

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BAZI TIP VE FİNANS
PROBLEMLERİNE UYGULANMASI VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

TUĞÇEM PARTAL

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI

DANIŞMAN
PROF. DR. MUSTAFA BAYRAM

İSTANBUL, 2018

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BAZI TIP VE FİNANS
PROBLEMLERİNE UYGULANMASI VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Tuğçem PARTAL tarafından hazırlanan tez çalışması 16.02.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

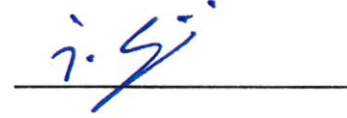
Prof. Dr. Mustafa BAYRAM
Gelişim Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mustafa BAYRAM
Gelişim Üniversitesi



Prof. Dr. İbrahim EMİROĞLU
Yıldız Teknik Üniversitesi



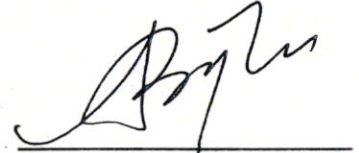
Prof. Dr. Ünsal TEKİR
Marmara Üniversitesi



Prof. Dr. Fatih TAŞÇI
Yıldız Teknik Üniversitesi



Yrd. Doç. Dr. Ahmet BAKKALOĞLU
Mimar Sinan Üniversitesi



ÖNSÖZ

Doktora çalışmalarım süresince beni yönlendiren, önerileri, motivasyonu, sabrı, her konuda esirgemediği tecrübe ve desteklerinden dolayı değerli danışman hocam Prof. Dr. Mustafa BAYRAM'a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca tez izleme komitesi üyelerim Sayın Prof. Dr. İbrahim EMİROĞLU ve Sayın Prof. Dr. Ünsal TEKİR hocalarıma tez dönemim boyunca gösterdikleri destek ve yapıcı yorumlarından dolayı, tez savunma sınavı jüri üyeliğini kabul ederek beni onurlandıran Sayın Prof. Dr. Fatih TAŞÇI, Sayın Doç. Dr. Bülent YILMAZ ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Ahmet BAKKALOĞLU hocalarıma teşekkür ediyorum.

Tabii ki tüm hayatım boyunca her konuda maddi ve manevi destekleri, sınırsız özverileri ile yanımda olan aileme teşekkürüm sonsuzdur.

Şubat, 2018

Tuğçem PARTAL

İÇİNDEKİLER

	Page
SİMGE LİSTESİ.....	vii
KISALTMA LİSTESİ.....	viii
ŞEKİL LİSTESİ.....	ix
TABLO LİSTESİ.....	x
ÖZET.....	xi
ABSTRACT.....	xiii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti.....	1
1.2 Tezin Amacı.....	4
1.3 Hipotez.....	4
BÖLÜM 2	
STOKASTİK ANALİZ.....	5
2.1 Olasılık Teorisi.....	5
2.1.1 Beklenen Değerin Özellikleri.....	8
2.1.2 Varyansın Özellikleri.....	8
BÖLÜM 3	
STOKASTİK İNTEGRALLER.....	13
3.1 Riemann İntegrasyonu.....	14
3.2 Riemann-Stieltjes İntegrasyonu.....	14
3.3 Ito İntegrali.....	15
3.3.1 Ito İntegrasyonunun Korelasyon Formülü.....	17
3.4 Stratonovich İntegrali.....	19
3.5 Ito ve Stratonovich İntegralleri Arasındaki İlişki.....	21

BÖLÜM 4

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER	24
4.1 Ito Stokastik Diferansiyel Denklemler	24
4.1.1 Gronwall Eşitsizliği	25
4.2 Lineer Stokastik Diferansiyel Denklemler	26
4.3 İndirgenabilir Stokastik Diferansiyel Denklemler	31
4.4 Stratonovich Stokastik Diferansiyel Denklemler	37
4.5 Ito SDD mi ? Stratonovich SDD mi ?	42
4.6 Vektör Stokastik Diferansiyel Denklemler	43

BÖLÜM 5

STOKASTİK TAYLOR AÇILIMI	48
5.1 Stokastik Taylor Açılımı	48
5.1.1 Ito-Taylor Açılımı	49
5.2 Euler-Maruyama Metodu	54
5.3 Milstein Metodu	54
5.4 Runge - Kutta Metodu	55
5.4.1 Runge - Kutta Metodu	56
5.5 Stokastik Runge-Kutta Metodu	60
5.5.1 İkinci Mertebeden Stokastik Runge-Kutta Metodu	62
5.5.2 Üçüncü Mertebeden Stokastik Runge-Kutta Metodu	63
5.5.3 Dördüncü Mertebeden Stokastik Runge-Kutta Metodu	64

BÖLÜM 6

PARAMETRE TAHMİNİ	66
6.1 Stokastik Diferansiyel Denklemler için Parametre Tahmini	66
6.1.1 Maksimum Likelihood Tahmin Yöntemi	66
6.1.2 Nonparametrik Tahmin Yöntemi	68

BÖLÜM 7

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE YAKINSAKLIK ve STABİLİTE

70

7.1 Zayıf Yakınsama Kriterleri	70
7.2 Kuvvetli Yakınsama Kriterleri	71
7.3 Stokastik Diferansiyel Denklemler için Kuvvetli Yakınsaklık	71
7.4 Stokastik Stabilite	72
7.5 Stiff Stokastik Diferansiyel Denklemler	81
7.6 Euler Maruyama Metodu için Kuvvetli Yakınsaklık ve Stabilite	83
7.6.1 EM için Lineer Stabilite Analizi	84

BÖLÜM 8

UYGULAMA 1	86
8.1 Black-Scholes Model	86
8.2 Nonparametrik Tahmin Yöntemi	87
8.3 Maximum Likelihood Estimation Method	89
8.4 Deneysel Data Analizi	91

8.5	Sonuç ve Tartışmalar	93
BÖLÜM 9		
UYGULAMA 2 95		
9.1	Deterministik Gompertz Model	96
9.2	Randomize İçsel Büyüme Hızı ile Gompertz Model	99
9.3	Stokastik Gompertzian Model için MLE ve Özellikleri	99
9.4	$\hat{\alpha}$ Tahmin Edicisinin Diskret Zaman Yaklaşımları	101
9.5	Nümerik Uygulama	101
BÖLÜM 10		
SONUÇ VE ÖNERİLER 109		
KAYNAKLAR 115		
ÖZGEÇMİŞ 116		

SİMGE LİSTESİ

$W(t)$	Wiener süreci(t-zamanına bağlı)
σ	Standart sapma
μ	Normal dağılımın ortalaması
S_t	Hücre sayısı
P	Olasılık ölçümü
Ω	Örnek uzay
\mathcal{P}_n	Parçalanış
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{R}^m	m-boyutlu reel vektörler
\mathcal{A}	σ -cebiri
\mathcal{B}	Borel kümesi
$t(y)$	Tümörün yaşı
$E(X)$	X 'in beklenen değeri
\ln	Doğal logaritma
\sum	Toplam sembolü
\prod	Çarpım sembolü
X	Rassal değişken
$X(t, w)$	Stokastik süreç
\circ	Stratonovich analizi için integrasyon sembolü
A^c	A'nın tümleyeni

KISALTIMA LİSTESİ

ADD	Adi Diferansiyel Denklem
DGM	Deterministik Gompertz Model
EM	Euler Maruyama
KDD	Kısmi Diferansiyel Denklem
MLE	Maksimum Likelihood Tahmincisi
SADD	Stokastik Adi Diferansiyel Denklem
SDD	Stokastik Diferansiyel Denklem
SGM	Stokastik Gompertz Model
SID	Stokastik İntegral Denklem
SRK	Stokastik Runge Kutta Metodu

ŞEKİL LİSTESİ

	Page
Şekil 2.1 Diskret Brown yolu	10
Şekil 2.2 1000 ayrıklaştırılmış Brown yol ortalaması ve 10 ayrı yol boyunca $U(W(t))$ fonksiyonu	11
Şekil 8.1 2005 Ocak-2015 Ocak dönemi YHOO hisse senedinin aylık olarak ölçülmüş gerçek verileri	93
Şekil 8.2 Maximum likelihood tahmin yöntemi ile elde edilen veriler ve 2005 Ocak-2015 Ocak dönemi YHOO hisse senedinin gerçek verileri	93
Şekil 8.3 Nonparametrik tahmin yöntemi ile elde edilen veriler ve 2005 Ocak-2015 Ocak dönemi YHOO hisse senedinin gerçek verileri	94
Şekil 9.1 (9.3) fonksiyonu ile üretilen sigmoidal eğri	97
Şekil 9.2 $\alpha = 2.76 \text{ yıl}^{-1}$ ve $\beta = 0.134 \text{ yıl}^{-1}$ parametrelerine göre Paratiroid kanseri için büyüme eğrisi	103
Şekil 9.3 $\alpha = 3.94 \text{ yıl}^{-1}$ ve $\beta = 0.191 \text{ yıl}^{-1}$ parametrelerine göre paratiroid kanseri için büyüme eğrisi	104
Şekil 9.4 $\alpha = 6.46 \text{ yıl}^{-1}$ ve $\beta = 0.314 \text{ yıl}^{-1}$ parametrelerine göre paratiroid kanseri için büyüme eğrisi	105
Şekil 9.5 (a) , (b) ve (c) hesaplamalarının her biri için elde edilen paratiroid kanseri büyüme eğrisi	105
Şekil 9.6 $\alpha = 2.76 \text{ yıl}^{-1}$, $\beta = 0.134 \text{ yıl}^{-1}$ ve $\sigma = 0.0347$ parametrelerine göre paratiroid kanseri için stokastik büyüme eğrisi	106
Şekil 9.7 $\alpha = 6.46 \text{ yıl}^{-1}$, $\beta = 0.314 \text{ yıl}^{-1}$ ve $\sigma = 0.0694$ parametrelerine göre paratiroid kanseri için stokastik büyüme eğrisi	107
Şekil 9.8 $\alpha = 6.46 \text{ yıl}^{-1}$, $\beta = 0.314 \text{ yıl}^{-1}$ ve $\sigma = 0.0694$ parametrelerine göre paratiroid kanseri için stokastik büyüme eğrisi	107

TABLO LİSTESİ

	Page
Tablo 9.1 Tumor büyümesi için Gompertz denklemi	102
Tablo 9.2 İnsanlardaki paratiroid tumorü için Gompertz büyümesi	102
Tablo 9.3 MSE tablosu	108

**STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BAZI TIP
VE FİNANS PROBLEMLERİNE UYGULANMASI VE
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

Tuğçem PARTAL

Matematik Mühendisliği Bölümü
Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

Bu tez çalışmasında çözümü stokastik süreçler olan stokastik diferansiyel denklemler konusu ve uygulama alanları incelenmiştir. Stokastik diferansiyel denklemlerin varlık tekniklerinden bahsedilip, analitik ve nümerik çözüm yöntemleri anlatıldıktan sonra, ilgili nümerik yöntemlerin kararlılık analizleri üzerinde durulmuştur.

Uygulamalar kısmında stokastik diferansiyel denklemler, iki önemli konu olan tümör büyümesi ve hisse senedi tahminleri için kullanıldı. İlk uygulama olarak, 01.01.2005-01.01.2015 tarihleri arasındaki YAHOO hisse senedi fiyatları, finansal bir stokastik diferansiyel denklem modeli olan Black-Scholes modeli ile yaklaşık olarak hesaplandı.

İkinci bir uygulama olarak ise paratiroid tümörünün insan vücudundaki davranışı ve büyümesi üzerine çalışıldı. Bunun için öncelikle Gompertz model tanımlandı ve literatürdeki 41 gerçek hasta üzerinden paratiroid kanserinin zamana göre değişimi deterministik olarak incelendi. Daha sonra hastalar üzerinden elde edilen veriler ile, stokastik modeldeki difüzyon katsayısı belirlendi ve bu katsayı kullanılarak, deterministik Gompertz kurallarının geçerli olduğu stokastik Gompertz model tanımlandı. Tanımlanan bu stokastik model ile tümör büyümesinin zamana göre değişimi yaklaşık olarak hesaplandı.

İki modelin de hem analitik çözümleri hem de tanımlanan nümerik yöntemler kullanılarak nümerik çözümleri elde edildi. Elde edilen çözümler gerçek veriler ile kıyaslandı, hata tabloları ve garfikler ile etkinlikleri gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Stokastik diferansiyel denklemler, maksimum olabilirlik tahmin metodu, non-parametrik tahmin metodu, Black-Scholes model, stokastik Gompertz model.



**APPLICATION OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL
EQUATIONS ON SOME MEDICAL AND FINANCE
PROBLEMS AND THEIR NUMERICAL SOLUTIONS**

Tuğçem PARTAL

Mathematical Engineering
Ph.d. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

In this thesis, the concept of stochastic differential equations and its application areas are investigated. After the existence and uniqueness of equations are mentioned and analytical and numerical solution methods are determined, stability analyzes of numerical methods are discussed.

Stochastic differential equations is used for two important issues such as estimation of tumor growth and stock price which addressed in the application section. As a first application, we are approximated the YHOO stock prices between 01.01.2005-01.01.2015 with Black-Scholes model, which is a financial stochastic differential equation model.

As a second application, we study on the behavior and growth of parathyroid cancer in the human body. Firstly deterministic Gompertz model is identified for this, then it is investigated deterministically change of parathyroid cancer respect to time, which is obtained through 41 patients in the literature. Then we describe the stochastic Gompertz model based on deterministic Gompertz's law with the diffusion coefficient in our stochastic model, using the data taken from the patients. Changing in tumor growth over the time is approximately calculated with this defined stochastic model.

We solve both models numerically and analitically with defined methods. Obtained solutions are compared with the actual data and they are supported with graphs and error tables.

Keywords: Stochastic differential equations, maximum likelihood parameter estimation method, non-parametric estimation method, Black-Scholes model, stochastic Gompertz model.



1.1 Literatür Özeti

Bir sistemin davranışının modellenmesi probleminde, bazen sistemler o kadar karışıktır ki sistemi tanımlamak çoğu zaman mümkün olmaz. Böyle durumlarda olasılıksal bir model kullanmak doğru bir yaklaşım olacaktır.

Son zamanlara kadar yapılan çalışmalarda fiziksel modeller için geliştirilen çoğu modellerde yeteri kadar güçlü bilgisayarların bulunmaması ve uygun nümerik yöntemlerin azlığı sebebi ile çözümün zorlaşmasından fiziksel fenomenlerdeki stokastik etkiler dikkate alınmamıştır. Hesaplama gücünün artması ile birlikte, böyle kompleks modeller dikkate alınmaya başlanmış ve stokastik diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerine olan ilgi artmıştır.

1826'da botanikçi Robert Brown'un kendi adı verilen Brown hareket sürecini (Brownian motion process) keşfetmesinden sonra, yapılan araştırmalarda bu sürecin bir çok fiziksel, ekonomik, biyolojik veya sosyal fenomenlerin incelenmesinde de kullanılabilceği ortaya çıktı. Bu denklemler genellikle stokastik diferansiyel denklem şeklinde olup, denklemlerin modellenip çözümlenmesinde bilinenden farklı bir integrasyon tipi ve kuramı gerekir. Kiyoshi Ito (1915-2008) tarafından başlatılan ve Ito stokastik integrali adını alan bu kuramda bir stokastik sürecin başka bir stokastik sürece göre integrali söz

konusu olup bu özel integralle başlayan matematiksel analiz “Ito analizi” veya “Stokastik Analiz” adını alır. Ito’nun bu alandaki en önemli katkısı stokastik integral denklemlerin çözümüne olanak sağlayan “Ito Lemma” sıdır. Daha sonra Ruslen R. Stratonovich (1966) Ito stokastik integrali modifiye ederek Stratonovich stokastik integrali tanıtmıştır.

Çoğu realistik modelin elde edilmesinde, tıp, finans matematiği, aktüerya, fizik, biyoloji, kimya, ekonomi gibi alanlarda adi veya kısmi diferansiyel denklemler yerine stokastik diferansiyel denklemler ile modelleme yapılmaktadır. Özellikle, finans matematiğinde, hisse senedi (stock) ve birim fiyat (option price) modelleri için stokastik diferansiyel denklemler kullanılır.

Bir sistem adi veya kısmi diferansiyel denklem ile tanımlanırken, bir rassal terimden (random term) etkilenme varsa stokastik diferansiyel denklem (SDD) elde edilir. Yani, bir adi veya kısmi diferansiyel denkleme ekstra terim ekleyerek elde edilebilirler. Bu ekstra terim, Brown hareketi (Brownian motion) olup modele rassallık (randomness) getirir. Stokastik diferansiyel denklemlerin kilit noktası, Brown hareketi hiçbir yerde diferansiyellenemez olduğundan, stokastik diferansiyel denklemin rassal kısmı bilinen basit analiz yöntemler ile hesaplanamaz. Bu nedenle, stokastik diferansiyel denklemlerin integral formuyla ve Ito ve Stratonovich stokastik analizi ile ilgileneceğiz. Çalışılan alanda çözümün gerektirdiklerine göre Ito stokastik analizinden Stratonovich analizine (ya da tam tersi) geçmek mümkündür. Ito stokastik analizi finans matematiğinde hisse senedi (stock) ve birim fiyat (option price) modelleme ve biyolojideki popülasyon artışının tanımlanmasında önemli rol oynarken, Stratonovich stokastik analizi ise fizik ve mühendislikte parçacık hareketi veya stokastik dinamik sistemler için yaygın olarak kullanılır.

Deterministik dinamik sistemler teorisinde, sistemin davranışları kısmi diferansiyel denklemler ile (dalga denklemi, ısı denklemi, Laplace denklemi, elektrodinamik, akışkan akımı vb.) veya adi diferansiyel denklemler ile (klasik Newton mekaniği, vb.) modellenir. Ancak, elektronik devrelerdeki gürültü (noise), hisse senetlerindeki dalgalanma, iletişim sistemlerindeki karmaşa gibi stokastik dalgalanmalar göz ardı edilemeyeceğinden adi diferansiyel denklemler (ADD) ve kısmi diferansiyel denklemler (KDD) ek olarak

rassal (random) terim içermelidir.

Diferansiyel denkleme rassal terimin eklenmesiyle ADD veya KDD den SDD e geçiş olur. Rassallık, problemin başlangıç değerinden kaynaklanabilir ya da fiziksel sistemde tanımlanan fonksiyon rassal fonksiyon olabilir. Böyle durumlarda diferansiyel denkleme “*stokastik diferansiyel denklem*” denir.

Bu rassallık, hızlı değişen rassal fenomenlerin tanımlanması için uygundur ve renkli gürültü (coloured noise) gibi diğer noise formlarında mümkün olmasına rağmen hiçbir yerde diferansiyellenemeyen Wiener süreci (Wiener process) ile modellenemez. Ancak stokastik diferansiyel denklemler teorisinde de adi diferansiyel denklemler teorisinde olduğu gibi analitik çözüme sahip diferansiyel denklem sınıfı çok dardır ve bu nedenle modellerin çözümleri nümerik yöntemler gerektirmektedir. Stokastik diferansiyel denklemin çözümünde etkili ve uygun metodu bulmak için merteye (order), kararlılık (stability) ve olası yöntemin hata davranışlarının analiz edilmesi gerekir. Stokastik diferansiyel denklemleri çözmek için bir deterministik yöntemdeki basit adaptasyonu kullanmak mümkün değildir. Dolayısıyla, kendine uygun stokastik nümerik metotlar geliştirilmelidir.

Nümerik metotlar elde edilebilmesine rağmen, örneğin, belli bir noktada stokastik Taylor serisinin kesilmesi gibi yöntemleri, eğer yüksek merteye (order) gerektiriyorsa uygulamak oldukça zordur.

Yaklaşım metotları için iki temel durum vardır. Çözüme yaklaşmak istendiğinde, ortalama karesel yakınsaklık (mean square convergence) kullanılır ve bu şekilde elde edilen metotlara “güçlü (strong)” denir. Eğer sadece momentle ya da çözümün diğer fonksiyonlarıyla ilgileniliyorsa, yani istenen yaklaşımdan daha güçsüz yaklaşımlardan söz ediliyorsa, bu durumda metoda “zayıf (weak)” denir.

Daha önce çeşitli karesel ortalama (mean square) ve zayıf nümerik yöntemler türetilmiş ve bu konuda Milstein [2], Kloeden ve Platen [3] tarafından geniş ölçüde çalışmalar yapılmıştır. Güçlü durumlar (strong sense) için Chang [4], Hernandez ve Spigler [5], [6] Klauder ve Petersen [7], Mauthner [8], Mc Shane [9] ve Rümelin [10] Runge Kutta (RK) yöntemi ile çalışmalar sunmuştur.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmada, stokastik diferansiyel denklem türleri tanıtılıp, analitik ve nümerik çözümlerinin nasıl elde edildiği üzerinde durulmuştur. Tezde, finans ve tıp alanlarında oldukça sık kullanılan Black-Scholes ve Gompert modellerinin stokastik versiyonlarının, deterministik duruma göre daha güvenilir sonuçlar verdiğini göstermek amaçlanmaktadır. Bunun için gerçek veriler kullanılarak, hem stokastik model hem de deterministik modeller için elde edilen çözümler kıyaslanacak ve bu sonuçlar yorumlanacaktır.

1.3 Hipotez

Bu çalışmada, iki önemli stokastik modele yer verilecektir. Bölüm 8 de finans alanında önemli bir yere sahip olan Black-Scholes modelinin stokastik hali incelenecektir. Modeldeki katsayılar, YHOO hisse senedinin belli bir yıl aralığındaki gerçek verileri ele alınarak, parametre tahmin metodları ile elde edilip, elde edilen parametreler ile model analitik ve nümerik olarak çözülecektir. Çözümlerin gerçek veriler ile kıyası yapıp, hata tabloları ve grafikler ile desteklenecektir. Elde edilen sonuçların da istatistiksel olarak anlamlılığı incelenip, stokastik Black-Scholes modelinin ve tahmin yöntemlerinin bu alandaki etkinliği tartışılacaktır.

Bir diğer hipotez ise yine Bölüm 9 da literatürden farklı olarak, paratiroid kanserinin insan vücudundaki değişiminin, difüzyon katsayısı eklendiğinde istatistiksel olarak farklılık gösterip göstermediğini test etmektir. Bunun için literatürde var olan, 41 paratiroid kanser hastası üzerinden elde edilen veriler kullanılarak, difüzyon katsayısı hesaplanmıştır. Bu katsayının deterministik Gompertz modele eklenmesi ile elde edilen stokastik modelin istatistiksel anlamlılığı ve deterministik modele göre etkinliğini gösteren öngörüler, mevcut tezin hipotezlerini oluşturmuştur.

BÖLÜM 2

STOKASTİK ANALİZ

Stokastik analiz içinde rassallık ya da gürültü (noise) terimi bulunan stokastik süreçler ile ilgilenir. Bu bölümde tezin ileri kısımlarında kullanılacak olan olasılık ve stokastik süreçler ile ilgili temel tanım ve sonuçlara yer verilmiştir. Bu tanımlarla ilgi daha detaylı bilgilere, Kloeden ve Platen'in (1992) "Numerical Solution of Stochastic Differential Equation" isimli kitabından ulaşılabilir [11].

2.1 Olasılık Teorisi

Olasılığın matematiksel teorisi Pascal ve Fermat'ın 1650'li yıllardaki kumar oyunları üzerindeki çalışmalarına kadar geriye gitmektedir. Olasılıklar genelde rassal deneylerin sonunda değişik sonuçların gözlenebilmesini ifade eden sayısal değerlerdir. Hangi olasılık tanımı ele alınırsa alınsın (klasik olasılık, aksiyomatik olasılık, geometrik olasılık veya sübjektif olasılık gibi) olasılık

$$P : \{\text{Olaylar kümesi}\} \rightarrow [0, 1]$$

biçiminde bir küme fonksiyonudur. Bu fonksiyonun tanım kümesi sözkonusu rassal deneyin bütün olaylarından oluşan küme, değer kümesi ise $[0, 1]$ aralığıdır. Fonksiyonun yapısı 1933 yılında Rus matematikçi A. N. Kolmogorov (1903-1987) tarafından ortaya

atılan aksiyomlarla şekillenmektedir.

Tanım 2.1 Ω nın altkümelerinden oluşan bir \mathcal{A} σ -cebiri aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. $A \in \mathcal{A}$ ise, $A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\} \in \mathcal{A}$.
3. Herhangi bir $A_n \subseteq \mathcal{A}$ dizisi için, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Örneğin, \mathbb{R}^m nin açık kümeleri tarafından üretilen σ cebiri \mathbb{R}^m de bir *Borel kümesidir*.

Tanım 2.2 \mathcal{A} üzerindeki bir P olasılık ölçümü aşağıdaki özellikleri sağlamalıdır:

1. $P(\Omega) = 1$.
2. $A \in \mathcal{A}$ ise, $P(A) \geq 0$.
3. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
4. Eğer $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ karşılıklı ayırık olaylar (yani $A_i \cap A_j = \emptyset$) ise, $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Tanım 2.3 Bir (Ω, \mathcal{A}, P) olasılık uzayı, Ω örnek uzayı, bu örnek uzayın altkümelerinin bir \mathcal{A} σ -cebiri ve \mathcal{A} üzerindeki P olasılık ölçümünden oluşur.

Tanım 2.4 (Ω, \mathcal{A}, P) olasılık uzayı olmak üzere, $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A}$ ve $P(B) > 0$ olsun. Bu durumda verilen bir B kümesi için A nın B 'ye göre *koşullu olasılığı*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

olup, A olayının B olayının şartları altındaki olasılığı denir.

Tanım 2.5 Örnek uzay üzerinde tanımlı bir $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonu, herhangi bir $B \in \mathcal{B}$ Borel kümesi için $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ şartını sağlıyorsa X 'e *rassal değişken* denir.

Tanım 2.6 Rassal değişken $X(\omega)$ 'nın olasılıksal davranışı,

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\})$$

dağılım fonksiyonu ile tek bir şekilde ve tamamen belirlenir.

Rassal değişkenler ayrık ya da sürekli olabilirler.

Tanım 2.7 Bir X rassal değişkeninin aldığı değerler "sayılabilir" ise X e *kesikli (disc-
rete)* rassal değişken denir. Bu durumda rassal değişkenin olasılık fonksiyonu

$$P(X = k) = \sum_{\omega \in \Omega, X(\omega)=k} p(\omega), \quad k = 1, 2, \dots$$

ile gösterilir. Bu ifade rassal değişkenin değerini k 'ya eşit kılan tüm ω elementer sonuç-
larının olasılıklarının toplamıdır. Dağılım fonksiyonu ise

$$F_X(x) = \sum_{x_i < x} p(x_i)$$

ile gösterilir.

Tanım 2.8 Eğer X rassal değişkeninin aldığı değerler "sayılamaz sonsuz" bir küme
oluşturuyor ise X e *sürekli rassal değişken* denir. Bu durumda X rassal değişkeninin
olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_X(x)$, ($f_X(x) \geq 0$) ile gösterilir. Dağılım fonksiyonu ise

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(s) ds$$

ile gösterilir. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$ dir. Ayrıca,

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Tanım 2.9 (Ω, \mathcal{A}, P) olasılık uzayında tanımlı X rassal değişkeninin P olasılık ölçü-
müne göre *beklenen değeri* veya *ortalama değeri*

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP$$

dir. \mathbb{R} de sürekli bir rassal değişken için

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Tanım 2.10 X , ortalaması $\mu = E(X)$ olan bir rassal değişken olmak üzere X 'in *variansı* aşığıdaki gibi tanımlanır.

- Eğer X kesikli (discrete) ise, $Var(X) = E((X - \mu)^2) = E(X^2) - \mu^2$.
- Eğer X sürekli ise, $Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu)^2 f(x)$.

Genelde $\sigma^2 = Var(X)$ şeklinde gösterilip, *standart sapma* ise $\sigma = \sqrt{Var(X)}$ şeklinde varyansın karekökü ile tanımlanır.

Tanım 2.11 Sürekli rassal değişkenin *k-ıncı mertebeden momenti*

$$\mu_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$$

ile tanımlanır.

2.1.1 Beklenen Değerin Özellikleri

- c sabit bir sayı olmak üzere $E(c) = c$.
- a ve b sabitler olmak üzere $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.
- $E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$.
- $X \leq Y$ ise $E(X) \leq E(Y)$.

2.1.2 Varyansın Özellikleri

- Eğer $P(X = c) = 1$ ise $Var(X) = 0$, yani sabit sayının varyansı sıfırdır.
- a ve b sabitler olmak üzere $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.
- Bir rassal değişken sabit bir sayı ile çarpılırsa, varyansı sabitin karesi ile çarpılır.

Teorem 2.1 (Üçgen Eşitsizliği) Eğer X rassal değişkeninin beklenen değeri sonlu ise

$$|E(X)| \leq E(|X|)$$

Teorem 2.2 (Cauchy Schwarz Eşitsizliği) Eğer $E(|X|) < \infty$ ise

$$E(|X|) \leq \sqrt{E(X^2)}$$

Ispat 1

$$[|X| - (E(|X|))]^2 \geq 0 \Rightarrow |X|^2 - 2|X|E(|X|) + E(|X|)^2 \geq 0$$

eşitsizliğinde her iki tarafın beklenen değeri alırsa,

$$\begin{aligned} E(X^2) - 2E(|X|)E(|X|) + |E(|X|)|^2 &\geq 0 \Rightarrow E(X^2) - |E(|X|)|^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow |E(|X|)|^2 \leq E(X^2) \\ &\Rightarrow |E(|X|)| \leq \sqrt{E(X^2)} \end{aligned}$$

Jensen Eşitsizliği: $g(x)$, $0 < \lambda < 1$ için $g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)$ olacak şekilde konveks bir fonksiyon ise

$$g(E(X)) \leq E(g(X)).$$

Markov Eşitsizliği: $X \geq 0$ ve $a > 0$ için

$$P(X \geq a) \leq \frac{1}{a}E(X).$$

Chebyshev Eşitsizliği: $\mu(= E(X))$, $\sigma^2(= Var(X))$ sonlu ve $a > 0$ sabit olmak üzere,

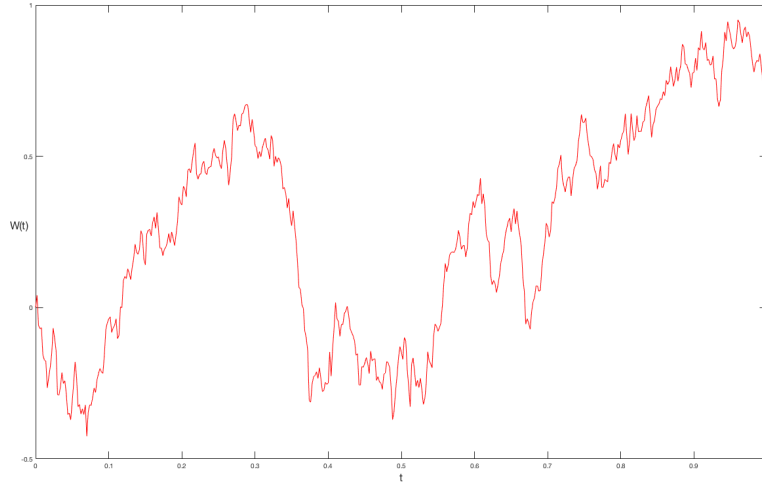
$$P((X - \mu)^2 \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a}.$$

Tanım 2.12 $[0, \infty)$ üzerinde skalar standart bir *Brown hareketi* veya standart *Wiener süreci*, $t \in [0, T]$ de hemen her gerçekleşmesi sürekli $W(t)$ şeklinde rassal değişken olup, aşağıdaki üç şartı sağlar.

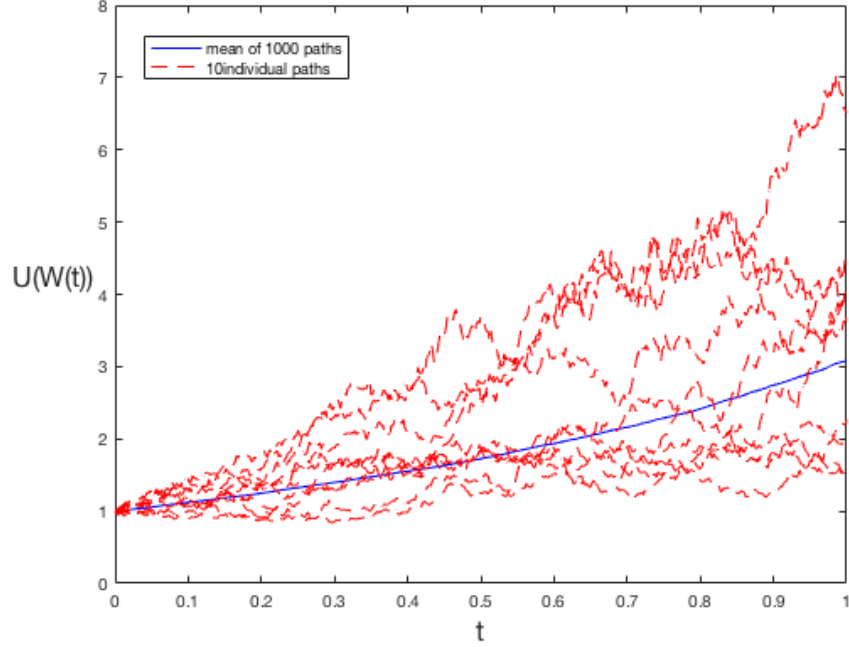
1. $P(W(0) = 0) = 1$.
2. $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n$ için, $W(t_1) - W(t_0), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ artışları bağımsızdır.
3. $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n$ için, $W(t) - W(s)$ artışı ile verilen rassal değişken ortalaması sıfır ve varyansı $t - s$ olan normal dağılıma sahiptir. Denk olarak, $W(t) - W(s) \sim \sqrt{t - s}N(0, 1)$ olup burada $N(0, 1)$ ortalaması sıfır ve varyansı bir olan normal dağılmış rassal değişken olarak tanımlanmıştır.

Şekil 2.1 ile diskret Brown yolu (discretized Brownian path) görsellik açısından düz çizgilerle birleştirilerek çizilmiştir.

Şekil 2.2 ile ise 1000 diskret Brown yolu boyunca $U(W(t)) = \exp(t + 1/2W(t))$ fonksiyonu hesaplanmıştır [12]. Mavi çizgi ile $U(W(t))$ 'nin ortalaması, kırmızı kesikli çizgiler ile de 10 ayrı yol çizdirilmiştir.



Şekil 2.1: Diskret Brown yolu



Şekil 2.2: 1000 ayrılaştırılmış Brown yol ortalaması ve 10 ayrı yol boyunca $U(W(t))$ fonksiyonu

Tanım 2.13 Bir *stokastik süreç*, (Ω, \mathcal{A}, P) olasılık uzayı üzerinde $t \in T$ ve $w \in \Omega$ olmak üzere her bir t için w 'nın bir P -ölçülebilir fonksiyonu olan, iki değişkenli $X(t, w)$ rassal değişkenlerinin bir ailesidir. Burada T bir zaman aralığı olmak üzere, t zaman parametresi olarak tanımlanmıştır. $X(\cdot, w)$ stokastik sürecin *sample path* veya *yörüngesi* (*trajectory*) olarak tanımlanırken, $X(t, \cdot)$, Ω olasılık uzayı üzerindeki rassal değişkeni temsil eder.

Tanım 2.14 $X(t, w)$, (Ω, \mathcal{A}, P) olasılık uzayı üzerinde tanımlı reel değerli stokastik süreç olmak üzere,

1. Her $n \geq 0$ için $E[|X_n|] < \infty$
2. $E(X_{n+1}|X_0, X_1, \dots, X_n) = X_n$

şartlarını sağlayan $X = \{X_n : n \geq 0\}$ stokastik sürecine bir "*martingale*" denir

Tanım 2.15 $[t_0, T] \subset [0, \infty)$ indeks kümesi için $\{X_t, t \in [t_0, T]\}$, (Ω, \mathcal{A}, P) olasılık uzayı üzerinde tanımlı stokastik süreç olmak üzere, $t_0 \leq s \leq t \leq T$ ve her $B \in \mathcal{B}^d$ için,

Markov özelliği olarak bilinen

$$P(X_t \in B | \mathcal{A}(|t_0, s|)) = P(X_t \in B | X_t)$$

denklemini sağlayan $\{X_t, t \in [t_0, T]\}$ sürecine "*Markov süreci*" denir [13].



STOKASTİK İNTEGRALLER

Bu bölümde stokastik diferansiyel denklemlerin tartışmasına geçmeden önce, stokastik integralin ne anlama geldiği anlatılacaktır. dW_t , Wiener süreci $W(t)$ 'nin diferansiyeli, $\alpha(t, X)$ ve $\beta(t, X)$, X ve t 'nin deterministik fonksiyonları olmak üzere tek boyutlu SDD,

$$\begin{aligned}dX_t &= \alpha(t, X_t)dt + \beta(t, X_t)dW_t \\ X(t_0) &= X_0\end{aligned}\tag{3.1}$$

ile tanımlansın. (3.1) ile verilen gösterimsel denklemin genel çözümü

$$X_t = X_0 + \int_{t_0}^t \alpha(s, X_s)ds + \int_{t_0}^t \beta(s, X_s)dW_s\tag{3.2}$$

şeklinde yazılabilir. Her ne kadar bu çözüm iki integral içeriyor olsa da, herhangi bir değer elde etmek için, bu çözümdeki her iki integralin de anlamının tam olarak bilinmesi gerekir.

Basit düşünülecek olursa, (3.2) çözümünün sağ tarafındaki ilk integral bir Riemann integrali, ikinci integral ise bir Riemann-Stieltjes integrali gibi gözükmektedir. Ancak, bir komplikasyon, α ve β , t ve X 'in deterministik fonksiyonları olmasına rağmen X_s 'in stokastik bir süreç olmasından dolayı, $\alpha(s, X_s)$ ve $\beta(s, X_s)$ katsayılarının integralde stokastik davrandıkları gerçeğinden kaynaklanır.

Ashında, (3.2) denkleminin sağ tarafındaki ilk integral daima bir Riemann integrali olarak yorumlanabilir. Bununla birlikte, ikinci integralin yorumlanması sorunludur. Bu integral genellikle Ito integralidir, ancak bazı durumlarda Riemann-Stieltjes integrali olarak da yorumlanabilir.

3.1 Riemann İntegrasyonu

\mathcal{P}_n sonlu $[a, b]$ aralığının $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ parçalanışı olsun. Eğer,

$$S(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad (3.3)$$

mevcut ve değeri ξ_k 'nin seçiminden bağımsız ise f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında *Riemann integrallenebilir* denir. Bu limitin değerine de *Riemann integrali* denir ve sembolik olarak

$$\int_a^b f(x)dx = S(f)$$

şeklinde gösterilir.

f fonksiyonunun $[a, b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir olması için gerek şart f 'nin $[a, b]$ üzerinde sınırlandırılmış varyasyonun bir fonksiyonu olmasıdır. Ele alınması gereken iki konu vardır :

1. (3.3) limitinin varlığı tespit edilmelidir
2. Limitin değerinin ξ_k 'nin seçiminden bağımsız olduğu doğrulanmalıdır. Bu bağımsızlık, stokastik fonksiyonların integrasyonunda kullanılmayan Riemann integrasyonunun önemli bir özelliğidir.

3.2 Riemann-Stieltjes İntegrasyonu

Riemann-Stieltjes integrasyonu Riemann integrasyonuna benzerdir, ancak burada toplam, x yerine x 'in bir fonksiyonu olan g 'ye göre gerçekleştirilir. Örneğin, F, X rassal

değişkenin kümülatif dağılım fonksiyonu ise, X 'in beklenen değeri için bir tanım,

$$E[X] = \int_a^b x dF \quad (3.4)$$

şeklinde x 'in F 'ye göre Riemann-Stieltjes integralidir.

\mathcal{P}_n sonlu $[a, b]$ aralığının $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ parçalanışı olsun. $[a, b]$ üzerinde f 'nin g 'ye göre Riemann-Stieltjes integrali

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) |g(x_k) - g(x_{k-1})|, \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad (3.5)$$

limiti mevcut ve değeri ξ_k 'nin seçiminden bağımsız iken bu limitin değeri olarak tanımlanabilir.

Burada ne f , ne de g 'nin sürekli fonksiyon olması gerekmez, ayrıca g , x 'in diferansiyellenebilir bir fonksiyonu ise f 'nin g 'ye göre Riemann-Stieltjes integrali $f g'$ 'nin $[a, b]$ üzerinde sınırlandırılmış varyasyonun bir fonksiyonu olması koşuluyla, $f g'$ 'nin Riemann integrali ile değiştirilebilir.

3.3 Ito İntegrali

$[a, b]$ üzerinde $f(t, W_t)$ 'nin *Ito integrali*,

$$\int_a^b f(t, W_t) dW_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(t_{k-1}, W_{k-1}) (W_k - W_{k-1}) \quad (3.6)$$

ile tanımlı olup, burada $W_k = W(t_k)$ ve limit işleminin yakınsaklığı ortalama karesel anlamda, diğer bir deyişle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\sum_{k=1}^n f(t_{k-1}, W_{k-1}) (W_k - W_{k-1}) - \int_a^b f(t, W_t) dW_t \right]^2 = 0 \quad (3.7)$$

şeklinde ifade edilir.

$$S_n = \sum_{k=1}^n W_{k-1}(W_k - W_{k-1}) = \frac{1}{2}(W^2(b) - W^2(a)) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (W_k - W_{k-1})^2 \quad (3.8)$$

ifadesinden yola çıkarak $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ korelasyonsuz n standart normal sapma için $W_k - W_{k-1} = \sqrt{t_k - t_{k-1}}\epsilon_k$ olmak üzere

$$S_n = \sum_{k=1}^n W_{k-1}(W_k - W_{k-1}) = \frac{1}{2}(W^2(b) - W^2(a)) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})\epsilon_k^2$$

şekilde yeniden düzenlenirse

$$S_n - \frac{1}{2} [(W^2(b) - W^2(a)) - (b - a)] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})(\epsilon_k^2 - 1) \quad (3.9)$$

elde edilir.

Ito integralinin hesaplamaları ve (3.9) denkleminin sağ tarafının ortalama kare yakınsaklığını kurmak için,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[S_n - \frac{1}{2} [(W^2(b) - W^2(a)) - (b - a)] \right]^2 \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})(\epsilon_k^2 - 1) \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\sum_{j,k=1}^n (t_j - t_{j-1})(t_k - t_{k-1})(\epsilon_k^2 - 1)(\epsilon_j^2 - 1) \right] \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})^2 E [(\epsilon_k^2 - 1)^2] \end{aligned} \quad (3.10)$$

olduğu dikkate alınmalıdır, burada denklemdaki son satırda $j \neq k$ için $(\epsilon_k^2 - 1)$ ve $(\epsilon_j^2 - 1)$ bağımsız sıfır ortalamalı (zero mean) rassal sapmalardır.

$$E [(\epsilon_k^2 - 1)^2] = E[\epsilon_k^4] - 2E[\epsilon_k^2] + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$$

olduğu açıktır. Nihayetinde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[S_n - \frac{1}{2} [(W^2(b) - W^2(a)) - (b - a)] \right]^2 = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})^2 = 0 \quad (3.11)$$

olduğu sonucuna ulaşılır. Ito integralinin ortalama kare yakınsaklığı ise

$$\int_a^b W_s dW_s = \frac{1}{2} [(W^2(b) - W^2(a)) - (b - a)] \quad (3.12)$$

şeklinde elde edilir. Daha önce de belirtildiği gibi stokastik integralin Ito tanımı klasik analiz kurallarına uymaz (klasik analizde $(b - 2)/2$ terimi yoktur). Ito stokastik integralinin avantajı bir martingale olmasıdır.

3.3.1 Ito İntegrasyonunun Korelasyon Formülü

Ito integrasyonunun bir diğer önemli özelliği de *korelasyon formülü* olmasıdır, öyle ki $f(t, W_t)$ ve $g(t, W_t)$ iki stokastik fonksiyon olmak üzere

$$E \left[\int_a^b f(t, W_t) dW_t \int_a^b g(s, W_s) dW_s \right] = \int_a^b E[f(t, W_t)g(t, W_t)] dt$$

olup, $f = g$ özel durumu için de bu bağıntı

$$E \left[\int_a^b f(t, W_t) dW_t \int_a^b f(s, W_s) dW_s \right] = \int_a^b E[f^2(t, W_t)] dt$$

sonucuna indirgenir.

İspat : Ito integralin tanımından korelasyon formülü

$$\begin{aligned} S_n^{(f)} &= \sum_{k=1}^n f(t_{k-1}, W_{k-1})(W_k - W_{k-1}), \\ S_n^{(g)} &= \sum_{k=1}^n g(t_{k-1}, W_{k-1})(W_k - W_{k-1}), \end{aligned} \quad (3.13)$$

kısmi toplamlarının dikkate alınmasıyla ispatlanır. Buradan hareketle

$$\begin{aligned}
& E \left[\int_a^b f(t, W_t) dW_t \int_a^b g(s, W_s) dW_s \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j,k=1}^n E [f(t_{k-1}, W_{k-1}) g(t_{j-1}, W_{j-1}) (W_k - W_{k-1}) (W_j - W_{j-1})]
\end{aligned} \tag{3.14}$$

elde edilir. $f(t_{k-1}, W_{k-1}) g(t_{j-1}, W_{j-1})$ ve $(W_k - W_{k-1})(W_j - W_{j-1})$ çarpımları $j \neq k$ için korelasyonsuzdur ve bu nedenle (3.14) denklemindeki çift toplamda yalnızca $k = j$ durumu için

$$\begin{aligned}
& E \left[\int_a^b f(t, W_t) dW_t \int_a^b g(t, W_t) dW_t \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n E [f(t_{k-1}, W_{k-1}) g(t_{k-1}, W_{k-1}) (W_k - W_{k-1})^2]
\end{aligned}$$

elde edilir.

$f(t_{k-1}, W_{k-1}) g(t_{k-1}, W_{k-1})$ korelasyonsuz olduğundan

$$\begin{aligned}
& E [f(t_{k-1}, W_{k-1}) g(t_{k-1}, W_{k-1}) (W_k - W_{k-1})^2] \\
&= E[f(t_{k-1}, W_{k-1}) g(t_{k-1}, W_{k-1})] E[(W_k - W_{k-1})^2]
\end{aligned}$$

eşitliğinde $E[(W_k - W_{k-1})^2]$ yerine $(t_k - t_{k-1})$ yazılırsa

$$E \left[\int_a^b f(t, W_t) dW_t \int_a^b g(t, W_t) dW_t \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n E [f(t_{k-1}, W_{k-1}) g(t_{k-1}, W_{k-1})] (t_k - t_{k-1})$$

olduğu açıktır. Bu son denklemin sağ tarafı, $[a, b]$ aralığı üzerinde

$E[f(t_{k-1}, W_{k-1}) g(t_{k-1}, W_{k-1})] (t_k - t_{k-1})$ 'nin Riemann integraline karşılık gelir ve bu da

$$E \left[\int_a^b f(t, W_t) dW_t \int_a^b g(t, W_t) dW_t \right] = \int_a^b E [f(t, W_t) g(t, W_t)] dt \tag{3.15}$$

sonucuna yol açar.

3.4 Stratonovich İntegrali

Ito integrasyonunun Riemann ve Riemann-Stieltjes integrasyon kurallarına uymaması, Ito integrasyonunu zor bir yöntem haline getirir. Bu durumu gidermenin bir yolu, oldukça rahat koşullar altında geleneksel integrasyon kurallarına uymak için ispatlanabilen Stratonovich integralini tanıtmaktır, ancak böyle bir durumda elbette Ito integralinin martingale özelliğinin feda edilmesi gerekir. Stratonovich integrali bir submartingaledir. Stratejik olarak Ito ve Stratonovich integralleri birbiri ile ilişkilidir.

Uygun bir $f(t, W_t)$ diferansiyellenebilir fonksiyonu verildiğinde, W_t Wiener sürecine göre f 'nin Stratonovich integrali (\circ ile gösterilir)

$$\int_a^b f(t, W_t) \circ dW_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, W(\xi_k))(W_k - W_{k-1}), \quad \xi_k = \frac{t_{k-1} + t_k}{2} \quad (3.16)$$

ile tanımlanır. Burada limit kuralları (Ito integralinde olduğu gibi) ortalama kare anlamında yorumlanır, yani integralin değeri

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\sum_{k=1}^n f(\xi_k, W(\xi_k))(W_k - W_{k-1}) - \int_a^b f(t, W_t) \circ dW_t \right]^2 = 0 \quad (3.17)$$

eşitliğini gerektirir.

Stratonovich integrasyonunun, Ito integrasyonundan nasıl farklılaşabileceğini değerlendirmek için,

$$\int_a^b W_t \circ dW_t$$

integralinin hesaplanması faydalı olur. Hesaplamalar Ito integrali için uygulanan yöntemlere benzerdir ve

$$S_n = \sum_{k=1}^n W_{k-1/2}(W_k - W_{k-1}) \quad (3.18)$$

Riemann-Stieltjes kısmi toplamı ile başlar, burada kolaylık olması açısından $W_{k-1+\lambda} = W(t_{k-1} + \lambda(t_k - t_{k-1}))$ notasyonu kullanılmıştır. Bu toplam $(W_{k-1/2} - W_{k-1})$ ortalaması sıfır ve varyansı $(t_k - t_{k-1})/2$ olan Gaussian sapmalar olmak üzere

$$\frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^n (W_k^2 - W_{k-1}^2) + \sum_{k=1}^n (W_{k-1/2} - W_{k-1})^2 - \sum_{k=1}^n (W_k - W_{k-1/2})^2 \right]$$

şeklinde eşdeğer cebirsel forma dönüştürülür. Sonuç olarak her bir k değeri için ϵ_k ve η_k korelasyonsuz standart sapmalar olmak üzere $(W_{k-1/2} - W_{k-1}) = \sqrt{(t_k - t_{k-1})/2}\epsilon_k$ ve $(W_k - W_{k-1/2}) = \sqrt{(t_k - t_{k-1})/2}\eta_k$ yazılabilir. Böylece Stratonovich integralinin tanımının altındaki kısmi toplam

$$S_n = \frac{1}{2} \left[W^2(b) - W^2(a) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})(\epsilon_k^2 - \eta_k^2) \right] \quad (3.19)$$

şeklindedir.

Ito integralinin ortalama karesel yakınsaklığını oluşturmak için kullanılan çıkarım tekrarlanırsa,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[S_n - \frac{W^2(b) - W^2(a)}{2} \right]^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})(\epsilon_k^2 - \eta_k^2) \right]^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})(t_j - t_{j-1})(\epsilon_k^2 - \eta_k^2)(\epsilon_j^2 - \eta_j^2) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})^2 [(\epsilon_k^2 - \eta_k^2)^2] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemin son satırı k 'nın belli değerleri için ϵ_k ve η_k 'nın korelasyonsuz sapmalar olduğunu gösterir. Dahası her bir k değeri için ϵ_k ve η_k 'nın bağımsızlığından

$$E [(\epsilon_k^2 - \eta_k^2)^2] = E[\epsilon_k^4] - 2E[\epsilon_k^2 \eta_k^2] + E[\eta_k^4] = 3 - 2 \times 1 \times 1 + 3 = 4$$

Nihayetinde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[S_n - \frac{W^2(b) - W^2(a)}{2} \right]^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})^2 = 0 \quad (3.20)$$

olup buradan da

$$I = \int_a^b W_t \circ dW_t = \frac{W^2(b) - W^2(a)}{2} \quad (3.21)$$

sonucuna ulaşılır.

Bu örnek, Stratonovich integralinin birkaç özelliğini ortaya çıkarır :

1. Ito integralinden farklı olarak, Stratonovich integrali genellikle beklentiseldir (anticipatory) önceki örnek dikkate alındığında $E[I] = (b - a)/2 > 0$ ve dolayısıyla I bir sub-martingaledir;
2. Bu örneğe dayanarak Stratonovich integralinin, analizdeki geleneksel kurallara uyduğu görülür;
3. Bu örnek drift olarak yorumlandığında, Stratonovich integralinin Ito integralinden farklı olduğunu "ortalama değer" üzerinden gösteren bir önermedir.

3.5 Ito ve Stratonovich İntegralleri Arasındaki İlişki

Tanımlayıcı örnek ile verilen Ito ve Stratonovich integralleri arasındaki bağlantı, yani Stratonovich integralinin değeri, Ito integralinin ve deterministik bir drift (sürüklenme) teriminin toplamı olduğu,

$$\int_a^b E[f(t, W_t)]^2 dt < \infty, \quad \int_a^b E \left[\frac{\partial f(t, W_t)}{\partial W_t} \right]^2 dt < \infty \quad (3.22)$$

uygun şartları altında $f(t, W_t)$ fonksiyon sınıfı için doğrudur.

Buradan çıkarılacak temel sonuç $f(t, W_t)$ fonksiyonunun Ito integrali ve Stratonovich

integrali

$$\int_a^b f(t, W_t) \circ dW_t = \int_a^b f(t, W_t) dW_t + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial f(t, W_t)}{\partial W_t} dt \quad (3.23)$$

özdeşliği ile bağlantılıdır. (3.22)'daki ilk koşul Ito ve Stratonovich integrallerinin yakınsaklığı için gereklidir ve dolayısıyla sadece ikinci şart yenidir. Görevi, (3.23)'in sağ tarafındaki ikinci integralin varlığını garantiye almaktır. Denklem (3.23)'in türevi, $f(t, W_t)$ fonksiyonunun lokal olarak bir Taylor serisine açılabilmesine bağlıdır. İspat, Stratonovich ve Ito integrallerinin kısmi toplamlarından yola çıkılarak yapılır. Bu düşünce ile

$$S_n^{Stratonovich} = \sum_{k=1}^n (t_{k-1/2} - W_{k-1/2})(W_k - W_{k-1}),$$

$$S_n^{Ito} = \sum_{k=1}^n (t_{k-1} - W_{k-1})(W_k - W_{k-1})$$

olmak üzere

$$\int_a^b f(t, W_t) \circ dW_t = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{Stratonovich}, \quad \int_a^b f(t, W_t) dW_t = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{Ito}$$

elde edilir.

İlk olarak $S_n^{Stratonovich} - S_n^{Ito}$ farkı elde edilip, daha sonra $f(t_{k-1/2} - W_{k-1/2})$ fonksiyonun $t = t_{k-1}$ ve $W = W_{k-1}$ civarında iki boyutlu Taylor seri açılımı bu ifadede yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
S_n^{Stratonovich} - S_n^{Ito} &= \sum_{k=1}^n [f(t_{k-1/2}, W_{k-1/2}) - f(t_{k-1}, W_{k-1})] (W_k - W_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^n \left[f(t_{k-1}, W_{k-1}) + (t_{k-1/2} - t_{k-1}) \frac{\partial f(t_{k-1}, W_{k-1})}{\partial t} \right. \\
&\quad \left. + (W_{k-1/2} - W_{k-1}) \frac{\partial f(t_{k-1}, W_{k-1})}{\partial W} \right. \\
&\quad \left. + \dots - f(t_{k-1}, W_{k-1}) \right] (W_k - W_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^n (t_{k-1/2} - t_{k-1}) \frac{\partial f(t_{k-1}, W_{k-1})}{\partial t} (W_k - W_{k-1}) \\
&\quad + \sum_{k=1}^n (W_{k-1/2} - W_{k-1}) \frac{\partial f(t_{k-1}, W_{k-1})}{\partial W} (W_k - W_{k-1}) + \dots
\end{aligned}$$

olup bu hesaplamamın sağ tarafındaki ilk toplam, $O(t_k - t_{k-1})^{3/2}$ olup $n \rightarrow \infty$ için sıfır değerini alır ve limit sürecindeki ortalama kare yakınsaklığın mertebesi $O(t_k - t_{k-1})^3$ 'dür.

Bu son denklemin sadeleştirilmesi ile de

$$\begin{aligned}
S_n^{Stratonovich} &= S_n^{Ito} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(t_{k-1}, W_{k-1})}{\partial W} (t_k - t_{k-1}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(t_{k-1}, W_{k-1})}{\partial W} \left[(W_{k-1/2} - W_{k-1})(W_k - W_{k-1}) - \frac{t_k - t_{k-1}}{2} \right]
\end{aligned} \tag{3.24}$$

elde edilir. $E[(W_{k-1/2} - W_{k-1})(W_k - W_{k-1}) - \frac{t_k - t_{k-1}}{2}] = 0$ olduğu dikkate alınırsa (3.22)'un ikinci şartı ortalama karesel yakınsaklığı garanti eder ve

$$\int_a^b f(t, W_t) \circ dW_t = \int_a^b f(t, W_t) dW_t + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial f(t, W_t)}{\partial W_t} dt \tag{3.25}$$

şeklinde fonksiyonların geniş bir aralığı için Ito ve Stratonovich integralleri arasında bağlantı elde edilir. Buradaki ikinci integral de bir Riemann integralidir.

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu bölümde, stokastik diferansiyel denklemler anlatılacaktır. Ito stokastik diferansiyel denklemleri için varlık ve teklik teoremi verilip, çözümlerin özellikleri tartışılacaktır. Nonlineer stokastik diferansiyel denklemlerin lineer hale indirgenerek çözümlerinin elde edilmesi sunulacaktır. Son olarak Stratonovich stokastik diferansiyel denklemleri anlatılıp, Ito denklemleri ile arasındaki ilişkilerden bahsedilecektir.

4.1 Ito Stokastik Diferansiyel Denklemler

Birinci mertebeden $x(0) = x_0$ başlangıç şartı ve

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds$$

integral formu ile verilen genel adi diferansiyel denklem

$$dx_t = a(t, x(t)) dt, \quad x_0 = x_0 \tag{4.1}$$

formundadır. Burada $a(t, x(t))$ yeterince düzgünlük şartını sağlayan bir fonksiyondur. (4.1) denkleminde başlangıç şartı x_0 sabiti yerine $X_0 = Y(w)$ şeklinde bir rassal değişken

ise,

$$dX_t = a(t, X(t))dt, \quad X_0 = Y(w) \quad (4.2)$$

ile verilen diferansiyel denklemin çözümü, $X_t(w)$ gibi stokastik bir süreç olur.

Rassallık bu şekilde başlangıç şartından kaynaklanabileceği gibi, ölçümlerdeki belirsizlik ve hatalardan da kaynaklanabilir. Bu rassallık beyaz gürültü (white noise) ile ifade edilirse, $[0, T]$ aralığındaki bir Ito stokastik diferansiyel denklemi $X(0, \cdot)$ başlangıç şartı olmak üzere $0 \leq t \leq T$ için,

$$X(t, w) = X(0, w) + \int_0^t f(s, X(s, w))ds + \int_0^t g(s, X(s, w))dW(s, w) \quad (4.3)$$

şeklinde integral formunda ve

$$dX(t, w) = f(t, X(t, w))dt + g(t, X(t, w))dW(t, w) \quad (4.4)$$

diferansiyel formunda ifade edilir. Burada genellikle f fonksiyonu *drift katsayısı*, g fonksiyonu ise *difüzyon katsayısı* olarak adlandırılır. f ve g fonksiyonlarının her ikisi de sezgisel olmayan (nonanticipating) fonksiyonlar olup $k \geq 0$ sabiti için

- (1) $|f(t, x) - f(s, y)|^2 \leq k(|t - s| + |x - y|^2)$, $0 \leq s, t \leq T$ ve $x, y \in \mathbb{R}$
- (2) $|f(t, x)|^2 \leq k(1 + |x|^2)$, $0 \leq t \leq T$ ve $x \in \mathbb{R}$

koşullarını sağladığı kabul edilir [14].

(4.3) 'e ait çözümlerin varlığı ve tekliğini tanımlamadan önce, stokastik analizde sıklıkla kullanılan *Gronwall eşitsizliğini* verelim.

4.1.1 Gronwall Eşitsizliği

$u(t) \geq 0$ fonksiyonu, a ve c pozitif sabitler olmak üzere $0 \leq t \leq T$ için $u(t) \leq c + \int_0^t u(s)ds$ eşitsizliğini sağlam. Bu durumda $u(t) \leq ce^{at}$ eşitsizliği de doğru olur.

Tanım 4.1 Lipschitz Süreklilik Bir $f(x)$ fonksiyonu verildiğinde her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde $K \geq 0$ bulunabiliyorsa $f(x)$ 'e bir *Lipschitz fonksiyonu* veya *Lipschitz sürekli fonksiyon* denir

Lemma 4.1 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir.

1. Eğer f Lipschitz ise sürekli dir.
2. Eğer f türevlenebilir ve sınırlı birinci türevlere sahipse Lipschitzdir.
3. Eğer f Lipschitz ise lineer büyür. Yani bir $L \geq 0$ sayısı vardır, öyle ki her x için $|f(x)| \leq L(1 + |x|)$ olur.

Teorem 4.1 Varlık ve Teklik Teoremi Eğer,

- X_0 başlangıç şartı Brown sürecinden bağımsız,
- $E(X_0^2) < \infty$,
- Her $t \in [0, T]$ için $f(t, x)$ ve $g(t, x)$ fonksiyonları ikinci değişkenlerine göre Lipschitz, dolayısıyla belli $K \geq 0, L \geq 0$ sabitleri ve $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$|f(t, x) - f(t, y)| + |g(t, x) - g(t, y)| \leq K|x - y|$$

ve

$$|f(t, x)| + |g(t, x)| \leq L(1 + |x|), \quad \text{lineer büyüme}$$

şartlarını sağlıyorsa, (4.3) stokastik diferansiyel denkleminin yörüngeleri sürekli, Brown sürecinin doğal filtrasyonuna adapte ve $E(\int_0^T [X_t^2] dt)$ özelliğinde tek bir çözümü vardır [15].

4.2 Lineer Stokastik Diferansiyel Denklemler

Lineer adi diferansiyel denklemlerde olduğu gibi, bir lineer SDD'nin genel çözümü de açık bir biçimde bulunabilir. Çözüm metodu da, integral çarpanı veya denk olarak ilgili homojen diferansiyel denklemin bir temel çözümünü içerir.

Bir skalar lineer SDE'nin genel formu,

$$dX_t = (a_1(t)X_t + a_2(t))dt + (b_1(t)X_t + b_2(t))dW_t \quad (4.5)$$

olup burada a_1, b_1, a_2, b_2 katsayıları t zamanına göre verilen fonksiyonlar veya sabittir. Bunların Lebesgue ölçülebilir ve $0 \leq t \leq T$ aralığında sınırlı oldukları, varlık-teklik teoreminin sağlandığı, verilen $W_t, t \geq 0$ Wiener süreci ile ilgili $\mathcal{A}_t, t \geq 0$ σ -cebirlerinin ailesine karşılık gelen her bir \mathcal{A}_{t_0} -ölçülebilir, X_{t_0} başlangıç değeri ve her bir $0 \leq t \leq T$ için $t_0 \leq t \leq T$ üzerinde bir X_t güçlü çözümünün varlığı ispatlanabilir.

SDD'deki tüm katsayılar sabit ise bu durumda SDD otonom (autonomous) ve $t - t_0 \geq 0$ için varolan tüm çözümleri homojen Markov süreci (Markov process) olur. Bu durumda $t_0 = 0$ olarak tanımlamak yeterlidir.

Eğer $a_2(t) = 0$ ve $b_2(t) = 0$ ise (4.5) denklemi,

$$dX_t = a_1(t)X_t dt + b_1(t)X_t dW_t \quad (4.6)$$

şeklinde homojen lineer stokastik diferansiyel denklem olur. $X_t = 0$, (4.6) için aşıkâr çözümdür. $\Phi_{t_0, t_0} = 1$ başlangıç şartını sağlayan Φ_{t, t_0} genel çözümü (fundamental solution), diğer bütün çözümler onunla ifade edilebileceği için çok daha önemlidir. Problem, böyle bir temel çözüm bulmaktır.

$b_1(t) = 0$ için (4.5) denklemi,

$$dX_t = (a_1(t)X_t + a_2(t))dt + b_2(t)dW_t \quad (4.7)$$

olup burada gürültü (noise) eklemeli (additive) olarak karşımıza çıkar. Böyle SDD'lere "*dar anlamda (narrow-sense) lineer SDD*" denir. (4.7) 'ten elde edilen homojen denklem ($a_2(t) = 0, b_2(t) = 0$);

$$dX_t = a_1(t)X_t dt \Rightarrow \frac{dX_t}{dt} = a_1(t)X_t \quad (4.8)$$

şeklinde bir ADD'dir ve temel çözümü ;

$$\Phi_{t,t_0} = \exp\left(\int_{t_0}^t a_1(s)ds\right)$$

dir. (4.7)'ün X_t çözümüne $U(t, x) = \Phi_{t,t_0}^{-1}x$ dönüşümü ile Ito formülü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} d(\Phi_{t,t_0}^{-1} X_t) &= \left(\frac{d\Phi_{t,t_0}^{-1}}{dt} X_t + (a_1(t)X_t + a_2(t))\Phi_{t,t_0}^{-1}\right)dt + b_2(t)\Phi_{t,t_0}^{-1}dW_t \\ &= a_2(t)\Phi_{t,t_0}^{-1}dt + b_2(t)\Phi_{t,t_0}^{-1}dW_t \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\frac{d\Phi_{t,t_0}^{-1}}{dt} = -\Phi_{t,t_0}^{-1}a_1(t)$$

olup, denklemin sağ tarafı, t ve w nın bilinen fonksiyonlarını içermektedir. O halde, t_0 'dan t 'ye her iki tarafı integre edersek,

$$\Phi_{t,t_0}^{-1} X_t = \Phi_{t_0,t_0}^{-1} X_{t_0} + \int_{t_0}^t a_2(s)\Phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t b_2(s)\Phi_{s,t_0}^{-1} dW_s$$

ve $\Phi_{t_0,t_0} = 1$ olduğundan (4.7) ile verilen dar anlamdaki lineer SDD'nin çözümü,

$$X_t = \Phi_{t,t_0} \left(X_{t_0} + \int_{t_0}^t a_2(s)\Phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t b_2(s)\Phi_{s,t_0}^{-1} dW_s \right) \quad (4.9)$$

olur. Burada,

$$\Phi_{t,t_0} = \exp\left(\int_{t_0}^t a_1(s)ds\right). \quad (4.10)$$

Ito Formülü : X_t , SDD'nin çözümü ve f ikinci mertebeden sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $Y(t) = f(X(t), t)$ aşağıdaki diferansiyel denklemi

sağlar:

$$dY = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(X, t) + a(X, t) \frac{\partial f}{\partial x}(X, t) + \frac{1}{2} b^2(X, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X, t) \right] dt + b(X, t) \frac{\partial f}{\partial x}(X, t) dW_t$$

Örnek 4.1 $dX_t = -aX_t dt + b dW_t$ ile verilen Langevin denklemi dar anlamda lineer olup, burada $a_1(t) = -a$, $a_2(t) = 0$, $b_1(t) = 0$, $b_2(t) = b$ dir. O halde temel çözüm;

$$\Phi_{t,t_0} = \exp\left(\int_{t_0}^t a_1(s) ds\right) = \exp\left(\int_{t_0}^t -a ds\right) = \exp(-a(t - t_0))$$

olur ve $t_0 = 0$ için, (4.9) çözümü

$$X_t = e^{-at} \left(X_{t_0} + \int_{t_0=0}^t (0) e^{-as} ds + \int_{t_0=0}^t b e^{-as} dW_s \right) \Rightarrow X_t = e^{-at} \left(X_{t_0} + \int_0^t b e^{-as} dW_s \right)$$

şekline dönüşür. Bu çözüm de, "Ornstein-Uhlenbeck" sürecidir.

(4.9) çözümü X_{t_0} başlangıç şartının sabit yada Gaussian rassal değişken olduğu durumlarda bir Gauss sürecidir. Ortalaması ve ikinci dereceden momentleri de ADD'yi sağlar.

Genel lineer durum oldukça karmaşıktır. Çünkü,

$$dX_t = a_1(t)X_t dt + b_1(t)X_t dW_t$$

ile verilen homojen denklem bir orjinal SDD'dir.

$$\Phi_{t,t_0} = \exp\left(\int_{t_0}^t a_1(s) ds\right)$$

ile verilen dar anlamda lineer SDD'nin temel çözümü $d(\ln \Phi_{t,t_0}) = a_1(t) dt$ (ordinary) diferansiyel denklemi sağlar. Bu kullanılarak, (4.6)'nin temel çözümü için, $d(\ln \Phi_{t,t_0})$

dönüşüm sürecine Ito formülü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} d(\ln\Phi_{t,t_0}) &= \left(a_1(t)\Phi_{t,t_0}\Phi_{t,t_0}^{-1} - \frac{1}{2}b_1^2(t)\Phi_{t,t_0}^2\Phi_{t,t_0}^{-2} \right) dt + b_1(t)\Phi_{t,t_0}\Phi_{t,t_0}^{-1}dW_t \\ &= \left(a_1(t) - \frac{1}{2}b_1^2(t) \right) dt + b_1(t)dW_t \end{aligned}$$

olup sadece t ve w 'nın bilinen fonksiyonlarından oluşur. Böylece $\Phi_{t_0,t_0} = 1$ olduğundan,

$$\ln\Phi_{t,t_0} = \int_{t_0}^t \left(a_1(s) - \frac{1}{2}b_1^2(s) \right) ds + \int_{t_0}^t b_1(s)dW_s$$

veya

$$\Phi_{t,t_0} = \exp\left(\int_{t_0}^t \left(a_1(s) - \frac{1}{2}b_1^2(s) \right) ds + \int_{t_0}^t b_1(s)dW_s \right) \quad (4.11)$$

$b_1(t) = 0$ için (4.10)'a indirgenir. Benzer şekilde, Φ_{t,t_0}^{-1} 'e Ito formülünün uygulanması ile,

$$d(\Phi_{t,t_0}^{-1}) = \left(-a_1(t) + b_1^2(t) \right) \Phi_{t,t_0}^{-1} dt - b_1(t)\Phi_{t,t_0}^{-1}dW_t \quad (4.12)$$

elde edilir. Yukarıda tanımlandığı gibi dar anlamda (narrow-sense) durum için, (4.5) ile verilen genel lineer diferansiyel denklemin bir $X(t)$ çözümü için $\Phi_{t,t_0}^{-1}X_t$ süreci (process) açık olarak integrallenebilen bir stokastik diferansiyel denklemdir. Ancak, buradaki Φ_{t,t_0} ve $X(t)$ terimlerinin ikisi de aynı Wiener sürecini içeren stokastik diferansiyele sahiptir, bu nedenle Ito formülü $X_t^{(1)} = \Phi_{t,t_0}^{-1}X_t$ ve $X_t^{(2)} = X_t$ olmak üzere $U(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) = X_t^{(1)}X_t^{(2)}$ iki bileşenli dönüşüm ile uygulanabilir. Buna göre, (4.5)'deki katsayılar ve (4.12)'den yola çıkarak,

$$\begin{aligned} d(\Phi_{t,t_0}^{-1}X_t) &= \left[(-a_1(t) + b_1^2(t))X_t + (a_1(t)X_t + a_2(t)) \right] \Phi_{t,t_0}^{-1} dt \\ &\quad - b_1(t)[b_1(t)X_t + b_2(t)]\Phi_{t,t_0}^{-1} dt \\ &\quad + \left[-b_1(t)\Phi_{t,t_0}^{-1}X_t + (b_1(t)X_t + b_2(t))\Phi_{t,t_0}^{-1} \right] dW_t \\ &= (a_2(t) - b_1(t)b_2(t))\Phi_{t,t_0}^{-1} dt + b_2(t)\Phi_{t,t_0}^{-1} dW_t \end{aligned}$$

olup $\Phi_{t_0,t_0} = 1$ yazarak integral alınırsa,

$$\Phi_{t,t_0}^{-1} X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t (a_2(s) - b_1(s)b_2(s))\Phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t b_2(s)\Phi_{s,t_0}^{-1} dW_s$$

olur ve böylece

$$X_t = \Phi_{t,t_0} \left(X_{t_0} + \int_{t_0}^t (a_2(s) - b_1(s)b_2(s))\Phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t b_2(s)\Phi_{s,t_0}^{-1} dW_s \right) \quad (4.13)$$

elde edilir. Burada Φ_{t,t_0} , (4.12)'de verildiği gibidir.

4.3 İndirgenebilir Stokastik Diferansiyel Denklemler

Uygun bir $X_t = U(t, Y_t)$ dönüşümü ile belli bir

$$dY_t = a(t, Y_t)dt + b(t, Y_t)dW_t \quad (4.14)$$

nonlineer SDD,

$$dX_t = (a_1(t)X_t + a_2(t))dt + (b_1(t)X_t + b_2(t))dW_t \quad (4.15)$$

şeklinde lineer SDD'ye indirgenebilir.

Eğer, $\frac{\partial U}{\partial y}(t, y) \neq 0$ ise ters fonksiyon teoremi, $x = U(t, y)$ 'nin local bir inversi olan $y = V(t, x)$ 'in varlığını garanti eder, öyleki $x = U(t, V(t, x))$ ve $y = V(t, U(t, y))$. (4.15)'in bir Y_t çözümü $Y_t = V(t, X_t)$ formunda olup, burada X_t uygun a_1, a_2, b_1, b_2 katsayıları için (4.5)'de verildiği gibidir. Ito formülünden,

$$dU(t, Y_t) = \left(\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) dt + b \frac{\partial U}{\partial y} dW_t$$

olup burada katsayılar ve kısmi türevler (t, Y_t) 'de hesaplanmıştır. Bu denklemde eğer,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t}(t, y) + a \frac{\partial U}{\partial y}(t, y) + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(t, y) \\ = a_1(t)U(t, y) + a_2(t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

ve

$$b(t, y) \frac{\partial U}{\partial y}(t, y) = b_1(t)U(t, y) + b_2(t) \quad (4.17)$$

ise (4.5) formundaki lineer SDD ile uyudur. $a_1(t) \equiv b_1(t) \equiv 0$ için özelleştirip $a_2(t) = \alpha(t)$ ve $b_2(t) = \beta(t)$ yazılırsa (4.16) denkleminde,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial y}(t, y) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(a(t, y) \frac{\partial U}{\partial y}(t, y) + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(t, y) \right)$$

ve (4.17)'ten,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(b(t, y) \frac{\partial U}{\partial y}(t, y) \right) = 0$$

ve

$$b(t, y) \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial y}(t, y) + \frac{\partial b}{\partial t}(t, y) \frac{\partial U}{\partial y}(t, y) = \beta'(t)$$

olur. Şimdi $b(t, y) \neq 0$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda U ve türevi elimine edilirse,

$$\beta'(t) = \beta(t)b(t, y) \left(\frac{1}{b^2(t, y)} \frac{\partial b}{\partial t}(t, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a(t, y)}{b(t, y)} \right) + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 b}{\partial y^2}(t, y) \right)$$

bulunur. Sol taraf y'den bağımsız olduğundan her iki tarafın y'ye göre türevi alınarak

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y}(t, y) = 0$$

elde edilir ki burada γ aşağıda verildiği gibidir:

$$\gamma(t, y) = \frac{1}{b(t, y)} \frac{\partial b}{\partial t}(t, y) - b(t, y) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a(t, y)}{b(t, y)} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial y}(t, y). \quad (4.18)$$

Dolayısıyla $x = U(t, y)$ dönüşümü ile (4.14) ile verilen nonlinear SDD'nin, açıkça

$$dX_t = \alpha(t)dt + \beta(t)dW_t \quad (4.19)$$

şeklinde integrallenebilen SDD'ye indirgenebilmesi için yeterlidir. (4.16) ve (4.17)'den aşağıdaki eşitlikler tanımlanabilir:

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t, y) + a(t, y) \frac{\partial U}{\partial y}(t, y) + \frac{1}{2} b^2(t, y) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(t, y) = \alpha(t)$$

ve

$$b(t, y) \frac{\partial U}{\partial t}(t, y) = \beta(t)$$

ve sonuç olarak

$$U(t, y) = C \exp\left(\int_0^t \gamma(s, y) ds\right) \int_0^y \frac{1}{b(t, z)} dz$$

olarak elde edilir (burada C keyfi sabit).

Remark 4.1 Bu metot, belli bir lineer SDD'nin (4.19) formundaki stokastik diferansiyeline indirgenmesi için de kullanılabilir.

Bu yöntemin bir varyasyonu da

$$dY_t = a(Y_t)dt + b(Y_t)dW_t \quad (4.20)$$

ile verilen nonlinear otonom SDD'nin $X(t) = U(Y_t)$ dönüşümü ile

$$dX_t = (a_1X_t + a_2)dt + (b_1X_t + b_2)dW_t \quad (4.21)$$

şeklinde otonom linear SDD'ye indirgenmesi için uygulanabilir. Burada $X(t) = U(Y_t)$ dönüşümü zamandan bağımsızdır. Bu durumda (4.16) ve (4.17) eşitlikleri;

$$a(y)\frac{dU}{dy}(y) + \frac{1}{2}b^2(y)\frac{d^2U}{dy^2}(y) = a_1U(y) + a_2 \quad (4.22)$$

ve

$$b(y)\frac{dU}{dy}(y) = b_1U(y) + b_2 \quad (4.23)$$

formunda olur. $b(y) \neq 0$ ve $b_1 \neq 0$ olmak üzere (4.23)'den

$$U(y) = Cexp(b_1B(y)) - \frac{b_2}{b_1} \quad (4.24)$$

olur, burada

$$B(y) = \int_{y_0}^y \frac{ds}{b(s)}$$

ve C keyfi sabittir. $U(y)$ 'nin bu değerini (4.22)'da yerine yazıp,

$$A(y) = \frac{a(y)}{b(y)} - \frac{1}{2} \frac{db}{dy}(y)$$

olarak alınırsa

$$\left(b_1A(y) + \frac{1}{2}b_1^2 - a_1\right)Cexp(b_1B(y)) = a_2 - a_1\frac{b_2}{b_1} \quad (4.25)$$

elde edilir. (4.25) 'in diferansiyeli alınıp, sonuç $b(y)exp(-b_1/B(y))b_1$ ile çarpılıp tekrar

diferansiyeli alınırsa,

$$b_1 \frac{dA}{dy} + \frac{d}{dy} \left(b \frac{dA}{dy} \right) = 0 \quad (4.26)$$

olur. $\frac{dA}{dy} = 0$ ise veya

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{\frac{d}{dy} \left(b \frac{dA}{dy} \right)}{\frac{dA}{dy}} \right) = 0 \quad (4.27)$$

ise, bu kesinlikle sağlanır. Sağlayan b_1 ise

$$b_1 = - \frac{\frac{d}{dy} \left(b \frac{dA}{dy} \right)}{\frac{dA}{dy}}.$$

şeklinde seçilir. Eğer $b_1 \neq 0$ ise, uygun dönüşüm,

$$U(y) = C \exp(b_1 B(y)) \quad (4.28)$$

olur. Aksi halde, yani $b_1 = 0$ ise

$$U(y) = b_2 B(y) + C \quad (4.29)$$

olup burada b_2 (4.23)'ü sağlayacak şekilde seçilmiştir.

Örnek 4.2

$$dY_t = -\frac{1}{2} \exp(-2Y_t) dt + \exp(-Y_t) dW_t$$

nonlinear SDD için çözüm bulalım.

Nonlinear SDD ;

$$dY_t = a(Y_t) dt + b(Y_t) dW_t$$

şeklinde idi. Buna göre ,

$$a(Y_t) = -\frac{1}{2}exp(-2Y_t)$$

$$b(Y_t) = exp(-Y_t)$$

$$A(y) = \frac{a(y)}{b(y)} - \frac{1}{2} \frac{db}{dy}(y) \Rightarrow A(y) = 0$$

olduğundan, b_1 'in herhangi bir değeri için (4.29) sağlanır. Denklem nonlinear otonom SDD olup, (4.20)'ye uygundur ve $X_t = U(Y_t)$ dönüşümü yapılır ve (4.26)'daki denklemin çözümü aranır. $b_1 = 0$ ve $b_2 = 1$ için (4.23)'un çözümü, $b_1 = 0$ durumu için (4.29) ile ,

$$b(y) \frac{dU}{dy}(y) = b_1 U(y) + b_2 \Rightarrow U = b_2 e^y$$

olarak elde edilir. U'nun bu değeri (4.22)'da yerine yazılırsa :

$$a(y) \frac{dU}{dy}(y) + \frac{1}{2} b^2(y) \frac{d^2 U}{dy^2}(y) = a_1 U(y) + a_2 \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$$

olarak elde edilir. $X_t = U(Y_t) \Rightarrow X_t = b_2 e^{Y_t} = 1 e^{Y_t} = e^{Y_t}$ ve indirgenen (4.21) otonom lineer SDD de

$$dX_t = (a_1 X_t + a_2) dt + (b_1 X_t + b_2) dW_t \Rightarrow dX_t = dW_t$$

olup, çözüm ise

$$X_t - X_0 = W_t - W_0 \Rightarrow X_t = X_0 + W_t = e^{Y_0} + W_t$$

olur. Aradığımız çözüm nonlinear SDD (4.20)'nin çözümü idi. Buna göre;

$$X_t = U(Y_t) = b_2 e^{Y_t} = e^{Y_t} \Rightarrow Y_t = \ln X_t \Rightarrow Y_t = \ln(e^{Y_0} + W_t)$$

olup bu durum sample-path zamanı boyunca geçerlidir.

4.4 Stratonovich Stokastik Diferansiyel Denklemler

Daha önce

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dW_t \quad (4.30)$$

ile verilen SDD matematiksel olarak stokastik integral denklem (SID) şeklinde

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t f(s, X_s)ds + \int_{t_0}^t g(s, X_s)dW_s \quad (4.31)$$

ile ifade edildiğinden ve burada ikinci integralin stokastik integral olduğundan bahsedildi. Şimdiye kadar tezde stokastik integral Ito stokastik integral olarak tanımlandı. Bu durumda (4.30) ile verilen denklem de Ito stokastik diferansiyel denklem olarak adlandırıldı.

Stokastik integralin farklı seçimleri ile genellikle yukarıda verilen integral denklem için farklı çözümler elde edilir, aynı katsayılarla sahip olsalar bile "farklı diferansiyel denklem elde edilir" bu söylemi doğrudur. Tüm bu integraller arasında, her bir parçalanmış $[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}]$ alt aralığın $\frac{1}{2}(t_j^{(n)} + t_{j+1}^{(n)})$ orta noktasında integrandın hesaplanabildiği Stratonovich (1966) [16] tarafından önerilen, Stratonovich integrali en cazip olandır. Çünkü, sadece Stratonovich klasik analizin olağan dönüşüm kurallarını sağlar. Eğer Stratonovich stokastik integrali kullanılırsa, bir Stratonovich SDD elde edilir. Bu diferansiyel denklem Ito durumundan ayırt etmek için

$$dX_t = \underline{f}(t, X_t)dt + g(t, X_t) \circ dW_t \quad (4.32)$$

veya

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t \underline{f}(s, X_s)ds + \int_{t_0}^t g(s, X_s) \circ dW_s \quad (4.33)$$

ile ifade edilir.

Bir önceki bölümde stokastik integraller anlatılırken Stratonovich integrali sadece, $f(t, w)$ ve $h(W_t(w))$ formundaki integrandlar için tanımlandı. Bunun $h = h(t, x)$ fonksiyonu ve X_t difüzyon süreci için $h(t, X_t(w))$ formundaki integrandlara nasıl genişletilebileceği belirsiz olduğundan,

$$n \rightarrow \infty \text{ için, } \delta^{(n)} = \max_{1 \leq j \leq n} |t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}| \rightarrow 0$$

olmak üzere $0 = t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \dots < t_{n+1}^{(n)} = T$ parçalanışı için,

$$S_n(w) = \sum_{j=1}^N h \left(t_j^{(n)}, \frac{1}{2} (X_{t_j^{(n)}} + X_{t_{j+1}^{(n)}}) \right) \{W_{t_{j+1}^{(n)}} - W_{t_j^{(n)}}\} \quad (4.34)$$

toplamlarının ortalama kare (mean-square) limiti olarak Stratonovich integral

$$\int_{t_0}^T h(s, X_s(w)) \circ dW_s \quad (4.35)$$

şeklinde tanımlanacaktır. Alternatif olarak eğer h yeterince düzgün ise $h(t, X_t)$ 'nin $t_j^{(n)}$ ve $t_{j+1}^{(n)}$ uç noktalarındaki değerlerinin ortalaması aynı değeri verir. Limitin varlığından emin olmak için h ve X_t üzerine bazı kısıtlamalar getirilmelidir. $W = \{W_t, t \geq 0\}$ artan σ -cebirlere ilgili $\{\mathcal{A}_t \geq 0\}$ ailesinin Wiener süreci olsun. $f(t, X_t)$ ve $g(t, X_t)$ sırasıyla sürekli sürüklenme (drift) ve difüzyon katsayıları olmak üzere $0 \leq t \leq T$ için X_t, \mathbb{R} üzerinde difüzyon süreci ve $h(t, X_t(w))$ fonksiyonunun da $\frac{\partial h}{\partial x}$ kısmi türevi t ve x 'in her ikisinde de sürekli iken kendisi de t üzerinde sürekli olduğu kabul edilsin. Son olarak, X_t , her bir $0 \leq t \leq T$ için \mathcal{A}_t -ölçülebilir ve

$$\int_0^T E(|h(t, X_t)|^2) dt < \infty$$

olmak üzere $f(t, w) = h(t, X_t(w))$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu, \mathcal{L}_T^2 fonksiyon uzayına ait olsun. Bu şartlar altında limit vardır ve tektir, dolayısıyla da (4.35) anlamlıdır.

(3.23) denklemi $f(t, W_t) = h(t, X_t)$ için yeniden düzenlenirse,

$$\int_0^T h(t, X_t) \circ dW_t = \int_0^T h(t, X_t) dW_t + \frac{1}{2} \int_0^T g(t, X_t) \frac{\partial h}{\partial x}(t, X_t) dt \quad (4.36)$$

veya denk olan

$$h(t, X_t) \circ dW_t = h(t, X_t) dW_t + \frac{1}{2} g(t, X_t) \frac{\partial h}{\partial x}(t, X_t) dt \quad (4.37)$$

diferansiyel formuna genelleştirilir. İspatlar benzerdir. Taylor teoremi ve ortalama değer teoremi kullanılarak $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere bazı rassal $\phi_j \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} h\left(t_j^{(n)}, \frac{1}{2} \left(X_{t_j^{(n)}} + X_{t_{j+1}^{(n)}}\right)\right) - h\left(t_j^{(n)}, X_{t_j^{(n)}}\right) \\ = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x}\left(t_j^{(n)}, \frac{1}{2} \left((2 - \phi_j) X_{t_j^{(n)}} + \phi_j X_{t_{j+1}^{(n)}}\right)\right) \left\{X_{t_{j+1}^{(n)}} - X_{t_j^{(n)}}\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. X_t bir difüzyon süreci olduğundan $j = 1, 2, \dots, n$ için $\Delta t_j^{(n)} = t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}$ ve $\Delta W_{t_j^{(n)}} = W_{t_{j+1}^{(n)}} - W_{t_j^{(n)}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \Delta X_{t_j^{(n)}} &= X_{t_{j+1}^{(n)}} - X_{t_j^{(n)}} \\ &= f\left(t_j^{(n)}, X_{t_j^{(n)}}\right) \Delta t_j^{(n)} + g\left(t_j^{(n)}, X_{t_j^{(n)}}\right) \Delta W_{t_j^{(n)}} \\ &\quad + \text{yüksek mertebeli terimler} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan yola çıkarak

$$\frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{\phi_j} = \frac{\partial h}{\partial x}\left(t_j^{(n)}, \frac{1}{2} \left((2 - \phi_j) X_{t_j^{(n)}} + \phi_j X_{t_{j+1}^{(n)}}\right)\right)$$

olmak üzere, (4.34) toplamındaki her bir terim aşağıdaki eşitliği sağlar

$$\begin{aligned}
& h\left(t_j^{(n)}, X_{t_j^{(n)}}\right) \Delta W_{t_j^{(n)}} + \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{\phi_j} \Delta X_{t_j^{(n)}} \Delta W_{t_j^{(n)}} \\
&= h\left(t_j^{(n)}, X_{t_j^{(n)}}\right) \Delta W_{t_j^{(n)}} + \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{\phi_j} g\left(t_j^{(n)}, X_{t_j^{(n)}}\right) \left(\Delta W_{t_j^{(n)}}\right)^2 \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{\phi_j} f\left(t_j^{(n)}, X_{t_j^{(n)}}\right) \Delta t_j^{(n)} \Delta W_{t_j^{(n)}} \\
&+ \text{yüksek mertebeli terimler.}
\end{aligned}$$

Katsayıların sürekliliği, $E(\Delta W_{t_j^{(n)}})^2 = \Delta t_j^{(n)}$ ve $E(\Delta t_j^{(n)} \Delta W_{t_j^{(n)}}) = 0$ olduğu gerçeği göz önünde bulundurulduğunda ortalama kare limitinden (4.36) elde edilir.

Ito integralinin özelliğinden

$$E\left(\int_0^T h(t, X_t) dW_t\right) = 0 \quad (4.38)$$

elde edilir [11]. Denklem (4.36)'de her iki tarafın beklentisi alınıp (4.38) eşitliğinin kullanılması ile sıfır olması gerekmeyen

$$E\left(\int_0^T h(t, X_t) \circ dW_t\right) = \frac{1}{2} \int_0^T E\left(g(t, X_t) \frac{\partial h}{\partial x}(t, X_t)\right) dt \quad (4.39)$$

eşitliği elde edilir.

X_t difüzyon süreci (4.30) Ito SDD'ini sağlıyorsa $h \equiv g$ için (4.37) denklemden, X_t 'nin modifiye edilmiş

$$\underline{f}(t, x) = f(t, x) - \frac{1}{2} g(t, x) - \frac{\partial g}{\partial x}(t, x)$$

sürüklenme katsayısı olmak üzere

$$dX_t = \underline{f}(t, X_t) dt + g(t, X_t) \circ dW_t \quad (4.40)$$

ile tanımlanan (4.32) Stratonovich SDD'inin de çözümü olduğu görülür.

(4.30) ve (4.40) ile verilen iki SDD, gürültü (noise) teriminin eklemeli (additively) olduğu durumlarda eğer g , x 'ten bağımsız ise aynı katsayılara sahiptir. Genelde sürüklenme katsayıları farklıdır. Örneğin,

$$X_t = X_{t_0} \exp \left(\left(f - \frac{1}{2}g^2 \right) (t - t_0) + g(W_t - W_{t_0}) \right)$$

difüzyon süreci hem

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dW_t \quad (4.41)$$

Ito SDD'nin, hem de

$$dX_t = \left(f - \frac{1}{2}g^2 \right) X_t dt + gX_t \circ dW_t$$

Stratonovich SDD'nin çözümüdür.

(4.32) ile verilen Stratonovich SDD'den yola çıkarak

$$f(t, x) = \underline{f}(t, x) + \frac{1}{2}g(t, x) \frac{\partial g}{\partial x}(t, x)$$

ile tanımlanan f sürüklenme katsayısına modifiye edilmesi ile denklem (4.41) elde edilir. Örneğin,

$$X_t = X_{t_0} \exp (f(t - t_0) + g(W_t - W_{t_0}))$$

difüzyon süreci

$$dX_t = fX_t dt + gX_t \circ dW_t$$

Stratonovich SDD ve

$$dX_t = \left(f + \frac{1}{2}g^2 \right) X_t dt + gX_t dW_t \quad (4.42)$$

Ito SDD'nin çözümüdür.

(4.41) ve (4.42) ile verilen aynı sürüklenme ve difüzyon katsayılarına sahip Ito ve Stratonovich lineer SDD'ler farklı çözümlere sahiptir. Dahası, bu çözümler tamamen farklı davranıyor olabilir; örneğin eğer $f < \frac{1}{2}g^2$ ise Ito çözümü $t \rightarrow \infty$ için sifıra yakınsarken, bu durum Stratonovich çözümünde sadece $f < 0$ için geçerlidir. Stokastik diferansiyel denklemleri içeren modeller inşa edilirken akılda tutulmalıdır ki, denklemi yorumlama şekli kritik sonuçlar oluşturabilir.

Belirli bir durumda SDD'ler yorumlanırken, avantaj durumuna göre daima ilgili SDD'den diğer SDD yorumuna geçilebilir. Benzer şekilde bir Stratonovich denkleminin çözümü olan difüzyon süreci için, Fokker-Planck denkleminin uygun katsayılarını tanımlamada uygun Ito SDD kullanılır. Diğer taraftan Stratonovich stokastik analizi klasik analizdeki aynı dönüşüm kurallarına uymaktadır, bu nedenle adi diferansiyel denklemleri çözmek için geliştirilen yöntemler Stratonovich SDD'leri çözmek için bazen başarılı bir şekilde kullanılabilir [11].

4.5 Ito SDD mi ? Stratonovich SDD mi ?

- Matematiksel bir bakış açısıyla hem Ito hem de Stratonovich hesabı doğrudur;
- Ito veya Stratonovich mi? Bu soru ancak belirli bir uygulama bağlamında ele alınabilir;
- Ito SDD, diskret bir sistemin sürekli yakınsaması söz konusu olduğunda uygundur (örneğin. biyolojik bilimlerde çoğu uygulama).
- Stratonovich SDD, pürüzsüz bir gerçek ses (smooth real noise) sürecinin idealleştirilmesi söz konusu olduğunda uygundur (örneğin, mühendislik ve fizik bilimlerinde pek çok uygulama).

- Stratonovich SDD'ler analitik olarak daha kolay çözümlenirken, Ito SDD'ler nümerik yöntemler için daha olağan başlangıç noktasıdır

4.6 Vektör Stokastik Diferansiyel Denklemler

Vektör ve skalar stokastik diferansiyel denklemler arasındaki ilişki ile vektör ve skalar diferansiyeller arasındaki ilişki paraleldir. Vektör, kolon vektörü olarak yorumlanabileceğinden transpozu da satır vektörü olur.

$W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^m, \{\mathcal{A}_t, t \geq 0\}$ σ cebirlerinin ortak ailesine göre bağımsız skalar Wiener süreçlerinin bileşenlerinden oluşan m -boyutlu $W = \{W_t, t \geq 0\}$ Wiener süreci tanımlansın. $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ d -boyutlu vektör fonksiyon ve $g : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ $d \times m$ matris fonksiyonu olmak üzere, d -boyutlu vektör stokastik diferansiyel denklem,

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dW_t \quad (4.43)$$

olarak tanımlansın. Denklemin stokastik integral denklem formu ise

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t f(s, X_s)ds + \int_{t_0}^t g(s, X_s)dW_s \quad (4.44)$$

şeklinde olup Lebesgue ve Ito integralleri bileşen bileşen tanımlanmak üzere (4.44)'nin i -inci bileşeni,

$$X_t^i = X_{t_0}^i + \int_{t_0}^t f^i(s, X_s)ds + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t g^{i,j}(s, X_s)dW_s^j$$

olarak elde edilir.

Paralel tanımlar ile, X_t sürecinin \mathcal{A}_t olma şartı altında kuvvetli (strong) ve zayıf (weak) çözümler burada da uygulanabilir. Kuvvetli çözümlerin varlık ve teklilik teoreminden [11] Euclidean normundaki gibi vektör ve matris normlarının yer değiştirmesi ile tahmin ve ispatlardaki mutlak değerlerin sağlanması vektör durum için de aynen uygundur[11].

Vektör stokastik diferansiyel denklemler, genelde vektör değerli durumlarda tanımlı

sistemlerde ortaya çıkar. Hatta (4.43) formunda olmayan skalar denklemlerin bu forma dönüştürüldüğü durumlarda da görülmektedir. Örneğin,

$$dY_t = f(t, Y_t, W_t)dt + g(t, Y_t, W_t)dW_t$$

denkleminde olduğu gibi skalar denklemdeki katsayılar W_t 'ye bağlı olduğu durumlarda bu denklem, 2-boyutlu vektör stokastik diferansiyel denklem olarak

$$dX_t = \begin{pmatrix} f(t, X_t) \\ 0 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} g(t, X_t) \\ 1 \end{pmatrix} dW_t$$

şeklinde yeniden yazılır ve burada $X_t^1 = Y_t$ ve $X_t^2 = W_t$ durum bileşenleridir. Benzer şekilde ξ_t beyaz gürültü (white noise) olmak üzere ikinci mertebeden diferansiyel denklem yeniden formüle edilirse,

$$\ddot{Y}_t = f(t, Y_t, \dot{Y}_t)dt + g(t, Y_t, \dot{Y}_t)\xi_t$$

olup, iki boyutlu vektör stokastik diferansiyel denklem

$$dX_t = \begin{pmatrix} X_t^2 \\ f(t, X_t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ g(t, X_t) \end{pmatrix} dW_t$$

şeklinde elde edilir ve yine burada X_t^1 ve X_t^2 durum bileşenleridir. Buradaki Y_t skalar proses sürekli diferansiyellenebilir olmasına rağmen \dot{Y}_t sadece süreklidir. Bu nedenle, $X_t = \{X_t^1, X_t^2\}$ vektör prosesi de süreklidir ancak diferansiyellenebilir değildir.

Vektör stokastik diferansiyel denklemlerin ortaya çıktığı bir diğer durum süreçlerin belli manifoldlar ile sınırlandırıldığı durumdur, öyle ki S^1 birim çember (unit circle) 1-boyutlu kompakt manifolddur.

W_t skalar Wiener proses olmak üzere, S^1 üzerindeki bir Wiener proses $|X_t| = 1$ sınırı

için,

$$dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X_t dW_t$$

vektör diferansiyel denklemini sağlar.

(4.43) ile verilen X_t çözümünün, yeterince düzgün $U : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$ dönüşümü için k -boyutlu $Y_t = U(t, X_t)$ prosesi elde edilir. Bu proses her bir bileşene Ito formülünün uygulanması ile türetilen vektör stokastik diferansiyel denkleme sahip olacaktır. Sonuç olarak, $p = 1, 2, \dots, k$ için tüm terimlerin (t, X_t) 'de hesaplanması ile

$$\begin{aligned} dY_t^P = & \left(\frac{\partial U^P}{\partial t} + \sum_{i=1}^d f^i \frac{\partial U^P}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sum_{l=1}^m g^{i,l} g^{j,l} \frac{\partial^2 U^P}{\partial x_i \partial x_j} \right) dt \\ & + \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^d g^{i,l} \frac{\partial U^P}{\partial x_i} dW_t^l \end{aligned} \quad (4.45)$$

bileşen formundaki ifade elde edilir. Skalar durumda olduğu gibi bu formül, belli bir vektör stokastik diferansiyel denklemin çözümü tanımlanırken kullanılabilir.

d -boyutlu lineer stokastik diferansiyel denklemin genel formu ise,

$$dX_t = (A(t)X_t + a(t))dt + \sum_{l=1}^m (B^l(t)X_t + b^l(t))dW_t^l \quad (4.46)$$

olup burada $A(t), B^1(t), B^2(t), \dots, B^m(t)$, $d \times d$ matris fonksiyonları ve $a(t), b^1(t), b^2(t), \dots, b^m(t)$, $d \times d$ d -boyutlu vektör fonksiyonlarıdır. Eger B^l lerin hepsi sıfır olursa "*homojen denklem*" denir. Skalar durum için kullanılan argümanların hesaplanması ile (4.46) denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} X_t = & \Phi_{t,t_0} \left(X_{t_0} + \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1} \left(a(s) - \sum_{l=1}^m B^l(s)b^l(s) \right) ds \right. \\ & \left. + \sum_{l=1}^m \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1} b^l(s) dW_s^l \right) \end{aligned} \quad (4.47)$$

olarak elde edilir. Burada Φ_{t,t_0} , $\Phi_{t_0,t_0} = I$ olacak şekilde $d \times d$ tipinde temel matristir ve

$$d\Phi_{t,t_0} = A(t)\Phi_{t,t_0}dt + \sum_{l=1}^m B^l(t)\Phi_{t,t_0}dW_t^l \quad (4.48)$$

şeklinde homojen stokastik matris diferansiyel denklem olarak ifade edilir. Skalar homojen lineer denklemlerin aksine, bütün matrisler sabit matris olsa bile, (4.47) denklemini temel çözüm için genellikle açık olarak çözemeyiz. Ancak, eğer, A, B^1, B^2, \dots, B^m matrisleri sabit ve değiştirilebilir ise, yani, tüm $k, l = 1, 2, \dots, m$ için

$$AB^l = B^lA \quad \text{ve} \quad B^lB^k = B^k B^l \quad (4.49)$$

ise buradan

$$\Phi_{t,t_0} = \exp\left(\left(A - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m (B^l)^2\right)(t - t_0) + \sum_{l=1}^m (B^l)(W_t^l - W_{t_0}^l)\right)$$

şeklinde temel matris çözümü elde edilir. Özel olarak (4.47) denklemi dar anlamlı (narrow sense) ise bu denklem

$$\Phi_{t,t_0} = \exp(A(t - t_0)) \quad (4.50)$$

eşitliğine indirgenir, bu da

$$\dot{x} = Ax$$

deterministik lineer sisteminin temel matrisidir. Bu otonom durumlarda $\Phi_{t,t_0} = \Phi_{t-t_0,0}$ olup sadece $t_0 = 0$ dikkate alınır ve Φ_{t,t_0} yerine Φ_t yazılabilir.

Örnek 4.3 $X_t = (X_t^1, X_t^2)$ ve W_t Wiener proses olmak üzere

$$dX_t = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X_t dt + \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} dW_t$$

rassal oscillator denklemi tanımlansın.

B^l 'lerin hepsi sıfır olduğundan denklem dar anlamda lineerdir (linear in the narrow sense). O halde,

$$\Phi_{t,t_0} = \exp(A(t - t_0))$$

şeklinde hesaplanır. $t_0 = 0$ için

$$\Phi_t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} A^{2k} t^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} A^{2k+1} t^{2k+1}$$

ise burada $A^{2k+1} = (-1)^k A$ yularıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$\Phi_t = \cos(t)I + \sin(t)A \Rightarrow \Phi_t = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

STOKASTİK TAYLOR AÇILIMI

Deterministik analiz, stokastik analize göre daha hızlı yakınsar, çünkü Riemann integraline yakınsayan Riemann toplamındaki integrand fonksiyonu parçalanmış alt aralığın keyfi bir noktasında hesaplanabilirken Ito stokastik integrali için, integrand fonksiyonu daima sol uç noktada hesaplanmalıdır. Bu nedenle Ito stokastik analizi ile uyumlu stokastik adi diferansiyel denklemler için nümerik yöntemler türetilmesi gerekmektedir. Stokastik Taylor açılımı, stokastik adi diferansiyel denklemler (SADD) için yükek meriteden nümerik yöntemlerin türetilmesi için temel başlama noktasıdır. SADD'ler için diğer metotlar, genellikle uygun stokastik Taylor açılımından elde edilir.

5.1 Stokastik Taylor Açılımı

Bu bölümde verilen bir stokastik diferansiyel denklemin yaklaşık çözümünü bulmak için stokastik Taylor açılımı (stochastic Taylor expansion) araştırılmış ve incelenmiştir. Genel Taylor açılımı formülü ilk olarak [17] tarafından tanıtılmış ve daha sonra Kloeden ve Platen [3] kitaplarında bilinen stokastik Taylor açılımının detaylarına yer vermişlerdir. Stokastik Taylor açılımı, deterministik Taylor formülü ve Ito formülü ile genelleştirilir.

5.1.1 Ito-Taylor Açılımı

Bilinen deterministik Taylor açılımına benzer terminolojiyi kullanarak stokastik durum için Taylor açılımını elde edilecektir. X_t , $0 \leq t_0 \leq T$ olmak üzere, $t \in [t_0, T]$ için X_{t_0} başlangıç şartı ile verilen

$$\frac{d}{dt}X_t = a(X_t) \quad (5.1)$$

1-boyutlu adi diferansiyel denklemin çözümü olsun. Bu diferansiyel denklem,

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t aX(s)ds \quad (5.2)$$

şeklinde integral denklem formunda yazılabilir. Bu yapının kurulabilmesi için a fonksiyonu yeterince düzgün (sufficiently smooth) olmalı ve lineer büyüme şartını sağlamalıdır. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere zincir kuralından

$$\frac{d}{dt}f(X_t) = a(X_t) \frac{\partial}{\partial X} f(X_t) \quad (5.3)$$

olup,

$$L \equiv a(X) \frac{\partial}{\partial X} \quad (5.4)$$

operatörü (5.3) denkleminde yerine yazılırsa her $t \in [t_0, T]$ için

$$f(X_t) = f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t Lf(X_s)ds \quad (5.5)$$

şeklinde integral bağıntısı elde edilir. $f(x) \equiv x$ yazılırsa, $Lf = a$, $L^2f = La$, ... olup (5.5) bağıntısı

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s)ds \quad (5.6)$$

şeklinde (5.2) bağıntısına indirgenir.

Eğer (5.5) bağıntısı (5.6) denkleminde $f = a$ fonksiyonu için uygulanırsa

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t_0} + \int_{t_0}^t \left(a(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s La(X_\eta) d\eta \right) ds \\ &= X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s La(X_\eta) d\eta ds \end{aligned} \quad (5.7)$$

şeklinde X_t için Taylor açılımı elde edilir. (5.5) bağıntısı tekrar iki katlı integraldeki $f = La$ fonksiyonu için uygulanırsa,

$$X_t = X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + La(X_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s d\eta ds + \mathcal{R}_3 \quad (5.8)$$

olarak elde edilir. Burada $t \in [t_0, T]$ için

$$\mathcal{R}_3 = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^\eta L^2 a(X_\mu) d\mu d\eta ds \quad (5.9)$$

kalan (remainder) terimdir. Genel $r + 1$ defa sürekli diferansiyellenebilir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için bu metot $t \in [t_0, T]$ ve $r = 1, 2, 3, \dots$ olarak verildiğinde,

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_{t_0}) + \sum_{n=1}^r \frac{(t - t_0)^n}{n!} L^{(n)} f(X_{t_0}) \\ &\quad + \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{\eta_2} L^{(r+1)} f(X_{\eta_1}) d\eta_1 \dots d\eta_{r+1} \end{aligned} \quad (5.10)$$

klasik integral formdaki Taylor formülü elde edilir.

(5.10) ile verilen Taylor formülü, özellikle nümerik analizdeki teorik ve pratik araştırmalar için önemli bir araçtır. Yeterince düzgün fonksiyona (sufficiently smooth function) verilen bir noktanın komşuluğunda istenilen doğruluk mertebesinden (order of accuracy) yaklaşıma izin verir. Açılım, fonksiyonun değerlerine ve seriye açılan noktalardaki bazı yüksek mertebeden türevlerine bağlıdır. Serinin kesildiği yerden sonraki terimler ise kalan terimleri (remainder) oluşturur.

Ito sürecindeki düzgün fonksiyonlar için, deterministik Taylor formülündeki belirleyici özelliklere benzer özelliklere sahip stokastik Taylor formülünü kullanmak avantajlıdır. Bu formül yardımı ile stokastik nümerik yöntemler elde edilebilir. Bu şekildeki stokastik Taylor formülü için bir kaç olasılık vardır. Bunlardan biri Ito formülü kullanılarak elde edilen *Ito- Taylor açılımı*dır. f ve g yeterince düzgünlük (sufficiently smooth) ve lineer büyüme şartını sağlayan fonksiyonlar olmak üzere X_t ,

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t) \quad (5.11)$$

1-boyutlu Ito stokastik diferansiyel denklemin çözümü olsun. $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ herhangi iki kez sürekli diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere $t \in [t_0, T]$ için Ito lemmasından,

$$dF[X(t)] = \left\{ f[X(t)] \frac{\partial F[X(t)]}{\partial X} + \frac{1}{2} g^2[X(t)] \frac{\partial^2 F[X(t)]}{\partial X^2} \right\} dt + g[X(t)] \frac{\partial F[X(t)]}{\partial X} dW(t). \quad (5.12)$$

elde edilir.

$$L^0 \equiv f[X(t)] \frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{2} g^2[X(t)] \frac{\partial^2}{\partial X^2}$$

$$L^1 \equiv g[X(t)] \frac{\partial}{\partial X}$$

operatörleri tanımlansın. Bu operatörler (5.12)'de yazılırsa

$$dF[X(t)] = L^0 F[X(t)]dt + L^1 F[X(t)]dW(t) \quad (5.13)$$

elde edilir. (5.13)'ün integral formu ise ,

$$F[X(t)] = F[X(t_0)] + \int_{t_0}^t L^0 F[X(\tau)]d\tau + \int_{t_0}^t L^1 F[X(\tau)]dW(\tau) \quad (5.14)$$

şekindedir. Sırasıyla (5.14)'te $F(x) = x$, $F(x) = f(x)$ ve $F(x) = g(x)$ yazılırsa,

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t f[X(\tau)]d\tau + \int_{t_0}^t g[X(\tau)]dW(\tau) \quad (5.15)$$

$$f[X(t)] = f[X(t_0)] + \int_{t_0}^t L^0 f[X(\tau)]d\tau + \int_{t_0}^t L^1 f[X(\tau)]dW(\tau) \quad (5.16)$$

$$g[X(t)] = g[X(t_0)] + \int_{t_0}^t L^0 g[X(\tau)]d\tau + \int_{t_0}^t L^1 g[X(\tau)]dW(\tau) \quad (5.17)$$

elde edilir. (5.16) ve (5.17) denklemlerinin (5.15) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} X(t) = & X(t_0) + \int_{t_0}^t \left(f[X(t_0)] + \int_{t_0}^{\tau_1} L^0 f[X(\tau_2)]d\tau_2 + \int_{t_0}^{\tau_1} L^1 f[X(\tau_2)]dW(\tau_2) \right) d\tau_1 \\ & + \int_{t_0}^t \left(g[X(t_0)] + \int_{t_0}^{\tau_1} L^0 g[X(\tau_2)]d\tau_2 + \int_{t_0}^{\tau_1} L^1 g[X(\tau_2)]dW(\tau_2) \right) dW(\tau_1) \end{aligned} \quad (5.18)$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \equiv & \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} L^0 f[X(\tau_2)]d\tau_2 d\tau_1 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} L^1 f[X(\tau_2)]dW(\tau_2) d\tau_1 \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} L^0 g[X(\tau_2)]d\tau_2 dW(\tau_1) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} L^1 g[X(\tau_2)]dW(\tau_2) dW(\tau_1) \end{aligned}$$

iki katlı integralleri içeren kalan terim olmak üzere

$$X(t) = X(t_0) + f[X(t_0)] \int_{t_0}^t d\tau_1 + g[X(t_0)] \int_{t_0}^t dW(\tau_1) + \mathcal{R} \quad (5.19)$$

elde edilir.

(5.14)'te, $F = L^1 g$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} L^1 g[X(\tau_2)]dW(\tau_2) dW(\tau_1) \\ = & \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} \left(L^1 g[X(t_0)] + \int_{t_0}^{\tau_2} L^0 L^1 g[X(\tau_3)]d\tau_3 + \int_{t_0}^{\tau_2} L^1 L^1 g[X(\tau_3)]dW(\tau_3) \right) dW(\tau_2) dW(\tau_1) \end{aligned}$$

ve $L^1 g = gg'$ olduğu kullanılırsa yeni kalan terim

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{R}} &\equiv \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} L^0 f[X(\tau_2)] d\tau_2 d\tau_1 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} L^1 f[X(\tau_2)] dW(\tau_2) d\tau_1 \\
&+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} L^0 g[X(\tau_2)] d\tau_2 dW(\tau_1) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} \int_{t_0}^{\tau_2} L^0 L^1 g[X(\tau_3)] d(\tau_3) dW(\tau_2) dW(\tau_1) \\
&+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} \int_{t_0}^{\tau_2} L^1 L^1 g[X(\tau_3)] dW(\tau_3) dW(\tau_2) dW(\tau_1)
\end{aligned} \tag{5.20}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
X(t) &= X(t_0) + f[X(t_0)] \int_{t_0}^t d\tau_1 \\
&+ g[X(t_0)] \int_{t_0}^t dW(\tau_1) + g[X(t_0)]g'[X(t_0)] \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} dW(\tau_2) dW(\tau_1) + \tilde{\mathcal{R}}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

şeklinde elde edilir.

Buradan, (5.11) süreci için Ito-Taylor açılımı, (5.21) şeklinde elde edilmiş olur. Tekrar Ito lemması kullanılarak,

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} dW(\tau_2) dW(\tau_1) = \frac{1}{2}[W(t) - W(t_0)]^2 - \frac{1}{2}(t - t_0) \tag{5.22}$$

ve (5.22) nin (5.21) de yerine yazılmasıyla,

$$\begin{aligned}
X(t) &= X(t_0) + f[X(t_0)] \int_{t_0}^t d\tau_1 \\
&+ g[X(t_0)] \int_{t_0}^t dW(\tau_1) + g[X(t_0)]g'[X(t_0)] \left\{ \frac{1}{2}[W(t) - W(t_0)]^2 - \frac{1}{2}(t - t_0) \right\} + \tilde{\mathcal{R}}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Stokastik Taylor açılımı elde edilir [19].

Böylece denklem (5.23) yardımıyla $[0, T]$ aralığındaki $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < t_N = T$ zaman parçalanışına göre stokastik diferansiyel denklemler için nümerik integ-

rasyon metodu

$$\begin{aligned} X(t_{i+1}) &= X(t_i) + f(X(t_i))\Delta t + g(X(t_i))\Delta W_i \\ &+ \frac{1}{2}g(X(t_i))g'(X(t_i))[(\Delta W_i)^2 - \Delta t] + \tilde{\mathcal{R}} \end{aligned} \quad (5.24)$$

olarak bulunur. Burada $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ ve $X(t_0) = X_0$ başlangıç şartı için $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ ve $\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i)$ şeklinde tanımlanmıştır. ΔW_i rassal değişkeni de bağımsız $N(0; \Delta t)$ normal dağılmış rassal değişkendir.

5.2 Euler-Maruyama Metodu

Stokastik diferansiyel denklemler için en basit ve en çok kullanılan nümerik metot *Euler-Maruyama metodudur*. Eğer stokastik Taylor serisinin birinci mertebeden sonraki terimleri kesilirse $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ için $X(t_0) = X_0$ başlangıç şartı olmak üzere

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + f(X(t_i))\Delta t + g(X(t_i))\Delta W_i \quad (5.25)$$

şeklinde "*Euler Metodu*" veya "*Euler-Maruyama Metodu*" elde edilir.

Euler-Maruyama metodu, f ve g fonksiyonları için Lipschitz ve sınırlı büyüme koşulları altında 0.5 mertebeden kuvvetli yakınsar [20]. [2] ve [21] ise bir Ito sürecinin Euler-Maruyama yaklaşımının yeteri kadar düzgünlük şartları altında 1.0 mertebeden zayıf yakınsadığını göstermiştir.

5.3 Milstein Metodu

Stokastik diferansiyel denklemler için bir diğer nümerik yaklaşım metodu Milstein metodudur. Eğer stokastik Taylor serisinin ikinci mertebeden sonraki terimleri ihmal edilirse

$i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ için $X(t_0) = X_0$ başlangıç şartı olmak üzere

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + f(X(t_i))\Delta t + g(X(t_i))\Delta W_i + \frac{1}{2}g(X(t_i))g'(X(t_i))[(\Delta W_i)^2 - \Delta t] \quad (5.26)$$

şeklinde "*Milstein Metodu*" elde edilir. Milstein yaklaşımı, f, g iki kez sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve f, f', g, g' uniform Lipschitz şartını sağlamak üzere $E[X(0)]^2 < \infty$ şartı altında 1.0 mertebeden kuvvetli yakınsar.

Burada $g'(X(t_i)), g(X(t_i))$ fonksiyonunun türevi olup eğer stokastik diferansiyel denklem toplanır gürültülü (additive noise) stokastik diferansiyel denklem ise "*Milstein metodu*", "*Euler Maruyama metodu*" ile çakışır.

5.4 Runge - Kutta Metodu

Bu tip metotlar yaklaşım süreçlerinin üst seviye şemaları (scheme) için kullanılır. Bu bölümde Runge-Kutta metotlarının stokastik versiyonlarının anlaşılması için, ilk olarak deterministik Runge-Kutta metotları incelenmiştir. Sonrasında ise stokastik Runge-Kutta metodunun kapsamlı hali verilecektir.

Runge-Kutta yöntemi de diğer metotlar gibi Taylor açılımından türetilmesine rağmen, bu metodu diğer yaklaşım metotlarından ayıran en belirgin özellik, bu yöntemde sürüklenme (drift) ve difüzyon terimlerinin türevlerinin hesaplanmasına gerek olmamasıdır. Stokastik diferansiyel denklemlerdeki türevlerinin hesaplanması sayısal olarak masraflıdır ve bu durum yaklaşım metotlarında türevsizlik gereksinimi oluşturur. Runge-Kutta yönteminde de türev hesapları olmadığından stokastik yaklaşım metotları arasında önemli bir yeri vardır.

5.4.1 Runge - Kutta Metodu

Bu bölümde aslında sadece bir adi diferansiyel denklem olan Ito stokastik diferansiyel denkleminin

$$dX_t = f(t, X_t)dt, \quad X_{t_0} = x_0 \in \mathbb{R} \quad (5.27)$$

şeklindeki deterministik kısmı ile ilgileneceğiz. Burada $f(t, X_t)$ fonksiyonu $I = [t_0, T]$ zaman aralığında sürekli diferansiyellenebilir \mathbb{R} değerli bir fonksiyondur. $f(t, X_t)$ fonksiyonunun t zaman değişkenine göre kısmi türevleri aşağıdaki, gibi tanımlanır :

$$\frac{dX(t)}{dt} = f(t, X_t) \quad (5.28)$$

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} = f_t(t, X_t) + f_x(t, X_t)f(t, X_t) \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 X(t)}{dt^3} &= f_{tt}(t, X_t) + 2f_{tx}(t, X_t)f(t, X_t) + f_{xx}(t, X_t)f^2(t, X_t) \\ &\quad + f_t(t, X_t)f_x(t, X_t) + f_x^2(t, X_t)f(t, X_t) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Bu kısmi türevler, X_t 'nin Taylor açılımından elde edilen Runge-Kutta şemasını türetmede yardımcı olacaktır. $I = [t_0, T]$ zaman aralığının $n = 0, 1, \dots, N$ olmak üzere

$$0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < t_N = T \quad (5.31)$$

parçalanışı tanımlansın. $\Delta_n = t_{n+1} - t_n$ yeterince küçük adım aralığı ve $Y_n = Y(t_n)$ de (5.27) ile verilen başlangıç değer probleminin, X_{t_n} çözümünün bir yaklaşım süreci (process) olsun. Bu durumda (5.27) ile verilen adi diferansiyel denklemin X_t çözümünün Taylor açılımı,

$$X_{t+\Delta_n} = X_{t_{n+1}} = X_{t_n} + \Delta_n \frac{dX(t)}{dt} + \frac{\Delta_n^2}{2!} \frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \frac{\Delta_n^3}{3!} \frac{d^3 X(t)}{dt^3} + \dots \quad (5.32)$$

şeklinde tanımlanır. (5.32) ile verilen Taylor açılımının kullanılması ile farklı mertebeden (stage) Runge-Kutta yöntemleri tanımlanacaktır. Örneğin, ikinci mertebeden Runge-

Kutta yönteminin adım adım nasıl kurulduğu aşağıdaki gibi gösterilir.

İlk olarak, $f(t, X_t)$ fonksiyonun (5.28) ile verilen kısmi türevleri (5.32) ile verilen X_t çözümünün üçüncü mertebeden Taylor açılımında yerine yazılırsa,

$$X_{t_{n+1}} = X_{t_n} + \Delta_n f(t, X_t) + \frac{1}{2} \Delta_n^2 \left(f_t(t, X_t) + f_x(t, X_t) f(t, X_t) \right) + \mathcal{O}(\Delta_n^3) \quad (5.33)$$

elde edilir.

Şimdi (5.33) denklemini sadeleştirmek için yardımcı olacak bir Remark verelim.

Remark 5.1 c, d, k, m sabitler olmak üzere, $\Phi(t, X_t)$,

$$\Phi(t, X_t) = (t + ck, X_t + dm) = f(t, X_t) + ck f_t(t, X_t) + dm f_x(t, X_t) + \mathcal{O}(k^2)$$

özelliğini sağlandığı kabul edilsin.

Bu Remark ile, $c = 1, k = \Delta_n, d = \Delta_n, l = f(t_n, X_{t_n})$ değişkenlerine verilen bazı değerler ile aşağıdaki gösterim elde edilir:

$$f(t_n + \Delta_n, X_{t_n} + \Delta_n f(t_n, X_{t_n})) = f + \Delta_n f_t + \Delta_n f_x f + \mathcal{O}(\Delta_n^2) \quad (5.34)$$

(5.34) ile verilen fonksiyon (5.33) denkleminde de görülmektedir. Bu nedenle, $X_{t_{n+1}}$ prosesi,

$$\begin{aligned} X_{t_{n+1}} &= X_{t_n} + \frac{1}{2} \Delta_n f(t_n, X_{t_n}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta_n f(t_n + \Delta_n, X_{t_n} + \Delta_n f(t_n, X_{t_n})) + \mathcal{O}(\Delta_n^3) \end{aligned} \quad (5.35)$$

şeklinde düzenlenebilir. Sonuç olarak (5.35) ün düzenlenmesi ile ikinci mertebeden ordinary Runge-Kutta metodu $\Lambda_1 = f(t_n, X_{t_n})$ ve $\Lambda_2 = f(t_n + \Delta_n, X_{t_n} + \Delta_n \Lambda_1)$ olmak üzere

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{\Delta_n}{2} f(\Lambda_1 + \Lambda_2) \quad (5.36)$$

şeklinde elde edilir.

Dördüncü mertebeden Runge-Kutta metodu ise ikinci mertebeden Runge-Kutta metoduna benzer adımlar ile elde edilebilir. (5.32) ile verilen Taylor açılımı için $\mathcal{O}(\Delta_n^5)$ 'e kadar terim içeren beşinci mertebeden Taylor açılımı üzerinde çalışıldığında, açılıma iki tane ekstra terim eklenir. Taylor açılımında, $f(t, X_t)$ fonksiyonunun türevlerinin yerine yazılması ile dördüncü mertebeden Runge-Kutta metodu $i = 1, 2, 3, 4$ için,

$$\Lambda_1 = f(t_n, X_{t_n})$$

$$\Lambda_2 = f\left(t_n + \frac{\Delta_n}{2}, X_{t_n} + \frac{\Delta_n}{2}\Lambda_1\right)$$

$$\Lambda_3 = f\left(t_n + \frac{\Delta_n}{2}, X_{t_n} + \frac{\Delta_n}{2}\Lambda_2\right)$$

$$\Lambda_4 = f\left(t_n + \frac{\Delta_n}{2}, X_{t_n} + \Delta_n\Lambda_3\right)$$

olmak üzere,

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{\Delta_n}{6} f(\Lambda_1 + 2\Lambda_2 + 2\Lambda_3 + \Lambda_4) \quad (5.37)$$

şeklinde elde edilir.

Görüldüğü üzere dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi, ikinci mertebeden Runge-Kutta yöntemine göre iki terim daha fazladır. Böylece (5.32) ile verilen Taylor açılımına daha çok terim eklenmesi ile yüksek mertebeden daha doğru yaklaşımlar elde edileceği anlaşılır. s -inci mertebeden ordinary Runge-Kutta metodu,

$$Y_{n+1} = Y_n + \Delta_n \sum_{i=1}^s \mu_i \Lambda_i, \quad n \geq 0 \quad (5.38)$$

şeklinde genelleştirilebilir. Burada Λ_i fonksiyonları, $i = 1, 2, \dots, s$ ve β_{ij}, c_i, μ_i katsayıları sabit olmak üzere,

$$\Lambda_i = a\left(t_n + c_i \Delta_n, X_{t_n} + \Delta_n \sum_{j=1}^s \beta_{ij} \Lambda_j\right)$$

şeklinde tanımlanır. Butcher array katsayılarının tablo ile gösterimi, $j \geq i$ için $\beta_{ij} = 0$

ve

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^s \mu_i = 1$$

olmak üzere,

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ c_2 & \beta_{21} & & & \\ c_3 & \beta_{31} & \beta_{32} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_s & \beta_{s1} & \beta_{s2} & \dots & \beta_{s,s-1} \\ \hline & \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{s-1} & \mu_s \end{array}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer katsayılar $j \geq i$ için $\beta_{ij} \neq 0$ şartını sağlıyorsa, metot implicit form olur.

Runge-Kutta metodunun explicit formunda her $j \geq i$ için $c_1 = 0$ ve $\beta_{ij} = 0$ olduğundan Λ_1 fonksiyonu daima $f(t_n, X_{t_n})$ fonksiyonuna eşittir. Örneğin, (5.36) ile verilen ikinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi için Butcher array,

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

ve (5.37) ile verilen dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi için Butcher array,

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

şeklinde dir.

Şimdi de ordinary durum için elde edilen Runge-Kutta metodunu stokastik duruma genelleştirelim.

5.5 Stokastik Runge-Kutta Metodu

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dW_t, \quad X_{t_0} = x_0 \quad (5.39)$$

Ito stokastik diferansiyel denklemi veya

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t f(s, X_s)ds + \int_{t_0}^t g(s, X_s)dW_s \quad (5.40)$$

şeklinde denklemin integral formu verilsin. Burada W_t , $I = [t_0, T]$ aralığında bir boyutlu "Brown hareketi"dir.

Y_n , $[t_0, T]$ aralığında X_{t_n} çözümüne yakınsamak üzere yaklaşım için tekrarlı çözüm,

$$Y_{n+1} = Y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, X_s)ds + \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(s, X_s)dW_s$$

olarak elde edilir.

Deterministik durumdaki benzer açılımlar kullanılarak, şemayı basitleştirmek için Remark'ın uygulanması ile Ito Taylor açılımından stokastik Runge-Kutta metodu elde edilir.

Bu bilgiler doğrultusunda $s \geq 1$ için s -stage stokastik Runge-Kutta yönteminin genel formu;

$$Y_{n+1} = Y_n + \sum_{i=1}^s \mu_i \Lambda_i \Delta_n + \sum_{i=1}^s \gamma_i \psi_i \Delta W_n \quad (5.41)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $i = 1, 2, \dots, s$ için ,

$$\begin{aligned} \Lambda_i &= f(t_n + c_i \Delta_n, Y_n^{(i)}) \\ \psi_i &= g(t_n + c_i \Delta_n, Y_n^{(i)}) \\ Y_n^{(i)} &= Y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} \Lambda_j \Delta_n + \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} \psi_j \Delta W_n \end{aligned}$$

olmak üzere $\mu_i, \nu_i, c_i, \beta_{ij}, \gamma_{ij}$ katsayıları deterministik durumdakine benzer şekilde seçilen sabitler olup,

$$\sum_{i=1}^s \mu_i = \sum_{i=1}^s \nu_i = 1$$

şartı sağlanmalıdır.

Stokastik Runge-Kutta metodu için Butcher array aşağıdaki gibidir.

0								
c_2	β_{21}				γ_{21}			
c_3	β_{31}	β_{32}			γ_{31}	γ_{32}		
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		\vdots	\vdots	\ddots	
c_s	β_{s1}	β_{s2}	$\dots \beta_{s,s-1}$		γ_{s1}	γ_{s2}	$\dots \gamma_{s,s-1}$	
	μ_1	μ_2	$\dots \mu_{s-1} \mu_s$		ν_1	ν_2	$\dots \nu_{s-1} \nu_s$	

Deterministik durumdan farklı olarak "Butcher array" in eklemeli olan kısmı, stokastik diferansiyel denklemin difüzyon kısmının katsayılarını göstermektedir. Yukarıdaki tablo bir boyutlu Brownian motion içeren stokastik Runge-Kutta yöntemi için verilmiştir. Eğer, (5.41)'daki gibi multi-dimensional Brownian motion varsa, stokastik kısımdaki her bir Brownian motion için Butcher array'e sütunlar eklenir. Örneğin, 2 boyutlu Brownian motion içeren stokastik Runge-Kutta metodunun genel yapısı,

$$Y_{n+1} = Y_n + \sum_{i=1}^s \mu_i \Lambda_i \Delta_n + \sum_{i=1}^s \gamma_i \psi_i W_n^1 + \sum_{i=1}^s \gamma_i \psi_i W_n^2 \quad (5.42)$$

olup burada ,

$$\sum_{i=1}^s \mu_i = \sum_{i=1}^s \nu_i = 1$$

şartı sağlanmak üzere $i = 1, 2, \dots, s$ için ,

$$\begin{aligned}\Lambda_i &= f(t_n + c_i \Delta_n, Y_n^{(i)}) \\ \psi_i &= g(t_n + c_i \Delta_n, Y_n^{(i)}) \\ Y_n^{(i)} &= Y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} \Lambda_j \Delta_n + \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} \psi_j \Delta W_n^1 + \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} \psi_j \Delta W_n^2\end{aligned}$$

şeklindedir ve yine burada $\mu_i, v_i, c_i, \beta_{ij}, \gamma_{ij}$ katsayıları sabit olup (5.42) ile verilen şema için Butcher array,

0															
c_2	β_{21}				γ_{21}^1				γ_{21}^2						
c_3	β_{31}	β_{32}			γ_{31}^1	γ_{32}^1			γ_{31}^2	γ_{32}^2					
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		\vdots	\vdots	\ddots		\vdots	\vdots	\ddots				
c_s	β_{s1}	β_{s2}	\dots	$\beta_{s,s-1}$	γ_{s1}^1	γ_{s2}^1	\dots	$\gamma_{s,s-1}^1$	γ_{s1}^2	γ_{s2}^2	\dots	$\gamma_{s,s-1}^2$			
	μ_1	μ_2	\dots	μ_{s-1}	μ_s	v_1^1	v_2^1	\dots	v_{s-1}^1	v_s^1	v_1^2	v_2^2	\dots	v_{s-1}^2	v_s^2

olarak elde edilir.

Deterministik duruma benzer özellikler ile stokastik Runge-Kutta metodunun explicit formu için, $j \geq i$ ve

$$\sum_{i=1}^s \mu_i = \sum_{i=1}^s v_i = 1$$

olmak üzere katsayılar, $\beta_{ij} = \gamma_{ij} = 0$ şartını sağlar. Dahası explicit formda tüm $j \geq 1$ ve $i = 1, 2, \dots, s$ için $c_1 = \beta_{1j} = \gamma_{1j} = 0$ olduğundan $\Lambda_1 = f(t_n, Y_n^{(1)})$ ve $\Psi_1 = g(t_n, Y_n^{(1)})$ sağlanır.

Şimdi de verilen Butcher arrays için farklı mertebeden Runge-Kutta metotlarını tanıtalım.

5.5.1 İkinci Mertebeden Stokastik Runge-Kutta Metodu

İkinci mertebeden stokastik Runge-Kutta metodu için Butcher array [22], [23]:

$$\begin{array}{c|cc|cc}
0 & 0 & & 0 & & \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\
\hline
& \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} &
\end{array}$$

ve uygun yaklaşım denklemi :

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{2} \left(f(t_n, Y_n^{(1)}) + f(t_{n+1}, Y_n^{(2)}) \Delta_n \right) + \frac{1}{2} \left(g(t_n, Y_n^{(1)}) + g(t_{n+1}, Y_n^{(2)}) \Delta W_n \right) \quad (5.43)$$

şeklinde olup burada $i = 1, 2$ için Y_n^i prosesi

$$Y_n^{(1)} = Y_n$$

$$Y_n^{(2)} = Y_n + f(t_n, Y_n^{(1)}) \Delta_n + g(t_n, Y_n^{(1)}) \Delta W_n$$

denklemlerini sağlar.

5.5.2 Üçüncü Mertebeden Stokastik Runge-Kutta Metodu

Üçüncü mertebeden stokastik Runge-Kutta metodu için Butcher array [24]:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
0 & 0 & & & 0 & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 & & \frac{2}{3} & 0 & & \\
1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & \\
\hline
& \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} &
\end{array}$$

ve uygun yaklaşım denklemi :

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} = Y_n &+ \left(\frac{1}{2} f(t_n, Y_n^{(1)}) + \frac{3}{4} f\left(t_n + \frac{1}{2} \Delta_n, Y_n^{(2)}\right) - \frac{1}{4} f(t_{n+1}, Y_n^{(3)}) \right) \Delta_n \\
&+ \left(\frac{1}{2} g(t_n, Y_n^{(1)}) + \frac{3}{4} g\left(t_n + \frac{1}{2} \Delta_n, Y_n^{(2)}\right) - \frac{1}{4} g(t_{n+1}, Y_n^{(3)}) \right) \Delta W_n \quad (5.44)
\end{aligned}$$

şeklinde olup burada $i = 1, 2, 3$ için Y_n^i prosesi

$$Y_n^{(1)} = Y_n$$

$$Y_n^{(2)} = Y_n + \frac{2}{3}f(t_n, Y_n^{(1)})\Delta_n + \frac{2}{3}g(t_n, Y_n^{(1)})\Delta W_n$$

$$Y_n^{(3)} = Y_n + (f(t_n, Y_n^{(1)}) - f(t_n, Y_n^{(2)}))\Delta_n + (g(t_n, Y_n^{(1)}) - b(t_n, Y_n^{(2)}))\Delta W_n$$

denklemlerini sağlar.

5.5.3 Dördüncü Mertebeden Stokastik Runge-Kutta Metodu

Dördüncü mertebeden stokastik Runge-Kutta metodu için Butcher array :

0	0				0				0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0			-0.72	0			2.70	0			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0		0.42	-0.20	0		1.76	0	0		
1	0	0	1	0	-1.58	0.84	1.74	0	-2.92	0	0	0	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	-0.78	0.07	1.49	0.22	1.69	1.64	-3.02	-0.31	

ve uygun yaklaşım denklemi :

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} = & Y_n + \left(\frac{1}{6}f(t_n, Y_n^{(1)}) + \frac{1}{3}f(t_n + \frac{1}{2}\Delta_n, Y_n^{(2)}) \right. \\
& - \frac{1}{3}f(t_n + \frac{1}{2}\Delta_n, Y_n^{(3)}) + \frac{1}{6}f(t_{n+1}, Y_n^{(4)}) \left. \right) \Delta_n \\
& - \left(0.78g(t_n, Y_n^{(1)}) + \frac{1}{3}g(t_n + \frac{1}{2}\Delta_n, Y_n^{(2)}) \right. \\
& + 1.49g(t_n + \frac{1}{2}\Delta_n, Y_n^{(3)}) + 0.22f(t_{n+1}, Y_n^{(4)}) \left. \right) \Delta W_n^1 \\
& + \left(1.69g(t_n, Y_n^{(1)}) + 1.64g(t_n + \frac{1}{2}\Delta_n, Y_n^{(2)}) \right. \\
& \left. - 3.02g(t_n + \frac{1}{2}\Delta_n, Y_n^{(3)}) - 0.31f(t_{n+1}, Y_n^{(4)}) \right) \Delta W_n^2
\end{aligned} \tag{5.45}$$

şeklinde olup burada $i = 1, 2, 3, 4$ için Y_n^i prosesi,

$$Y_n^{(1)} = Y_n$$

$$Y_n^{(2)} = Y_n + \frac{1}{2}f(t_n, Y_n^{(1)})\Delta_n - 0.72g(t_n, Y_n^{(1)})\Delta W_n^1 + 2.7g(t_n, Y_n^{(1)})\Delta W_n^2$$

$$Y_n^{(3)} = Y_n + \frac{1}{2}f(t_n, Y_n^{(2)})\Delta_n + (0.42g(t_n, Y_n^{(1)}) - 0.20g(t_n, Y_n^{(2)}))\Delta W_n^1 + 1.76g(t_n, Y_n^{(1)})\Delta W_n^2$$

$$Y_n^{(4)} = Y_n + f(t_n, Y_n^{(3)})\Delta_n - (1.58g(t_n, Y_n^{(1)}) - 0.84g(t_n, Y_n^{(2)}) - 1.74g(t_n, Y_n^{(3)}))\Delta W_n^1 - 2.92g(t_n, Y_n^{(1)})\Delta W_n^2$$

denklemlerini sağlar.

Bu şema gösteriminde iki boyutlu Brownian motion vardır. Butcher array'e bakılacak olursa ilk kolondaki katsayılar deterministik kısım için verilirken, ikinci ve üçüncü kısımlar yaklaşım metodunun stokastik kısmı için verilmiştir [18].

PARAMETRE TAHMİNİ

6.1 Stokastik Diferansiyel Denklemler için Parametre Tahmini

$\theta \in \mathbb{R}$ bilinmeyen parametre vektörü olmak üzere

$$dX(t) = f(t, X(t); \theta)dt + g(t, X(t); \theta)dW(t) \quad (6.1)$$

formunda stokastik diferansiyel denklem tanımlansın. $i = 0, 1, \dots, N$ ve $\Delta t = T/N$ için x_0, x_1, \dots, x_N ayrı ayrı düzgün dağılmış $t_i = i\Delta t$ zamanlarında $X(t)$ 'nin gözlemlenen değerleri olsun. Problem verilen bu $N+1$ data noktası için θ vektörünü tahmin etmektir.

6.1.1 Maksimum Likelihood Tahmin Yöntemi

Maksimum likelihood parametre tahmini özellikle non-normal verilere sahip nonlineer modelleme gibi çoğu istatistiksel modelleme tekniği için önemli bir yöntemdir.

Tahmin yöntemlerinde ilk olarak toplanan veriler ve parametreleriyle model belirlenir.

θ vektör olmak üzere $p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)$, (t_{k-1}, x_{k-1}) noktasından başlayan (t_k, x_k) 'nin geçiş olasılık yoğunluğu olmak üzere, $p_0(x_0 | \theta)$ başlangıç yoğunluğu olsun. θ 'nın maksimi-

mum likelihood tahmini için ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\mathcal{D}(\theta) = p_0(x_0|\theta) \prod_{k=1}^N p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)$$

maksimize edilir. $\mathcal{D}(\theta)$ 'yı maksimize eden θ değerini $\hat{\theta}$ ile göstereceğiz. Bu maksimizasyon probleminde bilgisayar hesaplamalarında küçük sayılardan kaçınmak ve kolaylık sağlaması açısından, ortak olasılık fonksiyonunun doğal logaritması olan $\mathcal{L}(\theta) = -\ln(\mathcal{D}(\theta))$

$$\mathcal{L}(\theta) = -\ln(p_0(x_0|\theta)) - \sum_{k=1}^N p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)$$

minimize edilir. $\hat{\theta}$ 'nin optimal değerini hesaplamadaki zorluklardan biri geçiş yoğunluğunun genelde bilinmemesidir. Ancak (6.1) denkleminin Euler yaklaşımı göz önünde bulundurulup, $X(t_{k-1}) = x_{k-1}$ ve $t = t_{k-1}$ yazılırsa, $\eta_k \sim N(0; 1)$ olmak üzere

$$X(t_k) = x_{k-1} + f(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)\Delta t + g(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)\sqrt{\Delta t}\eta_k$$

elde edilir. Bu da, $\mu_k = x_{k-1} + f(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)\Delta t$ ve $\sigma_k = g(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)\sqrt{\Delta t}$ için,

$$p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \exp\left(\frac{-(x_k - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2}\right)$$

demektir. Bu geçiş yoğunluğu (transition density) \mathbb{R}^m civarında $\mathcal{L}(\theta)$ 'yı minimize etmek için yerine yazılır. Buradaki bir diğer zorluk, $\mathcal{L}(\theta)$ 'yı minimize eden optimal $\hat{\theta}$ vektörünü hesaplamaktır. Bu basit olmayan bir hesaplamadır. Minimum $\mathcal{L}(\theta)$ 'yı hesaplamak için Nelder-Mead metodu [25] gibi nümerik optimizasyon algoritmaları kullanışlı olabilir.

Yukarıda verilen geçiş yoğunluğuna yaklaşım için Euler formülü kullanılmıştır.

$p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)$ geçiş yoğunluğuna yaklaşım için, Euler formülünden başka [26] de tartışıldığı gibi simülasyon ile yaklaşım da kullanılabilir. İlk olarak θ 'nın verilen değeri için t_{k-1} noktasındaki x_{k-1} değeri başlangıç olarak alınarak (6.1) nümerik olarak

çözülür. Çözüm için Euler metodu veya Milstein metodu gibi nümerik metotlar kullanılabilir. Hesaplamalar $t = t_k$ noktasındaki $X(t)$ için M tane tahmini değer elde edene kadar tekrarlanır. Daha sonra,

$$p^{(M)}(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta) = \frac{1}{Mh} \sum_{j=1}^M K\left(\frac{x_k - y_j}{h}\right)$$

kullanılarak, $p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)$ geçiş yoğunluğu tahmin edilir. Burada, K nonnegatif kernel fonksiyonu ve h ise band genişliğidir (bandwidth). Makul K kernel fonksiyonu ve h band genişliği [26],

$$s^2 = \frac{1}{M-1} \left[\sum_{j=1}^M y_j^2 - \frac{1}{M} \left(\sum_{j=1}^M y_j \right)^2 \right]$$

örneklem standart sapması (sample standard deviation) formülü olmak üzere,

$$K(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\vartheta^2}{2}\right] \quad \text{ve} \quad h = 0.9sM^{-1/5}$$

şekindedir. Son olarak ise, $\hat{\theta}$ 'nin optimal değerine yaklaşım için,

$$\mathcal{L}^{(M)}(\theta) = -\ln(p_0(x_0|\theta)) - \sum_{k=1}^N \ln(p^{(M)}(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta))$$

minimize edilir.

6.1.2 Nonparametrik Tahmin Yöntemi

Kabul edelim ki, $i = 0, 1, \dots, N$ ve $\Delta t = T/N$ için x_0, x_1, \dots, x_N ayrı ayrı düzgün dağılmış $t_i = i\Delta t$ zamanlarında $X(t)$ 'nin gözlemlenen değerleri olsun. Problem yine bu $N + 1$ veri noktası ile θ parametre vektörünü tahmin etmektir. Bu tahmin yönteminde süreç, $i = 0, 1, \dots, N - 1$ ve her bir i için $\eta_i \sim N(0; 1)$ olmak üzere Euler yaklaşımı

kullanılarak,

$$X_{i+1} - X_i = f(t_i, X_i; \theta)\Delta t + g(t_i, X_i; \theta)\eta_i\sqrt{\Delta t} \quad (6.2)$$

şeklinde yaklaşık olarak modellenenebilir. X_i 'nin şartlı gözlemleri kullanılarak, diskret-zamanlı süreç için yaklaşık beklentiler

$$E[(X_{i+1} - X_i)/\Delta t - f(t_i, X_i; \theta)] = \mathcal{O}(\Delta t) \quad (6.3)$$

$$E[(X_{i+1} - X_i)^2/\Delta t - g^2(t_i, X_i; \theta)] = \mathcal{O}(\Delta t) \quad (6.4)$$

şeklinindedir. Eğer $\theta \in \mathbb{R}^2$ ise (6.3) ve (6.4) denklemleri θ vektörünü tahmin etmek için kullanılabilir. Eğer $\theta \in \mathbb{R}^m$ ve $m > 2$ ise (6.3) ve (6.4) denklemleri [27]'de olduğu gibi denklem eklenerek artırılabilir

$$E[(X_{i+1} - X_i)X_i/\Delta t - f(t_i, X_i; \theta)X_i] = \mathcal{O}(\Delta t)$$

$$E[(X_{i+1} - X_i)^2X_i/\Delta t - g^2(t_i, X_i; \theta)X_i] = \mathcal{O}(\Delta t).$$

θ parametre vektörü önceki denklemin örneklem kopyaları kullanılarak tahmin edilir.

Örneğin, $\theta \in \mathbb{R}^2$ için

$$\sum_{i=0}^{N-1} f(t_i, x_i; \theta) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) \quad (6.5)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} g^2(t_i, x_i; \theta) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i)^2 \quad (6.6)$$

şeklinde tahmin edilebilir.

Nonparametrik tahmin metodu, maksimum likelihood yönteminde olduğu gibi, stokastik diferansiyel denklem sistemlerindeki parametrelerin tahminine genişletilebilir. Parametre tahmini ve nümerik metotların kullanılması ile ilgili ek bilgilere [28] , [29] ve [30] den ulaşılabilir.

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE YAKINSAKLIK ve STABİLİTE

7.1 Zayıf Yakınsama Kriterleri

Pratikte çoğu uygulamada, Ito sürecinin yakın yörünge (pathwise) yakınsamasına sahip olması gerekmez. Çoğu zaman, Ito sürecinin final zamanı T 'de verilen değerlerinin bazı fonksiyonları ile ilgilenilir. Mesela $E(X_T)$ ve $E((X_T)^2)$ ile verilen ilk iki moment ile veya, daha çok bazı g fonksiyonları için $E(g(X_t))$ beklentisi (expectation) ile ilgilenilir. Böyle fonksiyonların simülasyonunda, sample path'in yakın yaklaşımından ziyade X_T rassal değişkeninin olasılık dağılımının iyi bir yaklaşıma sahip olması yeterlidir. Dolayısıyla burada gerekli olan yaklaşım tipi, kuvvetli yakınsaklık kriterlerindeki sağlanması beklenenlerden çok daha zayıftır.

Eğer, herhangi bir g polinomu için, $\delta \in (0, \delta_0)$ herhangi bir zaman parçalanışının maksimum adım uzunluğu olmak üzere,

$$|E(g(X_T)) - E(g(Y_N))| \leq \kappa \delta^\beta$$

olacak şekilde sonlu bir κ sabiti ve pozitif δ_0 sabiti varsa, ayrık zaman yaklaşımı Y , $\beta \in (0, \infty)$ mertebeden zayıf (weak) yakınsar denir.

7.2 Kuvvetli Yakınsama Kriterleri

Matematiksel olarak T final zamanında,

$$\varepsilon(\delta) = E(|X_T - Y_N|)$$

şeklinde mutlak hata tanımlaması avantajlıdır.

Bu mutlak hata, T zamanında, X Ito süreci ile Y yaklaşımının "sample path"nin yakınsaklık tahmini için bir kriterdir.

Eğer, $\delta \in (0, \delta_0)$ maksimum adım uzunluğu için

$$E(|X_T - Y_N|) \leq \kappa \delta^\gamma$$

olacak şekilde, sonlu bir κ sabiti ve pozitif δ_0 sabiti varsa, Y süreci $\gamma \in (0, \infty)$ *mertebeden kuvvetli (strong) yakınsar* denir.

Difüzyon katsayısının 0 olduğu deterministik durumlarda bu kuvvetli yakınsama kriteri adi diferansiyel denklemler için alışılmış deterministik kriterlere indirgenir. Buradaki merteye (order), bazen deterministik durumlara karşılık gelene göre stokastik durumlarda daha küçük olabilir. Çünkü Wiener sürecinin, ΔW_n artışının ortalama karekökünün mertebesi $\delta^{1/2}$ 'dir, δ değildir. Örneğin stokastik diferansiyel denklemler için Euler yaklaşımı $\gamma = 0.5$ kuvvetli mertebeye sahip iken, buna karşılık adi diferansiyel denklemler için Euler yaklaşımının mertebesi 1.0'dır.

7.3 Stokastik Diferansiyel Denklemler için Kuvvetli Yakınsaklık

Bir metodun nümeriksel stabilitesi, onun başarılı uygulamaları için önemlidir. Deterministik nümerik analizden, stiff sistemlerin nümerik integrasyonları için nümerik olarak daha stabil olan kapalı metotların kullanımının gerektirdiği bilinmektedir. Bir çok önemli fiziksel problemlerde stokastik kurulumlar stiff sistemleri de içerir.

Kloeden ve Platen [31]'e göre $\delta \rightarrow 0$ zamana göre adım uzunluğu olmak üzere, eğer,

$$E|X_T - Y_T^\delta| \leq |X_T - Y_T^\delta| \leq \kappa \delta^\gamma$$

şartını sağlayan ve δ 'ya bağlı olmayan sonlu bir κ sabiti varsa Y^δ yaklaşımı, X çözümüne $\gamma > 0$ kuvvetli mertebeden (strong order) yakınsar. Burada, Y^δ yaklaşımı daima, stokastik diferansiyel denklemin X çözümünün "sample path"ine göre Wiener sürecinin aynı yörüngesinden (trajectory) üretilmelidir.

Buna karşılık $E(g(X_T))$ gibi çözümün yaklaşım fonksiyonelleri ise zayıf (weak) yaklaşımlar için kullanılır. Kloeden ve Platen [11]'e göre $\delta \rightarrow 0$ ve her bir g polinomu için,

$$|g(X_t) - g(Y_t)| \leq \kappa \delta^\beta$$

olacak şekilde δ 'ya bağlı olmayan κ sonlu sabiti varsa, Y^δ yaklaşımı $\beta > 0$ mertebeden zayıf olarak (weakly) yakınsar. Burada aslında X çözümü tarafından üretilen olasılık ölçümüne yaklaşılmaktadır.

Not 1 Verilen herhangi bir mertebeden zayıf bir yöntem, eş mertebeden kuvvetli yöntemden farklı yapıdadır.

Not 2 A-stabilite ve sonuçları, iyi bilinen deterministik durumun stokastik benzerine direkt dönüşümüdür. Hatta, adi diferansiyel denklem için A-stabil deterministik yöntem, stokastik yönteme uygulandığında da A-stabildir.

7.4 Stokastik Stabilite

Deterministik veya stokastik çoğu diferansiyel denklem açık olarak çözülemez. Ancak genellikle katsayıların fonksiyonel yapılarından çözümlerin davranışları hakkında bir çok faydalı niteliksel bilgiler anlaşılır. Uygulamalarda özellikle çözümlerin uzun vadedeki asimptotik davranışları ve küçük değişimlerdeki hassasiyetleri ile ilgilenilir, örneğin başlangıç değerlerindeki ölçüm hataları gibi. Varlık ve teklik teorisinden, bir diferansiyel denklemin çözümlerinin, en azından sonlu bir zaman aralığı için başlangıç değerlerinde

sürekli olduğu bilinmektedir. Bu düşünce sonsuz bir aralığa genişletilirse stabilite kavramına yol açar.

Her t için $f(t, c) = 0$ olmak üzere, 0'a eşit olma genelliğini kaybetmediği varsayılarak,

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (7.1)$$

adi diferansiyel denklemi göz önüne alındığında genellikle, $x = c$ kararlı durumu veya bir denge noktasının stabilitesi hakkında tartışılır. Eğer her $\epsilon > 0$ için, $\delta = \delta(t_0, \epsilon)$ olacak şekilde bir δ sayısı varsa, öyleki $x(t_0; t_0, x_0) = x_0$ başlangıç şartı için, $x(t; t_0, x_0)$, (7.1)'in bir çözümü olmak üzere

$$|x(t; t_0, x_0)| < \epsilon, \quad \text{her } t \geq t_0 \quad \text{ve} \quad |x_0| < \delta_0 \quad (7.2)$$

ise, $x = 0$ denklem (7.1) için *stabildir* denir. Eğer ek olarak $\delta_0(t_0) > 0$ olacak şekilde bir δ_0 varsa, öyleki

$$\lim_{x \rightarrow 0} x(t; t_0, x_0) = 0, \quad \text{her } |x_0| < \delta_0 \quad (7.3)$$

ise, $X = 0$, denklem (7.1) için *asimptotik olarak stabildir* denir. Eğer δ ve δ_0 , t_0 'a bağlı değilse uniformly niteleyici ve eğer (7.3) herhangi bir δ_0 için sağlanırsa global niteleyici eklenir. Bu tanımlar Lyapunov fonksiyonu denilen bir LV fonksiyonu açısından denge noktasının stabilitesi için mekanik sistemin potansiyel enerjisi şeklinde test üreten Lyapunov'dan ileri gelir. Esasen denge, potansiyel enerji alanının en altında yer alır ve potansiyel enerji diferansiyel denklemin çözümü boyunca denge noktasının küçük bir komşuluğuna kadar monoton olarak azalır.

Özellikle bir V , Lyapunov fonksiyonu her $x \neq 0$ için $V(t, 0) = 0$, $V(t, x) > 0$, $t \geq t_0$ ve tüm x_0 'lar yeterince küçük olmak üzere

$$\frac{d}{dt} V(t, X(t; t_0, x_0)) < 0 \quad (7.4)$$

şartlarını sağlar. Zincir kuralından,

$$\frac{d}{dt}V(t, x(t; t_0, x_0)) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x(t; t_0, x_0)) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x(t; t_0, x_0))f(t, x(t; t_0, x_0))$$

olup denklem (7.4)'ten her $t \geq t_0$ ve 0'in komşuluğundaki her x için

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x)f(t, x) < 0 \quad (7.5)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin geçerliliğini açıkça kontrol etmek için denklem (7.1)'in bilinmesine gerek yoktur.

Örnek 7.1 $V(x) = x^2$ aşağıdaki ADD için bir Lyapunov fonksiyondur :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -x - x^3, \quad (\text{sadece } x = 0 \text{ da denge noktasına sahiptir}). \quad (7.6)$$

(7.1)'den $f(t, x) = -x - x^3$ ve $V(x) = x^2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(t, x(t; t_0, x_0)) &= \frac{\partial V}{\partial t}(t, x(t; t_0, x_0)) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x(t; t_0, x_0))f(t, x(t; t_0, x_0)) \\ &= -2x^2 - 2x^4 \\ &\leq -2V(x), \quad \text{her } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Bu nedenle (7.6) denkleminin çözümü boyunca

$$\frac{d}{dt}V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq -2V(t, x(t; t_0, x_0))$$

elde edilir. Böylece her $t \geq t_0$ ve x_0 için

$$V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq V(x_0)e^{-2(t-t_0)}.$$

Denge noktasının stabilitesini incelemek için Lyapunov metodu uygun bir Lyapunov fonksiyonu bulunduğunda kuvvetli bir metottür, ancak bu her zaman basit değildir.

Denge noktasının stabilitesi, asimptotik stabilitesi ve stabilsizliği için Lyapunov fonksiyonlarının gerek ve yeter şartlarının verildiği bir teori geliştirilmiştir. Aşağıda, SDD için bunlardan bazıları belirtilmiştir.

Stokastik sũreçlerin yakınsaklıklarının çeşitliliğinden dolayı SDD'lerin stabilite kavramlarını tanımlamak için de farklı yollar vardır. Burada, $f(t, 0) = 0$ ve $g(t, 0) = 0$ için $X_t \equiv 0$ aşıkar çözümler (steady solution) olmak üzere

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dW_t \quad (7.7)$$

skalar Ito denklemi için bunlardan bazıları verilecektir. Her $t \geq t_0$ ve incelenen her bir rassal olmayan (nonrandom) $X_{t_0} = X_0$ başlangıç değeri için $X_t \equiv X_t^{t_0, x_0}$ 'ın tek çözümler olduğu kabul edilsin. Stokastik stabilite için yaygın olarak kabul görmüş tanımlardan biri olasılıksal olup Hasminski [32] tarafından gösterilmiştir. $X_t \equiv 0$ aşıkar çözümler, herhangi $\epsilon < 0$ ve $t_0 \geq 0$ için

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} P \left(\sup_{t \geq t_0} |X_t^{t_0, x_0}| \geq \epsilon \right) = 0$$

ise "*stokastik olarak stabildir*" denir. Ek olarak eğer,

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} P \left(\lim_{t \rightarrow \infty} |X_t^{t_0, x_0}| = 0 \right) = 1$$

ise "*stokastik asimptotik stabildir*" (stochastically asymptotically stable) veya

$$P \left(\lim_{t \rightarrow \infty} |X_t^{t_0, x_0}| = 0 \right) = 1, \quad \text{her } x_0 \in \mathbb{R}.$$

ise "*stokastik asimptotik genel stabildir*" denir.

p -inci momentleri içeren bir diğer tanım da oldukça kullanışlıdır. Bu durumda, her $\epsilon > 0$ ve $t_0 \geq 0$ için

$$E(|X_t^{t_0, x_0}|^p) < \epsilon, \quad \text{her } t \geq t_0 \text{ ve } |x_0| < \delta$$

olacak şekilde $\delta = \delta(t_0, \epsilon) > 0$ varsa $X_t \equiv 0$ 'a "*p-inci ortalamada stabildir*" denir ve eğer ek olarak

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(|X_t^{t_0, x_0}|^p) = 0, \quad \text{her } |x_0| < \delta_0$$

olacak şekilde $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$ varsa "*p-inci ortalamada asimptotik stabildir*" (asymptotically stable in p-th mean) denir.

Uniform ve global niteleyiciler deterministik stabilitede olduğu gibi burada da aynı şekilde kullanılırlar. Uygulamalarda özellikle sırasıyla ortalama stabilite (stability in mean) ve ortalama kare stabilite (mean-square stability) için $p = 1$ ve $p = 2$ durumları ile ilgilenilir.

Lyapunov fonksiyonları da denklem (7.7) ile verilen Ito SDD'nin stokastik stabilitesini veya $X_t \equiv 0$ aşıkâr çözümün p -inci ortalama stabilitesini test etmek için kullanılabilir. $V(t, x)$ Ito formülü uygulanacak şekilde yeterince düzgün olsun. Bu durumda $V(t, X_t)$,

$$dV(t, X_t) = LV(t, X_t)dt + g(t, X_t) \frac{\partial V}{\partial x}(t, X_t)dW_t$$

Ito stokastik integraline ve denk olan

$$V(t, X_t) - V(t_0, X_{t_0}) = \int_{t_0}^t LV(s, X_s)ds + \int_{t_0}^t g(s, X_s) \frac{\partial V}{\partial x}(s, X_s)dW_s \quad (7.8)$$

integral gösterimine sahiptir. Burada L operatörü

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (7.9)$$

şeklinde tanımlıdır.

Her x ve $t \geq t_0$ için denklem (7.7)'nin X_t çözümlerinin açık olarak bilgilerini gerektirmeyen ve kolayca kontrol edilebilen

$$LV(t, x) \leq 0 \quad (7.10)$$

şeklinde bir V fonksiyonu bulunabilirse (7.8) eşitliği yerine,

$$V(t, X_t) - V(t_0, X_{t_0}) \leq \int_{t_0}^t g(s, X_s) \frac{\partial V}{\partial x}(s, X_s) dW_s \quad (7.11)$$

yazılabilir.

Koşullu beklenti ve Ito integralin özelliklerinden, $t_0 \leq s \leq t$ için \mathcal{A}_t , X_s tarafından üretilen σ -cebiri olmak üzere w.p.1 ile,

$$E(V(t, X_t) | \mathcal{A}_{t_0}) \leq V(t_0, X_{t_0})$$

elde edilir. Bu eşitsizlik, denklem (7.7)'nin çözümleri boyunca üretilen $V(t, X_t)$ Lyapunov fonksiyonunun bir super-martingale olduğunu söyler. Böylece, her $\epsilon > 0$ ve her $T > t_0$ için maximal martingale eşitsizliği kullanılarak

$$P\left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} V(t, X_t) \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon} V(t_0, x_0)$$

elde edilir. Buradan da

$$P\left(\sup_{t \geq t_0} V(t, X_t) \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon} V(t_0, x_0) \quad (7.12)$$

elde edilir.

Eğer ek olarak her x ve $t \geq 0$ için, $a(0) = b(0) = 0$ olmak üzere $r > 0$ için

$$a(|X|) \leq V(t, x) \leq b(|X|) \quad (7.13)$$

olacak şekilde monoton artan sürekli $a = a(r)$, $b = b(r)$ fonksiyonları varsa denklem (7.12)'den, (7.7) denkleminin $X_t \equiv 0$ steady çözümünün düzgün stokastik stabil olduğu sonucuna varılabilir. Benzer şekilde denklem (7.10)'un yerine her x ve $t \geq 0$ için $r > 0$

ve $c(0) = 0$ olacak şekilde

$$LV(t, x) \leq -c(|X|) \quad (7.14)$$

şartını sağlayan bazı sürekli pozitif $c = c(r)$ fonksiyonları varsa, $X(t) \equiv 0$ steady çözümünün her yerde düzgün stokastik stabil olduğu ispatlanabilir. Çoğu problemde V 'nin gerekli tüm kısmi türevleri $x = 0$ noktasında sürekli olmak zorunda değildir. Ito formülü 0'ın bir komşuluğunda geçerli olmayacaktır ancak ispatların geliştirilmesi ile yukarıdakine benzer sonuçlara ulaşılır [7].

Örnek 7.2

$$dX_t = \alpha X_t dt + \beta X_t dW_t \quad (7.15)$$

lineer Ito SDD'yi ve $V(X) = x^2$ Lyapunov fonksiyonu tanımlansın. Denklem (7.9)'den

$$LV = \frac{\partial V}{\partial t} + \alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Rightarrow LV = 2x^2 \left(\alpha + \frac{1}{2} \beta^2 \right)$$

olup elde edilen eşitlik (7.14) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$2x^2 \left(\alpha + \frac{1}{2} \beta^2 \right) \leq -c|x| \Rightarrow - \left(\alpha + \frac{1}{2} \beta^2 \right) r^2 = c(r),$$

$\alpha + \frac{1}{2} \beta^2 < 0$ için sağlanır. Bu parametre aralığında (7.15) denkleminin sıfır çözümü her yerde düzgün stokastik asimptotik stabildir. Diğer taraftan (7.15) denkleminin analitik çözümü (exact solution),

$$X_t = X_0 \exp \left(\left(\alpha - \frac{1}{2} \beta^2 \right) (t - t_0) + \beta (W_t - W_{t_0}) \right)$$

olarak elde edilir ve $t \rightarrow \infty$ için ancak ve ancak eğer $\alpha - \frac{1}{2} \beta^2 < 0$ ise

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t - W_{t_0}}{t - t_0} = 0, \quad \text{w.p.1}$$

olduğundan w.p.1 ile 0-a yakınsar.

Steady çözümün stabilitesini tanımlamak için bir diğer metot, diferansiyel denklemi bu çözüm civarında lineerleştirmek ve elde edilen lineer diferansiyel denklemin sıfır çözümünün stabilitesini analiz etmektir. Çoğu durumda stabilite veya asimptotik stabilite, nonlinear denklemin steady çözümünün uygun özelliklerini belirtecektir. (7.1) skalar diferansiyel denklemi için bir $x = c$ steady çözüm civarında lineerleştirme ile elde edilen lineer diferansiyel denklem $z = x - c$ ve $\bar{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial x}(t, c)$ olmak üzere

$$\frac{dz}{dt} = \bar{\alpha}(t)z \quad (7.16)$$

olup

$$z(t; t_0, x_0) = z_0 \exp\left(\int_{t_0}^t \bar{\alpha}(s) ds\right)$$

çözümüne sahiptir.

Böylece (7.16)'nın $z \equiv 0$ çözümü asimptotik stabildir ancak ve ancak

$$\gamma = \limsup_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \bar{\alpha} ds < 0 \quad (7.17)$$

Burada superior limit kullanılmıştır, çünkü olağan limit olmayabilir. $\bar{\alpha}(t) = -2 + t \sin t$ fonksiyonunda olduğu gibi (7.1) orjinal diferansiyel denklem otonom ve (7.16) denklemindeki $\bar{\alpha}(t)$ katsayısı sabit ise $\bar{\alpha}$ ve $\gamma = \bar{\alpha}$, 1×1 tipindeki $[\bar{\alpha}]$, matrisinin sadece özdeğeridir denir.

$A(t)$ bir $d \times d$ matris olmak üzere, vektör diferansiyel denklem için lineerleştirilmiş denklem

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z \quad (7.18)$$

formundadır. $A(t) \equiv A$ bir sabit olmak üzere otonom durumda (7.18)'nin çözümleri

$$z(t; t_0, z_0) = z_0 \exp((t - t_0)A)$$

olup (7.18) denkleminin sıfır çözümü asimptotik stabildir ancak ve ancak A matrisinin tüm özdeğerleri negatif reel kısımlara sahiptir. Otonom olmayan durumlar çok daha karmaşıktır. Özdeğerlerin reel kısımlarının benzerleri (7.17)'nin basit bir örneği olan ve

$$\gamma(t_0, z_0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln |z(t; t_0, z_0)| \quad (7.19)$$

ile tanımlanan Lyapunov bileşenleridir. Böylece sıfır çözümün asimptotik stabilitesi ancak ve ancak Lyapunov bileşenleri her t ve $z_0 \neq 0$ için negatif olduğunda vardır. Ancak uygulamada Lyapunov bileşenlerini açıkça tanımlamak kolay değildir.

Lyapunov bileşenleri SDD için de kullanılabilir. Bunun için Stratonovich SDD'ler daha uygundur. $W = (W^1, \dots, W^m)$ m -boyutlu standart Wiener süreci olmak üzere, X_t ,

$$dX_t = \underline{\alpha}(t, X_t)dt + \sum_{k=1}^m \beta^k(t, X_t) \circ dW_t^k \quad (7.20)$$

d -boyutlu Stratonovich SDD'nin bir stokastik stabil çözümü olsun. $Z_t = X_t - \bar{X}_t$ için,

$$dZ_t = A(t, w)Z_t dt + \sum_{k=1}^m B^k(t, w)Z_t \circ dW_t^k \quad (7.21)$$

lineerleştirilmiş sistem elde edilir. Burada, $A, B^1, B^2, \dots, B^m, i, j = 1, 2, \dots, d$ ve $k = 1, 2, \dots, m$ için

$$A(t, w)^{i,j} = \frac{\partial \alpha^i}{\partial x_j}(t, \bar{X}_t(w))$$

$$B(t, w)^{i,j} = \frac{\partial \beta^{k,i}}{\partial x_j}(t, \bar{X}_t(w))$$

bileşenleri ile tanımlanan $d \times d$ matrislerdir.

7.5 Stiff Stokastik Diferansiyel Denklemler

$0 \leq t \leq T$ ve $X_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere, d boyutlu Ito stokastik diferansiyel denklemi,

$$dX_t = \alpha(t, X_t)dt + \beta(t, X_t)dW_t \quad (7.22)$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\alpha(x) = \{\alpha^k(x)\}_{k=1}^d$ d boyutlu drift ve $\beta(x) = \{\beta^k(x)\}_{k=1}^d$ d boyutlu difüzyon katsayılarıdır. $W = \{W_t, t \geq 0\}$ standart Wiener süreci olup, $s, t \geq 0$ için

$$E(W_t) = \langle W_t \rangle = 0$$

$$E(W_s W_t) = \langle W_s W_t \rangle = \min\{s, t\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Matematiksel olarak (7.22) denklemi Ito stokastik denklemi olarak integral formda

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha(s, X_s)ds + \int_0^t \beta(s, X_s)dW_s \quad (7.23)$$

şeklinde yazmak daha uygundur. (7.23) denklemindeki ikinci integral bir Ito integrali olup, deterministik analizdeki kuralları sağlamaz. Drift terimi,

$$\underline{\alpha}(x) = \alpha(x) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \beta^k(x) \frac{\partial \beta^k}{\partial x^k}(x)$$

şeklinde düzenlenirse, Stratonovich integraline göre ifade edilebilir. (7.23) ile verilen aynı $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T$ Ito süreci için elde edilen Ito Stratonovich stokastik denkleminin,

$$X_t = X_0 + \int_0^t \underline{\alpha}(X(s))ds + \int_0^t b(X_s) \circ dW_s \quad (7.24)$$

şeklinde olduğu gösterilmiştir. (7.23)'nin kuvvetli çözümünün varlık ve tekliğini garanti altına almak için α ve β ile verilen drift ve difüzyon katsayılarının Lipschitz ve lineer

büyüme şartlarını sağladıkları kabul edilsin. Yüksek mertebeden nümerik yöntemlerin yakınsaklık ispatları için, α ve β 'nin yeterince düzgün ve X_0 başlangıç değerinin bütün momentlerinin var olduğunu kabul edilmelidir, öyleki $q = 1, 2, \dots$ için,

$$E|X_0|^q = \langle |X_0|^q \rangle < \infty. \quad (7.25)$$

stiff stokastik diferansiyel denklemleri tanımlayabilmek için Lyapunov bileşenlerinin üretilmesi gereklidir. Kabul edelim ki (7.24) ile verilen Statonovich denklemi \bar{X}_t durağan çözümüne sahip olsun,

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t \underline{A}(s)Z_s ds + \int_0^t B(s)Z_s \circ dW_s \quad (7.26)$$

lineerleştirilmiş sistemini elde etmek için, \bar{X}_t lineerleştirilir. Burada \underline{A} ve B bileşenleri $i, j = 1, \dots, d$ kadar

$$\underline{A}(t)^{ij} = \frac{\partial \underline{a}^i}{\partial x^j}(\bar{X}_t) \quad (7.27)$$

$$B(t)^{ij} = \frac{\partial b^i}{\partial x^j}(\bar{X}_t) \quad (7.28)$$

olan $d \times d$ tipinde matrislerdir. Osceledec 'in [33] çarpımsal ergodic teoreminden

$$\lambda_d \leq \lambda_{d-1} \leq \dots \leq \lambda_1$$

d random olmayan Lyapunov bileşeni ve $E_d(w), E_{d-1}(w), \dots, E_1(w)$ random alt kümesinin bir \mathbb{R}^d parçalanışı vardır, öyleki (7.26)'in çözümü için bu kümelerin

$$\lambda(Z_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |Z_t| \quad (7.29)$$

limitinin alınması ile, sırasıyla $\lambda_d, \lambda_{d-1}, \dots, \lambda_1$ değerlerini alır.

Eğer (7.26) denkleminin Lyapunov bileşenleri

$$\lambda_d \ll \lambda_1 \quad (7.30)$$

şartını sağlarsa (7.26) lineer stokastik diferansiyel denklemine "*stiff*" denir.

Genellikle (7.24) ile verilen stokastik diferansiyel denklemin (7.26) lineerizasyonu bazı durağan çözümlerine (stationary solution)'a göre stiff ise bu stokastik denkleme "*stiff*" denir. Eğer (7.24) orjinal denklemi, durağan çözüme göre lineerleştirmede toplanır gürültüye (additive noise) sahip ise $B(t) \equiv 0$ için (7.26) dejenere lineer denklemi elde edilir. Ancak burada \underline{A}_t random matris değerli fonksiyondur.

Deterministik diferansiyel denklemin katsayı matrisinin özdeğerlerinin reel kısmı olduğundan, bu durum sağlamlığın (stiffness) deterministik durumun genelleştirilmesidir. Hatta bir stiff deterministik denklem aynı zamanda stokastik durum için de stiffdir.

7.6 Euler Maruyama Metodu için Kuvvetli Yakınsaklık ve Stabilité

$[0, T]$ aralığı, N pozitif tam sayı olmak üzere, $\Delta t = T/N$ ve $n = 0, 1, 2, \dots, N$ için $\tau_n = n\Delta t$ noktaları ile eşit zaman parçalanmalarına sınırlansın. Bu durumda Euler Maruyama metodu

$$X(\tau_{j+1}) = X(\tau_j) + f(X\tau_j)\Delta t + g(X\tau_j)(W_{\tau_{j+1}} - W_{\tau_j}) \quad (7.31)$$

şeklinde tanımlanır. Bu yöntem (7.22) ve dolayısıyla (7.23) ile verilen stokastik denklemin yaklaşık çözümünün simülasyonu için tekrarlı bir algoritmadır.

Δt azaldıkça EM çözümü gerçek çözüme yaklaşır. Bu düşünceden yola çıkarak, $X(\tau_n)$ ve X_n rassal değişkenler olmak üzere, yakınsaklık kavramı için bu iki rassal değişken arasındaki farkın nasıl ölçüleceği ile ilgili karar vermek gerekir. $E|X_n - X(\tau_n)|$ farkı ile kuvvetli (strong) yakınsaklık elde edilir. Δt yeterince küçük olmak üzere, eğer herhangi

$\tau = n\Delta t$ için

$$E|X_n - X(\tau)| \leq \kappa \Delta t^\gamma \quad (7.32)$$

olacak şekilde bir κ sabiti varsa, metodun (7.22) stokastik diferansiyel denkleminin ilgili çözümüne $\gamma > 0$ kuvvetli mertebeden (strong order) yakınsadığı kesin olarak söylenebilir. Eğer (7.22) denkleminde f ve g uygun şartları sağlıyorsa EM metodunun $\gamma = 1/2$ mertebeden kuvvetli yakınsadığı gösterilebilir (bu durum deterministik Euler metodunda farklıdır, şöyle ki: $f \equiv 0$ ve X_0 sabit ise (7.32) denkleminin sol tarafından beklenen değer silinir ve eşitsizlik $\gamma = 1$ için doğru olur) [12].

7.6.1 EM için Lineer Stabilite Analizi

Adi diferansiyel denklemlerde olduğu gibi lineer stabilite analizi SDD için de direkt olarak uygulanabilir.

Kabul edelim ki, f ve g parametreleri (7.32) stkastik diferansiyel denklem mean-square veya asimptotik stabil olacak şekilde seçilsin. Bu durumda " Δt 'nin hangi aralığı için EM çözümü paralel olarak stabildir?" şeklinde bir sorunun akla gelmesi normaldir. Bu sorunun mean-square versiyonunu analiz etmek kolaydır. $\bar{Y}_n = E|\bar{X}_n|^2$ olmak üzere, EM (7.32) denkleminde uygulanırsa, beklenen değerlerin özelliklerinden, tek adımlı fark denklemi, $\bar{h} = hf$ ve $k = -g^2/f$ olmak üzere

$$\bar{Y}_{n+1} = R(\bar{h}, k)\bar{Y}_n \quad (7.33)$$

şeklinde elde edilir. Burada $R(\bar{h}, k)$ nümerik metodun *stabilite fonksiyonu* olarak adlandırılır.

$$|R(\bar{h}, k)| < 1 \quad (7.34)$$

için gerek ve yeter şartın, $n \rightarrow \infty$ için $\bar{Y}_n \rightarrow 0$ olduğu açıktır.

Tanım 7.1 Eğer \bar{h} ve k katsayıları (7.34)'ü sağlarsa metod "*mean-square stabildir*" denir.

$$\mathcal{R} = \{(\bar{h}, k) : (7.34) \text{ sağlanır}\}$$

şeklinde verilen \mathcal{R} de metodun "*mean-square tanım kümesi*" dir. Eğer α ve β reel değerli ise \mathcal{R} 'ye "*mean-square stabilite bölgesi*" denir.

Bu şartlar altında EM metodu için stabilite fonksiyonu

$$R(\bar{h}, k) = |1 + \bar{h}|^2 + |k\bar{h}| \tag{7.35}$$

şeklinde elde edilir [34].

UYGULAMA 1

Tezin bu bölümünde, Black-Scholes modelinde parametre tahmini tartışılmıştır. Daha önceki bölümde anlatılan nonparametrik tahmin yöntemi ve iyi bilinen maksimum likelihood tahmincisi ele alınmıştır. Hedef, stokastik diferansiyel denklem için bilinmeyen parametrelerin, ayrık zaman gözlem verilerinden yola çıkılarak tahmin edilmesidir. Simülasyon çalışmasında ise nonparametrik yöntem ve maksimum likelihood yöntemi ile elde edilen katsayılar modelde yerine yazılıp, elde edilen her iki stokastik diferansiyel denklem de MATLAB programı kullanılarak Euler Maruyama metodu ile nümerik olarak çözülmüştür ve sonuçlar grafikler ile desteklenmiştir.

8.1 Black-Scholes Model

Stokastik diferansiyel denklem belirli katsayılarla verildiğinde, bu denklemi sayısal yöntemlerle, Euler Maruyama, Milstein, Runge Kutta metodu vb. ile çözmek kolaydır [14],[11]. Ancak, herhangi bir zaman aralığında yalnızca diskret veriler gözlemlendiyse çözüm o kadar da basit değildir. Bu durumda difüzyon ve sürüklenme katsayılarına ulaşmak gerekir, bu nedenle de tahmin yöntemlerine ihtiyaç duyulur. [27],[35],[29] stokastik diferansiyel denklemler için tahmin yöntemleri hakkında çalışmalar yapmışlardır. [35],[36] gibi bir çok araştırmacı nonparametrik teknikler kullanmıştır. Nonparametrik yöntem, katsayıları uygulamak ve tahmin etmek için yeterli sıklıkta veriler varsa oldukça

basit bir yöntemdir. Maksimum likelihood yöntemi [37] ise nonparametrik yöntemden daha verimli olan bir diğer tahmin yöntemidir.

Diskret zaman noktalarında bir difüzyon işleminin gözlemlendiği pek çok pratik vakada, açık bir olasılık fonksiyonu nadiren mevcuttur. Bu tür çalışmalar son zamanlarda büyük ilgi görmektedir. Diskret zaman için bir tahminci elde etmek için basit bir yöntem eski verilerin kullanılması ile inşa edilir [38],[39] vb. Bu tahmin edicileri analitik olarak incelemek genel olarak zor olsa da sayısal simülasyon ile bu işlem kolaylıkla yapılabilir.

Bu tezin bu bölümünde, nonparametrik tahmin yöntemi ile maksimum likelihood tahmin yöntemi arasındaki farkları finans alanındaki sayısal bir uygulama ile tartışmak amaçlanmaktadır. Finans alanında oldukça önemli yere sahip olan Black- Scholes modelinin [40] katsayıları, 01.01.2005 - 01.01.2015 arasındaki aylık YHOO hisse değerleri kullanılarak elde edilmiştir. Daha sonra, elde edilen parametrelerle stokastik diferansiyel denklemini sayısal olarak çözmek için MATLAB programı kullanılmıştır ve orijinal veri yaklaşık çözümler ile karşılaştırılmıştır. Sonuçlar, bölümün sonunda verilen grafiklerle desteklenmektedir.

8.2 Nonparametrik Tahmin Yöntemi

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t). \quad (8.1)$$

stokastik diferansiyel denklemini sağlayan $X(t)$ difüzyon süreci tanımlansın. μ ve σ katsayıları uygun şartları sağlamak üzere, ϕ keyfi fonksiyonunun koşullu beklentisi Taylor serisi formunda

$$\begin{aligned} E_t[\phi(X_{t+\Delta t}, t)] &= \phi(X_t, t) + \mathcal{L}\phi(X_t, t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathcal{L}^2\phi(X_t, t)(\Delta t)^2 + \dots \\ &+ \frac{1}{n!}\mathcal{L}^n\phi(X_t, t)(\Delta t)^n + \mathcal{O}((\Delta t)^{n+1}) \end{aligned} \quad (8.2)$$

şeklinde yazılabilir burada

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\phi(x, t) &= \lim_{\zeta \downarrow t} \frac{E(\phi(X_\zeta, \zeta) | X_t = x) - \phi(x, t)}{\zeta - t} \\ &= \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \mu(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} \sigma^2(x).\end{aligned}\tag{8.3}$$

şeklinde tanımlanmıştır [41]. (8.2) denkleminde

$$\mathcal{L}\phi(X_t, t) = \frac{1}{\Delta t} E_t[\phi(X_{t+\Delta t}, t + \Delta t) - \phi(X_t, t)] - \frac{1}{2} \mathcal{L}^2 \phi(X_t, t) \Delta t - \dots\tag{8.4}$$

elde edilir. (8.4)'in sağ tarafındaki ilk terimin alınıp diğer terimlerin hata olarak ihmal edilmesi ile $\mathcal{L}\phi$ için birinci mertebeden yaklaşım elde edilir ve buradan da

$$\mathcal{L}\phi(X_t, t) = \frac{1}{\Delta t} E_t[\phi(X_{t+\Delta t}, t + \Delta t) - \phi(X_t, t)] + \mathcal{O}(\Delta t)\tag{8.5}$$

yazılır.

Özel bir $\rho(x, t)$ fonksiyonuna yaklaşmak istenirse , sadece $\mathcal{L}\phi(X_t, t) = \rho(x, t)$ eşitliğini sağlayan ϕ fonksiyonunu belirtmek gerekir. Burada $\mu(X_t)$ katsayısını belirlemek için $\phi_1(x, t) \equiv x$ ve $\sigma(X_t)$ katsayısını belirlemek için $\phi_2(x, t) \equiv (x - X_t)^2$ kabul edilir [35]. (8.3) eşitliğinden

$$\mathcal{L}\phi_1(X_t, t) = \mu(X_t)\tag{8.6}$$

$$\mathcal{L}\phi_2(X_t, t) = \sigma^2(X_t)\tag{8.7}$$

eşitlikleri ve dolayısıyla

$$\mu(X_t) = \frac{1}{\Delta t} E_t[X_{t+\Delta t} - X_t] + \mathcal{O}(\Delta t)\tag{8.8}$$

$$\sigma^2(X_t) = \frac{1}{\Delta t} E_t[(X_{t+\Delta t} - X_t)^2] + \mathcal{O}(\Delta t)\tag{8.9}$$

elde edilir.

Eğer

$$dX(t) = \mu(X(t); \theta)dt + \sigma(X(t); \theta)dW(t) \quad (8.10)$$

denklemindeki θ parametre vektörü nonparametrik tahmin metodu ile hesaplanmak istenirse, X_t 'nin $i = 0, 1, \dots, N$ için $\Delta t = \frac{T}{N}$ olmak üzere $t_i = i\Delta t$ düzgün dağılmış zaman aralıklarındaki x_0, x_1, \dots, x_N gözlem datalarından yola çıkılarak (8.8) ve (8.9) ifadelerinden θ

$$\sum_{i=0}^{N-1} \mu(t_i, x_i, \theta) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) \quad (8.11)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sigma^2(t_i, x_i, \theta) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i)^2 \quad (8.12)$$

denklemleri ile hesaplanır.

8.3 Maximum Likelihood Estimation Method

(8.10) ile verilen

$$dX(t) = \mu(X(t); \theta)dt + \sigma(X(t); \theta)dW(t)$$

stokastik diferansiyel denklemi ele alınsın. $j = 0, 1, 2, \dots, N$ için x_j değerleri bilinmek üzere, başlangıç durumunda yoğunluk (density) $g_0(x_0|\theta)$ ve (t_{j-1}, x_{j-1}) 'den başlayan (t_j, x_j) 'nin geçiş olasılık yoğunluk fonksiyonu $g(t_j, x_j|t_{j-1}, x_{j-1}; \theta)$ olsun. [26]'den θ 'nın maksimum likelihood tahmincisi

$$\mathcal{D}(\theta) = g_0(x_0|\theta) \prod_{j=1}^N g(t_j, x_j|t_{j-1}, x_{j-1}; \theta) \quad (8.13)$$

ortak dağılım fonksiyonunun maksimize edilmesi ile

$$\mathcal{D}(\theta) = g_0(x_0|\theta) \prod_{j=1}^N g(t_j, x_j | t_{j-1}, x_{j-1}; \theta) \quad (8.14)$$

olup, $L(\theta) = -\ln(\mathcal{D}(\theta))$ dönüşümü kullanılarak (8.14) ifadesi yeniden düzenlenirse

$$L(\theta) = -\ln(g_0(x_0|\theta)) - \sum_{j=1}^N \ln(g(t_j, x_j | t_{j-1}, x_{j-1}; \theta)) \quad (8.15)$$

elde edilir.

Burada hedef, $L(\theta)$ fonksiyonunu minimum yapan, minimum θ değerini bulmaktır. θ 'nın bu değeri $\bar{\theta}$ ile gösterilsin. Euler Maruyama yaklaşım şemasından

$$x_{t_j} \approx x_{t_{j-1}} + \mu(t_{j-1}, x_{t_{j-1}}; \theta)\Delta t + g(t_{j-1}, x_{t_{j-1}}; \theta)\sqrt{\Delta t}\xi_j \quad (8.16)$$

yazılabilir, burada $\xi_j \sim N(0, 1)$ ve geçiş olasılık yoğunluğu da

$$\begin{aligned} \gamma_j &= x_{t_{j-1}} + \mu(t_{j-1}, x_{t_{j-1}}; \theta)\Delta t \\ \delta_j &= g(t_{j-1}, x_{t_{j-1}}; \theta)\sqrt{\Delta t}. \end{aligned}$$

olmak üzere

$$g(t_j, x_j | t_{j-1}, x_{j-1}; \theta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_j^2}} \exp\left[-\frac{(x_j - \gamma_j)^2}{2\delta_j^2}\right] \quad (8.17)$$

şeklinde tanımlanır. θ 'nın keyfi değeri için [26] deki gibi olasılık fonksiyonuna yaklaşmak istenirse (8.10) nümerik olarak çözülebilir. Bu durum M defa tekrarlanırsa \hat{x}_i için tahmin değerleri elde edilir. Buradan yola çıkarak, κ

$$\kappa(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\vartheta^2}{2}\right]$$

şeklinde tanımlı non-negative kernel fonksiyonu ve

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{M-1} \left(\sum_{i=1}^M \hat{x}_i^2 - \frac{1}{M} \left(\sum_{i=1}^M \hat{x}_i \right)^2 \right).$$

olmak üzere h adım uzunluğu

$$h = 0.9\varepsilon M^{-1/5}.$$

olmak üzere geçiş yoğunluğu $g(t_j, x_j | t_{j-1}, x_{j-1}; \theta)$,

$$g^{(M)}(t_j, x_j | t_{j-1}, x_{j-1}; \theta) = \frac{1}{Mh} \sum_{i=1}^M \kappa \left[\frac{x_j - \hat{x}_i}{h} \right] \quad (8.18)$$

formülü ile tahmin edilebilir.

8.4 Deneysel Data Analizi

Bu bölümde YHOO hisse senedi fiyat verileri ele alınarak bir uygulama yapılmıştır. Sayfa 93'daki Şekil 8.1 ile 2005 ile 2015 yılları arasındaki Borsa data setinin aylık görüntüsü verilmiştir. Bu veriler, Black Scholes modeli [40] olarak adlandırılan stokastik diferansiyel denklemin katsayılarını belirlemek için kullanılacaktır.

$X(t)$, t anındaki borsa fiyatı (stock price) ve $\theta = [\theta_1, \theta_2]^T$ olmak üzere

$$dX(t) = \theta_1 X(t) dt + \theta_2 X(t) dW(t) \quad (8.19)$$

$$X(0) = 23.49$$

başlangıç değeri ile stokastik diferansiyel denklem verilsin. Hedefimiz, θ_1 ve θ_2 parametrelerini nonparametrik parametre tahmin metodu ve MLE kullanarak elde etmektir.

İlk olarak θ_1 ve θ_2 değerleri MLE metodu kullanarak elde edilecektir. MLE prosedürleri uygulanırsa yaklaşık optimal değerler $\hat{\theta}_1 = 0.0107$ ve $\hat{\theta}_2 = 0.1000$ olarak elde edilir. 132 aylık YHOO hisse değerleri kullanılarak elde edilen bu katsayı değerleri (8.19)

denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}dX(t) &= 0.0107X(t)dt + 0.1000X(t)dW(t) \\ X(0) &= 23.49.\end{aligned}\tag{8.20}$$

stokastik diferansiyel denklemi elde edilir.

θ_1 ve θ_2 değerlerine nonparametrik tahmin metodu prosedürleri $N = 131$ ve $\Delta t = 1$ için uygulanırsa da yaklaşık optimal değerler $\tilde{\theta}_1 = 0.0084$ ve $\tilde{\theta}_2 = 0.0952$ olarak elde edilir. Bu değerlerin (8.19) denkleminde yerine yazılmasıyla da

$$\begin{aligned}dX(t) &= 0.0084X(t)dt + 0.0952X(t)dW(t) \\ X(0) &= 23.49.\end{aligned}\tag{8.21}$$

stokastik diferansiyel denklemi elde edilir.

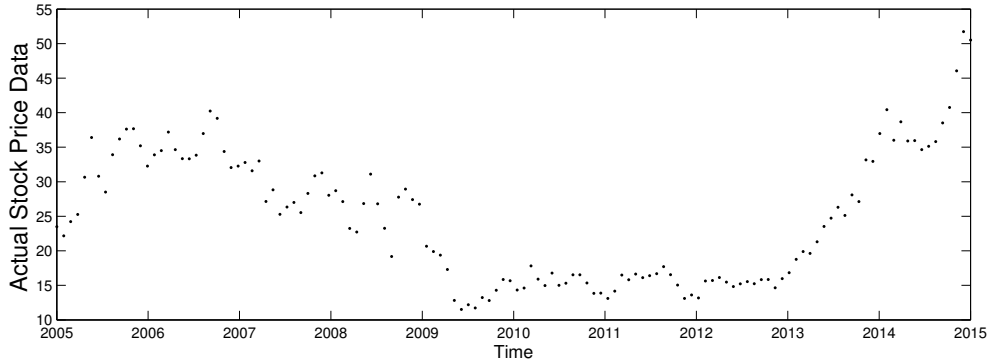
Gözlem değerlerinin ortalaması $\mu = 24.8445$ olup 95% güvenle, 5% hata payı ile (23.2291, 26.4600) arasında değişmektedir. Ayrıca 95% güvenle, MLE metodu ile hesaplanan katsayıların yerine yazılmasıyla elde edilen (8.20) diferansiyel denkleminin EM metodu kullanılarak çözümünden elde edilen datanın (22.7030, 26.2504) güven aralığı ile ortalaması $\hat{\mu} = 24.4767$, nonparametrik parametre tahmin metodu ile hesaplanan katsayıların yerine yazılmasıyla elde edilen (8.21) diferansiyel denkleminin EM metodu kullanılarak çözümünden elde edilen datanın (20.5504, 23.6980) güven aralığı ile ortalaması $\tilde{\mu} = 22.1242$ 'dir.

Sayfa 93'deki Şekil 8.2, (8.20) stokastik diferansiyel denkleminin EM metodu kullanılarak çözümü ve YHOO hissesinin 2005-2015 yılları arasındaki aylık datasını aynı grafik üzerinde göstermektedir. "Actual", YHOO hissesinin gerçek datasını gösterip grafik üzerinde kırmızı yıldızlı çizgiler ile çizilmiştir. "Forecast" ise (8.20) denkleminin EM ile elde edilen nümerik çözümünün datasını gösterip grafik üzerinde mavi düz çizgilerle çizilmiştir.

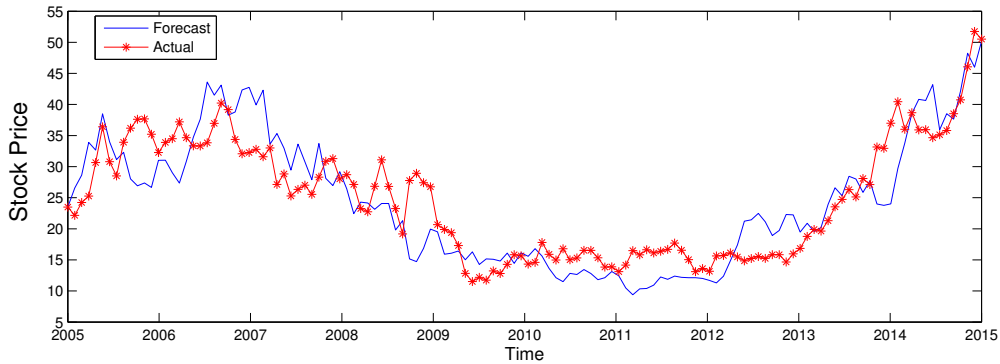
94'deki Şekil 8.3 de ise (8.21) stokastik diferansiyel denkleminin EM metodu kullanılarak çözümü ve YHOO hissesinin 2005-2015 yılları arasındaki aylık datasını aynı

grafik üzerinde göstermektedir. ”*Actual*”, YHOO hissesinin gerçek datasını gösterip grafik üzerinde kırmızı çizgiler ile, ”*Forecast*” ise (8.20) denkleminin EM ile elde edilen nümerik çözümünün datasını gösterip grafik üzerinde mavi çizgilerle çizilmiştir.

Tüm grafikler, Black-Scholes modelinin data ile mantıklı bir uyum sağladığını göstermektedir.



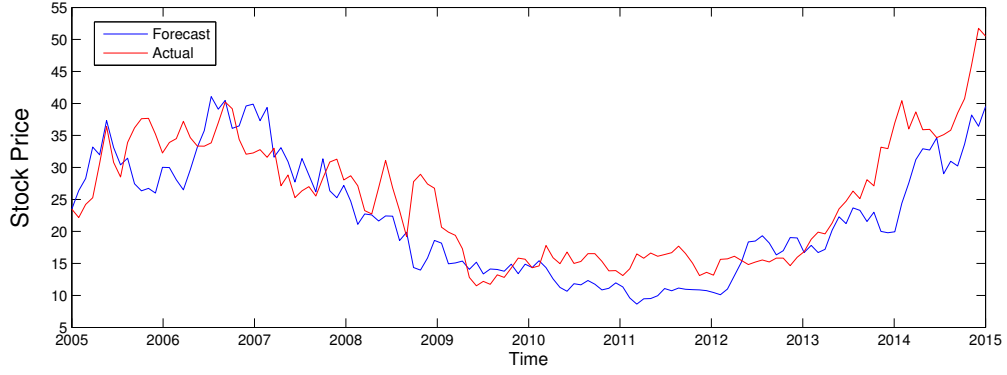
Şekil 8.1: 2005 Ocak-2015 Ocak dönemi YHOO hisse senedinin aylık olarak ölçülmüş gerçek verileri



Şekil 8.2: Maximum likelihood tahmin yöntemi ile elde edilen veriler ve 2005 Ocak-2015 Ocak dönemi YHOO hisse senedinin gerçek verileri

8.5 Sonuç ve Tartışmalar

Bu bölümde, bilinen gözlem verilerinden yola çıkılarak, Black Scholes modelinin sırasıyla sürüklenme katsayısı ve difüzyon katsayısındaki θ_1 ve θ_2 değerleri tahmin edildi. 01.01.2005 ve 01.01.2015 tarihleri arasında aylık YHOO hisse senedi fiyat verileri kullanılarak, maksimum likelihood tahmin parametreleri, geniş kapsamlı θ_2 ve parametrik



Şekil 8.3: Nonparametrik tahmin yöntemi ile elde edilen veriler ve 2005 Ocak-2015 Ocak dönemi YHOO hisse senedinin gerçek verileri

olmayan tahmin parametreleri $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2$ elde edildi. Bu elde edilen parametreler Black-Scholes modelinde yerine yazılarak sabit katsayılı lineer stokastik diferansiyel denklem oluşturuldu. Daha sonra, Euler Maruyama metodu bu stokastik diferansiyel denkleme 01.01.2005 tarihli hisse senedi fiyatı başlangıç noktası kabul edilerek uygulandı. Simüle edilmiş çözüm, her bir tahmin metodu için ayrı ayrı elde edilmiştir. Daha sonra, gerçek veriler, her tahmin yöntemi için sayısal çözümlerle karşılaştırılmıştır. Elde edilen bulgulara göre, maksimum likelihood tahmin yönteminin, gözlem verilerine, nonparametrik tahmin yöntemine göre daha iyi bir yakınlığa sahip olduğu söylenebilir [42].

BÖLÜM 9

UYGULAMA 2

Tezin bu bölümünde insan vücudundaki paratiroid kanseri üzerine bir uygulama yapılmıştır. Gompertz kuralları temel alınarak, tümör büyümesinde sıklıkla kullanılan deterministik Gompertz modele difüzyon katsayısı eklenerek solid tümörler için stokastik bir model tanımlanmıştır. Tümör hücrelerinin evrimi sırasıyla iyileşme eşliğini ve hasta ölümünü (taşıma kapasitesi) temsil eden iki sınır ile sınırlanmış tek boyutlu difüzyon süreci ile tanımlanmaktadır.

Son otuz yıldır toplumda başlıca ölüm nedenlerinden biri olan tümör büyümesine dikkat artmıştır. Çoğu çalışma matematiksel olarak bir veya daha fazla diferansiyel denklemden oluşan popülasyon büyüme modellerinden ileri gelmektedir. Bu tür modellerin sayısız biyolojik olayın gelişimini tahmin etmeye uygun olduğu kanıtlanmıştır.

Paratiroid tümörlerin çoğunda, özellikle çok kanallı biyokimyasal taramaya bağlı olarak asemptomatik hastalarda bulunanlarda, hem uzun süreli klinik gözlemler [43] hem de hücre kinetik veriler [44] büyüme hızının kademeli olarak yavaşladığını ve tümör boyutunun asimptotik bir değere yaklaştığını belirtir. Hücre bölünme hızı, meningiomlardan 10-20 kat daha düşüktür [45], dolayısıyla çok düşük hücre döngüsü genel olarak benign (iyi huylu) tümörlerin spesifik olmayan bir özelliğinden ziyade paratiroid tümörlerinin spesifik bir özelliği olabilir. Paratiroid tümörler, diğer benign endokrin tümörler gibi, monoklonal olarak görünürler ve tek bir değiştirilmiş hücreden oluştuğu düşünülür [1].

Sonuç olarak, çoğu hastada, paratiroid tümörün ömrü boyunca büyümesi sigmoid eğrisi ile uyumlu olacaktır. Böyle bir eğri matematiksel olarak çeşitli şekillerde gösterilebilir. Malign tümörlerde büyüme geriliğini modellemek için onkolojide en sık kullanılan model 19. yüzyıl İngiliz aktüer bilim adamı Benjamin Gompertz [46], tarafından geliştirilen Gompertz denklemdir. Denklem, başlangıç spesifik üssel büyüme oranı ve ilk büyüme hızındaki üstel hız düşüş oranı olmak üzere iki parametre ile karakterize edilir. Lojistik fonksiyonun aksine, Gompertz fonksiyonu, asimtotik değerin daima 0.37'si olan enfleksiyon üzerinde asimetriktir [47].

9.1 Deterministik Gompertz Model

Önerilen modeller arasında, tümör büyümesinin kanıtları ile uyumlu olduğundan Gompertz büyümesine dayanan modeller daha sık görülür. Bu model, yerdeğişim ve etkileşim olmadan bir ya da daha fazla benzer türün bireylerinin bir grubunun popülasyon büyümesini S şeklinde $X = X(t)$ fonksiyonu ile modeller, öyle ki bu fonksiyon,

$$\frac{dX}{dt} = \alpha X(t) - \beta X(t) \ln X(t) \quad (9.1)$$

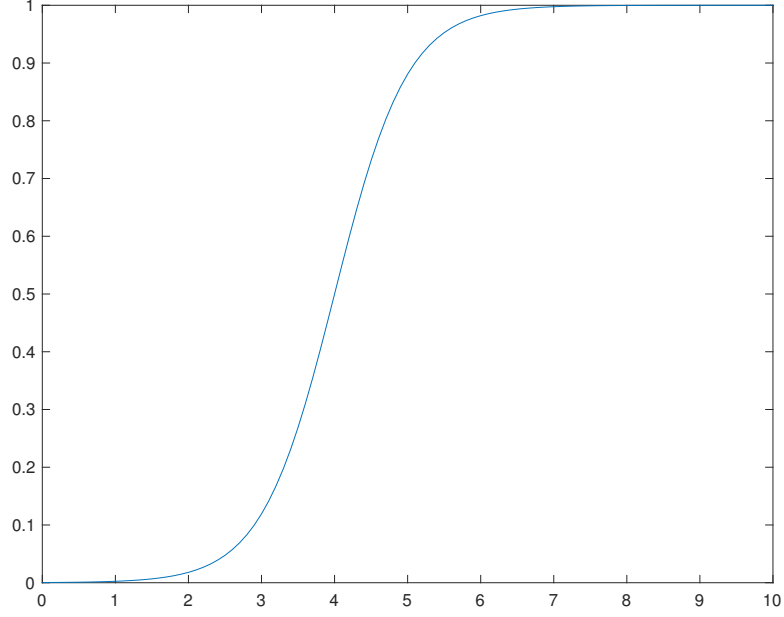
$$X(0) = X_0 \quad (9.2)$$

diferansiyel denkleminin bir çözümüdür [48].

Tümör büyümesi kapsamında, $X(t)$, t anındaki kanser hücrelerinin yoğunluğunu, $X(0)$ hastalığın teşhis edildiği andaki başlangıç hücre yoğunluğunu temsil eder. Özel sürekli yaklaşımlar altında $X(t)$ 'nin sürekli ve diferansiyellenebilir olduğu kabul edilmektedir [49],[50]. t^{-1} 'de ölçülen α ve β parametreleri sırasıyla, tümördeki büyüme ve bozulma (decay) parametreleri olmak üzere [49] farklı tümör türlerinin ölçümünü (evaluation) karakterize ederler. Denklem (9.1) ve (9.2) 'den S biçimli,

$$X(t) = \exp \left\{ \alpha/\beta + \{ \ln(X_0 - \alpha/\beta) \} \exp(-\beta t) \right\} \quad (9.3)$$

fonksiyonu elde elde edilir (bkz Şekil 9.1). Denklem (9.3)'te aşikar olmayan (non-



Şekil 9.1: (9.3) fonksiyonu ile üretilen sigmoidal eğri

trivial) denge noktası $X_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = \exp(\alpha/\beta)$, bir organizmanın tolere edebileceği en büyük tümör yoğunluğunu (taşıma kapasitesi) temsil eder [48]. Büyüme hızının maksimum olduğu yerde bir $X_i = \exp(\alpha/\beta - 1)$ dönüm noktası (inflection point) vardır. Böyle bir noktanın varlığı, büyümenin yavaşlamasına, dış faktörlerden kaynaklanan veya içsel büyüme kontrol mekanizmalarının (kendi kendini düzenleyici etki) neden olduğu tüm biyolojik sistemler tarafından paylaşılır. Gompertz yasası köken (orişin) etrafında bir üssel (exponential) eğilim sergiler. Bu özellik gözlemlenen tümörler ile uyumludur ve küçük tümörlerin büyüme hızı için bağışıklık sisteminin etkili olmadığını gösterir [51]. Ancak az ya da çok yoğun çevresel dalgalanmalara bağlı olarak, klinik veriler ile teorik tahminler arasında sıklıkla tutarsızlıkların olduğu vurgulanmalıdır.

Bu dalgalanmaları göz ardı etmek bazı durumlarda yetersiz terapi öneren yanlış tahminlere yol açacaktır. Bu tür dalgalanmaları göz önünde bulundurmak için rassal çevresel büyüme kavramları formüle edilmiştir [52]. Bu büyüme denklemindeki içsel doğurganlığın ortalama popülasyon verimliliğini temsil eden normal delta korelasyon süreci ile ikame edilmesi ile gerçekleştirilir. Böylelikle büyüme süreci bir stokastik süreç ile ta-

nımlanabilir.

Bu tezde solid tümörü modellemek için Gompertz büyüme kurallarına dayanan stokastik süreç kullanılacaktır. Detaylı bilgilere 1980'lerde yapılmış [53] [54] vb. çalışmalardan ulaşılabilir. Son zamanlarda ise Gompertz difüzyon modellerinin çıkarımları analiz edilmektedir [55].

19. yüzyıl aktüeryal bilim adamlarından Gompertz [46] büyüme gösterimi olarak kullanılan matematiksel ifadeyi formüle etmiştir. Esasında başlangıçta exponansiyel büyüme olup, zaman geçtikçe süreç sönümlü (damped) hale gelir ve sonrasında durur. Laird [47], Gompertz büyümesinin bütün biyolojik büyümeleri temsil edebileceği hususunda kanıtlar yayınlamıştır. Başka bir çok büyüme denklemi olmasına rağmen tümör büyümesinde en iyi matematiksel tanımlayıcı olarak dikkate alınır [56].

Deterministik Gompertz model (DGM), popülasyon dinamiğini tanımlamada yararlı, kullanışlı bir modeldir. Özellikle insan ve hayvanlardaki tümör büyümesini tanımlamak için oldukça etkili bir matematiksel modeldir [57],[58],[59]. Benjamin Gompertz (1825) tarafından popülasyon dinamiklerini analiz etmek ve yaşam koşullarını belirlemek için tanımlanmıştır. Daha sonra DGM, doğada tümör büyümesi ve embriyonik büyüme de dahil olmak üzere çeşitli büyüme olayı için uygun bulunmuştur. Bilindiği kadarıyla Gompertz modeline, biyolojik ve tıbbi araştırmalarda geniş kapsamlı olarak kullanılmasına rağmen, teorik biyolojide az sayıda girişimde bulunulmuştur [60, 61]. Özellikle deneysel onkolojide Gompertz model in vivo (canlı içi) tümör büyümesini tanımlamak için yaygın olarak kullanılmaktadır.

Şekil 9.1, (9.3) fonksiyonunun grafiğini göstermektedir. Modeldeki kilit özellik; eğri bükülme noktasına (inflection point) kadar artan bir oranda büyür, daha sonra büyüme oranı sıfıra düşer ve tümör hacmi durağan bir noktaya (plateau) ulaşır. Bu tümör büyüme modeli literatürde deneysel hayvanlar üzerinde oldukça kullanılmıştır [62].

9.2 Randomize İçsel Büyüme Hızı ile Gompertz Model

Deterministik bir modelin davranışını etkileyen ya da kurallayan rassallığı hesaba katmak için çeşitli olasılıklar vardır. Bu tezde, yavaşlama faktörü β değişmezken, çevre koşullarının içsel büyüme hızı (mitoz hız) α 'nın dalgalanmaya neden olduğu kabul edilmiştir.

Gompertz modelin stokastik bir versiyonunu elde etmek için, içsel büyümedeki değişiklik zamana göre

$$\varphi(t) = \alpha + \sigma\zeta(t) \quad (9.4)$$

varsayımı ile tanımlansın. Burada α , $\varphi(t)$ 'nin ortalama değeri, $\sigma > 0$ difüzyon katsayısı ve $\zeta(t)$ Gaussian beyaz gürültü (white noise) sürecidir. Bu varsayımdan yola çıkılarak denklem (9.1) ile verilen SDD

$$\begin{aligned} dX(t) &= \{\alpha X(t) - \beta X(t) \ln X(t)\} dt + \sigma X(t) dW(t) \\ X(0) &= X_0 \end{aligned} \quad (9.5)$$

şeklinde tanımlanacak olan stokastik Gompertz modele (SGM) dönüşür.

$W = \{w(t) : t \in [0, T]\}$ süreci, standart Wiener sürecidir ve diferansiyeli Ito anlamında anlaşılmaktadır [63]. Denklem (9.5) ile verilen nonlinear SGM'nin çözülmesi ile

$$X(t) = \exp \left[\frac{\alpha - \sigma^2/2}{\beta} + \left\{ \ln(X_0) - \frac{\alpha - \sigma^2/2}{\beta} \right\} e^{-\beta t} + \sigma \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dW(s) \right] \quad (9.6)$$

tek çözüm (unique solution) elde edilir. Bu çözüm homojen Markov sürecidir [62].

9.3 Stokastik Gompertzian Model için MLE ve Özellikleri

Bu bölümde büyümedeki azalma faktörü β ve difüzyon katsayısı σ bilinen sabitler olmak üzere GSM'nin drift katsayısındaki bilinmeyen α parametresinin gözlemlenen

$X = \{x(t), t \in [0, T]\}$ yörüngesinden hesaplanabilme olasılığı tartışılacaktır. İyi bilindiği gibi popüler ve teorik olarak önemli bir tahmin edici, "maximum likelihood"dur. Sonlu boyutlu bir durumda, gözlemlenen verilerin yoğunluğunun maksimize edilmesine dayalı bir tahmin yöntemidir. Ancak, burada gözlemlenen veriler genellikle sonsuz boyutlu uzaylara (fonksiyon uzayı) aittir. Dolayısıyla yoğunluğun maksimize edilmesi, genellikle Wiener ölçümü olarak alınan, standart bir olasılık ölçümüne göre verilerin olasılık ölçümlerinin Radon Nikodym türevi olarak tanımlanır. Stokastik Gompertz diferansiyel denklemi için yoğunluk,

$$\mathcal{L}(\alpha, X) = \exp \left[\frac{1}{\sigma^2} \left\{ \int_0^T \frac{\alpha - \beta \ln(x(t))}{x(t)} dx(t) - \frac{1}{2} \int_0^T (\alpha - \beta \ln(x(t)))^2 dt \right\} \right] \quad (9.7)$$

ile ifade edilir. İlgili teorik çalışmalar ve teknik detaylara Ferrante ve ark. [62]'dan ulaşılabilir. Genellikle $\hat{\alpha}$ değerini maksimize eden olabilirlik (likelihood) için kapalı bir form mevcut değildir. Ancak böyle durumlarda, $L(\alpha, X)$, α da kuadratik olduğundan α için maksimum likelihood tahmin edicisi,

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{T} \left\{ \int_0^T \frac{1}{x(t)} dx(t) + \beta \int_0^T \ln(x(t)) dt \right\} \quad (9.8)$$

şeklinde tanımlanır.

Gözlemlenen sample path $x(t)$ 'lere dayanarak (örneğin belirli bir deneydeki $x(t)$ tümör hacmi) denklem (9.8)'de her iki integrali de hesaplamak mümkündür. $\hat{\alpha}$ tahmincisinin iyi ve güvenilirliğini gösteren çeşitli özellikler kanıtlanabilir. Özellikle, MLE $\hat{\alpha}$ 'nın ortalama değeri α ve varyansı σ^2/T olan normal dağılmış rassal değişken olduğu Ferrante ve ark. [64] tarafından gösterilmiştir. Ayrıca, $\hat{\alpha}$ 'nın varyansı yansız tahmin ediciler (unbiased estimator) sınıfının en küçüğüdür ve T gözlem süresi arttıkça, α parametre değerine yaklaşır. Bir diğer ifade ile, MLE $\hat{\alpha}$ tarafsızdır (unbiased), tutarlıdır (consistent), etkilidir (efficient) ve normal dağılıma sahiptir. Tahmin edici $\hat{\alpha}$ ve özellikleri hem deneysel terapötik (tedavi edici) çalışmalarda hem de farklı tedaviler arasındaki klinik problemlerde kullanılır.

9.4 $\hat{\alpha}$ Tahmin Edicisinin Diskret Zaman Yaklaşımları

(9.8) ifadesindeki $\hat{\alpha}$ tahmin edicisi için iyi özellikler oluşturulmuş da olsa, pratikte parametre tahmin sürecinde problemler ortaya çıkmaktadır. Tümör büyümesi, süreklilik yerine $0 = \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \dots < \tau_n = T$ şeklinde diskret zamanlarda ölçülürken $\hat{\alpha}$, $X = \{x(t), t \in [0, T]\}$ sürekli sample path gözlemlerinden hesaplandığından tahmincinin yalnızca bir yaklaşımı gerçek deneylerle değerlendirilebilir. Ito formülü ve trapezoidal kural kullanılarak yaklaşık tahmin edici,

$$\hat{\alpha}_n = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{T} \left\{ \ln(x(T)) + \frac{\beta}{2} \sum_{k=0}^{n-1} [\ln(x(\tau_{k+1})) + \ln(x(\tau_k))] \times (\tau_{k+1} - \tau_k) \right\} \quad (9.9)$$

olarak elde edilir.

Genellikle tümör büyüme çalışmalarında, büyümedeki azalma faktörü β ve difüzyon katsayısı σ değerleri bilinmeyip mevcut verilerden tahmin edilmeleri gerekmektedir. Bu nedenle bir önceki denklemde β parametresinin yerine maximum likelihood tahmin edicisini yazmak gerekir. Tahmin edici (9.7) denkleminin maksimize edilmesi ile

$$\hat{\beta} = \frac{T \int_0^T \frac{\ln(x(t))}{x(t)} dx(t) - \int_0^T \frac{1}{x(t)} dx(t) \int_0^T \ln(x(t)) dx(t)}{\left\{ \int_0^T \ln(x(t)) dx(t) \right\}^2 - \int_0^T \ln^2(x(t)) dx(t)} \quad (9.10)$$

olarak elde edilir. Difüzyon katsayısının tahmini ile ilgili olarak, X stokastik süreci ile ilgili kuadratik varyasyonun iyi bilinen özelliklerine dayalı aşağıdaki formül dikkate alınır:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \{x(t_{i+1}) - x(t_i)\}^2}{\sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)^2 (t_{i+1} - t_i)} \quad (9.11)$$

9.5 Nümerik Uygulama

Uygulama olarak paratiroid tümörlerindeki gelişme geriliğini modellemek için, Gompertz denklemini benign tümörlere uyguladık.

Tablo 9.1: Tümör büyümesi için Gompertz denklemi

S_t	=	$exp[(\alpha/\beta) + \{ln(S_0) - \alpha/\beta\} exp(-\beta t)]$
$\alpha(y^{-1})$	=	başlangıçtaki içsel büyüme hızı
$\beta(y^{-1})$	=	büyümedeki yavaşlama hızı
$t(y)$	=	tümörün yaşı
$exp(\alpha/\beta)$	=	S_∞

Çalışmamızda hücre sayısının tümörün ağırlığından tahmin edilebildiği varsayılmaktadır. Onkolojide yaygın olarak kullanılan yaklaşıma göre 1g ağırlığındaki bir tümör $2^{30}(= 1.074 \times 10^9)$ hücre içerir [65], bu, paratiroid tümörleri için tümör DNA içeriği ile karşılaştırma yoluyla doğrulanmıştır [44].

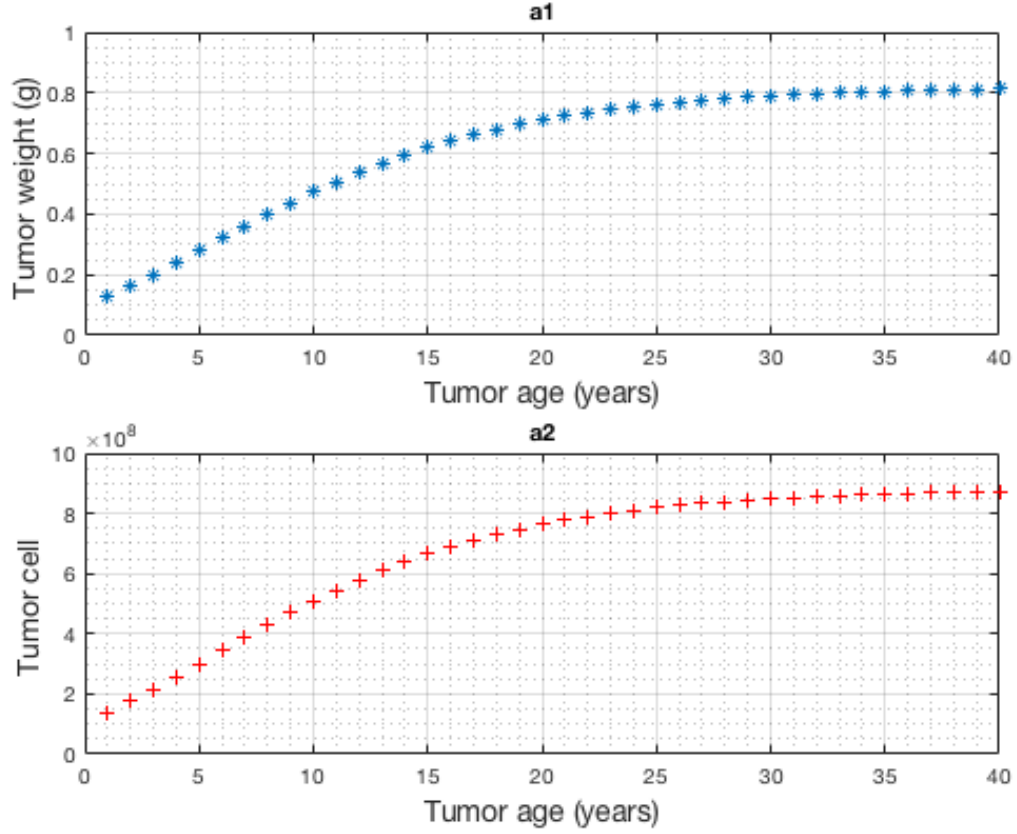
Tablo 9.2: İnsanlardaki paratiroid tümörü için Gompertz büyümesi

	PT tümör ^a n=41	PT tümör ^b	PT tümör ^c
α (yıl ⁻¹)			
Geometrik ortalama (SS)	2.76(1.59)	3.94(1.57)	6.46(1.55)
Hesaplanan aralık	1.1 – 7.0	1.6 – 9.7	2.68 – 15.6
Gerçek aralık	1.18 – 11.78	1.74 – 16.3	2.99 – 25.8
β (yıl ⁻¹)			
Geometrik ortalama (SS)	0.134(1.60)	0.191(1.58)	0.314(1.58)
Hesaplanan aralık	0.052 – 0.342	0.077 – 0.477	0.126 – 0.783
Gerçek aralık	0.051 – 0.549	0.077 – 0.762	0.134 – 1.20

Tablo 9.2'deki verilere göre, ^(a) için ortalama tümör yaşı 39.2 yıl olarak, ^(b) için ortalama tümör yaşı 29.4 yıl olarak, ^(c) için ortalama tümör yaşı 19.6 yıl olarak kabul edildi [1].

Şekil 9.2, Şekil 9.3 ve Şekil 9.4 sırasıyla Tablo 9.2'de ^(a), ^(b) ve ^(c) ile verilen α ve β değerlerinin her biri için deterministik Gompertz modeli ile elde edilen, zamana göre tümördeki büyümeleri göstermektedir. Buradaki hesaplamalarda başlangıç tümör yoğunluğu $S_0 = 1.074 \times 10^8$ olarak alınmıştır, bu da yaklaşık olarak 0.1g tümör kitlesini temsil eder [48].

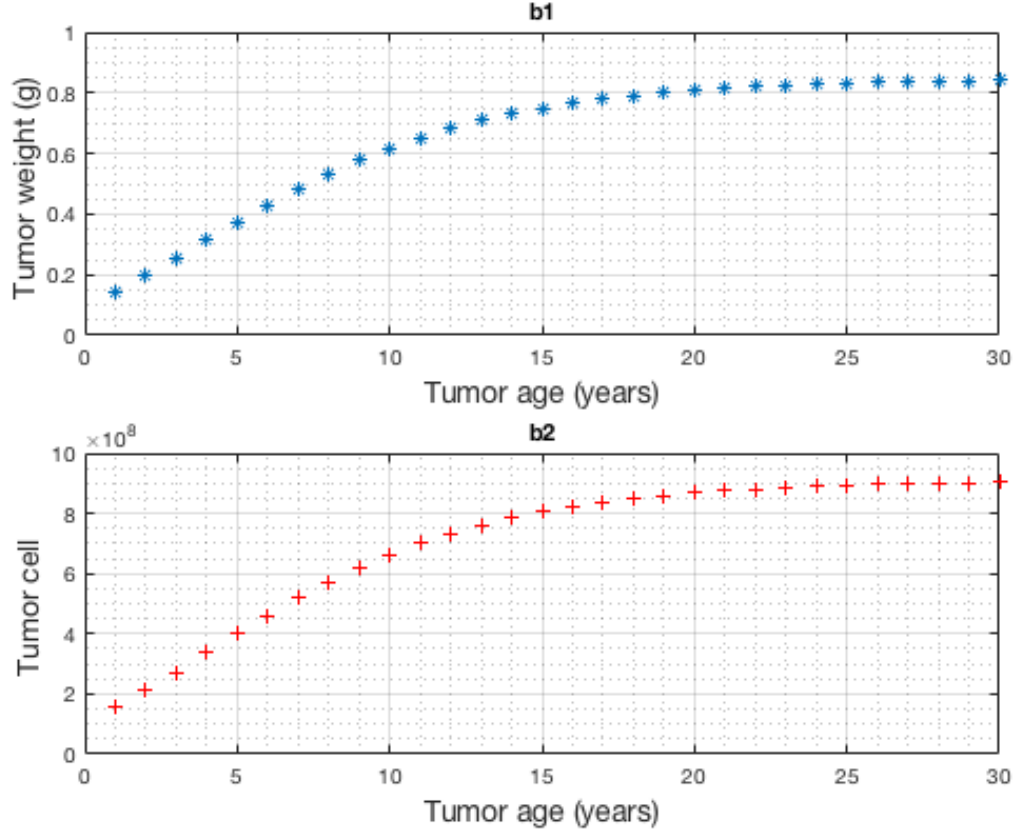
Şekillerin üçünde de hem tümör hücre sayısına hem de tümör ağırlığına göre grafikler çizilmiştir. İlk grafiklerdeki mavi yıldızlar tümör ağırlığının zamana göre değişimini,



Şekil 9.2: $\alpha = 2.76 \text{ yıl}^{-1}$ ve $\beta = 0.134 \text{ yıl}^{-1}$ parametrelerine göre Paratiroid kanseri için büyüme eğrisi

ikinci grafiklerdeki kırmızı artılar ise tümör hücre sayısının zamana göre değişimini göstermektedir.

Şekil 9.5 ise, (a) , (b) ve (c) ile verilen her üç durum için tümör ağırlığının zamana göre değişiminin tek grafik üzerinde gösterimidir.



Şekil 9.3: $\alpha = 3.94 \text{ yıl}^{-1}$ ve $\beta = 0.191 \text{ yıl}^{-1}$ parametrelerine göre paratiroid kanseri için büyüme eğrisi

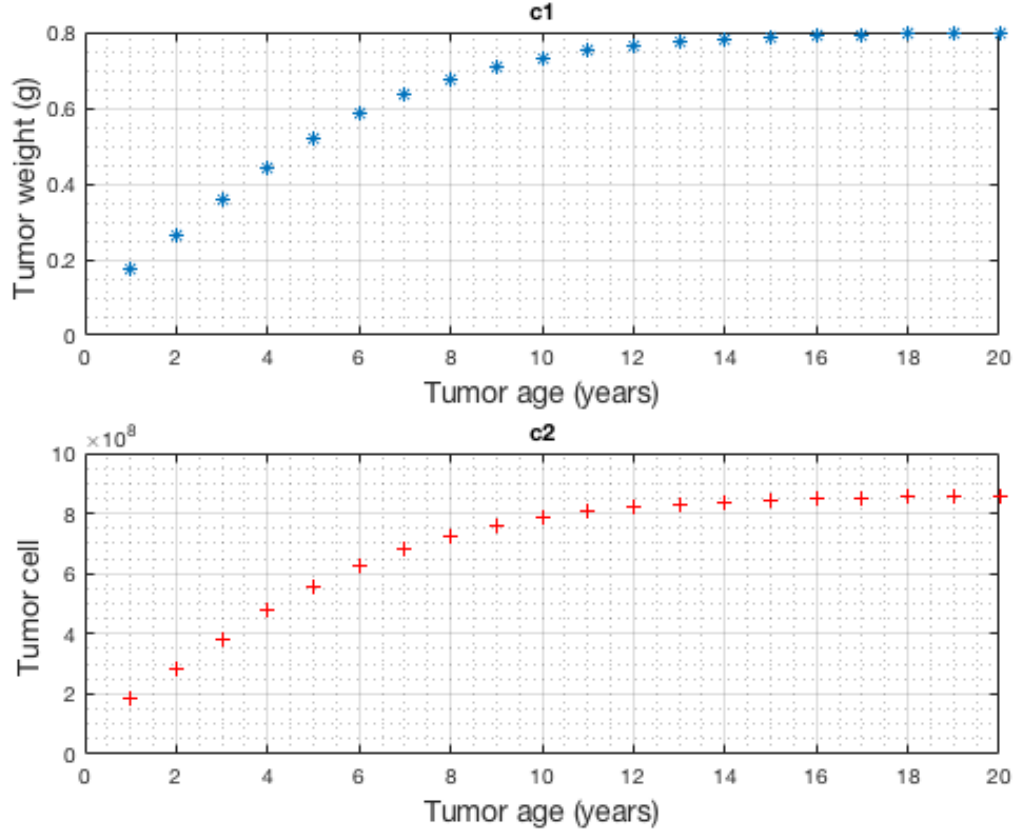
Şimdi de bu datalardan yola çıkarak stokastik Gompertz modeldeki σ difüzyon katsayısını hesaplayalım. (9.11) denkleminin kullanılması ile $\hat{\sigma} = 0.0694$ olarak elde edilir. elde edilen bu değer (9.5) ile verilen stokastik Gompertz modelde yerine yazılmasıyla;

$$dS(t) = \{\alpha S(t) - \beta S(t) \ln S(t)\} dt + 0.0694 S(t) dW(t) \quad (9.12)$$

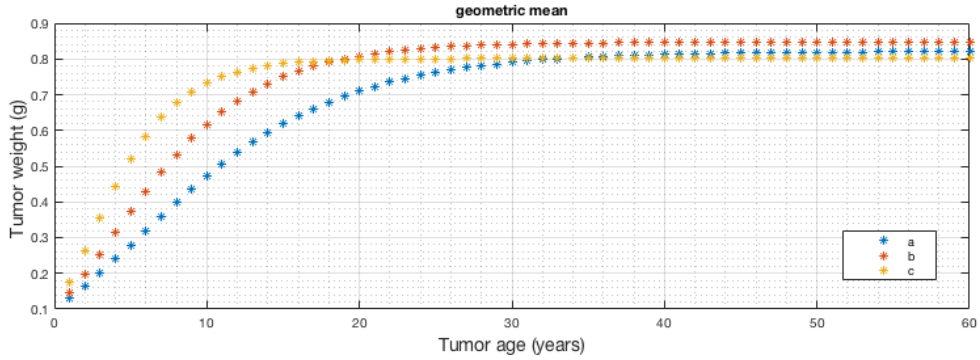
$$S(0) = 1.074 \times 10^8$$

stokastik diferansiyel denklemi ve

$$S(t) = \exp \left[\frac{\alpha - 0.0694^2/2}{\beta} + \left\{ \ln(S_0) - \frac{\alpha - 0.0694^2/2}{\beta} \right\} e^{-\beta t} + 0.0694 \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dW(s) \right] \quad (9.13)$$

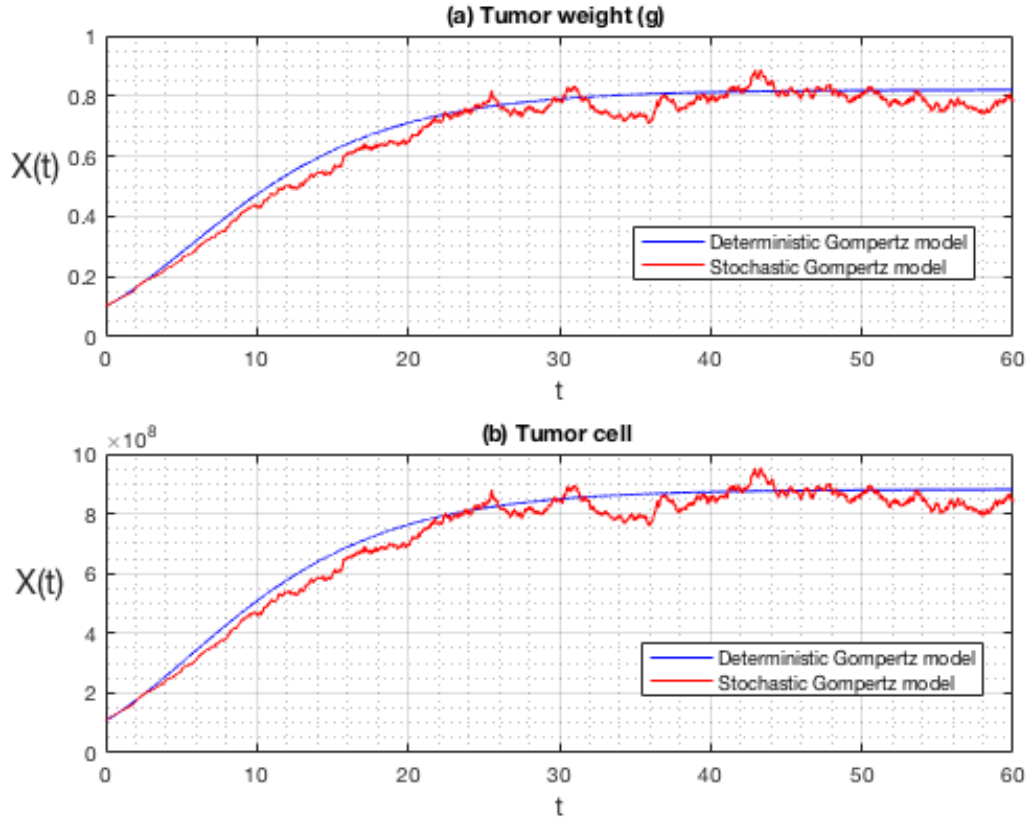


Şekil 9.4: $\alpha = 6.46 \text{ yıl}^{-1}$ ve $\beta = 0.314 \text{ yıl}^{-1}$ parametrelerine göre paratiroid kanseri için büyüme eğrisi



Şekil 9.5: (a), (b) ve (c) hesaplamalarının her biri için elde edilen paratiroid kanseri büyüme eğrisi

şeklinde Markov süreci olan çözümü elde edilir. Şekil 9.6 ile deterministik Gompertz model (DGM) ve stokastik Gompertz model (SGM) tek bir grafikte çizdirilmiştir. Mavi sigmoidal eğri DGM'nin kırmızı eğri ise SGM'nin datasını temsil etmektedir.

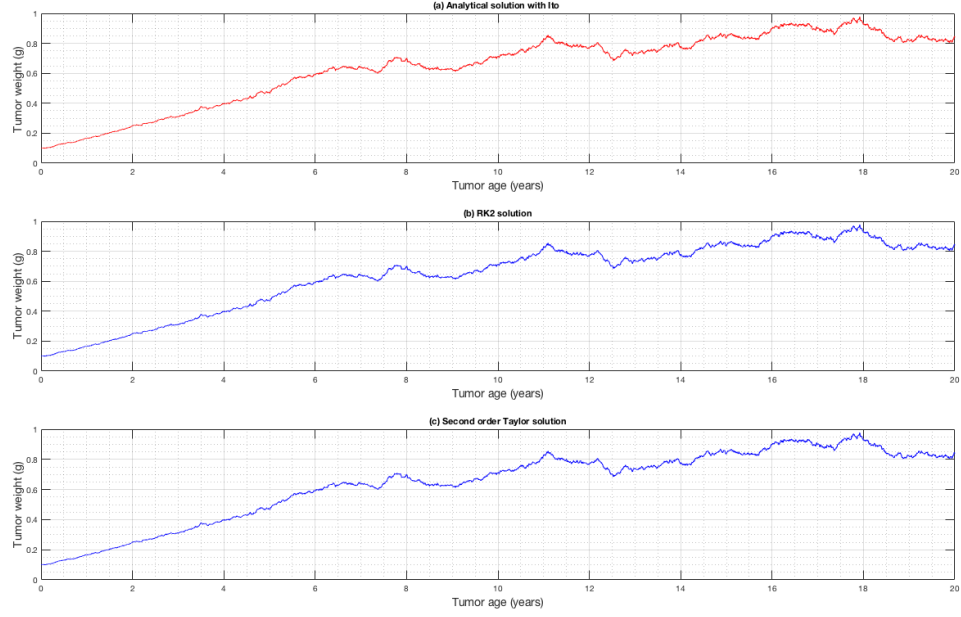


Şekil 9.6: $\alpha = 2.76 \text{ yıl}^{-1}$, $\beta = 0.134 \text{ yıl}^{-1}$ ve $\sigma = 0.0347$ parametrelerine göre paratiroid kanseri için stokastik büyüme eğrisi

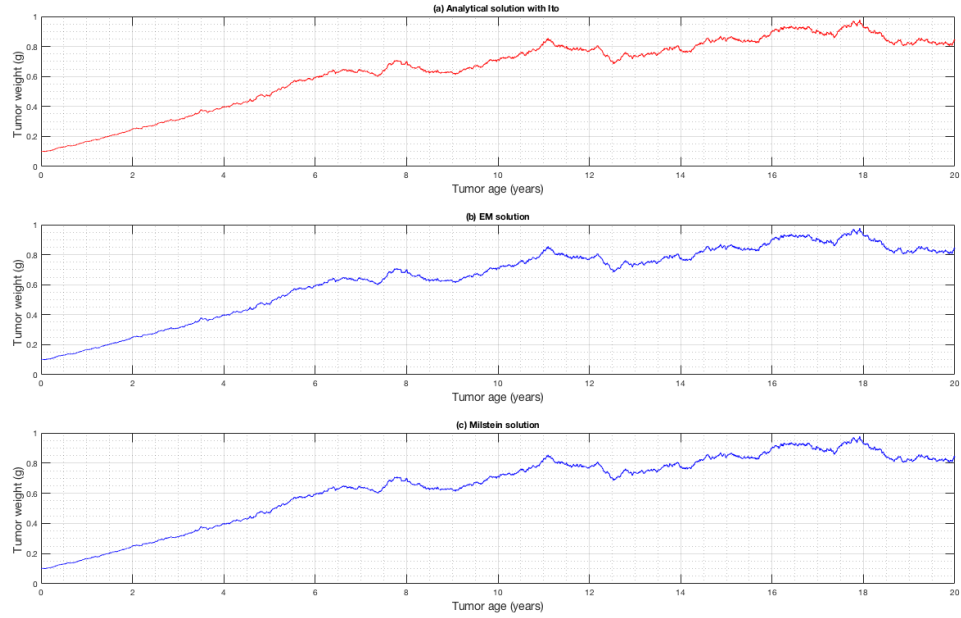
Şimdi de bu diferansiyel denklemi daha önce tanımladığımız nümerik yöntemlerle çözelim ve analitik çözüm ile karşılaştıralım.

Şekil 9.7 ile analitik çözüm, Euler-Maruyama (EM) ve Milstein metodları ile çizilen grafikleri göstermektedir.

Şekil 9.8 ile analitik çözüm, ikinci mertebeden stokastik Runge Kutta (SRK2) ve ikinci mertebeden Taylor metodları ile çizilen grafikleri göstermektedir.



Şekil 9.7: $\alpha = 6.46 \text{ yıl}^{-1}$, $\beta = 0.314 \text{ yıl}^{-1}$ ve $\sigma = 0.0694$ parametrelerine göre paratiroid kanseri için stokastik büyüme eğrisi



Şekil 9.8: $\alpha = 6.46 \text{ yıl}^{-1}$, $\beta = 0.314 \text{ yıl}^{-1}$ ve $\sigma = 0.0694$ parametrelerine göre paratiroid kanseri için stokastik büyüme eğrisi

Tablo 9.3 ile de çözümde kullanılan nümerik yöntemlerin ortalama karesel hatası (MSE)

verilmiştir. Hata değerlerine bakıldığında SRK'nin en az hataya sahip olduğu görülmektedir. Buna nazaran EM metodu için hesaplanan hata en yüksektir.

Tablo 9.3: MSE tablosu

	EM	Milstein	Taylor2	SRK2
(a)	1.6192e-08	1.6186e-08	1.2070e-08	1.2066e-08
(b)	1.6192e-08	1.6186e-08	5.1495e-09	5.1464e-09
(c)	5.3219e-08	5.3146e-08	2.8537e-08	2.8508e-08

SONUÇ VE ÖNERİLER

Stokastik diferansiyel denklem modelleri, özellikle biyoloji, popülasyon dinamiği ve finans alanlarında önemli bir rol oynamaktadır, çünkü genellikle deterministik eşdeğerlerine kıyasla daha gerçekçilik sağlayabilirler.

Bu tezde, stokastik diferansiyel denklemler tanıtılıp, analitik ve nümerik çözüm yöntemlerinin nasıl ede edildiği kavratıldıktan sonra iki önemli uygulama ile stokastik diferansiyel denklemlerin, deterministik eşdeğerlerine göre, gerçeğe daha yakın sonuç verdiği ispatlanmıştır.

İlk olarak Black-Scholes modeli ele alınmıştır ve gerçek veriler ile stokastik model kurulmuştur. Kurulan model analitik ve nümerik olarak çözümlenerek stokastik modelin etkinliği gösterilmiştir. Yapılan işlemler, hata tabloları ve grafikler ile desteklenmiştir.

İkinci bir uygulama olarak, stokastik Gompert model ele alınmıştır. Öncelikle deterministik Gompertz model tanıtılmıştır ve daha sonra deterministik Gompertz kuralları dikkate alınarak stokastik eşdeğeri elde edilmiştir. Stokastik modelin oluşumunda, rassallık hesaplamaları çeşitli şekilde yapılabilir. Bu tez çalışmasında, deterministik modelden farklı olarak tümör büyümesindeki azalma faktörü β sabit kalırken, çevresel koşullardaki değişkenliğin α içsel büyüme hızında (mitoz hızı) dalgalanmaya neden olduğu varsayılarak, önerilen paratiroid tümör popülasyonları için bir matematiksel modelin stokastik uzantıları ele alınmıştır. Modelin katsayıları, gerçek hastalar üzerinden alınan

veriler ile tahmin edilerek stokastik Gompertz model katsayıları ve başlangıç şartı ile oluşturulmuştur. Daha sonra model analitik ve nümerik olarak çözümlenerek deterministik modele göre daha iyi sonuçlar elde edildiği görülmüştür ve dolayısı ile baştaki hipotez doğrulanmıştır.

Tezdeki hesaplamalar, tablolar ve grafiklerin elde edilmesinde kullanılan kodlar MATLAB programında yazılmıştır.

Gelecekteki çalışmalarda ise, çevresel koşullardaki değişkenliğin hem tümör büyümesindeki azalma faktörü β , hem de α içsel büyüme hızında dalgalanmaya neden olduğu durumlarda elde edilen sonuçların gerçek verilerle arasındaki ilişkinin incelenmesi planlanmaktadır.

- [1] Parfitt, A. ve Fyhrie, D. (1997). "Gompertzian growth curves in parathyroid tumours: further evidence for the set-point hypothesis", *Cell proliferation*, 30(8-9):341-349.
- [2] Mil'shtein, G. (1979). "A method of second-order accuracy integration of stochastic differential equations", *Theory of Probability & Its Applications*, 23(2):396-401.
- [3] Kloeden, P.E. ve Platen, E. (1999). *Numerical solution of stochastic differential equations*, *Applications of mathematics*, Springer, Berlin, New York.
- [4] Chang, C.C. (1987). "Numerical solution of stochastic differential equations with constant diffusion coefficients", *Mathematics of computation*, 49(180):523-542.
- [5] Hernandez, D.B. ve Spigler, R. (1992). "A-stability of Runge-Kutta methods for systems with additive noise", *BIT Numerical Mathematics*, 32(4):620-633.
- [6] Hernandez, D.B. ve Spigler, R. (1993). "Convergence and stability of implicit Runge-Kutta methods for systems with multiplicative noise", *BIT Numerical Mathematics*, 33(4):654-669.
- [7] Klauder, J.R. ve Petersen, W.P. (1985). "Numerical integration of multiplicative-noise stochastic differential equations", *SIAM journal on numerical analysis*, 22(6):1153-1166.
- [8] Mauthner, S. (1998). "Step size control in the numerical solution of stochastic differential equations", *Journal of computational and applied mathematics*, 100(1):93-109.
- [9] McShane, E., (1974). *Stochastic Calculus and Models*.
- [10] Rümelin, W. (1982). "Numerical treatment of stochastic differential equations", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 604-613.
- [11] Kloeden, P.E. ve Platen, E. (1992). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations* Springer-Verlag, New York.
- [12] Higham, D.J. (2001). "An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations", *SIAM review*, 43(3):525-546.
- [13] Arnold, L. (1974). *Stochastic differential equations*, New York.

- [14] Allen, E. (2007). Modeling with Itô stochastic differential equations, 22, Springer Science & Business Media.
- [15] Çapar, U. (2013). Ölçü kuramsal olasılık ve stokastik kalkülüse giriş, ODTU.
- [16] Stratonovich, R. (1966). "A new representation for stochastic integrals and equations", SIAM Journal on Control, 4(2):362-371.
- [17] Platen, E. ve Wagner, W. (1982). "On a Taylor formula for a class of Itô processes", Probab. Math. Statist, 3(1):37-51.
- [18] Baylan, E., (2014). Simulating Stochastic Differential Equations Using Ito-Taylor Schemes, Master's Thesis, METU, Ankara. 3(1):37-51.
- [19] Bayram, M., Partal, T. ve Buyukoz, G.O. (2018). "Numerical methods for simulation of stochastic differential equations", Advances in Difference Equations, 2018(1):17.
- [20] Gikhman, I. ve Skorokhod, A. (1972). Stochastic Differential Equations, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag.
- [21] Talay, D., (1984). "Efficient numerical schemes for the approximation of expectations of functionals of the solution of a SDE, and applications, Filtering and control of random processes", Springer, 294-313.
- [22] Tocino, A. ve Ardanuy, R. (2002). "Runge-Kutta methods for numerical solution of stochastic differential equations", Journal of Computational and Applied Mathematics, 138(2):219-241.
- [23] Röckler, A. (2009). "Second order Runge-Kutta methods for Itô stochastic differential equations", SIAM Journal on Numerical Analysis, 47(3):1713-1738.
- [24] Wang, P. (2008). "Three-stage stochastic Runge-Kutta methods for stochastic differential equations", Journal of Computational and Applied Mathematics, 222(2):324-332.
- [25] Leader, J.J. (2004). Numerical Analysis and Scientific Computation, Pearson Addison, Inc., Boston.
- [26] Hurn, A.S., Lindsay, K.A. ve Martin, V.L. (2003). "On the efficacy of simulated maximum likelihood for estimating the parameters of stochastic differential Equations", Journal of Time Series Analysis, 24(1):45-63.
- [27] Chan, K.C., Karolyi, G.A., Longstaff, F.A. ve Sanders, A.B. (1992). "An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate", The journal of finance, 47(3):1209-1227.
- [28] Kloeden, P.E. (2002). "The systematic derivation of higher order numerical schemes for stochastic differential equations", Milan Journal of Mathematics, 70(1):187-207.
- [29] Kloeden, P.E., Platen, E., Schurz, H. ve Sørensen, M. (1996). "On effects of discretization on estimators of drift parameters for diffusion processes", Journal of Applied Probability, 1061-1076.

- [30] Kloeden, P.E., Platen, E. ve Schurz, H. (2012). Numerical solution of SDE through computer experiments, Springer Science & Business Media.
- [31] Kloeden, P.E. ve Platen, E. (1989). "A survey of numerical methods for stochastic differential equations", *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, 3(3):155-178.
- [32] Hasminski, R. (1980). "Stochastic Stability of Differential Equations" (Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980), Google Scholar.
- [33] Arnold, L., Kliemann, W. ve Oeljeklaus, E., (1986). "Lyapunov exponents of linear stochastic systems", *Lyapunov exponents*, Springer, 85-125.
- [34] Saito, Y. ve Mitsui, T. (1996). "Stability analysis of numerical schemes for stochastic differential equations", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33(6):2254-2267.
- [35] Stanton, R. (1997). "A nonparametric model of term structure dynamics and the market price of interest rate risk", *The Journal of Finance*, 52(5):1973-2002.
- [36] Aït-Sahalia, Y. ve Lo, A.W. (1998). "Nonparametric estimation of state-price densities implicit in financial asset prices", *The Journal of Finance*, 53(2):499-547.
- [37] Lo, A.W. (1988). "Maximum likelihood estimation of generalized Itô processes with discretely sampled data", *Econometric Theory*, 4(02):231-247.
- [38] Le Breton, A., (1976). "On continuous and discrete sampling for parameter estimation in diffusion type processes", *Stochastic Systems: Modeling, Identification and Optimization, I*, Springer, 24-144.
- [39] Florens-Zmirou, D. (1989). "Approximate discrete-time schemes for statistics of diffusion processes", *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, 20(4):547-557.
- [40] Black, F. ve Scholes, M. (1973). "The pricing of options and corporate liabilities", *The journal of political economy*, 637-654.
- [41] Hille, E. ve Phillips, R.S. (1957). "Amer. Math. Soc. Coll. Publ.", *Functional analysis and semi-groups*, 31.
- [42] BAYRAM, M., BUYUKOZ, G.O. ve PARTAL, T. "Parameter Estimation in a Black Scholes Model", (Baskıda)
- [43] Rao, D.S., Wilson, R., Kleerekoper, M. ve Parfitt, A. (1988). "Lack of biochemical progression or continuation of accelerated bone loss in mild asymptomatic primary hyperparathyroidism: evidence for biphasic disease course", *The Journal of Clinical Endocrinology & Metabolism*, 67(6):1294-1298.
- [44] Parfitt, A., Willgoss, D., Jacobi, J. ve Lloyd, H. (1991). "Cell kinetics in parathyroid adenomas: evidence for decline in rates of cell birth and tumour growth, assuming clonal origin", *Clinical endocrinology*, 35(2):151-157.
- [45] Parfitt, A., Braunstein, G.D. ve Katz, A. (1993). "Radiation-associated hyperparathyroidism: comparison of adenoma growth rates, inferred from weight and duration of latency, with prevalence of mitosis", *The Journal of Clinical Endocrinology & Metabolism*, 77(5):1318-1322.

- [46] Gompertz, B. (1825). "On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies", *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 115:513-585.
- [47] Laird, A.K. (1969). "Dynamics of growth in tumors and in normal organisms", *National Cancer Institute Monograph*, 30,15.
- [48] Albano, G. ve Giorno, V. (2006). "A stochastic model in tumor growth", *Journal of Theoretical Biology*, 242(2):329-336.
- [49] Kozusko, F. ve Bajzer, Ž. (2003). "Combining Gompertzian growth and cell population dynamics", *Mathematical Biosciences*, 185(2):153-167.
- [50] Sachs, R., Hlatky, L. ve Hahnfeldt, P. (2001). "Simple ODE models of tumor growth and anti-angiogenic or radiation treatment", *Mathematical and Computer Modelling*, 33(12-13):1297-1305.
- [51] de Vladar, H.P. ve González, J.A. (2004). "Dynamic response of cancer under the influence of immunological activity and therapy", *Journal of Theoretical Biology*, 227(3):335-348.
- [52] Ricciardi, L.M. (2013). "Diffusion processes and related topics in biology", 14, Springer Science & Business Media.
- [53] Nobile, A.G. ve Ricciardi, L.M. (1980). "Growth and extinction in random environment", *Applications of information and control systems*. Lainiotis, DG, Tzannes, NS (eds.) pp, 455-465.
- [54] Tan, W.Y. (1991). "Stochastic Models for Carcinogenesis", 116, CRC Press.
- [55] Gutierrez, R., Nafidi, A. ve Sanchez, R.G. (2004). "Inference in the stochastic Gompertz diffusion model with continuous sampling", *Monografias del Seminario Matemático Garcia de Galdeano*, 31:347-353.
- [56] Savageau, M.A. (1980). "Growth equations: a general equation and a survey of special cases", *Mathematical Biosciences*, 48(3-4):267-278.
- [57] Fuchshuber, P., Günther, M., Feaux De Lacroix, W. ve Fischer, R. (1986). "A mathematical model for metastatic growth illustrated by in vivo and in vitro growth of a transplantable mammary carcinoma in mice", *Anticancer research*, 6(4):819-827.
- [58] Bassukas, I.D. (1994). "Comparative Gompertzian analysis of alterations of tumor growth patterns", *Cancer research*, 54(16):4385-4392.
- [59] Rygaard, K. ve Spang-Thomsen, M. (1997). "Quantitation and Gompertzian analysis of tumor growth", *Breast cancer research and treatment*, 46(2-3):303-312.
- [60] Bass, L., Green, H. ve Boxenbaum, H. (1989). "Gompertzian mortality derived from competition between cell-types: Congenital, toxicologic and biometric determinants of longevity", *Journal of theoretical biology*, 140(2):263-278.
- [61] Qi, A.S., Zheng, X., Du, C.Y. ve An, B.S. (1993). "A cellular automaton model of cancerous growth", *Journal of theoretical biology*, 161(1):1-12.

- [62] Ferrante, L., Bompadre, S., Possati, L. ve Leone, L. (2000). "Parameter estimation in a Gompertzian stochastic model for tumor growth", *Biometrics*, 56(4):1076-1081.
- [63] Liptser, R.S. ve Shiryaev, A.N. (2013). *Statistics of random Processes: I. general Theory*, 5, Springer Science & Business Media.
- [64] Possati, L., Campioni, D., Sola, F., Leone, L., Ferrante, L., Trabanelli, C., Ciomei, M., Montesi, M., Rocchetti, R., Talevi, S. (1999). "Antiangiogenic, antitumoural and antimetastatic effects of two distamycin A derivatives with anti-HIV-1 Tat activity in a Kaposi's sarcoma-like murine model", *Clinical and Experimental Metastasis*, 17(7):575-582.
- [65] Tannock, I., (1989), "Principles of cell proliferation: cell kinetics" Ed. 3 DeVita VT, Jr. Hellman S. Rosenberg SA eds.. *Cancer: Principle and Practice of Oncology*: 3-13.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Tuğçem PARTAL

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : tpartal@yildiz.edu.tr

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2012-	YTÜ/Matematik Mühendisliği	Araştırma Görevlisi
2011-2012	RTEU/ Matematik Bölümü	Araştırma Görevlisi
2010-2011	FÜ/Matematik Bölümü	Araştırma Görevlisi
2009-2010	RTEU/ Matematik Bölümü	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. Bayram, M., Partal, T. ve Büyüköz, O. G., (2018). "Numerical methods for simulation of stochastic differential equations", Advances in Difference Equations, 2018, (1), 17.
2. Bayram, M. Büyüköz, O. G. ve Partal, T., (2018). "Parameter estimation in a Black Scholes Model", Thermal Science, (Baskıda).
3. Bulut, H. ve Partal T., (2010). "Comparing the Solution of the Kdv Equation By Three Different Methods", Journal of Advanced Research in Scientific Computing, 2(3),24-34.

Bildiri

1. Partal T. ve Bayram M., (2017). "Stochastic Runge-Kutta Methods In A Gompertzian Stochastic Model", 2nd International Conference On Computational Mathematics And Engineering Sciences-(CMES 2017), 20-22 May 2017, Istanbul, Turkey.
2. Partal T. ve Bayram M., (2017). "Maximum Likelihood Parameter Estimation Method for Tumor Growth", International Conference on Mathematics and Engineering (ICOME 2017) ,10-12 Mayıs 2017, Istanbul, Turkey.
3. Partal T. ve Bayram M., (2017). "Explicit Runge-Kutta Methods for a Stochastic Model in Tumour Growth", 3rd International Conference on Pure and Applied Sciences Dubai (ICPAS 2017), 2-6 Şubat 2017, Dubai, Birleşik Arap Emirlikleri.
4. Partal T. ve Bayram M. (2017). "Numerical Solutions of Stochastic SIS Epidemic Model", International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM 2017), 3-7 Temmuz 2017, Istanbul, Turkey.
5. Partal T. ve Bayram M. (2017). "Stability of Strong Numerical Schemes for Stochastic Differential Equations", International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM 2017), 3-7 Temmuz 2017, Istanbul, Turkey.
6. Partal T., Büyüköz, O. G. ve Bayram M., (2017) "A Stochastic Model of Human Breast Cancer Growth", International Conference on Mathematics,

- Computational Science & Engineering (ICMCSE 2017), 27-28 Temmuz 2017, Tokyo, Japan.
7. Büyüköz, O. G., Partal T. ve Bayram M., (2017). "Numerical Simulation of Stochastic Oscillator", International Conference on Mathematics, Computational Science & Engineering (ICMCSE 2017), 27-28 Temmuz 2017, Tokyo, Japan.
 8. Partal T., Büyüköz, O. G. ve Bayram M., (2016). "Maximum Likelihood Estimation in Stochastic Differential Equations", 2nd International Conference on Pure & Applied Science (ICPAS-2016), Haziran 2016, Istanbul, Turkey.
 9. Partal T. ve Bayram M., (2016). "Numerical Simulation of Nonlinear Stochastic Differential Equations,", 2nd International Conference on Pure & Applied Science (ICPAS-2016), Haziran 2016, Istanbul, Turkey.
 10. Büyüköz, O. G., Partal T. ve Bayram M., (2016). "Black Scholes Model with Numerical Solutions", International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2016), Mayıs 2016, Elazig, Turkey.
 11. Partal T., Büyüköz, O. G. ve Bayram M., (2016). "Gompertzian Stochastic Model for Tumor Growth", International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2016), Mayıs 2016, Elazig, Turkey.
 12. Partal T. ve Bayram M., (2016). "Numerical Solution of Second order Stochastic Differential Equations", 2nd International Conference on Pure & Applied Science (ICPAS-2016), Haziran 2016, Istanbul, Turkey.
 13. Partal T., ve Bayram M., (2015). "Hedging Strategies for Exotic Options", 4th International Conference on Mathematics & Information Science. Zewail City of Science and Technology, Şubat 2015, Egypt.
 14. Partal T., Bulut H., (2010). "Comparing the Solution of the Kdv Equation By Three Different Methods", 5. Ankara Matematik Günleri, 1-2 Haziran 2010, Ankara Turkey.
 15. Partal T., Bulut H., (2011), "The Solutions of Burgers' Equation by Three Different Methods", IV Congress of TWMS, 1-3 July 2011, Azerbaijan.