T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOĞRUSAL OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ İÇİN CHEBYSHEV DALGACIK SIRALAMA METODU

YASEMİN BAKIR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. AYDIN SEÇER

İSTANBUL, 2018

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Doğrusal Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri için Chebyshev Dalgacık Sıralama Metodu

Yasemin BAKIR tarafından hazırlanan tez çalışması 20/04/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Aydın SEÇER

Yıldız Teknik Üniversitesi

Eş Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Sertan ALKAN

İskenderun Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Aydın SEÇER

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

Gelişim Üniversitesi

Prof. Dr. İbrahim EMİROĞLU

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ünsal TEKİR

Marmara Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa SİVRİ

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doktora öğrenimim boyunca bana burs veren TÜBİTAK-BİDEB’ e teşekkürü bir borç bilirim.

ÖNSÖZ

Doktora çalışmam süresince her konuda yardımlarını ve tecrübelerini benden esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Aydın SEÇER’ e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Doktora tez izleme komitesinde bulunan Sayın Prof. Dr. Mustafa BAYRAM, Sayın Prof. Dr. İbrahim EMİROĞLU ve Sayın Prof. Dr. Ünsal TEKİR hocalarıma da bana ayırmış oldukları zaman ve emeklerinden dolayı ayrıyeten teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca her zaman yanımda olan, her konuda maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen sevgili annem ve babam Azize DEMİREL ve Talat DEMİREL ’e, eşim Mustafa BAKIR ’a ve de tez çalışmam esnasında bana destek ve moral veren, yardımını hiç bir zaman esirgemeyen, her daim yanımda olan sevgili hocam Sayın Prof.Dr. Necdet BİLDİK ’e teşekkür eder, sevgilerimi sunarım.

Nisan, 2018

Yasemin BAKIR

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ

$\psi(x)$	Ana Dalgacık
$w(x)$	Ağırlık Fonksiyonu
$T_m(x)$	Chebyshev Polinomları
u_{tam}	Denklemin Analitik Çözümü
$U_{nümerik}$	Elde edilen Nümerik Çözüm
$L^1(\mathbb{R})$	İntegrallenebilir Fonksiyon Uzayı
$L^2(\mathbb{R})$	Karesi İntegrallenebilir Fonksiyon Uzayı
$\varphi(x)$	Ölçüm Fonksiyonu

KISALTMA LİSTESİ

BPF	Block Pulse Fonksiyonu
CWM	Chebyshev Dalgacık Metodu
CWCM	Chebyshev Dalgacık Sıralama Metodu
KdV	Korteweg-De Vries Denklemi
LWCM	Legendre Dalgacık Sıralama Metodu
LWM	Legendre Dalgacık Metodu
MRA	Çoklu Çözünürlük Analizi

GRAFİK LİSTESİ

Sayfa

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

ÖZET

DOĞRUSAL OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ İÇİN CHEBYSHEV DALGACIK SIRALAMA METODU

Yasemin BAKIR

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Aydın SEÇER

Eş Danışman: Dr. Öğr.Üyesi Sertan ALKAN

Bu tezde çalışmasında Ginzburg-Landau denklemi, Korteweg-de Vries denklemi vb. pek çok öneme sahip doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözüm biçimini kolaylaştırması ve analitik çözüme olan yaklaşımının doğruluğu ile oldukça etkili bir Chebyshev dalgacık sıralama metodu tartışılıp, uygulanmaya çalışılmıştır. Bu metot Cheyshev dalgacık metodu ve Legendre dalgacık sıralama metoduyla kıyaslanmış ve bu metodun ne kadar güçlü doğruluğa sahip olduğu vurgulanmıştır.

Öncelikli olarak bu metodun ana fikri, problemlere Chebyshev dalgacık seri açılımları ile yaklaşım sağlamaktır. Chebyshev dalgacık sıralama metodunu uygulayabilmek için ilk olarak integralin operatör matrisleri elde edilmekte ve sonrasında da çözümünün yapılması arzu edilen doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklem bu matrisler yardımı ile daha kolay çözülebilir cebirsel bir denklem sistemine dönüştürülmektedir. Elde edilen bu cebirsel sistem Maple bilgisayar programı kullanılarak çözülmeye çalışılmaktadır.

Chebyshev dalgacık sıralama metodu Ginzburg Landau, Korteweg-de Vries ve bazı önemli denklemlere uygulanması sonucunda elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümler birbiri ile karşılaştırılmış ve nümerik çözümün analitik çözüme ne kadar iyi yaklaştığı tablolar ve şekiller yardımıyla gösterilmiştir.

Daha sonra, Chebyshev dalgacık sıralama metodunun CWM ve LWCM metoduna göre doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için çok daha uygun olduğu gözlenmiştir. Sonuç olarak bu yöntemin en büyük avantajının diğer göz önüne alınan metotlarla karşılaştırıldığında bunun uygulanabilirliğinin daha basit olduğu ve nümerik çözümünün ise analitik çözüme çok daha iyi yaklaştığı tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Chebyshev Dalgacık Sıralama Metodu, Ginzburg-Landau Denklemi, Korteweg-de Vries Denklemi, Sine-Gordon Denklemi, İntegrasyonun Operasyonel Matrisleri

ABSTRACT

CHEBYSHEV WAVELET COLLOCATION METHOD FOR NUMERICAL SOLUTION OF NON-LINEAR PARTIAL DIFERANTIAL EQUATION

Yasemin BAKIR

Mathematical Engineering

Ph.D. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Aydın SEÇER

Co-Adviser: Asst. Prof. Sertan ALKAN

In this thesis, Chebyshev wavelet collocation method is firstly introduced and also applied to different important nonlinear partial differential equations as Ginzburg-Landau equation, Korteweg-de Vries equation and etc. This method is compared with the each other and showed that how this method powerfull as well as the Legendre wavelet collocation method.

Primarily, the main idea of this method is to provide the convergency in terms of Chebyshev wavelet series. To apply the Chebyshev Wavelet collocation method, firstly the operator matrix needs to derived and then transform the nonlinear partial differential equation into a more easily solvable algebraic system by using these matrices. Once obtaining this algebraic system then it may be solved by using Maple packet program.

By applying the Chebyshev wavelet collacation method to Ginzburg Landau, Korteweg-de Vries and the other important equation as it mentioned above, obtaining numerical results are compared with the analytical solutions carefully and the results supported by graphs, illustrated by tables. It is finally pointed out that how the numerical solution approximates to the analytical solution.

Moreover, we it is observed that the Chebyshev wavelet collocation method is much more suited for solving nonlinear partial diffrential equations than the Chebyshev Wavelet and Legendre Wavelet collocation method. Consequently, it is concluded that the applicability of this method is more simple with respect to the other techniques and also it is seen that the numerical solution has a much better approach to analytical solution.

Keywords: Chebyshev Wavelet Collocation Method, Ginzburg-Landau Equation, Korteweg-de Vries Equation, Sine-Gordon Equation, Operational Matrices of Integration

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Tarihsel bir perspektiften bakıldığında, dalgacık analizi, 19. yüzyılın matematiksel temelini oluşturan Joseph Fourier'in çalışmalarına dayansa da yeni bir metottur. Fourier, frekans analizi teorisinin temellerini atmış ve daha sonra bunun çok önemli ve etkili olduğu kanıtlanmıştır. Fourierin bu yaklaşımı sinyal filtreleme ve zamana bağlı dalga benzeri özelliklere sahip sıkıştırmalar için oldukça uygundur. Bununla beraber, bu metot bölgesel özelliklere sahip fonksiyonlar için uygun olmayabilir. Başka bir deyişle, Fourier serileri ile sadece frekans çözünürlüğü elde edilebilir ancak zaman çözünürlüğü elde edilemez. Böylece Fourier serileri bir sinyaldeki tüm frekansları tanımlayabilme özelliğine sahipse de, bu frekansların ne zaman olduğunu belirleyememektedir. Bu nedenle, araştırmacıların çoğu frekans temelli analizden ölçek tabanlı analize doğru giderek artan bir ilgi göstermişlerdir.

Dalgacık kavramı, ilk kez 1909'da Alfred Haar'ın yüksek lisans tezi ile ele alınmıştır. O zamandan beri dalgacık analiz metotlarını geliştirilmektedir. Alfred Haar'dan sonra, dalgacık araştırmaları Y.Meyer ve meslektaşları tarafından daha ileriye taşınarak uluslararası boyuta ulaşmış ve ana algoritma Stephane Mallat'ın 1988 yıllarındaki çalışmalarına dayanmıştır.

Bu alanda öncülük edip, katkıda bulunan araştırmacıların başında Ingrid Daubechies, Ronald Coifman ve Victor Wickerhauser vardır.

Genel olarak dalgacıklar birçok bilim ve mühendislik alanında çok başarılı bir şekilde kullanılmaktadır. Dalgacıklar, verilen bir denklemi cebirsel denklem sistemine dönüştürerek daha kullanışlı ve daha iyi sonuç veren sistem haline getirirler. Bu nedenle de dalgacık metotları günümüzde daha çok tercih edilen bir nümerik metot olarak kullanılmaktadır ve gün geçtikçe de çalışma ve kullanım alanları çok hızlı bir şekilde artmaktadır.

Dalgacıkların birçok farklı ailesi vardır. Bunların, en tanıdık ve basit olanı Haar dalgacıklardır. Haar dalgacıkları, basitliklerinden dolayı birçok araştırmacı tarafından kullanılmıştır [1-6]. Ancak Haar fonksiyonlarının kullanmanın dezavantajı, nümerik yaklaşımın doğruluğunun çok düşük olmasıdır. Dolayısıyla, Chebyshev dalgacıklarının Haar dalgacıklarından daha doğru bir yaklaşımı olduğu düşünülmektedir [7]. Bu Tezde ise Chebyshev dalgacıkları ele alınmış olup, bu dalgacıkların doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerdeki yaklaşımının doğruluğu ele alınmıştır. Bunun için Chebyshev polinomları ve özellikleri, operatör matrislerin oluşturulmasındaki genel prosedürü elde etmek için kullanılır. Sonrasında da doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için Chebyshev dalgacık açılımlarının operatör matrisleri kullanılır. Düzgünlüğü ve iyi enterpolasyon özellikleri nedeniyle, Chebyshev dalgacıklarının doğruluğu tercih edilen pek çok diğer dalgacığın doğruluğundan daha iyidir.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez konusunun temel amacı, Ginzburg-Landau denklemi, Korteweg de Vries (KdV) denklemi ve bunlar gibi pek çok doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklem için etkili olan bir Chebyshev dalgacık sıralama metodunu ortaya koymaktır. Bu metodun temel fikri, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerinin çözümüne Chebyshev dalgacık serileri ile yaklaşımı sağlamaktır. Başlangıç ve sınır koşullu bu denklemlerin nümerik çözümünü elde etmek için önce bu metodun nasıl kullanılacağını göstermek ve daha sonra, Chebyshev dalgacıkları için operatör matrisini elde etmek ve sonuçta da bu metodu Ginzburg-Landau, KdV ve Sine-Gordon gibi önemli denklemlere bunu uygulamaktır. Böylece doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemleri doğrusal olmayan cebirsel bir denklem sistemine dönüştürüp, bu sistemi Maple paket programıyla çözüp, uygulamış olduğumuz bu tekniğin geçerliliğini ve uygulanabilirliğini böylece açıklığa kavuşturmaktır.

1.3 Hipotez

Bu çalışmada Chebyshev dalgacık sıralama metodu Ginzburg Landau denklemi, Korteweg-de Vries denklemi ve Sine-Gordon denklemine uygulanmış ve nümerik sonuçlar denklemlerin analitik çözümleri ile karşılaştırılmıştır. Şekiller ve tablolardan görüleceği üzere, nümerik çözümlerin analitik çözümlere yakınsadıkları açıktır. Dahası, Chebyshev dalgacık sıralama metodu, bu metodu karşılaştırmak için ele aldığımız Chebyshev dalgacık metodu ve Legendre dalgacık sıralama metoduna göre doğrusal olmayan başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümü için daha uygun olduğu görülmektedir. Buna ek olarak, bu metodun en büyük avantajı, uygulanabilirliğinin basitliği ve analitik çözüme çok daha iyi yakınsamasıdır. Sonuç olarak, Analitik çözüm, nümerik çözüm ile mukayese edildiğinde Chebyshev dalgacık sıralama metodunun doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için uygun, verimli ve çok az hata veren bir metot olduğu görülmüştür.

BÖLÜM 2

DALGACIKLAR İÇİN TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 $L^2(\mathbb{R})$ ve Yaklaşım Özdeşlikleri

"Dalgacıklar" terimi ile genellikle oluşturulan örnekler, $\mathbb{R}$ üzerindeki dalgacıkları ifade eder. Bu kısımda $\mathbb{R}$'de Fourier analizinin temelleri ve dalgacık kavramını oluşturmak için gerekli temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. $\mathbb{R}$ üzerinde karesi integrallenebilir olan f fonksiyonları, yani

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx < +\infty \tag{2.1}$$

olmak üzere $L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx < +\infty \right\}$ biçiminde tanımlanır. $L^2(\mathbb{R})$, fonksiyonların noktasal toplam ve skaler çarpım operatörlerine sahip bir vektör uzayıdır. Böylece,

$f, g \in L^2(\mathbb{R})$ için,

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)} dx \tag{2.2}$$

tanımlanır. Dolayısı ile $\langle .,. \rangle$, $L^2(\mathbb{R})$' de bir iç çarpımdır.

$$\| f \| = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \tag{2.3}$$

normu ile $L^2(\mathbb{R})$ bir normlu uzay olur.

Öte yandan $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ için,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx\right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} \tag{2.4}$$

biçiminde Cauchy-Schwarz eşitsizliği tanımlanır. Bu eşitsizlikte f, g sırasıyla $|f|, |g|$ ile yer değiştirebilir. Böylece

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)| \, dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} \tag{2.5}$$

elde edilir. Aynı zamanda da

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)+g(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} \tag{2.6}$$

üçgen eşitsizliği sağlanır. Genel iç çarpım uzayı için $L^2(\mathbb{R})$' de yakınsaklık tanımları aşağıdaki gibidir:

$L^2(\mathbb{R})$' deki fonksiyonların bir dizisi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $f \in L^2(\mathbb{R})$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için ve her $n > N$ için $\|f_n - f\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ var ise $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi f'e yakınsaktır denir. Buna denk olarak $n \to +\infty$ iken $\|f_n - f\| \to 0$ ifadesi de kullanılır.

Her $\varepsilon > 0$ için ve her $n, m > N$ için $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ var ise $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

$L^2(\mathbb{R})$' deki her Cauchy dizisi, $L^2(\mathbb{R})$' de yakınsak ise $L^2(\mathbb{R})$ tamdır. Böylece $L^2(\mathbb{R})$ bir Hilbert uzayıdır. Şimdi $L^2(\mathbb{R})$ için tam ortonormal cümlelerin özel bir biçimi olan dalgacık sistemlerini oluşturalım.

Tanım 2.1 $L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < +\infty \right\}$ ve $f \in L^1(\mathbb{R})$ için,

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \tag{2.7}$$

olsun. $\|.\|_1$, L^1 normudur. Eğer $f \in L^1(\mathbb{R})$ ise f integrallenebilirdir [8].

Lemma 2.1 $f \in L^1(\mathbb{R})$ ise o zaman

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)dx\right| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx = \|f\|_1 \tag{2.8}$$

$L_1(\mathbb{R})$, $\|.\|_1$ normu ile normlu vektör uzayıdır fakat iç çarpım uzayı değildir [8].

Tanım 2.2 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ve hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|dy < \infty \tag{2.9}$$

olsun. (2.9) denklemini sağlayan x' ler için

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \tag{2.10}$$

tanımlanır [8]. (2.9) denklemini sağlamayan x' ler için $(f * g)(x) = 0$ tanımlanır. $f * g$' ye f ve g' nin konvolüsyonu denir. (2.10) denkleminde $t = x - y$ değişken değişimi yaparak konvolüsyonun değişmeli olduğu görülür ki,

$$f * g = g * f \tag{2.11}$$

elde edilir.

Lemma 2.2

- $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ olduğunu farzedelim. $\forall x \in \mathbb{R}$ için (2.9) eşitsizliği sağlansın. Bu durumda, $f * g$ sınırlıdır ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için $|(f * g)(x)| \le \|f\|\|g\|$ olur.

- $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ olduğunu farzedelim. (2.9) eşitsizliği hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için sağlansın. Bu takdirde, $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ olacak şekilde $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$ dir.

- $f \in L^2(\mathbb{R})$ ve $g \in L^1(\mathbb{R})$ olduğunu farzedelim. (2.9) eşitsizliği hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için sağlansın. Bu takdirde $f * g \in L^2(\mathbb{R})$ olacak şekilde $\|f * g\| \le \|f\|\|g\|_1$ olur [8].

Tanım 2.3 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ve $y\in\mathbb{R}$ olsun. $R_y f(x)=f(x-y)$ ile $R_y f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ dönüşümü tanımlayalım. Aynı zamanda $\widetilde{f}(x)=\overline{f(-x)}$ ile $\widetilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ konjugate yansımalı fonksiyonu tanımlansın. Buna göre aşağıdaki Lemma 2.3' ün özelliklerine sahip olunur [8].

Lemma 2.3 $f,g\in L^2(\mathbb{R})$ ve $x,y\in\mathbb{R}$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde,

- $\left\langle R_x f, R_y g\right\rangle = \left\langle f, R_{y-x}\right\rangle$
- $\left\langle f, R_y g\right\rangle = \left(f*\widetilde{g}\right)(y)$

olur [8].

Tanım 2.4 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ve $t\in\mathbb{R}$ ve $t>0$ olmak üzere, g' nin t-genleşmesi $g_t:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$

$$g_t(x)=\frac{1}{t}g\left(\frac{x}{t}\right) \tag{2.12}$$

ile tanımlanır. (2.12) denklemindeki t çarpanı değişken değişimiyle

$$\int_{\mathbb{R}} g_t(x)dx=\int_{\mathbb{R}} g(x)dx$$

olduğunu garantiler. $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ ve $\ell^2(\mathbb{Z})$ durumlarında özdeş bir konvülasyon vardır [8].

Tanım 2.5 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, sabit bir $c_1>0$ için, tüm $x\in\mathbb{R}$ için

$$|g(x)|\le\frac{c_1}{\left(1+|x|^2\right)} \tag{2.13}$$

ve

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)dx=1 \tag{2.14}$$

ve her bir $t>0$ için, (2.12) denklemi ile g_t' nin tanımlandığını farzedelim. $\{g_t\}_{t>0}$ ailesi bir yaklaşık özdeşliktir. (2.13) eşitsizliği g' nin sınırlandırıldığını ve büyük bir x için $\frac{1}{x^2}$ nin bir sabit çarpımı olarak en azından hızlı bozunduğunu belirten durumdur. Bu iki koşul, $g \in L^1(\mathbb{R})$ olduğunu kastetmektedir. $|x| \le 1$ için sınırlılık koşulunu ve $|x| > 1$ için bozunma koşulu uygulanarak,

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,dx \le \int_{\{x:|x|\le 1\}} c_1 dx + \int_{\{x:|x|>1\}} \frac{c_1}{x^2}\,dx < +\infty \qquad (2.15)$$

yazılır. Dolayısıyla (2.14) denkleminin integrali kesinlikle yakınsaktır [8]. Çoğu yerde (2.13) gibi daha zayıf bozunma koşullarına burada izin verilmektedir, ancak bu tanım yine de amaç için yeterlidir. Bunun yanında $\{g_t\}_{t>0}$ yaklaşık özdeşliğinin kullanılmasının sebebi Teorem 2.1' de açıklanmıştır. Bu sonucu belirtmek için bazı ön hazırlıkların yapılması gereklidir.

Lebesgue integralini kullanabilmek için önce analizin temel teoreminin bilinmesi gerekir. Eğer $f \in L^1(\mathbb{R})$ ve sabit bir $a \in \mathbb{R}$ için, $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ ise bu takdirde, F, $\mathbb{R}$ üzerinde hemen hemen her yerde diferansiyellenebilirdir ve hemen hemen her yerde $F' = f$ dir. Bunun sonucunda eğer $f \in L^1(\mathbb{R})$ ise, bu takdirde hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt = f(x) \qquad (2.16)$$

olur. Bunu görebilmek için,

$$\frac{1}{2h}\int_{x-t}^{x+t} f(t)dt = \frac{F(x+h)-F(x-t)}{2h} = \frac{1}{2}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} + \frac{F(x)-F(x-t)}{h}$$

ve $F'(x)$ var olduğundan, $h \to 0$ iken her bir fark bölümü $F'(x)$' e yakınsadığı gözlemlenir. $f(x)$, t integrasyon değişkenine göre sabit ise,

$$\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt = f(x)$$

olup, böylece (2.16) denklemi

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t) - f(x)dt = 0$$

biçiminde yazılabilir. $y = x - t$ değişken değişimiyle,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x-y) - f(x) dy = 0 \tag{2.17}$$

elde edilir. Bununla birlikte, $-h < y < h$ için $f(x-y)$ değerleri $f(x)$' e ortalama yaklaşırken, bu integrallerin sadeleştirilmesiyle bunun 0' a yakınsaması mümkündür. Bu ise aşağıdaki ifadeyi daha da güçlendirir.

Tanım 2.6 $f \in L^1(\mathbb{R})$ olduğunu farzedelim.

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \left| f(x-y) - f(x) \right| dy = 0 \tag{2.18}$$

ise, f' nin bir Lebesgue noktası $x \in \mathbb{R}$ olur [8].

f' nin bir süreklilik noktası aynı zamanda f' nin bir Lebesgue noktasıdır. Ancak bir Lebesgue noktası mutlaka bir süreklilik noktası değildir.

İntegrallenebilir bir f fonksiyonu herhangi bir süreklilik noktasına sahip olmayabilir. (Yani, x' in her rasyonel değerinde 1, her irrasyonel değerinde 0 olan bir fonksiyon buna örnek olabilir) Ancak bir sonraki lemma neredeyse tüm noktaların f' nin Lebesgue noktaları olduğunu garanti eder.

Lemma 2.4 $f \in L^1(\mathbb{R})$ olduğunu farzedelim. $\mathbb{R}$' nin neredeyse her noktası f' nin bir Lebesgue noktasıdır [8].

Teorem 2.1 $f \in L^1(\mathbb{R})$ ve $\{g_t\}_{t>0}$**'** nin bir yaklaşık özdeşlik olduğunu kabul edelim. Bu takdirde f' nin her x Lebesgue noktası için,

$$\lim_{t \to 0^+} \left(g_t * f \right)(x) = f(x) \tag{2.19}$$

elde edilir [8].

2.2 Çoklu Çözünürlük Analizi ve Dalgacıklar

Bu kısımdaki amaç bir tek ψ fonksiyonun genleşmelerinin ve ötelenmelerinin belirli bir cümlesini içeren $L^2(\mathbb{R})$' de tam ortonormal bir cümle olan dalgacık sistemini oluşturmaktır. Burada çoklu çözünürlük analizini oluşturma bir dalgacık sistemi oluşumuna indirgenir. Bunun için aşağıdaki tanımlar verilir.

Tanım 2.7 $\varphi,\psi \in L^2(\mathbb{R})$ ve $j,k \in \mathbb{Z}$ için,

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\varphi\left(2^j x - k\right) \text{ ve } \psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi\left(2^j x - k\right) \tag{2.20}$$

ile $\varphi_{j,k}, \psi_{j,k} \in L^2(\mathbb{R})$ tanımlanır.

$\varphi_{j,k}$ ve $\psi_{j,k}$' nin tanımlarındaki $2^{j/2}$ çarpımı L^2 normlarının tüm j,k' lar için aynı olması amacıyla vardır.

$$\begin{aligned}\left\|\psi_{j,k}\right\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left|2^{j/2}\psi\left(2^j x - k\right)\right|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} 2^j \left|\psi\left(2^j x - k\right)\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \left|\psi(y)\right|^2 dx = \left\|\psi\right\|^2\end{aligned}$$

ve $\varphi_{j,k}$ için de durum aynıdır. Ayrıca integralde $y = 2^j x - k$ değişken dönüşümü yapılarak

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi\left(2^j(x - 2^{-j}k)\right) \tag{2.21}$$

yazılır. Böylece $\psi_{j,k}$' nin tanımı bir genleşme ve bir ötelemeli normalleştirme içerir. Genleşmeyi anlamak için $j > 0$ olduğuna dikkat edilir. $\psi(2^j x)$' in grafiği, 2^j' nin bir çarpımı ile x ekseni boyunca ψ' nin grafiği büzülerek elde edilir. $j < 0$ için ise, grafik x ekseni yönünde genişler.

Tanım 2.8 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. f' nin desteği ($\sup f$ ile tanımlanır), $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ cümlesinin kapanışıdır. $\sup f$ bir kompakt cümle ise f bir kompakt desteğe sahiptir [8].

Şimdi ψ' nin bir kompakt desteğe sahip olduğunu farzedelim ve yine $|x| > r$ olacak şekilde tüm x' ler için $\psi(x) = 0$ olacak biçimde en küçük sayı ise $r > 0$ olsun. Bu takdirde $\psi\left(2^j x\right)$, $\left[-r/2^j, r/2^j\right]$ aralığı içinde kompakt desteğe sahiptir. Çünkü ne zaman $\left|2^j x\right| > r$ olduğunda yani $|x| > r/2^j$ iken $\psi\left(2^j x\right) = 0$ olduğu unutulmamalıdır.

$\psi\left(2^j x-k\right)=\psi\left(2^j\left(x-2^{-j}k\right)\right)$' nin grafiği x ekseni boyunca $\psi\left(2^j x\right)$' nin grafiğinin $2^{-j}k$ ile ötelenmesiyle elde edilir, ($k>0$ ise sağa $k<0$ ise sola doğrudur).

Böylece ψ, $\left[-r,r\right]$ aralığında bir kompakt desteğe sahip ise $\psi\left(2^j x-k\right)$, $\left[2^{-j}k-2^{-j}r,2^{-j}k+2^{-j}r\right]$ aralığında bir desteğe sahiptir. Son olarak, (2.21) denklemindeki $\psi_{j,k}$' nın grafiği, $\psi\left(2^j x-k\right)$' nin grafiğinin $2^{j/2}$ ile çarpılmak suretiyle elde edilir.

Benzer şeyler $\varphi_{j,k}$ için de yapılır. Kabaca konuşmak gerekirse φ ve ψ fonksiyonlarının 0 civarında merkezlendirilmiş olmaları ve bunların 1 ile karşılaştırılabilir bir ölçüye yoğunlaşıldığı göstermektedir. Bu takdirde $\varphi_{j,k}$ ve $\psi_{j,k}$, 2^{-j} ile karşılaştırılabilir bir ölçekte $2^{-j}k$ noktası civarında merkezlendirilebilirdir.

Tanım 2.9 $L^2\left(\mathbb{R}\right)$ için bir dalgacık sistemi, bir $\psi\in L^2\left(\mathbb{R}\right)$ için $\left\{\psi_{j,k}\right\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$' nin tam ortonormal bir cümlesidir. Burada $\psi_{j,k}$ fonksiyonları dalgacık olarak adlandırılır ve ψ fonksiyonu ise ana dalgacık adını alır.

Teorem 2.2 H bir Hilbert uzay ve $\left\{a_j\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$, H**'** de bir ortonormal cümle olsun. Bu takdirde $\left\{a_j\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$' nin bir tam ortogonal cümle olması için gerek ve yeter şart tüm $f\in H$ için $f=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left\langle f,a_j\right\rangle a_j$ olmasıdır. Eğer $\left\{\psi_{j,k}\right\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$bir dalgacık sistemi ise Teorem 2.1 den

$$f=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle f,\psi_{j,k}\right\rangle\psi_{j,k} \tag{2.22}$$

biçimde yazılır. Buna dalgacık özdeşliği denir ve $\left\{\left\langle f,\psi_{j,k}\right\rangle\right\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ katsayılarının bir dizisi için f dönüşümü (ayrık) dalgacık dönüşümü olarak adlandırılır [8]. Dalgacık özdeşliği aşağıdaki gibi açıklanır:

$\psi_{j,k}$, $2^{-j}k$ noktası civarında merkezli ve 2^{-j} ölçülüdür. Dalgacık dönüşüm katsayıları olan $\left\langle f,\psi_{j,k}\right\rangle$' ler, (2.22) ifadesindeki $\psi_{j,k}$ teriminin ağırlığı veya direncidir. $\left\langle f,\psi_{j,k}\right\rangle$

değeri, 2^{-j} ölçülü $2^{-j}k$ noktası civarında f’ nin kısmi ölçümü gibi düşünülebilirdir. (2.22) dalgacık özdeşliğindeki f, $j,k\in\mathbb{Z}$ için farklı bölgelerdeki $2^{-j}k$ merkezli, farklı ölçülerdeki 2^{-j} bileşenlerine ayırılıyormuş gibi düşünebilirdir.

Ayrık dalgacık sistemlerinin yapısına değinmeden önce (2.22) özdeşliğine benzer bir formülü ele alalım. Burada bir toplam yerine bir integralin içerildiğini ve tüm olası dönüşümler ve pozitif genleşmelerin de yer aldığını burada kabul edelim. Böylece bir avantaja sahip olunduğu kolayca görülür.

Lemma 2.5 (Carderon Formulü) $\psi\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ ve $\widehat{\psi}$ ise ters Fourier dönüşümü olmak üzere

$$\int_0^{+\infty}\left|\widehat{\psi}(s)\right|^2\frac{ds}{s}=1 \tag{2.23}$$

$$\int_0^{+\infty}\left|\widehat{\psi}(-s)\right|^2\frac{ds}{s}=1 \tag{2.24}$$

kabul edilsin. Ayrıca $t>0$, $y\in\mathbb{R}$ için, (2.12) denklemindeki gibi $\psi_t(x)=(1/t)\psi(x/t)$ ve $\psi_t^y(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\psi\left(\frac{x-y}{t}\right)$ tanımlansın.

Bu takdirde tüm $f\in L^2(\mathbb{R})$ için,

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\psi_t*\widetilde{\psi}_t*f(x)\frac{dt}{t} \tag{2.25}$$

veya buna denk olarak,

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}\left\langle f,\psi_t^y\right\rangle\psi_t^y dy\frac{dt}{t^2} \tag{2.26}$$

dir [8].

Tanım 2.10 Ölçeklendirme fonksiyonu ile üretilen veya φ baba dalgacıklı çoklu çözünürlük analizi (MRA), aşağıdaki özelliklere sahip $L^2(\mathbb{R})$’ nın altuzaylarının $\left\{V_j\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ bir dizisidir.

- (Monotonluk) Dizi artandır, yani tüm $j \in \mathbb{Z}$ için $V_j \subseteq V_{j+1}$.
- (Ölçüm fonksiyonunun varlığı): $\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ cümlesi ortonormal ve

$$V_0 = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} z(k)\varphi_{0,k} : z = \left(z(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\} \tag{2.27}$$

  olacak şekilde bir $\varphi \in V_0$ fonksiyonu vardır.

- (Ölçekleme özelliği) Her bir j için $f(x) \in V_0$ olması için gerek ve yeter şart $f(2^j x) \in V_j$ dir.
- $f(x) \in V_j$ olması için gerek ve yeter şart $f(x+2^{-j}) \in V_j$ dir.
- (Aşikâr kesişim özelliği) : $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.
- (Yoğunluk) : $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$, $L^2(\mathbb{R})$' de yoğundur.
- $\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ cümlesi, V_0 için bir Riesz veya koşulsuz baz oluşturur. Yani $0 < A < B < \infty$ ile tüm karesi toplanabilir dizilerin uzayında herhangi bir $\{c_k\} \in \ell^2$ dizisi için ($A = B = 1$,bir orthonormal baz için)

$$A\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \phi\left(x-k\right)_2^{\;2} \le B\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$$

  olacak biçimde sabit A ve B sayıları vardır.

Tanım 2.11 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$'nin φ ölçüm fonksiyonlu çoklu çözünürlüğe sahip olduğunu farzedelim. Bu taktirde

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\varphi_{1,k}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\sqrt{2}\varphi(2x-k) \tag{2.28}$$

bir ölçüm denklemidir. Buradaki $u = \left(u\left(k\right)\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ dizisi ise ölçüm dizisi olarak bilinir.

Ölçüm fonksiyonun $\{\varphi(x-k)\}$ biçimindeki ötelemeleri $V_0 \subset L^2(\mathbb{R})$' nin alt uzayında bir Riesz ya da onun koşulsuz bir bazını oluşturur. Dahası φ' nin $k2^{-n}$ çarpanı ile genleşme ve 2^n biçiminde çarpanı vasıtası ile ötelenerek elde edilen $\{\varphi_{n,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ Riesz bazları, $V_0 \subset L^2(\mathbb{R})$ alt uzayı için

$$\varphi_{n,k}(x) = 2^{n/2}\varphi\left(2^n x - k\right) \tag{2.29}$$

olarak elde edilir. Bu n. seviyede bir çözümlemeye karşılık gelmektedir. Böylece $\varphi(x)$ ölçekleme fonksiyonu, $L^2(\mathbb{R})$' nin iç içe alt uzaylarının bir dizisi için bazların bir cümlesini oluşturur ve çözünürlük seviyesi n sonsuza giderken $L^2(\mathbb{R})$'e yaklaşma eğilimi gösterir.

Lemma 2.6 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, φ ölçüm fonksiyonlu, u ölçüm dizili çoklu çözünürlüğe sahip olsun. Bu takdirde $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\ell^2(\mathbb{Z})$' de ortonormal bir cümledir [8].

Lemma 2.7 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, φ ölçüm fonksiyonlu, $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ ölçüm dizili çoklu çözünürlüğe sahip olsun. Her $k \in \mathbb{Z}$ için

$$v(k) = (-1)^{k-1}\overline{u(1-k)} \tag{2.30}$$

ile $v \in \ell^1(\mathbb{Z})$ olmak üzere,

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k)\varphi_{1,k}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k)\sqrt{2}\varphi(2x-k) \tag{2.31}$$

tanımlansın. Bu takdirde $\{\psi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $L^2(\mathbb{R})$' da ortonormal bir cümledir. Eğer

$$W_0 = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} z(k)\psi_{0,k} : z = \left(z(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\} \tag{2.32}$$

olarak tanımlanırsa, bu takdirde

$$V_1 = V_0 \oplus W_0 \tag{2.33}$$

olur.

Teorem 2.3 (Mallat' ın Teoremi): $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}, \varphi$ ölçüm fonksiyonlu, $u=(u(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ ölçüm dizili çoklu çözünürlüğe sahip olsun. (2.30) denklemi ile $v=(v(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ ve (2.31) denklemi ile de ψ tanımlansın. Bu takdirde $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$, $L^2(\mathbb{R})$' daki bir dalgacık sistemidir ve $\psi(x)$ dalgacık fonksiyonu temel dalgacık (ana dalgacık) olarak adlandırılır.

$\{\psi_{n,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ile verilen W_n alt uzayı için bir Riesz bazı

$$\psi_{n,k}(x) = 2^{n/2}\psi(2^n x - k) \tag{2.34}$$

olarak tanımlanırsa V_{n+1}, W_n' nin V_n ile birlikte onun bir ortogonal tamamlayıcısı olarak ortaya çıktığı görülür. V_n ile V_{n+1} alt uzayları arasında fark olduğu için, W_n alt uzayında bulunan sinyaller, detaylı sinyaller veya farklı sinyaller olarak adlandırılır. Böylece W_n alt uzayı aşağıdaki özellikleri sağlar:

- V_n, V_{n+1}'nin V_n ile birlikte onun ortogonal tamamlayıcısıdır. Yani, $V_{n+1} = V_n \oplus W_n$ dir.
- Eğer $n_1 \neq n_2$ ise W_{n1} ,W_{n2}' ye ortogonaldir.
- $\oplus_{n=-\infty}^{\infty} V_n = L^2(\mathbb{R})$, yani $\{\psi_{n,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ cümlesi $L^2(\mathbb{R})$ için bir Riesz bazıdır.

Herhangi iki ötelenmiş ve/veya genleşmiş dalgacıklar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n,k}(x)\psi_{m,l}(x)\,dx = \delta_{n,m}\delta_{k,l} \quad , \; n,m,l,k \in \mathbb{Z} \tag{2.35}$$

biçimindeki ortogonallik koşulunu sağlarsa, bu dalgacık bazı ortonormaldir.

Farklı çözümleme seviyelerindeki dalgacıklar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n,k}(x)\psi_{m,l}(x)\,dx = 0 \;, \; n \neq m, \quad n,m,l,k \in \mathbb{Z} \tag{2.36}$$

yarı ortogonallik koşulunu sağlıyorsa bu dalgacık bazı yarı ortogonaldir.

Diğer yandan yarı ortogonal ψ dalgacığının

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n,k}(x)\overline{\psi_{m,l}}(x)\,dx = \delta_{n,m}\delta_{k,l} \quad , \quad n,m,l,k \in \mathbb{Z} \tag{2.37}$$

bi-ortogonallik koşulunu sağlayan $\overline{\psi_{m,l}}$ biçiminde bir dual bazı vardır [8].

Tanım 2.12 $\ell^2(\mathbb{Z})$ Fourier dönüşümü $\hat{}:\ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2([-\pi,\pi))$ ile gösterilsin. Bu taktirde $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$ için , $\hat{z}(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z(n)e^{in\theta}$ olarak tanımlanır. Bu gösterim ile serinin $L^2([-\pi,\pi))$ deki limitlerinin alındığı düşünülebilirdir.

Tanım 2.13 $L^2([-\pi,\pi))$'de Ters Fourier dönüşümü $\check{}:L^2([-\pi,\pi)) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ ile gösterilsin. Bu taktirde $f \in L^2([-\pi,\pi))$ için, $\check{f}(n) = \left\langle f, e^{in\theta} \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta$ ile tanımlanır.

Lemma 2.8 $m_0:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, her $\xi \in \mathbb{R}$ için $m_0(0)=1$, $|m_0(\xi)| \le 1$ olduğunu farzedelim. Bu durumda $\xi \in \mathbb{R}$ için

$$|m_0(\xi) - m_0(0)| \le C|\xi|^{\delta} \tag{2.38}$$

olacak şekide $\delta > 0$ ve $C < +\infty$ vardır. Şimdi de $n \in \mathbb{N}$ için $G_n(\xi) = \prod_{j=1}^{n} m_0(\xi/2^j)$ olsun. Bu takdirde $G_n(\xi)$, $n \to \infty$ iken $\mathbb{R}$ nin her bir sınırlı alt cümlesine düzgün yakınsaktır. Böylece $G_n(\xi)$ aynı zamanda her bir $\xi \in \mathbb{R}$ noktasına da düzgün olarak yakınsaktır [8].

Lemma 2.9 $\varepsilon > 0$ olmak üzere $u = (u(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ bazı için,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{\varepsilon} |u(k)| < +\infty \tag{2.39}$$

olduğunu farzedelim.

$$m_0\left(\xi\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}u(k)e^{-ik\xi} \tag{2.40}$$

biçiminde tanımlansın. Bu takdirde m_0, $\delta=\min\left(1,\varepsilon\right)$ dereceli Lipschitz koşulunu sağlar.

Teorem 2.4 $m_0:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, 0' da $\delta>0$ dereceli Lipschitz koşulunu sağlasın ((2.38) eşitsizliği sağlansın). $m_0\left(0\right)=1$, m_0, 2π periyotlu ve her ξ için,

$\left|m_0\left(\xi\right)+m_0\left(\xi+\pi\right)\right|^2=1$ olmak üzere $\widehat{\varphi}\left(\xi\right)=\prod_{j=1}^{\infty}m_0\left(\xi/2^j\right)$ ile tanımlansın. Bu takdirde

- $\widehat{\varphi}$, her bir ξ için $\widehat{\varphi}\left(\xi\right)=m_0\left(\xi/2\right)\widehat{\varphi}\left(\xi/2\right)$ sağlanır.
- $\widehat{\varphi}\in L^2\left(\mathbb{R}\right)$, $\varphi=\left(\widehat{\varphi}\right)^{\vee}$ olsun. Bunun için $u=\left(u\left(k\right)\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ bazının mevcut olabilmesi için (2.40) denkleminde

$$u\left(k\right)=\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}m_0\left(\xi\right)e^{ik\xi}d\xi=\sqrt{2}\,\check{m}_0\left(-k\right) \tag{2.41}$$

  olarak tanımlanmalıdır.
- $u\in\ell^1\left(\mathbb{Z}\right)$ ise,

$$\varphi\left(x\right)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}u(k)\varphi_{1,k}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}u(k)\sqrt{2}\varphi(2x-k) \tag{2.42}$$

  eşitliği sağlanır.
- $\widehat{\varphi}$, 0' da sürekli fonksiyondur [8].

Teorem 2.5 (Lebesgue Yakınsaklık Teoremi): $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ biçiminde fonksiyonlar dizisi, bir f fonksiyonuna hemen hemen heryerde yakınsaktır. $\int_{\mathbb{R}}g(x)<+\infty$, her $n\in\mathbb{N}$ için ve hemen hemen her $x\in\mathbb{R}$ için $\left|f_n(x)\right|\leq g(x)$ olacak şekilde bir $g(x)\geq 0$ fonksiyonun var olduğunu farzedelim. Bu takdirde $\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n(x)dx=\int_{\mathbb{R}}f(x)dx$ dir [8].

Lemma 2.10 $m_0:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, 0' da $\delta>0$ dereceli Lipschitz koşulunu sağlasın (yani (2.38) eşitsizliği sağlansın). Bunun yanında $m_0(0)=1$, m_0, 2π periyotlu ve her ξ için $\left|m_0(\xi)+m_0(\xi+\pi)\right|^2=1$ şartı ile beraber

$$\inf_{|\xi|\le\pi/2}\left|m_0(\xi)\right|>0 \tag{2.43}$$

olmak üzere $\hat{\varphi}(\xi)=\prod_{j=1}^{\infty}m_0\left(\xi/2^j\right)$ ile tanımlansın ve ayrıca $\varphi=\left(\hat{\varphi}\right)^{\vee}$ olsun. Bu takdirde $\left\{\varphi_{0,k}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $L^2(\mathbb{R})$' de ortonormal bir cümledir [8].

Teorem 2.6 $m_0:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, 2π periyotlu olsun.

- Her ξ için $\left|m_0(\xi)+m_0(\xi+\pi)\right|^2=1$.
- $m_0(0)=1$.
- m_0 , $\delta>0$ dereceli Lipschitz koşulunu sağlasın.
- $\inf_{|\xi|\le\pi/2}\left|m_0(\xi)\right|>0$.

Eğer $u=\left(u(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}}$, $m_0(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}u(k)e^{-ik\xi}$, $u(k)$ (2.41) denklemi ile tanımlanır ve $u\in\ell^1(\mathbb{Z})$ olarak alınırsa, bu takdirde $\prod_{j=1}^{\infty}m_0\left(\xi/2^j\right)$, bir $\hat{\varphi}\in L^2(\mathbb{R})$ fonksiyonuna sınırlı cümleler üzerinde düzgün yakınsaktır. Diğer yandan $\varphi=\left(\hat{\varphi}\right)^{\vee}$ ise, φ, (2.42) denklemini sağlar ve $\left\{\varphi_{0,k}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $L^2(\mathbb{R})$' deki bir ortonormal cümledir.

Diğer yandan $j\in\mathbb{Z}$ için,

$$V_j=\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}}z(k)\varphi_{j,k}:z=\left(z(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}}\in\ell^2(\mathbb{Z})\right\} \tag{2.44}$$

tanımlanırsa, bu takdirde $\left\{V_j\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$,φ ölçüm fonksiyonlu ve u ölçüm dizili bir çoklu çözünürlüğe sahiptir [8].

Teorem 2.7 $u = \left(u(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ dizisinin aşağıdaki özellikleri sağladığını farz edelim:

- Bazı $\varepsilon > 0$ için $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{\varepsilon} \left|u(k)\right| < +\infty$.
- $\sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k) = \sqrt{2}$.
- $\left\{R_{2k}u\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\ell^2(\mathbb{Z})$ de bir ortonormal cümledir.
- $m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k) e^{-ik\xi}$ için $\inf_{|\xi|\le\pi/2} \left|m_0(\xi)\right| > 0$.

Bu takdirde $\prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\xi / 2^j\right)$ biçimindeki $\mathbb{R}$' nin sınırlı cümleleri, bir $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. $\varphi = \left(\hat{\varphi}\right)^{\vee}$ ve her bir $j \in \mathbb{Z}$ için V_j, (2.44) denklemi ile tanımlanırsa, bu takdirde $\left\{V_j\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$, φ ölçüm fonksiyonlu ve u ölçüm dizili bir çoklu çözünürlüğe sahiptir.

2.3 Dalgacık Dönüşümü

Dalgacık analizi, sinyali küçük zamanlı sonlu enerji fonksiyonlarıyla yapılır. İncelenen sinyal, daha kullanışlı bir sinyal biçimine dönüştürülür. Sinyalin bu dönüşümü dalgacık dönüşümü olarak adlandırılır.

Dalgacık dönüşümü, süreksizlik ve ani peak yapan, periyodik olmayan ve durağan olmayan sinyalleri doğru olarak yapılandırmak ve yeniden oluşturmak için geleneksel Fourier dönüşümüne göre daha fazla avantajlara sahiptir. Fourier dönüşümünün tersine farklı alanlarda kullanılan farklı dalgacık tipleri vardır. Özel dalgacıkların seçimi uygulanacak olan problemin tipine bağlıdır. Dalgacıkların iki çeşitli durumu vardır. Bunlardan ilki ötelemedir. x ekseni boyunca dalgacığın merkezi konumu değiştirilir. İkincisi ise ölçeklemedir. Dalgacık dönüşümü temelde sinyal ile dalgacığı yerel eşleştiren ölçeklendirmedir. Dalgacıklar özel bir ölçek ve konumda sinyalle eşleştirilirse, oldukça önemli olan dönüşüm değeri elde edilir. Dönüşümün bu değeri iki boyutlu dönüşüm düzleminde çizdirilir. Dönüşüm, dalgacığın çeşitli ölçekleri için sinyallerin çeşitli konumlarında hesaplanır. Eğer; bu durum sürekli ve düzgün olarak ilerlediyse, dönüşüm sürekli dalgacık dönüşümü, eğer ölçek ve konum ayrık adımlarda değişiyorsa, dönüşüm ayrık dalgacık dönüşümüdür.

Dalgacıklar, b konum parametresi ve a ölçekleme parametresi olmak üzere,

$$\psi_{a,b}(t)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad , \qquad a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0 \tag{2.45}$$

biçiminde tanımlanır. Fonksiyonun dalgacık olması için zaman sınırlı olmalıdır. Verilen bir a ölçeklendirme parametresi ve b parametresi ile değiştirilerek bir dalgacığa dönüştürülür. Böylece her bir (a,b) biçiminde dalgacık dönüşüm katsayısı için,

$$W(a,b)=\int_t f(t)\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt \tag{2.46}$$

dalgacık dönüşümü ifade edilir. Eğer burada $|a|<1$ ise, (2.46) denklemindeki dalgacık yüksek frekansa karşılık gelir ve ana dalgacığın şıkıştırılmış halidir. Diğer taraftan $|a|>1$ ise bu takdirde, $\psi_{a,b}(t)$ düşük frekansa karşılık gelmekte ve $\psi(t)$' den daha büyük bir zaman genişliğine sahip olduğu görülmektedir.

Dalgacıkların böylece frekansa göre adapte olan zaman genişleme özelliğine muktedir olduğu açıktır.

2.3.1 Sürekli Dalgacık Dönüşümü

$f(x)$ karesi integrallenebilir herhangi bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $f\in L^2(\mathbb{R})$ nin ψ' ye göre $W_\psi f$ sürekli dalgacık dönüşümü, $a,b\in\mathbb{R}$ ve $\overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}$ kompleks eşlenik olmak üzere,

$$W_\psi(a,b)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}dt \tag{2.47}$$

biçiminde tanımlanır.

Dalgacık dönüşümü iki değişkenli bir fonksiyondur. $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$, tüm a ve b' ler için enerjinin aynı kalmasını sağlayan normalleştirme çarpanıdır. Yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi_{a,b}\left(x\right)\right|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi\left(x\right)\right|^2 dx \tag{2.48}$$

olup, $W_\psi f$ sürekli dalgacık dönüşümünde

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\widehat{\psi}\left(x\right)\right|}{\left|\psi\right|} dx < \infty \tag{2.49}$$

olarak tanımlanmalıdır. Bu sabitin sonluluğu, dalgacık olarak kullanılan fonksiyonları $L^2\left(\mathbb{R}\right)$' nin sınıfı ile sınırlandırır. Bu ise,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(x\right) dx = 0 \tag{2.50}$$

olmasını gerektirir. Bu taktirde C_ψ sabitli yeniden oluşum formülü

$$f\left(x\right) = \frac{1}{C_\psi} \int\int_{\mathbb{R}} W_\psi\left(a,b\right) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} \frac{da\,db}{a^2} \quad , \quad f \in L^2\left(\mathbb{R}\right) \tag{2.51}$$

biçiminde ifade edilir [9].

2.3.2 Ayrık Dalgacık Dönüşümü

f' yi her yerde oluşturabilmek için C_ψ' nin bilinmesine gereksinimin olup olunmayacağının yanıtı oldukça önemlidir. Bunun cevabı ise "hayır" dır. Çünkü burada ayrık alt cümlelerin kullanımı uygun bir amaç olarak görülür. Bu düşünce şöyle açıklanır: $\mathbb{R}$' nin ayrık alt cümlesi $\mathbb{R}^{+*}$ olsun. Ayrıca $a_0 > 1$, $b_0 > 0$ ve $a \in \left\{a_0^j\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ ve $b \in \left\{k a_0^j b_0\right\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ olarak tanımlansın. Bu takdirde dalgacıkların ailesinin yerine

$$W_{a,b}\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \qquad a \in \mathbb{R}^{+*}, b \in \mathbb{R} \tag{2.52}$$

alınır ve ayrık dalgacık dönüşümü için ise, $\mathbb{Z}$ ile indeksli dalgacıkların ailesi kullanılır. Böylece $j,k \in \mathbb{Z}$ için $a_0 > 1,\ b_0 > 0$ sabitler olmak üzere

$$\psi_{j,k}(x) = a_0^{-j/2}\psi\left(a_0^{-j}x - kb_0\right) \tag{2.53}$$

yazılır. Diğer yandan $f \in L^2$ için bu fonksiyonun ayrık dalgacık dönüşümü

$$C_f(j,k) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\psi_{j,k}(x)}dx = \left\langle f, \psi_{j,k} \right\rangle_{L^2} \quad , \quad j,k \in \mathbb{Z} \tag{2.54}$$

biçimindedir. Eğer $a_0 = 2$ ve $b_0 = 1$ değerleri için ayrık dalgacık dönüşümü oluşturulmak istenirse

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\psi\left(2^{-j/2}x - k\right) \tag{2.55}$$

ifade edilir. Bu çoklu çözünürlük için kullanılan $L^2(\mathbb{R})$ için ortonormal bir baz oluşturmaktadır [9].

2.4 Dalgacıklar Ailesi

$\varphi(x)$ ölçüm fonksiyonu ile birlikte $\psi(x)$ dalgacık fonksiyonu bir dalgacık sistemi oluşturur. Literatürde farklı özelliklere sahip bazı dalgacıklar mevcuttur. Bunlardan bazıları,

- Haar dalgacıkları
- Daubechies dalgacıkları
- Coiflet dalgacıkları
- Chebyshev dalgacıkları
- Legendre dalgacıkları
- Shannon dalgacıkları
- Morlet dalgacıkları
- Mayer dalgacıkları
- Mexican hat dalgacıkları

biçimindedir. Bu dalgacıklar bilinen en yaygın dalgacık tipleridir. Bu tez çalışmasında Chebyshev dalgacıkları ele alınacak, bunun yanında diğer dalgacıklara da kısaca değinilecektir.

2.4.1 Haar Dalgacıkları ve Özellikleri

Haar dalgacıkları en eski dalgacık fonksiyonlarından olup ilk olarak bu dalgacık 1910 yılında Alfred Haar tarafından oluşturulmuştur.

Haar dalgacıklarının $[0,1)$ aralığı üzerinde tanımlı ölçüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$h_1(x)=\begin{cases}1 \ , \ x\in[0,1) \\ 0 \ , \ diğer \ durumlarda\end{cases} \tag{2.56}$$

Ayrıca, $[0,1)$ aralığı üzerinde tanımlı Haar dalgacıklar ailesinin ana dalgacığı ise

$$h_2(x)=\begin{cases}1, & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right) \\ -1, & x\in\left[\frac{1}{2},1\right) \\ 0, & diğer \ durumlarda\end{cases} \tag{2.57}$$

olarak ifade edilir.

Haar dalgacık ailesinin diğer tüm fonksiyonları $[0,1)$ aralığının alt aralıklarında tanımlı ve genleşme ve öteleme işlemleri ile birlikte $h_2(x)$ den üretilirler. Haar dalgacık ailesindeki ölçüm fonksiyonu hariç her bir fonsiyon $x\in[0,1)$ için tanımlanmıştır. Bu durum aşağıdaki gibi açıklanır:

$\alpha=\dfrac{k}{m}, \ \beta=\dfrac{k+0.5}{m}, \ \gamma=\dfrac{k+1}{m}, \ \ i=1,2,\ldots,2M$ olmak üzere

$$h_i(x)=\begin{cases}1, & x\in[\alpha,\beta) \\ -1, & x\in[\beta,\gamma) \\ 0, & diğer \ durumlarda\end{cases} \tag{2.58}$$

biçimindedir.

Burada $j=0,1,...,J$, $M=2^J$, $m=2^j$ ve $k=0,1,...,m-1$, j dalgacığın derecesini, k ise öteleme parametresini göstermektedir. Haar dalgacığının türevi sürekli olmadığından bunların birçok alanda kullanımını sınırlıdır. Haar dalgacığı simetriklik, ortogonallik, biortogonallik, özelliklerini sağlarken süreklilik özelliğini sağlamaz.

2.4.2 Daubechies Dalgacıkları ve Özellikleri

Daubechies dalgacığı, Haar ile kıyaslandığında daha karmaşıktır ve daha uzun işlemler gerektirmektedir. Daubechies dalgacığı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$N \in \mathbb{N}$ için, $\psi = {}_N\psi \in L^2(\mathbb{R})$ Daubechies dalgacıklarının $D-2N$ sınıfının bir fonksiyonu

$$\psi(x) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{2N-1}(-1)^k h_{2N-1-k}\varphi(2x-k) \tag{2.59}$$

ile tanımlansın. Bu dalgacık fonksiyonu $h_0,...,h_{2N-1} \in \mathbb{R}$ olmak üzere sabit filtre katsayılarına sahip olup

$$\sum_{k=0}^{N-1} h_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sum_{k=0}^{N-1} h_{2k+1} \tag{2.60}$$

koşulunu sağlar. Bunun yanı sıra $l=0,1,...,N-1$ için $\varphi = {}_N\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Daubechies ölçüm fonksiyonu

$$\varphi(x) = \sqrt{2}\sum_{0}^{2N-1} h_k\varphi(2x-k) \tag{2.61}$$

tekrar eden formül denklemi ile verilir. Ayrıca $x \in \mathbb{R} - [0, 2N-1[$ için $\varphi(x)=0$ ve bununla birlikte $k \neq l$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(2x-k)\varphi(2x-l)\,dx = 0 \tag{2.62}$$

eşitliği sağlanmalıdır. Daubechies dalgacık ailesi biortogonallik ve ortogonallik özelliklerini sağlar. Ayrıca hem sürekli dalgacık dönüşümü, hem de ayrık dalgacık dönüşümü için kullanılır.

2.4.3 Coiflet Dalgacıkları ve Özellikleri

Ronald Coifman'ın önerisi üzerine Coiflet dalgacığı Daubechies tarafından geliştirilen bir dalgacıktır. Coiflet dalgacığı, Daubechies dalgacık ailesine benzer şekilde ele alınır. Burada kullanılacak olan ölçekleme fonksiyonunun ise aşağıdaki özelliklere sahip olması gerekmektedir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt = 1 \;,\; \int_{-\infty}^{\infty} t^k \varphi(t)\,dt = 0 \tag{2.63}$$

Coiflet dalgacıkları ayrık ve sürekli dalgacık dönüşümlerinin her ikisinde de kullanılabilirdir.

2.4.4 Chebyshev Dalgacıkları ve Özellikleri

Chebyshev dalgacıkları $k \in \mathbb{N},\ n = 1,2,...,2^{k-1}$ ve $\hat{n} = 2n-1$ olmak üzere dört değişkenli $\psi_{n,m}(t) = \psi(k,\hat{n},m,t)$ olarak ifade edilir. Böylece, $[0,1)$ aralığında tanımlı m dereceli Chebyshev polinomları $m = 0,1,...,M-1$ ve M sabit pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$$\psi_{n,m}(t) = \begin{cases} 2^{k/2}\tilde{T}_m\left(2^k t - \hat{n}\right), & \dfrac{\hat{n}-1}{2^k} \le t < \dfrac{\hat{n}}{2^k} \\ 0 & , \ diğer\ durumlarda \end{cases} \tag{2.64}$$

$$\tilde{T}_m(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} & , \ m = 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} T_m(t) & , \ m > 0 \end{cases} \tag{2.65}$$

biçiminde tanımlanır. Burada t normalleştirilmiş zamandır. (2.65) denklemindeki katsayılar ise ortonormalliği sağlamak için kullanılır. Ayrıca $T_m(t)$, $[-1,1]$ aralığında $w(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan iyi bilinen m dereceli Chebyshev polinomlarıdır. Bunlar aşağıda verilen tekrar etme formülü ile hesaplanır.

Diğer bir deyişle $m = 1,2,...$ olmak üzere

$$T_0(t)=1\,,\;\; T_1(t)=t$$
$$T_{m+1}(t)=2tT_m(t)-T_{m-1}(t) \tag{2.66}$$

biçimindedir.

2.4.5 Legendre Dalgacıkları ve Özellikleri

Legendre dalgacıkları $k\in\mathbb{N},\; n=1,2,...,2^{k-1}$ ve $\hat{n}=2n-1$ olmak üzere dört değişkenli $\psi_{n,m}(t)=\psi(k,\hat{n},m,t)$ olarak ifade edilir. Bu durumda $[0,1)$ aralığında tanımlı m dereceli Legendre polinomları $m=0,1,...,M-1$ ve M sabit pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$$\psi_{n,m}(t)=\begin{cases}\sqrt{m+\dfrac{1}{2}}\,2^{k/2}P_m\left(2^k t-\hat{n}\right), & \dfrac{\hat{n}-1}{2^k}\le t<\dfrac{\hat{n}}{2^k}\\ 0 & ,\; diğer\ durumlarda\end{cases} \tag{2.67}$$

biçiminde tanımlanır [10]. Burada t normalleştirilmiş zamandır. Ayrıca (2.67) denklemindeki $\sqrt{m+\dfrac{1}{2}}$ katsayısı, ortonormalliği ve $a=2^{-k}$ genleşme parametresini ve $b=\hat{n}2^{-k}$ ise öteleme parametresini ifade etmektedir. Bunun yanında $P_m(t)$, $[-1,1]$ aralığında $w(t)=1$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan iyi bilinen m dereceli Legendre polinomlarıdır. Bunlar $m=1,2,...$ olmak üzere

$$P_0(t)=1\,,\;\; P_1(t)=t$$
$$P_{m+1}(t)=\left(\frac{2m+1}{m+1}\right)tP_m(t)-\left(\frac{m}{m+1}\right)P_{m-1}(t) \tag{2.68}$$

tekrar etme formülü ile tüm Legendre polinomları bulunabilirdir.

2.4.6 Shannon Dalgacıkları ve Özellikleri

Shannon (sinc) dalgacığı aşağıda tanımlandığı gibi önemli bir fonksiyondur.

$$\mathrm{sinc}(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & x\neq 0\\ 1 & ,\; x=0\end{cases} \tag{2.69}$$

Shannon dalgacık özellikleri ise

- Shannon ölçüm fonksiyonu düzgündür. Bunun anlamı shannon dalgacık fonksiyonu ile birlikte onun türevleri vardır ve süreklidir.
- Shannon fonksiyonu kompakt desteğe sahip değildir.
- Shannon fonksiyonu çift fonksiyondur.
- $h^{-1/2}\operatorname{sinc}\left(\dfrac{x-ih}{h}\right)$, her $h>0$ için ortogonaldir [10].

2.4.7 Morlet Dalgacıklar ve Özellikleri

Morlet dalgacığı, sürekli dalgacık dönüşümünün en bilindik dalgacığıdır. Morlet dalgacığının ana dalgacık fonksiyonu

$$\Psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ifte^{\frac{-x^2}{2}}} \tag{2.70}$$

biçimindedir. Dalgacığın merkezi frekansı f ile temsil edilir. Morlet dalgacığının ölçekleme fonksiyonu yoktur. Morlet dalgacığı simetri özelliğine sahiptir fakat ortogonallik, biortogonallik ve kompakt destek gibi özellikleri sağlamamaktadır. Bu özelliklerinden dolayı Morlet dalgacığı sadece sürekli dalgacık dönüşümünde kullanılabilmektedir.

2.4.8 Mayer Dalgacıkları ve Özellikleri

Ölçüm fonksiyonu

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\begin{cases}1 & , |x|\le 2\pi/3\\ \cos\left[\dfrac{\pi}{2}\psi\left(\dfrac{3}{2\pi}|x|-1\right)\right] & , 2\pi/3\le|x|\le 4\pi/3\\ 0 & , \textit{diğer durumlar}\end{cases} \tag{2.71}$$

olmak üzere

$$\psi(x)=\begin{cases}0\ ,\ x\leq 0\\ 1\ ,\ x\geq 1\\ x\to 0\ \text{ iken } \psi,\ 0\text{'dan } 1\text{'e düzgün dönüşüm}\end{cases} \tag{2.72}$$

biçimindeki herhangi ψ Mayer dalgacık fonksiyonu sonsuz kez türevlenebilir negatif olmayan bir fonksiyondur.

2.4.9 Mexican Hat Dalgacıkları ve Özellikleri

Mexican Hat dalgacığının ölçekleme fonksiyonu olmadığı için ayrık dalgacık dönüşümünde kullanılamaz. Bu dalgacık adını Meksikalıların giydikleri şapkaya benzerliğinden dolayı almaktadır. Mexican Hat dalgacığının dalgacık fonksiyonun aşağıdaki gibidir:

ψ , $\psi_{(\mu,s)}$ dalgacık ailesinin ana dalgacığı olmak üzere $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\left(1-x^2\right)dx=0$ koşulunu sağlayan dalgacık fonksiyonu

$$\psi_{(\mu,s)}(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}e^{-x^2/2}\left(1-x^2\right) \tag{2.73}$$

biçiminde tanımlanır. Mexican Hat dalgacığı ortogonallik ve biortogonallik özelliklerini sağlamadığı gibi ayrıca kompakt desteğe de sahip değildir. Sadece ve sadece sürekli dalgacık dönüşümünde kullanılır.

2.5 Kompakt Destekli Dalgacıklar

Şimdiye kadar $u\in\ell^1(\mathbb{Z})$ ölçümlü çoklu bir çözünürlüğün $L^2(\mathbb{R})$ için bir dalgacık sistemi oluşturduğu gösterilmiş olup, bu kısımda ise kompakt destekli dalgacıklar ele alınarak özellikleri vurgulanmaya çalışılacaktır.

Teorem 2.8 $m_0:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ve bazı pozitif N tamsayısı için $m_0(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}u(k)e^{-ik\xi}$ biçiminde bir trigonometrik polinomun olduğunu kabul edelim. Ayrıca

Her ξ için $|m_0(\xi)| \le 1$, $m_0(0)=1$ ve $\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\xi/2^j)$ olsun. Bu takdirde $\varphi = (\hat{\varphi})^{\vee}$ olup $\sup\varphi \subseteq [0,N]$ ile kompakt destektir [8].

Lemma 2.11 $f \in L^2(\mathbb{R})$ ve bazı $\varepsilon \in (0,1]$ için ε dereceli Lipschitz koşulunun sağlandığını kabul edelim. Bunun anlamı, tüm $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x) - f(y)| \le C_1 |x-y|^{\varepsilon} \tag{2.74}$$

olacak şekilde bir $C_1 < \infty$ sabiti vardır. Bunun yanında eğer $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 1 \tag{2.75}$$

ve

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^{\varepsilon} |\varphi(x)|\,dx = C_2 < \infty \tag{2.76}$$

özellikleri sağlanıyorsa, bu takdirde

$$\left|2^{m/2}\langle f, \varphi_{m,k}\rangle - f(2^{-m}k)\right| \le C_1 C_2 2^{-m\varepsilon} \tag{2.77}$$

olup, buna denk olarak

$$\left|\langle f, \varphi_{m,k}\rangle - 2^{-m/2} f(2^{-m}k)\right| \le C_1 C_2 2^{-m(\varepsilon+1/2)} \tag{2.78}$$

yazılır [8].

Lemma 2.11' deki açıklamalar φ ölçüm fonksiyonunun $\hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 1$ olacak şekilde neden normalleştirildiğini ifade eder. Herhangi uygun bir ölçüm fonksiyonu tüm $0 < \varepsilon \le 1$ için (2.76) eşitliğini sağlar. Örneğin φ kompakt destek ile sınırlandırılırsa, (2.76) denklemi açıktır.

Yeterince büyük m değeri için, $y_m(k) = \langle f, \varphi_{m,k}\rangle \approx 2^{-m/2} f(2^{-m}k)$ olur. Lemma 2.11' deki f fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlarsa bu yaklaşımdaki hata için bir tahmin verir. Herhangi sınırlı türevlenebilir bir fonksiyonunun $\varepsilon = 1$ olmak üzere (2.74) denklemini sağlaması için burada ortalama değer teoremi kullanılmaktadır. Bazı durumlarda yeterince büyük m değerleri istenmeyebilir. Böyle durumlarda (2.77) eşitliğindeki yaklaşım tatmin edici olmayabilirdir. Bu durumda, yeterli doğruluğa ulaşmak için $\left\langle f, \varphi_{m,k} \right\rangle$ bazı nümerik metotlarla tahmin edilebilirdir.

Nümerik metotlara geçmeden önce son olarak da Block pulse fonksiyonları ve özelliklerini ele alalım.

BÖLÜM 3

BLOCK PULSE FONKSİYONLARI

3.1 Block Pulse Fonksiyonları

Bu kısımda Block pulse fonksiyonları ele alınarak bunların bazı özellikleri verilmiştir.

Block pulse fonksiyonlarının bir $m-$cümlesi, $t \in [0,T),\ i = 1,2,...,m$ ve $h = \dfrac{T}{m}$ olmak üzere,

$$b_i(t) = \begin{cases} 1, & (i-1)h \le t < ih \\ 0, & diğer\ durumlar \end{cases} \tag{3.1}$$

biçiminde tanımlanır. Block pulse fonksiyonlarının cümleleri $[0,T)$ aralığında ayrıktır ve δ_{ij} Kroniker delta fonksiyonu olmak üzere,

$$b_i(t)b_j(t) = \delta_{ij}b_i(t),\ i,\ j = 1,2,...,m \tag{3.2}$$

biçiminde yazılır. $[0,T)$ aralığında tanımlı block pulse fonksiyonlarının cümleleri birbirleri ile ortogonaldir. Yani, $i,\ j = 1,2,...,m$ olmak üzere

$$\int_0^T b_i(t)b_j(t)\,dt = h\delta_{ij} \tag{3.3}$$

dir. Ayrıca $m \to \infty$ iken block pulse fonksiyonlarının cümleleri $L^2[0,T)$ için bir tam bazdır.

Bu nedenle keyfi reel değerli sınırlı, $[0,T)$ aralığında karesi integrallenebilir bir $f(t)$ fonksiyonunun block pulse serileri

$$f_i = \frac{1}{h}\int_0^T b_i(t)\, f(t)\, dt, \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{3.4}$$

olmak üzere

$$f(t) \simeq \sum_{i=1}^{m} f_i b_i(t) \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanır. Diğer yandan (3.5) denklemi vektör formunda yeniden yazılırsa,

$B(t) = \left[b_1(t), b_2(t), \ldots, b_m(t)\right]^T$, $F = \left[f_1, f_2, \ldots, f_m\right]^T$ olmak üzere,

$$f(t) \simeq \sum_{i=1}^{m} f_i b_i(t) = F^T B(t) = B^T(t) F \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanır. Diğer yandan $k(s,t) \in L^2\left([0,T_1]\times[0,T_2]\right)$ biçiminde iki boyutlu herhangi bir fonksiyon, $B(t)$ block pulse fonksiyonlarının m boyutlu bir vektörü ve K ise block pulse fonksiyonlarının $m \times m$ tipinde katsayılar matrisi olmak üzere

$$k(s,t) = B^T(s)\,\mathrm{K}\,B(t) \tag{3.7}$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca $h_1 = \dfrac{T_1}{m}$ ve $h_2 = \dfrac{T_2}{m}$ olmak üzere K matrisinin (i,j). elemanı

$$\mathrm{K}_{ij} = \frac{1}{h_1 h_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} k(s,t)\, b_i(t)\, b_j(s)\, dt\, ds\ , \quad i, j = 1,2,\ldots,m \tag{3.8}$$

formülü ile hesaplanır. Buna ilaveten BPF' nin herhangi bir vektörü $B(t)$ ve $B^T(t)B(t) = 1$ ise, bu taktirde

$$B(t)B^T(t)=\begin{bmatrix} b_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2(t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_m(t) \end{bmatrix}_{m\times m} \tag{3.9}$$

olduğu açıktır. Bunun yanında F $m\times m$ tipinde bir vektör ve $\tilde{F}=diag(F)$ için, $B(t)B^T(t)F=\tilde{F}B(t)$ olduğu görülür. Aynı zamanda A, $m\times m$ tipinde bir matris ve $\widehat{A}=diag(A)$ $m\times m$ tipinde bir vektörü olmak üzere

$$B(t)AB^T(t)=\widehat{B}^T\Phi(t) \tag{3.10}$$

biçimindedir [11].

3.1.1 Block Pulse Fonksiyonlarının Operasyonel Matrisleri

(3.6) denklemindeki $B(t)$ matrisinin integrali Kılıçman ve Al Zahur [12] tarafından gösterilmiş ve bununla ilgili integral operasyonel matrisi araştırılmıştır. Buna göre, $B(t)$nin bir kez integrali alınarak elde edilen $m\times m$ tipindeki operasyonel bir P matrisi için,

$$\int_0^t B(\tau)d\tau \simeq PB(t) \tag{3.11}$$

olduğu görülür. Dahası $B(t)$' nin n kez integrali alınarak elde edilen genelleştirilmiş operasyonel matrisi P^n matrisi için,

$$\underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t B(\tau)(d\tau)^n}_{n-kez} \simeq P^n B(t) \tag{3.12}$$

formülü ile ifade edilir.

Ayrıca [13] de gösterildiği gibi P^n, $\xi_i=(i+1)^{n+1}-2i^{n+1}+(i-1)^{n+1}$ olmak üzere,

$$P^n = \frac{h^n}{(n+1)!}\begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{m-1} \\ 0 & 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \xi_{m-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

formundadır.

Bu bölümde elde etmiş olduğumuz P^n genelleştirilmiş operasyonel matrisi, bu tez çalışmasında bahsedilen metottaki matrislerin integrallerinin hesaplamasında oldukça etkilidir. Bu hesaplamanın metot içerisinde nasıl kullanıldığı ile ilgili kısımlara Bölüm 4' de metot açıklanırken detaylı olarak yer verilecektir.

BÖLÜM 4

CHEBYSHEV DALGACIK SIRALAMA METODU

Sıralama metodu, faz uzayında nokta değerlerine etki eden sayısal operatörleri içerir. Genellikle dalgacık sıralama metotları seçilen bir dalgacık ve hesaplamalı olarak uyarlanacak bir çeşit grid yapısı ile oluşturulur. Dalgacık sıralama metodunda doğrusal olmayan davranışların giderilmesi, algoritmanın doğasına bağlı olarak çok basit bir iştir. Bu kısımda Chebyshev dalgacık sıralma metodu ele alınmış ve metodun nasıl kullanılacağı tartışılmıştır.

4.1 Ötelenmiş Chebyshev Polinomları ve Özellikleri

Chebyshev polinomları, $[-1,1]$ aralığında tanımlı $w(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan ve aşağıda verilen tekrar etme formülüne dayalı

$$\begin{aligned}
&T_0(x)=1\\
&T_1(x)=2x-1\\
&T_{m+1}(x)=2xT_m(x)-T_{m-1}(x)\ ,m=1,2,3,...
\end{aligned} \tag{4.1}$$

biçimindeki fonksiyonlardır.

$[0,1]$ aralığında tanımlı Chebyshev polinomları için $t=2x-1$ dönüşümü yapılarak elde edilen polinomlara ötelenmiş Chebyshev polinomları denir.

Şimdi, $T_m(2x-1)$ biçimindeki ötelenmiş Chebyshev polinomlarının $\tilde{T}_m(x)$ ile tanımlandığını kabul edelim. Bu takdirde, $\tilde{T}_m(x)$ polinomları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} &\tilde{T}_0(x)=1 \\ &\tilde{T}_1(x)=2x-1 \\ &\tilde{T}_{m+1}(x)=2(2x-1)\tilde{T}_m(x)-\tilde{T}_{m-1}(x)\ , m=1,2,3,... \end{aligned} \tag{4.2}$$

Bu ötelenmiş polinomların ortogonallik koşulu ise

$$\gamma_m=\begin{cases} 2\ ,\ m=0 \\ 1\ ,\ m\geq 1 \end{cases} \tag{4.3}$$

olmak üzere

$$\int_0^1 \frac{\tilde{T}_m(x)\tilde{T}_n(x)}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}dx=\begin{cases} \dfrac{\pi\gamma_m}{4}, & m=n \\ 0\quad , & m\neq n \end{cases} \tag{4.4}$$

biçimindedir.

4.2 Chebyshev Dalgacıklarının Özellikleri ve İntegralin Operasyonel Matrisi

Dalgacıklar, $\psi(x)$ ana dalgacık olmak üzere tek bir fonksiyonun genişlemesinden ve ötelenmesinden oluşan bir fonksiyon ailesidir. a genleşme parametresi ve b öteleme parametresi olmak üzere a ve b' ler sürekli olarak değişirse, bu taktirde

$$\psi_{a,b}(x)=|a|^{-1/2}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \qquad a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0 \tag{4.5}$$

biçiminde sürekli dalgacık ailesi elde edilir [9].

Chebyshev dalgacıkları dört bağımsız değişkenli olarak $\psi_{n,m}(x)=\psi(k,n,m,x)$ şeklinde yazılırlar. Burada $k=0,1,2,...$ ve $n=1,2,...,2^{k-1}$ olmak üzere m birinci mertebe Chebyshev polinomlarının derecesini, x ise normalleştirilmiş zamanı göstermektedir. Diğer yandan Chebyshev polinomları $[0,1]$ aralığında $m=0,1,...,M-1$, $n=1,2,...,2^{k-1}$ ve

$$\alpha_m = \begin{cases} \sqrt{2}, & m=0 \\ 2 \quad, & m=1,2,\ldots \end{cases} \tag{4.6}$$

olmak üzere

$$\psi_{n,m}(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_m 2^{k/2}}{\sqrt{\pi}} T_m\left(2^k x - 2n + 1\right), & \dfrac{n-1}{2^{k-1}} \le x \le \dfrac{n}{2^{k-1}} \\ 0 & , \textit{diğer durumlar} \end{cases} \tag{4.7}$$

biçiminde ifade edilir.

Burada $T_m(x)$, $\left[-1,1\right]$ aralığında ağırlık fonksiyonu $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$' e göre ortogonal olan ve

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{m+1}(x) &= 2xT_m(x) - T_{m-1}(x) \end{aligned} \tag{4.8}$$

biçimindeki tekrar etme formüllerini sağlayan, *m.* mertebeden iyi bilinen Chebyshev polinomlarıdır. Diğer yandan $T_m\left(2^{k+1}x - 2n + 1\right)$ birinci mertebeden m dereceli Chebyshev polinomları oldup, bunlara ait ağırlık fonksiyonu ise $w_n(x) = w\left(2^{k+1}x - 2n + 1\right)$ biçimindedir.

Bir $f(x) \in L_w^2\left[0,1\right]$ fonksiyonu Chebyshev dalgacıkları cinsinden

$$c_{n,m} = \left\langle f(x), \psi_{n,m}(x) \right\rangle \tag{4.9}$$

olmak üzere

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{n,m} \psi_{n,m}(x) \tag{4.10}$$

şeklinde yazılabilirdir. (4.9) denklemindeki $\langle .,. \rangle$ operatörü, $w_n(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre iç çarpımı tanımlar. Ayrıca (4.10) denkleminde toplam sonlu olarak ifade edilmek istenirse

$$C=\left[c_{1,0},c_{1,1},\ldots,c_{1,M-1},c_{2,0},c_{2,1},\ldots,c_{2,M-1},\ldots,c_{2^{k-1},0},\ldots,c_{2^{k-1},M-1}\right]^T \tag{4.11}$$

ve

$$\Psi(x)=\left[\psi_{1,0}(x),\psi_{1,1}(x),\ldots,\psi_{1,M-1}(x),\psi_{2,0}(x),\psi_{2,1}(x),\ldots,\psi_{2,M-1}(x),\ldots,\psi_{2^{k-1},0}(x),\ldots,\psi_{2^{k-1},M-1}(x)\right]^T \tag{4.12}$$

olmak üzere

$$f(x)\simeq\sum_{n=1}^{2^{k-1}}\sum_{m=1}^{M-1}c_{n,m}\psi_{n,m}(x)=C^T\Psi(x) \tag{4.13}$$

şeklinde yazılır. Basitlik açısından (4.11) ve (4.12) denklemleri yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned}C&=\left[c_1,c_2,\ldots,c_{2^{k-1}}\right]^T\\ \Psi(x)&=\left[\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{2^{k-1}}\right]^T\end{aligned} \tag{4.14}$$

ve

$$\begin{aligned}c_i&=\left[c_{i,0},c_{i,1},\ldots c_{i,M-1}\right]^T\\ \psi_i(x)&=\left[\psi_{i,0}(x),\psi_{i,1}(x),\ldots\psi_{i,M-1}(x)\right]^T,\ i=1,2,\ldots,2^{k-1}\end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir. Şimdi de $u(x,t)$, $[0,1]\times[0,1]$' de tanımlı iki değişkenli keyfi bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $u(x,t)$ fonksiyonu $C=\left[c_{ij}\right]$ ve $c_{ij}=\left\langle\psi_i(x),\left\langle u(x,t),\psi_j(t)\right\rangle\right\rangle$ olmak üzere Chebyshev dalgacık bazları yardımıyla

$$u(x,t)\simeq\sum_{i=1}^{2^{k-1}M}\sum_{j=1}^{2^{k-1}M}c_{ij}\psi_i(x)\psi_j(t)=\Psi(t)^T C^T\Psi(t) \tag{4.16}$$

biçiminde ifade edilir. Burada sıralama noktaları

$$t_i=\frac{2i-1}{2^kM},\qquad i=1,2,\ldots,2^{k-1}M \tag{4.17}$$

formülü yardımıyla seçilir ve $2^{k-1}M\times2^{k-1}M$ boyutlu Φ matrisi,

$$\Phi = \left[\Psi\left(\frac{1}{2^k M}\right), \Psi\left(\frac{3}{2^k M}\right), ..., \Psi\left(\frac{2^k M - 1}{2^k M}\right) \right] \tag{4.18}$$

olarak tanımlanır. Öte yandan yöntemi uygulamak için operatör matrisinin integralinin nasıl hesaplanacağının bilinmesi gerekir. Bu nedenle Kilicman ve Al Zhour [12], genelleştirilmiş integral operatör matrisini detaylı olarak araştırmışlardır. Bu araştırmaya göre, $\Psi(x)$ vektörünün integrali

$$\int_0^x \Psi(\tau)\, d\tau \simeq P\Psi(x) \tag{4.19}$$

olup, burada P, $\Psi(x)$' nin bir kez integrali alınarak elde edilen $2^{k-1}M \times 2^{k-1}M$ boyutlu operatör matrisidir [13]. Bunun yanında, Kilicman ve Al Zhour [12] $\Psi(x)$' nin n kez integralini almış ve elde edilen operatör matrislerini genelleştirerek

$$\underbrace{\int_0^x ... \int_0^x \Psi(\tau) d\tau ... d\tau}_{n-kez} \simeq P^n \Psi(x) \tag{4.20}$$

biçiminde ifade etmişlerdir. Çelik [14], farklı temeldeki karşılık gelen integral operatör matrisini elde etmek için tek düze bir metot ileri sürmüştür. Dolayısıyla $\Psi(x)$' nin integral operatör matrisi

$$P = \Phi P_B \Phi^{-1} \tag{4.21}$$

olarak ifade edilmiş ve bu da genelleştirilerek,

$$P^n = \Phi P_B^n \Phi^{-1} \tag{4.22}$$

biçiminde ortaya konulmuştur. Burada $\xi_i = (i+1)^{n+1} - 2i^{n+1} + (i-1)^{n+1}$ olmak üzere P_B^n block pulse fonksiyonunun n kez integrali alınmak suretiyle elde edilen bir operatör matrisidir ve

$$P_B^n = \frac{1}{m^n}\frac{1}{(n+1)!}\begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{m-1} \\ 0 & 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \xi_{m-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

şeklinde gösterilir.

Bunun yanında bu metotda kullanılan türevler

$$\frac{\partial^{n+m}u(x,t)}{\partial x^n \partial t^m} = \Psi(t)^T C^T \Psi(x) \tag{4.24}$$

biçiminde gösterilir. Sonuçta (4.24) eşitliğinin her iki yanının integralleri alınarak $u(x,t)$ bulunur.

4.3 Yakınsaklık Analizi

Lemma 4.1 Sürekli bir $f(x)$ fonksiyonunun Chebyshev dalgacık açılımı düzgün yakınsak ise Chebyshev dalgacık açılımı $f(x)$' e yakınsaktır.

Teorem 4.1 İkinci mertebeden türevi $|f''(x)| \le K$ biçiminde sınırlı olan $f(x) \in L^2([0,1])$ fonksiyonu $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_{nm}\psi_{nm}(x)$ sonsuz Chebyshev dalgacıklarının bir olarak ifade edilsin. Bu takdirde, $|c_{nm}| \le \frac{\sqrt{2\pi}K}{(2n)^{\frac{5}{2}}(m^2-1)}$ ise Chebyshev dalgacık yaklaşımı $f(x)$' e düzgün yakınsar.

İspat: (4.10)' dan $c_{nm} = \langle f(x), \psi_{nm}(x)\rangle_{w_n}$ olduğunu bilindiğine göre,

$$\begin{aligned} c_{nm} &= \int_0^1 f(x)\psi_{nm}(x)w_n(x)dx \\ &= \int_{(n-1)/2^{k-1}}^{n/2^{k-1}} 2^{k/2} f(x)T_m(2^k x - 2n + 1)w(2^k x - 2n + 1)dx \end{aligned} \tag{4.25}$$

olur.

Burada $m>1$ ise, $2^k x-2n+1=\cos\theta$ yazalım. Bu takdirde, $x=\dfrac{\cos\theta+2n-1}{2^k}$ olur. Bu dönüşüm (4.25)' de yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
c_{nm} &= \frac{1}{2^{k/2}}\int_0^{\pi} f\left(\frac{\cos\theta+2n-1}{2^k}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(m\theta)\,d\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2^{k/2}\sqrt{\pi}}\, f\left(\frac{\cos\theta+2n-1}{2^k}\right)\left(\frac{\sin(m\theta)}{m}\right)\Bigg|_0^{\pi} + \frac{\sqrt{2}}{2^{3k/2}m\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi} f'\left(\frac{\cos\theta+2n-1}{2^k}\right)\sin(m\theta)\sin\theta\, d\theta
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

$$
= \frac{1}{2^{3k/2}m\sqrt{2\pi}}\, f'\left(\frac{\cos\theta+2n-1}{2^k}\right)\left(\frac{\sin(m-1)\theta}{m-1}-\frac{\sin(m+1)\theta}{m+1}\right)\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{2^{5k/2}m\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi} f''\left(\frac{\cos\theta+2n-1}{2^k}\right)h_m(\theta)\,d\theta \tag{4.27}
$$

bulunur. Burada $h_m(\theta)=\sin\theta\left(\dfrac{\sin(m-1)\theta}{m-1}-\dfrac{\sin(m+1)\theta}{m+1}\right)$ olup,

$$
\begin{aligned}
\left|c_{nm}\right| &= \left|\frac{1}{2^{5k/2}m\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi} f''\left(\frac{\cos\theta+2n-1}{2^k}\right)h_m(\theta)\,d\theta\right| \\
&\le \left(\frac{1}{2^{5k/2}m\sqrt{2\pi}}\right)\int_0^{\pi}\left|f''\left(\frac{\cos\theta+2n-1}{2^k}\right)h_m(\theta)\right|d\theta \\
&\le \left(\frac{K}{2^{5k/2}m\sqrt{2\pi}}\right)\int_0^{\pi}\left|h_m(\theta)\right|d\theta
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

elde edilir. Böylece,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\left|h_m(\theta)\right|d\theta &= \int_0^{\pi}\left|\sin\theta\left(\frac{\sin(m-1)\theta}{m-1}-\frac{\sin(m+1)\theta}{m+1}\right)\right|d\theta \\
&\le \int_0^{\pi}\left|\frac{\sin\theta\sin(m-1)\theta}{m-1}\right|+\left|\frac{\sin\theta\sin(m+1)\theta}{m+1}\right| \\
&\le \frac{2m\pi}{m^2-1}
\end{aligned} \tag{4.29}
$$

$n\le 2^{k-1}$ olduğunda,

$$
\left|c_{nm}\right| < \frac{\sqrt{2\pi}K}{(2n)^{5/2}\left(m^2-1\right)} \tag{4.30}
$$

elde edilir.

$m=1$ ise, (4.26) denkleminden

$$\left|c_{n1}\right| < \frac{\sqrt{2\pi}}{(2n)^{3/2}} \max_{0\le x\le 1}\left|f'(x)\right| \tag{4.31}$$

elde edilir. Buna göre, $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}$ serisi mutlak yakınsaktır.

$m=0$ için $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre Haar ölçüm fonksiyonu ile oluşturulmuş bir ortogonal sistemi $\{\psi_{n0}\}_{n=1}^{\infty}$ biçiminde olduğu anlaşılırdır. Böylece, $\sum_{n=1}^{\infty} c_{n0}\psi_{n0}(x)$ yakınsaktır [9]. Diğer taraftan ise,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_{nm}\psi_{nm}(x)\right| &\le \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_{n0}\psi_{n0}(x)\right| + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|c_{nm}\right|\left|\psi_{nm}(x)\right| \\ &\le \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_{n0}\psi_{n0}(x)\right| + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|c_{nm}\right| < \infty\end{aligned} \tag{4.32}$$

olur. Böylece Lemma (4.1)' den $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_{nm}\psi_{nm}(x)$ serisi $f(x)$' e düzgün yakınsaktır.

Teorem 4.2 İkinci türevi $f''(x)$, K ile sınırlı olan ve $[0,1)$ aralığında tanımlı sürekli bir $f(x)$ fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$$\Omega_{M,k} = \left(\int_0^1 \left(f(x) - \sum_{n=0}^{2^k-1}\sum_{m=0}^{M-1} c_{nm}\psi_{nm}(x)\right)^2 dx\right)^{1/2}$$ olmak üzere,

$$\Omega_{M,k} \le \left(\frac{\pi K^2}{2^4}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=M}^{\infty}\frac{1}{n^5(m^2-1)^2} + \frac{\pi K^2}{2^4}\sum_{n=2^k}^{\infty}\sum_{m=0}^{M-1}\frac{1}{n^5(m^2-1)^2}\right)^{1/2} \tag{4.33}$$

doğruluk tahminine sahip olur.

İspat

$$\begin{aligned}\Omega_{M,k}^2 &= \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{n=0}^{2^k-1}\sum_{m=0}^{M-1} c_{nm}\psi_{nm}(x)\right)^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_{nm}\psi_{nm}(x) - \sum_{n=0}^{2^k-1}\sum_{m=0}^{M-1} c_{nm}\psi_{nm}(x)\right)^2 dx\end{aligned}$$

$$\Omega_{M,k}^2 = \int_0^1 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} c_{nm}\psi_{nm}(x) + \sum_{n=2^k}^{\infty} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm}\psi_{nm}(x) \right]^2 dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} c_{nm} \int_0^1 \psi_{nm}^2(x)dx + 2\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} c_{nm}\psi_{nm}(x) \right)\left(\sum_{n=2^k}^{\infty} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm}\psi_{nm}(x) \right) dx + \sum_{n=2^k}^{\infty} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \int_0^1 \psi_{nm}^2(x)dx \tag{4.34}$$

olup, (4.34) eşitliğinin ($2\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} c_{nm}\psi_{nm}(x) \right)\left(\sum_{n=2^k}^{\infty} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm}\psi_{nm}(x) \right) dx$ kısmı $n \neq k, m \neq l$ için ele alınırsa, $\langle \psi_{nm}, \psi_{kl} \rangle = 0$ olduğundan

$$2\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} c_{nm}\psi_{nm}(x) \right)\left(\sum_{n=2^k}^{\infty} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm}\psi_{nm}(x) \right) dx = 0 \tag{4.35}$$

elde edilir. Ayrıca ortonormallikten dolayı $\int_0^1 \psi_{nm}^2(x)dx = 1$ olduğundan,

$\Omega_{M,k}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} c_{nm}^2 + \sum_{n=2^k}^{\infty} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm}^2$ bulunur. (4.30) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \Omega_{M,k}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} c_{nm}^2 + \sum_{n=2^k}^{\infty} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm}^2 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} \frac{2\pi K^2}{(2n)^5 (m^2-1)^2} + \sum_{n=2^k}^{\infty} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{2\pi K^2}{(2n)^5 (m^2-1)^2} \\ &= \frac{\pi K^2}{2^4} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} \frac{1}{n^5 (m^2-1)^2} + \frac{\pi K^2}{2^4} \sum_{n=2^k}^{\infty} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{n^5 (m^2-1)^2} \end{aligned} \tag{4.36}$$

olup, buradan da

$$\Omega_{M,k} \leq \left(\frac{\pi K^2}{2^4} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} \frac{1}{n^5 (m^2-1)^2} + \frac{\pi K^2}{2^4} \sum_{n=2^k}^{\infty} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{n^5 (m^2-1)^2} \right)^{1/2} \tag{4.37}$$

elde edilmiş olur ki bu ise ispatı tamamlar.

BÖLÜM 5

CHEBYSHEV DALGACIK METODU

5.1 Chebyshev Dalgacık Operasyonel Matrisin Türevi

m, birinci mertebe Chebyshev dalgacıkları, $m = 0,1,...,M-1$, $n = 1,2,...,2^{k-1}$ ve

$$\alpha_m = \begin{cases} \sqrt{2}, & m = 0 \\ 2 \ , & m = 1,2,... \end{cases} \tag{5.1}$$

olmak üzere

$$\psi_{n,m}(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_m 2^{k/2}}{\sqrt{\pi}} T_m\left(2^k x - 2n + 1\right), & \dfrac{n-1}{2^{k-1}} \leq x \leq \dfrac{n}{2^{k-1}} \\ 0 & , \textit{diğer durumlar} \end{cases} \tag{5.2}$$

biçiminde ifade edilmiş olup, bu bölümde ise Chebyshev bazları ele alınarak verilen problem operasyonel matrisin türevi kullanılarak cebirsel denklem sistemine dönüştürülecek ve bu denklemi çözmek için ise oldukça öneme sahip D türev operasyonel matrisi ele alınacaktır.

Bunun için, metodun öncesinde bazı önemli teorem ve sonuçları ele alalım.

Teorem 5.1 $[0,1]$ aralığında ötelenmiş Chebyshev polinomları $\tilde{T}_m(x)$ ile tanımlansın ve $\tilde{T}_m(x)$ nin x' e göre türevi ise $\tilde{T}'_m(x)$ olsun. Buna göre,

$$\gamma_m = \begin{cases} 2 \ , & m = 0 \\ 1 \ , & m \geq 1 \end{cases} \tag{5.3}$$

olmak üzere

$$\tilde{T}'_m(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k+m\ tek}}^{m-1} \frac{4m}{\gamma_k} \tilde{T}_k(x) \tag{5.4}$$

biçimindedir [15].

Teorem 5.2 $\Psi(t)$, (4.12) denklemindeki gibi tanımlı Chebyshev dalgacık vektörü olsun. Bu durumda F, $M \times M$ tipinde bir matris olmak üzere,

$$D = \begin{bmatrix} F & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

biçiminde tanımlı D matrisi, $2^k M$ türev operasyonel matrisi ise ve

$$\sigma_j = \begin{cases} 2, & j = 0 \\ 1, & j \geq 1 \end{cases} \tag{5.6}$$

olacak şekilde

$$F_{ij} = \begin{cases} 2^{k+2} m \sqrt{\dfrac{\sigma_{i-1}}{\sigma_{j-1}}} & , i = 2,3,\ldots,M,\ j = 1,2,\ldots,i-1,\ i+j\ \ tek \\ 0 & , diğer\ durumlarda \end{cases} \tag{5.7}$$

ile tanımlanırsa, böylece $\Psi(t)$' nin bir kez türevi

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = D\Psi(t) \tag{5.8}$$

biçimindedir [15].

İspat

$$\chi_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}\right]}(t) = \begin{cases} 1 & , \ t \in \left[\dfrac{n-1}{2^{k-1}}, \dfrac{n}{2^{k-1}}\right] \\ 0 & , \ diğer\ durumlarda \end{cases} \tag{5.9}$$

karakteristik fonksiyonu olmak üzere,

$[0,1]$ aralığında ötelenmiş Chebyshev polinomları için (4.12) denklemindeki $\Psi(t)$ vektörünün r. elemanı

$$\Psi_r(t)=\psi_{n,m}(t)=\frac{\alpha_m 2^{k/2}}{\sqrt{\pi}}T_m\left(2^k t-2n+1\right)\chi_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}},\frac{n}{2^{k-1}}\right]},\ r=1,2,...,2^{k-1}M \tag{5.10}$$

biçiminde olup, (5.10) denkleminin t' ye göre türevi alınırsa

$$\frac{d\Psi_r(t)}{dt}=\frac{\alpha_m 2^{k/2}}{\sqrt{\pi}}T'_m\left(2^k t-2n+1\right)\chi_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}},\frac{n}{2^{k-1}}\right]},\ r=1,2,...,2^{k-1}M \tag{5.11}$$

elde edilir. Bu fonksiyon $\left[\dfrac{n-1}{2^{k-1}},\dfrac{n}{2^{k-1}}\right]$ aralığının dışında sıfırdır. Çünkü Chebyshev dalgacık açılımı $\left[\dfrac{n-1}{2^{k-1}},\dfrac{n}{2^{k-1}}\right]$ aralığında sıfırdan farklı olan $\Psi(t)'$ deki Chebyshev dalgacıklarının bazlarına sahiptir. Buna göre, $\Psi_i(t)$, $i=nM+1,nM+2,...,(n+1)M$ için Chebyshev dalgacıkları açılımı

$$\frac{d\Psi_r(t)}{dt}=\sum_{(n-1)M+1}^{(nM)}a_i\Psi_i(t) \tag{5.12}$$

biçimindedir. Burada operasyonel D matrisi (5.5) denkleminde verildiği gibi blok matristir. Ayrıca $m=0$ için $\dfrac{dT_0(t)}{dt}=0$ olup, $\dfrac{d\Psi_r(t)}{dt}=0$ dır. Bunun sonucunda, F matrisinin ilk satırı sıfır olacaktır. Diğer yandan (5.4) denklemi (5.11) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi_r(t)}{dt}&=\frac{\alpha_m 2^{k/2}}{\sqrt{\pi}}2^k\sum_{\substack{j=0\\ j+m\ tek}}^{m-1}\frac{4m}{\sigma_j}\tilde{T}_j\left(2^k t-2n+1\right)\chi_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}},\frac{n}{2^{k-1}}\right]}\\ &=2^k\sum_{\substack{s=1\\ s+r\ tek}}^{r-1}4m\sqrt{\frac{\sigma_{r-1}}{\sigma_{s-1}}}\Psi_{nM+s}(t)\end{aligned} \tag{5.13}$$

elde edilir. Böylece (5.13) eşitliğinden,

$$F_{ij}=\begin{cases}2^{k+2}m\sqrt{\dfrac{\sigma_{i-1}}{\sigma_{j-1}}} & ,i=2,3,\dots,M,\ j=1,2,\dots,i-1,\ i+j\ \ tek\\ 0 & ,\ di\breve{g}er\ durumlarda\end{cases} \tag{5.14}$$

olduğu görülür.

Sonuç 5.1 $\Psi(t)$' nin t' ye göre n kez türevi alınırsa D^n, D operasyonel matrisinin n. kuvvetini göstermek üzere,

$$\frac{d^n\Psi(t)}{dt^n}=D^n\Psi(t) \tag{5.15}$$

olarak temsil edilir ve bu sonuçta Teorem 5.2'nin bir genelleştirilmesidir [15].

Chebyshev dalgacık sıralama metoduna benzer olarak, $[0,1]\times[0,1]$ bölgesinde tanımlı $u(x,t)$ biçimindeki keyfi iki değişkenli fonksiyonun

$$C=[c_{ij}] \text{ ve } c_{ij}=\langle\psi_i(x),\langle u(x,t),\psi_j(t)\rangle\rangle \tag{5.16}$$

olmak üzere

$$u(x,t)\simeq\sum_{i=1}^{2^{k-1}M}\sum_{j=1}^{2^{k-1}M}c_{ij}\psi_i(x)\psi_j(t)=\Psi(x)C\Psi(t) \tag{5.17}$$

biçimde Chebyshev dalgacık bazları yardımı ile yazılabileceği dördüncü bölümden bilinmektedir.

Bu metodu Chebyshev dalgacık sıralama metodundan farklı olarak

$$u(x,t)=\Psi(t)^T C\Psi(x) \tag{5.18}$$

biçiminde tanımlanır ve verilen problemde de kısmi türevler yerine öncelikli olarak (5.18) eşitliğinin türevleri alınır ve bunlar yerlerine yazılırsa

$$u_t(x,t)=\Psi(x)^T CD\Psi(t) \tag{5.19}$$

$$u_x(x,t)=\Psi(x)^T\left(D^T\right)C\Psi(t) \tag{5.20}$$

$$u_{xx}(x,t)=\Psi\left(x\right)^{T}\left(D^{2}\right)^{T}C\Psi\left(t\right) \tag{5.21}$$

elde edilir. Burada (5.19), (5.20) ve (5.21) gibi (5.18)’ in türev denklemlerini problemde yer alan kısmi türevlere göre elde ederek metoda başlanır. Daha sonra (5.18) denklemi ve (5.19), (5.20), (5.21) denklemi ile ifade edilen türevler yerine yazılırsa, problem daha basit bir cebirsel bir denklem sistemine dönüştürerek daha kolay bir şekilde çözülebilirdir. En nihayetinde de bu sistem çözülerek nümerik çözüm bulunur.

BÖLÜM 6

LEGENDRE DALGACIK SIRALAMA METODU

6.1 Legendre Dalgacıkları ve Özellikleri

m dereceli ve $w(t)=1$ ağırlık fonksiyonuna sahip $L_m(t)$ ortogonal Legendre polinomları

$$\begin{aligned} &L_0(t)=1, \\ &L_1(t)=t, \\ &L_{m+1}(t)=\frac{2m+1}{m+1}tL_m(t)-\frac{m}{m+1}L_{m-1}(t),\ m=1,2,3... \end{aligned} \tag{6.1}$$

biçiminde tekrarlamalı formüllerle türetilebilirdir. $\psi_{n,m}(x)=\psi(k,n,m,x)$ biçimindeki Legendre dalgacıkları, $k=2,3,...$ ve $n=1,2,...,$ M herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere, $m=0,1,...,M-1$ dereceli Legendre polinomlarından oluşurlar. Bu dalgacıklar $[0,1)$ aralığında

$$\psi_{n,m}(t)=\begin{cases} (2m+1)^{1/2}\,2^{k/2}L_m\left(2^k t-2n+1\right), & \frac{n-1}{2^{k-1}}\le x\le\frac{n}{2^{k-1}} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{6.2}$$

biçiminde tanımlanır [16].

6.2 Fonksiyon Yaklaşımı

Bir $g(t) \in L^2(\mathbb{R})$ fonksiyonu $c_{n,m} = \langle g(t), \psi_{n,m}(t) \rangle$ katsayılar olmak üzere Legendre dalgacık bazları ile

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{n,m} \psi_{n,m}(t) \tag{6.3}$$

biçiminde tanımlanır. (6.3)' ün kestirilmiş serisi

$$g(t) \simeq \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{n,m} \psi_{n,m}(t) = C^T \Psi(t) \tag{6.4}$$

şeklindedir. Burada C ve $\Psi(t)$'ler daha önce

$$C = \left[c_{1,0}, c_{1,1}, \ldots, c_{1,M-1}, c_{2,0}, c_{2,1}, \ldots, c_{2,M-1}, \ldots, c_{2^{k-1},0}, \ldots, c_{2^{k-1},M-1} \right]^T \tag{6.5}$$

$$\Psi(x) = \left[\psi_{1,0}(x), \psi_{1,1}(x), \ldots, \psi_{1,M-1}(x), \psi_{2,0}(x), \psi_{2,1}(x), \ldots, \psi_{2,M-1}(x), \ldots, \psi_{2^{k-1},0}(x), \ldots, \psi_{2^{k-1},M-1}(x) \right]^T \tag{6.6}$$

biçiminde tanımlandığı gibi $2^{k-1}M \times 1$ tipinde matrislerdir [16].

Teorem 6.1 Legendre dalgacık metodu (LWM) kullanılan (6.3) seri çözümleri $u(x)$ çözümüne yakınsaktır [17].

İspat: $L^2(\mathbb{R})$ bir Hilbert uzayı ve $L^2(\mathbb{R})$' nin bir bazı ise

$$\psi_{k,n}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(a_0^k t - n b_0 \right) \tag{6.7}$$

biçiminde olsun. $a_0 = 2$ ve $b_0 = 1$ olduğunda $\psi_{k,n}(t)$ ortonormal baz formundadır.

Şimdi ise $\langle .,. \rangle$ operatörü bir iç çarpımı temsil etsin ve $k = 1$ için, $C_{1i} = \langle u(x), \psi_{1i}(x) \rangle$ olmak üzere,

$$u(x) = \sum_{i=1}^{M-1} C_{1i} \psi_{1i}(x) \tag{6.8}$$

olarak tanımlansın.

Bu taktirde

$$u(x)=\sum_{i=1}^{n}\langle u(x),\psi_{1i}(x)\rangle\psi_{1i}(x) \tag{6.9}$$

dir. Diğer yandan $\psi_{1i}(x)$ ise $\psi(x)$ gibi tanımlansın. Ayrıca $\left(\alpha_j\psi\left(x_j\right)\right)$' nin kısmi toplamlar dizisi de $\{S_n\}$ biçiminde gösterilsin. Bunun yanında S_n ve S_m $n\geq m$ için keyfi kısmi toplamlar olsun. Bu takdirde $\{S_n\}$' nin Hilbert uzayında bir Cauchy dizisi olduğu ispatlanabilirdir. Bunun için

$$\begin{aligned}\langle u(x),S_n\rangle &= \left\langle u(x),\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\psi(x_j)\right\rangle\\ &=\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_j}\langle u(x),\psi(x_j)\rangle\\ &=\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_j}\alpha_j\\ &=\sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_j\right|^2\end{aligned} \tag{6.10}$$

olup, $n>m$ için $\|S_n-S_m\|^2=\sum_{j=m+1}^{n}\left|\alpha_j\right|^2$ olduğu gösterilmelidir. Bu durumda

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=m+1}^{n}\alpha_j\psi\left(x_j\right)\right\|^2 &=\left\langle\sum_{i=m+1}^{n}\alpha_i\psi\left(x_i\right),\sum_{j=m+1}^{n}\alpha_j\psi\left(x_j\right)\right\rangle\\ &=\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{j=m+1}^{n}\overline{\alpha_i}\alpha_j\left\langle\psi\left(x_i\right),\psi\left(x_j\right)\right\rangle\\ &=\sum_{j=m+1}^{n}\overline{\alpha_j}\alpha_j\\ &=\sum_{j=m+1}^{n}\left|\alpha_j\right|^2\end{aligned} \tag{6.11}$$

olur, yani $n>m$ için $\|S_n-S_m\|^2=\sum_{j=m+1}^{n}\left|\alpha_j\right|^2$ elde edilir.

Diğer yandan, Bessel eşitsizliğinden $\sum_{j=1}^{\infty}\left|\alpha_j\right|^2$ bulunur ve bu serinin yakınsak olduğu açıktır. Böylece $n,m\to\infty$ iken $\left\|S_n-S_m\right\|^2\to 0$ olur ve $\{S_n\}$ bir Cauchy dizisidir. Bunun s' e yakınsadığı kabul edilirse $u(x)=s$ olduğu görülür. Gerçekten de,

$$
\begin{aligned}
\left\langle s-u(x),\psi\left(x_j\right)\right\rangle &= \left\langle s,\psi\left(x_j\right)\right\rangle-\left\langle u(x),\psi\left(x_j\right)\right\rangle \\
&= \left\langle \lim_{n\to\infty} S_n,\psi\left(x_j\right)\right\rangle-\alpha_j \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\langle S_n,\psi\left(x_j\right)\right\rangle-\alpha_j \\
&= \alpha_j-\alpha_j=0
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

olup, (6.12) eşitliğinden $u(x)=s$ ve ayrıca $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\psi\left(x_j\right)$ serisinin $u\left(x\right)$' e yakınsadığı sonucu elde edilir ki bu ise ispatı tamamlar.

Bu metodun uygulanışı Chebyshev dalgacık sıralama metodu ile benzer tarzdadır. Yani, en yüksek türev değerine operasyonel matrislerle ifade edilmiş olan eşitliği yazıp, ele alınan problemdeki kısmi türevlerin durumuna göre integre edilerek, yerine yazılır. Böylece problemi cebirsel bir denklem sistemi formunda elde etmiş oluruz. Burada sadece baz olarak Legendre bazı kullanılmıştır.

BÖLÜM 7

NÜMERİK METODUN UYGULANMASI

7.1 Ginzburg-Landau Denklemi

Kompleks Ginzburg Landau denklemi, genlik denklemlerinin ilk modeli olarak bilinir ve

$$\frac{\partial A}{\partial t} = A - (1 + i\alpha)|A|^2 A + (1 + i\beta)\nabla^2 A \tag{7.1}$$

biçiminde ifade edilir. Burada α ve β gerçel parametrelerdir. $A(x,t)$ ise kompleks düzlemde tanımlıdır. Eşitliğin nitel dinamik davranışsal çözümleri α ve β katsayılarıyla değişir. Bu katsayılar belirli bir sistem için kapsamlı hesaplamalar sonucu bulunan denklemden elde edilir. $|\alpha|$ ve $|\beta|$' nın büyük değerleri için kompleks Gizburg Landau denklemi doğrusal olmayan Shrödinger denklemine indirgenir [18]. Son yıllarda, dinamik teoride yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Kompleks Ginzburg Landau denklemi genel olarak geçerli bir davranışı gösterir. Zaman bağımlı Ginzburg Landau Teorisi, süper iletkenlerin dengesizlik özelliklerini belirlemek için kullanılır. Bu denkleme yönelik daha temel ve ayrıntılı tanımlar Manneville [19], Van Saarloos [20], Van Hecke ve arkadaşları [21], Nicolis [22] ve Walgraef [23] tarafından verilmiştir.

Son zamanlarda Ginzburg Landau denklemi nümerik olarak Galarkin sonlu elemanlar metodu [24], Modifiyeli basit denklem metodu [25] ve Ayrıştırma metodu [26] kullanılarak çözülmüştür.

7.1.1 Ginzburg Landau Denklemi için Chebyshev Dalgacık Sıralama Metodu

Şimdi, Ginzburg Landau denklemini Chebyshev dalgacık sıralama metodu ile çözelim. (7.1) denklemindeki α ve β sabitleri sıfır kabul edilerek ve aşağıdaki başlangıç ve sınır koşullu Ginzburg-Landau denklemi

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - u - |u|^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x(1 - t + x^2 t^3) \\
&u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = t \\
&u(x,0) = 0
\end{aligned} \tag{7.2}$$

biçiminde göz önüne alınsın. Bu problemin analitik çözümü $u(x,t) = xt$ dir [26]. Şimdi $k = 2,\ M = 3$ olmak üzere Chebyshev dalgacık sıralama metodu kullanılarak problemin çözümünü yapalım. Bunun için (4.14) ve (4.15) denklemlerinden, $k = 2,\ M = 3$ için

$$\Psi(x) = \left[\psi_{1,0}(x), \psi_{1,1}(x), \psi_{1,2}(x), \psi_{2,0}(x), \psi_{2,1}(x), \psi_{2,2}(x)\right] \tag{7.3}$$

ifade edilir. Burada,

$$\psi_{1,0}(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} T_0(4x-1), & 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 0 & , \ \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\psi_{1,1}(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} T_1(4x-1), & 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 0 & , \ \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\psi_{1,2}(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} T_2(4x-1), & 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 0 & , \ \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\psi_{2,0}(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} T_0(4x-3), & \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \\ 0 & , \ \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\psi_{2,1}(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}T_1\left(4x-3\right), & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\psi_{2,2}(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}T_2\left(4x-3\right), & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

biçimindedir. Dolayısı ile bu problemin çözümü için,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}=\Psi\left(x\right)^T C\Psi\left(t\right) \tag{7.4}$$

olarak kabul edilsin. Burada $C=\left[c_{ij}\right]_{m\times m}$ bulunması gereken bilinmeyen katsayılar matrisidir. Ayrıca $\Psi\left(t\right)$, (4.13) denklemindeki gibi tanımlı vektördür. Şimdi (7.4) eşitliğinin x' e göre iki kez integrali alınırsa,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Psi\left(x\right)^T\left(P^2\right)^T C\Psi\left(t\right)+\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=0}+x\left.\frac{\partial u^2}{\partial t\partial x}\right|_{x=0} \tag{7.5}$$

$$u_t(x,t)=\Psi\left(x\right)^T\left(P^2\right)^T C\Psi\left(t\right)+u_t\left(0,t\right)+xu_{xt}\left(0,t\right) \tag{7.6}$$

bulunur. (7.6) denkleminde $x=1$ yazılırsa,

$$u_t\left(1,t\right)=\Psi\left(1\right)^T\left(P^2\right)^T C\Psi\left(t\right)+u_t\left(0,t\right)+u_{xt}\left(0,t\right) \tag{7.7}$$

olup, buradan da

$$u_{xt}\left(0,t\right)=u_t\left(1,t\right)-u_t\left(0,t\right)-\Psi\left(1\right)^T\left(P^2\right)^T C\Psi\left(t\right) \tag{7.8}$$

olduğu görülür. (7.8) denklemi (7.6) denkleminde yerine yazılırsa,

$$u_t(x,t)=\Psi\left(x\right)^T\left(P^2\right)^T C\Psi\left(t\right)+u_t\left(0,t\right)+x\Big(u_t\left(1,t\right)-u_t\left(0,t\right)-\Psi\left(1\right)^T\left(P^2\right)^T C\Psi\left(t\right)\Big) \tag{7.9}$$

bulunur.

Şimdi de (7.6) eşitliğinin her iki yanının t' ye göre bir kez integrali alınırsa,

$$u(x,t)=\Psi(x)^T\left(P^2\right)^T CP\Psi(t)-x\Psi(1)^T\left(P^2\right)^T CP\Psi(t)+G(x,t)$$
$$G(x,t)=u(x,0)+\big(u(0,t)-u(0,0)\big)+x\Big\{\big[u(1,t)-u(1,0)\big]+\big[u(0,t)-u(0,0)\big]\Big\} \tag{7.10}$$

olur. Diğer yandan (7.4) eşitliğinin her iki yanının da t' ye göre bir kez integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,t)&=\Psi(x)^T CP\Psi(t)+u_{xx}(x,0)\\ &=\Psi(x)^T CP\Psi(t)\end{aligned} \tag{7.11}$$

olup, sırası ile (7.9), (7.10) ve (7.11) eşitlikleri (7.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&\Psi(x)^T\left(P^2\right)^T C\Psi(t)-x\Psi(1)^T\left(P^2\right)^T C\Psi(t)+x-\\ &\left[\Psi(x)^T\left(P^2\right)^T CP\Psi(t)-x\Psi(1)^T\left(P^2\right)^T CP\Psi(t)+xt\right]-\\ &\left\{\begin{array}{l}\left|\Psi(x)^T\left(P^2\right)^T CP\Psi(t)-x\Psi(1)^T\left(P^2\right)^T CP\Psi(t)+xt\right|^2\\ .\left[\Psi(x)^T\left(P^2\right)^T CP\Psi(t)-x\Psi(1)^T\left(P^2\right)^T CP\Psi(t)+xt\right]\end{array}\right\}-\Psi(x)^T CP\Psi(t)=x\left(1-t+x^2t^3\right)\end{aligned}$$

(7.12)

elde edilir. Bunu takiben $k=2, M=3$ için (4.18) ile tanımlanan Φ matrisini (4.22)' de yerine yazarak elde edilen P, P^2 matrisleri

$$\Phi=\begin{bmatrix} 1.128379167 & 1.128379167 & 1.128379167 & 0 & 0 & 0\\ -1.063846080 & 0 & 1.063846080 & 0 & 0 & 0\\ -0.1773076801 & -1.595769121 & -0.1773076801 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1.128379167 & 1.128379167 & 1.128379167\\ 0 & 0 & 0 & -1.063846080 & 0 & 1.063846080\\ 0 & 0 & 0 & -0.1773076801 & -1.595769121 & -0.1773076801 \end{bmatrix}$$

(7.13)

$$P=\begin{bmatrix} 0.25 & 0.176776695459554 & -0.277555756156289.10^{-16} & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.0687464925526946 & 0 & 0.0624999999603444 & 0 & 0 & 0 \\ -0.144040270197580 & -0.138888888975054 & 0.138777878078145.10^{-16} & -0.288080540395160 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.176776695459554 & -0.277555756156289.10^{-16} \\ 0 & 0 & 0 & -0.0687464925526946 & 0 & 0.0624999999603444 \\ 0 & 0 & 0 & -0.144040270197580 & -0.138888888975054 & 0.138777878078145.10^{-16} \end{bmatrix}$$

(7.14)

$$P^2=\begin{bmatrix} 0.0480324074072850 & 0.0441941738648884 & 0.0110485434592119 & 0.25 & 0.0883883477297769 & -0.277555756156289.10^{-16} \\ -0.0261891400198104 & -0.0231481481481482 & -0.346944695195361.10^{-17} & -0.0523782800396208 & -0.693889390390723.10^{-17} & -0.693889390390723.10^{-17} \\ -0.0264619435778194 & -0.0254629629629786294 & -0.0100995370370248 & -0.144040270197580 & -0.0509259259572588 & -0.138777878078145.10^{-16} \\ 0 & 0 & 0 & 0.0480324074072850 & 0.0441941738648884 & 0.0110485434592119 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0261891400198104 & -0.0231481481481482 & -0.346944695195361.10^{-17} \\ 0 & 0 & 0 & -0.0264619435778194 & -0.0254629629786294 & -0.0109953703702480 \end{bmatrix}$$

(7.15)

biçiminde elde edilir ve de ayrıca $k=2, M=3$ için,

$$\Psi(x)=\left[\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durumda\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durumda\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durumda\end{cases}, \begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & diğer\ durumda\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & diğer\ durumda\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & diğer\ durumda\end{cases}\right]$$

ve benzer şekilde

$$\Psi(t)=\left[\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durumda\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durumda\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4t-1)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durumda\end{cases}, \begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0, & diğer\ durumda\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0, & diğer\ durumda\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4t-3)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0, & diğer\ durumda\end{cases}\right]$$

(7.16)

ve bunu takiben

$$\Psi(1)=\left[0,0,0,\frac{2}{\sqrt{\pi}},\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}},\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right] \tag{7.17}$$

bulunur. Bunun devamında (4.17)' de verilen sıralama noktalarına ait formül kullanılarak x ve t için nokta değerleri belirlenir ve daha sonra (7.13), (7.14), (7.15), (7.16) ve (7.17) eşitlikleri (7.12) de yerine yazılarak doğrusal olmayan bir cebirsel denklem sistemi oluşturulur.

Maple yardımıyla bu denklem sistemindeki bilinmeyen katsayılar matrisi C

$$C=\begin{bmatrix} -0.1232692655.10^{-7} & -0.1065273762.10^{-7} & -0.1172784646.10^{-7} & 0.3028072969.10^{-6} & 0.1944288023.10^{-6} & 0.3379937129.10^{-6} \\ 0.5058543407.10^{-8} & 0.4341787829.10^{-8} & 0.4759142213.10^{-8} & -0.1484251945.10^{-6} & -0.9844240856.10^{-7} & -0.1645213120.10^{-6} \\ 0.61616298938.10^{-8} & 0.5406841624.10^{-8} & 0.5810187274.10^{-8} & -0.1467726533.10^{-6} & -0.9316435703.10^{-7} & -0.1643886046.10^{-6} \\ -0.1719890478.10^{-8} & -0.1393768707.10^{-8} & -0.1759844126.10^{-8} & 0.2282363347.10^{-7} & 0.1327706226.10^{-7} & 0.2560193661.10^{-7} \\ 0.4365267988.10^{-9} & 0.4640185900.10^{-9} & 0.3573874918.10^{-9} & -0.9618105882.10^{-8} & -0.5268714833.10^{-8} & -0.1138152545.10^{-7} \\ 0.5230799114.10^{-9} & 0.4113450836.10^{-9} & 0.5608968817.10^{-9} & -0.7503668764.10^{-8} & -0.4233544560.10^{-8} & -0.8531136492.10^{-8} \end{bmatrix} \tag{7.18}$$

bulunur. (Bu algoritmanın detayı EK-A da açık olarak ifade edilmiştir.) Nümerik çözümü matris operatörleri ile

$$u(x,t)=\Psi(x)^T\left(P^2\right)^T CP\Psi(t)-x\Psi(1)^T\left(P^2\right)^T CP\Psi(t)+xt \tag{7.19}$$

biçiminde elde edip, (7.19) denklemindeki $u(x,t)$ nümerik çözümünde bulmuş olduğumuz C bilinmeyen katsayıları yerine yazılırsa,

$$u_{nümerik}(x,t)=$$

$$\left(\begin{array}{l} -0.249673290027175.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)+0.151645796047703.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right) \\ +0.124025260118713.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)-0.335284178332784.10^{-10}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right) \\ +0.150165537593672.10^{-10}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)+0.169812762056453.10^{-10}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right) \end{array}\right)\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)$$

$$+\left(\begin{array}{l} -0.148576667619617.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)+0.923950387814690.10^{-12}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right) \\ +0.716326468628073.10^{-12}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)-0.254732224652389.10^{-10}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)+ \\ 0.121338416121841.10^{-10}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)+0.127027592805158.10^{-10}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right) \end{array}\right)\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)$$

$$
+\left(\begin{array}{l}
-0.261839900397994.10^{-11}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)+0.161002704635584.10^{-11}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)+\\
0.128397807183757.10^{-11}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)-0.354678451507228.10^{-10}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)\\
+0.157178060448190.10^{-10}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(4x-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)+0.180634610949008.10^{-10}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2\left(4x-1\right)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)
\end{array}\right)\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2\left(4t-1\right)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \dfrac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)
$$

$$
+\left(\begin{array}{l}
0.206029733975162.10^{-10}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)-0.130489957977459.10^{-10}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)+\\
-0.977266913479941.10^{-11}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)+0.384823368640625.10^{-9}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)\\
-0.197066500843968.10^{-9}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(4x-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)-0.184458489401027.10^{-9}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2\left(4x-1\right)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)
\end{array}\right)\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le t\le 1\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)
$$

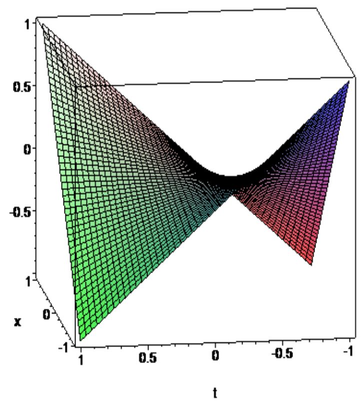
$$
+\left(\begin{array}{l}
0.161557472483781.10^{-10}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)-0.977502142940620.10^{-11}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)+\\
-0.807218533613466.10^{-11}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)+0.241346475562401.10^{-9}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)\\
-0.119131460421123.10^{-9}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(4x-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)-0.116651794763625.10^{-9}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2\left(4x-1\right)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)
\end{array}\right)\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4t-3)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le t\le 1\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)
$$

$$
+\left(\begin{array}{l}
0.223817664365752.10^{-10}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)-0.141096156831882.10^{-10}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)\\
-0.106643994463293.10^{-10}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)+0.425784039914927.10^{-9}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)\\
-0.219287084552682.10^{-9}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(4x-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)-0.203629339540147.10^{-9}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2\left(4x-1\right)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)
\end{array}\right)\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4t-3)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le t\le 1\\ 0, & diğer\ durum\end{cases}\right)
$$

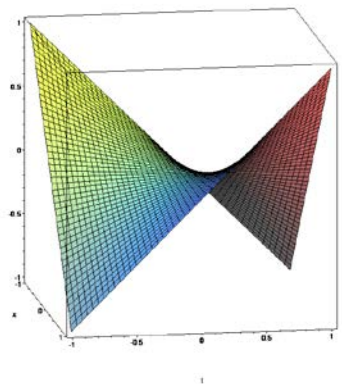
$$
-x\left(\begin{array}{l}
\left(-\frac{0.499346580054349.10^{-11}}{\sqrt{\pi}}+\frac{0.551342112332831.10^{-11}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & , diğer\ durum\end{cases}\right)+\\
\left(-\frac{0.297153335239233.10^{-11}}{\sqrt{\pi}}+\frac{0.328055371288553.10^{-11}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & , diğer\ durum\end{cases}\right)+\\
\left(-\frac{0.523679800795989.10^{-11}}{\sqrt{\pi}}+\frac{0.578801023638682.10^{-11}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4t-1)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & , diğer\ durum\end{cases}\right)\\
+\left(\frac{0.412059467950322.10^{-10}}{\sqrt{\pi}}-\frac{0.456433298650905.10^{-10}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , diğer\ durum\end{cases}\right)+\\
\left(\frac{0.323114944967563.10^{-10}}{\sqrt{\pi}}-\frac{0.356944135310817.10^{-10}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , diğer\ durum\end{cases}\right)+\\
\left(\frac{0.447635328731504.10^{-10}}{\sqrt{\pi}}-\frac{0.495480302590350.10^{-10}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4t-3)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , diğer\ durum\end{cases}\right)
\end{array}\right)
$$

$$
+xt \qquad (7.20)
$$

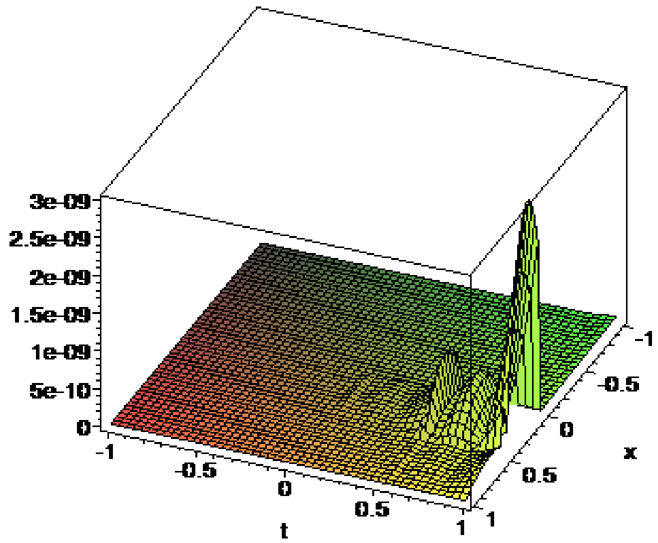
nümerik sonucunu bulunur. Bu sonuçlara göre, $k=2\ M=3$ için Chebyshev dalgacık sıralama metodu kullanılarak Ginzburg Landau denklemi için edilen nümerik çözümün analitik çözüme olan yaklaşımının ne kadar iyi olduğunu gözlemleyebilmek için, analitik çözümü, nümerik çözümü ve hata miktarını gösteren grafikler aşağıdaki gibidir:



Şekil 7.1 Analitik Çözüm Grafiği



Şekil 7.2 Nümerik Çözüm Grafiği



Şekil 7.3 Hata Miktarı Grafiği

Ayrıca, $k = 2$ $M = 3$ için Chebyshev dalgacık sıralama metodu kullanılarak Ginzburg Landau denkleminin sıralama noktalarına göre hesaplanan hata miktarını gösteren tablo aşağıdadır:

Çizelge 7.1 Ginzburg Landau Denkleminin $k=2$ $M=3$ için CWCM uygulanarak hesaplanan Hata Tablosu

$x(i)$	$t(i)$	$u_{nümerik}-u_{analitik}$
0.08333333333	0.08333333333	$-0.681792296230998574\times10^{-11}$
	0.2500000000	$0.316179825377016500\times10^{-10}$
	0.4166666667	$-0.100399584479493598\times10^{-9}$
	0.5833333333	$0.184055888585721306\times10^{-9}$
	0.7500000000	$-0.433789712483978463\times10^{-9}$
	0.9166666667	$0.107897452084060320\times10^{-8}$
0.2500000000	0.08333333333	$-0.903849564637404513\times10^{-11}$
	0.2500000000	$0.368135105732747548\times10^{-10}$
	0.4166666667	$-0.113826004177752793\times10^{-9}$
	0.5833333333	$0.191916593728080898\times10^{-9}$
	0.7500000000	$-0.465085248091412496\times10^{-9}$
	0.9166666667	$0.117287252132669550\times10^{-8}$
0.4166666667	0.08333333333	$-0.432351376922213149\times10^{-11}$
	0.2500000000	$0.145935763473659108\times10^{-10}$
	0.4166666667	$-0.436417568749902784\times10^{-10}$
	0.5833333333	$0.637907782152780100\times10^{-10}$
	0.7500000000	$-0.165010338726290230\times10^{-9}$
	0.9166666667	$0.426662261077126460\times10^{-9}$
0.5833333333	0.08333333333	$-0.170033431778904287\times10^{-11}$
	0.2500000000	$0.307129321974741744\times10^{-11}$
	0.4166666667	$-0.879699091349550600\times10^{-11}$
	0.5833333333	$0.522898391253079354\times10^{-11}$
	0.7500000000	$-0.280424017340408227\times10^{-10}$
	0.9166666667	$0.819099232884923368\times10^{-10}$
0.7500000000	0.08333333333	$-0.189202820077838396\times10^{-11}$
	0.2500000000	$0.322461501944815155\times10^{-11}$
	0.4166666667	$-0.939287536638744314\times10^{-11}$
	0.5833333333	$0.430511182258896952\times10^{-11}$
	0.7500000000	$-0.295716784393107446\times10^{-10}$
	0.9166666667	$0.868570770862220344\times10^{-10}$
0.9166666667	0.08333333333	$-0.921290821409570526\times10^{-12}$
	0.2500000000	$0.153549395420782276\times10^{-11}$
	0.4166666667	$-0.450250947636732235\times10^{-11}$
	0.5833333333	$0.182431847406405723\times10^{-11}$
	0.7500000000	$-0.141059386393749264\times10^{-10}$
	0.9166666667	$0.415226741878882422\times10^{-10}$

Şimdi de Ginzburg Landau denklemine $k=2, M=4$ için aynı metodu uygulayalım. (4.18) ile tanımlanan Φ matrisini (4.22) denkleminde yerine yazarak elde edilen P, P^2 matrisleri

$$\Phi=\begin{bmatrix} 1.128379167 & 1.128379167 & 1.128379167 & 1.128379167 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.196826841 & -0.3989422802 & 0.3989422802 & 1.196826841 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1994711401 & -1.396297981 & -1.396297981 & 0.1994711401 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8976201306 & 1.097091271 & -1.097091271 & -0.8976201306 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.128379167 & 1.128379167 & 1.128379167 & 1.128379167 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.196826841 & -0.3989422802 & 0.3989422802 & 1.196826841 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1994711401 & -1.396297981 & -1.396297981 & 0.1994711401 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8976201306 & 1.097091271 & -1.097091271 & -0.8976201306 \end{bmatrix} \qquad (7.21)$$

$$P=\begin{bmatrix} 0.25 & 0.176776695289694 & 0.277555756156289.10^{-16} & -0.295408419948018.10^{-10} & 0.5 & 0 & -0.555111512312578.10^{-16} & 0 \\ -0.0773398041826230 & 0.277555756156289.10^{-16} & 0.0624000000039166 & 0.277555756156289.10^{-16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.132582521449991 & -104166666654699 & 0 & 0.0416666666710185 & -0.265165042899981 & 0 & -0.277555756156289.10^{-16} & 0 \\ 0.0635291248553956 & -0.277555756156289.10^{-16} & -0.0781250000088124 & -0.277555756156289.10^{-16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.176776695289694 & 0.277555756156289.10^{-16} & -0.295408419948018.10^{-10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0773398041826230 & 0.277555756156289.10^{-16} & 0.0625000000039166 & 0.277555756156289.10^{-16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.132582521449991 & -0.104166666654699 & 0 & 0.0416666666710185 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0635291248553956 & -0.277555756156289.10^{-16} & -0.0781250000088124 & -0.277555756156289.10^{-16} \end{bmatrix}$$

$$P^2=\begin{bmatrix} 0.0475260416670338 & 0.0441941738224234 & 0.0110485434586061 & -0.738522437648825.10^{-11} & 0.25 & 0.0883883476448468 & 0 & -0.147704348751887.10^{-10} \\ -0.0276213586367994 & -0.0214843749974161 & 0 & 0.00260416666938653 & -0.0552427172735989 & 0 & -0.693889390390723.10^{-17} & 0 \\ -0.0224423538918154 & -0.0234374999951042 & -0.0110677083337005 & 0.391660141818573.10^{-11} & -0.13258252144991 & -0.0468749999902085 & -0.693889390390723.10^{-17} & 0.783319242803060.10^{-11} \\ 0.0262402907032978 & 0.01936848957798995 & 0.173472347597681.10^{-17} & -0.00455729166925054 & 0.0524805814065956 & -0.693889390390723.10^{-17} & 0.693889390390723.10^{-17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0475260416670338 & 0.0441941738224234 & 0.0110485434586061 & -0.738522437648825.10^{-11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0276213586367994 & -0.0214843749974161 & 0 & 0.00260416666938653 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0224423538918154 & -0.0234374999951042 & -0.010677083337005 & 0.391660141818573.10^{-11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0262402907032978 & 0.0193684895798995 & 0.173472347597681.10^{-17} & -0.00455729166925054 \end{bmatrix}$$

(7.22)

biçiminde elde edilir ve ayrıca $k=2, M=4$ için,

$$\Psi(x)=\left[\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 0, & dd\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 0, & d.d.\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 0, & d.d.\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)\left(2(4x-1)^2-1\right)-4x+1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 0, & d.d.\end{cases}, \begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & d.d.\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & d.d.\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & d.d.\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)\left(2(4x-3)^2-1\right)-4x+3\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 0, & d.d.\end{cases}\right]$$

ve benzer şekilde

$$\Psi(t)=\left[\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ 0, & dd\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ 0, & d.d.\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4t-1)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ 0, & d.d.\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4t-1)\left(2(4t-1)^2-1\right)-4t+1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ 0, & d.d.\end{cases}, \begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0, & d.d.\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0, & d.d.\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4t-3)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0, & d.d.\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4t-3)\left(2(4t-3)^2-1\right)-4t+3\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ 0, & d.d.\end{cases}\right]$$

(7.23)

ve bunu takiben

$$\Psi(1)=\left[0,0,0,0,\frac{2}{\sqrt{\pi}},\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}},\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}},\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right] \qquad (7.24)$$

elde edilir. Buradan itibaren (4.17)' de verilen sıralama noktalarına ait formül kullanılarak x ve t için nokta değerleri belirlenir ve daha sonra (7.22), (7.23) ve (7.24) eşitlikleri (7.12) denkleminde yerine yazılarak doğrusal olmayan bir denklem sistemi oluşturulur.

Metodun EK-A’ da verilmiş olan Maple algoritması yardımıyla bilinmeyen katsayılar matrisi olan C matrisi

$$C=\begin{bmatrix}
0.2035319759.10^{-9} & 0.3182104168.10^{-9} & 0.17753159899.10^{-9} & 0.1297432274.10^{-9} & -0.4403152922.10^{-8} & -0.3432244917.10^{-8} & -0.4523499930.10^{-8} & -0.8184707138.10^{-10} \\
-0.7592353803.10^{-10} & -0.1163898470.10^{-9} & -0.6388811046.10^{-10} & -0.4554282802.10^{-10} & 0.1683907415.10^{-8} & 0.1485873605.10^{-9} & 0.1577081542.10^{-8} & -0.1249678179.10^{-8} \\
-0.8212061213.10^{-10} & -0.1256535819.10^{-9} & -0.6895342764.10^{-10} & -0.4898175572.10^{-10} & 0.2204940546.10^{-8} & 0.2634495618.10^{-8} & 0.2366926457.10^{-8} & 0.1021592684.10^{-8} \\
0.8584247556.10^{-10} & 0.1345119019.10^{-9} & 0.7415860872.10^{-10} & 0.5497317970.10^{-10} & -0.1528289467.10^{-8} & 0.1229988393.10^{-9} & -0.1409616867.10^{-8} & 0.1401951878.10^{-8} \\
0.2206458834.10^{-10} & 0.3557459812.10^{-10} & 0.1970200524.10^{-10} & 0.1531764958.10^{-10} & -0.3743287425.10^{-9} & -0.8033824068.10^{-9} & -0.4345375953.10^{-9} & -0.5990223161.10^{-9} \\
0.1118093365.10^{-10} & 0.1177875711.10^{-10} & 0.5930844833.10^{-11} & 0.3317301709.10^{-12} & 0.1512513183.10^{-9} & 0.6120185475.10^{-10} & 0.1737121645.10^{-9} & -0.4615644337.10^{-10} \\
-0.2280143007.10^{-10} & -0.3080070817.10^{-10} & -0.1649277378.10^{-10} & -0.8739357491.10^{-11} & 0.2875552195.10^{-9} & 0.2782891619.10^{-9} & 0.3670269174.10^{-9} & 0.1478356246.10^{-9} \\
0.4501637725.10^{-10} & 0.6472887507.10^{-10} & 0.3510383560.10^{-10} & 0.2191518443.10^{-10} & -0.3948496008.10^{-9} & -0.9340475258.10^{-9} & -0.4365530548.10^{-9} & -0.7026982189.10^{-9}
\end{bmatrix}$$

(7.25)

elde edilir. $u(x,t)$ Nümerik çözümünde bulmuş olduğumuz C bilinmeyen katsayıları yerine yazarak,

$$u_{nümerik}(x,t)=$$

$$\left(\begin{array}{l}
0.843217368862189.10^{-13}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)-0.473609499725037.10^{-13}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)\\
-0.328234202519069.10^{-13}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)+\\
0.376062761256599.10^{-13}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)\left(2(4x-3)^2-1\right)-4x+3\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)+\\
0.667837575412640.10^{-10}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)-0.266182934454016.10^{-12}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)\\
-0.298183257671744.10^{-12}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)\\
+0.247630715795519.10^{-12}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)\left(2(4x-1)^2-1\right)-4x+1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)
\end{array}\right)\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)$$

$$
+\left(
\begin{aligned}
&0.122333608199515.10^{-12}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.690406263421830.10^{-13}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
&-0.477265312743118.10^{-13}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+\\
&0.552124222185415.10^{-13}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)\left(2(4x-3)^{2}-1\right)-4x+3\right)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+\\
&0.104412408777147.10^{-11}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.426709924978374.10^{-12}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4x-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
&-0.466592121276013.10^{-12}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+\\
&0.396901837555100.10^{-12}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)\left(2(4x-1)^{2}-1\right)-4x+1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
\end{aligned}
\right)\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4t-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
$$

$$
+\left(
\begin{aligned}
&0.664597519487277.10^{-13}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.375421903103404.10^{-13}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-\\
&0.259394445081762.10^{-13}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+\\
&0.300639165044011.10^{-13}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)\left(2(4x-3)^{2}-1\right)-4x+3\right)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+\\
&0.575204393278210.10^{-12}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.236111958520139.10^{-12}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4x-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
&-0.257081557824171.10^{-12}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+\\
&0.219610426816694.10^{-12}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)\left(2(4x-1)^{2}-1\right)-4x+1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
\end{aligned}
\right)\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4t-1)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
$$

$$
+\left(\begin{array}{l}
0.423435825205915.10^{-13}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.241750169977488.10^{-13}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-\\
0.166094308105974.10^{-13}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+\\
0.196616430573146.10^{-13}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)\left(2(4x-3)^{2}-1\right)-4x+3\right)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+\\
0.424853196525298.10^{-12}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0, & \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.181880859743122.10^{-12}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4x-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0, & \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
-0.190171639744581.10^{-12}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0, & \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+\\
0.169122358678041.10^{-12}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)\left(2(4x-1)^{2}-1\right)-4x+1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0, & \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
\end{array}\right)\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4t-1)\left(2(4t-1)^{2}-1\right)-4t+1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \dfrac{1}{2}\\ 0, & \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
$$

$$
+\left(\begin{array}{l}
0.247858884602470.10^{-12}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.712484002359733.10^{-13}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-\\
0.169445017521047.10^{-12}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+\\
0.561631729994650.10^{-13}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)\left(2(4x-3)^{2}-1\right)-4x+3\right)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-\\
0.409814039940195.10^{-11}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0, & \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+0.307194717724439.10^{-11}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4x-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0, & \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
+0.126615906789899.10^{-11}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0, & \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-\\
0.283005222413664.10^{-11}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)\left(2(4x-1)^{2}-1\right)-4x+1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0, & \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
\end{array}\right)\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le t\le 1\\ 0, & \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
$$

$$
+\left(\begin{array}{l}
-0.472506791906853.10^{-12}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\ \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+0.328483097128078.10^{-12}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\ \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
+0.127202416758060.10^{-12}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\ \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-\\
0.270382722491129.10^{-12}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)\left(2(4x-3)^{2}-1\right)-4x+3\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\ \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-\\
0.115842657069193.10^{-10}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\ \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+0.645256363253898.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\ \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
+0.454904492606351.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\ \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-\\
0.601195057387041.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)\left(2(4x-1)^{2}-1\right)-4x+1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\ \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
\end{array}\right)\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & ,\ \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
$$

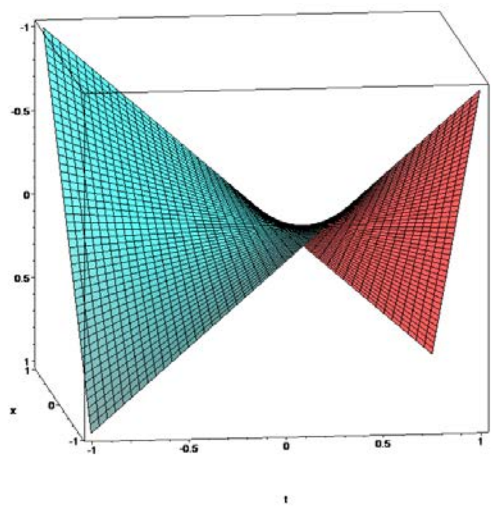
$$
+\left(\begin{array}{l}
0.230775997496970.10^{-12}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\ \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.744482534639575.10^{-13}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\ \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
-0.162248472289644.10^{-12}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\ \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+\\
0.702344407426740.10^{-13}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)\left(2(4x-3)^{2}-1\right)-4x+3\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\ \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-\\
0.442499367856262.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\ \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+0.337484527787512.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\ \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
+0.132995270391562.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\ \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-\\
0.310530894260620.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)\left(2(4x-1)^{2}-1\right)-4x+1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\ \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
\end{array}\right)\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4t-3)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & ,\ \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
$$

$$
+\left(\begin{array}{l}
-0.371653058827171.10^{-12}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & , \text{diğer durum}\end{cases}\right)+0.297231856611703.10^{-12}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & , \text{diğer durum}\end{cases}\right)\\
+0.674383651364694.10^{-13}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & , \text{diğer durum}\end{cases}\right)-\\
0.252014623787616.10^{-12}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)\left(2(4x-3)^2-1\right)-4x+3\right)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & , \text{diğer durum}\end{cases}\right)-\\
0.885064200168306.10^{-11}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & , \text{diğer durum}\end{cases}\right)+0.464153178373811.10^{-11}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(4x-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & , \text{diğer durum}\end{cases}\right)\\
+0.365950075992133.10^{-11}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2\left(4x-1\right)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & , \text{diğer durum}\end{cases}\right)-\\
0.435554233872323.10^{-11}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)\left(2(4x-1)^2-1\right)-4x+1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & , \text{diğer durum}\end{cases}\right)
\end{array}\right)\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4t-3)\left(2(4t-3)^2-1\right)-4t+3\right)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \text{diğer durum}\end{cases}\right)
$$

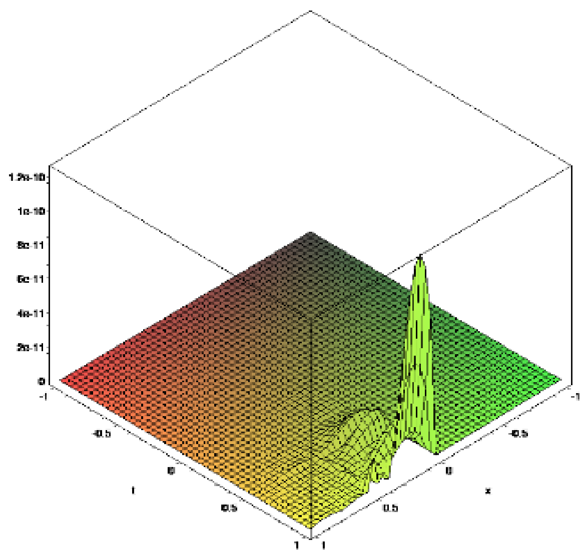
$$
-x\left(\begin{array}{l}
\left(\dfrac{0.168643473772438.10^{-12}}{\sqrt{\pi}}-\dfrac{0.851561881975013.10^{-13}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & , \text{diğer durum}\end{cases}\right)+\\
\left(\dfrac{0.244667216399031.10^{-12}}{\sqrt{\pi}}-\dfrac{0.123109470795907.10^{-12}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4t-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & , \text{diğer durum}\end{cases}\right)+\\
\left(\dfrac{0.132919503897455.10^{-12}}{\sqrt{\pi}}-\dfrac{0.668354366282312.10^{-13}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4t-1)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & , \text{diğer durum}\end{cases}\right)+\\
\left(\dfrac{0.846871650411830.10^{-13}}{\sqrt{\pi}}-\dfrac{0.422456095020633.10^{-13}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4t-1)\left(2(4t-1)^2-1\right)-4t+1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & , \text{diğer durum}\end{cases}\right)\\
\left(\dfrac{0.495717769204940.10^{-12}}{\sqrt{\pi}}-\dfrac{0.369060489515109.10^{-12}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \text{diğer durum}\end{cases}\right)+\\
\left(-\dfrac{0.945013583813705.10^{-12}}{\sqrt{\pi}}+\dfrac{0.370605582790017.10^{-12}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4t-3)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \text{diğer durum}\end{cases}\right)+\\
\left(\dfrac{0.461551994993941.10^{-12}}{\sqrt{\pi}}-\dfrac{0.332924570021855.10^{-12}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4t-3)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \text{diğer durum}\end{cases}\right)+\\
\left(-\dfrac{0.743306117654342.10^{-12}}{\sqrt{\pi}}+\dfrac{0.225311195921114.10^{-12}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4t-3)\left(2(4t-3)^2-1\right)-4t+3\right)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \text{diğer durum}\end{cases}\right)
\end{array}\right)
$$

$$+xt$$

nümerik sonucu elde edilir. Bu sonuçlara göre, Ginzburg Landau denklemine uygulanan Chebyshev dalgacık sıralama metodunun $k=2$ $M=4$ için elde edilen nümerik çözümü ve hata miktarını gösteren grafikler ve ayrıca hata tablosu aşağıdaki gibidir:



Şekil 7.4 Nümerik Çözüm Grafiği



Şekil 7.5 Hata Miktarı Grafiği

Çizelge 7.2 Ginzburg Landau Denkleminin $k=2$ $M=4$ için CWCM Hata Tablosu

$x(i)$	$t(i)$	$u_{nümerik}-u_{analitik}$	$x(i)$	$t(i)$	$u_{nümerik}-u_{analitik}$
0.0625	0.0625	$0.615826833971767\times10^{-16}$	0.5625	0.0625	0
	0.1875	$-0.676542155630955\times10^{-16}$		0.1875	0
	0.3125	$-0.221975215985992\times10^{-12}$		0.3125	$0.774380559676047\times10^{-14}$
	0.4375	$0.321239562728337\times10^{-11}$		0.4375	$0.421190859967169\times10^{-12}$
	0.5625	$-0.801352040280534\times10^{-12}$		0.5625	$0.959454737881060\times10^{-12}$
	0.6875	$-0.625650226071528\times10^{-11}$		0.6875	$-0.627997653879220\times10^{-12}$
	0.8125	$0.146282014279464\times10^{-10}$		0.8125	$0.437927472063393\times10^{-12}$
	0.9375	$-0.27701820004553\times10^{-10}$		0.9375	$0.732747196252603\times10^{-13}$
0.1875	0.0625	$0.780625564189563\times10^{-16}$	0.6875	0.0625	0
	0.1875	$-0.624500451351651\times10^{-16}$		0.1875	0
	0.3125	$-0.257953380877751\times10^{-12}$		0.3125	$0.879851747015437\times10^{-14}$
	0.4375	$0.401562116891796\times10^{-11}$		0.4375	$0.469235761357822\times10^{-12}$
	0.5625	$0.295388713489331\times10^{-12}$		0.5625	$0.131422650540003\times10^{-11}$
	0.6875	$-0.829344926067677\times10^{-11}$		0.6875	$-0.565436586441592\times10^{-12}$
	0.8125	$0.165019664599697\times10^{-10}$		0.8125	$0.288657986402541\times10^{-12}$
	0.9375	$-0.291159596432777\times10^{-10}$		0.9375	$0.315303338993544\times10^{-12}$
0.3125	0.0625	$0.381639164714898\times10^{-16}$	0.8125	0.0625	0
	0.1875	$-0.693889390390723\times10^{-17}$		0.1875	0
	0.3125	$-0.918709552877317\times10^{-13}$		0.3125	$0.505151476204446\times10^{-14}$
	0.4375	$0.203401184784013\times10^{-11}$		0.4375	$0.150712775592865\times10^{-12}$
	0.5625	$0.191097138113605\times10^{-11}$		0.5625	$0.747513162480118\times10^{-12}$
	0.6875	$-0.454117299319989\times10^{-11}$		0.6875	$0.772715225139109\times10^{-13}$
	0.8125	$0.574978953338245\times10^{-11}$		0.8125	$-0.161870516990348\times10^{-12}$
	0.9375	$-0.738953342960258\times10^{-11}$		0.9375	$0.394906329859168\times10^{-12}$
0.4375	0.0625	$0.346944695195361\times10^{-17}$	0.9375	0.0625	0
	0.1875	$0.138777878078145\times10^{-16}$		0.1875	0
	0.3125	$0.157374113740616\times10^{-13}$		0.3125	$0.888178419700125\times10^{-15}$
	0.4375	$0.362293528510804\times10^{-12}$		0.4375	$-0.706656955173912\times10^{-13}$
	0.5625	$0.152178269985370\times10^{-11}$		0.5625	$0.960342916300760\times10^{-13}$
	0.6875	$-0.923650045336899\times10^{-12}$		0.6875	$0.326849658449646\times10^{-12}$
	0.8125	$-0.764777130513039\times10^{-12}$		0.8125	$-0.272448730243013\times10^{-12}$
	0.9375	$0.349514861497369\times10^{-11}$		0.9375	$0.216160422894518\times10^{-12}$

Tablo ve grafikler göz önünde bulundurulduğunda Chebyshev dalgacık sıralama metodu ile çözülen Ginzburg Landau denkleminin nümerik çözümünün analitik çözüme çok daha iyi yakınsadığı söylenebilirdir.

7.1.2 Ginzburg Landau Denklemi için Chebyshev Dalgacık Metodu

Bu kısımda Ginzburg Landau denklemini Bölüm 5' de değinilen Chebyshev dalgacık metodu yardımıyla çözelim. Bunun için

$$u(x,t) = \Psi(x)^T C\Psi(t) \tag{7.27}$$

olarak kabul edelim. (7.2) Ginzburg Landau denklemindeki kısmi türevler yerine (7.27) eşitliği ile tanımlanan denklemin her iki yanının x' se ve t' ye göre türevleri alınırsa

$$u_t(x,t) = \Psi(x)^T CD\Psi(t) \tag{7.28}$$

$$u_x(x,t) = \Psi(x)^T \left(D^T\right) C\Psi(t) \tag{7.29}$$

$$u_{xx}(x,t) = \Psi(x)^T \left(D^2\right)^T C\Psi(t) \tag{7.30}$$

bulunur. Bu türevler (7.2) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}&\Psi(x)^T CD\Psi(t) - \left(\Psi(x)^T C\Psi(t)\right) - \left|\Psi(x)^T C\Psi(t)\right|^2 \left(\Psi(x)^T C\Psi(t)\right)\\ &-\left(\Psi(x)^T \left(D^2\right)^T C\Psi(t)\right) - \left[x\left(1-t+x^2t^3\right)\right] = 0\end{aligned} \tag{7.31}$$

elde edilir. Buna göre, Ginzburg Landau denkleminin nümerik çözümünü elde etmek için bilinmeyen C katsayılar matrisini bulmak için Chebyshev dalgacık metodunda $k = 2$ $M = 2$ alınır. Böylece C matrisini

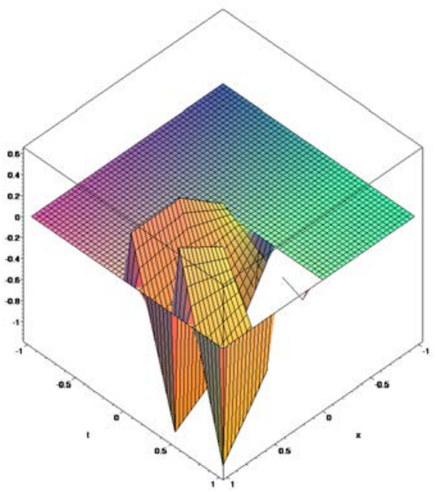
$$C = \begin{bmatrix} -0.1176574385 & -0.2555097437 & 0.2315340129-0.4187558144i & 0.1977081518+0.2845555049i \\ -0.06962123616 & -0.1230139382 & 0.3628561005-0.5922101523i & 0.3554784841+0.4024222549i \\ 0.2776761184 & -0.4479582025 & -0.2016656237 & -0.4173520634 \\ -0.04844719940 & -0.03336373706 & -0.06124187802 & -0.1038206514 \end{bmatrix} \tag{7.32}$$

olarak hesaplanır.

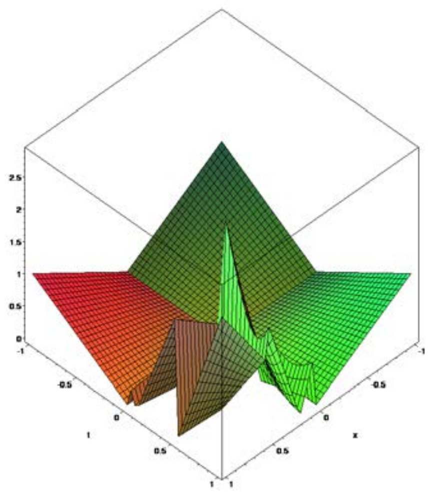
Bunu takiben (7.27) denkleminde C matrisini yerinde yazdığımızda elde edilen nümerik çözümün hata miktarlarını gösteren tablo ve grafikler aşağıdaki gibidir:

Çizelge 7.3 Ginzburg Landau Denkleminin $k=2$ $M=2$ için CWM uygulanarak hesaplanan Hata Tablosu

$x(i)$	$t(i)$	$u_{nümerik} - u_{analitik}$
0.125	0.125	0.04897651738
	0.375	- 0.2857264544
	0.625	- 0.06170724976+ 0.0000000004319917409i
	0.875	- 0.1895667632- 0.0000000002063159075i
0.375	0.125	0.04899045820
	0.375	- 0.6614649346
	0.625	- 0.0171959777- 1.578732853i
	0.875	0.6976630350- 0.5539729971i
0.625	0.125	- 0.00599134660
	0.375	- 0.9263694742
	0.625	- 0.2826019924
	0.875	- 1.058161178
0.875	0.125	- 0.0819969254
	0.375	- 1.149835112
	0.625	- 0.4169375573
	0.875	- 1.519373860



Şekil 7.6 Nümerik Çözüm Grafiği



Şekil 7.7 Hata Miktarı Grafiği

Chebyshev dalgacık metodunun buradaki tablodan ve grafiklerden de görüldüğü üzere Chebyshev dalgacık sıralama metoduna kıyasla nümerik çözümünün analitik çözüme olan yaklaşımı oldukça hatalıdır. Bu sebepten ötürü doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümündeki kullanımına uygun değildir. Bu metot yerine Chebyshev dalgacık sıralama metodu doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler için daha uygun olmaktadır.

7.1.3 Ginzburg Landau Denklemi için Legendre Dalgacık Sıralama Metodu

Bu kısımda ise $k=2,\ M=3$ için Legendre dalgacık sıralama metodunu kullanarak ele alınan problemi çözelim.

Bölüm 6' da vurgulandığı üzere $k=2,\ M=3$ için Legendre bazları

$$\Psi(x)=\left[\psi_{1,0}(x),\psi_{1,1}(x),\psi_{1,2}(x),\psi_{2,0}(x),\psi_{2,1}(x),\psi_{2,2}(x)\right] \tag{7.33}$$

biçiminde ifade edilir. Buna göre,

$$\psi_{1,0}(x)=\begin{cases}2\,, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0\,, & \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\psi_{1,1}(x)=\begin{cases}2\sqrt{3}\left(4x-1\right), & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & ,\ \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\psi_{1,2}(x)=\begin{cases}2\sqrt{5}\left(\dfrac{5\left(4x-1\right)^{2}}{3}-\dfrac{2}{3}\right), & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & ,\ \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\psi_{2,0}(x)=\begin{cases}2\,, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0\,, & \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\psi_{2,1}(x)=\begin{cases}2\sqrt{3}\left(4x-3\right), & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\ \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\psi_{2,2}(x)=\begin{cases}2\sqrt{5}\left(\dfrac{5\left(4x-3\right)^{2}}{3}-\dfrac{2}{3}\right), & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\ \textit{diğer durumlarda}\end{cases} \tag{7.34}$$

yazılır. Böylece (7.33) denklemleri vasıtası ile Ginzburg Landau denklemi için

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = \Psi(x)^T C \Psi(t) \tag{7.35}$$

formunda olduğu kabul edilir. Burada $C = \left[c_{ij}\right]_{m \times m}$ bulunması gereken bilinmeyen katsayılar matrisidir. CWCM ile elde edilmiş olan (7.5) - (7.12) operatör matris denklemleri LWCM için de geçerlidir. CWCM ile benzer tarzda olan ama sadece bazı Legendre bazı olan LWCM için P, P^2 matrisleri

$$\Phi = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2.309401077 & 0 & 2.309401077 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3312693298 & -2.981423969 & 0.3312693298 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2.309401077 & 0 & 2.309401077 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3312693298 & -2.981423969 & 0.3312693298 \end{bmatrix} \tag{7.36}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.144337567282313 & -0.277555756156289.10^{-16} & 0.5 & 0 & 0.555111512312578.10^{-16} \\ -0.105847549360176 & 0 & 0.0580947502202252 & 0 & 0 & 0 \\ -0.096620221225 & -0.0956292183860159 & 0.138777878078145.10^{-16} & -0.19324044245 & 0 & -0.277555756156289.10^{-16} \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.144337567282313 & 0.277555756156289.10^{-16} \\ 0 & 0 & 0 & -0.105847549360176 & 0 & 0.0580947502202252 \\ 0 & 0 & 0 & -0.096620221225 & -0.0956292183860159 & -0.138777878078145.10^{-16} \end{bmatrix} \tag{7.37}$$

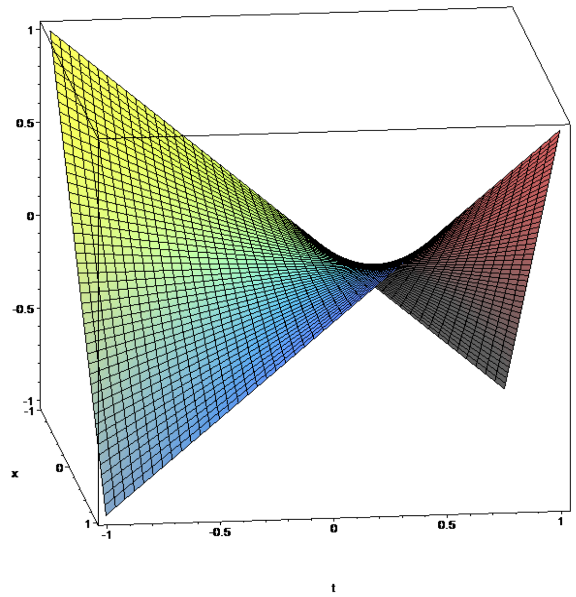
$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.0449074074077428 & 0.0360843918205782 & 0.00838525491866093 & 0.25 & 0.0721687836411564 & 0.555111512312578.10^{-16} \\ -0.0320750149583333 & -0.0231481481481481 & -0.346944695195361.10^{-17} & -0.0641500299166667 & -0.346944695195361.10^{-17} & -0.173472347597681.10^{-16} \\ -0.0140329368928611 & -0.0139459276818954 & -0.00787037037070578 & -0.096620221225 & -0.0278918553637908 & -0.693889390390723.10^{-16} \\ 0 & 0 & 0 & 0.0449074074077428 & 0.0360843918205782 & 0.00838525491866093 \\ 0 & 0 & 0 & -0.032075014958333 & -0.0231481481481481 & -0.346944695195361.10^{-17} \\ 0 & 0 & 0 & -0.0140329368928611 & -0.0139459276818954 & -0.00787037037070578 \end{bmatrix} \tag{7.38}$$

biçiminde elde edilir.

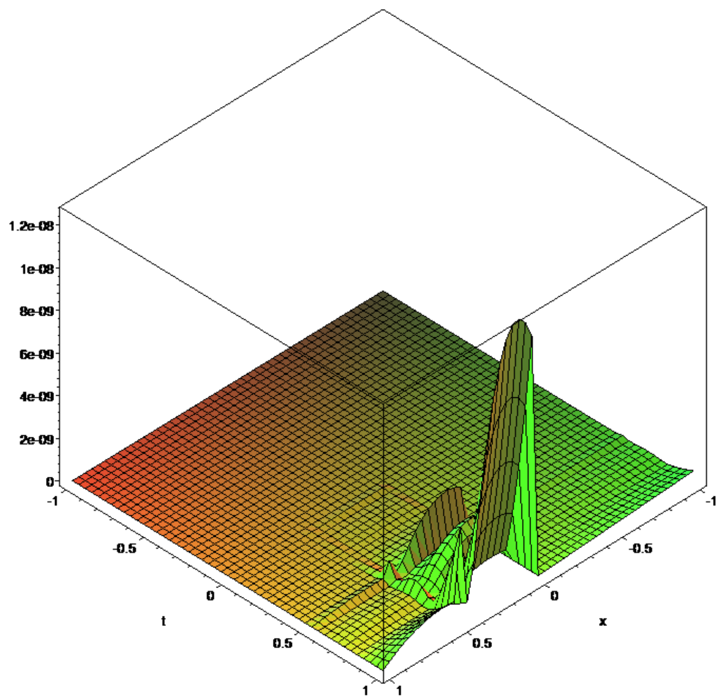
Bunu takiben (4.17) ile verilen sıralama noktalarına ait formül kullanılarak x ve t için nokta değerleri belirlenir ve daha sonra P, P^2 matrisleri (7.10) denkelmide yerine yazılarak doğrusal olmayan bir denklem sistemi elde edilir. Maple algoritması yardımıyla doğrusal olmayan cebirsel denklem sistemi çözülüp, bilinmeyen katsayılar matrisi olan C matrisi

$$C=\begin{bmatrix} -0.3743892309.10^{-8} & -0.3641811054.10^{-8} & -0.3506323327.10^{-8} & 0.1850951328.10^{-6} & 0.1598673126.10^{-6} & 0.2052056107.10^{-6} \\ 0.1827023073.10^{-8} & 0.1762773546.10^{-8} & 0.1690169037.10^{-8} & -0.1012649516.10^{-6} & -0.8822804750.10^{-7} & -0.1116562350.10^{-6} \\ 0.1125172980.10^{-8} & 0.1105718950.10^{-8} & 0.1047121003.10^{-8} & -0.5236011714.10^{-7} & -0.4493157936.10^{-7} & -0.5836207530.10^{-7} \\ -0.5685561379.10^{-9} & -0.5386258366.10^{-9} & -0.5800747521.10^{-9} & 0.1996243671.10^{-7} & 0.1687597589.10^{-7} & 0.2232520291.10^{-7} \\ 0.1875462387.10^{-9} & 0.1956775441.10^{-9} & 0.1630630166.10^{-9} & -0.8119703633.10^{-8} & -0.6826167834.10^{-8} & -0.9235244987.10^{-8} \\ 0.7606985897.10^{-10} & 0.7134859366.10^{-10} & 0.8338555931.10^{-10} & -0.2831784460.10^{-8} & -0.2372216837.10^{-8} & -0.3201138442.10^{-8} \end{bmatrix} \tag{7.39}$$

biçiminde elde edilir. En nihayetinde bulmuş olduğumuz bu değerleri $u(x,t)$ nümerik çözümünde yerine yazarız ve buna göre $k=2,\ M=3$ için Legendre dalgacık sıralama metodunu Ginzburg Landau denklemine uygulamak suretiyle elde edilen nümerik çözüm grafiği, hata miktarı grafiği ve hata tablosu aşağıdaki gibidir:



Şekil 7.8 Nümerik Çözüm Grafiği



Şekil 7.9 Hata Miktarı Grafiği

Çizelge 7.4 Ginzburg Landau Denkleminin $k = 2\ M = 3$ için LWCM uygulanarak hesaplanan Hata Tablosu

$x(i)$	$t(i)$	$u_{nümerik} - u_{analitik}$
0.08333333333	0.08333333333	$-0.637588766505547966\times10^{-11}$
	0.2500000000	$0.410544445661464863\times10^{-10}$
	0.4166666667	$-0.165127064799541756\times10^{-9}$
	0.5833333333	$0.497317229064542232\times10^{-9}$
	0.7500000000	$-0.164012051856454733\times10^{-8}$
	0.9166666667	$0.534264781026916325\times10^{-8}$
0.2500000000	0.08333333333	$-0.733491045679102172\times10^{-11}$
	0.2500000000	$0.394514421131475502\times10^{-10}$
	0.4166666667	$-0.153154086635076681\times10^{-9}$
	0.5833333333	$0.439893677040004150\times10^{-9}$
	0.7500000000	$-0.146679521306758432\times10^{-8}$
	0.9166666667	$0.477619133132378692\times10^{-8}$
0.4166666667	0.08333333333	$-0.282861234435216602\times10^{-11}$
	0.2500000000	$0.103624747671560158\times10^{-10}$
	0.4166666667	$-0.373816255727632552\times10^{-10}$
	0.5833333333	$0.942832756312128595\times10^{-10}$
	0.7500000000	$-0.3292153771816686\times10^{-9}$
	0.9166666667	$0.107240871738412126\times10^{-8}$
0.5833333333	0.08333333333	$-0.175831571525009168\times10^{-11}$
	0.2500000000	$0.506361619301287648\times10^{-11}$
	0.4166666667	$-0.184023074556449729\times10^{-10}$
	0.5833333333	$0.441040537424441936\times10^{-10}$
	0.7500000000	$-0.163039248768370726\times10^{-9}$
	0.9166666667	$0.534099653393127482\times10^{-9}$
0.7500000000	0.08333333333	$-0.163381808082618819\times10^{-11}$
	0.2500000000	$0.436678471160689696\times10^{-11}$
	0.4166666667	$-0.159684487854860892\times10^{-10}$
	0.5833333333	$0.368274855055972240\times10^{-10}$
	0.7500000000	$-0.140330969067292699\times10^{-9}$
	0.9166666667	$0.460236071475605968\times10^{-9}$
0.9166666667	0.08333333333	$-0.737521155258491488\times10^{-12}$
	0.2500000000	$0.189842586095778642\times10^{-11}$
	0.4166666667	$-0.696520618959084460\times10^{-11}$
	0.5833333333	$0.157308610582163056\times10^{-10}$
	0.7500000000	$-0.609461370260078184\times10^{-10}$
	0.9166666667	$0.200004124373265313\times10^{-9}$

7.2 Korteweg-de Vries (KdV) Denklemi

1834 yılında ilk defa bağımsız dalgalar Scott Russell tarafından durgun bir teknenin önünden kopan düzgün, yuvarlak ve belirgin bir su kümesinin şeklinde veya hızında en ufak bir değişiklik olmaksızın üç kilometrelik bir kanal boyunca ilerleyişinin gözlemlenmesiyle bulunmuştur. Daha sonra Russell, salınım yapan diğer dalgalardan farklı olan hareketinden dolayı bunlara bağımsız dalga adını vermiştir. S. Russell' den sonra teorik çalışmaların ilki Korteweg de Vries' e aittir. Sığ bir kanalda tek yönde ilerleyen dalgaların oluşumu ile ilgili denklem Korteweg de Vries tarafından bulunmuştur.

Bu problemi kısaca özetleyelim;

T yüzey gerilimi, ρ sıvı yoğunluğu, g yerçekimi ivmesi, k kanalın derinliği, τ sıvının düzgün hareketi ile ilgili küçük sabit, $k+\eta$ yüzeyin dipten itibaren yüksekliği ve $\sigma = \frac{k^3}{3} - \frac{Tk}{\rho g}$ parametre olmak üzere dalganın hareketi

$$\eta_r = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2}{3}\tau\eta + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right] \tag{7.40}$$

biçimindeki kısmi diferansiyel denklemle ifade edilir. Burada

$\eta = \beta\tau u,\ \zeta = -\sqrt{\frac{2\tau\mu}{\sigma}}x,\ T = \sqrt{\frac{2g\mu\tau}{\sigma k}}^3 t$ dönüşümüyle (7.40) denklemi

$$u_T + u_\zeta + \frac{3}{2}\beta u u_\zeta + \mu u_{\zeta\zeta\zeta} = 0 \tag{7.41}$$

biçimini alır. Burada μ bilinen parametredir. (7.41) denkleminde $x = \zeta - T$ dönüşümü yaparsak ve ayrıca T yerine t yazarsak,

$$u_t + \frac{3}{2}\beta u u_x + \mu u_{xxx} = 0 \tag{7.42}$$

Korteweg-de Vries denklemi elde edilir. Şimdi aşağıda ifade edilen bir doğrusal olmayan KdV denklemini Chebyshev dalgacık sıralama metodu ile çözelim.

7.2.1 KdV Denklemi için Chebyshev Dalgacık Sıralama Metodu

Başlangıç ve sınır şartları ile verilen bu tipten bir Korteweg-de Vries denklemi

$$\begin{aligned} &u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \\ &u(x,0) = \frac{1}{6}(x-1) \\ &u(0,t) = -\frac{1}{6(1-t)}, \quad u(1,t) = 0, \quad t \geq 0 \end{aligned} \tag{7.43}$$

biçiminde olsun. Bu problemin analitik çözümü $u(x,t) = \frac{1}{6}\left(\frac{x-1}{1-t}\right)$ dir. Şimdi $k=2,\ M=2$ olmak üzere Chebyshev dalgacık sıralama metodunu bu problemi çözmek için uygulayalım.

(4.14) ve (4.15) denklemlerinden, $k=2,\ M=2$ için

$$\Psi(x) = \left[\psi_{1,0}(x), \psi_{1,1}(x), \psi_{2,0}(x), \psi_{2,1}(x)\right] \tag{7.44}$$

yazılır. Burada,

$$\psi_{1,0}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} T_0(4x-1), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & , \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\psi_{1,1}(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} T_1(4x-1), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & , \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\psi_{2,0}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} T_0(4x-3), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & , \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\psi_{2,1}(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} T_1(4x-3), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & , \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçimindedir. Dolayısı ile bu problemin çözümü için,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3} = \Psi(x)^T C \Psi(t) \tag{7.45}$$

olarak kabul edilsin. Burada $C = \left[c_{ij}\right]_{m\times m}$ bulunması gereken bilinmeyen katsayılar matrisidir. Ayrıca $\Psi(t)$, (4.14) denklemindeki gibi tanımlı vektördür. Şimdi (7.45) eşitliğinin t' ye göre bir kez integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} u_{xxx}(x,t) &= \Psi(x)^T CP\Psi(t) + u_{xxx}(x,0) \\ &= \Psi(x)^T CP\Psi(t) \end{aligned} \tag{7.46}$$

ve (7.46) denklemininde x' e göre üç kez integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,t) &= \Psi(x)^T P^T CP\Psi(t) + u_{xx}(0,t) \\ &= \Psi(x)^T P^T CP\Psi(t) \end{aligned} \tag{7.47}$$

$$u_x(x,t) = \Psi(x)^T \left(P^2\right)^T CP\Psi(t) + u_x(0,t) \tag{7.48}$$

$$u(x,t) = \Psi(x)^T \left(P^3\right)^T CP\Psi(t) + xu_x(0,t) + u(0,t) \tag{7.49}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca (7.45) denkleminin x' e göre üç kez integrali alınırsa,

$$u_t(x,t) = \Psi(x)^T \left(P^3\right)^T C\Psi(t) + xu_{xt}(0,t) + u_t(0,t) \tag{7.50}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi de (7.49) denkleminde $x=1$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= u(1,t) - u(0,t) - \Psi(1)^T \left(P^3\right)^T CP\Psi(t) \\ &= \frac{1}{6(1-t)} - \Psi(1)^T \left(P^3\right)^T CP\Psi(t) \end{aligned} \tag{7.51}$$

be benzer şekilde (7.50) denkleminde de $x=1$ konulursa,

$$u_{xt}(0,t) = \frac{1}{6(1-t)^2} - \Psi(1)^T \left(P^3\right)^T C\Psi(t) \tag{7.52}$$

olduğu görülür. Daha sonra (7.52) denklemi (7.50) denkleminde yerine yazılırsa sırası ile,

$$u_t(x,t)=\Psi(x)^T\left(P^3\right)^T C\Psi(t)+x\left(\frac{1}{6(1-t)^2}-\Psi(1)^T\left(P^3\right)^T C\Psi(t)\right)-\frac{1}{6(1-t)^2} \qquad (7.53)$$

elde edilir ve (7.51) denklemi (7.49) denkleminde yerine yazılırsa,

$$u(x,t)=\Psi(x)^T\left(P^3\right)^T CP\Psi(t)+x\left(\frac{1}{6(1-t)}-\Psi(1)^T\left(P^3\right)^T CP\Psi(t)\right)-\frac{1}{6(1-t)} \qquad (7.54)$$

olup, benzer şekilde (7.48) denkleminde de (7.51) eşitliği yerine yazılırsa,

$$u_x(x,t)=\Psi(x)^T\left(P^2\right)^T CP\Psi(t)+\frac{1}{6(1-t)}-\Psi(1)^T\left(P^3\right)^T CP\Psi(t) \qquad (7.55)$$

olduğu açıkça görülür. Sonuç olarak (7.52), (7.53), (7.54) ve (7.55) denklemleri (7.43) ile verilen problemde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}&\Psi(x)^T\left(P^3\right)^T C\Psi(t)+x\left(\frac{1}{6(1-t)^2}-\Psi(1)^T\left(P^3\right)^T C\Psi(t)\right)-\frac{1}{6(1-t)^2}\\&-6\left[\Psi(x)^T\left(P^3\right)^T CP\Psi(t)+x\left(\frac{1}{6(1-t)}-\Psi(1)^T\left(P^3\right)^T CP\Psi(t)\right)-\frac{1}{6(1-t)}\right]\\&.\left[\Psi(x)^T\left(P^2\right)^T CP\Psi(t)+\frac{1}{6(1-t)}-\Psi(1)^T\left(P^3\right)^T CP\Psi(t)\right]+\Psi(x)^T CP\Psi(t)=0\end{aligned}$$

(7.56)

denklemi elde edilir. Buna ilaveten $k=2, M=2$ için (4.18) ile tanımlanan Φ matrisinin (4.22)' de yerine yazılmasyla elde edilen P, P^2, P^3 matrisleri

$$\Phi=\begin{bmatrix}1.128379167 & 1.128379167 & 0 & 0\\ -0.7978845605 & 0.7978845605 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1.128379167 & 1.128379167\\ 0 & 0 & -0.7978845605 & 0.7978845605\end{bmatrix} \qquad (7.57)$$

$$P=\begin{bmatrix}0.25 & 0.176776695348775 & 0.5 & 0\\ -0.0883883476222492 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.25 & 0.176776695348775\\ 0 & 0 & -0.0883883476222492 & 0\end{bmatrix}$$

(7.58)

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.0416666667 & 0.04419417338371938 & 0.25 & 0.0883883476743876 \\ -0.0220970869055623 & -0.020833333333333 & -0.0441941738111246 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0416666667 & 0.04419417338371938 \\ 0 & 0 & -0.0220970869055623 & -0.020833333333333 \end{bmatrix}$$

(7.59)

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0.005208333333333 & 0.00644498368459077 & 0.072916666667 & 0.0441941738371938 \\ -0.00322249184039450 & -0.003906250 & -0.0220970869055623 & -0.00781250 \\ 0 & 0 & 0.005208333333333 & 0.0064449836849077 \\ 0 & 0 & -0.00322249184039450 & -0.003906250 \end{bmatrix}$$

(7.60)

biçiminde elde edilir ve ayrıca $k = 2, M = 2$ için,

$$\Psi(x) = \left[\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & , diğer\ durumda \end{cases}, \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}\left(4x-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & , diğer\ durumda \end{cases}, \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ 0 & , diğer\ durumda \end{cases}, \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}\left(4x-3\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ 0 & , diğer\ durumda \end{cases} \right]$$

(7.61)

olup, benzer şekilde

$$\Psi(t) = \left[\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 0 & , diğer\ durumda \end{cases}, \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}\left(4t-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 0 & , diğer\ durumda \end{cases}, \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \\ 0 & , diğer\ durumda \end{cases}, \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}\left(4t-3\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \\ 0 & , diğer\ durumda \end{cases} \right]$$

(7.62)

bulunur ve bunu takiben

$$\Psi(1) = \left[0, 0, \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \right] \qquad (7.63)$$

elde edilir.

Buradan itibaren (4.17)’ de verilen sıralama noktalarına ait formül kullanılarak x ve t için nokta değerleri belirlenmiş olur ve daha sonra (7.58), (7.59), (7.60), (7.61), (7.62) ve (7.63) eşitlikleri (7.56)’ da yerine yazılarak doğrusal olmayan bir denklem sistemi elde edilir.

EK-B de daha detaylı ifade edilen Maple algoritması yardımıyla doğrusal olmayan cebirsel denklem sistemi çözülüp, bilinmeyen katsayılar matrisi olan C

$$C=\begin{bmatrix} -0.1324551713.10^{-8} & -0.2444746101.10^{-8} & -0.2465599235.10^{-7} & -0.4197580029.10^{-7} \\ 0.5855075989.10^{-9} & 0.1523565924.10^{-8} & -0.2179497744.10^{-8} & -0.4197580029.10^{-8} \\ 0.3197373702.10^{-9} & 0.1441300532.10^{-8} & 0.6438222282.10^{-8} & 0.8694470201.10^{-8} \\ 0.1525765558.10^{-9} & -0.1448932329.10^{-9} & 0.2874823150.10^{-7} & 0.4429818922.10^{-7} \end{bmatrix}$$

(7.64)

biçiminde elde edilir. En nihayetinde bulmuş olduğumuz C bilinmeyen katsayıları (7.49) denklemi ile verilen $u\left(x,t\right)$ nümerik çözümünde yerlerine yazılır ve böylece $k=2\ M=2$ için Chebyshev dalgacık sıralama metodunun doğrusal olmayan Korteweg-de Vries denklemine uygulanmasıyla elde edilen $u(x,t)$ nümerik çözümü aşağıdaki gibi elde edilir:

$u_{nümerik}(x,t) =$

$$0.269320581578283.10^{-10}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right) - 0.627605076933291.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)$$

$$+0.264865221590705.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right) -$$

$$0.162635323763245.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)$$

$$+0.957776986489212.10^{-10}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right) - 0.287898197589222.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)$$

$$+0.657293908211856.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right) -$$

$$0.407859001291063.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)$$

$$+0.159749459426179.10^{-8}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right) - 0.278894118649227.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)$$

$$+0.218814290697088.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right) -$$

$$0.133044898067266.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)$$

$$+0.236234045232436.10^{-8}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right) - 0.396432486450764.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)$$

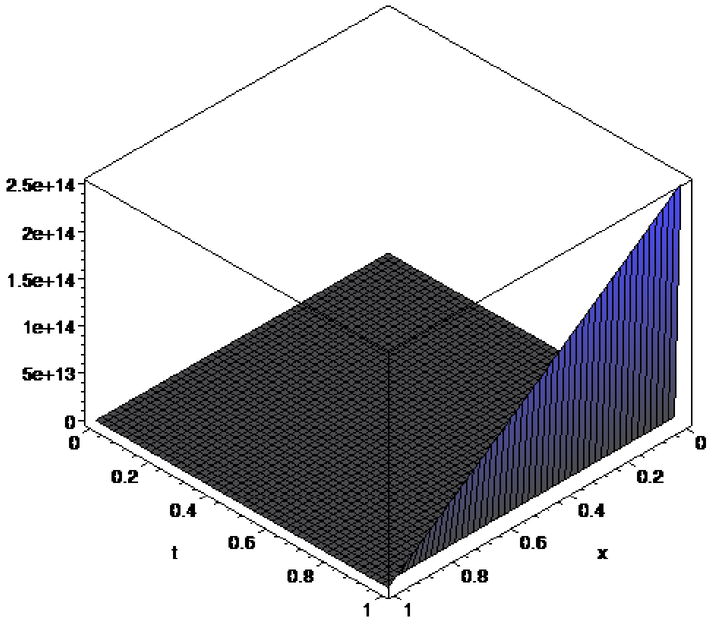
$$+0.330784805743356.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right) -$$

$$0.201057660919901.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right) + \frac{x}{6-6t} - \frac{1}{6-6t} -$$

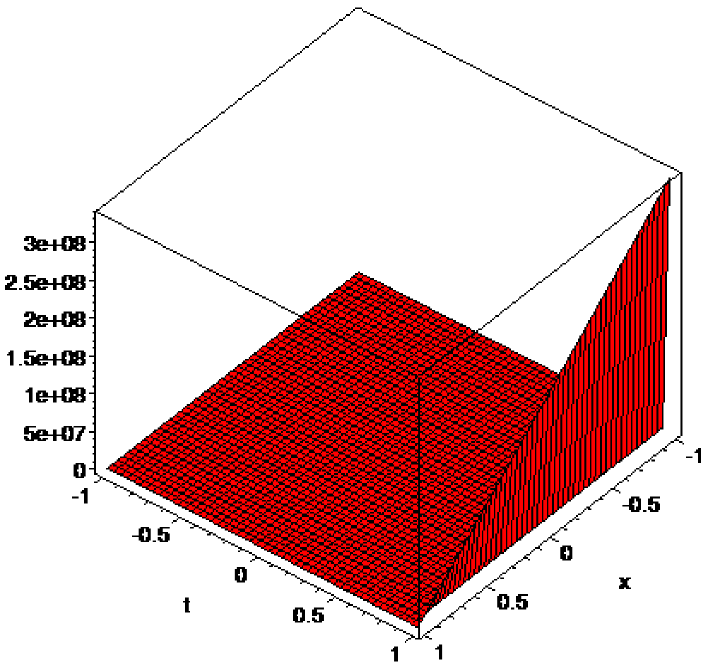
$$
\left(x.\left[0,0,\frac{2}{\sqrt{\pi}},\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right].\left[\begin{array}{l}
\left[\begin{array}{l}
0.269320581578283.10^{-10}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+0.957776986489212.10^{-10}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
+0.159749459426179.10^{-8}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+0.236234045232436.10^{-8}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
\end{array}\right]\\
\left[\begin{array}{l}
-0.627605076933291.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.287898197589222.10^{-10}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
-0.278894118649227.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.396432486450764.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
\end{array}\right]\\
\left[\begin{array}{l}
0.264865221590705.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+0.657293908211856.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
+0.2188142906697088.10^{-8}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+0.330784805743356.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
\end{array}\right]\\
\left[\begin{array}{l}
-0.162635323763245.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.407859001291063.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
-0.133044898067266.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.201057660919901.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & ,\, \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
\end{array}\right]
\end{array}\right]\right)
$$

(7.65)

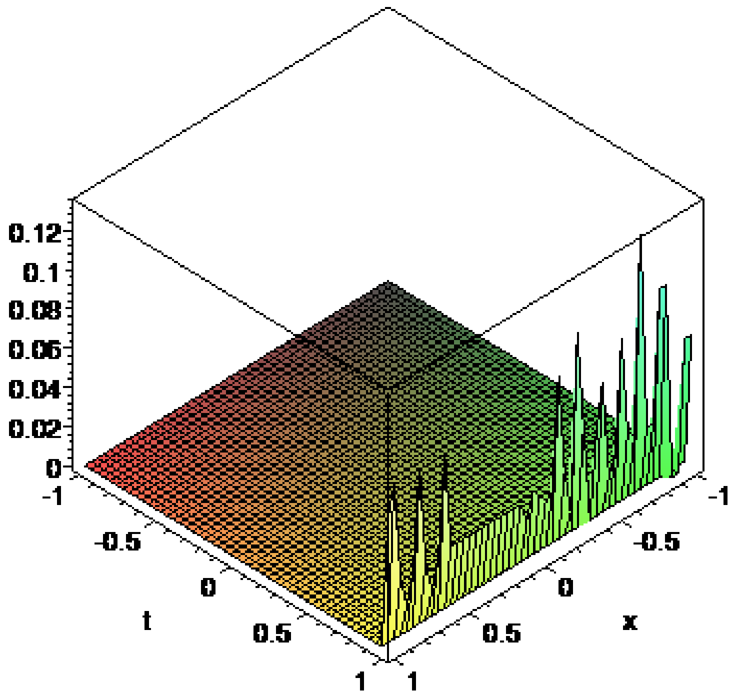
$k=2, M=2$ için Chebyshev dalgacık sıralama metodu kullanarak elde edilen Korteweg-de Vries denkleminin nümerik çözüm grafiği, hata miktarı grafiği ve ayrıca nümerik çözümün analitik çözüme ne kadar iyi yakınsadığının karşılaştırılması açısından analitik çözüm grafiği ve hata tablosu aşağıda verilmiştir:



Şekil 7.10 Analitik Çözüm Grafiği



Şekil 7.11 Nümerik Çözüm Grafiği



Şekil 7.12 Hata Miktarı Grafiği

Çizelge 7.5 KdV Denkleminin $k=2$ $M=2$ için CWCM uygulanarak hesaplanan Hata Tablosu

$x(i)$	$t(i)$	$u_{nümerik}-u_{analitik}$	$x(i)$	$t(i)$	$u_{nümerik}-u_{analitik}$
0.125	0.125	$-0.645818953870503\times10^{-10}$	0.625	0.125	$-0.735021210562792\times10^{-10}$
	0.375	$0.443536873895312\times10^{-10}$		0.375	$0.126204463546387\times10^{-10}$
	0.625	$-0.937969146797002\times10^{-10}$		0.625	$0.743137218428558\times10^{-10}$
	0.875	$0.565420998910326\times10^{-8}$		0.875	$0.107365971668827\times10^{-8}$
0.375	0.125	$-0.139156228207149\times10^{-9}$	0.875	0.125	$0.188326229610958\times10^{-10}$
	0.375	$0.961043744585055\times10^{-10}$		0.375	$-0.657931834013858\times10^{-10}$
	0.625	$0.946537292989547\times10^{-11}$		0.625	$0.414379086599581\times10^{-10}$
	0.875	$0.392705690188677\times10^{-8}$		0.875	$0.957886603369928\times10^{-9}$

Buna göre, KdV denklemine $k=2, M=3$ için aynı metot uygulanırsa, buna istinaden (4.18) ile tanımlanan Φ matrisini (4.22) eşitliğinde yerine yazarak elde edilen P, P^2, P^3 matrisleri

$$\Phi=\begin{bmatrix} 1.128379167 & 1.128379167 & 1.128379167 & 0 & 0 & 0 \\ -1.063846080 & 0 & 1.063846080 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1773076801 & -1.595769121 & -0.1773076801 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.128379167 & 1.128379167 & 1.128379167 \\ 0 & 0 & 0 & -1.063846080 & 0 & 1.063846080 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1773076801 & -1.595769121 & -0.1773076801 \end{bmatrix} \tag{7.66}$$

$$P=\begin{bmatrix} 0.25 & 0.176776695459554 & -0.277555756156289.10^{-16} & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.0687464925526946 & 0 & 0.0624999999603444 & 0 & 0 & 0 \\ -0.144040270197580 & -0.138888888975054 & 0.138777878078145.10^{-16} & -0.288080540395160 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.176776695459554 & -0.277555756156289.10^{-16} \\ 0 & 0 & 0 & -0.0687464925526946 & 0 & 0.0624999999603444 \\ 0 & 0 & 0 & -0.144040270197580 & -0.138888888975054 & 0.138777878078145.10^{-16} \end{bmatrix}$$

$$P^2=\begin{bmatrix} 0.0480324074072850 & 0.0441941738648884 & 0.0110485434592119 & 0.25 & 0.0883883477297769 & -0.277555756156289.10^{-16} \\ -0.0261891400198104 & -0.0231481481481482 & -0.346944695195361.10^{-17} & -0.0523782800396208 & -0.693889390390723.10^{-17} & -0.693889390390723.10^{-17} \\ -0.0264619435778194 & -0.0254629629629786294 & -0.0100995370370248 0 & -0.144040270197580 & -0.0509259259572588 & -0.138777878078145.10^{-16} \\ 0 & 0 & 0 & 0.0480324074072850 & 0.0441941738648884 & 0.0110485434592119 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0261891400198104 & -0.0231481481481482 & -0.346944695195361.10^{-17} \\ 0 & 0 & 0 & -0.0264619435778194 & -0.0254629629786294 & -0.0109953703702480 \end{bmatrix}$$

$$P^3=\begin{bmatrix} 0.253025413192953.10^{-9} & 0.243630278327774.10^{-9} & 0.102781523604316.10^{-9} & 0.283173121999969.10^{-8} & 0.164450437871247.10^{-8} & 0.205563047208631.10^{-9} \\ -0.178493016084098.10^{-9} & -0.172272621749169.10^{-9} & -0.592187136887031.10^{-10} & -0.974521111514863.10^{-9} & -0.344545243498337.10^{-9} & 0 \\ -0.109690021009217.10^{-9} & -0.105277713355257.10^{-9} & -0.592187137137251382.10^{-10} & -0.155934657117580.10^{-8} & -0.947499420203390.10^{-9} & -0.118437427450276.10^{-9} \\ 0 & 0 & 0 & 0.253025413192953.10^{-9} & 0.243630278327774.10^{-9} & 0.102781523604316.10^{-9} \\ 0 & 0 & 0 & -0.178493016084098.10^{-9} & -0.172272621749169.10^{-9} & -0.592187136887031.10^{-10} \\ 0 & 0 & 0 & -0.109690021009217.10^{-9} & -0.105277713355257.10^{-9} & -0.592187137251382.10^{-10} \end{bmatrix}$$

(7.67)

biçiminde elde edilir ve ayrıca $k=2, M=3$ için,

$$\Psi(x)=\left[\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{2} \\ 0, & diğer\ durumda\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{2} \\ 0, & diğer\ durumda\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{2} \\ 0, & diğer\ durumda\end{cases}, \begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1 \\ 0, & diğer\ durumda\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1 \\ 0, & diğer\ durumda\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1 \\ 0, & diğer\ durumda\end{cases}\right] \tag{7.68}$$

$$\Psi(t)=\left[\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le\frac{1}{2} \\ 0, & diğer\ durumda\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le\frac{1}{2} \\ 0, & diğer\ durumda\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4t-1)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le\frac{1}{2} \\ 0, & diğer\ durumda\end{cases}, \begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1 \\ 0, & diğer\ durumda\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1 \\ 0, & diğer\ durumda\end{cases}, \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4t-3)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1 \\ 0, & diğer\ durumda\end{cases}\right] \tag{7.69}$$

bulunur ve buradan da

$$\Psi(1)=\left[0,0,0,\frac{2}{\sqrt{\pi}},\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}},\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right] \tag{7.70}$$

elde edilir. Bunu takiben (4.17)’ de verilen sıralama noktalarına ait formül kullanılarak x ve t için nokta değerleri belirlenir ve daha sonra (7.67), (7.68), (7.69) ve (7.70) eşitlikleri (7.56)’ da yerine yazılarak doğrusal olmayan bir denklem sistemi bulunur.

EK-B ile detaylandırılan Maple algoritması yardımıyla bilinmeyen katsayılar matrisi C

$$C=\begin{bmatrix}
-0.3755361056.10^{-8} & -0.1898650036.10^{-8} & -0.6170609349.10^{-8} & -0.2305146680.10^{-7} & -0.2599355575.10^{-7} & -0.1802474203.10^{-7}\\
0.2088043590.10^{-9} & -0.5688400584.10^{-9} & 0.9653010494.10^{-9} & -0.3155837408.10^{-7} & -0.3358938239.10^{-7} & -0.1502723745.10^{-7}\\
0.4586335522.10^{-8} & 0.2159476263.10^{-8} & 0.6326253962.10^{-8} & 0.5351108418.10^{-7} & 0.6262121647.10^{-7} & 0.2436059870.10^{-7}\\
0.1066302519.10^{-8} & -0.2725821518.10^{-10} & 0.1657305079.10^{-8} & 0.1541311119.10^{-7} & 0.1622717639.10^{-7} & 0.1224371688.10^{-7}\\
-0.2795879373.10^{-9} & -0.5411716464.10^{-10} & -0.1442177682.10^{-9} & 0.1054240642.10^{-7} & 0.1173817577.10^{-7} & 0.1979312730.10^{-8}\\
0.5447727189.10^{-9} & 0.6371106066.10^{-10} & 0.1348047014.10^{-8} & 0.4542053339.10^{-7} & 0.4186079709.10^{-7} & 0.3444181499.10^{-7}
\end{bmatrix} \tag{7.71}$$

elde edilir. Bulunan C bilinmeyen katsayıları (7.54) denkleminde yerine yazılarak nümerik çözüm aşağıdaki gibi bulunur.

$$u_{nümerik}(x,t)=$$

$$\left(\begin{array}{l}
0.692480465209653.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & , diğer\ durum\end{cases}\right)-0.468741711702899.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & , diğer\ durum\end{cases}\right)\\
-0.321919520319125.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & , diğer\ durum\end{cases}\right)-\\
0.361184880041553.10^{-10}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & , diğer\ durum\end{cases}\right)+\\
0.602980402561403.10^{-10}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & , diğer\ durum\end{cases}\right)-0.155886119076330.10^{-10}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & , diğer\ durum\end{cases}\right)
\end{array}\right)\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & , diğer\ durum\end{cases}\right)$$

$$+\left(\begin{array}{l}
-0.363691449028613.10^{-12}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & , diğer\ durum\end{cases}\right)+0.279902492279354.10^{-12}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & , diğer\ durum\end{cases}\right)\\
+0.132068837077809.10^{-12}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & , diğer\ durum\end{cases}\right)+\\
0.608700762716612.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & , diğer\ durum\end{cases}\right)-\\
0.147840156261991.10^{-10}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & , diğer\ durum\end{cases}\right)+0.951924251635985.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4x-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & , diğer\ durum\end{cases}\right)
\end{array}\right)\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & , diğer\ durum\end{cases}\right)$$

$$
+\left(\begin{array}{l}
0.140485450736003.10^{-10}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.942740832467353.10^{-11}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
-0.662269961297391.10^{-11}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-\\
0.646780886139899.10^{-10}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+\\
0.109028900993037.10^{-9}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.270057026988695.10^{-10}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4x-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
\end{array}\right)\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4t-1)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
$$

$$
+\left(\begin{array}{l}
0.299287412113723.10^{-9}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.195024816162387.10^{-9}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
-0.147545276173520.10^{-9}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-\\
0.986828024660566.10^{-9}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+\\
0.167419751343918.10^{-8}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.329753664979689.10^{-9}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4x-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
\end{array}\right)\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
$$

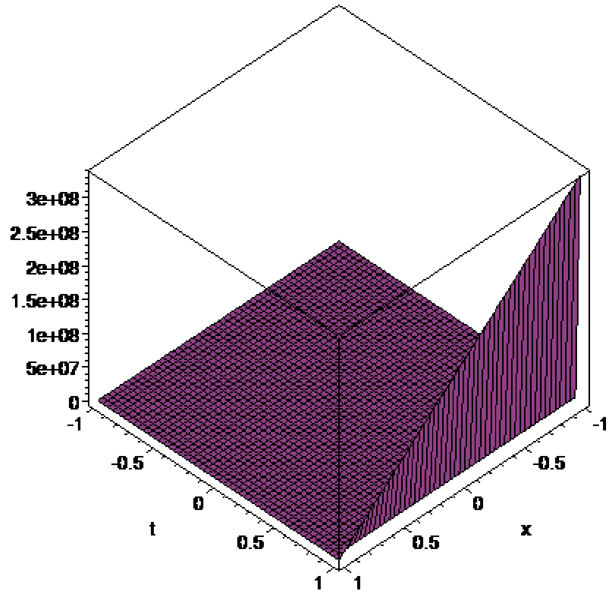
$$
+\left(\begin{array}{l}
0.302819434478276.10^{-9}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.198800600159774.10^{-9}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
-0.147662975247857.10^{-9}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-\\
0.104013895966937.10^{-8}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+\\
0.176118889525935.10^{-8}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.353128040359202.10^{-9}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4x-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
\end{array}\right)\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4t-3)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
$$

$$
+\left(\begin{array}{l}
0.191346537603818.10^{-9}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.122706008438426.10^{-9}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
-0.965037767000132.10^{-10}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-3)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-\\
0.616223735489953.10^{-9}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4x-1)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+\\
0.105581682531228.10^{-8}\left(\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.221716152120804.10^{-9}\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}(4x-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
\end{array}\right)\left(\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}\left(2(4t-3)^2-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \dfrac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
$$

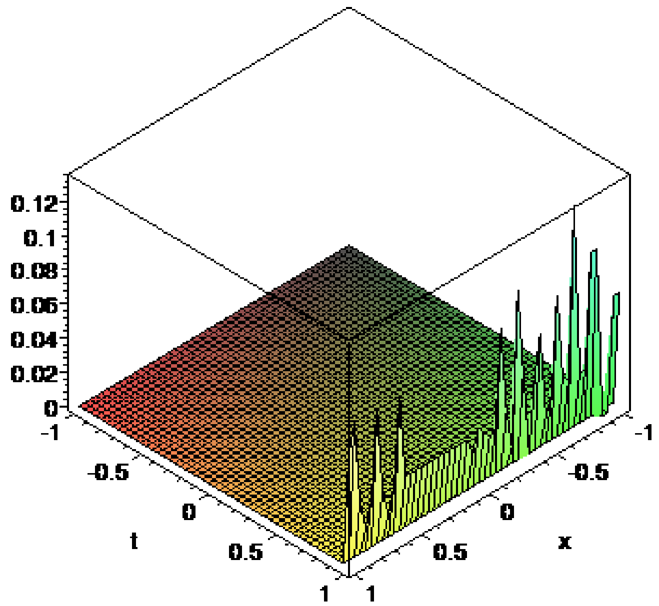
$$
+\frac{x}{6-6t}-\frac{1}{6-6t}-
$$

$$
x.\left[0,0,0,\frac{2}{\sqrt{\pi}},\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}},\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right].\left(\begin{bmatrix}
\left[\begin{array}{l}
0.602980402531228.10^{-8}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.147840156261991.10^{-10}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
+0.109028900993037.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4t-1)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+\\
0.167419751343918.10^{-8}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+0.1761188895255935.10^{-8}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
+0.105581682531228.10^{-8}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4t-3)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
\end{array}\right]\\
\left[\begin{array}{l}
-0.155886119076330.10^{-10}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+0.951924251635985.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
-0.270057026988695.10^{-10}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4t-1)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-\\
0.329753664979689.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.353128040359202.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
-0.221716152120804.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4t-3)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
\end{array}\right]\\
\left[\begin{array}{l}
-0.361184880041553.10^{-10}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+0.608700762716612.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
-0.646780886139899.10^{-10}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4t-1)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-\\
0.986828024660566.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.104013895966937.10^{-8}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
-0.616223735489953.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4t-3)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
\end{array}\right]\\
\left[\begin{array}{l}
0.692480465209653.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.363691449028613.10^{-12}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
+0.140485450736003.10^{-10}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4t-1)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+\\
0.299287412113723.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+0.302819434478276.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
0.191346537603818.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4t-3)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
\end{array}\right]\\
\left[\begin{array}{l}
-0.468741711702899.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+0.279902492279354.10^{-12}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
-0.942740832467353.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4t-1)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-\\
0.195024816162387.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.198800600159774.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
-0.122706008438426.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4t-3)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
\end{array}\right]\\
\left[\begin{array}{l}
-0.321919520319125.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+0.132068837077809.10^{-12}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
-0.662269961297391.10^{-11}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4t-1)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-\\
0.147545276173520.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)-0.147662975247857.10^{-9}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}(4t-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
-0.965037767000132.10^{-10}\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(2(4t-3)^{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)
\end{array}\right]
\end{bmatrix}\right)
$$

Buna göre, $k=2$ $M=3$ için Chebyshev dalgacık sıralama metodunu Korteweg-de Vries (KdV) denklemine uygulamak sureti ile elde edilen nümerik çözüm grafiği ve hata miktarı grafiğini gösteren grafikler ile $k=2$ $M=3$ için hata tablosu aşağıdaki gibi elde edilmiştir.



Şekil 7.13 Nümerik Çözüm Grafiği



Şekil 7.14 Hata Miktarı Grafiği

Çizelge 7.6 KdV Denkleminin $k=2\ M=3$ için CWCM uygulanarak hesaplanan Hata Tablosu

$x(i)$	$t(i)$	$u_{nümerik}-u_{analitik}$
0.08333333333	0.08333333333	$0.203770306184125616\times10^{-9}$
	0.2500000000	$-0.158600715893797428\times10^{-9}$
	0.4166666667	$0.144388834222297647\times10^{-9}$
	0.5833333333	$-0.258579657685942266\times10^{-9}$
	0.7500000000	$0.274884559559041008\times10^{-9}$
	0.9166666667	$0519892040529157384\times10^{-8}$
0.2500000000	0.08333333333	$0.130765120953668657\times10^{-9}$
	0.2500000000	$-0.121751192461161395\times10^{-8}$
	0.4166666667	$0.744723727130747194\times10^{-10}$
	0.5833333333	$-0.360144858380095911\times10^{-9}$
	0.7500000000	$0.443757586232607082\times10^{-9}$
	0.9166666667	$0.851211567898246813\times10^{-8}$
0.4166666667	0.08333333333	$0.563028235145424106\times10^{-10}$
	0.2500000000	$-0.107718917119470348\times10^{-9}$
	0.4166666667	$0.139840528046164536\times10^{-9}$
	0.5833333333	$-0.171513275804002774\times10^{-9}$
	0.7500000000	$0.014336165587991445\times10^{-9}$
	0.9166666667	$0.383712595031227010\times10^{-8}$.
0.5833333333	0.08333333333	$0.833744462358509964\times10^{-10}$
	0.2500000000	$-0.340104611140645829\times10^{-10}$
	0.4166666667	$0.111511300193711804\times10^{-9}$
	0.5833333333	$-0.434925151449050418\times10^{-10}$
	0.7500000000	$0.774315611629106115\times10^{-10}$
	0.9166666667	$0.215133644232423650\times10^{-8}$
0.7500000000	0.08333333333	$0.\ 635539468274437524\times10^{-10}$
	0.2500000000	$0.148364168173209522\times10^{-10}$
	0.4166666667	$0.418381440603354804\times10^{-10}$
	0.5833333333	$-0.425096069456287752\times10^{-10}$
	0.7500000000	$0.730322469166821975\times10^{-10}$
	0.9166666667	$0.172286901412022076\times10^{-8}$
0.9166666667	0.08333333333	$0.463610694972915738\times10^{-10}$
	0.2500000000	$0.335970140596941748\times10^{-11}$
	0.4166666667	$0.558984455945044090\times10^{-11}$
	0.5833333333	$0.358754692619811522\times10^{-12}$
	0.7500000000	$-0.367981478621715042\times10^{-10}$
	0.9166666667	$0.424978718882584872\times10^{-9}$

7.2.2 KdV Denklemi için Chebyshev Dalgacık Metodu

Şimdi de KdV denklemini daha önce verilen ve Bölüm 5' de değinilen Chebyshev Dalgacık metodu ile çözmeye çalışalım. Bunun için,

$$u(x,t)=\Psi\left(x\right)^{T}C\Psi\left(t\right) \tag{7.72}$$

biçiminde tanımlayıp, KdV denklemindeki kısmi türevler yerine, (7.72) eşitliği ile tanımlanan denklemin her iki yanının x ve t' ye göre türevleri alınırsa,

$$u_{t}(x,t)=\Psi\left(x\right)^{T}CD\Psi\left(t\right) \tag{7.73}$$

$$u_{x}(x,t)=\Psi\left(x\right)^{T}\left(D^{T}\right)C\Psi\left(t\right) \tag{7.74}$$

$$u_{xx}(x,t)=\Psi\left(x\right)^{T}\left(D^{2}\right)^{T}C\Psi\left(t\right) \tag{7.75}$$

$$u_{xxx}(x,t)=\Psi\left(x\right)^{T}\left(D^{3}\right)^{T}C\Psi\left(t\right) \tag{7.76}$$

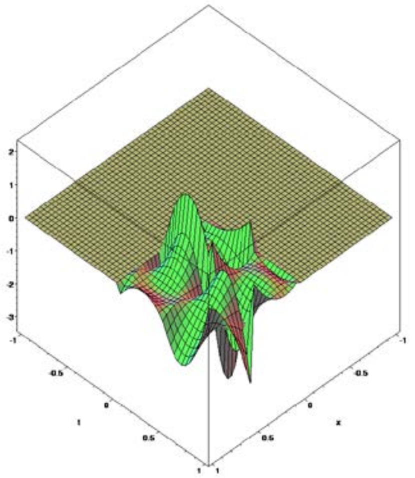
olduğu görülür. Bu türevler (7.43) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\Psi\left(x\right)^{T}CD\Psi\left(t\right)-6\left(\Psi\left(x\right)^{T}C\Psi\left(t\right)\right)\left(\Psi\left(x\right)^{T}D^{T}C\Psi\left(t\right)\right)+\left(\Psi\left(x\right)^{T}\left(D^{3}\right)^{T}C\Psi\left(t\right)\right)=0 \tag{7.77}$$

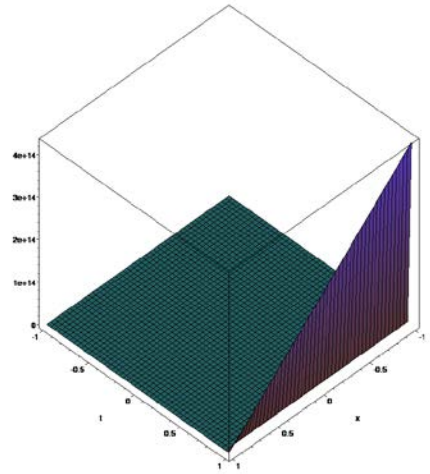
elde edilir. Buna göre, Korteweg-de Vries (KdV) denkleminin nümerik çözümünü elde etmede C bilinmeyen matrisini bulmak için Chebyshev dalgacık metodunda $k=2$ $M=3$ alınır ve böylece C matrisi

$$C=\begin{bmatrix} 0.003921904511 & -0.1339946103 & -0.3092387603 & 0.02010052974 & -0.1209444135 & 0.2600809905 \\ 0.07407453101 & -0.1358749230 & -0.2691661073 & 0.01895096150 & -0.1140274867 & 0.2452067098 \\ 0.6416115039 & 0.4073893177 & 0.1308528204 & 0.01421322092 & -0.08552061496 & 0.1839050321 \\ -0.02010052974 & 0.1209444135 & -0.2600809905 & -0.1303969363 & -0.006957425135 & 0.08388332150 \\ 0.01895096150 & -0.1140274867 & 0.2452067098 & 0.04702940486 & 0.2633084970 & 0.4272598803 \\ -0.01421322092 & 0.08552061496 & -0.1839050321 & 0.09220455791 & -0.004919642492 & -0.05931446548 \end{bmatrix} \tag{7.78}$$

şeklinde bulunur. Bununla ilgili hata miktarını gösteren tablo ve grafikler aşağıdaki gibidir:



Şekil 7.15 Nümerik Çözüm Grafiği



Şekil 7.16 Hata Miktarı Grafiği

Çizelge 7.7 Hata KdV Denkleminin $k=2$ $M=3$ için CWM uygulanarak hesaplanan Hata Tablosu

$x(i)$	$t(i)$	$u_{nümerik}-u_{analitik}$	$x(i)$	$t(i)$	$u_{nümerik}-u_{analitik}$
0.08333333333	0.083333333333	0.0534992216	0.5833333333	0.083333333333	- 0.1353404070
	0.2500000000	0.1283077502		0.2500000000	0.8796459783
	0.4166666667	- 0.0190949913		0.4166666667	0.4241604995
	0.5833333333	0.3666666664		0.5833333333	0.3635715654
	0.7500000000	0.6111111113		0.7500000000	0.9333429000
	0.9166666667	1.833333333		0.9166666667	0.4193819916
0.2500000000	0.083333333333	- 0.0626005576	0.7500000000	0.083333333333	0.04545454540
	0.2500000000	- 0.0936070477		0.2500000000	0.05555555561
	0.4166666667	- 1.689589742		0.4166666667	0.07142857159
	0.5833333333	0.3000000000		0.5833333333	0.09999999989
	0.7500000000	0.4999999999		0.7500000000	0.1666666665
	0.9166666667	1.500000001		0.9166666667	0.5000000001
0.4166666667	0.083333333333	0.5798370008	0.9166666667	0.083333333333	0.01515151546
	0.2500000000	1.145976185		0.2500000000	0.01851851841
	0.4166666667	- 0.1425050693		0.4166666667	0.02380952412
	0.5833333333	0.4444313161		0.5833333333	- 0.4140464648
	0.7500000000	- 0.3981644969		0.7500000000	- 0.6266468821
	0.9166666667	0.8615537866		0.9166666667	0.3004476622

7.2.3 KdV Denklemi için Legendre Dalgacık Sıralama Metodu

Bu kısımda ise, $k = 2,\ M = 2$ için Legendre dalgacık sıralama metodu kullanılarak problemin çözümünü bulalım.

Bölüm 6’ da vurguladığımız gibi, $k = 2,\ M = 2$ için Legendre bazları

$$\Psi(x) = \left[\psi_{1,0}(x), \psi_{1,1}(x), \psi_{2,0}(x), \psi_{2,1}(x)\right] \tag{7.79}$$

biçimindedir. Buna göre,

$$\psi_{1,0}(x) = \begin{cases} 2\ , & 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 0\ , & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\psi_{1,1}(x) = \begin{cases} 2\sqrt{3}\left(4x-1\right), & 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 0 & ,\ \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\psi_{2,0}(x) = \begin{cases} 2\ , & \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \\ 0\ , & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\psi_{2,1}(x) = \begin{cases} 2\sqrt{3}\left(4x-3\right), & \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \\ 0 & ,\ \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

yazılır. Böylece bu problem için,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3} = \Psi(x)^T C \Psi(t) \tag{7.80}$$

olduğu kabul edilir. Burada $C = \left[c_{ij}\right]_{m\times m}$ bulunması gereken bilinmeyen katsayılar matrisidir. CWCM kullanılarak elde edilen (7.46)-(7.56) operatör matris denklemleri LWCM için de kullanılabilirdir. CWCM ile benzer biçimde hesaplanan sadece bazı Legendre bazı olan LWCM daki P , P^2 , P^3 materisleri

$$\Phi = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1.732050808 & 1.732050808 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1.732050808 & 1.732050808 \end{bmatrix} \tag{7.81}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.25 & 1.14433756726148 & 0.5 & 0 \\ -0.1082531755 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 1.14433756726148 \\ 0 & 0 & -0.1082531755 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.82}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.0416666667 & 0.0360843918153699 & 0.25 & 0.0721687836307398 \\ -0.027063293875 & -0.020833333333333 & -0.5412658775 & 0.693889390390723.10^{-17} \\ 0 & 0 & 0.0416666667 & 0.0360843918153699 \\ 0 & 0 & -0.027063293875 & -0.020833333333333 \end{bmatrix}$$

(7.83)

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0.005208333333333 & 0.00526230713974144 & 0.07291666667 & 0.03608439118153699 \\ -0.00394673035677083 & -0.003906250 & -0.027063293875 & -0.00781250 \\ 0 & 0 & 0.005208333333 & 0.00526230713974144 \\ 0 & 0 & -0.00394673035677083 & -0.003906250 \end{bmatrix}$$

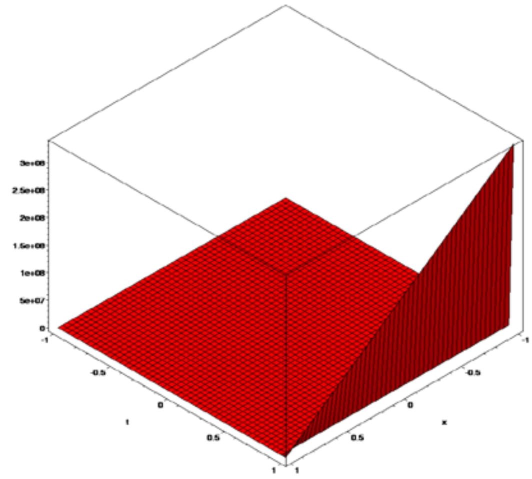
(7.84)

biçiminde elde edilir. Buradan itibaren (4.17)' de verilen sıralama noktalarına ait formül kullanılarak x ve t için nokta değerleri belirlenir ve daha sonrasında P, P^2, P^3 eşitlikleri (7.51) de yerine yazılarak doğrusal olmayan bir denklem sistemi bulunur. Maple algoritması yardımıyla doğrusal olmayan cebirsel denklem sistemi çözülüp, bilinmeyen katsayılar matrisi olan C matrisi

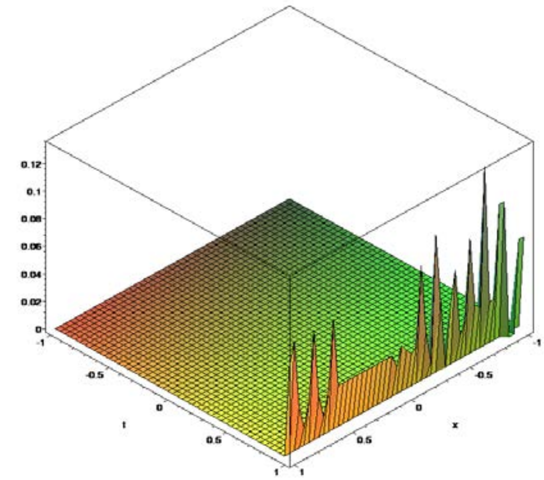
$$C = \begin{bmatrix} -0.3933217273.10^{-9} & -0.6060078193.10^{-9} & -0.7014302255.10^{-8} & -0.9619651506.10^{-8} \\ 0.1479104631.10^{-9} & 0.3390934332.10^{-9} & -0.4888611856.10^{-8} & -0.5612934076.10^{-8} \\ 0.9670407421.10^{-10} & 0.3629271041.10^{-9} & 0.3149686578.10^{-8} & 0.3556728584.10^{-8} \\ 0.4904953261.10^{-10} & -0.1257730436.10^{-10} & 0.7397436877.10^{-8} & 0.9329522675.10^{-8} \end{bmatrix}$$

(7.85)

bulunur. Bunu takiben bulmuş olduğumuz bu değerleri $u(x,t)$ nümerik çözümünde yerine yazılır. En nihayetinde, $k = 2,\ M = 2$ için Legendre dalgacık sıralama metodunun KdV denklemine uygulanmak sureti ile elde edilen nümerik çözüm grafiği, hata miktarı grafiği ve hata tablosu aşağıdaki gibidir:



Şekil 7.17 Nümerik Çözüm Grafiği



Şekil 7.18 Hata Miktarı Grafiği

Çizelge 7.8 KdV Denkleminin $k=2$ $M=2$ için LWCM uygulanarak hesaplanan Hata Tablosu

$x(i)$	$t(i)$	$u_{nümerik}-u_{analitik}$	$x(i)$	$t(i)$	$u_{nümerik}-u_{analitik}$
0.125	0.125	$-0.642275677087412\times10^{-10}$	0.625	0.125	$-0.760956020418035\times10^{-10}$
	0.375	$0.789021348257535\times10^{-10}$		0.375	$0.173172587381032\times10^{-10}$
	0.625	$-0.861342108748886\times10^{-10}$		0.625	$0.765256746859677\times10^{-10}$
	0.875	$0.490395590801995\times10^{-8}$		0.875	$0.113369846843625\times10^{-8}$
0.375	0.125	$-0.106587114134804\times10^{-9}$	0.875	0.125	$0.179681235168427\times10^{-10}$
	0.375	$0.836540559046028\times10^{-10}$		0.375	$-0.642275815865290\times10^{-10}$
	0.625	$0.416001677550071\times10^{-10}$		0.625	$0.421752424650812\times10^{-10}$
	0.875	$0.321498849764623\times10^{-8}$		0.875	$0.977899622389700\times10^{-9}$

7.3 Sine-Gordon Denklemi

Sine-Gordon denklemi, manyetik akışın yayılımı ve akışkan hareketlerin kararlılığı gibi çeşitli önemli olayları tanımlayan doğrusal olmayan evrim denklemlerinden biridir. Matematik, fizik, diferansiyel geometri, göreceli alan teorisi, katıhal fiziği ve çok doğrusal optik gibi birçok alanın geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir. Son yıllarda Sine-Gordon denklemlerinin analitik veya nümerik çözümlerini bulmak için birçok metot denenmiştir. Örneğin, Wazwaz [27], Sine-Gordon denklemlerinin analitik çözümünü elde etmek için Tanh metodunu önermiş. Kaya [28], Sine-Gordon denklemlerinin nümerik çözümünü elde etmek için modifiye edilmiş ayrışım metodunu uygulamıştır. Batiha ve ark. [29] Sine-Gordon denkleminin yaklaşık analitik çözümünü bulmak için varyasyon yineleme metodunu kullanmıştır. Yucel [30], homotopi analiz metodu ile Sine-Gordon denkleminin analitik çözümünü literatüre sunmuştur. Mohyud-Din ve ark. [31], Sine-Gordon denklemlerini çözmek için modifiye edilmiş varyasyon yineleme metodunu tatbik etmiştir. Biazar ve ark. [32], Sine-Gordon denklemlerinin yarı analitik çözümünü elde etmek için diferansiyel dönüşüm metodunu ortaya koymuştur. Xinping shao ve ark. [33] Sine-Gordon denklemlerinin analitik çözümünü elde etmek için ise Adomian ayrışma ve homotopi perturbasyon metodu ile birlikte varyasyon yineleme metodunu araştırmışlardır. Hasan ve ark. [34] homotopi analiz metodu ile doğrusal olmayan Sine-Gordon denkleminin çözümü için bir yeni teknik ortaya atmıştır. Biz ise bu tezde Sine-Gordon denklemini çözmek için ilk olarak Chebyshev dalgacık sıralama metodunu uyguladık.

Bunun için önce doğrusal olmayan Sine-Gordon denklemi C^2 ve κ sabitler olmak üzere,

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \tag{7.86}$$

başlangıç koşulları ile

$$u_{tt} - C^2 u_{xx} + \kappa \sin u = 0 \qquad , x \in \mathbb{R}, t > 0 \tag{7.87}$$

ile ifade edilir. Eğer (7.87) denkleminde $C = 0$, $\kappa = -1$ alınır.

Buna ilaveten (7.76) başlangıç koşulları ise,

$$u(x,0)=\pi, \quad u_t(x,0)=-2 \tag{7.88}$$

biçiminde tanımlanırsa, bu taktirde (7.88) başlangıç koşullu (7.87) kısmi diferansiyel denkleminin analitik çözümü $u(x,t)=2\arcsin(\text{sech}(t))$ olarak bulunur.

7.3.1 Sine-Gordon Denklemi için Chebyshev Dalgacık Sıralama Metodu

Bu kısımda (7.87) ve (7.86) başlangıç ve sınır değerli problemini Chebyshev dalgacık sıralama metodu uygulamak suretiyle çözelim. Buna göre öncelikle (4.14) ve (4.15) denklemlerinden $k=3,\ M=2$ için

$$\Psi(x)=\left[\psi_{1,0}(x),\psi_{1,1}(x),\psi_{2,0}(x),\psi_{2,1}(x),\psi_{3,0}(x),\psi_{3,1}(x),\psi_{4,0}(x),\psi_{4,1}(x)\right] \tag{7.89}$$

yazılır. Burada,

$$\psi_{1,0}(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}T_0(8x-1), & 0\le x\le \dfrac{1}{4}\\ 0 & ,\ \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\psi_{1,1}(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}T_1(8x-1), & 0\le x\le \dfrac{1}{4}\\ 0 & ,\ \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\psi_{2,0}(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}T_0(8x-3), & \dfrac{1}{4}\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & ,\ \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\psi_{2,1}(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}T_1(8x-3), & \dfrac{1}{4}\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & ,\ \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\psi_{3,0}(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}T_0(8x-5), & \dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{3}{4}\\ 0 & ,\ \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\psi_{3,1}(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}T_1(8x-5), & \dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{3}{4}\\ 0 & , \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\psi_{4,0}(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}T_0(8x-7), & \dfrac{3}{4}\le x\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\psi_{4,1}(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}T_1(8x-7), & \dfrac{3}{4}\le x\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

biçimindedir. Böylece,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Psi(x)^T C\Psi(t) \tag{7.90}$$

olduğu kabul edilir. Burada $C=\left[c_{ij}\right]_{m\times m}$ bulunması gereken bilinmeyen katsayılar matrisidir. Ayrıca $\Psi(t)$, (4.13) denklemindeki gibi tanımlı vektördür. Şimdi (7.90) eşitliğinin t' ye göre iki kez integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} u_t(x,t)&=\Psi(x)^T CP\Psi(t)+u_t(x,0)\\ &=\Psi(x)^T CP\Psi(t)-2\end{aligned} \tag{7.91}$$

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\Psi(x)^T C\left(P^2\right)\Psi(t)+u(x,0)-2t\\ &=\Psi(x)^T C\left(P^2\right)\Psi(t)-2t+\pi\end{aligned} \tag{7.92}$$

bulunur. Şimdi de (7.92) ve (7.91) denklemleri (7.87) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\Psi(x)^T C\Psi(t)-\sin\left[\Psi(x)^T C\left(P^2\right)\Psi(t)-2t+\pi\right]=0 \tag{7.93}$$

biçiminde cebirsel denklem sistemi elde edilir.

Bunu takiben $k=3, M=2$ için (4.18) ile tanımlanan Φ matrisi (4.22) eşitliğinde yerine yazılarak elde edilen P, P^2 matrisleri

$$\Phi=\begin{bmatrix} 1.595769121 & 1.595769121 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.128379167 & 1.128379167 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.595769121 & 1.595769121 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.128379167 & 1.128379167 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.595769121 & 1.595769121 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.128379167 & 1.128379167 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.595769121 & 1.595769121 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.128379167 & 1.128379167 \end{bmatrix} \qquad (7.94)$$

$$P=\begin{bmatrix} 0.125 & 0.0883883476222492 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0 \\ -0.0441941738371938 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.125 & 0.0883883476222492 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0441941738371938 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.125 & 0.0883883476222492 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0441941738371938 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.125 & 0.0883883476222492 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0441941738371938 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^2=\begin{bmatrix} 0.0104166666666667 & 0.0110485434527812 & 0.0625 & 0.0220970869055623 & 0.125 & 0.0220970869055623 & 0.1875 & 0.0220970869055623 \\ -0.00552427172964923 & -0.0052083333333333 & -0.0110485434592985 & 0.173472347597681.10^{-17} & -0.0110485434592985 & 0 & -0.0110485434592985 & 0.607153216591882.10^{-17} \\ 0 & 0 & 0.0104166666666667 & 0.0110485434527812 & 0.0625 & 0.0220970869055623 & 0.125 & 0.0220970869055623 \\ 0 & 0 & -0.00552427172964923 & -0.0052083333333333 & -0.0110485434592985 & 0.173472347597681.10^{-17} & -0.0110485434592985 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0104166666666667 & 0.0110485434527812 & 0.0625 & 0.0220970869055623 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.00552427172964923 & -0.0052083333333333 & -0.0110485434592985 & 0.173472347597681.10^{-17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0104166666666667 & 0.0110485434527812 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.00552427172964923 & -0.00552427172964923 \end{bmatrix}$$

(7.95)

biçiminde olur ve ayrıca $k=3, M=2$ için,

$$\Psi(x)=\left[\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{4},\\ 0 & ,dd\end{cases}\begin{cases}\frac{4(8x-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{4},\\ 0 & , d.d.\end{cases}\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2},\\ 0 & , d.d.\end{cases}\begin{cases}\frac{4(8x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2},\\ 0 & , d.d.\end{cases}\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{4},\\ 0 & , d.d.\end{cases}\begin{cases}\frac{4(8x-5)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{4},\\ 0 & , d.d.\end{cases}\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{3}{4}\le x\le 1,\\ 0 & , d.d.\end{cases}\begin{cases}\frac{4(8x-7)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{3}{4}\le x\le 1\\ 0 & , d.d.\end{cases}\right]$$

ve benzer şekilde

$$\Psi(t)=\left[\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le\frac{1}{4},\\ 0 & ,dd\end{cases}\begin{cases}\frac{4(8t-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le\frac{1}{4},\\ 0 & , d.d.\end{cases}\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{4}\le t\le\frac{1}{2},\\ 0 & , d.d.\end{cases}\begin{cases}\frac{4(8t-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{4}\le t\le\frac{1}{2},\\ 0 & , d.d.\end{cases}\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le\frac{3}{4},\\ 0 & , d.d.\end{cases}\begin{cases}\frac{4(8t-5)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le\frac{3}{4},\\ 0 & , d.d.\end{cases}\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{3}{4}\le t\le 1,\\ 0 & , d.d.\end{cases}\begin{cases}\frac{4(8t-7)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{3}{4}\le t\le 1\\ 0 & , d.d.\end{cases}\right]$$

(7.96)

elde edilir. Bunu takiben

$$\Psi(1)=\left[0,0,0,0,0,0,\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}},\frac{4}{\sqrt{\pi}}\right] \qquad (7.97)$$

elde edilir. Bunu takiben (4.17)' de verilen sıralama noktalarına ait formül kullanılarak x ve t için nokta değerleri belirlenmiş olur ve (7.95), (7.96) ve (7.97) eşitlikleri (7.93) de yerine yazılarak doğrusal olmayan cebirsel bir denklem sistemi oluşturulur. Daha sonra Maple bilgisayar programı yardımıyla sonuçlara ulaşılır.

EK-C ile detaylı olarak anlatılan Maple algoritması yardımıyla bilinmeyen katsayılar matrisi C

$$C=\begin{bmatrix} 0.09580589030 & 0.06642903032 & 0.2602198096 & 0.04807077227 & 0.3599443686 & 0.02235818807 & 0.3911200370 & 0.0006483072811 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.09580589030 & 0.06642903032 & 0.2602198096 & 0.04807077227 & 0.3599443686 & 0.02235818807 & 0.3911200370 & 0.0006483072811 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9033854892.10^{-38} \\ 0.09580589030 & 0.06642903032 & 0.2602198096 & 0.04807077227 & 0.3599443686 & 0.02235818807 & 0.3911200370 & 0.0006483072811 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.09580589030 & 0.06642903032 & 0.2602198096 & 0.04807077227 & 0.3599443686 & 0.02235818807 & 0.3911200370 & 0.0006483072811 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.98}$$

bulunur. En nihayetinde bulmuş olduğumuz C bilinmeyen katsayıları $u(x,t)$ nümerik çözümde yerine yazılarak aşağıdaki biçimde nümerik sonuç bulunur.

$$u_{nümerik}(x,t)=$$

$$\left(\begin{array}{l} 0.000631006009733546\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{4}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)+0.000631006009733546\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right) \\ +0.000631006009733546\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{4}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)+0.000631006009733546\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{3}{4}\le x\le 1\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)\end{array}\right)\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le\frac{1}{4}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)$$

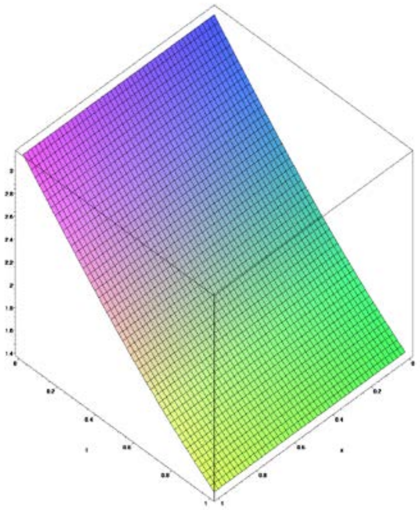
$$+\left(\begin{array}{l} 0.000712531009095267\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{4}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)+0.000712531009095267\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right) \\ +0.000712531009095267\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{4}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)+0.000712531009095267\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{3}{4}\le x\le 1\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)\end{array}\right)\left(\begin{cases}\frac{4(8t-1)}{\sqrt{\pi}}, & 0\le t\le\frac{1}{4}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)$$

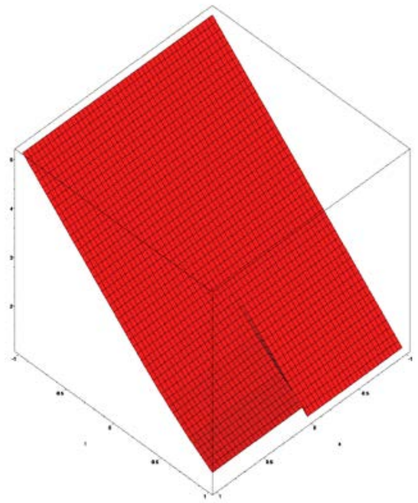
$$+\left(\begin{array}{l} 0.00769899112369352\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{4}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)+0.00769899112369352\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right) \\ +0.00769899112369352\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{4}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)+0.00769899112369352\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{3}{4}\le x\le 1\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)\end{array}\right)\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{4}\le t\le\frac{1}{2}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)$$

$$+\left(\begin{array}{l} 0.00474171235209099\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{4}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)+0.00474171235209099\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right) \\ +0.00474171235209099\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{4}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)+0.00474171235209099\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{3}{4}\le x\le 1\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)\end{array}\right)\left(\begin{cases}\frac{4(8t-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{4}\le t\le\frac{1}{2}\\ 0 & ,\ diğer\ durum\end{cases}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\begin{aligned}&0.0306003261424720\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+0.0306003261424720\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{4}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\ &+0.0306003261424720\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{4}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+0.0306003261424720\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{3}{4}\le x\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\end{aligned}\right)\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le\frac{3}{4}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
&+\left(\begin{aligned}&0.0117275429321670\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+0.0117275429321670\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{4}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\ &+0.0117275429321670\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{4}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+0.0117275429321670\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{3}{4}\le x\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\end{aligned}\right)\left(\begin{cases}\frac{4(8t-5)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le t\le\frac{3}{4}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
&+\left(\begin{aligned}&0.0755461078376889\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+0.499054691896290.10^{-40}\left(\begin{cases}\frac{4(8x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\ &+0.0755461078376890\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{4}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+0.0755461078376890\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{3}{4}\le x\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\ &+0.0755461078376890\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{4}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\end{aligned}\right)\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{3}{4}\le t\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
&+\left(\begin{aligned}&0.0201387829490514\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+0.470513275625.10^{-40}\left(\begin{cases}\frac{4(8x-3)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\ &+0.0201387829490514\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & 0\le x\le\frac{1}{4}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)+0.0201387829490514\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{3}{4}\le x\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\ &+0.0201387829490514\left(\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{4}\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\end{aligned}\right)\left(\begin{cases}\frac{4(8t-7)}{\sqrt{\pi}}, & \frac{3}{4}\le t\le 1\\ 0 & , \textit{diğer durum}\end{cases}\right)\\
&-2t+\pi
\end{aligned}
\tag{7.99}
$$

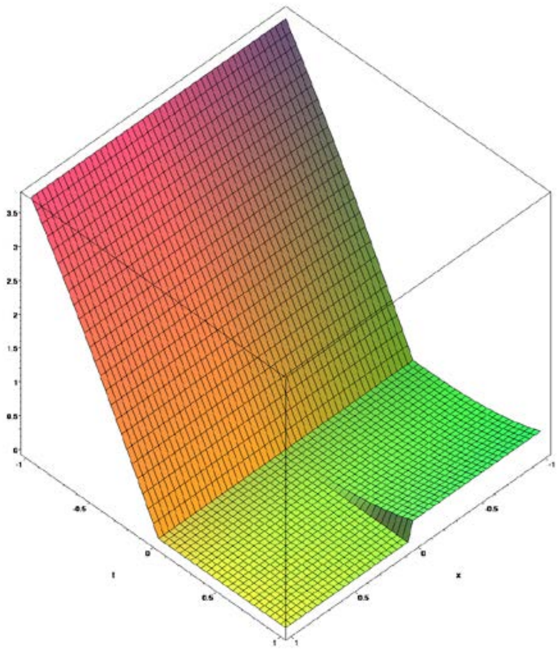
elde edilir. Buna göre $k=3\ M=2$ için Chebyshev dalgacık sıralama metodu kullanılarak Sine-Gordon denkleminin nümerik çözümünün grafiği ve ayrıca nümerik çözümün analitik çözüme ne kadar iyi yakınsadığının kıyaslanması amacıyla analitik çözüm grafiği, hata miktarı grafiği ve hata tablosu aşağıdaki gibidir:





Şekil 7.19 Analitik Çözümün Grafiği

Şekil 7.20 Nümerik Çözüm Grafiği



Şekil 7.21 Hata Miktarı Grafiği

Çizelge 7.9 Sine-Gordon Denkleminin $k = 3$ $M = 2$ için CWCM uygulanarak hesaplanan Hata Tablosu

$x(i)$	$t(i)$	$u_{nümerik} - u_{analitik}$	$x(i)$	$t(i)$	$u_{nümerik} - u_{analitik}$
0.0625	0.0625	0.000242535023068590761	0.5625	0.0625	0.000242535023068590761
	0.1875	0.000711702194881258521		0.1875	0.000711702194881258521
	0.3125	0.00113622991296624676		0.3125	0.00113622991296624676
	0.4375	0.00149564389084444472		0.4375	0.00149564389084444472
	0.5625	0.00178036814536897126		0.5625	0.00178036814536897126
	0.6875	0.00199152212028663734		0.6875	0.00199152212028663734
	0.8125	0.00213854511875211096		0.8125	0.00213854511875211096
	0.9375	0.00223591558018587656		0.9375	0.00223591558018587656
0.1875	0.0625	0.000242535023068590761	0.6875	0.0625	0.000242535023068590761
	0.1875	0.000711702194881258521		0.1875	0.000711702194881258521
	0.3125	0.00113622991296624676		0.3125	0.00113622991296624676
	0.4375	0.00149564389084444472		0.4375	0.00149564389084444472
	0.5625	0.00178036814536897126		0.5625	0.00178036814536897126
	0.6875	0.00199152212028663734		0.6875	0.00199152212028663734
	0.8125	0.00213854511875211096		0.8125	0.00213854511875211096
	0.9375	0.00223591558018587656		0.9375	0.00223591558018587656
0.3125	0.0625	0.000242535023068590761	0.8125	0.0625	0.000242535023068590761
	0.1875	0.000711702194881258521		0.1875	0.000711702194881258521
	0.3125	0.00113622991296624676		0.3125	0.00113622991296624676
	0.4375	0.00149564389084444472		0.4375	0.00149564389084444472
	0.5625	0.00178036814536897126		0.5625	0.00178036814536897126
	0.6875	0.00199152212028663734		0.6875	0.00199152212028663734
	0.8125	0.00213854502372812228		0.8125	0.00213854502372812228
	0.9375	0.00223591549637136567		0.9375	0.00223591549637136567
0.4375	0.0625	0.000242535023068590761	0.9375	0.0625	0.000242535023068590761
	0.1875	0.000711702194881258521		0.1875	0.000711702194881258521
	0.3125	0.00113622991296624676		0.3125	0.00113622991296624676
	0.4375	0.00149564389084444472		0.4375	0.00149564389084444472
	0.5625	0.00178036814536897126		0.5625	0.00178036814536897126
	0.6875	0.00199152212028663734		0.6875	0.00199152212028663734
	0.8125	0.00213854502372812228		0.8125	0.00213854502372812228
	0.9375	0.00223591549637136567		0.9375	0.00223591549637136567

7.3.2 Sine-Gordon Denkleminin Chebyshev Dalgacık Metodu

Bu kısımda Sine-Gordon denklemini daha önce verilen Bölüm 5' de değinilen Chebyshev Dalgacık metodu ile çözelim. Bunun için,

$$u(x,t)=\Psi(x)^T C\Psi(t) \tag{7.100}$$

biçiminde tanımlayıp, Sine-Gordon denklemindeki kısmi türevler yerine (7.100) eşitliği ile tanımlanan denklemin her iki yanının x ve t' ye göre türevleri alınırsa,

$$u_t(x,t)=\Psi(x)^T C(D)\Psi(t) \tag{7.101}$$

$$u_{tt}(x,t)=\Psi(x)^T C(D^2)\Psi(t) \tag{7.102}$$

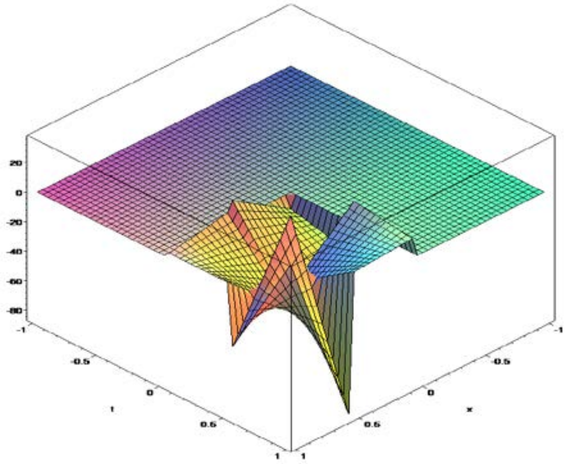
olduğu görülür. Bu türevler (7.87) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\Psi(x)^T CD^2\Psi(t)-\sin\left[\Psi(x)^T C\,\Psi(t)\right]=0 \tag{7.103}$$

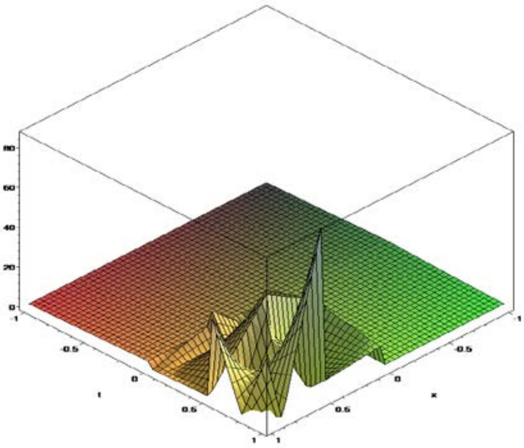
elde edilir. Böylece Sine-Gordon denkleminin nümerik çözümünü bulmak için Chebyshev dalgacık metodunda $k=2, M=2$ alınır ve böylece C bilinmeyen katsayılar matrisi

$$C=\begin{bmatrix} -7.402203299 & -8.723580254 & 5.551652474 & 2.617074076 \\ 1.744716051 & -4.934802204 & -6.106506177 & 3.701101653 \\ -2.467401100 & -6.978864203 & -11.10330495 & -8.723580254 \\ 3.489432101 & 4.934802204 & 5.234148152 & 22.20660992 \end{bmatrix} \tag{7.104}$$

biçiminde bulunur. Bunu takiben elde edilen bu katsayılar matrisi (7.100) denkleminde yerine yazılarak nümerik çözüm bulunur. Bununla ilgili nümerik çözüm grafiği, hata miktarı grafiği ve hata tablosu aşağıdaki gibidir:



Şekil 7.22 Nümerik Çözüm Grafiği



Şekil 7.23 Hata Miktarı Grafiği

Çizelge 7.10 Sine-Gordon Denkleminin $k=2$ $M=2$ için CWM uygulanarak hesaplanan Hata Tablosu

$x(i)$	$t(i)$	$u_{nümerik}-u_{analitik}$	$x(i)$	$t(i)$	$u_{nümerik}-u_{analitik}$
0.125	0.125	- 9.175426472	0.625	0.125	0.249351495
	0.375	- 18.11654024		0.375	- 18.11654024
	0.625	10.60054166		0.625	1.175763714
	0.875	10.98654036		0.875	- 42.42053475
0.375	0.125	0.249351494	0.875	0.125	0.249351491
	0.375	- 21.25813289		0.375	- 5.550169627
	0.625	- 5.107421601		0.625	- 17.67379222
	0.875	4.703355054		0.875	- 4.721422897

7.3.3 Sine-Gordon Denkleminin Legendre Dalgacık Sıralama Metodu

Şimdi ise $k=3,\ M=2$ için Legendre dalgacık sıralama metodu kullanılarak Sine-Gordon denkleminin çözümünü yapalım. Bölüm 6' da vurguladığımız gibi Legendre bazları

$$\Psi(x)=\left[\psi_{1,0}(x),\psi_{1,1}(x),\psi_{2,0}(x),\psi_{2,1}(x),\psi_{3,0}(x),\psi_{3,1}(x),\psi_{4,0}(x),\psi_{4,1}(x)\right] \tag{7.105}$$

biçimindedir. Buna göre,

$$\psi_{1,0}(x)=\begin{cases}2\sqrt{2}, & 0\le x\le \dfrac{1}{4}\\ 0 & ,\ \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\psi_{1,1}(x)=\begin{cases}2\sqrt{3}\sqrt{2}\left(8x-1\right), & 0\le x\le \dfrac{1}{4}\\ 0 & ,\ \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\psi_{2,0}(x)=\begin{cases}2\sqrt{2}, & \dfrac{1}{4}\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & ,\ \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\psi_{2,1}(x)=\begin{cases}2\sqrt{3}\sqrt{2}\left(8x-3\right), & \dfrac{1}{4}\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & ,\ \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\psi_{3,0}(x)=\begin{cases}2\sqrt{2}, & \dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{3}{4}\\ 0 & ,\ \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\psi_{3,1}(x)=\begin{cases}2\sqrt{3}\sqrt{2}\left(8x-5\right), & \dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{3}{4}\\ 0 & ,\ \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\psi_{4,0}(x)=\begin{cases}2\sqrt{2}, & \dfrac{3}{4}\le x\le 1\\ 0 & ,\ \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\psi_{4,1}(x)=\begin{cases}2\sqrt{3}\sqrt{2}\left(8x-7\right), & \dfrac{3}{4}\le x\le 1\\ 0 & ,\ \ diğer\ durumlarda\end{cases}$$

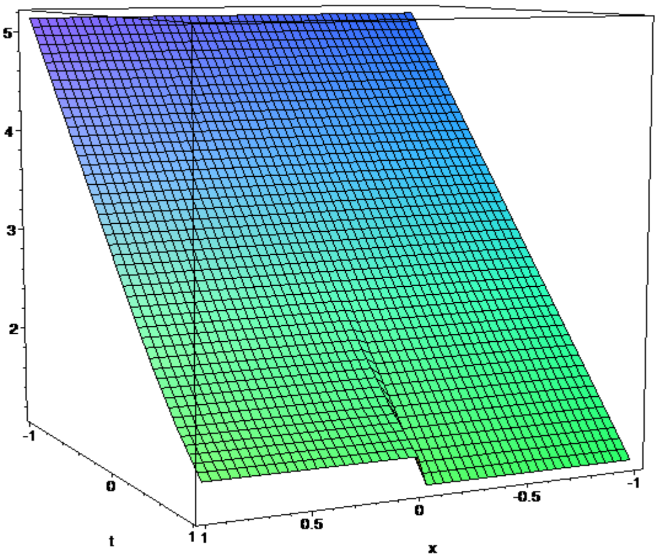
yazılır. Böylece bu problem için ise,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Psi\left(x\right)^T C\Psi\left(t\right) \tag{7.106}$$

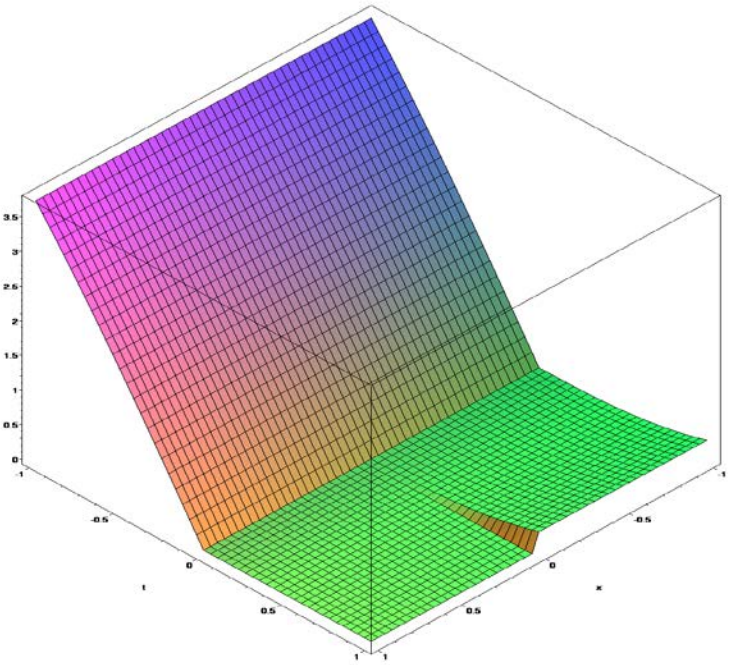
olduğu kabul edilir. Burada $C=\left[c_{ij}\right]_{m\times m}$ bulunması gereken bilinmeyen katsayılar matrisidir. CWCM kullanılarak elde edilen (7.90)-(7.93) operatör matris denklemleri LWCM için de kullanılabilirdir. Bulunan doğrusal olmayan cebirsel denklem sistemi Maple algoritması yardımıyla çözülüp, bilinmeyen katsayılar matrisi olan C matrisi

$$C=\begin{bmatrix}2.828427124 & 2.828427124 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -2.449489743 & 2.449489743 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2.828427124 & 2.828427124 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2.449489743 & 2.449489743 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.828427124 & 2.828427124 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.449489743 & 2.449489743 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.828427124 & 2.828427124\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.449489743 & 2.449489743\end{bmatrix} \tag{7.107}$$

bulunur. Bunu takiben bulmuş olduğumuz C matrisi, $u\left(x,t\right)$ nümerik çözümünde yerine yazılır. Böylece $k=3,\ M=2$ için Legendre dalgacık sıralama metodunun Sine-Gordon denklemine uygulanmak sureti ile elde edilen nümerik çözümün analitik çözüme olan yaklaşımının doğruluğunu göstermek için nümerik çözüm grafiği, hata miktarı grafiği ve hata tablosu aşağıdaki gibidir:



Şekil 7.24 Nümerik Çözüm Grafiği



Şekil 7.25 Hata Miktarı Grafiği

Çizelge 7.11 Sine-Gordon Denklemine $k=3$ $M=2$ için LWCM uygulanarak hesaplanan Hata Tablosu

$x(i)$	$t(i)$	$u_{nümerik}-u_{analitik}$	$x(i)$	$t(i)$	$u_{nümerik}-u_{analitik}$
0.0625	0.0625	0.000242535022369594344	0.5625	0.0625	0.000242535022369594344
	0.1875	0.000711702195634433821		0.1875	0.000711702195634433821
	0.3125	0.00113622990849648887		0.3125	0.00113622990849648887
	0.4375	0.00149564389558287658		0.4375	0.00149564389558287658
	0.5625	0.00178036813373028126		0.5625	0.00178036813373028126
	0.6875	0.00199152213458297922		0.6875	0.00199152213458297922
	0.8125	0.00213854510877942162		0.8125	0.00213854510877942162
	0.9375	0.00223591562493830055		0.9375	0.00223591562493830055
0.1875	0.0625	0.000242535022369594344	0.6875	0.0625	0.000242535022369594344
	0.1875	0.000711702195634433821		0.1875	0.000711702195634433821
	0.3125	0.00113622990849648887		0.3125	0.00113622990849648887
	0.4375	0.00149564389558287658		0.4375	0.00149564389558287658
	0.5625	0.00178036813373028126		0.5625	0.00178036813373028126
	0.6875	0.00199152213458297922		0.6875	0.00199152213458297922
	0.8125	0.00213854510877942162		0.8125	0.00213854510877942162
	0.9375	0.00223591562493830055		0.9375	0.00223591562493830055
0.3125	0.0625	0.000242535022369594344	0.8125	0.0625	0.000242535022369594344
	0.1875	0.000711702195634433821		0.1875	0.000711702195634433821
	0.3125	0.00113622990849648887		0.3125	0.00113622990849648887
	0.4375	0.00149564389558287658		0.4375	0.00149564389558287658
	0.5625	0.00178036813373028126		0.5625	0.00178036813373028126
	0.6875	0.00199152213458297922		0.6875	0.00199152213458297922
	0.8125	0.00213854510877942162		0.8125	0.00213854510877942162
	0.9375	0.00223591562493830055		0.9375	0.00223591562493830055
0.4375	0.0625	0.000242535022369594344	0.9375	0.0625	0.000242535022369594344
	0.1875	0.000711702195634433821		0.1875	0.000711702195634433821
	0.3125	0.00113622990849648887		0.3125	0.00113622990849648887
	0.4375	0.00149564389558287658		0.4375	0.00149564389558287658
	0.5625	0.00178036813373028126		0.5625	0.00178036813373028126
	0.6875	0.00199152213458297922		0.6875	0.00199152213458297922
	0.8125	0.00213854510877942162		0.8125	0.00213854510877942162
	0.9375	0.00223591562493830055		0.9375	0.00223591562493830055

BÖLÜM 8

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde Chebyshev dalgacık sıralama metodu doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlere ilk defa bu tez çalışmasında ele alınarak uygulanmıştır. Çalışmanın birinci bölümünde, dalgacıkların genel literatür özeti ile tezin amaç ve hipotezinden oluşan Giriş bölümüne yer verilmiştir. Tezin ikinci bölümünde ise, bu metodun uygulanması ve metodun temelinde önemli rol oynayan, dalgacıklar için gerekli olan temel tanımlar ve onunla ilgili teoremler, dalgacık aileleri ve bunların özellikleri ele alınmıştır. Buna ek olarak üçüncü bölümde block pulse fonksiyonları ve özellikleri sunulmuş ve uygulanacak metot için ön hazırlık yapılmıştır. Tezin dördüncü bölümünde Chebyshev dalgacık sıralama metodu tanıtılmış ve bu metodun nasıl uygulanacağına dair temel kavramlar ortaya konulmuştur. Beşinci bölümde, Chebyshev dalgacık metodu açıklanarak, bu metot ile Chebyshev dalgacık sıralama metodu birbirleri ile karşılaştırılmıştır. Altıncı bölümde Legendre dalgacık sıralama metodu literatürde yine ilk defa doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlere uygulanmıştır. Tezin asıl literatüre katkısı olacak bölümü olan yedinci bölümde, literatürde çok önemli yere sahip olan, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerden; Ginzburg-Landau denklemi, Korteweg-de Vries denklemi ve Sine-Gordon denklemlerine sırası ile Chebyshev dalgacık sıralama metodu, Chebyshev dalgacık ve Legendre dalgacık sıralama metotları tatbik edilmiş ve bu metotların uygulanması neticesinde elde edilen sonuçların analitik çözüme ne kadar çok yakınsadığı gösterilmiş ve ortaya çıkan hatalar ise tablolar ve grafiklerle desteklenmiştir. Bunun yanında elde edilen sonuçlar birbirleri ile karşılaştırılarak Chebyshev Dalgacık sıralama metodunun doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümünü elde etmekte diğer metotlardan çok daha kullanışlı bir metot olduğu görülmüştür. Sonuçta ele alınan Chebyshev dalgacık sıralama ve Legendre dalgacık sıralama metotlarının kullanılması ile gözle görülür derecede iyi sonuçlar verdiği saptanmıştır.

Gelecekte, Chebyshev dalgacık sıralama metodu kesirli mertebeden doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlere uygulanarak elde edilecek nümerik çözümlerin analizleri yanında farklı metotlarla bulunan çözümlerle de karşılaştırma yapılarak literatüre büyük katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Lepik, U. (2007). ‘‘Application of the Haar wavelet transform to solving integral and differential equations’’, Proc Estonian Acad Sci Phys Math, 56(1):28–46.

[2] Islam, S., Aziz, I. ve Sarler B. (2010).‘‘The numerical solution of second-order boundary value problems by collocation method with the Haar wavelets’’, Math Comput Model, 52:1577–90.

[3] Bujurke, N.M., Salimath, C.S. ve Shiralashetti, S.C., (2008). ‘‘ Numerical solution of stiff systems from nonlinear dynamics using single-term Haar wavelet series’’, Nonlinear Dyn, 51:595–605.

[4] Bujurke, N.M., Salimath, C.S. ve Shiralashetti S.C., (2008). ‘‘Computation of eigenvalues and solutions of regular Sturm-Liouville problems using Haar wavelets’’, J Comput Appl Math, 219:90–101.

[5] Bujurke, N.M., Shiralashetti, S.C. ve Salimath, C.S., (2009). ‘‘An application of single-term Haar wavelet series in the solution of nonlinear oscillator equations’’, J Comput Appl Math, 227:234-244.

[6] Shiralashetti, S.C. ve Deshi, A.B., (2016). ‘‘An efficient Haar wavelet collocation method for the numerical solution of multi-term fractional differential equations’’, Nonlinear Dyn, 83:293–303.

[7] Babolian, E. ve Fattahzadeh, F.,(2007). ‘‘Numerical solution of differential equations by using Chebyshev wavelet operational matrix of integration’’, Applied Mathematics and Computation, 188:417-426.

[8] Frazier ve Michael W.,(2006). ‘‘An introduction to wavelets through linear algebra’’, Springer Science & Business Media.

[9] Daubechies, I., (1992). ‘‘ Ten Lectures on Wavelets’’, SIAM: Philadelphia, PA.

[10] Paryab, K. ve Rostami, M., (2008). ‘‘Expansion method for linear Fredholm integral equations of second kind by Chebyshev, Legendre and Shannon wavelats and the comparison of their numerical results’’, Mathematical Sciences Quarterly Journal 2.4: 335-346.

[11] Mohammadi, F., (2015). ‘‘A Chebyshev wavelet operational method for solving stochastic Volterra-Fredholm integral equations’’, International Journal of Applied Mathematical Research, 4.2:217-227.

[12] Kilicman, A. ve Zeyad, Abdel Aziz Al Zhour, (2007). ‘‘Kronecker operational matrices for fractional calculus and some applications’’, Applied Mathematics and Computation, 187.1: 250-265.

[13] Mohammadi, F. ve Armando C., (2017). ‘‘Wavelet-based numerical method for solving fractional integro-differential equation with a weakly singular kernel’’, Wavelet and Linear Algebra 4.1: 53-73.

[14] Çelik, İ. , (2013). ‘‘ Numerical solution of differential equations by using Chebyshev wavelet collocation method ’’, Çankaya University Journal of Science and Engineering, 10(2): 169-184.

[15] Hosseini, S. Gh, ve F. Mohammadi, (2011). ‘‘A new operational matrix of derivative for Chebyshev wavelets and its applications in solving ordinary differential equations with non analytic solution’’, Applied Mathematical Sciences, 5.51: 2537-2548.

[16] Mohammadi, Fakhrodin, Hosseini M. M., ve Syed Tauseef Mohyud-Din, (2011). ‘‘Legendre wavelet galerkin method for solving ordinary differential equations with non-analytic solution’’, International Journal of Systems Science 42.4: 579-585.

[17] Saeed Umer, Mujeeb ur Rehman ve Muhammad Asad Iqbal, (2015). ‘‘Modified Chebyshev wavelet methods for fractional delay-type equations’’, Applied Mathematics and Computation, 264: 431-442.

[18] Gabbay, M., Edward D. ve Guzdar N. P., (1997). ‘‘Reconnection of Vortex Filaments in the Complex Ginzburg – Landau Equation’’, Physical Review E, 2576 p.

[19] Manneville, P., (1990). ‘‘Dissipative Structures and Weak Turbulence Academic ’’, New York.

[20] Saarloos, W., (1994). ‘‘ The Complex Ginzburg Landau Equation for Beginners’’, 1-2 p.

[21] Van Hecke, Martin, Ewald de Wit ve Wim van Saarloos,(1995). ‘‘Coherent and incoherent drifting pulse dynamics in a complex Ginzburg-Landau equation’’ Physical review letters 75.21: 3830.

[22] Nicolis, Grégoire,(1995). ‘‘Introduction to nonlinear science’’, Cambridge University Press.

[23] Walgraef, Daniel, (1997). ‘‘Spatio-Temporal Pattern Formation: With Examples from Physics’’, Chemistry, and Materials Science. Springer, New York.

[24] Li, Meng, Chengming Huang, ve Nan Wang, (2017). ‘‘Galerkin finite element method for the nonlinear fractional Ginzburg–Landau equation’’, Applied Numerical Mathematics, 118: 131-149.

[25] Arnous, Ahmed H., et al. (2017). ‘‘Optical solitons with complex Ginzburg–Landau equation by modified simple equation method’’, Optik-International Journal for Light and Electron Optics 144: 475-480.

[26] Inc, M. ve Bildik,N. (2000). ‘‘Non-perturbative solution of the Ginzburg-Landau equation’’, Mathematical and Computational Applications, 5.2 :113-117.

[27] A.M.Wazwaz, (2005). ‘‘The tanh method: exact solutions of the Sine-Gordon and the sinh-Gordon equations’’, Appl. Math. Comp., 167 1196–1210

[28] D. Kaya, (2003). ‘‘ A numerical solution of the Sine-Gordon equation using the modified decomposition method’’, Appl. Math. Comp. 143, 309–317.

[29] B.Batiha, Noorani M.S.M. ve Hashim I., (2007). ‘‘Numerical solution of Sine-Gordon equation by variational iteration method’’, Phys. Lett. A 370:437–440.

[30] U. Yucel, (2008). ‘‘Homotopy analysis method for the Sine-Gordon equation with initial conditions’’. Appl. Math. Comput., 203:387–395.

[31] Mohyud- Din S.T. , Noor M.A. ve Noor K.I., (2009). ‘‘Modified Variational Iteration Method for Solving Sine-Gordon Equations’’, World Appl. Sci. J, 6 (7):999–1004.

[32] Biazar J, Mohammadi F,(2010). ‘‘ Application of differential transform method to the Sine-Gordon equations’’, International Journal of Nonlinear Science, 10, 190–195.

[33] Xinping Shao, Danfu Han, (2011). ‘‘On some modified variation iteration methods for solving one dimensional Sine-Gordon equations’’, Inter. Jour. Comp. Math (88), 5, 969–981.

[34] Hany, N. Hassan, Magdy A. El-Tawil, (2012). ‘‘ A new technique of using homotopy analysis method for second order nonlinear differential equations’’, Journal of Applied Mathematics and Computation, 219, 708–728.

EK-A

GİNZBURG LANDAU DENKLEMİ İÇİN CWCM MAPLE KODLARI

```
restart:
with(LinearAlgebra):
k:=2: M:=4:Tm:=(t,m)-> 2*t*Tm(t,m-1)-Tm(t,m-2):
Tm(t,0):=1: Tm(t,1):=t:
Tm2:=(tt,m)->subs(t=tt,Tm(t,m)):
alpha:=(m)->piecewise(m=0,1/sqrt(Pi),sqrt(2)/sqrt(Pi)):
Phi:=(n,m,x)->piecewise((n-1)/(2^(k-1)) <= x and x <= n/(2^(k-1)),
>   alpha(m)*(2^(k/2))*Tm2(2^k*x-2*n+1,m),
>  0):
Phi(1,0,x):
Phi2:=(t)->Array([seq(seq(Phi(i,j,t),j=0..M-1),i=1...2^(k-1))] ):
Phi2 := t -> Array([seq(seq(Phi(i,j,t),j = 0 .. M-1),i = 1 .. 2^(k-1))]):
Phi_mxm:=Matrix([seq([r[i]],i=1...(2^(k-1))*M)])^+:
Phi_mxm_Inv:=MatrixInverse(Phi_mxm):
m:=M*(2^(k-1)):
PB_nn:=Matrix(m,m):
xi:=(i,n)->((i+1)^(n+1)-2*i^(n+1)+(i-1)^(n+1)):
nn:=1:#xi indisi
for i from 1 to m do
p:=0:
for j from 1 to   do
 if i=j then
```

```
PB_nn[i,j]:=1:
fi:
if i<j then
p:=p+1:
B_nn[i,j]:= xi(p,nn):
fi:end do: p:=1:
end do:
PB_nn:=(1/(m^nn))*(1/((nn+1)!))* PB_nn:
P_nn1:=Phi_mxm.PB_nn.MatrixInverse(Phi_mxm):
 for i from 1 to (2^(k-1))*M do
 t[i]:=evalf((2*i-1)/((2^k)*M)):
 end:
 for j from 1 to (2^(k-1))*M do
 x[j]:=evalf((2*j-1)/((2^k)*M)):
 end:
 #gınzburg-landau denk u>0 koşulu için
 # C bilinmeyen katsayılar matrisi
 C:=Matrix( (2^(k-1))*M,(2^(k-1))*M,symbol=c):
 for i from 1 to (2^(k-1))*M do
 for j from 1 to (2^(k-1))*M do
PDE(i,j):=simplify((evalf(((Phi2(x[i]))).((P_nn2)).C.(Phi2(t[j])^+)))-
x[i]*((Phi2(1)).((P_nn2)).C.(Phi2(t[j])^+))+x[i]-
(((((Phi2(x[i])).((P_nn2)).C.(P_nn1).(Phi2(t[j])^+))-
x[i]*((Phi2(1)).((P_nn2)).C.((P_nn1)).(Phi2(t[j])^+))+x[i]*t[j])^3))-
((Phi2(x[i])).((P_nn2)).C.(P_nn1).(Phi2(t[j])^+))+x[i]*((Phi2(1)).((P_nn2)).C.((P_nn1)).(Phi
2(t[j])^+))-x[i]*t[j]-((Phi2(x[i])).C.((P_nn1)).(Phi2(t[j])^+))-
x[i]+x[i]*t[j]+(x[i]^3)*(t[j]^3))=0;
 end;
 end do;
 coz:=fsolve({seq(seq(PDE(i,j),i=1..(2^(k-1))*M ),j=1..(2^(k-1))*M )}):
 C:=subs(op(coz),C):
U:=(x,t)->evalf(((Phi2(x)).((P_nn2)).C.(P_nn1).(Phi2(t)^+))-
x*((Phi2(1)).((P_nn2)).C.((P_nn1)).(Phi2(t)^+))+x*t):
U(x[1],t[1]):
u:=(x,t)->x*t:
```

```
U_ERR:=(x,t)->abs(U(x,t)-u(x,t)):
u(x[1],t[1]):
xbas:=1:
tbas:=1:
with(plots):
g1:=plot3d(U(x,t),x=-xbas..xbas,t=-tbas..tbas,color=gray):
g2:=plot3d(u(x,t),x=-xbas..xbas,t=-tbas..tbas):
display(g1,g2):
plot3d(u(x,t),x=-xbas..xbas,t=-tbas..tbas):
plot3d(U(x,t),x=-xbas..xbas,t=-tbas..tbas,color="grey"):
plot3d(U_ERR(x,t),x=-1..1,t=-1..1):
for i from 1 to (2^(k-1))*M do
for j from 1 to (2^(k-1))*M do
H[x[i],t[j]]:=(U(x[i],t[j])-u(x[i],t[j]));
print(H[x[i],t[j]]);
end;
end do:
```

EK-B

KDV DENKLEMİ İÇİN CWCM MAPLE KODLARI

```
restart:

with(LinearAlgebra):

k:=2:M:=2:Tm:=(t,m)-> 2*t*Tm(t,m-1)-Tm(t,m-2):

Tm(t,0):=1:Tm(t,1):=t:Tm2:=(tt,m)->subs(t=tt,Tm(t,m)):

Tm2(2,0):alpha:=(m)->piecewise(m=0,1/sqrt(Pi),sqrt(2)/sqrt(Pi)):Phi:=(n,m,x)-
piecewise((n-1)/(2^(k-1)) <= x and x <= n/(2^(k-1)),

alpha(m)*(2^(k/2))*Tm2(2^k*x-2*n+1,m),>   0)

Phi(1,0,x): Phi2:=(t)->Array([seq(seq(Phi(i,j,t),j=0..M-1),i=1...2^(k-1))] ):

 Phi2 := t -> Array([seq(seq(Phi(i,j,t),j = 0 .. M-1),i = 1 .. 2^(k-1))]):

for i from 1 to ((2^(k-1))*M) do

r[i]:=evalf(Phi2((2*i-1)/((2^k)*M)));

end do:

Phi_mxm:=Matrix([seq([r[i]],i=1...(2^(k-1))*M)])^+:

Phi_mxm_Inv:=MatrixInverse(Phi_mxm): m:=M*(2^(k-1)):

_nn:=Matrix(m,m):i:=(i,n)->((i+1)^(n+1)-2*i^(n+1)+(i-1)^(n+1)):

nn:=1:#xi indisi

for i from 1 to m do  p:=0:
```

```
for j from 1 to m do if i=j then PB_nn[i,j]:=1: fi:
if i<j then  p:=p+1:
PB_nn[i,j]:= xi(p,nn): fi: end do:
p:=1: end do:
PB_nn:=(1/(m^nn))*(1/((nn+1)!))* PB_nn:
P_nn1:=Phi_mxm.PB_nn.MatrixInverse(Phi_mxm):
if i<j then  p:=p+1:
PB_nn[i,j]:= xi(p,nn): fi: end do:
p:=1: end do:
PB_nn:=(1/(m^nn))*(1/((nn+1)!))* PB_nn:
P_nn2:=Phi_mxm.PB_nn.MatrixInverse(Phi_mxm): nn:=3:#xi indisi
for i from 1 to m do  p:=0:
for j from 1 to m do
if i=j then
PB_nn[i,j]:=1: fi:  if i<j then p:=p+1:
B_nn[i,j]:= xi(p,nn): fi:
end do: p:=1: end do:
PB_nn:=(1/(m^nn))*(1/((nn+1)!))* PB_nn:
for j from 1 to (2^(k-1))*M do
x[j]:=evalf((2*j-1)/((2^k)*M)):
end:
#Phi2(x[i]).(P_nn3).C.(Phi2(t[j])^+)+x[i]/(6*((1-t[j])^2))-
x[i]*Phi2(1).(P_nn3).C.(Phi2(t[j])^+)-(1/(6*((1-t[j])^2)))-
6*(Phi2(x[i]).(P_nn3).C.(Phi2(t[j])^+)+x[i]/(6*((1-t[j])))-
x[i]*Phi2(1).(P_nn3).C.(Phi2(t[j])^+)-(1/(6*((1-
```

```
t[j]))))).(Phi2(x[i]).(P_nn2).C.(Phi2(t[j])^+)+(1/(6*(1-t)))-
Phi2(1).(P_nn3).C.(Phi2(t[j])^+))+Phi2(x[i]).C.(P_nn1).(Phi2(t[j])^+);
#C bilinmeyen katsayılar matrisi
C:=Matrix( (2^(k-1))*M,(2^(k-1))*M,symbol=c): for i from 1 to (2^(k-1))*M do
for j from 1 to (2^(k-1))*M do
PDE(i,j):=simplify(evalf(Phi2(x[i]).(P_nn3).C.(Phi2(t[j])^+)+x[i]/(6*((1-t[j])^2))-
x[i]*Phi2(1).(P_nn3).C.(Phi2(t[j])^+)-(1/(6*((1-t[j])^2)))-
6*(Phi2(x[i]).(P_nn3).C.(Phi2(t[j])^+)+x[i]/(6*((1-t[j])))-
x[i]*Phi2(1).(P_nn3).C.(Phi2(t[j])^+)-(1/(6*((1-
t[j]))))).(Phi2(x[i]).(P_nn2).C.(Phi2(t[j])^+)+(1/(6*(1-t[j])))-
Phi2(1).(P_nn3).C.(Phi2(t[j])^+))+Phi2(x[i]).C.(P_nn1).(Phi2(t[j])^+)))=0 end;
end do;
sys:=[seq(seq(PDE(i,j),i=1..(2^(k-1))*M ),j=1..(2^(k-1))*M )]:
var:=[seq(seq(c[i,j],j=1..(2^(k-1))*M ),i=1..(2^(k-1))*M )]:
A,b:=GenerateMatrix(sys,var);
G:=Matrix((2^(k-1))*M*(2^(k-1))*M,1,symbol=g);
A.G=b;
coz:=fsolve({seq(seq(PDE(i,j),i=1..(2^(k-1))*M ),j=1..(2^(k-1))*M )}):
C:=subs(op(coz),C); u:=(x,t)->(1/6)*((x-1)/(1-t)):
U_ERR:=(x,t)->abs(U(x,t)-u(x,t)):
 xbas:=1:
 tbas:=1:
 with(plots):
 g1:=plot3d(U(x,t),x=0..xbas,t=0..tbas,color=red):
 g2:=plot3d(u(x,t),x=0..xbas,t=0..tbas):
 display(g1,g2);
```

EK-C

SİNE GORDON DENKLEMİ İÇİN CWCM MAPLE KODLARI

```
restart:

with(LinearAlgebra):

k:=3:M:=2: Tm:=(t,m)-> 2*t*Tm(t,m-1)-Tm(t,m-2):

Tm(t,0):=1: Tm(t,1):=t:

Tm2:=(tt,m)->subs(t=tt,Tm(t,m)): Tm2(2,0):

alpha:=(m)->piecewise(m=0,1/sqrt(Pi),sqrt(2)/sqrt(Pi)):

Phi:=(n,m,x)->piecewise((n-1)/(2^(k-1)) <= x and x <= n/(2^(k-1)),

alpha(m)*(2^(k/2))*Tm2(2^k*x-2*n+1,m),

Phi(1,0,x):

Phi2:=(t)->Array([seq(seq(Phi(i,j,t),j=0..M-1),i=1...2^(k-1))] ):

Phi2 := t -> Array([seq(seq(Phi(i,j,t),j = 0 .. M-1),i = 1 .. 2^(k-1))]):

for i from 1 to ((2^(k-1))*M) do

r[i]:=evalf(Phi2((2*i-1)/((2^k)*M)));

end do:

Phi_mxm:=Matrix([seq([r[i]],i=1...(2^(k-1))*M)])^+:

Phi_mxm_Inv:=MatrixInverse(Phi_mxm): m:=M*(2^(k-1)):

PB_nn:=Matrix(m,m):
```

```
xi:=(i,n)->((i+1)^(n+1)-2*i^(n+1)+(i-1)^(n+1)):n:=1:#xi indisi
for i from 1 to m do p:=0:
for j from 1 to mdo
if i=j then PB_nn[i,j]:=1:
fi:  if i<j then p:=p+1: _nn[i,j]:= xi(p,nn): fi:   end do:
p:=1: end do:PB_nn:=(1/(m^nn))*(1/((nn+1)!))* PB_nn:
P_nn1:=Phi_mxm.PB_nn.MatrixInverse(Phi_mxm):
nn:=2:#xi indisi
for i from 1 to m do
p:=0:
for j from 1 to m do
if i=j then PB_nn[i,j]:=1:
if i<j then  p:=p+1:
PB_nn[i,j]:= xi(p,nn):
fi: end do:
p:=1:end do: PB_nn:=(1/(m^nn))*(1/((nn+1)!))* PB_nn:
P_nn2:=Phi_mxm.PB_nn.MatrixInverse(Phi_mxm):
for i from 1 to (2^(k-1))*M do
t[i]:=evalf((2*i-1)/((2^k)*M));
end;
for j from 1 to (2^(k-1))*M do
x[j]:=evalf((2*j-1)/((2^k)*M));
end;#sine gordon denk  # C bilinmeyen katsayılar matrisi
C:=Matrix( (2^(k-1))*M,(2^(k-1))*M,symbol=c);
for i from 1 to (2^(k-1))*M do
```

```
for j from 1 to (2^(k-1))*M

PDE(i,j):=simplify(evalf(((Phi2(x[i])).C.(Phi2(t[j])^+))-
sin(((Phi2(x[i])).C.((P_nn2)).(Phi2(t[j])^+))-2*t[j]+Pi)))=0;

end;

end do;

 C:=subs(op(coz),C); U:=(x,t)->evalf(((Phi2(x)).C.((P_nn2)).(Phi2(t)^+))-2*t+Pi):

U(x[1],t[1]);

 u:=(x,t)->(2*arcsin(sech(t))):

 U_ERR:=(x,t)->abs(U(x,t)-u(x,t)):

 xbas:=1:

 tbas:=1:

with(plots):
g1:=plot3d(U(x,t),x=0..1,t=0..1,color=gray):g2:=plot3d(u(x,t),x=0..xbas,t=0..tbas):
display(g1,g2):
```

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Yasemin BAKIR
Doğum Tarihi ve Yeri	: 01/01/1987 İZMİR
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: jasmin_demirel@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Uygulamalı Matematik	Celal Bayar Üniversitesi	2011
Lisans	Matematik	Celal Bayar Üniversitesi	2008
Lise	Fen Bilimleri	İzmir İnönü Lisesi	2004

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	**Firma/Kurum**	**Görevi**
2013-2018	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. Bildik, N. ve Bakır, Y., (2017). ''Approximation and Comparison of Ordinary Differential Equation using by New Iteration Methods'', Review of the Air Force Academy, 15(1): 23-34.
2. Bildik, N., Bakır, Y. ve Mutlu A., (2013). ''Comparison and Successive Iteration of Approximate Solution of Ordinary Differential Equations with Initial Conditions by the New Modified Krasnoselskii Iteration Method'', Scientia Iranica, 20(6): 1792-1804.
3. Bildik, N., Bakır, Y. ve Mutlu A., (2013). ''The New Modified Ishikawa Iteration Method for the Approximate Solution of Different Type of Differential Equations'', Fixed Point Theory and Applications, 2013(52): 1-40.

Bildiri

1. Bakır, Y. ve Seçer, A., (2018). "Comparison of Chebyshev Wavelet Collocation Method and Legendre Wavelet Collocation Method for Ginzburg - Landau Equation", 3rd International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences 04-06 May 2018, Girne, Cyprus.
2. Bakır, Y. ve Seçer, A., (2017). ''A Novel Chebyshev Wavelet Collocation Method for the Ginzburg-Landau Equation'', 4th International Conference on Pure and Applied Sciences.
3. Seçer, A. ve Bakır, Y., (2017). ''Numerical Solution of Partial Differential Equations Based on Chebyshev Wavelet and Chebyshev Wavelet Collocation Method'', 4th International Conference on Pure and Applied Sciences.
4. Seçer, A. ve Bakır, Y., (2017). ''Chebyshev Wavelet Collocation Method for Solving Partial Differential Equation'', International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling.
5. Bakır, Y., Seçer, A., Bayram, M., (2016). ''Numerical Solution of Fractional Differential Equation via Daubechies Wavelet Bases Method'', ICPAS-2016.
6. Bakır, Y. ve Seçer, A., (2015). ''On the Wavelet Approximation for Differential Equation'', ICAAMM15.
7. Bildik, N. ve Bakır, Y., (2013). ''Approximation of Ordinary Differential Equation Using by Modified Krasnoselskii Iteration Modified Ishikawa Iteration Extra Modified Ishikawa Iteration and New Modified Ishikawa Iteration'', ICAAMM-2013.
8. Bildik, N., Bakır, Y. ve Mutlu A., (2012). ''The Ishikawa Iteration Method for the Approximate Solution of Ordinary Differential Equations'', ICAAA2012.
9. Bildik, N. ve Bakır, Y., (2011). ''The Comparison of Approximate Solution of Ordinary Differential Equation Using the Modified Krasnoselskii Iteration Method'', IV Congress of TWMS.

10. Bildik, N. ve Bakır, Y., (2013). ‘‘Modifiye Edilmis Krasnoselskii ve Ishakawa Iterasyon Metodu ile Lineer Olmayan Adi Diferansiyel Denklemlerin Yaklasımı’’, 12. Matematik Sempozyumu.

ÖDÜLLERİ

1. Yüksek Lisans Tez Ödülü, CELÂL BAYAR ÜNIVERSITESI, 2014