T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ASAL İDEALLER VE ASAL ALT MODÜLLER

NESLİHAN AYŞEN ÖZKİRİŞCİ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. KÜRŞAT HAKAN ORAL

EŞ DANIŞMAN
PROF. DR. ÜNSAL TEKİR

İSTANBUL, 2014

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ASAL İDEALLER VE ASAL ALT MODÜLLER

Neslihan Ayşen ÖZKİRİŞCİ tarafından hazırlanan tez çalışması 16.09.2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL

Yıldız Teknik Üniversitesi

Eş Danışman

Prof. Dr. Ünsal TEKİR

Marmara Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. İrfan ŞİAP

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Fethi ÇALLIALP

Beykent Üniversitesi

Prof. Dr. Ahmet Göksel AĞARGÜN

Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Esra ŞENGELEN SEVİM

Bilgi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Gül KARADENİZ GÖZERİ

İstanbul Üniversitesi

ÖNSÖZ

Akademik hayatım boyunca hiçbir desteğini esirgemeden sabırla beni yetiştiren, bu tez çalışması başta olmak üzere akademik hayatımda kazandığım tüm birikimleri emeklerine borçlu olduğum ve birçok manevi güzelliği elde etmeme vesile olan değerli hocam Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL'a, yardımları, desteği ve şefkatiyle beni yalnız bırakmayan, tüm çalışmalarımda arkamda olan değerli hocam Prof. Dr. Ünsal TEKİR'e, güleryüzü ve cana yakınlığıyla manevi destek olan değerli hocam Prof. Dr. A. Göksel AĞARGÜN'e çok teşekkür ederim.

Hayattaki güzellikleri görmeme vesile olup hayatımın her basamağında arkamda olan ve arkadaşlıktan öte kardeşlik sevgisini hissettiren Rabia Nagehan ÜREGEN'e, tez çalışmamda ve her türlü sıkıntımda sabırla bana destek olan, hayatıma ve dostluk kelimesine anlam kazandıran Elif Segah ÖZTAŞ ve Ayfer KILIÇARSLAN'a, kısa zamanda kendime çok yakın hissettiğim, fikirleriyle beni aydınlatan ve her türlü desteğiyle her daim yanımda olan sevgili arkadaşım Zehra BİLGİN'e, güleryüzü ve sıcacık kalbiyle ablalık şefkatini benden esirgemeyen ve beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan Yrd. Doç. Dr. Elif DEMİR'e, uzakta da olsa çok yakınımda hissettiğim manevi destekçim Nurcan KILIÇ'a çok teşekkür ederim. Özellikle, hayatımın her anında varlıklarıyla bana destek olan ve güç veren canımdan öte aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım sırasında beni maddi açıdan destekleyen TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı'na çok teşekkür ederim.

Eylül, 2014

N. Ayşen ÖZKİRİŞCİ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{Z}$	Tamsayılar halkası
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar halkası
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar halkası
$Spec(R)$	R halkasının asal ideallerinin kümesi
$\sqrt{I}$	I idealinin radikali
$V(I)$	I idealinin varyetesi
$Nil(R)$	R halkasının nilradikali
$Min(I)$	I idealinin minimal asal ideallerinin kümesi
$Kboy(R)$	R halkasının (Krull) boyutu
$MaxSpec(R)$	R halkasının maksimal ideallerinin kümesi
$ht(P)$	P asal idealinin yüksekliği
$L(R)$	R halkasının ideallerinin latisi
$Çek(f)$	f homomorfizmasının çekirdeği
$ann(M)$	M modülünün sıfırlayıcısı
$Spec(M)$	M modülünün asal alt modüllerinin kümesi
$\mathrm{M\text{-}rad}(N)$	N alt modülünün radikali
$Nil(M)$	M modülünün nilpotent elemanlarının kümesi
$Kboy(M)$	M modülünün (Krull) boyutu

ŞEKİL LİSTESİ

ÖZET

ASAL İDEALLER VE ASAL ALT MODÜLLER

Neslihan Ayşen ÖZKİRİŞCİ

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL
Eş Danışman: Prof. Dr. Ünsal TEKİR

Asal idealler Değişmeli Cebir'de önemli rol oynamaktadır. Asal ideallerin bilinen en önemli özelliklerinden biri şu şekildedir: Bir halkanın idealler ailesinin sonlu bir kesişimi bir asal ideal tarafından kapsanıyorsa bu kesişimdeki en az bir ideal de bu asal ideal tarafından kapsanır. Literatür incelendiğinde bu sonlu kesişimin sonsuz olduğu durumların ele alınmış olduğu ve "kuvvetli 0-boyutlu halkalar" olarak adlandırılan, her asal ideali bu özelliğe sahip halkalar üzerinde çalışmaların yapıldığı görülmüştür. Bu halkalar aynı zamanda literatürdeki kompakt paketlenmiş halka kavramının dual ifadesi olmaktadır. Asal ideallerin birleşimi incelendiğinde, literatürde kompakt paketlenmiş halkaların bir genellemesi olan aralarında asal paketlenmiş halka kavramıyla karşılaşmaktayız. Bu çalışmaların verdiği motivasyonla bu tezin ilk bölümünde kuvvetli 0-boyutlu halkaların bir genellemesi şu tanımla yapılmıştır: Bir halkanın asal ideali, herhangi bir idealler ailesindeki her ideal ile aralarında asal iken bu ailedeki ideallerin herhangi bir kesişimini içermiyorsa bu asal ideal, aralarında asal yapılandırılmış ideal olarak adlandırılır. Her asal ideali aralarında asal ideal olan halkalara da bir aralarında asal yapılandırılmış halka denir. Bu çalışmada, tanımladığımız bu halkanın özellikleri araştırılmış ve bu halkaların yerelleştirmesi üzerinde durulmuştur. Ayrıca kuvvetli 0-boyutlu halkalar ile arasındaki geçişler incelenmiş, hangi koşul altında aralarında asal yapılandırılmış bir halkanın kuvvetli 0-boyutlu olduğu araştırılmıştır. Buna ek olarak Artinian halkalar ve *-koşulunu sağlayan halkalarla olan bağlantıları incelenmiştir. Aralarında asal yapılandırılmış halkaların aynı zamanda literatürde h-yerel bölge olarak bilinen halkaların da genel bir hali olduğu gösterilmiş ve bir h-yerel bölgenin aralarında asal olması için hangi koşula sahip olması gerektiği üzerinde durulmuştur.

Bir halkanın idealler ailesinin sonlu bir kesişimi bir asal ideal tarafından kapsanırken bu kesişimdeki en az bir ideal de bu asal ideal tarafından kapsanır, ancak bu özellik bir modülün asal alt modülü için her zaman geçerli değildir. Yani bir asal alt modül, alt modüllerin sonlu bir kesişimini kapsıyorken kesişimdeki alt modüllerden hiçbirini kapsamayabilir. Fakat bu durum, halkalarda olduğu gibi çarpımsal modüller için de geçerlidir. Çarpımsal modüllerde bu kesişimin sonsuz olduğu durumu incelemek amacıyla tanımladığımız kuvvetli 0-boyutlu modüller, aynı zamanda kuvvetli 0-boyutlu halka kavramının modül teoriye aktarımı ve bir genellemesi olmuştur. Kuvvetli 0-boyutlu modül tanımı ise şu şekilde yapılmıştır: Çarpımsal bir modülün bir asal alt modülü, alt modüllerin herhangi bir kesişimini içeriyorken bu kesişimdeki en az bir alt modülü de içeriyorsa bu asal alt modüle kuvvetli asal alt modül ve her asal alt modülü kuvvetli asal olan çarpımsal modüller de kuvvetli 0-boyutlu modül denir. Tezin diğer bölümünde ise, tanımlanmış olan bu kavramın özellikleri araştırılmış, von Neumann regüler modül ve Q-modüller ile aralarındaki bağlantılar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kuvvetli 0-boyutlu halka, aralarında asal yapılandırılmış halka, h-yerel bölge, kuvvetli 0-boyutlu modül, von Neumann regüler modül, Q-modül

ABSTRACT

PRIME IDEALS AND PRIME SUBMODULES

Neslihan Ayşen ÖZKİRİŞCİ

Department of Mathematics

PhD. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Kürşat Hakan ORAL

Co-Adviser: Prof. Dr. Ünsal TEKİR

Prime ideals have an important role in commutative algebra. One of the well known properties of prime ideals is the following: If a prime ideal contains a finite intersection of a family of ideals then some of those ideals are contained in the prime ideal. Reviewing the literature, we have seen that authors discuss this property in the case of the infinite intersection in detail and that rings in which every prime ideal has this property in the infinite case are called strongly 0-dimensional rings. These rings are also the dual notion of compactly packed rings. When we examined the studies on the infinite union of prime ideals, we have seen the concept of coprimely packed rings which are a generalization of compactly packed rings. With the aid of the motivation gained by these studies, we define coprimely structured rings as follows: A prime ideal of a ring is said to be a coprimely structured ideal if, whenever it is coprime to each element of a family of ideals of the ring, it does not contain any intersection of ideals in this family. We say that a ring is coprimely structured if every prime ideal of it is coprimely structured. In this study, we work on some properties of coprimely structured rings and we examine localization of these rings. Furthermore, we investigate coprimely structured rings and give some relations between coprimely structured rings and other rings such as Artinian rings, strongly 0-dimensional rings, rings satisfying *-property. Moreover, we show that coprimely structured rings are a general expression of h-local domains and we examine under which conditions any h-local domain is a coprimely structured ring.

As it is mentioned above; if a prime ideal contains a finite intersection of ideals then some of the ideals are contained in the prime ideal. This property does not valid for submodules in general. That is, if a prime submodule contains a finite intersection of submodules, it could be the case that none of the ideals is contained in the prime submodule. However, as in the case of commutative rings, multiplication modules satisfy this property. For the purpose of investigating this property with infinite intersection in multiplication modules, we define strongly 0-dimensional modules. This notion is a version of strongly 0-dimensional rings in module theory. Also, it is an extension of strongly 0-dimensional rings and it is defined as follows: A prime submodule of a multiplication module is called a strongly prime submodule if, whenever the prime submodule contains any intersection of submodules of the module, one of the submodules is contained in the prime submodule. A multiplication module is said to be a strongly 0-dimensional module if any prime submodule of it is a strongly prime submodule. We investigate properties of strongly 0-dimensional modules and give some relations between von Neumann regular modules, Q-modules and strongly 0-dimensional modules.

Keywords: Strongly 0-dimensional ring, coprimely structured ring, h-local domain, strongly 0-dimensional module, von Neumann regular module, Q-module

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Değişmeli Cebir'de asal ideal kavramı önemli bir yer tutmaktadır. Asal idealler yardımıyla halkaların birtakım karakterizasyonları yapılabilmektedir. Asal idealler ile ilgili en önemli özelliklerden biri ise şu teorem ile ifade edilmektedirr: R değişmeli bir halka olmak üzere, R halkasının bir I ideali, P_i $(i=1,..,n)$ asal ideallerinin sonlu birleşiminde kapsanıyorsa en az bir P_i tarafından kapsanır. Bu teoremin bir ispatı N.H. McCoy'un "Rings and Ideals" isimli kitabında mevcuttur [1]. Literatürde Asaldan Kaçınma Teoremi (Prime Avoidance Theorem) olarak bilinen bu teoremin başka kaynaklarda farklı ispatları da bulunmaktadır. Sonlu sayıda idealin birleşimi için ispatlanan bu teoremi, C.M. Reis ve T.M. Viswanathan asal idealler ailesinin herhangi bir birleşimine genelleştirmişlerdir. Kompakt paketlenmiş halka (compactly packed ring) olarak adlandırılan bu halkalar üzerine incelemeler yaparak bu halkaların özellikleri üzerine önemli sonuçlar elde etmişlerdir [2]. Örneğin, Noetherian bir R halkasının kompakt paketlenmiş olması için gerek ve yeter şartın halkanın her asal idealinin bir temel idealin radikali olması gerektiğini ispatlamışlardır. Bu teorem yardımıyla bir halkanın kompakt paketlenmiş olup olmadığını göstermek daha kolay olmaktadır. W.W. Smith ise 1971 tarihli "A Covering Condition for Prime Ideals" isimli makalesinde Noetherian olma koşulu olmadan da bu teoremin geçerli olduğunu göstermiştir [3]. Sonrasında J.V. Pakala ve T.S. Shores 1981 tarihli "On Compactly Packed Rings" isimli yayınlarında kompakt paketlenmiş halkalarda Noetherian olma koşulunun, halkanın maksimal idealler ile karakterize edilmesinde gerekli olduğunu göstermişlerdir [4]. 1999 yılında C.J. Hwang and G.W. Chang, kompakt paketlenmiş halkalar için bazı topolojik denklikler vermişlerdir [5].

Kompakt paketlenmiş halkaların genelleştirilmesi olarak tanımlanan aralarında asal paketlenmiş halkalar (coprimely packed rings) ile ilgili birçok çalışma bulunmaktadır [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12]. Bu çalışmalarda aralarında asal paketlenmiş halkalar karakterize edilmiş olup kompakt paketlenmiş halkalar ile aralarındaki geçişler ve ilişkiler incelenmiştir. Tanımı ise şu şekildedir: R bir halka ve I da R halkasının bir ideali olmak üzere I ideali, R nin asal ideallerinin bir ailesinin her elemanı ile arasında asal iken bu ailedeki asal ideallerin birleşiminde kapsanmıyorsa I ideali, R halkasının asal idealleri ile aralarında asal paketlenmiş ideal olarak adlandırılmıştır. Her ideali aralarında asal paketlenmiş olan halkalara aralarında asal paketlenmiş halka adı verilmiştir [6].

Kuvvetli 0-boyutlu halkalar üzerindeki ilk çalışma ise R. Gilmer'in 1997 yılında yayınlamış olduğu "Intersection Condition for Prime Ideals" isimli makalesinde yer almaktadır [13]. Kompakt paketlenmiş halkaların duali olan bu halkalar üzerinde incelemeler yapılmıştır. 2009 yılında da C.W. Chang and C.J. Hwang, "Covering and Intersection Conditions for Prime Ideals" isimli makalelerinde Gilmer'in vermiş olduğu bazı tanımlara dayanarak bu bu tanımlara sahip halkalar üzerinde araştırma yapmışlardır [14]. 2011 yılında ise Jayaram, Oral ve Tekir tarafından yayınlanan "Strongly 0-dimensional Rings" isimli makalede sıfır boyutlu halkaların da bir genelleştirmesi olan kuvvetli 0-boyutlu halkalar karakterize edilmiş olup bu halkalar için çeşitli denklikler kurulmuştur [15].

Yukarıda bahsedilen aralarında asal paketlenmiş halka kavramının modül teorideki karşılığı ise C.P. Lu [16], F. Çallıalp ve Ü. Tekir [17], Ü. Tekir [18] tarafından ele alınmıştır. C.P. Lu'nun 1997 tarihli makalesinde, halkalar için ispatlanmış olan Asaldan Kaçınma Teoreminin değişmeli halkalar üzerindeki modüllere genelleştirmesi yapılmıştır [16]. F. Çallıalp ve Ü. Tekir ise 2004 yılındaki çalışmalarında, değişmeli bir halka üzerindeki modülün alt modüllerinin sonlu ve sonsuz birleşimleri incelenmiştir ve kompakt paketlenmiş modülün tanımı verilmiştir [17]. Tekir'in 2006 yılındaki çalışmasında da Asaldan Kaçınma Teoremi hem modüller hem de çarpımsal modüller için gösterildikten sonra kompakt paketlenmiş ve aralarında asal paketlenmiş halka tanımı çarpımsal modüllere genişletilmiş ve denklikleri incelenmiştir [18].

1.2 Tezin Amacı

Bu tezin amacı, kuvvetli 0-boyutlu halkaları literatürdeki aralarında asal paketlenmiş halkaların duali ve h-yerel halkaların da bir genellemesi olan, aralarında asal yapılandırılmış halkalar olarak tanımlayacağımız halkalara genelleştirmektir. Dahası, tanımlayacağımız bu kavram üzerinde araştırma yapmak ve bu halkaları karakterize etmektir. Tezin bir diğer bölümünde de, kuvvetli 0-boyutlu halkaların modüllere aktarımını yapmak yani kuvvetli 0-boyutlu modülleri tanımlamak ve özelliklerini araştırmaktır.

1.3 Hipotez

Bu çalışmanın ilk bölümünde, değişmeli ve birimli bir halkanın asal idealleri yardımıyla kuvvetli 0-boyutlu bir halkanın daha genel bir yapısı oluşturulacak ve bu yapı, aralarında asal yapılandırılmış halka şeklinde adlandırılacaktır. Her kuvvetli 0-boyutlu halka, aralarında asal yapılandırılmış olmasına rağmen, ifadenin tersinin hangi koşul altında doğru olduğu araştırılacaktır. Ayrıca aralarında asal yapılandırılmış halkaların Artinian halkalar, sıfır boyutlu halkalar, *-koşulunu sağlayan halkalar ve h-yerel halkalar ile bağlantıları incelenecektir. Buna ek olarak bu halkaların yerelleştirmesi üzerinde durulacaktır.

Çalışmanın diğer bölümünde ise kuvvetli 0-boyutlu halka tanımında yer alan ideal ve asal ideal yapısı yerine, alt modül ve asal alt modül kavramları kullanılarak bu tanım çarpımsal modüller üzerinde yapılacaktır. Kuvvetli 0-boyutlu modül olarak adlandırılacak olan bu kavramın modül yapısı incelenecek ve tanımlayacağımız bu modülün Artinian modüller, von Neumann regüler modüller ve Q-modüller gibi kavramlar ile arasındaki bağlantıları üzerinde durulacaktır.

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

Tez boyunca R halkası değişmeli ve birimli bir halka olarak alınacaktır.

2.1 Asal İdealler ve Bazı Özellikleri

P, R halkasının bir has ideali olmak üzere her $a,b \in R$ için $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa P idealine bir asal ideal denir. R halkasının tüm asal ideallerinin kümesine halkanın spektrumu denir ve $Spec(R)$ ile gösterilir.

Değişmeli halkalar teorisinde önemli bir yer tutan asal idealler yardımıyla halkaların birtakım özellikleri karakterize edilebilmektedir. Bu bölümde asal ideallerin sıkça kullanılan özellikleri ve bu ideallerle ilgili tezde yararlanacağımız bazı tanımlar verilecektir.

Önerme 2.1 R bir halka olsun. R nin bir P ideali için aşağıdaki ifadeler denktir [19].

i. P asal idealdir.

ii. R halkasının I ve J idealleri için $IJ \subseteq P$ ise $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ dir.

iii. $IJ \subseteq P$ olacak şekilde $I \supset P$ ve $J \supset P$ idealleri bulunamaz.

Önerme 2.2 R bir halka olsun. R nin bir P idealinin asal olması için gerek ve yeter koşul R/P bölüm halkasının bir tamlık bölgesi olmasıdır [19].

Önerme 2.3 R bir halka ve P de R halkasının bir asal ideali ise her $n \in \mathbb{N}$ için $\sqrt{P^n} = P$ dir [19].

Önerme 2.4 R bir halka; P, R halkasının bir asal ideali ve $I_1, I_2, ..., I_n$ de R halkasının idealleri olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir [19].

i. Bir $j=1,2,...,n$ için $P \supseteq I_j$,

ii. $P \supseteq \bigcap_{k=1}^{n} I_k$,

iii. $P \supseteq \prod_{k=1}^{n} I_k$.

İspat: ***i*** $\Rightarrow$ ***ii*** $\Rightarrow$ ***iii*** gerektirmeleri açıktır. Bu durumda *iii* $\Rightarrow$ *i* gerektirmesinin gösterilmesi yeterlidir.

iii $\Rightarrow$ ***i:*** Kabul edelim ki $P \supseteq \prod_{k=1}^{n} I_k$ ve her $j \in \{1,2,...,n\}$ için $I_j \nsubseteq P$ olsun. Böylece her $j \in \{1,2,...,n\}$ için bir $a_j \in I_j \setminus P$ vardır. Buradan $a_1 a_2 ... a_n \in \prod_{k=1}^{n} I_k$ ve P asal olduğundan $a_1 a_2 ... a_n \notin P$ elde edilir. Bu ise $P \supseteq \prod_{k=1}^{n} I_k$ olması ile çelişir.

Sonuç 2.5 R bir halka, P, R halkasının bir asal ideali ve $I_1, I_2, ..., I_n$ de R nin idealleri olmak üzere, $P = \bigcap_{k=1}^{n} I_k$ ise en az bir $j \in \{1,2,...,n\}$ için $P = I_j$ dir [19].

Tanım 2.6 Bir R halkasının I idealini kapsayan tüm asal ideallerinin kümesine I idealinin varyetesi denir ve $V(I) = \{P \in Spec(R) : I \subseteq P\}$ ile gösterilir [19].

Bu tanımdan yararlanarak R halkasının bir I idealinin radikali, asal idealler yardımıyla aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Önerme 2.7 R bir halka ve I da R halkasının bir ideali olsun. I idealinin radikali, I idealini kapsayan tüm asal ideallerin kesişimidir; yani $\sqrt{I} = \bigcap_{P \in V(I)} P$ dir [19].

Sonuç 2.8 R bir halka olmak üzere, R nin nil radikali, $\sqrt{0} = Nil(R) = \bigcap_{P \in Spec(R)} P$ şeklindedir [19].

Tanım 2.9 Bir halkanın nilradikali sıfır ise bu halkaya indirgenmiş halka denir [19].

Not: Halkaların kartezyen çarpımının asal ideallerinin karakterizasyonu ise aşağıdaki şekildedir:

$R_1, R_2, ..., R_n$ halkalarının kartezyen çarpımı $R = R_1 \times R_2 \times ... \times R_n$ olsun. I , R halkasının bir ideali ise $I = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$ olacak şekilde her $i \in \{1, 2, ..., n\}$ için R_i halkasında bir I_i ideali vardır. Diğer yandan, her $i \in \{1, 2, ..., n\}$ için I_i , R_i halkasının bir ideali ise $I = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$ de R halkasının bir idealidir [19]. Bu durumda, $\prod_{i=1}^{n} R_i \Big/ \prod_{i=1}^{n} I_i \cong \prod_{i=1}^{n} (R_i / I_i)$ olduğundan R halkasının asal idealleri; $i \in \{1, 2, ..., n\}$ için P_i , R_i nin asal ideali olmak üzere $R_1 \times ... \times R_{i-1} \times P_i \times R_{i+1} \times ... \times R_n$ şeklindedir.

Tanım 2.10 I , R halkasının bir ideali olsun. I idealini kapsayan P asal ideali için $I \subseteq P' \subseteq P$ olacak şekilde hiçbir P' asal ideali yoksa P idealine I idealinin bir minimal asal ideali denir. I idealinin minimal asal ideallerinin kümesi $Min(I)$ ile gösterilir [19].

Örnek 2.11 P bir asal ideal ise $Min(P) = \{P\}$ dir.

Örnek 2.12 $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasında sıfırdan farklı bir (n) temel idealinin minimal asal idealleri, n tamsayısını bölen p asal tamsayılarının ürettikleri ideallerdir. Dolayısıyla $Min((n)) = \{(p) : p \in \mathbb{Z} \text{ ve } p | n\}$ dir.

Önerme 2.13 Aşikar olmayan bir R halkasının her has I idealinin en az bir minimal asal ideali vardır [19].

Sonuç 2.14 R halkasının bir I ideali için $\sqrt{I} = \bigcap_{P \in V(I)} P = \bigcap_{P \in Min(I)} P$ dır [19].

Tanım 2.15 Bir R halkasının boyutu (Krull boyutu)

$$\sup\{n \in \mathbb{Z}^+ : R \text{ nin asal ideallerinin } n \text{ uzunluğundaki zinciri}\}$$

şeklinde tanımlanır ve $Kboy(R)$ ile gösterilir [19].

Örnek 2.16 K bir cisim ise $Kboy(K) = 0$ dır.

Örnek 2.17 Cisim olmayan her temel ideal bölgesinin boyutu 1 dir. Dolayısıyla $Kboy(\mathbb{Z}) = 1$ ve K bir cisim olmak üzere $Kboy(K[x]) = 1$ dir.

Tanım 2.18 R bir halka, M de R halkasının bir has ideali olsun. R nin M idealini kapsayan kendisinden başka bir has ideali yoksa M idealine bir maksimal ideal denir. R halkasının tüm maksimal ideallerinin kümesi $MaxSpec(R)$ ile gösterilir [19].

Önerme 2.19 R bir halka olsun. R nin bir M ideali maksimaldir ancak ve ancak R/M bölüm halkası bir cisimdir [19].

Sonuç 2.20 Her maksimal ideal asaldır [19].

Önerme 2.21 Aşikar olmayan her R halkasının en az bir maksimal ideali vardır [19].

Sonuç 2.22 I bir R halkasının has ideali olmak üzere I yı kapsayan bir maksimal ideal vardır [19].

Tanım 2.23 R halkasının tam bir tane maksimal ideali varsa R halkasına yerel (lokal) halka denir [19].

Örnek 2.24 $\mathbb{Z}$ halkasının bir (p) asal idealindeki yerelleştirmesi olan $\mathbb{Z}_{(p)}$ bir yerel halkadır ve tek maksimal ideali $p\mathbb{Z}_{(p)}$ dir.

Tanım 2.25 R halkasının sonlu tane maksimal ideali varsa R halkasına yarı yerel (yarı lokal) halka denir [19].

Örnek 2.26 $i=1,...,n$ olmak üzere K_i ler birer cisim olsun. Bu durumda $\oplus_{i=1}^{n} K_i$ bir yarı yerel halkadır.

Tanım 2.27 R bir halka, P de R halkasının bir asal ideali olsun. P idealinin kapsadığı asal idealler zincirinin supremumuna P nin yüksekliği denir ve $ht(P)$ ile gösterilir [19].

Örnek 2.28 $Kboy(\mathbb{Z})=1$ ve (0) ideali $\mathbb{Z}$ halkasında asal olduğundan $MaxSpec(\mathbb{Z})$ kümesindeki her elemanın yüksekliği 1 dir.

2.2 Asal İdeallerin Birleşimi

R halkasının bir I ideali, P_i $(i=1,..,n)$ asal ideallerinin sonlu birleşiminde kapsanıyorsa en az bir P_i ideali tarafından kapsanır. Bu teoremin ispatlarından biri McCoy'un "Rings and Ideals" isimli kitabında mevcuttur [1]. Ayrıca Asaldan Kaçınma

Teoremi (Prime Avoidance Theorem) olarak bilinen bu teoremin, Kaplansky'ın "Commutative Rings" isimli kitabında da farklı bir ispatına ulaşılabilir [21].

2.2.1 Asaldan Kaçınma Teoremi

R bir halka ve I bir ideali olsun. $I_1, I_2, ..., I_n$ de R halkasının en az $n-2$ tanesi asal olan idealleri ve $I \subseteq I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n$ ise bir $1 \leq k \leq n$ için $I \subseteq I_k$ dır.

İspat: n üzerinde tümevarım uygulayalım. $n=2$ olmak üzere $I \not\subseteq I_1$ ve $I \not\subseteq I_2$ kabul edelim. Böylece $j=1,2$ için bir $a_j \in I \setminus I_j$ vardır. O halde, hipotezden $a_1 \in I_2$ ve $a_2 \in I_1$ dir. Buradan $a_1 + a_2 \in I \subseteq I_1 \cup I_2$ olur ve böylece $a_1 + a_2 \in I_1$ veya $a_1 + a_2 \in I_2$ elde edilir. Sonuç olarak $a_1 = (a_1 + a_2) - a_2 \in I_1$ olduğu görülür ve bu bir çelişkidir. Böylece $I \subseteq I_1$ veya $I \subseteq I_2$ bulunur. Şimdi, $k \geq 2$ olmak üzere $n=k$ için hipotez doğru olsun ve $n=k+1$ için doğru olduğunu ispatlayalım. $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{k+1} I_i$ kabul edelim ve I_i ideallerinin en az $n-2$ tanesi asal ideal olsun. I_{k+1} idealinin asal olduğunu varsayalım. Her $j=1,..,k+1$ için $I \not\subseteq \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} I_i$ kabul edelim. Öyleyse her $j=1,..,k+1$ için $a_j \in I \setminus \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} I_i$ dir. Böylece hipotezden her $j=1,..,k+1$ için $a_j \in I_j$ elde edilir. Ayrıca I_{k+1} asal olduğundan $a_1...a_k \notin I_{k+1}$ dir. Buradan $a_1...a_k \in \bigcap_{i=1}^{k} I_i \setminus I_{k+1}$ ve $a_1...a_k \in I_{k+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} I_i$ elde edilir. Şimdi, $b = a_1...a_k + a_{k+1}$ elemanını göz önüne alalım. Burada $b \notin I_{k+1}$ dir. Aksi halde $a_1 ... a_k = b - a_{k+1} \in I_{k+1}$ çelişkisi elde edilir. Ayrıca $1 \leq j \leq k$ için $b \notin I_j$ dir. Aksi halde $a_{k+1} = b - a_1...a_k \in I_j$ çelişkisi elde edilir. Fakat $b \in I$ olduğundan $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{k+1} I_i$ kabulümüz ile çelişir. Böylece $1 \leq j \leq k+1$ olmak üzere en az bir j için $I \subseteq \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} I_i$ olduğu görülür. Tümevarım hipotezini kullanarak $1 \leq i \leq k+1$ olmak üzere bir i için $I \subseteq I_i$ bulunur.

2.2.2 Asal ideallerin Birleşimi ile İlgili Yapılan Bazı Çalışmalar

Asaldan kaçınma teoreminin genellemesi olarak tanımlanan kompakt paketlenmiş halkalar, “A Compactness Property for Prime Ideals in Noetherian Rings” isimli çalışmada ilk kez tanımlanmış olup, öncelikle Noetherian halkalar için karakterize edilmiştir [2].

Tanım 2.29 R bir halka ve S herhangi bir indis kümesi olsun. $\alpha \in S$ olmak üzere R nin P_α asal idealleri ve bir I ideali için, $I \subseteq \bigcup_{\alpha \in S} P_\alpha$ iken bazı $\alpha \in S$ indisleri için $I \subseteq P_\alpha$ oluyorsa R ye asal idealler ile kompakt paketlenmiş halka denir [2].

Reis ve Wisvanathan, kompakt paketlenmiş halka tanımının, daha zayıf olan aşağıdaki koşula denk olduğunu ifade etmiştir [2]:

(*) R bir halka ve S herhangi bir indis kümesi olsun. $\alpha \in S$ ve P_α idealleri R nin asal idealleri olmak üzere, P asal ise $P \subseteq \bigcup_{\alpha \in S} P_\alpha$ iken bazı $\alpha \in S$ için $P \subseteq P_\alpha$ dır.

Bu çalışmadaki önemli teorem ve sonuçlar şu şekildedir:

Teorem 2.30 Bir R Noetherian halkasının kompakt paketlenmiş olması için gerek ve yeter koşul R halkasının her asal idealinin R deki bir (r) temel idealinin radikali olmasıdır [2].

İspat: $(\Rightarrow)$ P, R halkasının bir asal ideali ve herhangi bir $r \in R$ için $P \neq \sqrt{(r)}$ olsun. Böylece eğer $x \in P$ ise $\sqrt{(x)} \neq P$ dir. $P_1, P_2, ..., P_k$ $(k \geq 1)$ idealleri (x) temel idealinin isolated asal bileşenleri (yani (x) idealine ilişkin asal idealler kümesinin minimal elemanları) olsun. Buradan $\sqrt{(x)} = P_1 \cap P_2 \cap ... \cap P_k$ elde edilir [22, Teorem 10, sf. 213]. $x \in P$ olduğundan P_i ideallerinden biri P tarafından kapsanır, $P_1 \subseteq P$ olsun. Burada iki durum söz konusudur. $k = 1$ ise $\sqrt{(x)} \neq P$ olduğundan $P_1 \subset P$ dir. $k > 1$ ise $P \not\subset P_2$ dir. Eğer $P \not\subset P_2$ olmasaydı, $P_1 \subseteq P \subseteq P_2$ olup P_1 ve P_2 ideallerinin (x) in isolated asal bileşenleri olması ile çelişirdi. Dolayısıyla her iki durumda da $x \in Q_x$ ve $P \not\subset Q_x$ olmak üzere bir Q_x asal ideali vardır. Buradan $P \subseteq \bigcup_{x \in P} Q_x$ elde edilir. Fakat P

ideali hiçbir Q_x idealinde içerilmediğinden R kompakt paketlenmiş değildir. Bu da bize bir çelişki verir.

$(\Leftarrow)$ P, R halkasının bir asal ideali olmak üzere, hipotezden bazı $r \in R$ elemanları için $P = \sqrt{(r)}$ dir. R halkasının P_α asal idealleri için $P \subseteq \bigcup_{\alpha \in S} P_\alpha$ ise $r \in P \subseteq \bigcup_{\alpha \in S} P_\alpha$ dir. Böylece, bazı $\beta \in S$ için $r \in P_\beta$ elde edilir. Buradan, $P = \sqrt{(r)} \subseteq P_\beta$ olduğu görülür. Böylece R halkası (*) koşulunu sağlar, dolayısıyla kompakt paketlenmiştir.

Smith, 1971 tarihli “A Covering Conditions for Prime Ideals” isimli makalesinde (*) denkliğini şu şekilde açıklamıştır [3]:

R halkasının P_α asalları için $\bigcup_{\alpha \in S} P_\alpha$ kümesinin tümleyeni bir çarpımsal yarıgruptur. Bunun sonucu olarak, eğer I ideali $\bigcup_{\alpha \in S} P_\alpha$ kümesinde kapsanıyorsa $I \subseteq P \subseteq \bigcup_{\alpha \in S} P_\alpha$ olacak şekilde bir P asal ideali vardır. Dolayısıyla kompakt paketlenmiş halka tanımı ile (*) koşulu birbirine denktir.

Ayrıca Smith, Teorem 2.30’da verilen ifadenin Noetherian olma koşulu olmadan da sağlandığını aşağıdaki şekilde ispatlamıştır [3]:

P bir asal ideal olmak üzere bir temel idealin radikali olmasın. O halde P asal idealinin, P yi içermeyen asal ideallerin birleşiminde kapsandığını gösterelim. Her $r \in P$ için $P \neq \sqrt{(r)}$ ve $\sqrt{(r)}$ ideali R halkasının r elemanını kapsayan asal ideallerinin kesişimi olduğundan, $r \in P_r$ fakat $P \not\subset P_r$ olacak şekilde bir P_r asal ideali vardır. $P \subseteq \bigcup_{r \in P} P_r$ olduğu açıktır. Böylece, eğer R kompakt paketlenmiş halka ise (*) özelliğini sağlar. Dolayısıyla her asal ideal bir temel idealin radikali olmalıdır. Tersine, eğer $P \subseteq \bigcup_{\alpha \in S} P_\alpha$ ve bazı r elemanları için $P = \sqrt{(r)}$ ise $r \in \bigcup_{\alpha \in S} P_\alpha$ dir. Buradan bazı $\alpha \in S$ için $r \in P_\alpha$ dır ve böylece $P = \sqrt{(r)} \subseteq P_\alpha$ elde edilir. Bu ise R nin kompakt paketlenmiş olduğunu gösterir.

Önerme 2.31 R halkası her maksimal ideali bir temel idealin radikali olan Noetherian halka olsun. O halde $Kboy(R) \leq 1$ dir [2].

İspat: Noetherian bir R halkasındaki $Ra(\neq R)$ temel idealinin bir asalımsı ayrışımı mevcuttur [19, Sonuç 4.35]. Ayrıca bu idealin isolated asal bileşeninin (yani Ra idealine ilişkin asal idealler kümesinin minimal elemanının) yüksekliği en fazla 1 dir [22, Sonuç 2, sf. 239]. Böylece R halkasının birimselden farklı elemanları, yüksekliği en fazla 1 olan asal idealler tarafından örtülür. Özel olarak, P_α idealleri yüksekliği en fazla 1 olan asal idealler olmak üzere, R halkasının her M maksimal ideali, $\bigcup P_\alpha$ tarafından kapsanır. Buradan $M=\sqrt{(r)}\subseteq\bigcup P_\alpha$ ve böylece bir β için $r\in P_\beta$ elde edilir ki bu ise $M\subseteq P_\beta$ olduğunu gösterir. $ht(P_\beta)\leq 1$ olduğundan R halkasının her maksimal idealinin yüksekliği de en fazla 1 dir.

Sonuç 2.32 R Noetherian halkası kompakt paketlenmiş ise $Kboy(R)\leq 1$ dir [2].

İspat: R halkası kompakt paketlenmiş bir halka ise Teorem 2.30'dan her asal ideali bir temel idealin radikalidir. Her maksimal ideal bir asal ideal olduğundan Önerme 2.31'den $Kboy(R)\leq 1$ dir.

Yazarlar, Önerme 2.31 yardımıyla şu ifadeyi vermişlerdir: Bir R Noetherian halkası kompakt paketlenmiştir ancak ve ancak R nin her maksimal ideali ve bunun yanı sıra yüksekliği 0 olan her asal ideali bir temel idealin radikalidir [2, Not 1.4]. Bu ifadenin ispatı Pakala ve Shores tarafından yapılan "On Compactly Packed Rings" çalışmasında verilmiştir [4, Teorem 1]. Bir diğer deyişle Noetherianlık koşulunun, kompakt paketlenmiş halkanın maksimal idealler ile karakterize edilişinde gerekli olduğunu belirtmişlerdir.

Teorem 2.33 Noetherian bir R halkasının kompakt paketlenmiş halka olması için gerek ve yeter koşul R nin her maksimal idealinin bir temel idealin radikali olmasıdır [4].

Kompakt paketlenmiş halkaların daha genel bir yapısı olan aralarında asal paketlenmiş halka tanımı ilk kez "Coprimely Packed Rings" makalesinde verilmiştir [6]. R bir halka, I R halkasının bir ideali ve P_i $(i\in S)$ idealleri de R halkasının asal idealleri olmak üzere $I+P_i=R$ iken $I\not\subseteq\bigcup_{i\in S}P_i$ ise I idealine bir aralarında asal paketlenmiş ideal denir. Eğer R halkasının her ideali bir aralarında asal paketlenmiş ideal ise R halkasına bir aralarında asal paketlenmiş halka denir.

Verilen bu tanımın ardından aralarında asal paketlenmiş halkaların birtakım özellikleri incelenmiştir. Bu halkaların kompakt paketlenmiş halkaların daha genel bir yapısı olduğunu gösteren teroem aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.34 Her kompakt paketlenmiş halka bir aralarında asal paketlenmiş halkadır [6].

İspat: Bir R halkası kompakt paketlenmiş olsun ve kabul edelim ki aralarında asal paketlenmiş olmasın. Öyleyse R nin her P asal ideali için $I+P=R$ ve $I \subseteq \bigcup_{P \in Spec(R)} P$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir I ideali vardır. Böylece, R halkası kompakt paketlenmiş olduğundan bazı $P \in Spec(R)$ için $I \subseteq P$ elde edilir ve bu ise kabulümüzle çelişir.

Bu teoremin tersinin hangi koşul altında doğru olduğu da sıradaki teoremde gösterilmiştir:

Teorem 2.35 R halkası, Krull boyutu 1 olan bir tamlık bölgesi olsun. Bu durumda R halkasının kompakt paketlenmiş olması için gerek ve yeter koşul R nin aralarında asal paketlenmiş olmasıdır [6].

İspat: I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve $X \subseteq Spec(R)$ olsun. $I \subseteq \bigcup_{P \in X} P$ olduğunu kabul edelim. Kabulümüzü değiştirmeyeceğinden $0 \notin X$ olarak alabiliriz. R bir aralarında asal paketlenmiş halka olduğundan bazı $P \in Spec(R)$ için $I+P \neq R$ dir. Böylece, $I+P \subseteq M$ olacak şekilde R halkasının bir M maksimal ideali vardır. Fakat R halkası, Krull boyutu 1 olan bir tamlık bölgesi olduğundan $P=M$ elde edilir ve bu da $I \subseteq P$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla R bir kompakt paketlenmiş halkadır.

“A Note on Coverings of Prime Ideals” makalesinde Reis ve Viswanathan [2] tarafından verilen kompakt paketlenmiş halka tanımına denk olan (*) koşulu üzerinde durulmuştur [5].

Teorem 2.36 R, (*) koşulunu sağlayan bir halka ise sıfırdan farklı her I ideali için, I nın minimal asal ideallerinin sayısı sonludur [5].

İspat: R halkasının sıfırdan farklı bir I ideali için $R' = R/I$ ve $\{P_\alpha\}$ idealleri, I nin minimal asal idealleri olsun. Eğer $P_\alpha/I \subseteq \bigcup_{\beta\neq\alpha} P_\beta/I$ ise $P_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta\neq\alpha} P_\beta$ dır ve böylece bazı β lar için, $P_\alpha \subseteq P_\beta$ dır. P_β idealinin minimalliğinden $P_\alpha = P_\beta$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla her α için $P_\alpha/I \not\subset \bigcup_{\beta\neq\alpha} P_\beta/I$ dir. Böylece $\{P_\alpha\}$ kümesi sonludur [23, Teorem 2.5].

Bu teorem, R halkasının (*) koşulunu sağlaması için yeterli değildir. Örneğin; K bir cisim olmak üzere $K[x, y]$ polinom halkası Noetheriandır, böylece sıfırdan farklı her I ideali için $K[x, y]$ nin I üzerindeki minimal asal ideallerinin sayısı sonludur fakat (x, y) bir temel idealin radikali değildir.

2.3 Asal İdeallerin Kesişim Durumları ile İlgili Yapılan Bazı Çalışmalar

Asal ideallerin önemli bir özelliği olan ve Önerme 2.4'te ideallerin sonlu kesişimi için verilen özelliğin sonsuz kesişim durumu altında incelemesini, Gilmer "An Intersection Condition for Prime Ideals" isimli çalışmasında yapmış ve tüm asal idealleri bu koşula sahip halkaların birtakım özelliklerini vermiştir [13]. Bu amaçla, öncelikle Reis ve Viswanathan tarafından ele alınan kompakt olarak paketlenmiş halka tanımının duali olan aşağıdaki (#) koşulunu tanımlamıştır.

(#) $P \in Spec(R)$ ve R nin ideallerinin boştan farklı bir ailesi $\{I_\alpha\}_{\alpha\in S}$ olmak üzere, P asal ideali $\bigcap_{\alpha\in S} I_\alpha$ kümesini içerirse bazı $\alpha \in S$ için I_α kümelerini de içerir.

Makalenin ana sonuçlarından bazıları şu şekildedir:

Yardımcı Teorem 2.37 T bir halka ve S de maksimal ideali M olan bir quasi yerel halka olmak üzere $R = S \oplus T$ olsun. R halkasının $P = M \oplus T$ asal ideali, R nin ideallerinin bir ailesinin kesişimini içeriyorsa, bu ailedeki ideallerden birini içerir [13].

Teorem 2.38 R halkasının (#) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul R halkasının sıfır boyutlu ve yarı-quasi yerel olmasıdır [13].

İspat: $(\Leftarrow)$ R halkası, maksimal idealleri $M_1,...,M_n$ olan sıfır boyutlu bir halka olsun. Eğer Q_i, (0) idealinin isolated M_i-asalımsı bileşeni ise, $j \neq k$ iken Q_j ve Q_k aralarında asal (komaksimal) olmak üzere $(0)=\bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ dir. Böylece, eğer $1 \leq k \leq n$ ve $I_k = \bigcap_{j \neq k} Q_j$ ise, $R = Q_k \oplus I_k$ dır. Buradan $I_k \simeq R/Q_k$ halkası quasi yereldir ve P_k, I_k nın maksimal ideali olmak üzere $M_k = Q_k \oplus P_k$ dır. Dolayısıyla Yardımcı Teorem 2.37'den her k için M_k maksimal ideali, (#) ifadesindeki asal ideal için gerekli olan koşulu sağlar. R halkasının tüm asal idealleri maksimal olduğundan, R halkası (#) koşulunu sağlar.

$(\Rightarrow)$ R halkasının (#) koşulunu sağladığını ve *Kboy*$(R) > 0$ olduğunu kabul edelim. $P_1 \subset P_2$ olacak şekilde $P_1, P_2 \in$ *Spec*(R) seçelim. Böylece $P_1^*, P_2^* \in$ *Spec*(R) vardır öyle ki $P_1 \subseteq P_1^* \subset P_2^* \subseteq P_2$ ve P_1^* ile P_2^* arasına başka bir asal ideal giremez [21, Teorem 11]. Ayrıca A bir indis kümesi olmak üzere $P_1^* = \bigcap_{a \in A} Q_a$ olacak şekilde R nin P_2^*-asalımsı ideallerinin bir $\{Q_a\}_{a \in A}$ ailesi vardır [24, Teorem 17.4]. Bu ise her $a \in A$ için $Q_a \not\subseteq P_1^*$ olduğundan R halkasının (#) koşulunu sağlaması ile çelişir. Dolayısıyla R halkası sıfır boyutludur.

Şimdi M, R nin maksimal ideali, B bir indis kümesi ve $\{M_b\}_{b \in B}$ kümesi R nin M den farklı maksimal ideallerinin kümesi olsun. (#) koşulundan $\bigcap_{b \in B} M_b \not\subset M$ dir. $y_M \in \left(\bigcap M_b\right) \setminus M$ elemanını seçelim. $I = \left(\{ y_M : M \in \textit{Spec}(R)\}\right) = R$ dir, çünkü I ideali R nin hiçbir maksimal ideali tarafından içerilmez. Böylece y_{M_i} elemanlarının seçiminden ve bazı $M_1,...,M_n \in$ *Spec*(R) için $\left(y_{M_1},..., y_{M_n}\right) = R$ dir. Dolayısıyla *Spec*$(R) = \{M_i\}_{i=1}^{n}$ elde edilir.

Bu çalışmadan sonra 2009 yılında yapılmış olan "Covering and Intersection Conditions for Prime Ideals" isimli çalışmada ise, Gilmer'in vermiş olduğu (#) tanımı ele alınarak bu koşulları sağlayan halkaların sahip olduğu bazı özellikler gösterilmiştir [14]. [13]

çalışmasında verilen (#) koşulunun farklı denkliklerini gösteren teoremlerden biri şu şekildedir:

Yardımcı Teorem 2.39 I, R halkasının bir ideali olsun. I idealinin her minimal asal ideali bir sonlu üretilmiş idealin radikali ise I nın sonlu sayıda minimal asal ideali vardır [14].

Önerme 2.40 Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir [14].

i. R halkası (#) koşulunu sağlar.

ii. R halkasının sıfırdan farklı bir P asal ideali ve herhangi $P_\alpha \ (\alpha \in S)$ asal idealleri için $P \subseteq \bigcup_{\alpha \in S} P_\alpha$ ise bazı $\alpha \in S$ için $P = P_\alpha$ dır.

iii. *Kboy*$(R) = 0$ dır ve R halkası yarı quasi yereldir.

iv. *Kboy*$(R) = 0$ dır ve R halkasının her asal ideali bir sonlu üretilmiş idealin radikalidir.

v. *Kboy*$(R) = 0$ dır ve R halkasının her asal ideali bir temel idealin radikalidir.

İspat: *i* $\Leftrightarrow$ ***iii:*** Teorem 2.38'de verilmiştir.

ii $\Rightarrow$ ***v:*** *(ii)* ifadesine göre R halkasının her asal ideali maksimaldir. Dolayısıyla *Kboy*$(R) = 0$ elde edilir. Ayrıca, *(ii)* koşuluna sahip olan bir R halkası aynı zamanda [2] çalışmasındaki (*) koşulunu sağladığından R halkasının her asal ideali bir temel idealin radikalidir [3, Teorem].

v $\Rightarrow$ ***iv:*** Açıkça görülmektedir.

iv $\Rightarrow$ ***iii:*** *Kboy*$(R) = 0$ olduğundan R nin her asal ideali, sıfır ideali üzerinde minimaldir. Böylece Yardımcı Teorem 2.39'a dayanarak R halkası yarı quasi yereldir.

iii $\Rightarrow$ ***ii:*** *Kboy*$(R) = 0$ ve R halkası yarı quasi yerel ise R halkasının asal ideallerinin sayısı sonludur. Dolayısıyla *(ii)* ifadesi, Asaldan Kaçınma Teoremi'nin sonucu olarak elde edilir.

2.4 Kuvvetli 0-Boyutlu Halkalar

Kuvvetli 0-boyutlu halkalar Jayaram, Oral ve Tekir tarafından "Strongly 0-dimensional Rings" isimli makalede karakterize edilmiş ve bu halkalar için çeşitli denklikler kurulmuştur. Öncelikle makalede kullanılacak olan bazı ifadelerin tanımları verilmiştir [15].

Tanım 2.41 R bir halka olmak üzere her $a \in R$ için $a = axa$ olacak şekilde bir $x \in R$ varsa R halkasına bir regüler (veya von Neumann regüler) halka denir [15].

Tanım 2.42 R bir halka olsun. R halkasının her ideali, asalımsı ideallerin sonlu çarpımı şeklinde ise R halkasına bir Q-halka denir. Eğer R halkasının her M maksimal ideali için R_M bir Q-halka ise R halkasına bir almost Q-halka denir [25, 26].

Tanım 2.43 R değişmeli ve birimli bir halka, S indeks kümesi ve $\{I_\alpha : \alpha \in S\}$ kümesi R nin ideallerinin bir ailesi olsun. Bir P asal ideali, $\bigcap_{\alpha \in S} I_\alpha \subseteq P$ iken bazı $\beta \in S$ için $I_\beta \subseteq P$ oluyorsa P idealine kuvvetli asal ideal denir. R halkasının her asal ideali kuvvetli asal ise R halkasına kuvvetli 0-boyutlu halka denir [15].

Örnek 2.44 Sonlu ideale sahip halkalar Önerme 2.4'ten kuvvetli 0-boyutlu halkalara örnektir [15].

Her maksimal ideali kuvvetli asal ideal olan bir halkanın kuvvetli 0-boyutlu olmayabileceğini göstermek amacıyla aşağıdaki örnek verilmiştir.

Örnek 2.45 (R, M) bir yerel halka olsun. Öyleyse M maksimal ideali kuvvetli asal idealdir. Fakat bir yerel halka her zaman kuvvetli 0-boyutlu halka değildir. Bunun için, K cisim olmak üzere $R = K[\![x, y]\!]$ halkasını ele alalım. R halkasının (x) asal idealini göz önüne aldığımızda (x, y^t) idealleri için, $t \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\bigcap_{t \in \mathbb{Z}^+} (x, y^t) \subseteq (x)$ olduğunu görürüz. Öte yandan, her $t \in \mathbb{Z}^+$ için $(x, y^t) \not\subseteq (x)$ olur. Bundan dolayı R halkası kuvvetli 0-boyutlu bir halka değildir [15].

Şimdi, bu makalede verilmiş olan ve çalışmamızda yararlanacağımız bazı teoremlerin ifade ve ispatlarını verelim.

Tanım 2.46 $\{I, I_i\}_{i\in\Delta}$ kümesi, bir R halkasının ideallerinin herhangi bir ailesi olsun. Her $i \in \Delta$ için $I + I_i = R$ iken $I + \left(\bigcap_{i\in\Delta} I_i\right) = R$ oluyorsa, R halkasına (*) koşulunu sağlar denir [15].

Yardımcı Teorem 2.47 Bir R halkası üzerinde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir [15].

i. R bir kuvvetli 0-boyutlu halkadır.

ii. R halkası, (*) koşulunu sağlayan sıfır boyutlu bir halkadır.

iii. Her asal ideal maksimaldir ve her maksimal ideal kuvvetli asaldır.

iv. R halkasının her P asal ideali ve herhangi bir $\{a_i \in R : i \in R\}$ alt kümesi için $\bigcap_{i\in\Delta}(a_i) \subseteq P$ ise bazı $j \in \Delta$ için $a_j \in P$ dir.

v. R halkasının ideallerinin herhangi bir $\{I, I_i\}_{i\in\Delta}$ ailesi ve asal ideallerinin herhangi bir $\{P_i\}_{i\in S}$ ailesi için, R halkası aşağıdaki özellikleri sağlar:

a. $\bigcap_{i\in S} P_i \subseteq P$ ve P de R halkasının asal ideali ise, bazı $j \in S$ için $P_j \subseteq P$ dir.

b. $\sqrt{I + \left(\bigcap_{i\in\Delta} I_i\right)} = \bigcap_{i\in\Delta}\sqrt{I + I_i}$ dır.

Yardımcı Teorem 2.48 $R/\mathit{Nil}(R)$ bir temel ideal halkası olsun. Öyleyse R bir kompakt olarak paketlenmiş halkadır [15].

Teorem 2.49 Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir [15].

i. $R/\mathit{Nil}(R)$ bir Noetherian regüler halkadır.

ii. R halkası sıfır boyutlu kompakt olarak paketlenmiş bir halkadır.

iii. R halkası Noetherian spektruma sahiptir ve $\mathit{Kboy}(R) = 0$ dır.

iv. R halkası sıfır boyutlu Q-halkadır.

İspat: ***i***$\Rightarrow$ ***ii***: *(i)* nin sağlandığını kabul edelim. Öyleyse *Kboy*$(R)=0$ dır. Yardımcı Teorem 2.48'den R bir kompakt olarak paketlenmiş halkadır.

ii$\Rightarrow$ ***iii***: [29, Sonuç 2.4] ve [3, Teorem]'den sağlanır.

iii$\Rightarrow$ ***iv***: *(iii)* koşulunun sağlandığını kabul edelim. R Noetherian spektruma sahip olduğundan, radikal idealler için artan zincir koşulunu sağlar. *L*(R) kümesi R nin ideallerinin latisi olmak üzere $A\in$ *L*(R) ve P ideali de A üzerinde minimal olsun. Buradan $\left\{\sqrt{(A:r)}\,\middle|\, r\notin P\right\}$ kümesinin bir maksimal elemanı vardır. Bu maksimal eleman bazı $r\notin P$ elemanları için $\sqrt{(A:r)}$ olsun. Şimdi P idealinin $(A:r)$ üzerindeki tek minimal asal olduğu gösterelim. $P_0\neq P$, $(A:r)$ üzerinde bir başka minimal asal olsun. Öyleyse $r_1\notin P$ olacak şekilde $r_1\in P_0$ vardır. r ve r_1 elemanları P idealinde olmadıklarından her $m\in\mathbb{Z}^+$ için $rr_1^{\,m}\notin P$ dir. $\sqrt{(A:r)}$ elemanının maksimalliğinden her $m\in\mathbb{Z}^+$ için $\sqrt{(A:r)}=\sqrt{(A:rr_1^{\,m})}$ dir. $r_1\in P_0$ ve P_0 ideali de $(A:r)$ üzerinde minimal olduğundan $r_1^{\,n}z\in(A:r)$ olacak şekilde $z\notin P_0$ vardır. Buradan $rr_1^{\,n}z\in A$ ve böylece $z\in\left(A:rr_1^{\,n}\right)$ dir. Fakat $\sqrt{(A:r)}=\sqrt{(A:rr_1^{\,n})}$ olduğundan $z\in\sqrt{(A:r)}\subseteq P_0$ çelişkisi elde edilir. Öyleyse $P=\sqrt{(A:r)}$ dir. P maksimal olduğundan $(A:r)$ bir P-asalımsı idealdir. [30, Sonuç 2.2]'den R bir Laskerian yani her ideali asalımsı ideallerin sonlu kesişimi şeklinde yazılabilen halkadır. Böylece *Kboy*$(R)=0$ olup R bir Q-halkadır.

iv$\Rightarrow$ ***i***: *(iv)* ün sağlandığını kabul edelim. *Kboy*$(R)=0$ olduğundan $R/$*Nil*(R), 0-boyutlu bir indirgenmiş halkadır. Böylece $R/$*Nil*(R) bir regüler halkadır [24, Alıştırma 16, sf 111]. R bir Q-halka olduğundan $R/$*Nil*(R) de bir Q-halkadır. $R/$*Nil*(R) bir regüler halka olduğundan $R/$*Nil*(R) nin her asalımsı ideali maksimaldir. Böylece $R/$*Nil*(R) bir genel ZPI-halka yani her ideali asal ideallerin sonlu çarpımı şeklinde yazılabilen halkadır. Sonuç olarak, $R/$*Nil*(R) bir Noetherian halkadır [24, Teorem 39.2].

Aşağıdaki teoremlerde ise Artinian halkalarla kuvvetli 0-boyutlu halkalar arasındaki ilişkiler incelenmiştir:

Teorem 2.50 Her Artinian halka bir kuvvetli 0-boyutlu halkadır [15].

İspat: R bir Artinian halka olsun. R halkasının bazı I_α idealleri ve $P \in Spec(R)$ için $\bigcap_{\alpha \in S} I_\alpha \subseteq P$ olduğunu kabul edelim. R halkası Artinian olduğundan S nin sonlu bir $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ alt kümesi için $\bigcap_{i=1}^{n} I_{\alpha_i} = \bigcap_{\alpha \in S} I_\alpha$ olmalıdır. $\bigcap_{i=1}^{n} I_{\alpha_i} \subseteq P$ olduğundan bazı $k \in \mathbb{Z}^+$ için $I_{\alpha_k} \subseteq P$ dir. Sonuç olarak R bir kuvvetli 0-boyutlu halkadır.

Yardımcı Teorem 2.51 R halkasının bir indirgenmiş kuvvetli 0-boyutlu halka olması için gerek ve yeter koşul R nin bir Noetherian regüler halka olmasıdır [15].

Teorem 2.52 R halkası için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir [15].

i. R bir Artinian halkadır.

ii. R bir kuvvetli 0-boyutlu halka ve yerel Noetheriandır.

iii. R bir Noetherian halkadır ve R nin her M maksimal ideali için R_M kuvvetli 0-boyutlu halkadır.

İspat: ***i*** $\Rightarrow$ ***ii:*** Teorem 2.50'den her Artinian halka bir kuvvetli 0-boyutlu halkadır. Ayrıca [22, Teorem 2, sf 103]'e dayanarak R yerel Noetheriandır.

ii $\Rightarrow$ ***iii:*** *(ii)* koşulunun sağlandığını kabul edelim. Böylece $R/Nil(R)$ indirgenmiş bir kuvvetli 0-boyutlu halkadır. Yardımcı Teorem 2.49'dan $R/Nil(R)$ bir Noetherian regüler halkadır. [15, Teorem 2.12]'den R bir Q-halkadır ve [26, Teorem 3]'ten R bir Noetherian halkadır. [15, Lemma 2.13]'e dayanarak R nin her M maksimal ideali için R_M bir kuvvetli 0-boyutlu halkadır.

iii $\Rightarrow$ ***i:*** Teorem 2.49'dan ve [22, Teorem 2, sf 203] referansından görülmektedir.

BÖLÜM 3

ARALARINDA ASAL YAPILANDIRILMIŞ HALKALAR

3.1 Aralarında Asal Yapılandırılmış Halkalara Giriş

Bu bölümde aralarında asal yapılandırılmış halkaların tanımı, örnekleri verilecek ve bazı temel özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.1 R bir halka, S bir indeks kümesi ve her $i \in S$ için I_i ler R halkasının idealleri olsun. R halkasının bir P asal ideali, $I_i + P = R$ iken $\bigcap_{i \in S} I_i \nsubseteq P$ koşulunu sağlıyorsa, P idealine aralarında asal yapılandırılmış ideal denir. Her asal ideali aralarında asal yapılandırılmış ideal olan halkaya da aralarında asal yapılandırılmış halka denir.

Bir tamlık bölgesinde (0) ideali aralarında asal yapılandırılmış idealdir. Dolayısıyla her cisim bir aralarında asal yapılandırılmış halkadır. Fakat $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası bir aralarında asal yapılandırılmış halka değildir. Çünkü, $\{I_i\}_{i \in \mathbb{Z}^+} = \left\{(2)^i\right\}$ ve $P = (3)$ olarak alındığında $(2)^i + (3) = \mathbb{Z}$ dir, fakat $(0) = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}^+} (2)^i \subseteq (3)$ dir.

Örnek 3.2 Sonlu tane ideali olan halkalar aralarında asal yapılandırılmış halkadır. Bu ise Önerme 2.4'te verilen ifadeden açıkça görülmektedir.

Teorem 3.3 Aralarında asal yapılandırılmış bir halkanın homomorf görüntüsü de aralarında asal yapılandırılmış halkadır.

İspat: R ve S birer halka, $f : R \to S$ bir epimorfizma olsun. S nin bazı $\mathfrak{I}_i$ idealleri ve $\mathfrak{P} \in Spec(S)$ için $i \in \aleph$ olmak üzere $\mathfrak{I}_i + \mathfrak{P} = S$ olsun. O halde $f(I_i) = \mathfrak{I}_i$ ve

$f(P)=\mathfrak{P}$ olacak şekilde R nin *Çek*(f) kümesini içeren I_i idealleri ve P asal ideali vardır. Öyleyse $f(I_i)+f(P)=f(R)$ ve dolayısıyla $f(I_i+P)=f(R)$ dir. I_i ve P idealleri *Çek*(f) kümesini içerdiğinden $I_i+P=R$ elde edilir. R bir aralarında asal yapılandırılmış halka olduğundan $\bigcap\limits_{i\in\aleph} I_i \not\subseteq P$ olduğu görülür. Böylece $f\left(\bigcap\limits_{i\in\aleph} I_i\right) \not\subseteq f\left(P\right)$ olup $\bigcap\limits_{i\in\aleph} \mathfrak{I}_i \not\subseteq \mathfrak{P}$ dir.

Sonuç 3.4 R bir halka olmak üzere, $R[X]$ bir aralarında asal yapılandırılmış halka ise R halkası da öyledir.

Yukarıdaki sonuçta verilen ifadenin tersi her zaman doğru değildir. Örneğin, $\mathbb{C}[X]$ polinom halkasını ele alalım. $\mathbb{C}[X]$ halkasının maksimal idealleri, $\alpha\in\mathbb{C}$ olmak üzere $(X-\alpha)$ formundadır. Sıfırdan farklı her $\alpha\in\mathbb{C}$ için $(X-\alpha)+(X)=\mathbb{C}[X]$ olmasına rağmen, $\bigcap\limits_{0\neq\alpha\in\mathbb{C}} (X-\alpha)\subseteq(X)$ olduğundan $\mathbb{C}[X]$ bir aralarında asal yapılandırılmış halka değildir.

Sonuç 3.5 R bir halka ve I da R halkasının bir ideali olsun. R bir aralarında asal yapılandırılmış halka ise R/I bölüm halkası da bir aralarında asal yapılandırılmış halkadır.

Önerme 3.6 Her Artinian halka bir aralarında asal yapılandırılmış halkadır.

İspat: R bir Artinian halka, Λ bir indeks kümesi, R halkasının ideallerinin bir $\{I_i\}_{i\in\Lambda}$ ailesi ve P asal ideali için $\bigcap\limits_{i\in\Lambda} I_i\subseteq P$ olsun. R halkası Artinian olduğundan $n\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere Λ kümesinin sonlu bir $\{i_\alpha\}_{\alpha=1}^{n}$ alt kümesi için $\bigcap\limits_{i\in\Lambda} I_i=\bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} I_{i_\alpha}$ dir. Buradan $\bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} I_{i_\alpha}\subseteq P$ elde edilir ve böylece bazı i_α indisleri için $I_{i_\alpha}\subseteq P$ bulunur. Dolayısıyla $I_{i_\alpha}+P\neq R$ olur ve böylece R bir aralarında asal yapılandırılmış halkadır.

Sıradaki teorem, bir aralarında asal yapılandırılmış halkanın karakterizasyonunu maksimal idealler yardımıyla vermektedir.

Teorem 3.7 R bir halka olsun. R halkasının tüm maksimal idealleri aralarında asal yapılandırılmış ise R bir aralarında asal yapılandırılmış halkadır.

İspat: P, R halkasının bir asal ideali ve I_i ler ($i \in S$), R nin $I_i + P = R$ koşulunu sağlayan idealleri olsun. Böylece R halkasının P asal idealini kapsayan bir $\mathfrak{M}$ maksimal ideali olduğundan her $i \in S$ için $I_i + \mathfrak{M} = R$ elde edilir. $\mathfrak{M}$ bir aralarında asal yapılandırılmış ideal olduğundan $\bigcap_{i \in S} I_i \not\subseteq \mathfrak{M}$ dir. Buradan da $\bigcap_{i \in S} I_i \not\subseteq P$ olup R nin aralarında asal yapılandırılmış halka olduğu elde edilir.

Örnek 3.8 $(R, \mathfrak{M})$ bir yerel halka olsun. $\mathfrak{M}$ bir aralarında asal yapılandırılmış idealdir ve dolayısıyla R bir aralarında asal yapılandırılmış halkadır. Özel olarak değer halkaları, bir yerel halka olduklarından aralarında asal yapılandırılmış halkadır.

Örnek 3.9 $i \in \{1,2\}$ için $(R_i, \mathfrak{M}_i)$ halkaları yerel halkalar olmak üzere yarı-yerel $R = R_1 \times R_2$ halkasını ele alalım. R halkasının idealleri, I_α ile J_β sırasıyla R_1 ile R_2 nin idealleri olmak üzere $I_\alpha \times J_\beta$ şeklindedir. Ayrıca, R halkasının maksimal ideallerinin kümesi, $\mathfrak{M}_1 \in MaxSpec(R_1)$ ve $\mathfrak{M}_2 \in MaxSpec(R_2)$ olmak üzere

$$MaxSpec(R) = \left\{ I_\alpha \times J_\beta : \left(I_\alpha = R_1,\ J_\beta = \mathfrak{M}_2 \right) \text{ veya } \left(I_\alpha = \mathfrak{M}_1,\ J_\beta = R_2 \right) \right\}$$

dir. Şimdi, R halkasının $\mathfrak{M}_1 \times R_2$ maksimal ideali için $\left(I_\alpha \times J_\beta \right) + \left(\mathfrak{M}_1 \times R_2 \right) = R$ olduğunu kabul edelim. Böylece, $I_\alpha + \mathfrak{M}_1 = R_1$ ve buradan da her α için $I_\alpha = R_1$ elde edilir. Dolayısıyla $\bigcap_{(\alpha,\beta)} \left(I_\alpha \times J_\beta \right) \not\subseteq \mathfrak{M}_1 \times R_2$ olduğu görülür. Benzer şekilde, $\mathfrak{M}_2 \times R_1$ ideali de bir aralarında asal ideal olduğundan Teorem 3.7'ye dayanarak R halkasının bir aralarında asal yapılandırılmış halka olduğu görülür.

Sonuç olarak; $i \in \{1,2,..,n\}$ için $(R_i, \mathfrak{M}_i)$ halkaları yerel halkalar olmak üzere, tümevarım yöntemiyle $R = R_1 \times R_2 \times ... \times R_n$ halkasının da bir aralarında asal yapılandırılmış halka olduğu elde edilir.

Sıradaki yardımcı teoremde Arapovic, bir halkanın sıfır boyutlu bir halkaya gömülebilirliğini iki özellikle aşağıdaki şekilde karakterize etmiştir:

Yardımcı Teorem 3.10 Bir R halkası sıfır boyutlu bir halkaya gömülebilir ancak ve ancak R aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\{Q_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ asalımsı idealler ailesine sahiptir [27]:

(A1) $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda = 0$,

(A2) Her $a\in R$ için bir $n\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki her $\lambda\in\Lambda$ için, $a\in\sqrt{Q_\lambda}$ ise $a^n\in Q_\lambda$ dır.

Bu yardımcı teoremde (A2) koşulu oldukça önemlidir. Buradan yola çıkarak, Brewer ve Richman bu koşula denk olan aşağıdaki koşulu vermişlerdir.

Teorem 3.11 Bir R halkasının ideallerinin bir $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ailesi (A2) koşulunu sağlar ancak ve ancak her (sayılabilir) $\Gamma\subseteq\Lambda$ alt kümesi için $\sqrt{\bigcap\limits_{\lambda\in\Gamma} I_\lambda} = \bigcap\limits_{\lambda\in\Gamma}\sqrt{I_\lambda}$ dır [28].

Ayrıca Brewer ve Richman, (A2) koşulunun sıfır boyutlu bir halkadaki tüm ideallerin ailesi için, dolayısıyla da ideallerin herhangi bir ailesi için sağlandığını göstermişlerdir. Bunun yanı sıra, sıfır boyutlu halkaların bir karakterizasyonu olarak aşağıdaki teoremi ispatlamışlardır.

Teorem 3.12 Bir R halkası üzerinde aşağıdaki koşullar birbirine denktir [28].

i. R halkası sıfır boyutludur.

ii. (A2) koşulu R nin tüm ideallerinin ailesi için sağlanır.

iii. (A2) koşulu R nin tüm asalımsı ideallerinin ailesi için sağlanır.

Şimdi de (A2) koşulunu kullanarak aralarında asal yapılandırılmış halkaların bir başka karakterizasyonunu verelim.

Teorem 3.13 R bir halka ve S de bir indeks kümesi olsun. Eğer R bir aralarında asal yapılandırılmış halka ise R nin asal ideallerin herhangi bir $\{P_\alpha\}_{\alpha\in S}$ ailesi ve R nin $\mathfrak{M}$ maksimal ideali için $\bigcap\limits_{\alpha\in S} P_\alpha\subseteq\mathfrak{M}$ iken bazı $\beta\in S$ için $P_\beta\subseteq\mathfrak{M}$ dir. İfadenin tersi ise (A2) koşulu R nin ideallerinin herhangi bir ailesi için sağlandığında doğrudur.

İspat: $(\Rightarrow)$**:** R bir aralarında asal yapılandırılmış halka, R nin asal ideallerinin bir $\{P_\alpha\}_{\alpha\in S}$ ailesi ve $\mathfrak{M}$ maksimal ideali için için $\bigcap\limits_{\alpha\in S} P_\alpha\subseteq\mathfrak{M}$ olsun. Varsayımımızdan,

$\beta \in S$ olmak üzere bir P_β asal ideali için $P_\beta + \mathfrak{M} \neq R$ dir. Böylece $P_\beta \subseteq \mathfrak{M}$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$: R halkasının I_α idealleri ve P asal ideali için $\bigcap_{\alpha \in S} I_\alpha \subseteq P$ olduğunu kabul edelim. Buradan, $\sqrt{\bigcap_{\alpha \in S} I_\alpha} \subseteq \sqrt{P} = P$ dir ve $P \subseteq \mathfrak{M}$ olacak şekilde bir $\mathfrak{M}$ maksimal ideali vardır. Teorem 3.11'e göre $\sqrt{\bigcap_{\alpha \in S} I_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in S} \sqrt{I_\alpha}$ olduğundan $\bigcap_{\alpha \in S} \sqrt{I_\alpha} \subseteq P$ dir. Her I_α ideali için $\sqrt{I_\alpha} = \bigcap_{i \in \aleph} P_{\alpha,i}$ olacak şekilde $\{P_{\alpha,i}\}_{i \in \aleph}$ asal idealleri olduğundan

$$\mathfrak{M} \supseteq \sqrt{\bigcap_{\alpha \in S} I_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in S} \sqrt{I_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in S} \left(\bigcap_{i \in \aleph} P_{\alpha,i} \right) = \bigcap_{\alpha \in S, i \in \aleph} P_{\alpha,i}$$

elde edilir. Hipotezden de bazı $\beta \in S$ ve $j \in \aleph$ için $P_{\beta,j} \subseteq \mathfrak{M}$ olduğu görülür. Dolayısıyla $P_{\beta,j} + \mathfrak{M} \neq R$ yani $P_{\beta,j} + P \neq R$ dir. Sonuç olarak, $I_\beta + P \neq R$ elde edilmiş olur.

Teorem 3.14 Bir R halkası, ideallerinin herhangi bir ailesi için (A2) koşulunu sağlasın ve I ideali de R halkasının nilradikalinde kapsanan bir ideali olsun. Bu durumda R/I halkasının bir aralarında asal yapılandırılmış halka olması için gerek ve yeter koşul R nin bir aralarında asal yapılandırılmış halka olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: I, R halkasının nilradikalinde kapsanan bir ideali ve R/I bir aralarında asal yapılandırılmış halka olsun. $\{P_i\}_{i \in \Delta} \subseteq Spec(R)$ ve $\mathfrak{M} \in MaxSpec(R)$ olmak üzere $P_i + \mathfrak{M} = R$ olsun. Buradan $R/I = (P_i + \mathfrak{M})/I = P_i/I + \mathfrak{M}/I$ elde edilir. R/I bir aralarında asal yapılandırılmış halka olduğundan $\bigcap_{i \in \Delta} P_i/I \not\subseteq \mathfrak{M}/I$ dır. Böylece, $\left(\bigcap_{i \in \Delta} P_i \right) \Big/ I \not\subseteq \mathfrak{M}/I$ olduğu görülür ve bu ifade de $\bigcap_{i \in \Delta} P_i \not\subseteq \mathfrak{M}$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak, Teorem 3.13'e dayanarak R bir aralarında asal yapılandırılmış halkadır.

$(\Leftarrow)$: Sonuç 3.5'ten açıkça görülmektedir.

3.2 Aralarında Asal Yapılandırılmış Halkaların Yerelleştirmeleri

Bu bölümde aralarında asal yapılandırılmış halkalarla, bu halkaların yerelleştirmesi arasındaki bazı ilişkiler verilecektir.

Teorem 3.15 R bir aralarında asal yapılandırılmış halka ve P de R halkasının bir asal ideali olsun. O halde R halkasının P deki yerelleştirmesi R_P bir aralarında asal yapılandırılmış halkadır.

İspat: R_P halkası bir yerel halka olduğundan Teorem 3.7'ye göre bir aralarında asal yapılandırılmış halkadır.

Teorem 3.16 R bir aralarında asal yapılandırılmış halka ve S de R halkasının maksimal ideallerinin herhangi bir ailesinin birleşiminin tümleyeni olsun. O halde $S^{-1}R$ bir aralarında asal yapılandırılmış halkadır.

İspat: Λ kümesi *MaxSpec*(R) nin bir alt kümesi ve S de Λ kümesinin elemanlarının birleşiminin tümleyeni olsun. Teorem 3.7'ye dayanarak $\mathfrak{M} \in \Lambda$ olmak üzere $S^{-1}\mathfrak{M}$ ideallerinin aralarında asal yapılandırılmış ideal olduğunu göstermek yeterlidir. $i \in \aleph$ için $S^{-1}I_i$ ler $S^{-1}R$ nin idealleri olmak üzere $S^{-1}I_i + S^{-1}\mathfrak{M} = S^{-1}R$ olduğunu kabul edelim. Böylece $I_i + \mathfrak{M} = R$ elde edilir. R bir aralarında asal yapılandırılmış halka olduğundan $\bigcap_{i \in \aleph} I_i \nsubseteq \mathfrak{M}$ ve buradan da $\bigcap_{i \in \aleph} S^{-1}I_i \nsubseteq S^{-1}\mathfrak{M}$ elde edilir.

R halkasının bir başka kesir halkasını incelemeye geçmeden önce Prüfer bölgelerini hatırlayalım.

Tanım 3.17 R bir halka ve K da R nin total kesir halkası olsun. K nın aşağıdaki koşulları sağlayan bir A alt kümesine R halkasının bir kesirsel ideali denir [29]:

i. A bir R-modüldür.

ii. R halkasının $dA \subseteq R$ olacak şekilde bir d regüler (sıfır bölen olmayan) elemanı vardır.

Tanım 3.18 R bir halka, A da R halkasının bir kesirsel ideali olsun. Eğer R halkasının $AB = R$ olacak şekilde bir B kesirsel ideali varsa A idealine tersinir ideal denir [29].

Tanım 3.19 R bir tamlık bölgesi olmak üzere R halkasının sıfırdan farklı her sonlu üretilmiş ideali tersinir ise R halkasına bir Prüfer bölgesi denir [29].

Gilmer tarafından Prüfer bölgeleri ile ilgili verilen önemli denklikler aşağıda yer almaktadır.

Yardımcı Teorem 3.20 R bir tamlık bölgesi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir [24].

i. R halkasının her P asal ideali için R_P bir değer halkasıdır.

ii. R halkasının her M maksimal ideali için R_M bir değer halkasıdır.

iii. R bir Prüfer bölgesidir.

Teorem 3.21 R bir aralarında asal yapılandırılmış halka olsun. R bir Prüfer bölgesi ve S de R halkasının bir çarpımsal kapalı alt kümesi ise $S^{-1}R$ bir aralarında asal yapılandırılmış halkadır.

İspat: $S^{-1}P$, $S^{-1}R$ nin bir asal ideali ve $\aleph$ bir indeks kümesi olmak üzere; $\alpha \in \aleph$ için $S^{-1}I_\alpha$ idealleri de $S^{-1}R$ halkasının, $S^{-1}I_\alpha + S^{-1}P = S^{-1}R$ şartını sağlayan idealleri olsun. Buradan, $S^{-1}(I_\alpha + P) = S^{-1}R$ elde edilir. Kabul edelim ki $I_\alpha + P \neq R$ olsun. Öyleyse $I_\alpha + P \subseteq \mathfrak{M}$ olacak şekilde bir $\mathfrak{M}$ maksimal ideali vardır. $I_\alpha \subseteq \mathfrak{M}$ olduğundan $I_\alpha \subseteq P_\alpha \subseteq \mathfrak{M}$ ve $P_\alpha + P \subseteq \mathfrak{M}$ olacak şekilde I_α nın bir P_α minimal asal ideali vardır. R bir Prüfer bölgesi olduğundan R_P bir değer halkasıdır ve idealleri tam sıralıdır. Buradan $S^{-1}P_\alpha$ ve $S^{-1}P$, dolayısıyla P_α ve P idealleri karşılaştırılabilirdir. Böylece, $S^{-1}I_\alpha + S^{-1}P = S^{-1}P$ veya $S^{-1}I_\alpha + S^{-1}P \subseteq S^{-1}P_\alpha$ dır. Fakat her iki durum da bir çelişki oluşturur. Dolayısıyla, $I_\alpha + P = R$ olup $\bigcap_{\alpha\in\aleph} I_\alpha \nsubseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, $\bigcap_{\alpha\in\aleph}\left(S^{-1}I_\alpha\right) \nsubseteq S^{-1}P$ olduğu görülür.

3.3 Aralarında Asal Yapılandırılmış Halkalarla Bağlantılı Halkalar

Bu bölümde, aralarında asal yapılandırılmış halkaların kuvvetli 0-boyutlu halkalar, *-koşulunu sağlayan halkalar ve h-yerel bölgeler ile aralarındaki birtakım bağlantılar verilecektir.

Teorem 3.22 Her kuvvetli 0-boyutlu halka bir aralarında asal yapılandırılmış halkadır.

İspat: R bir halka, P ideali R halkasının bir asal ideali ve S bir indeks kümesi olmak üzere her $i \in S$ için I_i idealleri, R halkasının $I_i + P = R$ koşulunu sağlayan idealleri olsun. $\bigcap_{i \in S} I_i \subseteq P$ olduğunu kabul edelim. Böylece, R halkası kuvvetli 0-boyutlu olduğundan bazı $j \in S$ için $I_j \subseteq P$ dir. Buradan $I_j + P = P$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.

Bu teoremin tersi her zaman doğru değildir. Örneğin, K bir cisim olmak üzere $K[\![x, y]\!]$ halkası yerel olduğundan bir aralarında asal yapılandırılmıştır ancak, Örnek 2.45'te görüldüğü üzere kuvvetli 0-boyutlu bir halka değildir.

Teorem 3.23 R bir halka ve S bir indeks kümesi olmak üzere $\{I_i\}_{i \in S}$ kümesi R nin ideallerinin bir ailesi olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

i. R halkası bir aralarında asal yapılandırılmış halkadır.

ii. R halkasının her M maksimal ideali bir kuvvetli asal idealdir.

iii. R halkasının herhangi bir M maksimal ideali için $M + I_i = R$ ise $M + \left(\bigcap_{i \in S} I_i \right) = R$ dir.

İspat: *i* $\Rightarrow$ *ii:* R halkasının ideallerinin bir $\{I_i\}_{i \in S}$ ailesi ve bir M maksimal ideali için $\bigcap_{i \in S} I_i \subseteq M$ olduğunu kabul edelim. Her $i \in S$ için $I_i \not\subseteq M$ olsun. Böylece $I_i + M = R$ dir. R bir aralarında asal yapılandırılmış halka olduğundan $\bigcap_{i \in S} I_i \not\subseteq M$ elde edilir ki bu ise kabulümüz ile çelişir.

ii$\Rightarrow$iii: R halkasının ideallerinin bir $\{I_i\}_{i\in S}$ ailesi ve bir M maksimal ideali için *(ii)* koşulu sağlansın. Kabul edelim ki $M+\left(\bigcap_{i\in S} I_i\right)\neq R$ olsun. Böylece $\bigcap_{i\in S} I_i \subseteq M$ elde edilir. Kabulümüzden bir $j\in S$ için $I_j\subseteq M$ olduğu görülür. Sonuç olarak $M+I_j\neq R$ dir.

iii$\Rightarrow$i: R halkasının *(iii)* koşulunu sağladığını, R nin I_i idealleri ve bir P asal ideali için $I_i+P=R$ olduğunu varsayalım. Kabul edelim ki $\bigcap_{i\in S} I_i \subseteq P$ olsun. R halkasının P idealini kapsayan bir M maksimal ideali olduğundan $I_i+M=R$ ve $\bigcap_{i\in S} I_i \subseteq M$ elde edilir. Böylece $M+\left(\bigcap_{i\in S} I_i\right)\neq R$ elde edilir ki bu da bir çelişkidir.

Sonuç 3.24 R, Krull boyutu 0 olan bir halka olsun. Bu durumda R halkasının bir aralarında asal yapılandırılmış halka olması için gerek ve yeter koşul R nin kuvvetli 0-boyutlu halka olmasıdır.

İspat: Teorem 3.22 ve Teorem 3.23'den kolayca görülmektedir.

Şimdi Oral, Ersoy ve Tekir tarafından tanımlanmış olan *-koşulunu sağlayan halka tanımını verip aralarında asal yapılandırılmış halkalarla olan bağlantısını inceleyeceğiz.

Tanım 3.25 R bir halka, S bir indeks kümesi olmak üzere R nin ideallerinin bir $\{I_\alpha\}_{\alpha\in S}$ ailesi için $\sqrt{\bigcap_{\alpha\in S} I_\alpha}=\bigcap_{\alpha\in S'}\sqrt{I_\alpha}$ olacak şekilde S nin sonlu bir S' alt kümesi varsa R halkası $*$-koşulunu sağlar denir [31].

$*$-koşulunu sağlayan halkaların karakterizasyonlarından bazıları aşağıda verilmiştir:

Teorem 3.26 R halkası *-koşulunu sağlayan bir halka olsun. Eğer R halkası aşağıdaki koşullardan birini sağlıyorsa bir Artinian halkadır [31].

i. R bir von Neumann regüler halkadır.

ii. R nin bazı I ve J idealleri için $\sqrt{I}=\sqrt{J}$ ise $I=J$ dir.

Teorem 3.27 R bir Noetherian halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir [31].

i. R halkası $*$-koşulunu sağlar.

ii. R halkası sıfır boyutludur.

iii. R halkası Artiniandır.

iv. R halkası π-regülerdir (Yani her $a \in R$ için $a^n = \left(a^n\right)^2 a'$ olacak şekilde $a' \in R$ ve $n \in \mathbb{N}^*$ vardır).

v. R halkasının asal ideallerinin bir $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ailesi ve Λ nın sonlu bir Γ alt kümesi için $\sqrt{\bigcap_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda} = \bigcap_{\lambda \in \Gamma'} \sqrt{P_\lambda}$ dir.

Teorem 3.28 R halkası $*$-koşulunu sağlayan bir halka ise R bir kuvvetli 0-boyutlu halkadır. İfadenin tersi, R halkası Noetherian iken doğrudur.

İspat: $(\Rightarrow)$ R halkasının $*$-koşulunu sağladığını kabul edelim. R nin ideallerinin bir $\{I_\alpha\}_{\alpha \in S}$ ailesi ve P asal ideali için $\bigcap_{\alpha \in S} I_\alpha \subseteq P$ olsun. Buradan S nin her sonlu S' alt kümesi için $\sqrt{\bigcap_{\alpha \in S} I_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in S'} \sqrt{I_\alpha} \subseteq P$ elde edilir. Böylece bazı $\beta \in S'$ indisleri için $I_\beta \subseteq \sqrt{I_\beta} \subseteq P$ olduğu görülür.

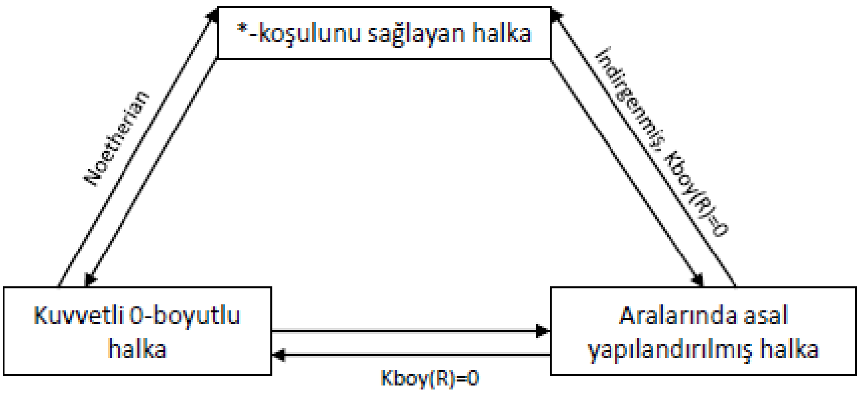
$(\Leftarrow)$ R nin ideallerinin bir $\{I_\alpha\}_{\alpha \in S}$ ailesi ve S nin her sonlu S' alt kümesi için $\sqrt{\bigcap_{\alpha \in S} I_\alpha} \subseteq \bigcap_{\alpha \in S'} \sqrt{I_\alpha}$ kapsaması her zaman sağlanır. Ayrıca, R bir Noetherian halka olduğundan *Min*$\left(\bigcap_{\alpha \in S} I_\alpha\right)$ sonlu bir kümedir. *Min*$\left(\bigcap_{\alpha \in S} I_\alpha\right) = \left\{P_{\gamma_1}, P_{\gamma_2}, \ldots, P_{\gamma_n}\right\}$ diyelim. Böylece $\sqrt{\bigcap_{\alpha \in S} I_\alpha} = \bigcap_{P_\gamma \in V\left(\bigcap_{\alpha \in S} I_\alpha\right)} P_\gamma = \bigcap_{P_\gamma \in Min\left(\bigcap_{\alpha \in S} I_\alpha\right)} P_\gamma$ elde edilir. Buradan her $\gamma_j \in S' = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ için, $\bigcap_{\alpha \in S} I_\alpha \subseteq P_{\gamma_j}$ olduğu görülür. R halkası kuvvetli 0-boyutlu olduğundan, $I_{\alpha_j} \subseteq P_{\gamma_j}$ olacak şekilde bir $\alpha_j \in S$ vardır ve böylece $\sqrt{I_{\alpha_j}} \subseteq P_{\gamma_j}$ dir.

Dolayısıyla $\sqrt{I_{\alpha_1}} \cap ... \cap \sqrt{I_{\alpha_n}} \subseteq P_{\gamma_1} \cap ... \cap P_{\gamma_n}$ sağlanır ve sonuç olarak $\bigcap_{\alpha_j \in S'} \sqrt{I_{\alpha_j}} \subseteq \bigcap_{\gamma_j \in S'} P_{\gamma_j} = \sqrt{\bigcap_{\alpha \in S} I_\alpha}$ elde edilir. Dolayısıyla R halkası $*$-koşulunu sağlar.

Teorem 3.29 R halkası $*$-koşulunu sağlayan bir halka ise aralarında asal yapılandırılmış halkadır.

İspat: R halkasının ideallerinin bir $\{I_\alpha\}_{\alpha \in S}$ ailesi ve P asal ideali için $I_\alpha + P = R$ olsun. Bu halkanın bir aralarında asal yapılandırılmış halka olduğunu göstermek için $\bigcap_{\alpha \in S} I_\alpha \subseteq P$ olduğunu kabul edelim. Böylece $\sqrt{\bigcap_{\alpha \in S} I_\alpha} \subseteq P$ dir. R halkası $*$-koşulunu sağladığından, S nin sonlu bir S' alt kümesi için $\bigcap_{\alpha \in S'} \sqrt{I_\alpha} \subseteq P$ elde edilir. Böylece, bazı $\alpha \in S'$ için $I_\alpha \subseteq \sqrt{I_\alpha} \subseteq P$ kapsaması sağlanır. Bu ise kabulümüzle çelişir.

Bu bilgiler yardımıyla kuvvetli 0-boyutlu halka, aralarında asal yapılandırılmış halka ve *-koşulunu sağlayan halka arasındaki ilişkiler aşağıdaki diyagramda gösterilmiştir.



Şekil 3.1 Kuvvetli 0-boyutlu Halka ve $*$-koşulunu Sağlayan Halka ile Bağlantı

Sonuç 3.30 R bir halka olsun. Aşağıdaki dört ifadeyi göz önüne alalım:

i. R bir Noetherian halkadır ve $*$-koşulunu sağlar.

ii. R bir Artiniandır halkadır.

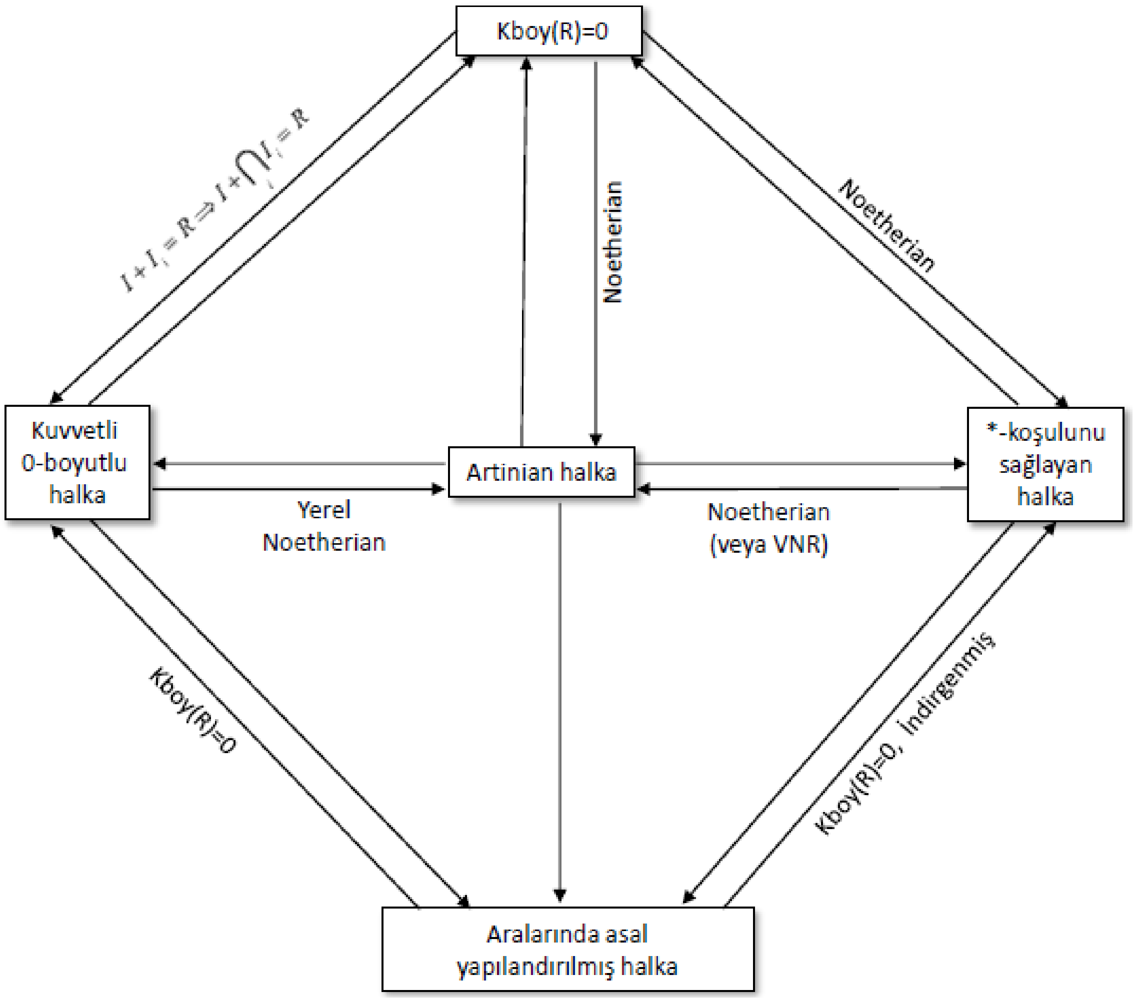
iii. R bir kuvvetli 0-boyutlu halkadır ve yerel Noetheriandır.

iv. R bir aralarında asal yapılandırılmış halkadır ve *Kboy*$(R)=0$ dır.

i$\Rightarrow$*ii*$\Rightarrow$*iii*$\Rightarrow$*iv* gerektirmeleri her zaman sağlanır. *iv*$\Rightarrow$*i* gerektirmesi ise R halkasının indirgenmiş olduğu durumda doğrudur.

Not: R bir Noetherian halka ise Sonuç 3.30'daki ifadeler birbirine denk olmaktadır.

Aşağıdaki diyagramda ise, en genel haliyle yukarıda bahsedilen halkalar arasındaki geçişler belirtilmiştir.



Şekil 3.2 Halkalar Arasındaki Geçiş Diyagramı

Şimdi de aralarında asal yapılandırılmış halkalarla h-yerel bölgeler arasındaki bağlantıları inceleyeceğiz. Bunun için öncelikle h-yerel bölge tanımını verelim.

Tanım 3.31 Tamlık bölgesi olan bir R halkasına, R nin sıfırdan farklı her ideali en fazla sonlu sayıda maksimal ideal ve sıfırdan farklı her asal ideali tek bir maksimal ideal tarafından kapsanıyorsa h-yerel bölge denir [32].

h-yerel bölgelerin karakterizasyonları Olberding tarafından toparlanıp [33] ve [34] çalışmalarında verilmiştir. Bu karakterizasyonlardan bazılarını gösteren teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.32 Bir R tamlık bölgesi için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir [34].

i. R bir h-yerel bölgedir.

ii. R nin aşikar olmayan kesişime sahip ideallerinin bir $\{I_i\}$ kolleksiyonu ve Δ bir indeks kümesi için $\bigcap_{i\in\Delta} I_i \subseteq M$ iken bazı $i \in \Delta$ elemanları için $I_i \subseteq M$ dir.

Teorem 3.33 R bir aralarında asal yapılandırılmış halka ise h-yerel bölgedir.

İspat: S bir indeks kümesi olmak üzere R halkasının aşikar olmayan kesişime sahip ideallerinin bir $\{I_i\}_{i\in S}$ ailesi ve R nin M maksimal ideali için $0 \neq \bigcap_{i\in S} I_i \subseteq M$ olsun. Her $i \in S$ için $I_i \not\subseteq M$ kabul edelim. Böylece her i için $I_i + M = R$ dir. R bir aralarında asal yapılandırılmış halka olduğundan $\bigcap_{i\in S} I_i \not\subseteq M$ elde edilir ki bu ise kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla Teorem 3.32'ye dayanarak R bir h-yerel bölgedir.

Not 3.34 Yukarıdaki teoremin tersi her zaman doğru değildir. Çünkü bir halka, boyutu 1 olan Noetherian bölge ise h-yerel bölgedir [34, Örnek 3.1]. Bu bilgiye dayanarak, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{C}[x]$ halkaları h-yerel bölgelerdir ancak aralarında asal yapılandırılmış halka değillerdir.

Yukarıdaki teoremin tersinin hangi koşul altında doğru olduğunu göstermek için öncelikle, McCoy tarafından tanımlanan "subdirectly irreducible" halka tanımını verelim.

Tanım 3.35 Sıfırdan farklı tüm ideallerinin kesişimi sıfırdan farklı olan halkalara "subdirectly irreducible" halka denir [35].

Teorem 3.36 R bir subdirectly irreducible halka olsun. Bu durumda R halkasının bir aralarında asal yapılandırılmış halka olması için gerek ve yeter koşul R nin bir h-yerel bölge olmasıdır.

İspat: R halkasının bir h-yerel bölge olduğunu kabul edelim. R nin bir aralarında asal yapılandırılmış halka olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için R halkasının bir M maksimal ideali, ideallerinin bir $\{I_i\}$ ailesi ve bir Δ indeks kümesi için $\bigcap_{i\in\Delta} I_i \subseteq M$ olduğunu kabul edelim. R bir subdirectly irreducible halka olduğundan bu idealler ailesinin kesişimi aşikar değildir. R halkasını bir h-yerel bölge kabul ettiğimizden Teorem 3.32'ye göre bazı $i\in\Delta$ elemanları için $I_i \subseteq M$ elde edilir. Böylece, R bir aralarında asal yapılandırılmış halkadır.

BÖLÜM 4

KUVVETLİ 0-BOYUTLU MODÜLLER

4.1 Alt Modüller ve Asal Alt Modüller

Bu kısımda, kuvvetli 0-boyutlu modül kavramını incelerken yararlanacağımız bazı temel bilgiler verilecektir. Tüm çalışma boyunca M birimli (unitary) bir R-modül olarak alınacaktır.

Tanım 4.1 M bir R-modül ve X de M nin bir alt kümesi olsun. X kümesini kapsayan tüm alt modüllerin arakesitine X kümesinin ürettiği alt modül denir ve (X) ile gösterilir. X sonlu bir alt küme ve $M=(X)$ ise M ye sonlu üretilmiş modül denir [20].

Tanım 4.2 M bir R-modül olmak üzere $(0:M)=\{r\in R : rM=0\}$ kümesine M nin sıfırlayıcısı denir ve *ann*(M) ile gösterilir. Eğer *ann*$(M)=0$ ise M ye sadık modül denir. $(N:M)$ kümesi ise, M/N bölüm modülünün sıfırlayıcısı olup aynı zamanda R halkasının bir idealidir [20].

Tanım 4.3 N, R-modül M nin bir alt modülü olmak üzere $(N:M)$ kümesi, $(N:M)=\{r\in R : rM\subseteq N\}$ şeklinde tanımlanır [20].

Tanım 4.4 Sıfırdan farklı bir modülün sıfır ve kendisinden başka bir alt modülü yoksa bu modüle basit modül denir [20].

Tanım 4.5 R bir tamlık bölgesi ve M bir R-modül olsun. $T(M)=\{m\in M : rm=0 \text{ olacak şekilde bir } 0\neq r\in R \text{ vardır}\}$ kümesi tanımlansın. Bu küme M nin bir alt modülü olup M nin burulmalı alt modülü olarak adlandırılır. $T(M)=0$ ise M ye serbest burulmalı modül denir [20].

Tanım 4.6 M bir R-modül ve N de M nin bir has alt modülü olsun. Her $r\in R$ ve $m\in M$ için $rm\in N$ olması, $m\in N$ veya $r\in (N:M)$ olmasını gerektiriyorsa N ye M nin bir asal alt modülü denir. M nin tüm asal alt modüllerinin kümesi M nin spektrumu olarak adlandırılır ve $Spec(M)$ ile gösterilir [20].

Tanım 4.7 M bir R-modül ve N de M nin bir has alt modülü olsun. Her $r\in R$ ve $m\in M$ için $rm\in N$ olması, $m\in N$ veya $r\in \sqrt{(N:M)}$ olmasını gerektiriyorsa N ye M nin bir asalımsı alt modülü denir [20].

Bir R halkası için $Spec(R)\neq\varnothing$ olması için gerek ve yeter koşul $R\neq 0$ olmasıdır. Ancak bu özellik modüller için geçerli değildir. Asal alt modülü olmayan ve asalsız modül olarak adlandırılan sıfırdan farklı modüller mevcuttur. Buna örnek olarak, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ nin $\mathbb{Z}$ -alt modülü olan

$$E(p)=\left\{\alpha\in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} : \text{ Bir } r\in\mathbb{Z} \text{ ve } n\in\mathbb{N}_0 \text{ için } \alpha=\frac{r}{p^n}+\mathbb{Z}\right\}$$

verilebilir [36].

Şimdi, asal alt modüller kümesinin boş olmadığı bir modül olan ve kuvvetli 0-boyutlu modülleri tanımlarken kullanacağımız çarpımsal modül tanımını verelim.

Tanım 4.8 M bir R-modül olsun. M nin her N alt modülü için $N=IM$ olacak şekilde R halkasının bir I ideali varsa M ye bir çarpımsal modül denir [37].

Aşağıdaki önerme, çarpımsal modüllerin ve alt modüllerinin önemli bir karakterizasyonunu vermektedir.

Önerme 4.9 M bir R-modül olsun. M nin çarpımsal R-modül olması için gerek ve yeter koşul M nin her N alt modülü için $N=(N:M)M$ olmasıdır [20].

El-Bast ve Smith'in "Multiplication Modules" isimli çalışmalarında çarpımsal modüllerin alt modülleri ve asal alt modülleri ile ilgili verdikleri teoremlerden bazıları da şu şekildedir:

Teorem 4.10 M bir sadık R-modül olsun. Öyleyse M nin bir çarpımsal modül olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki ifadelerin sağlanmasıdır [37]:

i. R halkasının ideallerinin boştan farklı bir $I_\lambda \ (\lambda \in \Lambda)$ ailesi için $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (I_\lambda M) = \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \right) M$ dir.

ii. M nin bir N alt modülü ve R halkasının $N \subset AM$ koşulunu sağlayan A ideali için $B \subset A$ ve $N \subseteq BM$ olacak şekilde bir B ideali vardır.

Tanım 4.11 M bir R-modül, N de M nin bir has alt modülü olsun. M nin bir başka K alt modülü için $N \subseteq K \subseteq M$ iken $N = K$ veya $K = M$ ise N ye M nin bir maksimal alt modülü denir. Bu tanıma denk olarak N alt modülünün M nin bir maksimal alt modülü olması için gerek ve yeter koşul M/N nin bir basit modül olmasıdır [20].

Teorem 4.12 M bir çarpımsal R-modül olsun. Öyleyse

i. M nin her has alt modülü, M nin bir maksimal alt modülü tarafından kapsanır.

ii. Bir K alt modülünün, M nin maksimal alt modülü olması için gerek ve yeter koşul R halkasının $K = PM \neq M$ olacak şekilde bir P maksimal idealinin bulunmasıdır [37].

Teorem 4.13 P, R halkasının bir asal ideali ve M bir sadık çarpımsal R-modül olsun. $a \in R$ ve $x \in M$ olmak üzere $ax \in PM$ ise $a \in P$ veya $x \in PM$ dir [37].

Bu teoremin ifadesine göre, M bir sadık çarpımsal R-modül ve P de R halkasının $M \neq PM$ olacak şekilde bir asal ideali ise PM alt modülü asaldır.

Teorem 4.14 M bir çarpımsal R-modül N de M nin has alt modülü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir [37].

i. N alt modülü asaldır.

ii. $(N : M)$ ideali asaldır.

iii. R halkasının *ann*(M) idealini içeren bazı P asal idealleri için $N = PM$ dir.

Teorem 4.12 ve Teorem 4.14'e dayanarak M bir çarpımsal modül ise $Spec(M)$ kümesinin boş kümeden farklı olduğu görülmektedir.

Teorem 4.15 M bir sadık çarpımsal R-modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir [37].

i. M, sonlu üretilmiştir.

ii. A ve B, R halkasının idealleri olmak üzere $AM \subseteq BM$ ise $A \subseteq B$ dir.

iii. M nin her N alt modülü için $N = IM$ olacak şekilde tek bir I ideali vardır.

iv. R halkasının herhangi bir A has ideali için $M \neq AM$ dir.

v. R halkasının herhangi bir P maksimal ideali için $M \neq PM$ dir.

Halkalar teorisinde idealler için verilen boyut ve radikal kavramının modüller teorisindeki versiyonu şu şekildedir:

Tanım 4.16 M bir R-modül olmak üzere M nin (Krull) boyutu, $Kboy(M) = Kboy\left(R/ann(M)\right)$ şeklinde tanımlanır [38].

Yukarıdaki tanıma dayanarak, M bir çarpımsal modül ise $Kboy(M) = \sup_k \{P_0 \subset P_1 \subset ... \subset P_k : P_i \in Spec(M)\}$ şeklindedir.

Tanım 4.17 M bir R-modül ve N de M nin bir alt modülü olsun. M nin N yi içeren tüm asal alt modüllerinin kesişimine N nin radikali denir ve $\text{M-rad}(N)$ ile gösterilir [20].

Ali'nin "Idempotent and Nilpotent Submodules of Multiplication Modules" isimli makalesinde, nilpotent ideal kavramı genelleştirilerek nilpotent alt modül tanımı şu şekilde verilmiştir:

Tanım 4.18 M bir R-modül, N de M nin bir alt modülü olsun. Bir pozitif k tamsayısı için $(N : M)^k N = 0$ ise N alt modülüne nilpotent alt modül denir. Eğer Rm, M nin nilpotent alt modülü ise $m \in M$ elemanı nilpotent olarak adlandırılır ve tüm nilpotent elemanların kümesi $Nil(M)$ ile gösterilir [39].

Tanım 4.19 M bir R-modül olmak üzere M nin sıfırdan farklı nilpotent elemanı yoksa M ye indirgenmiş modül denir.

Ali ve Smith'in "Pure Submodules of Multiplication Modules" isimli makalesinde ise idempotent ideallerin genelleştirmesi olan idempotent alt modül aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 4.20 M bir R-modül, N de M nin bir alt modülü olsun. Eğer $N=(N:M)N$ ise N alt modülüne idempotent alt modül denir [40].

Tanım 4.21 M bir R-modül ve N de M nin bir alt modülü olsun. R nin her I ideali için $IN = N \cap IM$ ise N alt modülüne M nin bir pür alt modülü denir [41].

Tanım 4.20 ve 4.21'de görüldüğü üzere; eğer M bir çarpımsal R-modül ve N de M nin bir pür alt modülü ise $I=\left(N:M\right)$ olarak alınırsa, $\left(N:M\right)N = N \cap \left(N:M\right)M = N$ olduğundan N aynı zamanda bir idempotent alt modüldür. Bu ifadenin tersi ise N bir çarpımsal alt modül yani, M nin her K alt modülü için $K \cap N = \left(K:N\right)N$ koşulu sağlandığında doğrudur [40].

Kesir modüllerinin asal alt modülleri ise Moore ve Smith tarafından "Prime and Radical Submodules of Modules over Commutative Rings" isimli çalışmada karakterize edilmiştir [42].

Önerme 4.22 S, R halkasının çarpımsal kapalı alt kümesi ve M bir R-modül olsun. O halde $S^{-1}M = \left\{ \frac{m}{s} : m \in M, s \in S \right\}$ bir $S^{-1}R$-modüldür. Ayrıca M bir çarpımsal R-modül ise $S^{-1}M$ bir çarpımsal $S^{-1}R$-modüldür [20].

Teorem 4.23 S, R halkasının çarpımsal kapalı alt kümesi ve M bir R-modül olmak üzere $S^{-1}M$ nin asal $S^{-1}R$-alt modüllerinin kümesi şu şekildedir [42]:

$$\textit{Spec}(S^{-1}M) = \left\{ S^{-1}\mathfrak{P} \,\middle|\, (\mathfrak{P}:M) \cap S = \varnothing \text{ ve } \mathfrak{P} \in \textit{Spec}(M) \right\}.$$

4.2 Kompakt Paketlenmiş Modüller

Bu bölümde halkalar için yapılmış olan Asaldan Kaçınma Teoreminin ve kompakt paketlenmiş halka kavramının modüller üzerindeki yeni tanımını veren ve kuvvetli 0-boyutlu modüllere motivasyon sağlayan çalışmalara değinilecektir.

Lu tarafından 1997 yılında yayınlanmış olan "Unions of Prime Submodules" makalede, halkalar için ispatlanmış olan Asaldan Kaçınma Teoremi, değişmeli halkalar üzerindeki modüllere genelleştirilmiştir.

McCoy tarafından idealler için [1] numaralı kaynakta verilen aşağıdaki özelliğin, bir grubun alt grubu için de geçerli olduğu şu şekilde ifade edilmiştir.

Tanım 4.24 M bir R-modül ve $L, L_1, ..., L_n$ de M nin alt modülleri olsun. Eğer L alt modülü, $L_1, .., L_n$ alt modüllerinin herhangi $n-1$ tanesinin birleşiminde içerilmezse $L \subseteq L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_n$ kapsamasına bir etkin örtülüş denir. Eğer $L = L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_n$ ve L_k $(1 \le k \le n)$ alt modüllerinden hiçbiri birleşimlerinden çıkarılamıyorsa bu birleşime etkin birleşim denir. M nin alt modüllerinin bir örtüsü, gereksiz terimlerin silinmesiyle etkin hale getirilebilir ve buna etkin indirgeme denir [16].

Yardımcı Teorem 4.25 $L = L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_n$ $(n > 1)$ bir R-modül M nin alt modüllerinin etkin birleşimi olsun. O halde her k için $\bigcap_{j \ne k} L_j = \bigcap_{j=1}^{n} L_j$ dir [16].

Önerme 4.26 $L_1, ..., L_n$ ler $(n > 1)$ R-modül M nin alt modülleri olmak üzere $L \subseteq L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_n$ bir etkin örtülüş olsun. Her $j \ne k$ için $(L_j : M) \not\subseteq (L_k : M)$ ise $k \in \{1, 2, ..., n\}$ için hiçbir L_k alt modülü M nin asal alt modülü değildir [16].

İspat: $L \subseteq L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_n$ bir etkin örtülüş olduğundan, $L = (L \cap L_1) \cup (L \cap L_2) \cup ... \cup (L \cap L_n)$ bir etkin birleşimdir. Böylece her $k \le n$ için bir $e_k \in L - L_k$ elemanı vardır. Ayrıca, Yardımcı Teorem 4.25'ten $\bigcap_{j \ne k} (L \cap L_j) \subseteq L \cap L_k$ dır. Eğer $j \ne k$ ise $(L_j : M) \not\subseteq (L_k : M)$ dir. O halde bir $s_j \in (L_j : M) - (L_k : M)$ elemanı mevcuttur. Şimdi bazı L_k alt modüllerinin asal olduğunu kabul edelim. Öyleyse

$\left(L_k : M\right)$ bir asal idealdir ve böylece $s = \prod_{j \neq k} s_j \in \left(L_j : M\right)$ dir, fakat $s \notin \left(L_k : M\right)$ dir. Sonuç olarak, her $j \neq k$ için $se_k \in L \cap L_j$ dir, ancak $se_k \notin L \cap L_k$ dir ve bu ise $\bigcap_{j \neq k} \left(L \cap L_j\right) \subseteq L \cap L_k$ olması ile çelişir. Dolayısıyla L_k alt modüllerinin hiçbiri asal değildir.

Sıradaki teoremde ise modüller için Asaldan Kaçınma Teoremi'nin ifade ve ispatı verilmiştir.

Teorem 4.27 M bir R-modül, $L_1, L_2, ..., L_n$ alt modülleri M nin en fazla iki tanesi asal olmayan sonlu sayıda alt modülleri ve L de M nin $L \subseteq L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_n$ şeklindeki bir alt modülü olsun. $j \neq k$ iken $(L_j : M) \nsubseteq (L_k : M)$ ise bazı k lar için $L \subseteq L_k$ dır [16].

İspat: $L \subseteq L_{i_1} \cup L_{i_2} \cup ... \cup L_{i_m}$ örtülüşü verilen $L \subseteq L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_n$ örtülüşünün bir etkin indirgemesi olsun. Öyleyse $1 \leq m \leq n$ dir ve $m \neq 2$ dir. Eğer $m > 2$ ise en az bir L_{i_j} asal olur. Fakat bu ifade Önerme 4.26'ya göre $j \neq k$ iken $(L_j : M) \not\subset (L_k : M)$ olduğundan imkansızdır. Böylece $m = 1$ olup, bazı k lar için $L \subseteq L_k$ dır.

Bu çalışmadan sonra, Çallıalp ve Tekir tarafından yapılmış olan "On Unions of Prime Submodules" isimli makalede değişmeli bir halka üzerindeki modülün alt modüllerinin sonlu ve sonsuz birleşimleri incelenmiş olup kompakt paketlenmiş modüllerin tanımı verilmiştir.

Tanım 4.28 R değişmeli bir halka, M bir R-modül ve N de M nin bir alt modülü olsun. Eğer N alt modülü, M nin asal alt modüllerinin bir ailesinin birleşiminde kapsanıyorken bu ailedeki asal alt modüllerden birinde kapsanıyorsa N alt modülüne asal alt modüllerle kompakt paketlenmiş denir. M nin her alt modülü asal alt modüllerle kompakt paketlenmiş ise M ye bir kompakt paketlenmiş modül denir [17].

Makalede yer alan kompakt paketlenmiş modüllerin bir karakterizasyonunu veren önemli teoremler şu şekildedir.

Teorem 4.29 M bir çarpımsal R-modül olsun. M nin bir kompakt paketlenmiş modül olması için gerek ve yeter koşul M nin her asal alt modülünün, asal alt modüllerle kompakt paketlenmiş olmasıdır [17].

İspat: $(\Rightarrow)$ M bir kompakt paketlenmiş R-modül ise her asal alt modülü kompakt olarak paketlenmiştir.

$(\Leftarrow)$ M nin her asal alt modülünün kompakt paketlenmiş olduğunu kabul edelim. N M nin bir alt modülü, $N_i\left(i\in I\right)$ alt modülleri de M nin asal alt modülleri olmak üzere $N\subseteq\bigcup_{i\in I}N_i$ ve T de M nin $N\subseteq T\subseteq\bigcup_{i\in I}N_i$ olacak şekilde bir maksimal alt modülü olsun. T aynı zamanda bir asal alt modül olduğundan hipoteze dayanarak, bazı $i\in I$ için $N\subseteq T\subseteq N_i$ elde edilir.

Teorem 4.30 Bir çarpımsal R-modül M nin kompakt paketlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin her asal alt modülünün M nin devirli bir alt modülünün radikali olmasıdır [17].

İspat: $(\Rightarrow)$ M bir kompakt paketlenmiş R-modül olsun. N alt modülünün, M nin bir asal alt modülü olduğunu ve M nin bir devirli alt modülünün radikali olmadığını kabul edelim. Her $m\in N$ için $N\neq\sqrt{(m)}$ ve $\sqrt{(m)}$ ideali de M nin m elemanını içeren tüm asal alt modüllerinin kesişimi olduğundan $m\in N_m$ fakat $N\not\subset N_m$ olacak şekilde bir N_m asal alt modülü vardır. Fakat bu da $N\subseteq\bigcup_{m\in N}N_m$ olduğundan M nin bir kompakt paketlenmiş modül olmasıyla çelişir.

$(\Leftarrow)$ M nin her asal alt modülünün M nin bir devirli alt modülünün radikali olduğunu kabul edelim. N ve $N_i\left(i\in I\right)$ alt modülleri M de asal ve bazı $m\in M$ elemanları için $N=\sqrt{(m)}$ olmak üzere $N\subseteq\bigcup_{i\in I}N_i$ olsun. O halde $m\in\bigcup_{i\in I}N_i$ dir ve böylece bazı $i\in I$ için $m\in N_i$ elde edilir. Dolayısıyla bazı $i\in I$ için $N=\sqrt{(m)}\subseteq N_i$ olduğu görülür. Teorem 4.29'dan M bir kompakt paketlenmiş modüldür.

Bu çalışmadan sonra Tekir tarafından yapılan "On Coprimely Packed Multiplication Modules" isimli çalışmada aralarında asal paketlenmiş halka tanımının çarpımsal modüller üzerindeki yeni tanımı verilmiştir. Kompakt paketlenmiş modüllerin bir genellemesi olan ve aralarında asal paketlenmiş modül olarak adlandırılan bu modüller incelenmiştir.

Tanım 4.31 M bir çarpımsal R-modül olsun. M nin bir N alt modülü, M nin bir asal alt modüller ailesinin her elemanı ile aralarında asal iken bu ailedeki asal alt modüllerin birleşiminde kapsanmıyorsa, N alt modülüne aralarında asal paketlenmiş denir. Her alt modülü aralarında asal paketlenmiş olan modüllere aralarında asal paketlenmiş modül denir [18].

Kompakt paketlenmiş modüller ile aralarında asal paketlenmiş modüller arasındaki bağlantıları gösteren teoremler aşağıda verilmiştir.

Önerme 4.32 M bir çarpımsal R-modül olsun. M bir kompakt paketlenmiş modül ise aralarında asal paketlenmiştir [18].

İspat: M bir kompakt paketlenmiş modül olsun ve M nin aralarında asal paketlenmiş olmadığını kabul edelim. O halde, M nin sıfırdan farklı bir N alt modülü ve *Spec*(M) nin boş kümeden farklı bir X alt kümesi vardır öyle ki her $P \in X$ için $N + P = M$ ve $N \subseteq \bigcup_{P \in X} P$ sağlanır. M kompakt paketlenmiş olduğundan bazı $P \in X$ için $N \subseteq P$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla M bir aralarında asal paketlenmiş R-modüldür.

Bu önermenin tersinin sağlandığı koşul ise sıradaki önermede verilmiştir.

Önerme 4.33 M bir çarpımsal serbest burulmalı R-modül ve M nin boyutu 1 olsun. M nin kompakt paketlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin aralarında asal paketlenmiş olmasıdır [18].

İspat: M nin aralarında asal paketlenmiş iken kompakt paketlenmiş olduğunun gösterilmesi yeterlidir. N, M nin sıfırdan farklı bir alt modülü ve X de *Spec*(M) nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. $N \subseteq \bigcup_{P \in X} P$ olduğunu kabul edelim (Kabulümüzü etkilemeyeceğinden $0 \notin X$ olarak kabul edebiliriz). M aralarında asal paketlenmiş olduğundan bazı $P \in X$ için $N+P \neq M$ dir. M bir çarpımsal R-modül olduğundan Teorem 4.11'e göre $N+P \subseteq T$ olacak şekilde M nin bir T maksimal alt modülü vardır. Fakat M bir serbest burulmalı R-modül olduğundan 0_M bir asal alt modüldür. Ayrıca, M nin boyutu 1 olduğundan $P=T$ ve $N \subseteq P$ elde edilir. Böylece M bir kompakt paketlenmiştir modüldür.

4.3 Kuvvetli 0-boyutlu Modüllere Giriş

Halkaların asal idealleri için geçerli olan, Önerme 2.4'te verilen özellik modüller için genel olarak doğru değildir. Örneğin; $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ele alındığında $(0,0)$ bir asal alt modüldür ve $(\mathbb{Z}\times 0)\cap(0\times\mathbb{Z})=(0,0)$ olur. Ancak $\mathbb{Z}\times 0 \not\subseteq (0,0)$ ve $0\times\mathbb{Z} \not\subseteq (0,0)$ olduğu görülmektedir. Eğer modül, çarpımsal bir modül ise bu durum farklılık göstermektedir. Yani çarpımsal modüllerde bir asal alt modül, alt modüller ailesinin herhangi bir sonlu kesişimini kapsıyorken bu ailedeki bir alt modülü de kapsar [43]. Bu kesişimin sonsuz olduğu durumun incelenmesi için kuvvetli 0-boyutlu modüller aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 4.34 M bir çarpımsal R-modül, S bir indeks kümesi ve $\alpha \in S$ olmak üzere N_α lar M nin alt modülleri olsun. $\mathfrak{P}$, M nin bir asal alt modülü olmak üzere $\bigcap_{\alpha\in S} N_\alpha \subseteq \mathfrak{P}$ iken bazı $\beta \in S$ için $N_\beta \subseteq \mathfrak{P}$ oluyorsa $\mathfrak{P}$ asal alt modülüne kuvvetli asal denir. M nin tüm asal alt modülleri kuvvetli asal ise M ye kuvvetli 0-boyutlu modül denir.

Önerme 4.35 Kuvvetli 0-boyutlu bir modülün her homomorfik görüntüsü de kuvvetli 0-boyutludur.

İspat: M bir kuvvetli 0-boyutlu R-modül ve M' herhangi bir R-modül olmak üzere $f: M \to M'$ bir modül epimorfizması olsun. M' nün N_α' alt modülleri ve $\mathfrak{P}'$ asal alt modülü için $\bigcap_{\alpha\in S} N_\alpha' \subseteq \mathfrak{P}'$ kabul edelim. f bir epimorfizma olduğundan, M nin N_α alt modülleri ve $\mathfrak{P}$ asal alt modülü vardır öyle ki *Çek*$(f) \subseteq N_\alpha$, *Çek*$(f) \subseteq \mathfrak{P}$ ve $f(N_\alpha)=N_\alpha'$, $f(\mathfrak{P})=\mathfrak{P}'$ dir. Böylece $\bigcap_{\alpha\in S} N_\alpha' = \bigcap_{\alpha\in S} f(N_\alpha) = f\left(\bigcap_{\alpha\in S} N_\alpha\right) \subseteq \mathfrak{P}' = f(\mathfrak{P})$

dir. Buradan $\bigcap_{\alpha\in S} N_\alpha \subseteq \mathfrak{P}$ elde edilir. M bir kuvvetli 0-boyutlu modül olduğundan, bazı $\alpha\in S$ için $N_\alpha \subseteq \mathfrak{P}$ dir. Dolayısıyla $N_\alpha' = f(N_\alpha) \subseteq f(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}'$ olduğu görülür.

Sonuç 4.36 M bir R-modül ve N de M nin bir alt modülü olsun. M bir kuvvetli 0-boyutlu modül ise M/N bir kuvvetli 0-boyutlu $R/(N:M)$-modüldür.

İspat: M bir kuvvetli 0-boyutlu modül ise Önerme 4.35'ten M/N de öyledir. Halkaların değişiminden M/N kuvvetli 0-boyutlu bir $R/(N:M)$-modüldür.

Teorem 4.37 M bir serbest burulmalı R-modül olsun. M bir kuvvetli 0-boyutlu modül ise M basit modüldür.

İspat: M bir kuvvetli 0-boyutlu R-modül olsun. N de M nin sıfırdan farklı tüm N_α alt modüllerinin kesişimi olsun. Çelişki elde etmek için $N=0$ kabul edelim. M bir kuvvetli 0-boyutlu modül ve (0) asal olduğundan, bir α için $N_\alpha = 0$ elde ederiz ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $N \neq 0$ dır. $0 \neq m \in N$ alalım. M nin sıfırdan farklı en küçük alt modülü N ve $Rm \subseteq N$ olduğundan $Rm = N$ elde edilir. Şimdi, $0 \neq a \in R$ alalım. Buradan $Ram \subseteq Rm$ dir. Böylece $Rm = N = Ram$ olduğu görülür. Dolayısıyla $m = ram$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. M serbest burulmalı olduğundan, a elemanı R halkasının birimsel elemanıdır. Böylece R bir cisimdir, yani M bir basit modüldür.

Önerme 4.38 Her kuvvetli 0-boyutlu modül sıfır boyutludur.

İspat: M bir kuvvetli 0-boyutlu modül ve $\mathfrak{P}_1$ ve $\mathfrak{P}_2$ alt modülleri, $\mathfrak{P}_1 \subseteq \mathfrak{P}_2$ olacak şekilde M nin iki asal alt modülü olsun. Sonuç 4.36 dan, $M/\mathfrak{P}_1$ bir kuvvetli 0-boyutlu $R/(\mathfrak{P}_1 : M)$-modüldür. $\mathfrak{P}_1$ asal olduğundan $M/\mathfrak{P}_1$ serbest burulmalıdır. Teorem 4.37 den $M/\mathfrak{P}_1$ basit modüldür. Buradan $\mathfrak{P}_2/\mathfrak{P}_1 = (0)$ dır ve böylece $\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_1$ elde edilir.

Teorem 4.39 Her Artinian çarpımsal modül kuvvetli 0-boyutludur.

İspat: M bir Artinian çarpımsal modül olsun ve M nin N_α alt modülleri ve $\mathfrak{P}$ asal alt modülü için $\bigcap_{\alpha\in S} N_\alpha \subseteq \mathfrak{P}$ kabul edelim. M bir Artinian modül olduğundan, S nin sonlu bir $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ alt kümesi için $\bigcap_{\alpha\in S} N_\alpha = \bigcap_{i=1}^{n} N_{\alpha_i}$ dir. Buradan

$$\left(\bigcap_{\alpha\in S} N_\alpha : M\right) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} N_{\alpha_i} : M\right) = \bigcap_{i=1}^{n}\left(N_{\alpha_i} : M\right) \subseteq (\mathfrak{P} : M)$$

elde edilir. Böylece, $(\mathfrak{P} : M)$ ideali R nin asal ideali olduğundan bazı $k \in \mathbb{Z}^+$ indisleri için $\left(N_{\alpha_k} : M\right) \subseteq (\mathfrak{P} : M)$ elde edilir. Dolayısıyla $\left(N_{\alpha_k} : M\right)M \subseteq (\mathfrak{P} : M)M$ dir. M çarpımsal modül olduğundan bazı $\alpha_k \in S$ indisleri için $N_{\alpha_k} \subseteq \mathfrak{P}$ dir.

Teorem 4.40 M bir sonlu üretilmiş sadık çarpımsal R-modül olsun. M nin bir kuvvetli 0-boyutlu modül olması için gerek ve yeter koşul R halkasının kuvvetli 0-boyutlu halka olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ M bir kuvvetli 0-boyutlu modül ve R halkasının I_α idealleri ve P asal ideali için $\bigcap_{\alpha\in S} I_\alpha \subseteq P$ olsun. Böylece $\left(\bigcap_{\alpha\in S} I_\alpha\right)M \subseteq PM$ dir ve Teorem 4.13'ten PM, M nin bir asal alt modülüdür. Teorem 4.10 (i)'den ise $\bigcap_{\alpha\in S}\left(I_\alpha M\right) \subseteq PM$ elde edilir. M bir kuvvetli 0-boyutlu modül olduğundan bazı $\beta \in S$ indisleri için $I_\beta M \subseteq PM$ dir. Böylece Teorem 4.14'ten $I_\beta \subseteq P$ olduğu görülür.

$(\Leftarrow)$ R bir kuvvetli 0-boyutlu halka ve M nin N_α alt modülleri ve $\mathfrak{P}$ asal alt modülü için $\bigcap_{\alpha\in S} N_\alpha \subseteq \mathfrak{P}$ olsun. M bir çarpımsal modül olduğundan R halkasının I_α idealleri ve P asal ideali vardır öyle ki $N_\alpha = I_\alpha M$ ve $\mathfrak{P} = PM$ dir. Böylece

$$PM = \mathfrak{P} \supseteq \bigcap_{\alpha\in S} N_\alpha = \bigcap_{\alpha\in S}\left(I_\alpha M\right) = \left(\bigcap_{\alpha\in S} I_\alpha\right)M$$

dir ve buradan $\bigcap_{\alpha\in S} I_\alpha \subseteq P$ olduğu görülür. R bir kuvvetli 0-boyutlu halka olduğundan, bazı $\beta\in S$ indisleri için $I_\beta \subseteq P$ elde edilir. Dolayısıyla $N_\beta = I_\beta M \subseteq PM = \mathfrak{P}$ dir.

Önerme 4.41 M bir çarpımsal R-modül ve S de R halkasının bir çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. M bir kuvvetli 0-boyutlu R-modül ise $S^{-1}M$ de bir kuvvetli 0-boyutlu $S^{-1}R$-modüldür.

İspat: M nin N_α alt modülleri ve $\mathfrak{P}$ asal alt modülü için $\bigcap_{\alpha\in T} S^{-1}N_\alpha \subseteq S^{-1}\mathfrak{P}$ olsun. $S^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in T} N_\alpha\right) \subseteq \bigcap_{\alpha\in T} S^{-1}N_\alpha \subseteq S^{-1}\mathfrak{P}$ olduğundan, $\bigcap_{\alpha\in T} N_\alpha \subseteq \mathfrak{P}$ dir. M bir kuvvetli 0-boyutlu modül olduğundan bazı $\beta\in T$ için $N_\beta \subseteq \mathfrak{P}$ dir. Dolayısıyla bazı $\beta\in T$ için $S^{-1}N_\beta \subseteq S^{-1}\mathfrak{P}$ elde edilir.

4.4 Von Neumann Regüler Modüller ve Kuvvetli 0-boyutlu Modüller

Bu bölümde von Neumann regüler modüller ile kuvvetli 0-boyutlu halkalar arasındaki ilişkiler incelenecektir. Bunun için öncelikle von Neumann regüler modül tanımını verelim.

Tanım 4.42 M bir R-modül olmak üzere M nin von Neumann regüler olması için gerek ve yeter koşul M nin her devirli alt modülünün M de bir direkt toplam terimi olmasıdır [44].

Tanım 4.43 M bir R-modül olsun. Bir $m\in M$ elemanına $m = ram$ (sırasıyla, $m = rm$) olacak şekilde bir $r\in (Rm:M)$ ve $a\in R$ (sırasıyla, $r\in (Rm:M)$) varsa von Neumann regüler (sırasıyla, idempotent) denir [39].

Bu tanıma dayanarak $m\in M$ bir idempotent eleman ise $m = rm = r^2m$ olduğundan m bir von Neumann regüler elemandır. Ayrıca tanımdan açıkça görüldüğü üzere, m elemanının idempotent olması için gerek ve yeter koşul Rm alt modülünün M nin bir idempotent alt modülü, yani $Rm = (Rm:M)m$ olmasıdır.

Teorem 4.44 R bir halka ve M bir sadık R-modül olsun.

i. *Nil*(M), M nin bir alt modülüdür.

ii. M bir çarpımsal modül ise *Nil*$(M) =$ *Nil*$(R)M = \bigcap_{\mathfrak{Q}\in Spec(M)} \mathfrak{Q}$ dir [39].

İspat: ***i.*** $m_1, m_2 \in$ *Nil*(M) olsun. O halde Rm_1 ve Rm_2 alt modülleri M nin nilpotent alt modülleridir. [38, Önerme 4(6)]'dan M bir sadık R-modül iken iki nilpotent alt modülün toplamı da nilpotenttir. Dolayısıyla $Rm_1 + Rm_2$ bir nilpotent alt modüldür. $R(m_1 + m_2) \subseteq Rm_1 + Rm_2$ olduğundan $m_1 + m_2 \in$ *Nil*(M) dir. [38, Önerme 4(4)]'ten her $r \in R$ ve $m \in$ *Nil*(M) için Rrm nilpoent alt modüldür. Böylece $rm \in$ *Nil*(M) elde edilir.

ii. M bir sadık çarpımsal modül ve $m \in$ *Nil*(M) olsun. O halde Rm nilpotenttir ve [38, Önerme 4(1)]'den $(Rm : M)$ nilpotent idealdir. Böylece $(Rm : M) \subseteq$ *Nil*(R) ve $m \in (Rm : M)M \subseteq$ *Nil*$(R)M$ olduğundan *Nil*$(M) \subseteq$ *Nil*$(R)M$ elde edilir. Ters kapsama için, $a \in$ *Nil*(R) alalım. [38, Önerme 4(4)]'den her $m \in M$ için $am \in$ *Nil*(M) dir. Buradan $aM \subseteq$ *Nil*(M) elde edilir ve bu da *Nil*$(R)M \subseteq$ *Nil*(M) olduğunu gösterir. Sonuç olarak, *Nil*$(R)M =$ *Nil*(M) dir. Şimdi $m \in$ *Nil*(M) alalım. $(Rm : M)$ ideali, R halkasının nilpotent ideali olduğundan $(Rm : M)^k = 0$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. M nin tüm $\mathfrak{Q}$ asal alt modülleri için $(\mathfrak{Q} : M)$ idealleri de R halkasının asal idealleridir. Böylece $(Rm : M)^k \subseteq (\mathfrak{Q} : M)$ olduğundan $(Rm : M) \subseteq (\mathfrak{Q} : M)$ elde edilir. Dolayısıyla $m \in (Rm : M)M \subseteq (\mathfrak{Q} : M)M = \mathfrak{Q}$ olduğu görülür. Buradan $m \in \bigcap_{\mathfrak{Q}\in Spec(M)} \mathfrak{Q}$ yani *Nil*$(M) \subseteq \bigcap_{\mathfrak{Q}\in Spec(\mathrm{M})} \mathfrak{Q}$ elde edilmiş olur. Ters kapsama için, M bir sadık çarpımsal modül olduğundan *Nil*$(R)M = \left(\bigcap_{P\in Spec(R)} P \right) M = \bigcap_{P\in Spec(R)} PM$ dir. R halkasının bazı P_i asal idealleri için $M \neq P_i M$ ise $P_i M$ alt modülleri, M nin asal alt modülleridir. Böylece *Nil*$(R)M = \bigcap_{P_i\in Spec(R)} P_i M \supseteq \bigcap_{\mathfrak{Q}\in Spec(M)} \mathfrak{Q}$ dir. R halkasının tüm P

asal idealleri için, $M = PM$ ise $\bigcap_{\mathfrak{Q}\in Spec(M)} \mathfrak{Q} \subseteq Nil(R)M = M$ dir. Sonuç olarak, $\bigcap_{\mathfrak{Q}\in Spec(M)} \mathfrak{Q} = Nil(R)M$ elde edilmiş olur.

Önerme 4.45 R bir halka ve M bir sadık çarpımsal R-modül olsun. M nin von Neumann regüler olması için gerek ve yeter koşul M nin her elemanının von Neumann regüler olmasıdır [39].

İspat: $(\Leftarrow)$ $m\in M$ bir von Neumann regüler eleman ise [38, Lemma 8]'den Rm bir pür alt modüldür. M bir sadık çarpımsal R-modül olduğundan [38, Önerme 2]'den Rm alt modülü M nin bir direkt toplam terimidir. Böylece M bir von Neumann regüler modüldür.

$(\Rightarrow)$ M bir von Neumann regüler modül ve $m\in M$ ise Rm alt modülü M nin bir direkt toplam terimidir ve böylece Rm bir pür alt modüldür. Dolayısıyla Rm idempotent olup $m\in M$ bir idempotent elemandır. Her idempotent eleman von Neumann regüler olduğundan ispat tamamlanır.

Önerme 4.46 R bir halka ve M bir sadık çarpımsal R-modül olsun. Eğer M bir von Neumann regüler modül ise $Kboy(M)=0$ ve $Nil(M)=0$ dır. İfadenin tersi ise M nin sonlu üretilmiş olduğu durumda doğrudur [39].

İspat: $(\Rightarrow)$ $\mathfrak{Q}$, R-modül M nin bir asal alt modülü olsun. M bir sadık çarpımsal R-modül olduğundan Teorem 4.13 ten R halkasının bir P asal ideali için $\mathfrak{Q}=PM$ ve $M\neq PM$ dir. Böylece [37, Sonuç 3.5]'ten M/PM bir sonlu üretilmiş serbest burulmalı R/P-modüldür. [39, Önerme 9(3)]'ten M/PM bir basit R/P-modüldür. O halde $\mathfrak{Q}=PM$ maksimaldir ve böylece $Kboy(M)=0$ elde edilir. Şimdi $m\in Nil(M)$ olsun. Öyleyse bazı k pozitif tamsayıları için $(Rm:M)^k m=0$ dir. M bir von Neumann regüler modül olduğundan Önerme 4.45'e dayanarak m elemanının von Neumann regüler olduğu görülür ve dolayısıyla bazı $a\in R$ için $Rm=(Rm:M)am$ dir. Böylece $(Rm:M)^k am=(Rm:M)^{k-1}(Rm:M)am=(Rm:M)^{k-1}m=0$ dır. Bu şekilde devam edilerek $(Rm:M)m=0$ elde edilir. Buradan $Rm=(Rm:M)am=0$, yani $m=0$ olduğu görülür. Dolayısıyla $Nil(M)=0$ dır.

$(\Leftarrow)$ *Kboy*$(M)=0$ ve *Nil*$(M)=0$ olduğunu kabul edelim. Teorem 4.44'ten *Nil*$(R)=0$ dır. P ideali, R halkasının bir asal ideali olsun. M bir sonlu üretilmiş, sadık ve çarpımsal modül olduğundan Teorem 4.13'e göre PM alt modülü M nin asal alt modülüdür. Dolayısıyla PM alt modülü, M nin maksimal alt modülüdür ve Teorem 4.11'den, P ideali R halkasında maksimaldir. Böylece *Kboy*$(R)=0$ olup R bir von Neumann regüler halkadır. Şimdi $m\in M$ alalım. O halde $(Rm:M)$, R nin bir idealidir. R bir von Neumann regüler halka olduğundan $(Rm:M)$ ideali R nin pür idealidir. [39, Teorem 3(1)]'den $Rm=(Rm:M)M$ alt modülü, M nin pür alt modülüdür. [39, Önerme 2]'den ise Rm alt modülünün, M nin bir direkt toplam terimi olduğu elde edilir ve böylece M bir von Neumann regüler modüldür.

Yardımcı Teorem 4.47 R bir halka, M bir R-modül, K ile L, M nin iki alt modülü ve R halkasının her $\mathfrak{M}$ maksimal ideali için $K_{\mathfrak{M}}$ ve $L_{\mathfrak{M}}$, $M_{\mathfrak{M}}$ nin $R_{\mathfrak{M}}$-alt modülleri olsun. Her $\mathfrak{M}$ için $K_{\mathfrak{M}}=L_{\mathfrak{M}}$ ise $K=L$ dir [45].

Yardımcı Teorem 4.48 M bir çarpımsal R-modül olsun. R nin her $\mathfrak{M}$ maksimal ideali için $M_{\mathfrak{M}}$ bir kuvvetli 0-boyutlu modül ise *Kboy*$(M)=0$ dır.

İspat: M nin $\mathfrak{P}$ ve $\mathfrak{Q}$ asal alt modülleri için $\mathfrak{P}\subseteq\mathfrak{Q}$ olsun. Buradan $\mathfrak{P}_{\mathfrak{M}}\subseteq\mathfrak{Q}_{\mathfrak{M}}$ dir. $M_{\mathfrak{M}}$ kuvvetli 0-boyutlu olduğundan Önerme 4.38'den *Kboy*$(M_{\mathfrak{M}})=0$ dır. Böylece $\mathfrak{P}_{\mathfrak{M}}=\mathfrak{Q}_{\mathfrak{M}}$ dir. Yardımcı Teorem 4.47'den de $\mathfrak{P}=\mathfrak{Q}$ elde edilir.

Teorem 4.49 M bir sonlu üretilmiş sadık çarpımsal R-modül olsun. M indirgenmiş ve R nin her $\mathfrak{M}$ maksimal ideali için $M_{\mathfrak{M}}$ bir kuvvetli 0-boyutlu modül ise M bir von Neumann regüler modüldür.

İspat: Önerme 4.46 ve Yardımcı Teorem 4.48'in sonucudur.

Teorem 4.50 M bir sadık çarpımsal R-modül olsun. Eğer M sonlu üretilmişse, M nin bir von Neumann regüler modül olması için gerek ve yeter koşul M nin her N alt modülünün idempotent olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ M bir von Neumann regüler modül ve N de M nin bir alt modülü olsun. Böylece $(N:M)N \subseteq (N:M)M = N$ olduğu görülmektedir. Ters kapsama için $m \in N$ alalım. Buradan $m = ram$ olacak şekilde $r \in (Rm:M)$ ve $a \in R$ vardır. $(Rm:M) \subseteq (N:M)$ olduğundan, $m = ram \in (Rm:M)am \subseteq (N:M)N$ dir. Böylece $N = (N:M)N$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ M nin her alt modülü idempotent ve $m \in M$ olsun. Öyleyse $Rm = (Rm:M)Rm$ dir. Buradan $m \in (Rm:M)m$ elde edilir ve böylece bazı $r \in (Rm:M)$ için $m = rm$ dir. Her idempotent eleman von Neumann regüler olduğundan Önerme 4.45'e dayanarak M nin bir von Neumann regüler modül olduğu elde edilir.

Teorem 4.51 M bir sadık çarpımsal R-modül olsun. Aşağıda sıralanan üç durumu göz önüne alalım.

i. M bir von Neumann regüler modüldür.
ii. M nin her asalımsı alt modülü maksimal alt modüldür.
iii. M nin her asalımsı alt modülü minimal asal alt modüldür.

M sonlu üretilmişse, *i* $\Rightarrow$ *ii* $\Rightarrow$ *iii* her zaman doğrudur. *iii* $\Rightarrow$ *i* gerektirmesi, M indirgenmiş modül ise doğrudur.

İspat: M sonlu üretilmiş bir modül olsun.

i $\Rightarrow$ ***ii***: M bir von Neumann regüler modül ve N de M nin bir asalımsı alt modülü olsun. N nin asal alt modülü olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü bu durumda, M bir von Neumann regüler modül olduğundan, *Kboy*$(M) = 0$ olup N alt modülünün maksimal olduğu elde edilir. Herhangi bir $r \in R$ ve $m \in M$ için $rm \in N$ olsun. Öyleyse $m \in N$ veya bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $r^k \in (N:M)$ dir. Eğer $m \in N$ ise ispat biter. $r^k \in (N:M)$ ise, bazı $x \in R$ elemanları için R bir von Neumann regüler halka olduğundan $r = rxr = ... = r^k x^{k-1} \in (N:M)$ elde edilir. Böylece N alt modülü bir asal alt modüldür.

ii$\Rightarrow$***iii***: M nin her asalımsı alt modülü maksimal olsun. Böylece, her asal alt modül asalımsı olduğundan asal alt modüllerin bir zinciri oluşmaz. Bu ise her asalımsı alt modülün minimal asal alt modül olduğunu gösterir.

Şimdi M nin indirgenmiş modül olduğunu kabul edelim.

iii$\Rightarrow$***i***: M nin her asalımsı alt modülü minimal asal alt modül olsun. Dolayısıyla her asal alt modül de minimal asal alt modüldür ve böylece *Kboy*$(M)=0$ dır. M indirgenmiş modül olduğundan, *Nil*$(M)=0$ dır. Önerme 4.46'dan M nin bir von Neumann regüler modül olduğu elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.52 R bir halka ve N de R-modül M nin bir alt modülü olsun. $H=\left\{m\in M : \text{Bir } k\in\mathbb{Z}^{+} \text{ için } (Rm:M)^{k}\, m\subseteq N\right\}$ kümesi tanımlansın. Eğer M bir çarpımsal modül ise H, M nin bir alt modülüdür. M aynı zamanda sonlu üretilmişse, $H=\text{M-rad}(N)$ dir [39].

Önerme 4.53 M bir sonlu üretilmiş çarpımsal R-modül ve N de M nin bir alt modülü olsun. M bir von Neumann regüler modül ise $N=\text{M-rad}(N)$ dir.

İspat: $\text{M-rad}(N)$ nin tanımından, $N\subseteq\text{M-rad}(N)$ olduğu bilinmektedir. Ters kapsama için $m\in\text{M-rad}(N)$ kabul edelim. Öyleyse Önerme 4.52'den, bir $k\in\mathbb{Z}^{+}$ için $(Rm:M)^{k}m\subseteq N$ dir. M bir von Neumann regüler modül olduğundan $m=ram$ olacak şekilde $r\in(Rm:M)$ ve $a\in R$ vardır. Buradan da $m=ram=r^{2}a^{2}m=...=r^{k}a^{k}m$ elde edilir ve dolayısıyla $m\in N$ bulunur.

Yardımcı Teorem 4.54 M bir sonlu üretilmiş sadık çarpımsal R-modül olsun. Öyleyse $M/$*Nil*(M) nin sıfırdan farklı nilpotent elemanı yoktur [39].

Tanım 4.55 M bir R-modül olsun. I ideali R halkasının asalımsı ideallerinin bir sonlu çarpımı olmak üzere M nin her N has alt modülü IM şeklindeyse M ye bir Q-modül denir [46].

Yardımcı Teorem 4.56 M bir sadık R-modül olsun. O halde R halkasının bir Q-halka ve M nin bir çarpımsal R-modül olması için gerek ve yeter koşul M nin bir Q-modül olmasıdır [46].

Önerme 4.57 M bir sadık çarpımsal R-modül olsun. Eğer R halkası von Neumann regüler ise M de von Neumann regülerdir. İfadenin tersi, R halkasının her P asal ideali için $M \neq PM$ iken doğrudur [39].

İspat: $(\Rightarrow)$ R halkası von Neumann regüler ise her ideali, dolayısıyla $(Rm:M)$ ideali bir pür idealdir [39]. Böylece [39, Teorem 3(1)]'e dayanarak $(Rm:M)M = Rm$ olduğundan Rm alt modülü M nin bir pür alt modülüdür. Her pür alt modül idempotent olduğundan [39, Önerme 2 (ii)]'den M bir von Neumann regüler modüldür.

$(\Leftarrow)$ R halkasının her P asal ideali için $M \neq PM$ koşulunu sağlayan M modülünün von Neumann regüler olduğunu kabul edelim. Önerme 4.46'dan $\mathit{Nil}(M)=0$ dır ve böylece Teorem 4.44'ten $\mathit{Nil}(R)=0$ dır. Teorem 4.13'e göre P ideali, R halkasında asal olduğundan, PM alt modülü de bir asal alt modüldür. Kabulümüze dayanarak, $\mathit{Kboy}(M)=0$ olduğundan PM, M nin maksimal alt modülüdür ve Teorem 4.11'den P, R nin maksimal idealidir. Böylece $\mathit{Kboy}(R)=0$ elde edilir ve dolayısıyla R bir von Neumann regüler halkadır.

Teorem 4.58 M bir sonlu üretilmiş sadık çarpımsal R-modül olsun. Öyleyse M nin bir sıfır boyutlu Q-modül olması için gerek ve yeter koşul $M/\mathit{Nil}(M)$ nin bir Noetherian von Neumann regüler $R/\mathit{Nil}(R)$-modül olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ M bir sıfır boyutlu Q-modül olsun. Böylece $M/\mathit{Nil}(M)$ bir sıfır boyutlu $R/\mathit{Nil}(R)$-modüldür. Ayrıca Yardımcı Teorem 4.54'ten $\mathit{Nil}\left(M/\mathit{Nil}(M)\right)=0$ dır. Dolayısıyla Önerme 4.46'dan $M/\mathit{Nil}(M)$ bir von Neumann regüler modüldür ve Yardımcı Teorem 4.56'dan de M bir Q-modül olduğundan R bir Q-halkadır. $\mathit{Kboy}(M)=0$ olduğundan $\mathit{Kboy}(R)=0$ dır. Böylece Teorem 2.47'den $R/\mathit{Nil}(R)$ bir Noetherian halka ve buradan da $M/\mathit{Nil}(M)$ nin Noetherian olduğu elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $M/\mathit{Nil}(M)$ bir Noetherian von Neumann regüler $R/\mathit{Nil}(R)$-modül olsun. Önerme 4.46'dan $\mathit{Kboy}\left(M/\mathit{Nil}(M)\right)=0$ ve $\mathit{Nil}\left(M/\mathit{Nil}(M)\right)=0$ dır. $M/\mathit{Nil}(M)$ Noetherian olduğundan $R/\mathit{ann}\left(M/\mathit{Nil}(M)\right)=R/\mathit{Nil}(R)$ bir Noetherian halkadır.

Ayrıca, Önerme 4.57'den $R/Nil(R)$ bir von Neumann regüler halkadır. Böylece Teorem 2.47'den R bir sıfır boyutlu Q-halkadır. Sonuç olarak, Yardımcı Teorem 4.56'dan M bir sıfır boyutlu Q-modüldür.

Yardımcı Teorem 4.59 M bir sonlu üretilmiş R-modül olsun. M, alt modüller için maksimal eleman koşulunu sağlar ancak ve ancak $R/ann(M)$ bölüm halkası idealler için maksimal eleman koşulunu sağlar [45].

Teorem 4.60 M bir sadık çarpımsal bir R-modül olsun. Eğer M sonlu üretilmişse, M nin bir indirgenmiş kuvvetli 0-boyutlu modül olması için gerek ve yeter koşul M nin bir Noetherian von Neumann regüler modül olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ M bir indirgenmiş kuvvetli 0-boyutlu modül olsun. Böylece $Nil(M)=0$ dır. Ayrıca Önerme 4.38'den M kuvvetli 0-boyutlu olduğu için $Kboy(M)=0$ dır. Dolayısıyla Önerme 4.46'dan M bir von Neumann regüler modüldür. $Nil(M)=Nil(R)M=0$ olduğundan $Nil(R)=0$ elde edilir. Yani R halkası, bir indirgenmiş halkadır. M bir kuvvetli 0-boyutlu modül olduğundan, Teorem 4.40'a göre R bir kuvvetli 0-boyutlu halkadır. Böylece, Yardımcı Teorem 2.48'den R bir Noetherian halkadır ve buradan M nin bir Noetherian modül olduğu elde edilir.

$(\Leftarrow)$ M bir Noetherian von Neumann regüler modül olsun. Böylece $Kboy(M)=0$ ve $Nil(M)=0$ dır. Yani M indirgenmiş modüldür. Ayrıca M Noetherian olduğundan, Yardımcı Teorem 4.59'a dayanarak M aynı zamanda bir Artinian modüldür. Sonuç olarak, Teorem 4.39'a göre M bir indirgenmiş kuvvetli 0-boyutlu modüldür.

Sonuç 4.61 M bir sonlu üretilmiş sadık çarpımsal R-modül olsun. Eğer M indirgenmişse aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

i. M bir kuvvetli 0-boyutlu modüldür.
ii. M bir Noetherian von Neumann regüler modüldür.
iii. M bir sıfır boyutlu Q-modüldür.

İspat: ***i*** $\Leftrightarrow$ ***ii***: Teorem 4.59'da gösterilmiştir.

ii $\Rightarrow$ ***iii:*** M bir Noetherian R-modül olduğundan $M/Nil(M)$ bir Noetherian $R/Nil(R)$-modüldür. Ayrıca, M bir von Neumann regüler R-modül olduğundan, $M/Nil(M)$

bir von Neumann regüler $R/Nil(R)$-modüldür [39, Önerme 9(2)]. Dolayısıyla Teorem 4.58'e dayanarak M nin bir sıfır boyutlu Q-modül olduğu elde edilir.

iii*$\Rightarrow$*ii: M bir sıfır boyutlu Q-modül olsun. Teorem 4.58'den $M/Nil(M)$ bir von Neumann regüler $R/Nil(R)$-modüldür. $Nil(M)=0$ ve M bir sadık çarpımsal R-modül olduğundan $Nil(R)=0$ elde edilir. Bu ise M nin bir Noetherian von Neumann regüler modül olduğu sonucunu verir.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, literatürde tanımlanmış olan kuvvetli 0-boyutlu halkaların genelleştirmesi ve modül teoriye aktarımı yapılmıştır.

Tezin ilk bölümünde, kuvvetli 0-boyutlu halkaların genelleştirmesi olan aralarında asal yapılandırılmış halka kavramı verilmiştir. Bu halkalara örnekler verilerek karakterizasyonları yapılmış, özellikleri incelenmiş ve literatürde mevcut diğer halkalarla olan bağlantıları ortaya konulmuştur.

Tezin diğer bölümünde ise kuvvetli 0-boyutlu halkaların, daha geniş bir alan olan modül teoriye aktarımı yapılarak, kuvvetli 0-boyutlu modüller tanımlanmıştır. Bu modüller tanımlanırken çarpımsal modüllerden yararlanılmış olup, bu modüllerin özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, mevcut olan birtakım modüllerle aralarındaki ilişkiler verilmiştir.

Burada yapılan çalışmaların devamı olarak, tanımlanmış olan aralarında asal yapılandırılmış halkaların modül teoriye aktarımı yapılabilir ve bu modüllerin özellikleri ve kuvvetli 0-boyutlu modüllerle olan bağlantıları incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] McCoy, N. H., (1948). Rings and Ideals, Mathematical Association of America.

[2] Reis C. M., Viswanathan T. M., (1970). "A Compactness Property for Prime Ideals in Noetherian Rings" , Proc Amer Math Soc., 25:353-356.

[3] Smith, W. W., (1971). "A covering conditions for prime ideals", Proceedings of the American mathematical society, 30(3):451-452.

[4] Pakala, J. V., Shores, T. S., (1981). "On Compactly Packed Rings", Pacific Journal of Mathematics, 97(1):197-201.

[5] Hwang, C. J., Chang, G. W., (1999). "A Note on Coverrings of Prime Ideals", Comm. Korean Math. Soc., 14(4):681-685.

[6] Erdoğdu, V., (1988). "Coprimely Packed Rings", Journal of Number Theory, 28(1):1-5.

[7] Erdoğdu, V., (1995). "The Prime Avoidance of Maximal Idelas in Commutative Rings", Comm. Algebra, 23(3):863-868.

[8] Erdoğdu, V., (2000). "Three Notes on Coprime Packedness", Journal of Pure and Applied Algebra, 148:165-170.

[9] Erdoğdu, V., (2004). "Coprime Packedness and Set Theoretic Complete Intersections of Ideals in Polynomial Rings", Proc. American Math. Soc., 132(12):3467-3471.

[10] Cho, Y.H., (1999). "Coprimely Packed Rings (II)", Honam Math. Journal, 1:43-47.

[11] Cho, Y.H., (1995). "Coprimely Packed Rings", Bull. Honam Math. Soc., 12:67-72.

[12] Tekir, Ü., (2007). "On Coprimely Packed Rings", Comm. Algebra, 35:2357-2360.

[13] Gilmer R., (1997). "An Intersection Conditionfor Prime Ideals", Lecture Notes in Pure and Appl Math, 189:327-331.

[14] Chang, G. W., Hwang, C. J., (2009). "Covering and Intersection Conditions for Prime Ideals", Korean J. Math. 17(1):15-23.

[15] Jayaram, C., Oral, K.H. and Tekir, Ü., (2013). “Strongly 0-dimensional rings”, Comm. Algebra, 41(6):2026-2032.

[16] Lu, C. P., (1997). “Unions of Prime Submodules”, Houston Journal of Math., 23(2):203-213.

[17] Çallıalp, F., Tekir, Ü., (2004). “On Unions of Prime Submodules”, Southeast Asian Bull. Math., 28:213-218.

[18] Tekir, Ü., (2006). “On Coprimely Packed Multiplication Modules”, International Journal of Pure and Applied Math., 28(1):55-58.

[19] Sharp, R. Y., (2000). Steps in Commutative Algebra, Cambridge, LMS 51.

[20] Çallıalp, F., Tekir, Ü., (2009). Değişmeli Halkalar ve Modüller, İstanbul, Birsen Yayınevi.

[21] Kaplansky, I., (1974). Commutative Rings, University of Chicago Press, Chicago and London.

[22] Zariski, O., Samuel, P., (1958). Commutative Algebra, Van Nostrand, Princeton, NJ.

[23] Huckaba, J. A., (1988). Commutative Rings with zero divisors, Markel Dekker, New York and Basel.

[24] Gilmer, R., (1972). Multiplicative Ideal Theory, New York, Markel Dekker.

[25] Anderson, D. D., Mahaney, L. A., (1987). “Commutative Rings in Which Every Ideal is a Product of Primary Ideals”, Journal of Algebra, 106:528-535.

[26] Jayaram, C., (2004). “Almost Q-rings”, Arch. Math., 40:249-257.

[27] Arapovic, M. (1983). “On the embedding of a commutative ring into a 0-dimensional ring”, Glasnik Mathematicki, 18(38):53-59.

[28] Brewer J., Richman F., (2006). “Subrings of 0-dimensional rings”, Multiplicative Ideal Theory in Commutative Rings, 73-88.

[29] Larsen, M. D., McCarthy, P. J., (1971). Multiplicative Theory of Ideals, New York and London, Academic Press.

[30] Heinzer, W., Lantz, D., (1981). “The Laskerian Property in Commutative Rings”, Journal of Algebra, 72:101-114.

[31] Oral, K. H., Ersoy B. A., Tekir, Ü. “Rings Satisfying *-Property”. (submitted).

[32] Matlis, E., (1972). Torsion-free Modules, Chicago and London, University of Chicago Press.

[33] Olberding, B., (1998). “Globalizing Local Properties of Prüfer Domains”, Journal of Algebra, 205(2):480-504.

[34] Olberding, B., (2007). “Characterizations and constructions of h-local domains”, Contributions to Module Theory, 1-21.

[35] McCoy, N. H., (1945), “Subdirectly Irreducible Rings”, Duke Math J ,12:381-387.

[36] Lu, C. P., (1995). “Spectra of modules”, Comm. Algebra, 23(10):3741-3752.

[37] El-Bast, Z. A. and Smith, P. F., (1988). "Multiplication modules", Comm. Algebra, 16(4):755-779.

[38] Matsumara, H., (1986). Commutative Ring Theory, Cambridge University Press, Cambridge.

[39] Majid, M. A., (2008). "Idempotent and nilpotent submodules of multiplication modules", Comm. Algebra, 36:4620-4642.

[40] Ali, M. M., Smith, D. J. (2004b). "Pure submodules of multiplication modules", Beiträge zur Algebra und Geom., 44:61–74.

[41] Anderson, F. W., Fuller, K. R., (1974). Rings and Categories of Modules, New York, Springer-Verlag.

[42] Moore, M., E. and Smith, S. J., (2002). "Prime and radical submodules of Modules over commutative rings", Comm. Algebra, 30(10):5037-5064.

[43] Lu, C.P., (1984). "Prime submodules of modules", Comment. Math. Univ. St. Pauli, 33(1):61-69.

[44] Kash, F., (1982). Modules and Rings, Academic Press, London.

[45] Northcott, D.G., (1968). Lessons on Rings, Modules and Multiplicities, Cambridge University Press, London.

[46] Jayaram, C., Tekir, Ü., (2009). "Q-modules", Turkish J. Math., 33:215-225.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Neslihan Ayşen ÖZKİRİŞCİ
Doğum Tarihi ve Yeri	: 11.08.1987 / Gaziantep
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: aozk@yildiz.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2010
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2009
Lise	Fen-Matematik	Sunguroğlu Fen Lisesi	2004

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	**Firma/Kurum**	**Görevi**
2010	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. Oral, K. H., Özkirişci, N. A., Tekir, Ü., (2014). “Strongly 0-dimensional Modules”, Canadian Mathematical Bulletin, 57(1):159-165.

2. Özkirişci, N. A., Oral, K. H., Tekir, Ü., (2013). “Graded Prime Spectrum of a Graded Module”, IJS&T-Transaction A, 37(3):411-420.

Bildiri

1. Özkirişci, N. A., Oral, K. H., Tekir, Ü., (2010). “Derecelendirilmiş Modüller Üzerinde Topoloji”. 5. Ankara Matematik Günleri, 3-4 Haziran 2010, Ankara.

2. Özkirişci, N. A., Oral, K. H., Üregen, R. N., Ünal, H., (2011). “Investigation of Solutions of Some Logarithmic Equations in an Early Turkish Mathematics Journal: Scientific Themes”, 3. Uluslararası Türkiye Eğitim Araştırmaları Kongresi, 4-7 Mayıs 2011, Girne.

3. Kılıç, Z. , Özkirişci, N. A. , Oral, K. H. , Tekir, Ü., (2012). “On the Primary Spectrum of Commutative Rings”, International Conference on Applied Analysis and Algebra, 20-24 Haziran 2012, İstanbul.

4. Özkirişci, N. A., Oral, K. H., Tekir, Ü., (2013). “A Note on Graded Vector Spaces”, IWBCMS, 30 Mayıs-1 Haziran 2013, Elbasan.