)=1$ ve $a=b$ alınırsa (2.17) ile verilen eşitsizlik elde edilir.

Genelleştirilmiş Reich sabit nokta teoreminin [89] integral versiyonu için aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 3.4 $T:X\to X$ bir dönüşüm ve $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ her $\varepsilon>0$ için $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt>0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir veintegral alt toplamsal olsun. Her $x,y\in X$ için

$$\begin{aligned}\int_0^{\|Tx-Ty\|}\varphi(t)dt &\le a\int_0^{\|x-y\|}\varphi(t)dt+b\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt+c\int_0^{\|Ty-y\|}\varphi(t)dt+\\ &+e\int_0^{\|Tx-y\|}\varphi(t)dt+f\int_0^{\|Ty-x\|}\varphi(t)dt\end{aligned} \tag{3.7}$$

olacak şekilde $a+b+c+e+f<1$ şartını sağlayan a,b,c negatif olmayan sayılar olmak üzere, (3.7) eşitsizliği elde edildi. Burada

$b=c=e=f=0$ için (2.7) ile verilen integral tip contraction şartı,

$e=f=0$ ve $a+b+c<1$ ile (3.4) verilenilen integral tip şartı,

$a=e=f=0$ ve $b,c\in[0,\frac{1}{2})$ ile (3.5) verilenilen integral tip şartı,

$a=b=c=0$ ve $e,f\in[0,\frac{1}{2})$ ile (3.6) verilenilen integral tip şartı,

$b=c=e=f=0$ ve $\varphi(t)=1$ alınırsa Banach contraction prensibi [38],

$a=e=f=0$, $b,c\in[0,\frac{1}{2})$, $b=c$ ve $\varphi(t)=1$ alınırsa Kannan teoreminde [41] verilen (2.13) şartı,

$a=b=c=0$, $e,f\in[0,\frac{1}{2})$, $e=f$ ve $\varphi(t)=1$ alınırsa Chatterjea teoreminde [88] verilen (2.17) şartı elde edilir.

(2.9), (2.10), (2.11) ve (2.12) ile verilen zayıf contraction şartlarını kullanarak aşağıdaki dönüşümler tanımlandı.

Tanım 3.5 (X,d) bir tam metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm ve $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ her $\varepsilon>0$ için $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt>0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir olsun. Her $x,y\in X$ için

$$\int_0^{d(Tx,Ty)}\varphi(t)dt\le\delta\int_0^{d(x,y)}\varphi(t)dt+L\int_0^{d(Ty,x)}\varphi(t)dt \tag{3.8}$$

veya

$$\int_0^{d(Tx,Ty)} \varphi(t)dt \le \delta \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)dt + L\int_0^{d(Tx,y)} \varphi(t)dt \tag{3.9}$$

veya

$$\int_0^{d(Tx,Ty)} \varphi(t)dt \le \delta \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)dt + L\int_0^{d(Tx,x)} \varphi(t)dt \tag{3.10}$$

veya

$$\int_0^{d(Tx,Ty)} \varphi(t)dt \le \delta \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)dt + L\int_0^{d(Ty,y)} \varphi(t)dt \tag{3.11}$$

olacak şekilde bir $\delta \in (0,1)$ sabiti ve bir $L \ge 0$ mevcut ise, T ye bir integral tip zayıf contraction denilir.

Örnek 3.6 X bir Banach uzayı olsun. C, X boştan farklı kapalı konveks alt kümesi olsun. $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir ve $T : C \to C$, (2.7) şartını sağlayan bir integral tip contraction dönüşüm olsun. Keyfi bir x_0, C deki herhangi bir nokta ise bu durumda $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ nokta dizisi (2.26) ile verilen Mann iterasyonu olmak üzere, T nin sabit noktasına yakınsar, $Tp = p$ için

$$\begin{aligned}
\int_0^{\|x_{n+1}-p\|} \varphi(t)dt &\le \|x_{n+1} - p\| + k_n \\
&\le (1-\alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n \|Tx_n - p\| + k_n \\
&\le (1-\alpha_n)\int_0^{\|x_n - p\|} \varphi(t)dt + \alpha_n \int_0^{\|Tx_n - p\|} \varphi(t)dt + 2k_n \\
&\le (1-\alpha_n(1-\delta))\int_0^{\|x_n - p\|} \varphi(t)dt + 2k_n
\end{aligned}$$

Burada $Tx = \sqrt[3]{3x+18}$ olarak alınırsa $Tp = p$ den dolayı $p = 3$ elde edilir.

Başlangıç şartı $x_0 = 100$ ve $\varphi(t) = \dfrac{1}{t+1}$ olarak seçersek Çizelge 3.1 ile verilen sonuçlar elde edilir.

Çizelge 3.2 Mann iterasyon yönteminin ilk 27 adımının hesaplanması

İterasyon Adım Sayısı	Mann İterasyonu
1	53.412812
2	29.520268
3	17.130628
$\vdots$	$\vdots$
20	3.00059
$\vdots$	$\vdots$
27	3.000011

Bu bölümün devamında, Branciari[43] integral contraction ve bazı yeni integral tip dönüşümler yardımıyla ele alınan konulara ilişkin elde edilen orijinal sonuçlara yer verilecektir.

Teorem 3.7 $(X,\|\cdot\|)$ Banach uzayı ve $\varphi:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir olsun. $T: X \to X$, (3.4) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır.

İspat $x_0 \in X$ keyfi olmak üzere $x_{n+1} = T(x_n) = T^n(x_0)$, $n = 0,1,2,\ldots$ biçiminde (x_n) dizisini tanımlayalım.

1. adım: Herhangi bir $x \in X$ noktası ve $\{T^n x\}$ dizisi için

Bu durumda

$$\int_0^{\|T^{n+1}x-T^nx\|}\varphi(t)dt \le a\int_0^{\|T^nx-T^{n-1}x\|}\varphi(t)dt + b\int_0^{\|T^{n+1}x-T^nx\|}\varphi(t)dt + c\int_0^{\|T^nx-T^{n-1}x\|}\varphi(t)dt$$

$$(1-b)\int_0^{\|T^{n+1}x-T^nx\|}\varphi(t)dt \le (a+c)\int_0^{\|T^nx-T^{n-1}x\|}\varphi(t)dt$$

$$\int_0^{\|T^{n+1}x-T^nx\|}\varphi(t)dt \le \frac{a+c}{(1-b)}\int_0^{\|T^nx-T^{n-1}x\|}\varphi(t)dt$$

burada $a+b+c<1 \Rightarrow a+c<1-b, \dfrac{a+c}{(1-b)} = \delta < 1$ alınırsa

$$\int_0^{\|T^{n+1}x-T^nx\|}\varphi(t)dt \le \delta\int_0^{\|T^nx-T^{n-1}x\|}\varphi(t)dt$$

elde edilir. Buradan devam edilirse

$$\int_0^{\|T^{n+1}x-T^nx\|}\varphi(t)dt \le \delta\int_0^{\|T^nx-T^{n-1}x\|}\varphi(t)dt \le \cdots \le \delta^n\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt \tag{3.12}$$

şeklinde yazılabilir.

2. adım: Cauchy dizisi oldğunu gösterelim.

$(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayında bir $\{T^nx\}$ Cauchy dizisidir. $\Leftrightarrow$ Her $\forall\varepsilon>0$ sayısı için $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\varepsilon$ ve $\forall p \in \mathbb{N}$ için $\|T^{n+p}x - T^nx\| < \varepsilon$ dur. O halde Lemma 2.55 kullanılarak

$$\begin{aligned}\int_0^{\|T^{n+p}x-T^nx\|}\varphi(t)dt &\le \|T^{n+p}x-T^nx\| + k_n \\ &\le \|T^{n+p}x-T^{n+p-1}x\| + \|T^{n+p-1}x-T^{n+p-2}x\| + \cdots + \|T^{n+1}x-T^nx\| + k_n \\ &\le \delta^n\frac{1}{(1-\delta)}\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt + (p+1)k_n\end{aligned} \tag{3.13}$$

$n\to\infty$ olduğunda Lemma 2.55 gereğince $k_n \to 0$ ve $\delta<1$ iken $\delta^n \to 0$ olduğundan $\{T^nx\}$ Cauchy dizisidir. $(X,\|\cdot\|)$ uzayı tam olduğundan $\{x_n\}$ Cauchy dizisi $x^* \in X$ elemanına yakınsar.

3. adım: Sabit noktasının varlığı

$(X,\|\cdot\|)$ tam normlu uzay olduğundan dolayı $\lim_{n\to\infty}T^nx = x$ olacak şekilde $x\in X$ noktası vardır. x noktasının sabit nokta olduğunu gösterelim. $\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt > 0$ olsun.

$$0<\|Tx-x\| \le \|T^{n+1}x-x\| + \|T^{n+1}x-Tx\|$$

$\|T^{n+1}x-x\|$ normu 0 noktasına yakınsar. Çünkü $\lim_{n\to\infty} T^n x = x$ olduğundan dolayı $n\to\infty$ iken $\|T^{n+1}x-x\|\to 0$ dır. Lemma 2.55 gereğince

$$\begin{aligned}
\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt &\le \int_0^{\|T^{n+1}x-x\|}\varphi(t)dt + \int_0^{\|T^{n+1}x-Tx\|}\varphi(t)dt + 3k_n \\
&\le \int_0^{\|T^{n+1}x-x\|}\varphi(t)dt + a\int_0^{\|T^{n+1}x-x\|}\varphi(t)dt + b\int_0^{\|T^{n+1}x-T^n x\|}\varphi(t)dt + c\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt + 3k_n \\
&\le \int_0^{\|T^{n+1}x-x\|}\varphi(t)dt + a\int_0^{\|T^{n+1}x-x\|}\varphi(t)dt + \delta^n b\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt + c\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt + 3k_n
\end{aligned}$$

elde edilir. $\lim_{n\to\infty} T^n x = x$ iken $n\to\infty \Rightarrow \|T^{n+1}x-x\|\to 0$, $\int_0^{\|T^n x-x\|}\varphi(t)dt \to 0$, δ^n ve $k_n \to 0$ dır. O halde $n\to\infty$ için

$$\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt \le c\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt$$
$$(1-c)\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt \le 0$$

$0<c<1$, $1-c\neq 0$ ve $0<\|Tx-x\|\le 0$ olduğundan dolayı $Tx=x$ olur.

Şimdi sabit noktanın tek olduğunu gösterelim.

4. adım: Sabit noktanın tekliği: $x,y\in X$ noktaları için $y=Ty$, $x=Tx$ olsun.

$$0\le \int_0^{\|x-y\|}\varphi(t)dt \le \int_0^{\|Tx-Ty\|}\varphi(t)dt \le a\int_0^{\|x-x\|}\varphi(t)dt + b\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt + c\int_0^{\|Ty-y\|}\varphi(t)dt$$

ve

$\|Ty-y\|=0$, $\|Tx-x\|=0$ ve $0<a<1$ olduğu için

$$\int_0^{\|x-y\|}\varphi(t)dt \le a\int_0^{\|x-y\|}\varphi(t)dt$$
$$(1-a)\int_0^{\|x-y\|}\varphi(t)dt \le 0$$

o halde

$$0\le \int_0^{\|x-y\|}\varphi(t)dt \le 0 \Rightarrow \|x-y\|=0 \Rightarrow x=y$$

dir. Sabit noktası tekdir.

Örnek 3.8 $X = [0,1]$ ve $\|\cdot\|$ mutlak değer normu olsun. $(X,\|\cdot\|)$ tam normlu uzay olduğundan bir Banach uzayı olur. $\varphi:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^\varepsilon \varphi(t)dt > 0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir olması gerektiğinden $\varphi(t) = \frac{t^2}{2}$ olarak seçelim. O halde her $\varepsilon > 0$ için

$$\int_0^\varepsilon \varphi(t)dt = \int_0^\varepsilon \frac{t^2}{2}dt = \left.\frac{t^3}{6}\right|_0^\varepsilon = \frac{\varepsilon^3}{6} > 0$$

olur. $a = b = c = \frac{1}{8}$ ve her $x, y \in [0,1]$, $T:[0,1] \to [0,1]$ olacak şekilde $Tx = \frac{x}{2}$ dönüşümü (3.4) eşitsizliğini sağlayan integral tip dönüşüm olur. Teorem 3.7 gereğince tek bir sabit noktası vardır. Bu sabit nokta $F_T = \{0\}$ dır.

Teorem 3.9 $(X,\|\cdot\|)$ Banach uzayı ve $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $\varphi:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^\varepsilon \varphi(t)dt > 0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\int_0^{\|Tx-Ty\|} \varphi(t)dt \le a\int_0^{\|Tx-x\|} \varphi(t)dt + b\int_0^{\|Ty-y\|} \varphi(t)dt$$

olacak şekilde $a, b \in [0, 1/2)$ şartını sağlayan reel sayılar mevcut ise T dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır.

İspat $x_0 \in X$ keyfi olmak üzere $x_{n+1} = T(x_n) = T^n(x_0)$, $n = 0,1,2,\dots$ biçiminde (x_n) Picard iterasyon dizisini kullanarak herhangi bir $x \in X$ noktası ve $\{T^n x\}$ dizisi için

$$\int_0^{\|T^{n+1}x-T^n x\|} \varphi(t)dt \le a\int_0^{\|T^{n+1}x-T^n x\|} \varphi(t)dt + b\int_0^{\|T^n x-T^{n-1}x\|} \varphi(t)dt$$

$$(1-a)\int_0^{\|T^{n+1}x-T^n x\|} \varphi(t)dt \le b\int_0^{\|T^n x-T^{n-1}x\|} \varphi(t)dt$$

$$\int_0^{\|T^{n+1}x-T^n x\|} \varphi(t)dt \le \frac{b}{(1-a)}\int_0^{\|T^n x-T^{n-1}x\|} \varphi(t)dt$$

dır. Burada $a+b<1$, $\dfrac{b}{(1-a)}=\delta<1$ alınırsa

$$\int_0^{\|T^{n+1}x-T^nx\|}\varphi(t)dt\le\delta\int_0^{\|T^nx-T^{n-1}x\|}\varphi(t)dt$$

elde edilir. Buradan devam edilirse

$$\int_0^{\|T^{n+1}x-T^nx\|}\varphi(t)dt\le\delta\int_0^{\|T^nx-T^{n-1}x\|}\varphi(t)dt\le\cdots\le\delta^n\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt \tag{3.14}$$

şeklinde yazılabilir. Cauchy dizisi oldğunu gösterelim.

$(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayında bir $\{T^nx\}$ Cauchy dizisidir. $\Leftrightarrow$ Her $\forall\varepsilon>0$ sayısı için $\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ öyle ki $\forall n>n_\varepsilon$ ve $\forall p\in\mathbb{N}$ için $\|T^{n+p}x-T^nx\|<\varepsilon$ dur. O halde Lemma 2.55 kullanılarak

$$\begin{aligned}\int_0^{\|T^{n+p}x-T^nx\|}\varphi(t)dt&\le\|T^{n+p}x-T^nx\|+k_n\\&\le\|T^{n+p}x-T^{n+p-1}x\|+\|T^{n+p-1}x-T^{n+p-2}x\|+\cdots+\|T^{n+1}x-T^nx\|+k_n\\&\le\delta^n\frac{1}{(1-\delta)}\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt+(p+1)k_n\end{aligned} \tag{3.15}$$

$n\to\infty$ olduğunda Lemma 2.55 gereğince $k_n\to0$ ve $\delta<1$ iken $\delta^n\to0$ olduğundan $\{T^nx\}$ Cauchy dizisidir. $(X,\|\cdot\|)$ uzayı tam olduğundan $\{x_n\}$ Cauchy dizisi $x\in X$ elemanına yakınsar. O halde şimdi sabit noktasının varlığını inceleyeceğiz.

$(X,\|\cdot\|)$ tam normlu uzay olduğundan dolayı $\lim_{n\to\infty}T^nx=x$ olacak şekilde $x\in X$ noktası vardır. x noktasının sabit nokta olduğunu gösterelim. $\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt>0$ olsun.

$$0<\|Tx-x\|\le\|T^{n+1}x-x\|+\|T^{n+1}x-Tx\|$$

$\|T^{n+1}x-x\|$ normu 0 noktasına yakınsar. Çünkü $\lim_{n\to\infty}T^nx=x$ olduğundan dolayı $n\to\infty$ iken $\|T^{n+1}x-x\|\to0$ dır. Lemma 2.42 gereğince ve (3.14) kullanılarak

$$\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt \le \int_0^{\|T^{n+1}x-x\|}\varphi(t)dt + \int_0^{\|T^{n+1}x-Tx\|}\varphi(t)dt + 3k_n$$
$$\le \int_0^{\|T^{n+1}x-x\|}\varphi(t)dt + a\int_0^{\|T^{n+1}x-T^n x\|}\varphi(t)dt + b\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt + 3k_n$$
$$\le \int_0^{\|T^{n+1}x-x\|}\varphi(t)dt + a\delta^n\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt + b\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt + 3k_n$$

elde edilir. $\lim_{n\to\infty} T^n x = x$ iken $n\to\infty \Rightarrow \|T^{n+1}x-x\|\to 0$, $\int_0^{\|T^n x-x\|}\varphi(t)dt\to 0$, δ^n ve $k_n\to 0$ dır. O halde $Tx = x$ olur. Son olarak sabit noktanın tek olduğunu gösterelim.

$x, y\in X$ noktaları için $y = Ty,\ x = Tx$ olsun.

$$0\le \int_0^{\|x-y\|}\varphi(t)dt = \int_0^{\|Tx-Ty\|}\varphi(t)dt \le a\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt + b\int_0^{\|Ty-y\|}\varphi(t)dt$$

ve $\|Ty-y\|=0,\ \|Tx\text{-}x\|=0$ olduğu için

$$0\le \int_0^{\|x-y\|}\varphi(t)dt \le 0 \Rightarrow \|x-y\| = 0 \Rightarrow x = y$$

dir. Sabit noktası tekdir.

Teorem 3.10 $(X,\|\cdot\|)$ Banach uzayı ve $T: X\to X$ bir dönüşüm ve $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt > 0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir olsun. Her $x, y\in X$ için

$$\int_0^{\|Tx-Ty\|}\varphi(t)dt \le a\int_0^{\|Tx-y\|}\varphi(t)dt + b\int_0^{\|Ty-x\|}\varphi(t)dt$$

olacak şekilde $a,b\in[0,\tfrac{1}{2})$ şartını sağlayan sayılar mevcut ise T dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır.

İspat: Teorem 3.9 bezer şekilde Picard iterasyonu kullanarak, $x_0\in X$ keyfi olmak üzere $\{T^n x\}$ dizisi için

Bu durumda

$$\int_0^{\|T^{n+1}x-T^n x\|}\varphi(t)dt \le a\int_0^{\|T^{n+1}x-T^{n-1}x\|}\varphi(t)dt + b\int_0^{\|T^n x-T^n x\|}\varphi(t)dt$$

İntegral alt toplamsallığı kullanılırsa

$$\int_0^{\|T^{n+1}x-T^nx\|}\varphi(t)dt \le a\int_0^{\|T^{n+1}x-T^nx\|}\varphi(t)dt + a\int_0^{\|T^nx-T^{n-1}x\|}\varphi(t)dt$$

$$\int_0^{\|T^{n+1}x-T^nx\|}\varphi(t)dt \le \frac{a}{(1-a)}\int_0^{\|T^nx-T^{n-1}x\|}\varphi(t)dt$$

Burada $a+b<1$ ve $a\in[0,\frac{1}{2})$ olduğundan $\frac{a}{(1-a)}=\delta<1$ alınırsa

$$\int_0^{\|T^{n+1}x-T^nx\|}\varphi(t)dt \le \delta\int_0^{\|T^nx-T^{n-1}x\|}\varphi(t)dt$$

elde edilir. Buradan devam edilirse

$$\int_0^{\|T^{n+1}x-T^nx\|}\varphi(t)dt \le \delta\int_0^{\|T^nx-T^{n-1}x\|}\varphi(t)dt \le \cdots \le \delta^n\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt$$

şeklinde yazılabilir. Cauchy dizisi oldğunu gösterelim.

$(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayında bir $\{T^nx\}$ Cauchy dizisidir. $\Leftrightarrow$ Her $\forall\varepsilon>0$ sayısı için $\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ öyle ki $\forall n>n_\varepsilon$ ve $\forall p\in\mathbb{N}$ için $\|T^{n+p}x-T^nx\|<\varepsilon$ dur. O halde Lemma 2.55 kullanılarak

$$\begin{aligned}\int_0^{\|T^{n+p}x-T^nx\|}\varphi(t)dt &\le \|T^{n+p}x-T^nx\|+k_n\\ &\le \|T^{n+p}x-T^{n+p-1}x\|+\|T^{n+p-1}x-T^{n+p-2}x\|+\cdots+\|T^{n+1}x-T^nx\|+k_n\\ &\le \delta^n\frac{1}{(1-\delta)}\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt+(p+1)k_n\end{aligned}$$

$n\to\infty$ olduğunda Lemma 2.55 gereğince $k_n\to 0$ ve $\delta<1$ iken $\delta^n\to 0$ olduğundan $\{T^nx\}$ Cauchy dizisidir. $(X,\|\cdot\|)$ uzayı tam olduğundan $\{x_n\}$ Cauchy dizisi $x\in X$ elemanına yakınsar. O halde şimdi sabit noktasının varlığını inceleyeceğiz.

$(X,\|\cdot\|)$ tam normlu uzay olduğundan dolayı $\lim_{n\to\infty}T^nx=x$ olacak şekilde $x\in X$ noktası vardır. x noktasının sabit nokta olduğunu gösterelim. $\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt>0$ olsun.

$$0<\|Tx-x\|\le\|T^{n+1}x-x\|+\|T^{n+1}x-Tx\|$$

$\|T^{n+1}x-x\|$ normu 0 noktasına yakınsar. Çünkü $\lim_{n\to\infty} T^n x = x$ olduğundan dolayı $n\to\infty$ iken $\|T^{n+1}x-x\|\to 0$ dır. Lemma 2.55 gereğince ve (3.14) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt &\le \int_0^{\|T^{n+1}x-x\|}\varphi(t)dt + \int_0^{\|T^{n+1}x-Tx\|}\varphi(t)dt + 3k_n \\
&\le \int_0^{\|T^{n+1}x-x\|}\varphi(t)dt + a\int_0^{\|T^{n+1}x-T^n x\|}\varphi(t)dt + b\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt + 3k_n \\
&\le \int_0^{\|T^{n+1}x-x\|}\varphi(t)dt + a\delta^n\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt + b\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt + 3k_n
\end{aligned}$$

elde edilir. $\lim_{n\to\infty} T^n x = x$ iken $n\to\infty \Rightarrow \|T^{n+1}x-x\|\to 0$, $\int_0^{\|T^n x-x\|}\varphi(t)dt\to 0$, δ^n ve $k_n\to 0$ dır. O halde $Tx = x$ olur. Son olarak sabit noktanın tek olduğunu gösterelim.

$x, y\in X$ noktaları için $y = Ty,\ x = Tx$ olsun.

$$0\le\int_0^{\|x-y\|}\varphi(t)dt = \int_0^{\|Tx-Ty\|}\varphi(t)dt \le a\int_0^{\|Tx-x\|}\varphi(t)dt + b\int_0^{\|Ty-y\|}\varphi(t)dt$$

ve $\|Ty-y\| = 0,\ \|Tx - x\| = 0$ olduğu için

$$0\le\int_0^{\|x-y\|}\varphi(t)dt \le 0 \Rightarrow \|x-y\| = 0 \Rightarrow x = y$$

dir. Sabit noktası tekdir.

Teorem 3.11 $(X,\|\cdot\|)$ Banach uzayı ve $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ her $\varepsilon>0$ için $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt>0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir olsun. $T: X\to X$, (3.7) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır.

İspat: Teorem 3.10 bezer şekilde Picard iterasyonu alınarak elde edilir.

Teorem 3.12 (X,d) tam metrik uzay ve $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ her $\varepsilon>0$ için $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt>0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir olsun. $T: X\to X$, (3.8) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda

(i) $F_T = \{x\in X : Tx = x\}\ne\varnothing$;

(ii) Herhangi bir $x_0 \in X$ için, ile verilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Picard iterasyonu bazı $x \in F_T$ ye yakınsar.

İspat $x_0 \in X$ keyfi olmak üzere $x_{n+1} = T(x_n) = T^n(x_0)$, $n = 0,1,2,\ldots$ biçiminde (x_n) dizisini tanımlayalım.(3.8) eşitsizliğinde $x = T^n(x)$ ve $y = T^{n-1}(x)$ alınırsa,bu durumda

$$\int_0^{d(T^{n+1}x,T^n x)} \varphi(t)dt \leq \delta \int_0^{d(T^n x,T^{n-1}x)} \varphi(t)dt + L\int_0^{d(T^n x,T^{n-1}x)} \varphi(t)dt$$

burada $\delta < 1$ olduğundan

$$\int_0^{d(T^{n+1}x,T^n x)} \varphi(t)dt \leq \delta \int_0^{d(T^n x,T^{n-1}x)} \varphi(t)dt \leq \ldots \leq \delta^n \int_0^{d(Tx,x)} \varphi(t)dt \tag{3.16}$$

elde edilir. Cauchy dizisidir. Çünkü Teorem 3.7 ispatına benzer şekilde

$$\int_0^{d(T^{n+1}x,T^n x)} \varphi(t)dt \leq \frac{\delta^n}{1-\delta} \int_0^{d(Tx,x)} \varphi(t)dt + (p+1)k_n \tag{3.17}$$

elde edilir. O halde $n \to \infty$ için $T^n(x) \to x$ vardır. Şimdi sabit noktanın varlığını gösterelim.

$\int_0^{d(Tx,x)} \varphi(t)dt > 0$ olsun.

$$0 < d(Tx,x) \leq d(T^{n+1}x,x) + d(T^{n+1}x,Tx)$$

$n \to \infty$ için $d(T^{n+1}x,x) \to 0$ noktasına yakınsar. Çünkü $\lim_{n\to\infty} T^n x = x$ olduğundan dolayı ve Teorem 3.7 benzer işlemler yapılarak

$$\begin{aligned}\int_0^{d(Tx,x)} \varphi(t)dt &\leq \int_0^{d(T^{n+1}x,x)} \varphi(t)dt + \int_0^{d(T^{n+1}x,Tx)} \varphi(t)dt + 3k_n \\ &\leq \int_0^{d(T^{n+1}x,x)} \varphi(t)dt + \delta\int_0^{d(T^n x,x)} \varphi(t)dt + L\int_0^{d(T^n x,x)} \varphi(t)dt + 3k_n\end{aligned}$$

elde edilir. $\lim_{n\to\infty} T^n x = x$ iken $\lim_{n\to\infty} T^{n+1} x = x$, $n \to \infty$ için $\int_0^{d(T^n x,x)} \varphi(t)dt \to 0$ ve $k_n \to 0$ dır.

O halde $Tx = x$ olur.

Sabit noktası birden fazla olabilir. Budurum aşağıdaki örnekten görülür.

Örnek 3.13 $T:[0,1]\to[0,1]$ dönüşüm $Tx=x$ ve her $x,y\in[0,1]$ için $\varphi(t)=\dfrac{1}{1+t}$ olsun. Bu durumda sabit noktaları kümesi $F_T=\{[0,1]\}$ dir. Aynı zamanda (3.8) eşitsizliğini sağlar. $\delta\in(0,1)$ ve $L\geq 1-\delta$ olarak seçilir.

$$\ln(|x-y|+1)\leq\delta\ln(|x-y|+1)+L\ln(|x-y|+1)$$

elde edilir.

Uzaklık fonksiyonun simetrik özelliği kullanılarak; (3.8) eşitsizliğinin simetriği (3.9) eşitsizliğidir. Bu nedenle Teorem 3.12 aynı sonuçlar elde edilir.

Teorem 3.14 (X,d) tam metrik uzay ve $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ her $\varepsilon>0$ için $\int_0^\varepsilon\varphi(t)dt>0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir olsun. $T:X\to X$, (3.11) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır.

İspat T nin X te x ve y gibi farklı iki sabit noktası olsun. Bu durumda

$$\int_0^{d(x,y)}\varphi(t)dt=\int_0^{d(Tx,Ty)}\varphi(t)dt\leq\delta\int_0^{d(x,y)}\varphi(t)dt+L\int_0^{d(Ty,y)}\varphi(t)dt$$

$$\int_0^{d(x,y)}\varphi(t)dt\leq\delta\int_0^{d(x,y)}\varphi(t)dt\Rightarrow(1-\delta)\int_0^{d(x,y)}\varphi(t)dt\leq 0$$

olduğu elde edilir ve

$$d(x,y)=0$$

oluşu ile çelişir.

İspatın kalan kısmı Teorem 3.12 nın ispatına benzer şekilde yapılabilir. İspat tamamlanmış olur.

(3.11) eşitsizliğinin simetriği (3.10) eşitsizliğidir. Bu neden ile (3.10) eşitsizliği için Teorem 3.14 benzer işlemler kullanılarak aynı sonuç elde edilir.

Teorem 3.15 X bir Banach uzayı olsun. C, X boştan farklı kapalı konveks alt kümesi olsun. $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ her $\varepsilon>0$ için $\int_0^\varepsilon\varphi(t)dt>0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir ve $T:C\to C$ dönüşümü (3.4) şartını sağlayan bir integral tip dönüşüm olsun. $Tp=p$ olan $p\in F_T$ sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x_0\in C$ koşulu için, (2.30) ile verilen Picard-Mann Hibrid iterasyonu, $p\in F_T$ sabit noktasına yakınsar.

İspat $x_0\in X$ keyfi olmak üzere $x_{n+1}=T\left(y_n\right)$, $n=0,1,2,\ldots$ biçiminde $\left(x_n\right)$ dizisini tanımlayalım. *p* noktası, *T* dönüşümünün sabit noktası yani *Tp*=*p* olsun. Bu durumda

$$\int_0^{\|x_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt=\int_0^{\|Ty_n-p\|}\varphi(t)dt\le a\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+b\int_0^{\|Ty_n-y_n\|}\varphi(t)dt+c\int_0^{\|Tp-p\|}\varphi(t)dt$$

o halde *Tp*=*p* olduğundan dolayı $\|Tp-p\|=0$ dır. Bu nedenle

$$\int_0^{\|Ty_n-p\|}\varphi(t)dt\le a\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+b\int_0^{\|Ty_n-y_n\|}\varphi(t)dt \tag{3.18}$$

elde edilir. Lemma 2.55 kulanılarak

$$\begin{aligned}\int_0^{\|Ty_n-y_n\|}\varphi(t)dt&\le\|Ty_n-y_n\|+k_n\\&\le\int_0^{\|Ty_n-p\|}\varphi(t)dt+\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+3k_n\end{aligned} \tag{3.19}$$

olur ve (3.18) denkleminde yerine yazılırsa

$$\int_0^{\|Ty_n-p\|}\varphi(t)dt\le\frac{(a+b)}{(1-b)}\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+3k_n \tag{3.20}$$

elde edilir. Lemma 2.55 kulanılarak

$$\begin{aligned}\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt&\le\|y_n-p\|+k_n=\|(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nTx_n-p\|+k_n\\&\le(1-\alpha_n)\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt+\alpha_n\int_0^{\|Tx_n-p\|}\varphi(t)dt+2k_n\end{aligned} \tag{3.21}$$

$\|Tp-p\|=0$ olduğundan

$$\int_0^{\|Tx_n-p\|}\varphi(t)dt\le a\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt+b\int_0^{\|Tx_n-x_n\|}\varphi(t)dt+c\int_0^{\|Tp-p\|}\varphi(t)dt \tag{3.22}$$

dır. Lemma 2.55 kulanılarak

$$\int_0^{\|Tx_n - x_n\|} \varphi(t)dt \le \|Tx_n - x_n\| + k_n$$
$$\le \int_0^{\|Tx_n - p\|} \varphi(t)dt + \int_0^{\|x_n - p\|} \varphi(t)dt + 3k_n \tag{3.23}$$

(3.22) eşitsizliğinde yerine yazarsak

$$\int_0^{\|Tx_n - p\|} \varphi(t)dt = a\int_0^{\|x_n - p\|} \varphi(t)dt + b\int_0^{\|Tx_n - p\|} \varphi(t)dt + b\int_0^{\|x_n - p\|} \varphi(t)dt + 3k_n$$

ve

$$\int_0^{\|Tx_n - p\|} \varphi(t)dt \le \frac{(a+b)}{(1-b)} \int_0^{\|x_n - p\|} \varphi(t)dt + 3k_n$$

elde edilir. (3.21) eşitsizliği aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\int_0^{\|y_n - p\|} \varphi(t)dt \le (1-\alpha_n)\int_0^{\|x_n - p\|} \varphi(t)dt + \alpha_n \frac{(a+b)}{(1-b)} \int_0^{\|x_n - p\|} \varphi(t)dt + 5k_n \tag{3.24}$$

elde edilir. (3.18) denkleminde yerine yazılırsa

$$\int_0^{\|Ty_n - p\|} \varphi(t)dt \le \frac{(a+b)}{(1-b)} \int_0^{\|y_n - p\|} \varphi(t)dt + 3k_n$$

ve

$$\int_0^{\|Ty_n - p\|} \varphi(t)dt \le \frac{a+b}{1-b}(1-\alpha_n)\int_0^{\|x_n - p\|} \varphi(t)dt + \alpha_n \left(\frac{a+b}{1-b}\right)^2 \int_0^{\|x_n - p\|} \varphi(t)dt + 8k_n \tag{3.25}$$

Burada $a+2b<1$olacak şekilde seçilirse $\frac{a+b}{1-b} = \delta < 1$ alınırsa (3.25) eşitsizliği

$$\int_0^{\|Ty_n - p\|} \varphi(t)dt \le \delta(1-\alpha_n)\int_0^{\|x_n - p\|} \varphi(t)dt + \alpha_n\delta^2 \int_0^{\|x_n - p\|} \varphi(t)dt + 8k_n$$

şeklinde yazılır.

$$\int_0^{\|Ty_n - p\|} \varphi(t)dt \le [\delta(1-\alpha_n) + \alpha_n\delta^2]\int_0^{\|x_n - p\|} \varphi(t)dt = \delta[1-\alpha_n + \alpha_n\delta]\int_0^{\|x_n - p\|} \varphi(t)dt + 8k_n$$
$$\le [1-\alpha_n(1-\delta)]\int_0^{\|x_n - p\|} \varphi(t)dt + 8k_n$$

Lemma 2.55 gereğince $n \to \infty$ için $8k_n \to 0$ dır. $\alpha_n = x_n$, $\lambda_n = \alpha_n(1-\delta)$, $\beta_n = 8k_n$ ve $\frac{\beta_n}{\lambda_n} = \frac{8k_n}{\alpha_n(1-\delta)} \to 0$ seçilirse ve lemma 2.53 uygulanırsa $n \to \infty$ için $\int_0^{\|x_n - p\|} \varphi(t)dt \to 0$ elde edilir. (2.30) ile verilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi, (3.4) şartı altında T dönüşümünün sabit noktasına yakınsadığı ispatlandı.

Teorem 3.16 X bir Banach uzayı olsun. C, X boştan farklı kapalı konveks alt kümesi olsun. $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir ve $T : C \to C$ (2.7) ile verilen bir integral tip contraction dönüşüm olsun. $Tp = p$ olan $p \in F_T$ sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x_0 \in C$ koşulu için, (2.29) ile verilen iterasyon, $p \in F_T$ sabit noktasına yakınsar.

İspat p, T nin sabit noktası olsun. $\delta \in (0,1)$ olmak Lemma 2.55 gereğince

$$\begin{aligned}\int_0^{\|x_{n+1}-p\|} \varphi(t)dt &\le \|x_{n+1} - p\| + k_n = \|(1-\alpha_n-\beta_n)y_n + \alpha_n Ty_n + \beta_n Tz_n - p\| + k_n \\ &\le (1-\alpha_n-\beta_n)\int_0^{\|y_n-p\|} \varphi(t)dt + \alpha_n \int_0^{\|Ty_n-p\|} \varphi(t)dt + \beta_n \int_0^{\|Tz_n-p\|} \varphi(t)dt + 2k_n\end{aligned} \quad (3.26)$$

(2.7) ile verilenİntegral tip contraction şartı altında aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned}\int_0^{\|x_{n+1}-p\|} \varphi(t)dt &\le (1-\alpha_n-\beta_n)\int_0^{\|y_n-p\|} \varphi(t)dt + \delta\alpha_n \int_0^{\|y_n-p\|} \varphi(t)dt + \\ &+\delta\beta_n \int_0^{\|z_n-p\|} \varphi(t)dt + 2k_n\end{aligned} \quad (3.27)$$

şeklindedir. (3.27) eşitsizliğinin sağındaki ifadeler için Lemma 2.55 ve (2.7) şartı kullanılarak

$$\begin{aligned}\int_0^{\|z_n-p\|} \varphi(t)dt &\le \|z_n - p\| + k_n \\ &\le (1-c_n)\int_0^{\|x_n-p\|} \varphi(t)dt + c_n \int_0^{\|Tx_n-p\|} \varphi(t)dt + 2k_n \\ &\le (1-c_n)\int_0^{\|x_n-p\|} \varphi(t)dt + \delta c_n \int_0^{\|x_n-p\|} \varphi(t)dt + 2k_n\end{aligned} \quad (3.28)$$

ve

$$\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt \le \|y_n-p\|+k_n$$
$$\le(1-a_n-b_n)\int_0^{\|z_n-p\|}\varphi(t)dt+\delta a_n\int_0^{\|z_n-p\|}\varphi(t)dt+\delta b_n\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt+2k_n \tag{3.29}$$

(3.28) eşitsizliği (3.29) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt \le (1-a_n-b_n)(1-c_n)\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt+\delta(1-a_n-b_n)c_n\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt+6k_n$$
$$+\delta a_n(1-c_n)\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt+\delta^2 a_n c_n\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt+\delta b_n\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt \tag{3.30}$$

elde edilir. (3.28) eşitsizliği ve(3.30) eşitsizliği birleştirilerek(3.26) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\int_0^{\|x_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt \le \{(1-\alpha_n-\beta_n)(1-a_n-b_n)(1-c_n)+\delta(1-\alpha_n-\beta_n)(1-a_n-b_n)c_n+$$
$$+\delta(1-\alpha_n-\beta_n)a_n(1-c_n)+\delta^2(1-\alpha_n-\beta_n)a_nc_n+\delta(1-\alpha_n-\beta_n)b_n+$$
$$+\delta\alpha_n(1-a_n-b_n)(1-c_n)+\delta^2\alpha_n(1-a_n-b_n)c_n+\delta^2\alpha_na_n(1-c_n)+$$
$$+\delta^3\alpha_na_nc_n+\delta^2\alpha_nb_n+\delta\beta_n(1-c_n)+\delta^2\beta_nc_n\}\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt+16k_n$$

gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\int_0^{\|x_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt \le [(1-\alpha_n-\beta_n)+\delta(\alpha_n+\beta_n)]\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt+16k_n$$
$$=[1-(\alpha_n+\beta_n)(1-\delta)]\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt+16k_n$$

Lemma 2.55 gereğince $\lim_{n\to\infty}k_n=0$ şartını sağlayan bir $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}\subset(0,1)$ dizisi vardır. Lemma 2.53.'e uyarlanırsa $\alpha_n=x_n$, $\lambda_n=(\alpha_n+\beta_n)(1-\delta)<1$, $\beta_n=16k_n$ ve $\dfrac{\beta_n}{\lambda_n}=\dfrac{16k_n}{(\alpha_n+\beta_n)(1-\delta)}\to 0$ olarak seçilirse Lemma 2.53 gereğince $n\to\infty$ için $\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt\to 0$ elde edilir. (2.29) ile verilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi, (2.7) şartı altında T dönüşümünün sabit noktasına yakınsadığı ispatlanmıştır.

Teorem 3.17 X bir Banach uzayı olsun. C, X boştan farklı kapalı konveks alt kümesi olsun. $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ her $\varepsilon>0$ için $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt>0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir ve $T,S:C\to C$ (2.7) ile verilen bir integral tip contraction dönüşüm olsun. $Tp=p$ ve $Sp=p$ olan $p\in F_T$ sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x_0 \in C$ koşulu için, (2.29) ile verilen iterasyon, $p \in F_{T,S}$ sabit noktasına yakınsar.

İspat $p,\ T$ nin sabit noktası olsun. $\delta \in (0,1)$ olmak üzere, Teorem 3.16'nın ara işlemlerinden yararlanılarak ve Lemma 2.55 gereğince

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\|x_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt &\le \|x_{n+1}-p\|+k_n \le \left\|(1-\alpha_n-\beta_n)y_n+\alpha_n TSy_n+\beta_n TSz_n-p\right\|+k_n \\
&\le (1-\alpha_n-\beta_n)\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+\alpha_n\delta^2\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+\beta_n\delta^2\int_0^{\|z_n-p\|}\varphi(t)dt+2k_n
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\|z_n-p\|}\varphi(t)dt &\le \|z_n-p\|+k_n \\
&\le \left\|(1-c_n)x_n+c_n TSx_n-p\right\|+k_n \\
&\le (1-c_n)\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt+\delta^2 c_n\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt+2k_n
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt \le {} & [(1-a_n-b_n)(1-c_n)+\delta^2 c_n(1-a_n-b_n) \\
& +\delta^2 a_n(1-c_n)+\delta^4 a_n c_n+\delta^2 b_n]\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt+6k_n
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^{\|x_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt \le [1-(\alpha_n+\beta_n)(1-\delta^2)]\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt+16k_n
$$

şekilde $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=0$ şartını sağlayan bir $\{k_n\}_n^{\infty}\subset(0,1)$ dizisi vardır.

$0\le[1-(\alpha_n+\beta_n)(1-\delta^2)]<1$ olur**.** Eğer $[1-(\alpha_n+\beta_n)(1-\delta^2)]=\delta<1$ ve $k_n=s_n'$ olarak alınırsa Lemma 2.53 gereğince $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt=0$ olarak elde edilir.

Teorem 3.18 X bir Banach uzayı olsun. C, X boştan farklı kapalı konveks alt kümesi olsun. $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ her $\varepsilon>0$ için $\int\limits_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt>0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir ve $T:C\to C$ (2.7) ile verilen bir integral tip contraction dönüşüm olsun. $Tp=p$ olan $p\in F_T$ sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x_0 \in C$ koşulu için, (2.31) ile verilen yeni multistep iterasyonu, $p \in F_T$ sabit noktasına yakınsar.

İspat

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ x_{n+1} = \left(1-\alpha_n\right) y_n^1 + \alpha_n T y_n^1, \\ y_n^i = \left(1-\beta_n^i\right) y_n^{i+1} + \beta_n^i T y_n^{i+1}, \text{ i=1,}\cdots\text{, s-2} \\ y_n^{s-1} = \left(1-\beta_n^{s-1}\right) x_n^s + \beta_n^{s-1} T x_n, \ n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$p,\ T$ nin sabit noktası olsun. $\delta \in \left(0,1\right)$ olmak üzere Lemma 2.55 gereğince ve (2.7) ile verilen bir integral tip contraction dönüşüm kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_0^{\|x_{n+1}-p\|} \varphi(t)dt &= \left\|\left(1-\alpha_n\right) y_n^1 + \alpha_n T y_n^1 - p\right\| + k_n \\ &\leq \left(1-\alpha_n\right) \int_0^{\|y_n^1-p\|} \varphi(t)dt + \alpha_n \int_0^{\|Ty_n^1-p\|} \varphi(t)dt + 2k_n \\ &\leq \left(1-\alpha_n\right) \int_0^{\|y_n^1-p\|} \varphi(t)dt + \alpha_n \delta \int_0^{\|y_n^1-p\|} \varphi(t)dt + 2k_n \\ &= [1-\alpha_n(1-\delta)] \int_0^{\|y_n^1-p\|} \varphi(t)dt + 2k_n \end{aligned} \tag{3.31}$$

ve

$$\begin{aligned} \int_0^{\|y_n^1-p\|} \varphi(t)dt &\leq \left\|y_n^1 - p\right\| + k_n \\ &\leq [1-\beta_n^1(1-\delta)] \int_0^{\|y_n^2-p\|} \varphi(t)dt + 2k_n \end{aligned}$$

ve

$$\int_0^{\|y_n^2-p\|} \varphi(t)dt \leq [1-\beta_n^2(1-\delta)] \int_0^{\|y_n^3-p\|} \varphi(t)dt + 2k_n$$

şeklinde devam edilerek

$$\int_0^{\|y_n^{s-2}-p\|} \varphi(t)dt \leq [1-\beta_n^{k-2}(1-\delta)] \int_0^{\|y_n^{k-1}-p\|} \varphi(t)dt + 2k_n$$

ve

$$\int_0^{\|y_n^{s-1}-p\|}\varphi(t)dt \le \|y_n^{s-1}-p\|+k_n$$
$$\le [1-\beta_n^{s-1}(1-\delta)]\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt+2k_n$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikleri birleştirilerek (3.31) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\int_0^{\|x_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt &\le [1-\alpha_n(1-\delta)]\int_0^{\|y_n^1-p\|}\varphi(t)dt+2k_n\\
&\le [1-\alpha_n(1-\delta)][1-\beta_n^1(1-\delta)]\int_0^{\|y_n^2-p\|}\varphi(t)dt+2\cdot 2k_n\\
&\le [1-\alpha_n(1-\delta)][1-\beta_n^1(1-\delta)][1-\beta_n^2(1-\delta)]\int_0^{\|y_n^3-p\|}\varphi(t)dt+3\cdot 2k_n\\
&\dots\\
&\le [1-\alpha_n(1-\delta)][1-\beta_n^1(1-\delta)][1-\beta_n^2(1-\delta)]\cdots[1-\beta_n^{k-1}(1-\delta)]\\
&\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt+s\cdot 2k_n\end{aligned}$$

elde edilir.

$[1-\alpha_n(1-\delta)][1-\beta_n^1(1-\delta)][1-\beta_n^2(1-\delta)]\cdots[1-\beta_n^{k-1}(1-\delta)]\le[1-\alpha_n(1-\delta)]$ alınırsa

$$\int_0^{\|x_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt \le [1-\alpha_n(1-\delta)]\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt+s\cdot 2k_n$$

elde edilir. *s* sonlu olduğundan ve Lemma 2.53 kullanılarak *T* dönüşümünün sabit noktasına yakınsadığı görülür.

Aşağıdaki teoremlerin ispatları benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 3.19 X bir Banach uzayı olsun. C, X boştan farklı kapalı konveks alt kümesi olsun. $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ her $\varepsilon>0$ için $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt>0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir ve $T:C\to C$ (3.4)ile verilen bir integral tip contraction dönüşüm olsun. $Tp=p$ olan $p\in F_T$ sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x_0\in C$ koşulu için, (2.25) ile verilen Krasnoselskij iterasyonu, $p\in F_T$ sabit noktasına yakınsar.

Teorem 3.20 X bir Banach uzayı olsun. C, X boştan farklı kapalı konveks alt kümesi olsun. $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ her $\varepsilon>0$ için $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt>0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir ve $T : C \to C$ (3.4) ile verilen bir integral tip contraction dönüşüm olsun. $Tp = p$ olan $p \in F_T$ sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x_0 \in C$ koşulu için,(2.26) ile verilen Mann iterasyonu, $p \in F_T$ sabit noktasına yakınsar.

Teorem 3.21 X bir Banach uzayı olsun. C, X boştan farklı kapalı konveks alt kümesi olsun. $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir ve $T : C \to C$ (3.5) ile verilen bir integral tip contraction dönüşüm olsun. $Tp = p$ olan $p \in F_T$ sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x_0 \in C$ koşulu için,(2.25) ile verilen Krasnoselskij iterasyonu, $p \in F_T$ sabit noktasına yakınsar.

Teorem 3.22 X bir Banach uzayı olsun. C, X boştan farklı kapalı konveks alt kümesi olsun. $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir ve $T : C \to C$ (3.5) ile verilen bir integral tip contraction dönüşüm olsun. $Tp = p$ olan $p \in F_T$ sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x_0 \in C$ koşulu için,(2.26) ile verilen Mann iterasyonu, $p \in F_T$ sabit noktasına yakınsar.

Teorem 3.23 X bir Banach uzayı olsun. C, X boştan farklı kapalı konveks alt kümesi olsun. $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir ve $T : C \to C$ (3.5)ile verilen bir integral tip contraction dönüşüm olsun. $Tp = p$ olan $p \in F_T$ sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x_0 \in C$ koşulu için,(2.27) ile verilen Ishikawa iterasyonu, $p \in F_T$ sabit noktasına yakınsar.

Teorem 3.24 X bir Banach uzayı olsun. C, X boştan farklı kapalı konveks alt kümesi olsun. $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir ve $T : C \to C$ (3.6) ile verilen bir integral tip contraction dönüşüm olsun. $Tp = p$ olan $p \in F_T$ sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x_0 \in C$ koşulu için,(2.25) ile verilen Krasnoselskij iterasyonu, $p \in F_T$ sabit noktasına yakınsar.

Teorem 3.25 X bir Banach uzayı olsun. C, X boştan farklı kapalı konveks alt kümesi olsun. $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir ve $T : C \to C$ (3.6) ile verilen bir integral tip contraction dönüşüm olsun. $Tp = p$ olan $p \in F_T$ sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x_0 \in C$ koşulu için,(2.26) ile verilen Mann iterasyonu, $p \in F_T$ sabit noktasına yakınsar.

Teorem 3.26 X bir Banach uzayı olsun. C, X boştan farklı kapalı konveks alt kümesi olsun. $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir ve $T : C \to C$ (3.6) ile verilen bir integral tip contraction dönüşüm olsun. $Tp = p$ olan $p \in F_T$ sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x_0 \in C$ koşulu için,(2.27) ile verilen Ishikawa iterasyonu, $p \in F_T$ sabit noktasına yakınsar.

Teorem 3.27 X bir Banach uzayı olsun. C, X boştan farklı kapalı konveks alt kümesi olsun. $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir ve $T : C \to C$ (3.6) ile verilen bir integral tip contraction dönüşüm olsun. $Tp = p$ olan $p \in F_T$ sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x_0 \in C$ koşulu için,(2.28) ile verilen Noor iterasyonu, $p \in F_T$ sabit noktasına yakınsar.

BÖLÜM 4

SABİT NOKTA VE KARARLILIK

Bu bölümde sabit nokta çalışmalarındaki kararlılık konusuna ilişkin elde edilen sonuçlara yer verilecektir.

Kararlılık konusu nümerik analiz, sabit nokta teorisi gibi birçok bilim dalında önemli uygulama alanlarına sahip olan, büyük bir araştırmacı kitlesi tarafından çalışılan bir teoridir.

Kararlılık kavramı, problemde verilen parametrelerde veya verilerde meydana gelen küçük değişimlere karşın problemde görülen hassasiyet olarak adlandırılır. Bir diğer ifade ile eğer başlangıç değerinde veya hesaplama aşamasında oluşan değerlerde küçük değişimlerin istenilen sonuç üzerinde küçük bir etki meydana getiriyorsa kararlıdır (stable) aksi durumda ise kararlı değildir (unstable) denir. Örneğin

$$p(x)=(x-9)(x-8)(x-7)(x-6)(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)$$

Polinomunun kökleri $1,2,3,4,5,6,7,8$ ve 9 dır. x^8 terimin önündeki katsayıyı -45.002 ile değiştirilirse polinomunun kökleri 1.00000004, 3.009429, 3.866100367 1.99989984, $5.107797\pm0.815726i$, $7.5875471\pm1.51666i$ ve 9.735883248 olarak bulunur ki $7.5875471\pm1.51666i$ değerde oldukça büyük bir değişim vardır. Bu türlü polinomlara, kök bulma problemlerine göre kararlı olmayan denir.

$Y'(t)=\beta[Y(t)-1],\ 0\le t\le b,\ Y(0)=1$ diferansiyel denklemin çözümü $Y(t)=1,\ 0\le t\le b$ dir. $Y_\varepsilon'(t)=\beta[Y_\varepsilon(t)-1],\ 0\le t\le b,\ Y_\varepsilon(0)=1+\varepsilon$ olacak şekilde değiştirilsin. Bu durumda diferansiyel denklemin çözümü $Y_\varepsilon(t)=1+\varepsilon e^{\beta t},\ 0\le t\le b$ dir. O halde $Y(t)-Y_\varepsilon(t)=-\varepsilon e^{\beta t}$ elde edilir.

$$\|Y(t)-Y_\varepsilon(t)\|=\max_{0\le t\le b}|Y(t)-Y_\varepsilon(t)|=\begin{cases}|\varepsilon|, & \lambda\le 0\\ |\varepsilon|e^{\beta t} & \lambda\ge 0\end{cases}$$

olur. Bu durumda $\beta \le 0$ için kararlıdır. Fakat $\beta \ge 0$ için β'nın durumuna göre değişiklik gösterecektir.

Sabit noktada kararlılık konusu ise verilen iterasyon tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi yerine, bunun bir yaklaşım dizisi olan $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini ele alınır. Her bir adımda $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine yakın olan $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ yaklaşım dizisi oluşturulur. Bu yaklaşım dizisi hala T nin sabit noktasına yakınsak oluyorsa verilen iterasyon tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi kararlıdır denir.

Genel olarak iterasyon yöntemleri için kararlılık kavramı olarak Harder ve Hicks [96], [97] tarafından Tanım 2.56 verilen tanım kullanıldı.

Bu bölümde integral tip dönüşümlerin bazı iterasyonların kararlılıklarına ilişkin sonuçlar incelenecektir.

4.1. Kararlılık ile İlgili Sonuçlar

Teorem 4.1 X bir Banach uzayı olsun. C, X boştan farklı kapalı konveks alt kümesi olsun. $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir ve $T : C \to C$ dönüşümü (3.4) şartını sağlayan bir integral tip dönüşüm olsun. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, Picard-Mann Hibrid iterasyonu yöntemi (2.30) tarafından üretilen bir dizi olsun. T' nin bir p sabit noktasına sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda Picard-Mann Hibrid iterasyon yöntemi (2.30) kararlıdır.

İspat $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi X te keyfi dizi olsun. $n = 0,1,2,\ldots$ için $\varepsilon_n = \|y_{n+1} - f(T, y_n)\|$ ve $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ olsun. Şimdi $\lim_{n\to\infty} y_n = p$ olduğu gösterilecektir. (2.30) iterasyonu

$$\begin{cases} f(T, y_n) = y_{n+1} = Tz_n, \\ z_n = (1-\alpha_n)y_n + \alpha_n Ty_n \end{cases}$$

şeklinde ele alınırsa Lemma 2.55 kullanılarak

$$\begin{aligned}\int_0^{\|y_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt &\leq \|y_{n+1}-p\|+k_n=\|y_{n+1}-f(T,y_n)+f(T,y_n)-p\|+k_n\\ &\leq \|y_{n+1}-f(T,y_n)\|+\|f(T,y_n)-p\|+k_n\\ &\leq \int_0^{\|y_{n+1}-f(T,y_n)\|}\varphi(t)dt+\int_0^{\|f(T,y_n)-p\|}\varphi(t)dt+3k_n\\ &=\int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt+\int_0^{\|f(T,y_n)-p\|}\varphi(t)dt+3k_n\end{aligned}\tag{4.1}$$

elde edilir. (4.1) eşitsizliğinin sağ tarafı için

$$\int_0^{\|Tz_n-Tp\|}\varphi(t)dt \leq a\int_0^{\|z_n-p\|}\varphi(t)dt+b\int_0^{\|Tz_n-z_n\|}\varphi(t)dt+c\int_0^{\|Tp-p\|}\varphi(t)dt \tag{4.2}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_0^{\|Tz_n-z_n\|}\varphi(t)dt &\leq \|Tz_n-z_n\|+k_n\\ &\leq \int_0^{\|Tz_n-p\|}\varphi(t)dt+\int_0^{\|z_n-p\|}\varphi(t)dt+3k_n\end{aligned}\tag{4.3}$$

(4.2) ve (4.3) eşitsizlikleri birleştirilerek

$$\int_0^{\|Tz_n-p\|}\varphi(t)dt \leq \frac{(a+b)}{(1-b)}\int_0^{\|z_n-p\|}\varphi(t)dt+\frac{c}{(1-b)}\int_0^{\|Tp-p\|}\varphi(t)dt+\frac{3}{(1-b)}k_n$$

elde edilir. $\frac{a+b}{1-b}=\delta$ alınırsa

$$\int_0^{\|Tz_n-p\|}\varphi(t)dt \leq \delta\int_0^{\|z_n-p\|}\varphi(t)dt+\frac{c}{(1-b)}\int_0^{\|Tp-p\|}\varphi(t)dt+\frac{3}{(1-b)}k_n \tag{4.4}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_0^{\|z_n-p\|}\varphi(t)dt &\leq \|z_n-p\|+k_n\\ &\leq (1-\alpha_n)\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+\alpha_n\int_0^{\|Ty_n-p\|}\varphi(t)dt+2k_n\end{aligned}\tag{4.5}$$

ve (4.2), (4.3) ve (4.4) ün elde edilmesinde yapılan benzer hesaplamalarla

$$\int_0^{\|Ty_n-p\|}\varphi(t)dt \leq \delta\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+\frac{c}{(1-b)}\int_0^{\|Tp-p\|}\varphi(t)dt+\frac{3}{(1-b)}k_n \tag{4.6}$$

elde edilir.

$$\int_0^{\|Tz_n-p\|}\varphi(t)dt \le \delta[1-\alpha_n(1-\delta)]\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+\delta\frac{2c}{(1-b)}\int_0^{\|Tp-p\|}\varphi(t)dt+(2+\frac{6}{(1-b)})k_n$$

dir. (4.1) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\int_0^{\|y_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt \le \delta[1-\alpha_n(1-\delta)]\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+\int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt+$$
$$+\delta\frac{2c}{(1-b)}\int_0^{\|Tp-p\|}\varphi(t)dt+(5+\frac{6}{(1-b)})k_n$$

burada $n\to\infty$ için $\varepsilon_n\to 0$, Lemma 2.55 gereğince $(5+\frac{6}{(1-b)})k_n\to 0$ ve T dönüşümünün sabit noktası p olduğundan dolayı $\|Tp-p\|=0$ dir. Lemma 2.53 şartları teoremimize uygulanırsa $\lim_{n\to\infty} y_n = p$ olarak elde edilir.

Şimdi $\lim_{n\to\infty} y_n = p$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$ olduğu gösterilecektir. Lemma 2.55 gereğince

$$\begin{aligned}\int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt &= \int_0^{\|y_{n+1}-f(T,y_n)\|}\varphi(t)dt\\ &\le \|y_{n+1}-Tz_n-p+p\|+k_n\\ &\le \|y_{n+1}-p\|+\|Tz_n-p\|+k_n\\ &\le \int_0^{\|y_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt+\int_0^{\|Tz_n-p\|}\varphi(t)dt+3k_n\end{aligned}$$

ve

$$\int_0^{\|Tz_n-p\|}\varphi(t)dt \le \delta\int_0^{\|z_n-p\|}\varphi(t)dt+3k_n$$

ve

$$\int_0^{\|Tz_n-p\|}\varphi(t)dt \le [1-\alpha_n(1-\delta)]\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+8k_n$$

O halde

$$\begin{aligned}\int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt &\le \int_0^{\|y_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt+\int_0^{\|Tz_n-p\|}\varphi(t)dt+3k_n\\ &\le \int_0^{\|y_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt+[1-\alpha_n(1-\delta)]\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+11k_n\end{aligned}$$

$n \to \infty \Rightarrow k_n \to 0,\ y_n \to p$ için $y_{n+1} \to p$ ve $\int_0^{\varepsilon_n} \varphi(t)dt \le 0$ dır. Her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0$ olduğundan $\varepsilon_n \to 0$ olur.

Teorem 4.2 X bir Banach uzayı olsun. C, X boştan farklı kapalı konveks alt kümesi olsun. $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir ve $T : C \to C$ (3.5) ile verilen bir integral tip dönüşüm olsun. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, Ishikawa iterasyonu yöntemi (2.27) tarafından üretilen bir dizi olsun. T' nin bir p sabit noktasına sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda Ishikawa iterasyon yöntemi (2.27) kararlıdır.

İspat $n = 0,1,2,\ldots$ için $\varepsilon_n = \left\| y_{n+1} - f(T, y_n) \right\|$ ve $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ olsun. Şimdi $\lim_{n\to\infty} y_n = p$ olduğu gösterilecektir. $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi X te keyfi dizi olsun. Tanım 2.56 Ishikawa iterasyonu için yazılırsa

$$\begin{cases} f(T, y_n) = (1-\alpha_n) y_n + \alpha_n T z_n, \\ z_n = (1-\beta_n) y_n + \beta_n T y_n, n = 0,1,2,\cdots \end{cases}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} \int_0^{\|y_{n+1}-p\|} \varphi(t)dt &\le \left\| y_{n+1} - p \right\| + k_n = \left\| y_{n+1} - f(T, y_n) + f(T, y_n) - p \right\| + k_n \\ &\le \int_0^{\|y_{n+1} - f(T,y_n)\|} \varphi(t)dt + \int_0^{\|f(T,y_n)-p\|} \varphi(t)dt + 3k_n \\ &= \int_0^{\varepsilon_n} \varphi(t)dt + \int_0^{\|f(T,y_n)-p\|} \varphi(t)dt + 3k_n \end{aligned} \tag{4.7}$$

ve

$$\begin{aligned} \int_0^{\|f(T,y_n)-p\|} \varphi(t)dt &\le (1-\alpha_n)\left\| y_n - p \right\| + \alpha_n \left\| Tz_n - p \right\| + k_n \\ &\le (1-\alpha_n)\int_0^{\|y_n-p\|} \varphi(t)dt + \alpha_n \int_0^{\|Tz_n-p\|} \varphi(t)dt + 2k_n \end{aligned} \tag{4.8}$$

ve

$$\int_0^{\|Tz_n-p\|} \varphi(t)dt \le a\int_0^{\|Tz_n-z_n\|} \varphi(t)dt + b\int_0^{\|Tp-p\|} \varphi(t)dt \tag{4.9}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\|Tz_n - z_n\|} \varphi(t)dt &\le \|Tz_n - z_n\| + k_n \\
&\le \|Tz_n - p\| + \|z_n - p\| + k_n \qquad (4.10) \\
&\le \int_0^{\|Tz_n - p\|} \varphi(t)dt + \int_0^{\|z_n - p\|} \varphi(t)dt + 3k_n
\end{aligned}
$$

ve (4.10) yeşitsizliği (4.9) eşitsizliğinde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\int_0^{\|Tz_n - p\|} \varphi(t)dt \le \frac{a}{1-a}\int_0^{\|z_n - p\|} \varphi(t)dt + \frac{b}{1-a}\int_0^{\|Tp - p\|} \varphi(t)dt + \frac{3}{1-a}k_n \qquad (4.11)
$$

elde edilir.

$$
\int_0^{\|Ty_n - p\|} \varphi(t)dt \le a\int_0^{\|Ty_n - y_n\|} \varphi(t)dt + b\int_0^{\|Tp - p\|} \varphi(t)dt
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\|Ty_n - y_n\|} \varphi(t)dt &\le \|Ty_n - y_n\| + k_n \\
&\le \|Ty_n - p\| + \|y_n - p\| + k_n \\
&\le \int_0^{\|Ty_n - p\|} \varphi(t)dt + \int_0^{\|y_n - p\|} \varphi(t)dt + 3k_n
\end{aligned}
$$

ve

$$
\int_0^{\|Ty_n - p\|} \varphi(t)dt \le \frac{a}{1-a}\int_0^{\|y_n - p\|} \varphi(t)dt + \frac{b}{1-a}\int_0^{\|Tp - p\|} \varphi(t)dt + \frac{3}{1-a}k_n \qquad (4.12)
$$

ve

$$
\int_0^{\|z_n - p\|} \varphi(t)dt \le (1-\beta_n)\int_0^{\|y_n - p\|} \varphi(t)dt + \beta_n\int_0^{\|Ty_n - p\|} \varphi(t)dt + 2k_n \qquad (4.13)
$$

işlemler düzenlenerek

$$
\int_0^{\|z_n - p\|} \varphi(t)dt \le [1-\beta_n(1-\frac{a}{1-a})]\int_0^{\|y_n - p\|} \varphi(t)dt + \beta_n\frac{b}{1-a}\int_0^{\|Tp - p\|} \varphi(t)dt + (2+\frac{3}{1-a})k_n \quad (4.14)
$$

(4.8), (4.11), (4.12), (4.13) ve (4.14) eşitsizlikleri birleştirilerek (4.7) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\int_0^{\|y_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt \le \int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt + [1-\alpha_n(1-\mathrm{A})]\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt + \alpha_n\beta_n\frac{b}{1-a}\int_0^{\|Tp-p\|}\varphi(t)dt +$$
$$+(\frac{6}{1-a}+7)k_n$$

Burada $A=\alpha_n\frac{a}{1-a}[1-\beta_n(1-\frac{a}{1-a})]$ dır. Lemma 2.53 uygulanırsa istenilen elde edilir.

Şimdi $\lim_{n\to\infty} y_n = p$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$ olduğu gösterilecektir. Lemma 2.55 gereğince ve (4.11), (4.14) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt &= \int_0^{\|y_{n+1}-f(T,y_n)\|}\varphi(t)dt \\
&\le \left\|y_{n+1}-(1-\alpha_n)y_n-\alpha_n Tz_n - p + p\right\| + k_n \\
&\le \int_0^{\|y_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt + (1-\alpha_n)\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt + \alpha_n\int_0^{\|Tz_n-p\|}\varphi(t)dt + 3k_n \\
&\le \int_0^{\|y_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt + (1-\alpha_n)\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt + \\
&\quad +\alpha_n\frac{a}{1-a}\{[1-\beta_n(1-\frac{a}{1-a})]\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt + \beta_n\frac{b}{1-a}\int_0^{\|Tp-p\|}\varphi(t)dt + (2+\frac{3}{1-a})k_n\} + \\
&\quad +\alpha_n\frac{b}{1-a}\int_0^{\|Tp-p\|}\varphi(t)dt + \alpha_n(\frac{3}{1-a}+3)k_n
\end{aligned}$$

elde edilir. T'nin sapit noktası p olduğundan dolayı $\int_0^{\|Tp-p\|}\varphi(t)dt = 0$, Lemma 2.55 gereğince $\lim_{n\to\infty} k_n = p$ olur ve $\lim_{n\to\infty} y_n = p$ olduğu için $\lim_{n\to\infty} y_{n+1} = p$ dır. O halde $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$ olduğu elde edilir.

Teorem 4.3 X bir Banach uzayı olsun. C, X boştan farklı kapalı konveks alt kümesi olsun. $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ her $\varepsilon>0$ için $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt>0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir ve $T:C\to C$ (2.7) ile verilen bir integral tip dönüşüm olsun. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, (2.29) tarafından üretilen bir dizi olsun. T' nin bir p sabit noktasına sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda (2.29) iterasyon yöntemi kararlıdır.

İspat: İterasyonu

$$\begin{cases} f(T,y_n) = y_{n+1} = \left(1-\alpha_n-\beta_n\right)s_n+\alpha_n Ts_n+\beta_n Tz_n, \\ \qquad s_n = \left(1-a_n-b_n\right)z_n+a_n Tz_n+b_n Tx_n \\ \qquad z_n = (1-c_n)y_n+c_n Ty_n, n=0,1,2,\cdots \end{cases}$$

şeklinde alarak işlemlere devam edilirse $C\in\left(0,1\right)$ olmak üzere, $\varepsilon_n=\left\|y_{n+1}-f(T,y_n)\right\|$ için $\varepsilon_n=\left\|y_{n+1}-\left(1-\alpha_n-\beta_n\right)s_n-\alpha_n Ts_n-\beta_n Tz_n\right\|$, $n\to\infty\Rightarrow\varepsilon_n\to 0$ olsun.

$$\begin{aligned}\int_0^{\|y_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt &= \left\|y_{n+1}-p\right\|+k_n \\ &\le \int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt+\left(1-\alpha_n-\beta_n\right)\int_0^{\|s_n-p\|}\varphi(t)dt+\alpha_n\int_0^{\|Ts_n-p\|}\varphi(t)dt+ \\ &+\beta_n\int_0^{\|Tz_n-p\|}\varphi(t)dt+3k_n\end{aligned}$$

şeklinde alarak işlemlere devam edilirse (2.7) şartı uygulanırsa

$$\begin{aligned}\int_0^{\|y_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt &\le \int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt+\left(1-\alpha_n-\beta_n\right)\int_0^{\|s_n-p\|}\varphi(t)dt+C\alpha_n\int_0^{\|s_n-p\|}\varphi(t)dt+ \\ &+C\beta_n\int_0^{\|z_n-p\|}\varphi(t)dt+3k_n\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_0^{\|z_n-p\|}\varphi(t)dt &\le \left\|z_n-p\right\|+k_n \\ &\le \left\|\left(1-c_n\right)y_n+c_nTy_n-p\right\|+k_n \\ &\le \left(1-c_n\right)\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+c_n\int_0^{\|Ty_n-p\|}\varphi(t)dt+2k_n \\ &\le \left(1-c_n\right)\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+Cc_n\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+2k_n\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_0^{\|s_n-p\|}\varphi(t)dt &\le \left\|s_n-p\right\|+k_n \\ &\le \left(1-a_n-b_n\right)\int_0^{\|z_n-p\|}\varphi(t)dt+a_n\int_0^{\|Tz_n-p\|}\varphi(t)dt+b_n\int_0^{\|Ty_n-p\|}\varphi(t)dt+2k_n \\ &\le \left(1-a_n-b_n\right)\int_0^{\|z_n-p\|}\varphi(t)dt+Ca_n\int_0^{\|z_n-p\|}\varphi(t)dt+Cb_n\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+2k_n \\ &\le \left(1-a_n-b_n\right)[\left(1-c_n\right)\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+Cc_n\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+2k_n]+ \\ &+Ca_n[\left(1-c_n\right)\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+Cc_n\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+2k_n]+Cb_n\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+2k_n\end{aligned}$$

ve

$$\int_0^{\|y_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt \le \int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt+\{(1-\alpha_n-\beta_n)(1-a_n-b_n)(1-c_n)+C(1-\alpha_n-\beta_n)(1-a_n-b_n)c_n$$
$$+Ca_n(1-\alpha_n-\beta_n)(1-c_n)+C^2(1-\alpha_n-\beta_n)a_nc_n+C(1-\alpha_n-\beta_n)b_n+$$
$$+C\alpha_n(1-a_n-b_n)(1-c_n)+C^2\alpha_n(1-a_n-b_n)c_n+C^2\alpha_na_n(1-c_n)+C^3\alpha_na_nc_n$$
$$+C^2\alpha_n(1-\alpha_n-\beta_n)b_n+C\beta_n(1-c_n)+C^2\beta_nc_n\}\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+15k_n$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\int_0^{\|y_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt \le [1-(\alpha_n+\beta_n)(1-C)]\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+\int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt+15k_n$$

şekilde $\lim_{n\to\infty}k_n=0$ şartını sağlayan bir $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}\subset(0,1)$ dizisi vardır.

$0\le[1-(\alpha_n+\beta_n)(1-C)]<1$ olur**.** Eğer $\int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt+15\mathrm{k}_n=s'_n$ ve $[1-(\alpha_n+\beta_n)(1-C)]=\delta$ olarak alınırsa Lemma 2.53 gereğince $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt=0$ olarak elde edilir.

Diğer taraftan $n\to\infty\Rightarrow y_n\to p$ alınırsa

$$\int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt\le\left\|y_{n+1}-(1-\alpha_n-\beta_n)s_n-\alpha_nTs_n-\beta_nTz_n\right\|+k_n$$

ve

$$\int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt\le\int_0^{\|y_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt+(1-\alpha_n-\beta_n)\int_0^{\|s_n-p\|}\varphi(t)dt+C\alpha_n\int_0^{\|s_n-p\|}\varphi(t)dt+$$
$$+C\beta_n\int_0^{\|z_n-p\|}\varphi(t)dt+3k_n$$
$$\le\int_0^{\|y_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt+[1-(\alpha_n+\beta_n)(1-C)]\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+15k_n$$

$n\to\infty\Rightarrow k_n\to0, y_n\to p$ için $y_{n+1}\to p$ ve $\int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt\le0$ dır. Her $\varepsilon>0$ için $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt>0$ olduğundan $\varepsilon_n\to0$ olur.

Teorem 4.4 X bir Banach uzayı olsun. C, X ’in boştan farklı kapalı konveks alt kümesi olsun. $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ her $\varepsilon>0$ için $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt>0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir ve $T,S:C\to C$, (2.7) şartını sağlayan bir integral tip contraction dönüşümler olsun. Keyfi bir x_0, C deki herhangi bir nokta ve her bir n pozitif tamsayısı için

$$\begin{cases} x_{n+1} = \left(1-\alpha_n - \beta_n\right) y_n + \alpha_n TSy_n + \beta_n TSz_n, \\ y_n = \left(1-a_n - b_n\right) z_n + a_n TSz_n + b_n TSx_n \\ z_n = (1-c_n)x_n + c_n TSx_n, n = 0,1,2,\cdots \end{cases}$$

iterasyonu kararlıdır. (Burada $\left\{\alpha_n + \beta_n\right\}_{n=0}^{\infty}$, $\left\{a_n + b_n\right\}_{n=0}^{\infty} \in \left[0,1\right]$, $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n + \beta_n) = \infty$)

İspat: İterasyonu

$$\begin{aligned} f(T, y_n) = y_{n+1} &= \left(1-\alpha_n - \beta_n\right) s_n + \alpha_n TSs_n + \beta_n TSz_n, \\ s_n &= \left(1-a_n - b_n\right) z_n + a_n TSz_n + b_n TSx_n \\ z_n &= (1-c_n)y_n + c_n TSy_n, n = 0,1,2,\cdots \end{aligned}$$

şeklinde alarak işlemlere devam edilirse $\delta \in \left(0,1\right)$olmak üzere, $\varepsilon_n = \left\|y_{n+1} - f(T, y_n)\right\|$ için $\varepsilon_n = \left\|y_{n+1} - \left(1-\alpha_n - \beta_n\right) s_n - \alpha_n TSs_n - \beta_n TSz_n\right\|$, $n \to \infty \Rightarrow \varepsilon_n \to 0$ olsun.

$$\begin{aligned} \int_0^{\left\|y_{n+1}-p\right\|} \varphi(t)dt &= \left\|y_{n+1} - p\right\| + k_n \\ &\leq \int_0^{\varepsilon_n} \varphi(t)dt + \left(1-\alpha_n - \beta_n\right) \int_0^{\left\|s_n - p\right\|} \varphi(t)dt + \alpha_n \int_0^{\left\|TSs_n - p\right\|} \varphi(t)dt + \\ &\quad + \beta_n \int_0^{\left\|TSz_n - p\right\|} \varphi(t)dt + 3k_n \\ &\leq \int_0^{\varepsilon_n} \varphi(t)dt + \left(1-\alpha_n - \beta_n\right) \int_0^{\left\|s_n - p\right\|} \varphi(t)dt + \delta^2 \alpha_n \int_0^{\left\|s_n - p\right\|} \varphi(t)dt \\ &\quad + \delta^2 \beta_n \int_0^{\left\|z_n - p\right\|} \varphi(t)dt + 3k_n \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \int_0^{\left\|z_n - p\right\|} \varphi(t)dt &\leq \left\|z_n - p\right\| + k_n \\ &\leq \left\|\left(1-c_n\right) y_n + c_n TSy_n - p\right\| + k_n \\ &\leq \left(1-c_n\right) \int_0^{\left\|y_n - p\right\|} \varphi(t)dt + c_n \int_0^{\left\|TSy_n - p\right\|} \varphi(t)dt + 2k_n \\ &\leq \left(1-c_n\right) \int_0^{\left\|y_n - p\right\|} \varphi(t)dt + \delta^2 c_n \int_0^{\left\|y_n - p\right\|} \varphi(t)dt + 2k_n \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\|s_n-p\|}\varphi(t)dt &\le \|s_n-p\|+k_n \\
&\le (1-a_n-b_n)\int_0^{\|z_n-p\|}\varphi(t)dt + a_n\int_0^{\|TSz_n-p\|}\varphi(t)dt + b_n\int_0^{\|TSy_n-p\|}\varphi(t)dt + 2k_n \\
&\le (1-a_n-b_n)\int_0^{\|z_n-p\|}\varphi(t)dt + \delta^2 a_n\int_0^{\|z_n-p\|}\varphi(t)dt + \delta^2 b_n\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt + 2k_n \\
&\le (1-a_n-b_n)[(1-c_n)\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt + \delta^2 c_n\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt + 2k_n]+ \\
&\quad +\delta a_n[(1-c_n)\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt + \delta^2 c_n\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt + 2k_n]+\delta^2 b_n\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt + 2k_n
\end{aligned}
$$

ve yukarıdaki eşitsizlik düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\|s_n-p\|}\varphi(t)dt &\le (1-a_n-b_n)(1-c_n)\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt + \delta^2(1-a_n-b_n)c_n\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt + \\
&\quad +\delta a_n(1-c_n)\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt + \delta^4 a_n c_n\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt + \delta^2 b_n\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt + 6k_n
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yukarıda bulunan eşitsizlikler birleştirilirse

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\|y_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt &\le \int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt + (1-\alpha_n-\beta_n)\int_0^{\|s_n-p\|}\varphi(t)dt + \delta\alpha_n\int_0^{\|s_n-p\|}\varphi(t)dt + \\
&\quad +\delta\beta_n\int_0^{\|z_n-p\|}\varphi(t)dt + 3k_n \\
&\le \int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt + \{(1-\alpha_n-\beta_n)(1-a_n-b_n)(1-c_n)+ \\
&\quad +\delta^2(1-\alpha_n-\beta_n)(1-a_n-b_n)c_n + \delta a_n(1-\alpha_n-\beta_n)(1-c_n)+ \\
&\quad +\delta^4(1-\alpha_n-\beta_n)a_n c_n + \delta^2(1-\alpha_n-\beta_n)b_n + \delta\alpha_n(1-a_n-b_n)(1-c_n)+ \\
&\quad +\delta^4\alpha_n(1-a_n-b_n)c_n + \delta^2\alpha_n a_n(1-c_n) + \delta^3\alpha_n a_n c_n + \\
&\quad +\delta^2\alpha_n(1-\alpha_n-\beta_n)b_n + \delta\beta_n(1-c_n) + \delta^2\beta_n c_n\}\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt + 15k_n
\end{aligned}
$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$
\int_0^{\|y_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt \le [1-(\alpha_n+\beta_n)(1-\delta)]\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt + \int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt + 15k_n
$$

olacak şekilde $\lim_{n\to\infty} k_n = 0$ şartını sağlayan bir $\{k_n\}_{n=0}^{\infty} \subset (0,1)$ dizisi vardır.

$0 \le [1-(\alpha_n+\beta_n)(1-\delta)] < 1$ olur. Eğer $[1-(\alpha_n+\beta_n)(1-\delta)] = \delta$ ve $\int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt + 15\mathrm{k}_n = s'_n$

olarak alınırsa Lemma 2.53 gereğince $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt = 0$ olarak elde edilir.

Diğer taraftan $n\to\infty \Rightarrow y_n \to p$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt &\le \left\| y_{n+1}-\left(1-\alpha_n-\beta_n\right)s_n-\alpha_n TSs_n-\beta_n TSz_n\right\|+k_n\\
&=\left\| y_{n+1}-\left(1-\alpha_n-\beta_n\right)s_n-\alpha_n TSs_n-\beta_n TSz_n-p+p\right\|+k_n\\
&\le \left\| y_{n+1}-p\right\|+\left(1-\alpha_n-\beta_n\right)\left\|s_n-p\right\|+\alpha_n\left\|TSs_n-p\right\|+\beta_n\left\|TSz_n-p\right\|+k_n\\
&\le \int_0^{\left\|y_{n+1}-p\right\|}\varphi(t)dt+[1-(\alpha_n+\beta_n)(1-\delta^2)]\int_0^{\left\|y_n-p\right\|}\varphi(t)dt+15k_n
\end{aligned}$$

$n\to\infty \Rightarrow k_n\to 0, y_n\to p$ için $y_{n+1}\to p$ ve $\int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt\le 0$ dır. Her $\varepsilon>0$ için $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt>0$ olduğundan $\varepsilon_n\to 0$ olduğu elde edilir.

Teorem 4.5 X bir Banach uzayı olsun. C, X boştan farklı kapalı konveks alt kümesi olsun. $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ her $\varepsilon>0$ için $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt>0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir ve $T:C\to C$ bir (2.7) ile verilen integral tip dönüşüm olsun. Keyfi bir x_0, C deki herhangi bir nokta ve her bir n pozitif tamsayısı için

$$\begin{cases}
x_0\in C\\
x_{n+1}=\left(1-\alpha_n\right)y_n^1+\alpha_n Ty_n^1,\\
y_n^i=\left(1-\beta_n^i\right)y_n^{i+1}+\beta_n^i Ty_n^{i+1},\ \text{i=1},\cdots,\text{ s-2}\\
y_n^{s-1}=\left(1-\beta_n^{s-1}\right)x_n+\beta_n^{s-1}Tx_n,\ n\in\mathbb{N},
\end{cases}$$

Burada $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}\in[0,1)$ ve i=1, $\cdots$, s-2 için kararlıdır.

İspat $n=0,1,2,\ldots$ için $\varepsilon_n=\left\|y_{n+1}-f(T,y_n)\right\|$ ve $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ olsun. Şimdi $\lim_{n\to\infty}y_n=p$ olduğu gösterilecektir. $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi X te keyfi dizi olsun. Yeni multistep iterasyonu için

$$\begin{cases}
f(T,y_n)=\left(1-\alpha_n\right)z_n^1+\alpha_n Tz_n^1,\\
\quad y_n^i=\left(1-\beta_n^i\right)z_n^{i+1}+\beta_n^i Tz_n^{i+1},\ \text{i=1},\cdots,\text{ s-2}\\
\quad y_n^{s-1}=\left(1-\beta_n^{s-1}\right)y_n+\beta_n^{s-1}Ty_n,\ n\in\mathbb{N},
\end{cases}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned}\int_0^{\|y_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt &\le \|y_{n+1}-p\|+k_n\\ &= \left\|y_{n+1}-(1-\alpha_n)z_n^1-\alpha_n Tz_n^1+(1-\alpha_n)z_n^1+\alpha_n Tz_n^1-p\right\|+k_n\\ &\le \int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt+(1-\alpha_n)\int_0^{\|z_n^1-p\|}\varphi(t)dt+\alpha_n\int_0^{\|Tz_n^1-p\|}\varphi(t)dt+3k_n\\ &\le \int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt+[1-\alpha_n(1-\delta)]\int_0^{\|z_n^1-p\|}\varphi(t)dt+3k_n\end{aligned} \tag{4.15}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_0^{\|z_n^1-p\|}\varphi(t)dt &\le \|z_n^1-p\|+k_n\\ &= \left\|(1-\beta_n^1)z_n^2+\beta_n^1 Tz_n^2-p\right\|+k_n\\ &\le (1-\beta_n^1)\int_0^{\|z_n^2-p\|}\varphi(t)dt+\beta_n^1\delta\int_0^{\|z_n^2-p\|}\varphi(t)dt+2k_n\\ &\le [1-\beta_n^1(1-\delta)]\int_0^{\|z_n^2-p\|}\varphi(t)dt+2k_n\end{aligned} \tag{4.16}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_0^{\|z_n^2-p\|}\varphi(t)dt &\le \|z_n^2-p\|+k_n\\ &\le (1-\beta_n^2)\int_0^{\|z_n^3-p\|}\varphi(t)dt+\beta_n^2\delta\int_0^{\|z_n^3-p\|}\varphi(t)dt+2k_n\\ &\le [1-\beta_n^2(1-\delta)]\int_0^{\|z_n^3-p\|}\varphi(t)dt+2k_n\end{aligned} \tag{4.17}$$

şeklinde devam edilerek

$$\begin{aligned}\int_0^{\|z_n^{s-1}-p\|}\varphi(t)dt &\le \|z_n^{s-1}-p\|+k_n\\ &\le (1-\beta_n^{s-1})\|y_n-p\|+\beta_n^{s-1}\|Ty_n-p\|+k_n\\ &\le (1-\beta_n^{s-1})\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+\beta_n^{s-1}\delta\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+2k_n\\ &\le [1-\beta_n^{s-1}(1-\delta)]\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+2k_n\end{aligned} \tag{4.18}$$

yukarıdaki eşitsizlikler birleştirilerek

$$\int_0^{\|y_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt \le \int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt+[1-\alpha_n(1-\delta)]\int_0^{\|z_n^1-p\|}\varphi(t)dt+3k_n$$

$$\le \int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt+[1-\alpha_n(1-\delta)][1-\beta_n^1(1-\delta)]\int_0^{\|z_n^2-p\|}\varphi(t)dt+2k_n+3k_n$$

$$\le \int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt+[1-\alpha_n(1-\delta)][1-\beta_n^1(1-\delta)][1-\beta_n^2(1-\delta)]\int_0^{\|z_n^3-p\|}\varphi(t)dt+$$

$$+3k_n+2\cdot 2k_n$$

$$\cdots$$

$$\le [1-\alpha_n(1-\delta)][1-\beta_n^1(1-\delta)][1-\beta_n^2(1-\delta)]\cdots[1-\beta_n^{s-1}(1-\delta)]\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt$$

$$+\int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt+(2s+1)\cdot k_n$$

Burada

$$[1-\alpha_n(1-\delta)][1-\beta_n^1(1-\delta)][1-\beta_n^2(1-\delta)]\cdots[1-\beta_n^{s-1}(1-\delta)]\le[1-\alpha_n(1-\delta)]$$

alınırsa

$$\int_0^{\|y_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt \le \int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt+[1-\alpha_n(1-\delta)]\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt+(2s+1)k_n$$

elde edilir.s sonlu olduğundan Lemma 2.53 kullanılarak istenilen sonuç elde edilir.

Diğer taraftan $n\to\infty \Rightarrow y_n \to p$ olsun.

$$\int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt=\int_0^{\|y_{n+1}-f(T,y_n)\|}\varphi(t)dt \le$$

$$\le \left\|y_{n+1}-(1-\alpha_n)z_n^1-\alpha_n Tz_n^1-p+p\right\|+k_n$$

$$\le \int_0^{\|y_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt+(1-\alpha_n)\int_0^{\|z_n^1-p\|}\varphi(t)dt+\alpha_n\int_0^{\|Tz_n^1-p\|}\varphi(t)dt+3k_n$$

$$\le \int_0^{\|y_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt+\left[1-\alpha_n(1-\delta)\right]\int_0^{\|z_n^1-p\|}\varphi(t)dt+3k_n$$

(4.16), (4.17) ve (4.18) kullanılarak

$$\int_0^{\varepsilon_n}\varphi(t)dt \le \int_0^{\|y_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt+[1-\alpha_n(1-\delta)]\int_0^{\|z_n^1-p\|}\varphi(t)dt+3k_n$$

$$\le \int_0^{\|y_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt+[1-\alpha_n(1-\delta)][1-\beta_n^1(1-\delta)]\int_0^{\|z_n^2-p\|}\varphi(t)dt+5k_n$$

$$\cdots$$

$$\le \int_0^{\|y_{n+1}-p\|}\varphi(t)dt+[1-\alpha_n(1-\delta)][1-\beta_n^1(1-\delta)][1-\beta_n^2(1-\delta)]\cdots[1-\beta_n^{s-1}(1-\delta)]$$

$$\int_0^{\|y_n-p\|}\varphi(t)dt+(2s+1)\cdot k_n$$

elde edilir. Burada

$$[1-\alpha_n(1-\delta)][1-\beta_n^1(1-\delta)][1-\beta_n^2(1-\delta)]\cdots[1-\beta_n^{s-1}(1-\delta)] \le [1-\alpha_n(1-\delta)]$$

alınırsa

$$\int_0^{\varepsilon_n} \varphi(t)dt \le \int_0^{\|y_{n+1}-p\|} \varphi(t)dt + [1-\alpha_n(1-\delta)]\int_0^{\|y_n-p\|} \varphi(t)dt + (2s+1)\cdot k_n$$

$n \to \infty \Rightarrow y_n \to p$ ve $y_{n+1} \to p$ ve $k_n \to 0$ olur. Bu durumda ispat tamamlanmış olur.

BÖLÜM 5

VERİ BAĞIMLILIĞI

5.1. Veri Bağımlılığı ile İlgili Sonuçlar

Sabit nokta teorisinin önemli konularından birisi de sabit noktaların veri bağlılığıdır. Literatüründe, sabit noktaların veri bağlılığı konusu ile ilgili çok sayıda çalışma mevcuttur. Bunlardan bazıları Berinde [99], Chifu ve Petruşel [105], Espínola ve Petruşel [106], Markin [107], Rus ve Muresan [108], Rus ve d. [109], Chugh ve d. [110], Chugh ve Kumar [111], Karakaya ve d. [112], [113], Olantiwo [114], [115], Şoltuz ve Grosan [116] dir. Fakat integral tip dönüşümlerin sabit noktalarının veri bağımlılığı üzerindeki çalışmalar literatürde bulunmamaktadır.

Sabit noktaların veri bağlılığı konusu: T dönüşümünün sabit noktası p olsun.

$T,S:C\to C$ operatörler olsun. Her $x\in C$ ve keyfi bir $\varepsilon>0$ için

$$\|Tx-Sx\|\leq\varepsilon \tag{5.1}$$

ise S ' ye T ' nin bir yaklaşım operatörü denilir [81].

Bir T dönüşümünün sabit noktasını hesaplarken, T ' nin Tanım 2.44 deki şartı sağlayan S gibi bir yaklaşım operatörü seçilir. S ' nın q gibi bir sabit noktaya sahip olduğu kabul edilir. Bu durumda p ye yaklaşık olarak q hesaplanır.

Teorem 5.1 X bir Banach uzayı, C de X in boştan farklı kapalı konveks alt kümesi, her $\varepsilon>0$ için $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt>0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ dönüşümü olsun. $S,T:C\to C$, (3.4) ile verilen integral tip dönüşüm, S ye T nin yaklaşım operatörü, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, (2.30) şartını sağlayan iki dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$\alpha_n \in (0,1)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartını sağlayan $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ reel sayı dizisi olsun. Eğer $Tp = p$ ve $Sq = q$ ise bu durumda

$$\|p-q\| \leq \frac{3\varepsilon}{1-\delta}$$

dır.

İspat Sırasıyla T ye ve S ye karşılık gelen aşağıdaki (2.30) ile verilen Picard Hibrid yöntemlerini ele alalım.

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ x_{n+1} = T\left(y_n\right), \\ y_n = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n \quad , n = 0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{5.2}$$

ve

$$\begin{cases} u_0 \in C \\ u_{n+1} = S z_n, \\ z_n = (1-\alpha_n)u_n + \alpha_n S u_n \quad , n = 0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{5.3}$$

(5.2) ve (5.3) iterasyonları ve Lemma 2.55 kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_0^{\|x_{n+1}-u_{n+1}\|} \varphi(t)dt = \int_0^{\|Ty_n - Sz_n\|} \varphi(t)dt &\leq \|Ty_n - Sz_n\| + k_n \leq \|Ty_n - Tz_n\| + \|Tz_n - Sz_n\| + k_n \\ &\leq \int_0^{\|Ty_n - Tz_n\|} \varphi(t)dt + \varepsilon + 2k_n \end{aligned} \tag{5.4}$$

dir. (5.4) eşitsizliğine (3.4) ile verilen Reich tip integral dönüşümü uygulanırsa,

$$\int_0^{\|Ty_n - Tz_n\|} \varphi(t)dt \leq a\int_0^{\|y_n - z_n\|} \varphi(t)dt + b\int_0^{\|Ty_n - y_n\|} \varphi(t)dt + c\int_0^{\|Tz_n - z_n\|} \varphi(t)dt \tag{5.5}$$

olur. (5.5) denkleminde Lemma 2.55 kullanılarak ve

$$\begin{aligned} \int_0^{\|y_n - z_n\|} \varphi(t)dt &\leq \|y_n - z_n\| + k_n \\ &\leq (1-\alpha_n)\int_0^{\|x_n - u_n\|} \varphi(t)dt + \alpha_n \int_0^{\|Tx_n - Tu_n\|} \varphi(t)dt + \alpha_n \varepsilon + 2k_n \end{aligned} \tag{5.6}$$

(3.4) şartı kullanılarak

$$\int_0^{\|Tx_n - Tu_n\|} \varphi(t)dt \le a\int_0^{\|x_n - u_n\|} \varphi(t)dt + b\int_0^{\|Tx_n - x_n\|} \varphi(t)dt + c\int_0^{\|Tu_n - u_n\|} \varphi(t)dt$$

elde edilir. Yukarıda bulunan eşitsizlikler (5.4) de yerine yazılırsa

$$\int_0^{\|x_{n+1} - u_{n+1}\|} \varphi(t)dt \le [1-\alpha_n(1-a)]\int_0^{\|x_n - u_n\|} \varphi(t)dt + \alpha_n(1-a)\{\frac{3}{1-a}\varepsilon + \frac{ab}{1-a}\int_0^{\|Tx_n - x_n\|} \varphi(t)dt$$
$$+\frac{ac}{1-a}\int_0^{\|Tu_n - u_n\|} \varphi(t)dt + \frac{2b}{1-a}\int_0^{\|Ty_n - y_n\|} \varphi(t)dt + \frac{2c}{1-a}\int_0^{\|Tz_n - z_n\|} \varphi(t)dt + \frac{8}{1-a}k_n\}$$

Aşağıda işlemlerde kullandığımız ara işlemlere yer verildi.

$1+a\alpha_n \le 1+\alpha_n = (1-\alpha_n)+\alpha_n+\alpha_n = (1-\alpha_n)+2\alpha_n$ elde edilir. $((1-\alpha_n)\le\alpha_n)$ olduğu kabul edilirse $1+a\alpha_n \le 3\alpha_n$ elde edilir.

$$\begin{aligned}\int_0^{\|Tx_n - x_n\|} \varphi(t)dt &= \|Tx_n - x_n\| + k_n \\ &\le \|Tx_n - p\| + \|x_n - p\| + k_n \\ &\le \int_0^{\|Tx_n - p\|} \varphi(t)dt + \int_0^{\|x_n - p\|} \varphi(t)dt + 3k_n\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_0^{\|Tx_n - p\|} \varphi(t)dt &\le a\int_0^{\|x_n - p\|} \varphi(t)dt + b\int_0^{\|Tx_n - x_n\|} \varphi(t)dt + c\int_0^{\|Tp - p\|} \varphi(t)dt \\ &\le \frac{a+b}{1-b}\int_0^{\|x_n - p\|} \varphi(t)dt + \frac{3}{1-b}k_n\end{aligned}$$

burada $a+2b<1, \frac{a+b}{1-b}=\eta$, $n\to\infty$ için $k_n \to 0$ ve $\|x_n - p\| \to 0$ olduğundan

$$\int_0^{\|Tx_n - x_n\|} \varphi(t)dt \le (1+\eta)\int_0^{\|x_n - p\|} \varphi(t)dt + (3+\frac{3}{1-b}k_n)$$

elde edilir. $n\to\infty$ iken $\|Tx_n - x_n\| \to 0$ olur. Buradan hareketle benzer işlemler yapılarak

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\|Tx_n - x_n\|} \varphi(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\|Ty_n - y_n\|} \varphi(t)dt \to 0$$

sonuç olarak Lemma 2.57 nin uygulanmasıyla

$$\|p-q\| \le \frac{3\varepsilon}{1-\delta}$$

olarak elde edilir.

Teorem 5.2 X bir Banach uzayı, C de X in boştan farklı kapalı konveks alt kümesi, her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dönüşümü olsun. $S, T : C \to C$, (3.6) ile verilen integral tip dönüşümü, S ye T nin yaklaşım operatörü, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ (2.28) ile verilen Noor iterasyon dizileri olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n \in (0,1)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartını sağlayan $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ reel sayı dizisi olsun. Eğer $Tp = p$ ve $Sq = q$ ise bu durumda

$$\|p - q\| \leq \frac{3\varepsilon}{1-\delta}$$

dır.

İspat Eğer $Tp = p$ ve $Sq = q$ olsun. Sırasıyla T ve S ya karşılık gelen aşağıdaki (2.28) verilen Noor iterasyon yöntemlerini ele alacağız

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(T, x_n) = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T z_n \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \tag{5.7}$$

ve

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(S, x_n) = (1-\alpha_n)u_n + \alpha_n S v_n \\ y_n = (1-\beta_n)u_n + \beta_n S s_n \\ z_n = (1-\gamma_n)u_n + \gamma_n S u_n \end{cases} \tag{5.8}$$

(5.7)ve(5.8) iterasyonları ve Lemma 2.55 kullanılarak

$$\int_0^{\|x_{n+1}-u_{n+1}\|} \varphi(t)dt \leq (1-\alpha_n)\int_0^{\|x_n-u_n\|} \varphi(t)dt + \alpha_n \int_0^{\|Ty_n - Tv_n\|} \varphi(t)dt + \alpha_n \varepsilon + 2k_n \tag{5.9}$$

dir.(5.9)eşitsizliğin sağ tarafındaki

$$\int_0^{\|Ty_n - Tv_n\|} \varphi(t)dt \leq a\int_0^{\|Ty_n - v_n\|} \varphi(t)dt + b\int_0^{\|Tv_n - y_n\|} \varphi(t)dt \tag{5.10}$$

dir.(5.10)denkleminde Lemma 2.55 kullanılarak

$$\int_0^{\|Ty_n - v_n\|} \varphi(t)dt \le \|Ty_n - y_n\| + \|y_n - v_n\| + k_n$$
$$\le \int_0^{\|Ty_n - y_n\|} \varphi(t)dt + \int_0^{\|y_n - v_n\|} \varphi(t)dt + 3k_n \tag{5.11}$$

ve

$$\int_0^{\|Tv_n - y_n\|} \varphi(t)dt \le \|Tv_n - v_n\| + \|y_n - v_n\| + k_n$$
$$\le \int_0^{\|Tv_n - v_n\|} \varphi(t)dt + \int_0^{\|y_n - v_n\|} \varphi(t)dt + 3k_n \tag{5.12}$$

elde edilir. (5.11) ve (5.12) birleştirilip (5.10) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\int_0^{\|Ty_n - Tv_n\|} \varphi(t)dt \le C\int_0^{\|y_n - v_n\|} \varphi(t)dt + a\int_0^{\|Ty_n - y_n\|} \varphi(t)dt + b\int_0^{\|Tv_n - v_n\|} \varphi(t)dt + 6k_n \tag{5.13}$$

olacak şekilde $\delta = a + b < 1$ reel sayısı vardır.

$$\int_0^{\|y_n - v_n\|} \varphi(t)dt \le (1-\beta_n)\int_0^{\|x_n - u_n\|} \varphi(t)dt + \beta_n \int_0^{\|Tz_n - Ts_n\|} \varphi(t)dt + \beta_n \varepsilon + 2k_n \tag{5.14}$$

ve(5.10), (5.11) ve (5.12) eşitsizliklerindeki benzer işlemler kullanılarak $[1-\gamma_n(1-\delta)] < 1$ ve $\delta < 1$ olduğundan $\delta[1-\gamma_n(1-\delta)] < \delta$ alınırsa

$$\int_0^{\|z_n - s_n\|} \varphi(t)dt \le [1-\gamma_n(1-\delta)]\int_0^{\|x_n - u_n\|} \varphi(t)dt + 8k_n + \gamma_n \varepsilon$$
$$+\gamma_n \,\mathrm{a} \int_0^{\|Tx_n - x_n\|} \varphi(t)dt + \gamma_n b\int_0^{\|Tu_n - u_n\|} \varphi(t)dt \tag{5.15}$$

elde edilir ve sonuç olarak bulunan eşitsizlikler (5.9) da yerine yazılırsa

$$\int_0^{\|x_{n+1} - u_{n+1}\|} \varphi(t)dt \le [1-\alpha_n(1-\delta)]\int_0^{\|x_n - u_n\|} \varphi(t)dt + \alpha_n(1-\delta)[\frac{3}{1-\delta}\varepsilon + \frac{A}{1-\delta}]$$

O halde

$$\|p - q\| \le \frac{3\varepsilon}{1-\delta}$$

elde edilir. Burada

$$A = 24k_n + \delta^2 \beta_n \gamma_n \,\mathrm{a} \int_0^{\|Tx_n - x_n\|} \varphi(t)dt + \delta^2 \beta_n \gamma_n b\int_0^{\|Tu_n - u_n\|} \varphi(t)dt + a\int_0^{\|Ty_n - y_n\|} \varphi(t)dt$$
$$+b\int_0^{\|Tv_n - v_n\|} \varphi(t)dt + \delta\beta_n a\int_0^{\|Tz_n - z_n\|} \varphi(t)dt + \delta\beta_n b\int_0^{\|Ts_n - s_n\|} \varphi(t)dt$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\|Tx_n-x_n\|}\varphi(t)dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\|Tu_n-u_n\|}\varphi(t)dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\|Ty_n-y_n\|}\varphi(t)dt=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\|Tv_n-v_n\|}\varphi(t)dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\|Tz_n-z_n\|}\varphi(t)dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\|Ts_n-s_n\|}\varphi(t)dt=0$$

dır.

5.2. Bazı İterasyon Yöntemlerinin Yakınsaklıkları Arasındaki İlişki

Sabit nokta teorisinin konularından birisi de iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıklarının denkliği konusudur.

Bir iterasyon için belirli bir dönüşümün sabit noktalarına yakınsak iken diğer bir iterasyon da bu dönüşümün sabit noktalarına yakınsak olur mu?

Bu soru üzerine sabit nokta iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıklarının denkliği konusu geniş bir araştırmacı kitlesi tarafından çeşitli dönüşüm sınıfları için çalışmalar yapıldı ve yapılmaktadır, bkz [118-126].

Çalışmamızda integral tip dönüşümlerin bazı iterasyon yöntemleri için yakınsaklıklarının denkliğini gösterildi.

Teorem 5.3 X bir Banach uzayı, C de X in boştan farklı kapalı konveks alt kümesi, her $\varepsilon>0$ için $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt>0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ dönüşümü olsun. $T:C\to C$, (3.4) ile verilen şartı sağlayan integral tip Reich dönüşüm olmak üzere, $x_0=u_0\in C$ ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) (2.30) ile verilen Picard-Mann Hibrid iterasyonu $p\in F_T$ ye yakınsar;

(ii) (2.26) ile verilen Mann itersayonu $p\in F_T$ ye yakınsar.

İspat (i)$\Rightarrow$(ii): Picard-Mann Hibrid iterasyonunun $p\in F_T$ ye yakınsadığını kabul edelim. $x_0\in X$ keyfi olmak üzere $x_{n+1}=T\left(y_n\right),\ n=0,1,2,\ldots$ biçiminde $\left(x_n\right)$ dizisini tanımlayalım.(2.26), (2.30), (3.4)' in ve Lemma 2.55 kullanılmasıyla, Bu durumda

$$\begin{aligned}\int_0^{\|x_{n+1}-u_{n+1}\|}\varphi(t)dt &\le \|x_{n+1}-u_{n+1}\|+k_n\\ &\le(1-\alpha_n)\int_0^{\|Ty_n-u_n\|}\varphi(t)dt+\alpha_n\int_0^{\|Ty_n-Tu_n\|}\varphi(t)dt+2k_n\end{aligned}\tag{5.16}$$

ve

$$\int_0^{\|Ty_n-u_n\|}\varphi(t)dt \le \|Ty_n-u_n\|+k_n$$
$$\le \int_0^{\|Ty_n-y_n\|}\varphi(t)dt+\int_0^{\|y_n-u_n\|}\varphi(t)dt+3k_n \quad (5.17)$$

ve

$$\int_0^{\|y_n-u_n\|}\varphi(t)dt \le \|x_n-u_n\|+\alpha_n\|Tx_n-x_n\|+k_n$$
$$\le \int_0^{\|x_n-u_n\|}\varphi(t)dt+\alpha_n\int_0^{\|Tx_n-x_n\|}\varphi(t)dt+3k_n \quad (5.18)$$

ve (3.4) şartı kullanılarak

$$\int_0^{\|Ty_n-Tu_n\|}\varphi(t)dt \le a\int_0^{\|y_n-u_n\|}\varphi(t)dt+b\int_0^{\|Tu_n-u_n\|}\varphi(t)dt+c\int_0^{\|Ty_n-y_n\|}\varphi(t)dt \quad (5.19)$$

ve

$$\int_0^{\|Tu_n-u_n\|}\varphi(t)dt \le \|Ty_n-y_n\|+\|y_n-u_n\|+\|Tu_n-Ty_n\|+k_n$$
$$\le \int_0^{\|Ty_n-y_n\|}\varphi(t)dt+\int_0^{\|y_n-u_n\|}\varphi(t)dt+\int_0^{\|Ty_n-Tu_n\|}\varphi(t)dt+4k_n \quad (5.20)$$

(5.20) eşitsizliği (5.19) eşitsizliğinde yerine yazılır ve $\dfrac{(a+b)}{1-b}=\delta<1$ olarak alınırsa

$$\int_0^{\|Ty_n-Tu_n\|}\varphi(t)dt \le \delta\int_0^{\|y_n-u_n\|}\varphi(t)dt+\frac{(b+c)}{1-b}\int_0^{\|Ty_n-y_n\|}\varphi(t)dt+\frac{4}{1-b}k_n \quad (5.21)$$

(5.17), (5.18) ve (5.21) birleştirilirse

$$\int_0^{\|x_{n+1}-u_{n+1}\|}\varphi(t)dt \le [(1-\alpha_n(1-\delta))]\int_0^{\|x_n-u_n\|}\varphi(t)dt+[\alpha_n{}^2\delta+\alpha_n(1-\alpha_n)]\int_0^{\|Tx_n-x_n\|}\varphi(t)dt$$
$$+[(1-\alpha_n)+\frac{b+c}{1-b}]\int_0^{\|Ty_n-y_n\|}\varphi(t)dt+(8+\frac{4}{1-b})k_n$$

elde edilir. Burada

Lemma 2.55 gereğince $n\to\infty$ için $k_n\to 0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\|Ty_n-y_n\|}\varphi(t)dt=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\|Tx_n-x_n\|}\varphi(t)dt=0$ dır. Burada

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\|Ty_n-y_n\|}\varphi(t)dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\|Tx_n-x_n\|}\varphi(t)dt=0 \quad (5.22)$$

olduğunu göstermek için, $p\in F_T$ olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}\int_0^{\|Tx_n-x_n\|}\varphi(t)dt &\le \|Tx_n-x_n\|+k_n\\ &\le \|Tx_n-p\|+\|x_n-p\|+k_n \\ &\le \int_0^{\|Tx_n-p\|}\varphi(t)dt+\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt+3k_n\end{aligned} \tag{5.23}$$

şeklinde yazılır. (3.4) şartı altında

$$\int_0^{\|Tx_n-p\|}\varphi(t)dt \le a\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt+b\int_0^{\|Tx_n-x_n\|}\varphi(t)dt+c\int_0^{\|Tp-p\|}\varphi(t)dt$$

elde edilir ve (5.23) kullanılarak

$$\int_0^{\|Tx_n-p\|}\varphi(t)dt \le \delta\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt+\frac{3}{1-b}k_n$$

yazılabilir. Birleştirilirse

$$\int_0^{\|Tx_n-x_n\|}\varphi(t)dt \le (\delta+1)\int_0^{\|x_n-p\|}\varphi(t)dt+(3+\frac{3}{1-b})k_n$$

Lemma 2.53 gereğince $n\to\infty$ için $\int_0^{\|Tx_n-x_n\|}\varphi(t)dt\to 0$ dır.

$n\to\infty$ için $\int_0^{\|Ty_n-y_n\|}\varphi(t)dt\to 0$ olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

(ii)$\Rightarrow$(i): Mann iterasyonunun p sabit noktasına yakınsadığını kabul edelim. (2.26) iterasyonu, (2.30) iterasyonu, (3.4) integral tip Reich dönüşümü ve Lemma 2.55'in kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned}\int_0^{\|u_{n+1}-x_{n+1}\|}\varphi(t)dt &\le \|u_{n+1}-x_{n+1}\|+k_n\\ &\le (1-\alpha_n)\int_0^{\|u_n-Tu_n\|}\varphi(t)dt+\int_0^{\|Tu_n-Ty_n\|}\varphi(t)dt+3k_n\end{aligned} \tag{5.24}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_0^{\|Ty_n-y_n\|}\varphi(t)dt &\le \|Tu_n-u_n\|+\|y_n-u_n\|+\|Tu_n-Ty_n\|+k_n\\ &\le \int_0^{\|Tu_n-u_n\|}\varphi(t)dt+\int_0^{\|y_n-u_n\|}\varphi(t)dt+\int_0^{\|Ty_n-Tu_n\|}\varphi(t)dt+4k_n\end{aligned} \tag{5.25}$$

ve (3.4) şartı kullanılarak

$$\int_0^{\|Ty_n-Tu_n\|}\varphi(t)dt \le a\int_0^{\|u_n-y_n\|}\varphi(t)dt+b\int_0^{\|Ty_n-y_n\|}\varphi(t)dt+c\int_0^{\|Tu_n-u_n\|}\varphi(t)dt \tag{5.26}$$

(5.25) eşitsizliği ile (5.26) eşitsizliği birleştirilmesiyle ve $\frac{(a+b)}{1-b}=\delta<1$ olarak alınırsa

$$\int_0^{\|Ty_n-Tu_n\|}\varphi(t)dt \le \delta\int_0^{\|u_n-y_n\|}\varphi(t)dt+\frac{(b+c)}{1-b}\int_0^{\|Tu_n-u_n\|}\varphi(t)dt+\frac{4}{1-b}k_n \tag{5.27}$$

elde edilir.

$$\int_0^{\|u_n-y_n\|}\varphi(t)dt \le (1-\alpha_n)\int_0^{\|u_n-x_n\|}\varphi(t)dt+\alpha_n\int_0^{\|Tu_n-u_n\|}\varphi(t)dt+\alpha_n\int_0^{\|Tu_n-Tx_n\|}\varphi(t)dt+3k_n$$

ve (3.4) şartı kullanılarak

$$\int_0^{\|Tu_n-Tx_n\|}\varphi(t)dt \le a\int_0^{\|u_n-x_n\|}\varphi(t)dt+b\int_0^{\|Tx_n-x_n\|}\varphi(t)dt+c\int_0^{\|Tu_n-u_n\|}\varphi(t)dt \tag{5.28}$$

ve

$$\int_0^{\|Tx_n-x_n\|}\varphi(t)dt \le \int_0^{\|Tu_n-Tx_n\|}\varphi(t)dt+\int_0^{\|Tu_n-u_n\|}\varphi(t)dt+\int_0^{\|u_n-x_n\|}\varphi(t)dt+4k_n \tag{5.29}$$

(5.28) ve (5.29) birleştirilmesiyle

$$\int_0^{\|Tu_n-Tx_n\|}\varphi(t)dt \le \delta\int_0^{\|u_n-x_n\|}\varphi(t)dt+\frac{b+c}{1-b}\int_0^{\|Tu_n-u_n\|}\varphi(t)dt+\frac{4}{1-b}k_n$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikler birleştirilerek (5.24) de yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}\int_0^{\|x_{n+1}-u_{n+1}\|}\varphi(t)dt \le{}& [(1-\alpha_n(1-\delta)]\int_0^{\|u_n-x_n\|}\varphi(t)dt+(8+\frac{6}{1-b})k_n\\ &+[(1-\alpha_n(1-\delta)+(1+\alpha_n\delta)\frac{b+c}{1-b}]\int_0^{\|Tu_n-u_n\|}\varphi(t)dt\end{aligned}$$

olduğu sonucuna varılır. Burada $\delta\in(0,1),[(1-\alpha_n(1-\delta)]<1$ dir. Böylece Lemma 2.53 gereğince

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\|u_n-x_n\|}\varphi(t)dt=0$$

olduğu sonucuna varılır. Burada $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\|Tu_n-u_n\|}\varphi(t)dt=0$ olduğu (5.22)'e benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 5.4 X bir Banach uzayı olsun. C, X boştan farklı kapalı konveks alt kümesi olsun. $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ her $\varepsilon>0$ için $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt>0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir ve $T:C\to C$, (2.7) ile verilen bir integral tip contraction dönüşüm olsun. Keyfi bir x_0, u_0, C deki herhangi iki nokta olmak üzere

(i) (2.26) ile verilen Mann iterasyonu $p\in F_T$ noktasına yakınsar;

(ii) (2.31) ile verilen yeni multistep iterasyonu $p\in F_T$ noktasına yakınsar.

İspat Mann iterasyonu $p\in F_T$ noktasına yakınsasın.(2.26) iterasyonu, (2.31) iterasyonu, (2.7) şartı ve Lemma 2.55 kullanılarak

$$\begin{aligned}\int_0^{\|u_{n+1}-x_{n+1}\|}\varphi(t)dt &\le \|u_{n+1}-x_{n+1}\|+k_n\\ &=\left\|(1-\alpha_n)u_n+\alpha_nTu_n-(1-\alpha_n)y_n^1-\alpha_nTy_n^1\right\|+k_n\\ &\le(1-\alpha_n)\|u_n-y_n^1\|+\alpha_n\|Tu_n-Ty_n^1\|+k_n\\ &\le(1-\alpha_n)\int_0^{\|u_n-y_n^1\|}\varphi(t)dt+\alpha_n\int_0^{\|Tu_n-Ty_n^1\|}\varphi(t)dt+2k_n\\ &\le[1-\alpha_n(1-\delta)]\int_0^{\|u_n-y_n^1\|}\varphi(t)dt+2k_n\end{aligned}\tag{5.30}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_0^{\|u_n-y_n^1\|}\varphi(t)dt &\le \|u_n-y_n^1\|+k_n=\left\|u_n-(1-\beta_n^1)y_n^2-\beta_n^1Ty_n^2\right\|+k_n\\ &\le(1-\beta_n^1)\|u_n-y_n^2\|+\beta_n^1\|Tu_n-Ty_n^2\|+k_n\\ &\le(1-\beta_n^1)\int_0^{\|u_n-y_n^2\|}\varphi(t)dt+\beta_n^1\int_0^{\|Tu_n-Ty_n^2\|}\varphi(t)dt+2k_n\\ &\le(1-\beta_n^1)\int_0^{\|u_n-y_n^2\|}\varphi(t)dt+\gamma\beta_n^1\int_0^{\|u_n-y_n^2\|}\varphi(t)dt+2k_n\\ &\le[1-\beta_n^1(1-\delta)]\int_0^{\|u_n-y_n^2\|}\varphi(t)dt+2k_n\end{aligned}\tag{5.31}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\|u_n-y_n^2\|}\varphi(t)dt &\le \left\|u_n-y_n^2\right\|+k_n=\left\|u_n-\left(1-\beta_n^2\right)y_n^3-\beta_n^2Ty_n^3\right\|+k_n\\
&\le \left(1-\beta_n^2\right)\left\|u_n-y_n^3\right\|+\beta_n^2\left\|Tu_n-Ty_n^3\right\|+k_n\\
&\le \left(1-\beta_n^2\right)\int_0^{\|u_n-y_n^3\|}\varphi(t)dt+\beta_n^2\int_0^{\|Tu_n-Ty_n^3\|}\varphi(t)dt+2k_n \qquad (5.32)\\
&\le \left(1-\beta_n^2\right)\int_0^{\|u_n-y_n^3\|}\varphi(t)dt+\delta\beta_n^2\int_0^{\|u_n-y_n^3\|}\varphi(t)dt+2k_n\\
&\le [1-\beta_n^2(1-\delta)]\int_0^{\|u_n-y_n^3\|}\varphi(t)dt+2k_n
\end{aligned}
$$

elde edilir. (5.31), (5.32) eşitsizlikleri birleştirilerek (5.30) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\|u_{n+1}-x_{n+1}\|}\varphi(t)dt &\le [1-\alpha_n(1-\delta)]\int_0^{\|u_n-y_n^1\|}\varphi(t)dt+2k_n\\
&\le [1-\alpha_n(1-\delta)][1-\beta_n^1(1-\delta)]\int_0^{\|u_n-y_n^2\|}\varphi(t)dt+4k_n\\
&\le [1-\alpha_n(1-\delta)][1-\beta_n^1(1-\delta)][1-\beta_n^2(1-\delta)]\int_0^{\|u_n-y_n^3\|}\varphi(t)dt+6k_n
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\|u_{n+1}-x_{n+1}\|}\varphi(t)dt \le {} & [1-\alpha_n(1-\delta)][1-\beta_n^1(1-\delta)][1-\beta_n^2(1-\delta)]...[1-\beta_n^{s-1}(1-\delta)]\int_0^{\|u_n-x_n\|}\varphi(t)dt\\
&+s2k_n
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $C\in[0,1)$ ve $i=\overline{1,s-1}$ için $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty},\{\beta_n^i\}_{n=0}^{\infty}\subset[0,1)$ olduğundan,

$$
[1-\alpha_n(1-\delta)][1-\beta_n^1(1-\delta)][1-\beta_n^2(1-\delta)]...[1-\beta_n^{s-1}(1-\delta)]\le[1-\alpha_n(1-\delta)]
$$

elde edilir. Böylece

$$
\int_0^{\|u_{n+1}-x_{n+1}\|}\varphi(t)dt\le[1-\alpha_n(1-\delta)]\int_0^{\|u_n-x_n\|}\varphi(t)dt+s2k_n
$$

olarak ifadeedilebilir. Böylece Lemma 2.53 uyarlanırsa burada

$(1-\lambda_n)=[1-\alpha_n(1-\delta)]$,

$\alpha_n=\int_0^{\|u_n-x_n\|}\varphi(t)dt$,

$\beta_n=s2k_n$

alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\|u_n-x_n\|}\varphi(t)dt=0$$

olduğu elde edilir.

(ii)$\Rightarrow$(i) Yeni multistep iterasyonu $p\in F_T$ noktasına yakınsasın.(2.26), (2.31), (2.7) şartı ve Lemma 2.55 kullanılarak

$$\begin{aligned}\int_0^{\|x_{n+1}-u_{n+1}\|}\varphi(t)dt &\le \|x_{n+1}-u_{n+1}\|+k_n\\ &=\left\|(1-\alpha_n)y_n^1+\alpha_n Ty_n^1-(1-\alpha_n)u_n-\alpha_n Tu_n\right\|+k_n\\ &\le(1-\alpha_n)\|y_n^1-u_n\|+\alpha_n\|Ty_n^1-Tu_n\|+k_n\\ &\le(1-\alpha_n)\int_0^{\|y_n^1-u_n\|}\varphi(t)dt+\alpha_n\int_0^{\|Ty_n^1-Tu_n-\|}\varphi(t)dt+2k_n\\ &\le[1-\alpha_n(1-\delta)]\int_0^{\|y_n^1-u_n\|}\varphi(t)dt+2k_n\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_0^{\|u_n-y_n^1\|}\varphi(t)dt &\le \|y_n^1-u_n\|+k_n\\ &\le(1-\beta_n^1)\|y_n^2-u_n\|+\beta_n^1\|Ty_n^2-Tu_n\|+k_n\\ &\le(1-\beta_n^1)\int_0^{\|y_n^2-u_n\|}\varphi(t)dt+\beta_n^1\int_0^{\|Ty_n^2-Tu_n\|}\varphi(t)dt+2k_n\\ &\le[1-\beta_n^1(1-\delta)]\int_0^{\|y_n^2-u_n\|}\varphi(t)dt+2k_n\end{aligned}$$

elde edilir. Bu şekilde sürdürülürse ve (5.31), (5.32) eşitsizlikleri göz önünde bulundurularak yapılırsa, böylece

$$\int_0^{\|x_{n+1}-u_{n+1}\|}\varphi(t)dt\le[1-\alpha_n(1-\delta)]\int_0^{\|x_n-u_n\|}\varphi(t)dt+s2k_n$$

ifade edilir. O halde aşağıdaki tanımlamalar yapılabilir.

$(1-\lambda_n)=[1-\alpha_n(1-\delta)]$,

$\alpha_n=\int_0^{\|x_n-u_n\|}\varphi(t)dt$,

$\beta_n=s2k_n$

alınırsa Lemma 2.53 den

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\|x_n-u_n\|}\varphi(t)dt=0$$

olduğu elde edilir.

Yukarıdaki gerçekler ışığında; teoremlerden aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 5.5 X bir Banach uzayı, $\varnothing\neq C\subset X$ konveks ve kapalı bir küme olsun. $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ her $\varepsilon>0$ için $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt>0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir ve $T:C\to C$ (3.4) ile verilen bir integral tip contraction dönüşüm olsun ve T nin bir sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim, yani, $F_T\neq\varnothing$ olsun.Tüm iterasyonlar için başlangıç noktası aynı ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için, bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) (2.24) ile verilen Picard iterasyonu $p\in F_T$ ye yakınsar,

(ii) (2.25)ile verilen Krasnoselskij iterasyonu $p\in F_T$ ye yakınsar,

(iii) (2.26) ile verilen Mann iterasyonu $p\in F_T$ ye yakınsar,

(iv) (2.30) ile verilen Picard-Mann Hybrd iterasyonu $p\in F_T$ ye yakınsar.

Sonuç 5.6 X bir Banach uzayı, $\varnothing\neq C\subset X$ konveks ve kapalı bir küme olsun. $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ her $\varepsilon>0$ için $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt>0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir ve $T:C\to C$ (3.5) ile verilen bir integral tip contraction dönüşüm olsun ve T nin bir sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim, yani, $F_T\neq\varnothing$ olsun.Tüm iterasyonlar için başlangıç noktası aynı ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için, bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) (2.24) ile verilen Picard iterasyonu $p\in F_T$ ye yakınsar,

(ii) (2.25) ile verilen Krasnosel'skii iterasyonu $p\in F_T$ ye yakınsar,

(iii) (2.26) ile verilen Mann iterasyonu $p\in F_T$ ye yakınsar,

(iv) (2.27) ile verilen Ishikawa iterasyonu $p\in F_T$ ye yakınsar.

Sonuç 5.7 X bir Banach uzayı, $\emptyset \neq C \subset X$ konveks ve kapalı bir küme olsun. $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0$ olacak şekilde negatif olmayan, toplanabilir, Lebesgue-integrallenebilir ve $T : C \to C$ (3.6) ile verilen bir integral tip contraction dönüşüm olsun ve T nin bir sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim, yani, $F_T \neq \emptyset$ olsun. Tüm iterasyonlar için başlangıç noktası aynı ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için, bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) (2.24) ile verilen Picard iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar,

(ii) (2.25) ile verilen Krasnosel'skii iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar,

(iii) (2.26) ile verilen Mann iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar,

(iv) (2.27) ile verilen Ishikawa iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar.

(v) (2.28)ile verilen Noor iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Banach sabit nokta prensibi [34] olarak bilenen teoremin genellemesi olan Kannan [41], Chatterjea [88], Reich [86], Berinde [87] zayıf contraction teoremi, Hardy ve Rogers [89] genelleştirilmiş Reich sabit nokta teoremlerinin integral versiyonu tanımlandı. Teorem 3.7, Teorem 3.9, Teorem 3.10, Teorem 3.11, Teorem 3.12, Teorem 3.14, Teorem 3.15 de (2.24) Picard iterasyon yöntemi tarafından üretilen iteratif dizi ile (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) ve (3.11) şartlarını sağlayan integral tip dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsadığı gösterildi. Bölüm 4'te sabit nokta iterasyon yöntemlerinin T-kararlılığı incelendi. Teorem 4.1 ile (3.4) şartını sağlayan bir integral tip dönüşüm için (2.30) tarafından üretilen Picard-Mann Hibrid iterasyon yöntemi kararlıdır. Teorem 4.2 ile (3.5) şartını sağlayan bir integral tip dönüşüm için (2.27) Ishikawa iterasyon yöntemi kararlıdır. Teorem 4.3, Teorem 4.4, Teorem 4.5 ispatlara aynı doğrultuda devam edilerek bazı iterasyonların belirli integral tip dönüşümler kullanılarak T-kararlılıkları gösterildi. Son olarak, Bölüm 5'te sabit noktaların veri bağlılığı ve bazı iterasyon yöntemlerinin integral tip dönüşüm şartı altında denk olduğu gösterildi. Teorem 5.1'de, (2.30) iterasyon yöntemine karşılık gelen ve (3.4) ile verilen integral tip dönüşümün sabit noktasının veri bağımlılığı ile Teorem 5.2'te (2.28) ile verilen Noor iterasyon dizisi ve (3.6) ile verilen integral tip dönüşümün sabit noktasının veri bağımlılığı ile ilgili sonuçlar elde edildi. Teorem 5.3 de (2.30) ile verilen Picard-Mann Hibrid iterasyonu ve (2.26) ile verilen Mann iterasyonu için, (3.4) ile verilen şartı sağlayan integral tip Reich dönüşümü altında denklikleri incelendi. Teorem 5.4 ise (2.26) ile verilen Mann iterasyonu ve (2.31) ile verilen yeni multistep iterasyonu (2.7) ile verilen bir integral tip contraction dönüşümü kullanılarak denliklerine değinildi. Yukarıdaki yapılan çalışmalardan yola çıkılarak Sonuç 5.5, Sonuç 5.6, Sonuç 5.7 sonuçları yer verildi.. Daha sonraki çalışmalar için literatürde yer alan sabit nokta dönüşüm sınıflarının integral versiyonları tanımlanarak, farklı iterasyonlar için yakınsaklıkları, *T*-kararlılık sonuçları ve dönüşümlerin sabit noktalarının veri bağlılıkları ile ilgili tahminler elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Somarakis, C. ve Baras, J.S., (2013). "Fixed Point Theory Approach to Exponential Convergence in LTV Continuous Time Consensus Dynamics with Delays", SIAM CT(13) Congress, 8-10 July 2013, California, USA.

[2] A, Z., Chen, J.W., et al., (2010). “Duality for Multiobjective Programming with a Modified Objective Function”, In: Proceedings of Third International Conference on Modelling and Simulation, 4-6 June 2010, Wuxi, P.R.China.

[3] Chen, J.W., Qi, Y, (2009). “Solvability of Set-Valued Vector Optimization Problem”, In: Proceedings of the 1st International Workshop on Education Technology and Computer Science, 3:934–938.

[4] Chen, J.W., Zou, Y.Z, (2010). “Existence of Solutions of F-Implicit Variational Inequalit Problems with Extended Projection Operators”, Acta Mathmatica Sinica Chinese Series, 53:375–384.

[5] Sun, H., Chen, J.W., Wan, Z., (2010). “Extended Well-Posedness for Vector Optimization Problems with Connected Set Constraint”, International Conference on Computer Application and System Modeling, 22-24 October 2010, Taiyuan, China.

[6] Chen, J.W., Cho, Y.J., Kim, J.K., Li, J, (2011). “Multiobjective optimization problems with modified objective functions and cone constraints and applications”, Journal of Global Optimization, 49:137–147.

[7] Ceng, L.-C., Ansari, Q. ve Yao, J.-C., (2011). "Some iterative methods for finding fixed points and for solving constrained convex minimization problems", Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 74: 5286-5302.

[8] Siddiqi, A. ve Ansari, Q., (1989). "An iterative method for generalized variational inequalities", Mathematica Japonica, 34: 475-481.

[9] Ran, A.C.M., Reurings, M.C.B, (2004). “A Fixed Point Theorem in Partially OrderedSets and Some Applications to Matrix Equations”, Proc. Amer. Math. Soc,132:1435–1443.

[10] Nieto, J.J., Rodriguez–Lopez, R, (2005). “Contractive Mapping Theorems in Partially Ordered Sets and Applications to Ordinary Differential Equations”, Order, 22:223–239.

[11] Nieto, J.J., Rodriguez–Lopez, R, (2006). “Existence and Uniqueness of Fixed Point in Partially Ordered Sets and Applications to Ordinary Dierential Equations”, Acta Mathematica Sinica, 23:2205–2212.

[12] Nash, J.F., (1950). "Equilibrium Points in n-Person Games", Proceedings Of The National Academy of Sciences, 36: 48-49.

[13] Nash, J., (1951). "Non-Cooperative Games", The Annals of Mathematics, 54: 286-295.

[14] Chen, M., Lu, W., Chen, Q., Ruchala, K.J. ve Olivera, G.H., (2008). "A Simple Fixed-Point Approach to Invert a Deformation Field", Medical Physics, 35: 81.

[15] Takahashi, T., (1970). "A Convexity in Metric Spaces and Nonexpansive Mapping I", Kodai Math. Sem. Rep., 22:142-149

[16] Khamsi, M.A., Lin, M., Sine, R.C., (1992) . "On The Fixed Points of Commuting Nonexpansive Maps in Hyperconvex Spaces", J. Math. Anal. Appl., 168: 372-380.

[17] Saadati, R., Vaezpour, S.M., Vetro, P. ve Rhoades, B.E., (2010). "Fixed Point Theorems in Generalized Partially Ordered G-Metric Spaces", Math. Comput. Modelling, 52:797-801.

[18] Kada, O., Suzuki, T. ve Takahashi, W., (1996). "Nonconvex Minimization Theorems and Fixed Point Theorems in Complete Metric Spaces", Math. Japon., 44:381-391.

[19] Park, S., (2006). "A Survey on Fixed Point Theorems in Generalized Convex Spaces", RIMS Kôkyûroku, 1484:124-133.

[20] Abbas, M., Altun, I., Simsek, H., (2011). "A Fixed Point Theorem on Cone Metric Spaces with New Type Contractivity", Banach J. Math. Anal., 5:15-24.

[21] Şahin, I., Telci, M., (2009). "Fixed Points of Contractive Mappings on Complete Conemetric Spaces", Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 38:59-67.

[22] Karapınar, E., (2009). "Fixed Point Theorems in Cone Banach Spaces", Fixed Point Theory and Applications, 10:1-9.

[23] Turkoglu, D., Abuloha, M., (2010). "Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems in Diametrically Contractive Mappings", Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), 26:489–496.

[24] Türkoğlu, D., Rhoades, B. E., (2005). "A Fixed Fuzzy Point For Fuzzy Mapping in Complete Metric Spaces", Math. Commun., 10:115-121.

[25] Alaca, C., Türkoğlu, D., Yıldız, C., (2006). "Fixed Points In Intuitionistic Fuzzy Metric Spaces", Chaos Solitons & Fractals, 29:1073-1078.

[26] Türkoğlu, D., Alaca, C., Cho, Y. J., Yıldız, C., (2006). "Common Fixed Point Theorems In Intuitionistic Fuzzy Metric Spaces", J. Appl. Math. Comput., 22:411-424.

[27] Caristi, J., (1976). "Fixed Point Theorems For Mappings Satisfying Inwardness Conditions", Transactions of the American Mathematical Society, 215: 241-251.

[28] Ertürk, M. ve Karakaya, V., (2013). "n-Tuplet Fixed Point Theorems for Contractive Type Mappings In Partially Ordered Metric Spaces", Journal of Inequalities and Applications, 196:1-19.

[29] Simsek, N. ve Karakaya, V., (2009). "On Some Geometrical Properties of Generalized Modular Spaces of Cesaro Type Defined by Weighted Means", Journal of Inequalities and Applications, 2009: 932734.

[30] Simsek, N., Savaş, E. ve Karakaya, V., (2010). "Some Geometric and Topological Properties of A New Sequence Space Defined By De La Vallée-Poussin Mean", Journal of Computational Analysis and Applications, 12: 768-779.

[31] Turkoglu, D., Alaca, C., Cho, Y. ve Yildiz, C., (2006). "Common fixed point theorems in intuitionistic fuzzy metric spaces", Journal of Applied Mathematics and Computing, 22: 411-424.

[32] Turkoglu, D. ve Rhoades, B., (2005). "A Fixed Fuzzy Point for Fuzzy Mapping In Complete Metric Spaces", Mathematical Communications, 10: 115-121.

[33] Başarır, M. ve Şahin, A., (2013). "On The Strong And Δ-Convergence of New Multi-Step and S-İteration Processes In A CAT (0) Space", Journal of Inequalities and Applications, 2013: 482.

[34] Özturk, M. ve Başarır, M., (2012). "On Some Common Fixed Point Theorems with Rational Expressions On Cone Metric Spaces Over A Banach Algebra", Hacet. J. Math. Stat, 41: 211-222.

[35] Özturk, M. ve Başarır, M., (2011). "On Some Common Fixed Point Theorems With φ-Maps On G−Cone Metric Spaces", Bull. Math. Anal. Appl, 3: 121-133.

[36] Brouwer, L. E. J., (1910), "Uber Abbildung Von Mannigfaltigkeiten", Math. Ann., 71:97-115.

[37] Khamsi, M., A. ve Kirk, W. A., (2001). An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory, John Wiley & Sons, 40, USA.

[38] Banach, S., (1922). "Sur Les Opérations Dans Les Ensembles Abstraits Et Leur Application Aux Équations İntégrales", Fund. Math, 3: 133-181.

[39] Browder, F. E., (1965), "Nonexpansive Nonlinear Operators In A Banach Space", Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 54: 1041-1044.

[40] Kirk , W. A., (1965),"A Fixed Point Theorem for Mappings Which Do Not Increase Distance ", Amer. Math. Soc., 72:1004-1006.

[41] Kannan, R:, (1968), "Some results on fixed point", Bull. Cal. Math. Soc., 60: 71-76.

[42] Zamfirescu, T., (1972), "Fix Point Theorems in Metric Spaces", Arch. Math. (Basel), 23: 292-298.

[43] Branciari, A., (2002), "A Fixed Point Theorem for Mappings Satisfying A General Contractive Condition of Integral Type", Int. J. Math. Math. Sci., 9:521-536.

[44] Rhoades, B. E., (2003), "Two Fixed Point Theorems for Mappings Satisfing A General Contractive Condition of Integral Type", Int. J. Math. Sci. 63:4007-4013.

[45] Ćirić, L.B., (1974). "A Generalization of Banach's Contraction Principle", Proceedings of the American Mathematical Society, 45: 267-273.

[46] Olatinwo, M. O., (2010), "Some Stability Results For Picard and Mann Iteration Processes Using Contractive Condition of Integral Type", Creative Math. and inf.,19:57-64.

[47] Mann, W.R., (1953), "Mean Value Methods In İteration", Proceedings of The American Mathematical Society, 3:506-510.

[48] Olatinwo, M. O., (2008). "Some Common Fixed Point Theorems For Selfmappins Satisfying Two Contractive Condition of Integral Type In A Uniform Space", Cent. Eur. J. Math.,6:335-341.

[49] Olatinwo, M. O., (2008). "A Result For Approximating Fixed Points of Generalized Weak Contraction of The Integral-Type By Using Picard Iteration", Revista Colombiana de Matematicas, 42:145-151.

[50] Olatinwo, M. O., (2010). "On Some Fixed Point Theorems and Error Estimates Involving Integral Type Contractive Conditions", General Mathematics, 18:47-57.

[51] Karapınar, E., Shahi, P. ve Tas, K., (2014). "Generalized α-Ψ-Contractive Type Mappings of Integral Type and Related Fixed Point Theorems", Journal of Inequalities and Applications,1:151-160.

[52] Achour, D., Belaib, M., T., (2011). "Some Stability Theorems For Some Iteration Processes Using Contractive Condition Of Integral Type", Abstract and Applied Analysis, 3:108-115.

[53] Altun, I., Turkoğlu, D. ve Rhoades, B., (2007). "Fixed Points of Weakly Compatible Maps Satisfying a General Contractive Condition of Integral Type", Fixed Point Theory and Applications,9:17301-17320.

[54] Aghaniansa, A. ve Nourouzia, K., (2015). "Fixed Points of Integral Type Contractions in Uniform Spaces", Filomat 29:1613–1621

[55] Bhardwaj, R., (2012). "Some Common Fixed Point Theorem In Metric Space Using Integral Type Mappings", IOSR Journal of engineering, 2:187-190.

[56] Canzoneri, E. ve Vetroa, P., (2012). "Fixed Points For Asymptotic Contractions of Integral Meir-Keeler Type", J. Nonlinear Sci. Appl., 5:126–132.

[57] Chauhan, S., Imdad, M., Karapınar, E. ve Fisher, B., (2014). "An Integral Type Fixed Point Theorem For Multi-Valued Mappings Employing Strongly Tangential Property", Journal of The Egyptian Mathematical Society, 22:258–264.

[58] Djoudi, A. ve Aliouche, A., (2007). "Common Fixed Point Theorems of Gregus Type For Weakly Compatible Mappings Satisfying Contractive Conditions of Integral Type", J. Math. Anal. Appl., 329:31–45.

[59] Djoudi, A. ve Merghadi, F.., (2007). "Common Fixed Point Theorems For Maps Under A Contractive Condition of Integral Type", J. Math. Anal. Appl., 341:953–960.

[60] Donia, H. M. A. ve Rabou, K. A., (2012). "Common Fixed Point Theorems For Sequences of Mappings Under A New Contractive Condition of Integral Type", Applied Mathematics Letters, 25:980-985.

[61] Gairola, U. C. ve Rawat, A. S., (2008). "A Fixed Point Theorem for Integral Type Inequality", Int. Journal of Math. Analysis, 2:709-712.

[62] Gairola, U. C. ve Rawat, A. S., (2009). " A Fixed Point Theorem for Two Pair of Maps Satisfying a New Contractive Condition of Integral Type" International Mathematical Forum, 4:177-183.

[63] Jachymski, j., (2009). "Remarks On Contractive Conditions of Integral Type" Nonlinear Analysis, 71:1073-1081.

[64] Khojasteh, F., Goodarzi, Z. ve Razani, A., (2010). "Some Fixed Point Theorems of Integral Type Contraction In Cone Metric Spaces", Fixed Point Theory and Applications, 2010:189684.

[65] Kohli, J. K., (2010). "A Common Fixed Point Theorem for Six Mappings via Weakly Compatible Mappings In Symmetric Spaces Satisfying Integral Type Implicit Relations", International Mathematical Forum, 5:1-14.

[66] Mongkolkeha, C. ve Kumam, P., (2011). "Fixed Point and Common Fixed Point Theorems for Generalized Weak Contraction Mappings of Integral Type in Modular Spaces", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2011:705943.

[67] Prajapati, P.B. ve Bhardwaj, R., (2013). "A Fixed Point Theorem For Weak Contraction Mappings of Integral Type", South Asian Journal of Mathematics, 3:104-108.

[68] Prajapati, P. B. ve Bhardwaj, R., (2013). "Fixed Point Theorem For A-Contraction Mappings of Integral Type", South Asian Journal of Mathematics, 3:44-48.

[69] Saha, M. ve Dey, D., (2012). "Fixed Point Theorem for A-Contraction Mappings of integral type", J. Nonlinear Sci. Appl., 5:84-92.

[70] Samet, B., (2009). "A Fixed Point Theorem In a Generalized Metric Space for Mappings Satisfying a Contractive Condition of Integral Type", Int. Journal of Math. Analysis, 26:1265 – 1271.

[71] Samreen, M., Karman, T., (2013), "Fixed Point Theorems for Integral G-Contractions", Fixed Point Theory and Applications, 1:149-161.

[72] Sintunavarat, W. ve Kumam, P., (2011). "Gregus-Type Common Fixed Point Theorems for Tangential Multivalued Mappings of Integral Type in Metric Spaces", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 12:1-15.

[73] Sintunavarat, W. ve Kumam, P., (2011). "Gregus-Type Fixed Point Theorems for a Tangential Multivalued Mappings Satisfying Contractive Conditions of Integral Type", Journal of Inequalities and Applications, 11:1-3.

[74] Picard, E., (1890). "Memoire Sur La Theorie Des Equations Aux Derivees Partielles Et La Methode Des Approximations Successives", J. Math. Pures Appl., 4:145-210.

[75] Krasnosel'skii, M.A., (1955). "Two Remarks on The Method of Successive Approximations", Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 10: 123-127.

[76] Ishikawa, S., (1974). "Fixed Points By A New Iteration Method", Proceedings of the American Mathematical Society, 44: 147-150.

[77] Noor, M.A., (2000). "New Approximation Schemes For General Variational Inequalities", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 251: 217-229.

[78] Kreyszig, E., (1989). Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, 511, USA.

[79] Maddox, I.J., (1988). Elements of Functional Analysis, 2nd edition, Cambridge University Press, 274, Cambridge.

[80] Brown, A.L. ve Page, A., (1970). Elements of functional analysis, Van Nostrand-Reinhold, London.

[81] Somasundaram, D., (2008). A First Course in Functional Analysis, Alpha Science, Oxford.

[82] Dönmez, A., (2001). Reel Analiz, Seçkin, Ankara.

[83] Nasibov, F., (2013). Reel Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi, Nobel, Ankara.

[84] Berinde, V., (2007). Iterative Approximation of Fixed Points, Springer, Berlin.

[85] Agarwal, R.P., Sahu, D.R. ve O'Regan, D., (2009). Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications, Springer, New York.

[86] Reich, S., (1971). "Some Remarks Concerning Contraction Mappings.", Canad. Math. Bull,14:121-124.

[87] Berinde, V., (2004). "Approximation Fixed Points of Weak Contraction Using The Picard Iteration", Nonlinear Analysis Forum, 9:43-53.

[88] Chatterjea, S., (1972). "Fixed-Point Theorems", CR Acad. Bulgare Sci, 25: 727-730.

[89] Hardy, G. E.ve Rogers, T. D., (1973), "A Generalization of a Fixed Point Theorem of Reich", Canad. Math. Bull., 16:201-206.

[90] Berinde, V., (2008). " General Constructive Fixed Point Theorems For Ciric-Type Almost Contractions In Metric Spaces ", Carpathian J. Math, 24: 10-19.

[91] Karakaya, V., Doğan, K., Gürsoy, F. ve Ertürk, M., (2013). "Fixed Point of a New Three Step Iteration Algorithm Under Contractive Like Operators Over Normed Spaces", Abstract and Applied Analysis, 10.1155:560258.

[92] Khan, S., (2013). "Picard-Mann Hybrid Iterative Process. ", Fixed Point Theory and Applications, 1: 1-10.

[93] Gürsoy, F., Karakaya, V. ve Rhoades, B. E., (2013). " Data Dependence Results of New Multistep and S Iterative Schemes For Contractive Like Operators", Fixed Point Theory an Applications, 76:1-12.

[94] Weng, X., (1991). "Fixed Point Iteration For Local Strictly Pseudocontractive Mapping.", Proc. Amer. Math. Soc., 113:727-731.

[95] Soltuz, S., M., ve Grosan, T., (2008). "Data Dependence For Ishikawa Iteration When Dealing With Contractive-Like Operators", Fixed Point Theory and Applications, 2:1-7.

[96] Harder, A.M. ve Hicks, T.L., (1988). "Stability Results For Fixed Point Iteration Procedures", Math. Japon, 33: 693-706.

[97] Harder, A. M., ve Hicks, T. L., (1988). "A Stable Iteration Procedure For Nonexpansive Mappings", Math. Japonica, 33:687-692.

[98] Khojasteh, F., Goodarzi, Z. ve Razani, A., (2010). "Some Fixed Point Theorems of Integral Type Contraction In Cone Metric Spaces.", Fixed Point Theory and Applications, 189684:1-13.

[99] Berinde, V., (2003). "On The Approximation of Fixed Points of Weak Contractive Mappings", Carpathian J. Math, 19: 7-22.

[100] Ostrowski, A., (1967). "The Round of Stability of Iterations", ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 47: 77-81.

[101] Rhoades, B., (1990). "Fixed Point Theorems and Stability Results For Fixed Point Iteration Procedures", Indian J. Pure Appl. Math, 21: 1-9.

[102] Imoru, C.O. ve Olatinwo, M.O., (2003). "On The Stability of Picard and Mann Iteration Processes", Carpathian J. Math, 19: 155-160.

[103] Olatinwo, M., Owojori, O. ve Imoru, C., (2006). "On Some Stability Results For Fixed Point Iteration Procedure", Journal of Mathematics and Statistics, 2: 339-342.

[104] Olatinwo, M., Owojori, O. ve Imoru, C., (2006). "Some Stability Results On Krasnolslseskij and Ishikawa Fixed Point Iteration Procedures", Journal of Mathematics and Statistics, 2: 360-362.

[105] Chifu, C. ve Petruşel, G., (2007). "Existence and Data Dependence of Fixed Points And Strict Fixed Points For Contractive-Type Multivalued Operators", Fixed Point Theory and Applications, 7:1-7.

[106] Espínola, R. ve Petruşel, A., (2005). "Existence and Data Dependence of Fixed Points For Multivalued Operators On Gauge Spaces", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 309: 420-432.

[107] Markin, J., (1973). "Continuous Dependence of Fixed Point Sets", Proceedings of the American Mathematical Society, 38: 545-547.

[108] Rus, I.A. ve Muresan, S., (1998). "Data Dependence of The Fixed Points Set of Weakly Picard Operators", Studia Univ. Babes-Bolyai Mathematica, 43: 79-83.

[109] Rus, I.A. Petruşel, A. ve Sîntămărian, A., (2003). "Data Dependence of The Fixed Point Set of Some Multivalued Weakly Picard Operators", Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications, 52: 1947-1959.

[110] Chugh, R. Kumar, S. ve Jagjeet, J., (2013). "Data Dependence of Some New Iterative Schemes for Quasi-Contractive Operators", International Journal of Computer Applications, 73: 12-18.

[111] Chugh, R. ve Kumar, V., (2012). "Data Dependence of Noor and SP Iterative Schemes When Dealing With Quasi-Contractive Operators", International Journal of Computer Applications, 40: 41-46.

[112] Karakaya, V. Gürsoy, F. Doğan, K. ve Ertürk, M., (2013). "Data Dependence Results for Multistep and CR Iterative Schemes In The Class of Contractive-Like Operators", Abstract and Applied Analysis, 381980:1-13.

[113] Karakaya, V., Gürsoy, F. ve Ertürk, M., (2016). "Some Convergence and Data Dependence Results For Various Fixed Point Iterative Methods ", Kuwait J. Sci., 43:112-128.

[114] Khan, A. R., Gürsoy, F. ve Kumar, V., (2016)."Stability and Data Dependence Results For The Jungck–Khan İterative Scheme", Turk. J. Math., 40: 631-640.

[115] Olatinwo, M., (2009). "Some Results On The Continuous Dependence of The Fixed Points In Normed Linear Space", Fixed Point Theory, 10: 151-157.

[116] Olatinwo, M.O., (2010). "On The Continuous Dependence of The Fixed Points for $(\varphi, \psi)-$ Contractive-Type Operators", Kragujevac Journal of Mathematics, 34: 91-102.

[117] Soltuz, S.M., (2001). "Data Dependence For Mann Iteration", Octogon Mathematical Magazine, 9: 825-828.

[118] Rhoades, B. ve Soltuz, S.M., (2004). "The Equivalence Between Mann–Ishikawa Iterations and Multistep Iteration", Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 58: 219-228.

[119] Rhoades, B. ve Şoltuz, Ş.M., (2004). "The Equivalence Between The Convergences of Ishikawa and Mann Iterations For an Asymptotically Nonexpansive In The Intermediate Sense and Strongly Successively Pseudocontractive Maps", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 289: 266-278.

[120] Rhoades, B., (2004). "The Equivalence of Mann Iteration and Ishikawa Iteration For A Lipschitzian $\psi-$Uniformly Pseudocontractive and $\psi-$Uniformly Accretive Maps", Tamkang Journal of Mathematics, 35: 235-246.

[121] Rhoades, B. ve Soltuz, S., (2004). "The Equivalence of Mann and Ishikawa Iteration Dealing With Strongly Pseudocontractive or Strongly Accretive Maps", Panamer. Math. J, 14: 51-59.

[122] Rhoades, B. ve Soltuz, S.M., (2003). "On The Equivalence of Mann and Ishikawa Iteration Methods", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 23: 451-459.

[123] Rhoades, B. ve Soltuz, S.M., (2003). "The Equivalence of Mann Iteration and Ishikawa Iteration For Non-Lipschitzian Operators", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 23: 2645-2651.

[124] Rhoades, B. ve Şoltuz, Ş.M., (2003). "The Equivalence Between The Convergences of Ishikawa and Mann Iterations For an Asymptotically Pseudocontractive Map", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 283: 681-688.

[125] Özdemir, M. ve Akbulut, S., (2006). "On The Equivalence of Some Fixed Point Iterations", Kyungpook Math Journal, 46: 211-217.

[126] Karakaya, V., Doğan, K., Gürsoy, F. ve Ertürk, M., (2013). "Fixed Point of a New Three Step Iteration Algorithm Under Contractive Like Operators Over Normed Spaces", Abstract and Applied Analysis, 1:1-9.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:Muhammed Abdussamed MALDAR
Doğum Tarihi ve Yeri	:17/10/1984- İvrindi
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	:mmaldar@aksaray.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Doktora	Matematik Mühendisliği	Yıldız Teknik Üniversitesi	2016
Y. Lisans	Matematik	Sakarya Üniversitesi	2010
Lisans	Matematik	Sakarya Üniversitesi	2008
Lise	Fen	Edremit Lisesi	2003

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	**Firma/Kurum**	**Görevi**
2009-	Aksaray Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Bildiri

1. Maldar, M. A. ve Karakaya, V., (2015). “On Multistep Iteration Method for Conractive Condition of Integral Type in Banach Spaces”, IECMSA 2015, 4th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, 31 August- 03 September 2015, Athens, Greece.
2. Maldar, M. A. ve Karakaya, V., (2016). “Fixed Point Theorems for Integral Type Mappings in Banach Space”, ICAA 2016, International Conference on Analysis and Its Applications, 12-15 July 2016, Kırşehir, Turkey.