T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEZGİSEL BULANIK ESNEK Γ- YARI GRUPLARI

SERKAN ONAR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
PROF. DR. BAYRAM ALİ ERSOY

İSTANBUL, 2018

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEZGİSEL BULANIK ESNEK Γ-YARI GRUPLARI

Serkan ONAR tarafından hazırlanan tez çalışması 05.09.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. A. Göksel AĞARGÜN

İstanbul Üniversitesi

Doç. Dr. Uğur ŞENGÜL

Marmara Üniversitesi

Doç. Dr. E. Mehmet ÖZKAN

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Esra ŞENGELEN SEVİM

İstanbul Bilgi Üniversitesi

Bu çalışma, 2012-2017 yılları arasında 2211-A kodlu TÜBİTAK Genel Yurt İçi Doktora Bursu ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Doktora eğitimim süresince ve bu tez çalışmasının hazırlanmasında her zaman tecrübe ve bilgi birikimiyle kendisinden çok şey öğrendiğim, tez danışmanlığımı üstlenerek yoğun iş temposu arasında çok kıymetli vakitlerini ayırarak desteklerini ve yardımlarını esirgemeyen, yoluma ışık tutan ve ufuk veren Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyesi saygıdeğer Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY'a minnet ve şükranlarımı sunarım.

Bu günlere gelmemde emek sahibi kıymetli anneme teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca, bu zorlu süreçte yanımda olup beni motive eden ve manevi desteğini eksik etmeyen sevgili eşime ve dünyalar tatlısı biricik kızıma sonsuz teşekkür ederim. Son olarak burs vererek beni maddi olarak destekleyen Tübitak'a teşekkür ederim.

Eylül, 2018

Serkan ONAR

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ

$\wedge$	Minimum veya infimum
$\vee$	Maksimum veya supremum
μ	Bulanık alt küme
$[0,1]^X$	X' in bulanık kuvvet kümesi
$\mu(X)$	μ' nün görüntüsü
$\mathrm{Im}(\mu)$	μ' nün görüntüsü
μ^*	μ' nün destekleyicisi
$a_Y(x)$	$[0,1]-$singleton
y_a	$[0,1]-$singleton
$1_Y(x)$	Karakteristik fonksiyon
$\chi_Y(x)$	Karakteristik fonksiyon
μ_a	μ' nün seviye alt kümesi
$f(\mu)$	μ' nün f altındaki görüntüsü
$f^{-1}(\nu)$	ν' nün f altındaki ters görüntüsü
$\mu\circ\nu$	μ ve ν' nün nokta çarpımı
μ^{-1}	μ' nün tersi
$L(S)$	S yarı grubunun tüm bulanık alt yarı gruplarının kümesi
μ_*	$\mu_* = \{x\in G \ : \ \mu(x)=\mu(0)\}$
G_μ	$G_\mu = \{g\in G: \ \ \mu(g)=\mu(0)\}$
$P^*(A)$	A kümesinin tüm alt kümelerinin kümesi
$F^*(A)$	A kümesinin boştan farklı tüm bulanık alt kümelerinin kümesi
$F(X)$	$X\to[0,1]$ e tüm bulanık kümeler
μ_A	A bulanık kümesi
$\mu_A(x)$	x'in A'ya üye olma derecesi
$\nu_A(x)$	x'in A'ya üye olmama derecesi
$f^{-1}(B)$	B bulanık kümesinin ters görüntüsü

$\mu_{f^{-1}}(B)$	B bulanık kümesinin ters görüntüsünün üyelik fonksiyonu
$P(U)$	Kuvvet Kümesi
(F,A)	Esnek Küme
$\neg E$	DEĞİL küme
$(F,A)^c$	Esnek Kümenin tümleyeni
(l,u)	Seviye kesim esnek kümesi
$\tilde{\wedge}$	Sezgisel bulanık esnek kümelerde "VE" operatörü
$\tilde{\vee}$	Sezgisel bulanık esnek kümelerde "VEYA" operatörü
$\tilde{\cap}$	Sezgisel bulanık esnek kümelerde kesişim operatörü
$\tilde{\cup}$	Sezgisel bulanık esnek kümelerde birleşim operatörü
$\tilde{\circ}_\Gamma$	Sezgisel bulanık esnek kümelerde çarpım operatörü
$\sim_\Gamma$	Sezgisel bulanık esnek gamma homomorfik görüntüsü
$\tilde{\sqcap}$	Sezgisel bulanık esnek kümelerde bi-kesişim operatörü
$\tilde{\sqcup}_\Gamma$	Sezgisel bulanık esnek kümelerde bi-birleşim operatörü
(f,g)	Sezgisel bulanık esnek gamma homomorfizması

ÖZET

SEZGİSEL BULANIK ESNEK Γ- YARI GRUPLARI

Serkan ONAR

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY

Atanassov tarafından bulanık kümenin bir genelleştirilmesi olarak sezgisel bulanık küme kavramı incelendi. Bu tez çalışmasında, Atanassov'un bu fikrini kullanarak Γ-yarı gruplar üzerinde sezgisel bulanık esnek küme kavramı verilecek ve bazı önemli özellikler incelenecektir. Γ-yarı grupların sezgisel bulanık esnek ideal kavramı çalışılacak. Γ-yarı gruplar üzerinde sezgisel bulanık esnek ideallerin birleşim, kesişim ve çarpımları verilecek ve bunlarında Γ-yarı grup üzerinde sezgisel bulanık esnek ideal olduğu ispatlanacaktır. Ek olarak, sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grupların sezgisel bulanık esnek görüntü ve ters görüntüleri verilecek ve onların temel özellikleri incelenecektir. Normal sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup kavramı karakterize edilecektir. Son olarak, Γ-yarı grupların tüm sezgisel bulanık esnek ideallerinin kümesinin bazı latis yapıları türetilecektir.

Anahtar Kelimeler: Γ-yarı gruplar, Esnek Γ-yarı gruplar, Bulanık Esnek Γ-yarı gruplar, Sezgisel Bulanık Esnek Γ-yarı gruplar.

ABSTRACT

INTUITIONISTIC FUZZY SOFT Γ- SEMIGROUPS

Serkan ONAR

Department of Mathematics

Ph.D. Thesis

Adviser: Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY

The notion of intuitionistic fuzzy set was examined by Atanassov as a generalization of the notion of fuzzy set. In this thesis, we introduce the concept of the intuitionistic fuzzy soft sets over a Γ-semigroup by using Atanassov's idea and investigate some of their important properties. The concept of intuitionistic fuzzy soft ideals of Γ-semigroup has been examined. Union, intersection and product of intutionistic fuzzy soft ideals over a Γ-semigroup have been given and proved that these are also intuitionistic fuzzy soft ideals over a Γ-semigroup. Furthermore, intuitionistic fuzzy soft image and intuitionistic fuzzy soft inverse image of intuitionistic fuzzy soft Γ-semigroups are introduced and their basic properties are investigated. We characterize the concept of the normal intuitionistic fuzzy soft Γ-semigroup. Finally, Some lattice structures of the set of all intuitionistic fuzzy soft ideals of Γ-semigroup are derived.

Keywords: Γ-Semigroups, Soft Γ-Semigroups, Fuzzy Soft Γ-Semigroups, Intuitionistic Fuzzy Soft Γ-Semigroups.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Ekonomi, mühendislik, çevre, sosyoloji, tıbbi bilimler ve diğer birçok alanda karmaşık problemleri çözmede kullanılan klasik yöntemler, belirsizlikler çeşitli tiplerde olduğundan bize başarılı bir şekilde cevap verememektedir.

Kusurlu bilgi ile başa çıkmak amacıyla ilk olarak 1965 yılında Zadeh'in [1] bulanık kümelerin inşasıyla beraber bulanık kümeler teorisi Matematikte araştırmaların önemli bir parçası haline geldi. Kuroki [2, 3, 4] yarı gruplarda bulanık idealler ve bulanık bi idealler kavramlarını verdi. Kuroki bulanık idealler açısından yarı grupların çeşitli sınıflarını karakterize etti.

1986 yılında Sen ve Saha [5] bir yarı grubun bir genellemesi olarak $\Gamma-$yarı grup tanımını vererek regular $\Gamma-$yarı grup ile $\Gamma-$ grup arasında bir ilişki kurdular [6, 7]. Dutta ve Adhikari [8] $\Gamma-$yarı gruplarda asal idealleri tanımladılar. 2007 yılında Chinram ve Jirojkul [9] tarafından $\Gamma-$yarı gruplarda bi-idealler kavramı sunuldu. Sahabir ve Ali [10] $\Gamma-$yarı gruplarda asal bi-idealleri çalıştılar.

Sardar ve arkadaşları [11,12] $\Gamma-$yarı gruplarda bulanık asal idealler, bulanık yarı asal idealler ve bulanık ideal genişlemeleri kavramları üzerinde çalıştılar. Dutta ve arkadaşları [13] $\Gamma-$yarı gruplarda bulanık bi-idealleri ve bulanık quasi-idealler kavramlarını tanıttılar. Ayrıca William ve arkadaşları da [14] $\Gamma-$yarı gruplarda bulanık bi-idealleri tartıştılar. Faisal ve arkadaşları da [15] $\Gamma-$yarı grupların $(\in,\in\vee q_k)$ bulanık $\Gamma-$ideallerini incelediler.

Öte yandan, 1983 yılında Atanassov [16, 17] Zadeh'in bulanık küme teorisinin bir genellemesi olan sezgisel bulanık küme teorisini tanımladı. Bu teoride bulanık küme bir elemanın bir kümeye ait olduğu dereceyi verirken, sezgisel bulanık küme ise hem üyelik derecesine hem de üyelik olmayan dereceye sahiptir. Sezgisel bulanık kümede, üyelik derecesi ile üye olmama derecesi toplamı 1'e eşit veya 1'den küçüktür. Dolayısıyla her bulanık küme bir sezgisel bulanık küme olup tersi doğru değildir.

Olasılık Teorisi, Bulanık Küme Teorisi, Aralıklı Matematik ve Rough Küme Teorisi (RST); kusurlu bilgi ile başa çıkmak için bir matematiksel araç olarak düşünebilir. Tüm bu teoriler için bazı parametrelerin ön şartı gerekir. Örneğin Olasılık Teorisinde olasılık yoğunluk fonksiyonu, Bulanık Küme Teorisinde üyelik fonksiyonu ve Rough Küme Teorisinde denklik bağıntısı gerektirir. Bu tür bir gereklilik, kusurlu ya da eksik bilginin temelinde bir çok sorununu ortaya çıkarmaktadır. Parametre şartı kaydeden sorunlar için 1999 yılında Molodtsov [18]'de eksik bilgi sorunlarıyla başa çıkmak amacıyla esnek (soft) küme kavramını inşa ederek bu teoriyi belirsizlikleri modellemek için kullandı. Esnek Küme Teorisi bir parametrenin ön şartını gerektirmediğinden Esnek Küme Teorisi, yaklaşık nedenler için doğal bir matematiksel formülasyon oluşturur. Molodtsov esnek kümelerin uygulama alanları için çeşitli yönlere dikkat çekti.

Özellikle son zamanlarda esnek küme teorisindeki çalışmalar hızla ilerlemektedir. Maji [19] ve arkadaşları karar verme probleminde esnek küme teorisinin uygulamasını tanımladılar. Chen ve arkadaşları [20] esnek küme parametrelendirmesini azaltmak için yeni bir tanım sundu ve rough küme teorisindeki özellik kısıtlama ile ilgili kavramıyla bu yeni tanımlanan yapıyı karşılaştırdı.

Maji ve arkadaşları [21] esnek kümeler üzerinde bazı ikili işlemler tanımladılar, daha sonra Ali ve arkadaşları [22] bunları doğruladılar. Shabir ve Ali [23] esnek yarı grup kavramını inşa ettiler. Shabir ve Ahmad [24] tarafından üçlü yarı grubun üçlü alt yarı gruplarının bir koleksiyonu olarak esnek üçlü yarı grup kavramını tanımladılar ve üçlü yarı grubun esnek (sağ, sol, lateral, quasi, bi) ideallerini verdiler. Changphas ve Thongkam [25] esnek $\Gamma-$yarı grup kavramını incelediler ve $\Gamma-$yarı grup üzerinde esnek (sağ, sol) idealleri tanımlayarak bu cebirsel yapılara ilişkin bazı özellikler verdiler.

2001 yılında Maji ve arkadaşları [26] esnek küme ve bulanık kümenin bir kombinasyonu ve daha genel bir yapı olan bulanık esnek küme kavramını inşa ettiler. Bulanık esnek kümeler için birleşim, kesişim, tamamlayıcı ve De Morgan Yasalarıyla ilgili özellikler üzerinde çalıştılar. Ahmad ve Kharal [27] Maji ve arkadaşlarının sonuçlarını geliştirdiler ve [28] bulanık esnek kümelerin dönüşümlerini verdiler.

Aygünoğlu ve Aygün [29], Aktaş ve Çağman'ın [30] vermiş olduğu esnek grup kavramını genişleterek bulanık esnek grup kavramını inşa ettiler. Cheng-Fu Yang'ın 2011 yılında [31] bulanık esnek yarı grup ve bulanık esnek idealleri (sağ, sol) tanımını vererek, tanımlanan bu yapıların $\alpha-$seviye kümeleri, birleşim ve kesişim yapılarını verdi. Bulanık esnek yarı grupların (ideallerin) bulanık esnek görüntüsü ve bulanık esnek ters görüntülerini gösterdi. Bora ve arkadaşları [32] bulanık esnek kümelerin bazı operatörlerini tanımladı ve bunları örneklerle birlikte açıkladı.

M.Akram ve arkadaşları [33] bulanık esnek küme kavramını $\Gamma-$yarı gruplar teorisine genişlettiler ve $\Gamma-$yarı grup üzerinde bulanık esnek sol (sağ) idealler, bulanık esnek iç ve bulanık esnek bi-idealler vererek bu ideallerin cebirsel özellikleri ve karakterizasyonu incelediler.

Özellikle, son yıllarda sezgisel bulanık küme teorisi karar verme analizi ve desen tanıma gibi birçok pratik alanlarda başarılı bir şekilde uygulanmaktadır [34-39].

Banerjee ve arkadaşı [40] sezgisel bulanık alt halka ve ideal, Hur ve arkadaşları [41] sezgisel bulanık alt grup ve alt halka ve Veeramani ve arkadaşları ise [42] sezgisel bulanık normal alt halka tanımlarını verdiler.

Maji ve arkadaşları [43] esnek kümeyi sezgisel bulanık esnek küme kavramına genişlettiler. Zhang [44] sezgisel bulanık esnek halka ve idealistic sezgisel bulanık esnek halka tanımını verdi. J.Zhou ve arkadaşları [45] sezgisel bulanık esnek küme teorisini uygulayarak yarı grupların cebirsel özellikleri verdiler. Yarı grup üzerinde sezgisel bulanık esnek ideal kavramı inceleyerek, onların karakterizasyonu ve cebirsel özellikleri araştırdılar.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasında, Akram'ın [33] bulanık esnek gamma yarı grup tanımı kullanılarak sezgisel bulanık esnek kümeye uygulanarak sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup kavramı verilecektir. Bu kavram üzerinde kesişim, birleşim, VE, VEYA operatörleri uygulanıp bazı özellikler verilerek genelleştirme yapılacaktır. Ayrıca bu kavram üzerinde sezgisel bulanık esnek Γ-ideali gibi çeşitli cebirsel yapılar tanımlanarak, bu yapılar ilgili örneklerle gösterilecektir. Sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup homomorfizması tanımı yapılarak bu tanım ile ilgili homomorfik görüntü ve ters görüntü yapılar gibi çeşitli cebirsel yapılar tanımlanarak bu yapılarla ilgili temel teoremler verilecektir. Normal sezgisel bulanık esnek Γ- yarı gruplar tanımlacak ve çeşitleri incelenerek örneklerle verilecektir.

1.3 Hipotez

Atanassov'un sezgisel bulanık küme teorisi kullanılarak sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup ve Γ-yarı gruplar üzerinde sezgisel bulanık esnek (bi, iç, sol, sağ) idealler verilecektir. Ardından, sezgisel bulanık esnek Γ- yarı grup homomorfizması ile sezgisel bulanık esnek Γ- yarı grup izomorfizması arasındaki ilişki üzerinde durulacaktır. Son olarak, normal sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruplar gösterilecek ve Γ-yarı gruplar üzerinde sezgisel bulanık esnek (bi, iç, sol, sağ) ideallerinin kümesinin bazı latis yapıları oluşturulacaktır.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamızda bulunan temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1 Yarı Grup

Bu başlık altında yarı grup teorisi hakkında verilen bilgiler "An Introduction to Semigroup Theory" [46] isimli kitabı esas almaktadır.

Tanım 2.1 [46] S boştan farklı bir küme

$$\begin{aligned} \cdot : S \times S &\to S \\ :(x, y) &\mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

bir ikili işlem olsun. $(S, *)$ ikilisi grupoid olarak adlandırılır. Eğer tanımlanan ikili işlem

$$\forall x, y, z \in S \text{ için } x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

birleşme özelliğine sahipse grupoid S'ye yarı grup (semigroup) denir.

Önerme 2.1 [46] Yarı grup S için**;**

i. $\forall x, y \in S$ için $x \cdot y = y \cdot x$ oluyorsa S yarı grubu değişmelidir.

ii. $\forall x, y, z \in S$ için

$$z \cdot x = z \cdot y \Rightarrow x = y \ (x \cdot z = y \cdot z \Rightarrow x = y)$$

oluyorsa yarı grup S için soldan kısaltma (sağdan kısaltma) sağlanır. Eğer S için hem soldan hem sağdan kısaltma sağlanıyorsa S için kısaltma özelliği sağlanır.

iii. Eğer yarı grup S'nin sonlu sayıda elemanı varsa sonlu yarı grup olarak adlandırılır.

Örnek 2.1 2×2 tipindeki üst üçgensel matrisleri

$$S=\left\{\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mid n\geq 1\right\}$$

klasik matris çarpımı işlemi altında S bir yarı gruptur.

Örnek 2.2 Grupoid $(\mathbb{N},.)$ ve $(\mathbb{N},+)$ birer değişmeli yarı grupturlar. Ayrıca

$n*m=\max\{n,m\}$ tanımlanan işlem altında $(\mathbb{N},*)$ bir değişmeli yarı gruptur.

Gerçekten,

$$\begin{aligned} n*(m*k) &= \max\{n,\max\{m,k\}\}=\max\{n,m,k\} \\ &= \max\{\max\{n,m\},k\}=(n*m)*k. \end{aligned}$$

Örnek 2.3 $S=\{a,b,c\}$ olsun ve verilen tablodaki işlem tanımlansın.

$.$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	b	c

Bu durumda S sonlu bir yarı gruptur. Fakat $b.c=c\neq b=c.b$ olduğundan S yarı grubu değişmeli değildir.

Örnek 2.4 $\mathbb{Z}^{2\times 2}$ matris yarı grubunu ele alalım. Burada

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

olduğundan $\mathbb{Z}^{2\times 2}$ yarı grubu için kısaltma özelliği sağlanmaz. Öte yandan $\det(A)=1$ olan tüm matrisler alınarak oluşan yarı grup için kısaltma özelliği sağlanır.

Örnek 2.5 $(\mathbb{R},-)$ bir yarı grup değildir. Çünkü $5-(2-3)=6\neq 0=(5-2)-3.$

Önerme 2.2 $(S,.)$ bir yarı grup olmak üzere eğer

$$\forall y\in S \text{ için } x.y=y$$

oluyorsa $x\in S$'ye S'nin sol birimi denir. Benzer olarak eğer

$$\forall y \in S \text{ için } y.x = y$$

oluyorsa $x \in S$'ye S'nin sağ birimi denir. Eğer $x \in S$, S'nin hem sol birimi hem sağ birimi ise S'nin birimi denir.

Tanım 2.2 [49] Yarı grup $(S,.)$'nin boştan farklı bir kümesi A olsun. S'nin çarpımı altında A kapalı

$$\forall x, y \in A \text{ için } x.y \in A$$

ise $(A,.)$'ya S'nin bir alt yarı grubu denir ve $A \leq S$ ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle

$$A \leq S \Leftrightarrow A.A = A^2 \subseteq A$$

sağlanır.

Örnek 2.6 $S = (\mathbb{Q},+)$ yarı grubunu alalım. $(\mathbb{N},+)$, S'nin bir alt yarı grubudur, fakat $(\mathbb{N},.)$ bir alt yarı grubu değildir.

Tanım 2.3 [49] A ve B yarı grup S'nin alt kümeleri olmak üzere A ve B'nin çarpımı

$$A.B = \{a.b \mid a \in A, b \in B\}$$

şeklinde tanımlanır. $\varnothing \neq A \subseteq S$ olsun. Bu durumda;

i. Eğer $S.A \subseteq A$ $(A.S \subseteq A)$ ise, A'ya S'nin sol (sağ) ideali denir.

ii. Eğer A hem sol hem sağ ideal ise, A'ya iki yönlü ideal (kısaca ideal) denir.

iii. Eğer $S.A.S \subseteq A$ ise, A'ya S'nin iç (interior) ideali denir.

iv. Eğer A alt yarı grubu $A.S.A \subseteq A$ sağlıyorsa, A'ya S'nin bi ideali denir.

v. Eğer $A.S \cap S.A \subseteq A$ ise, A'ya S'nin quasi ideali denir.

vi. Eğer boştan farklı bir A kümesi, $A.S.A \subseteq A$ sağlıyorsa, A'ya S'nin genelleştirilmiş bi ideali denir.

Tanım 2.4 [49] S'nin her a elemanı için $a.x.a = a$ olacak şekilde bir $x \in S$ varsa a elemanına regüler denir. Her elemanı regüler olan yarı gruba ise regüler yarı grup denir.

Önerme 2.3 [49] S yarı grubunun regüler olması için gerek ve yeter koşul S'nin her R sağ ideali ve her L sol ideali için $R \cap L = R.L$ olmasıdır.

2.2 Γ - Yarı Grup

Bir yarı grubun genelleştirmesi olarak SEN 1981 yılında yarı grup kavramını inşa etti ve yarı grup teorisini geliştirdi. Bu bölümde Γ-yarı grup teorisi hakkında gerekli tanım ve teoremler verilecek olup, [47] yararlanılarak hazırlanmıştır.

Tanım 2.5 [47] S ve Γ boştan farklı iki küme olsun. Eğer

$$\begin{aligned} S \times \Gamma \times S &\to S \\ (a, \alpha, b) &\mapsto a\alpha b \end{aligned}$$

dönüşümü var ve $\forall a,b,c \in S$ ve $\alpha, \gamma \in \Gamma$ için $(a\alpha b)\gamma c = a\alpha(b\gamma c)$ koşulunu sağlıyorsa S'ye bir Γ – yarı grup (Γ – semigroup) denir.

S bir Γ – yarı grup olsun. A ve B kümeleri S'nin iki alt kümesi olmak üzere $A\Gamma B$ kümesi $A\Gamma B = \{a\gamma b : a \in A, b \in B \text{ ve } \gamma \in \Gamma\}$ olarak ifade edilir.

Şimdi, Γ – yarı grup ile ilgili aşağıda örnekler verilecektir.

Örnek 2.7 [47] Pozitif olmayan tamsayıların kümesi S ve pozitif olmayan çift tamsayıların kümesi Γ olsun. $a,b \in S$ ve $\alpha \in \Gamma$ için eğer $a\alpha b$ tamsayıların çarpma işlemini gösteriyorsa, bu takdirde S bir Γ – yarı gruptur.

Örnek 2.8 [47] $\mathbb{Q}$ rasyonel sayıların kümesi olsun ve $\Gamma = \mathbb{N}$ doğal sayıların kümesi olarak alalım. $a,b \in \mathbb{Q}$ ve $\alpha \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} \times \Gamma \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ (a,\ \alpha,\ b) &\mapsto a\alpha b \end{aligned}$$

dönüşümü tanımlansın. Bu durumda $\mathbb{Q}$ bir Γ – yarı gruptur.

Örnek 2.9 [47] $S = \{5n+4 : n \in \mathbb{Z}^+\}$ ve $\Gamma = \{5n+1 : n \in \mathbb{Z}^+\}$ olsun. $a,b \in S$, $\alpha \in \Gamma$ ve $+$ tamsayıların toplama işlemi olmak üzere $a\alpha b = a + \alpha + b$ olarak tanımlanan yeni işleme göre S bir Γ – yarı gruptur.

Örnek 2.10 [47] $S=\{-i,0,i\}$ ve $\Gamma=S$ olsun. Bu durumda kompleks sayıların çarpımı altında S bir $\Gamma-$yarı grup iken, kompleks sayıların çarpımı altında S bir yarı grup değildir.

Örnek 2.11 [47] S bir $\Gamma-$yarı grup ve α da Γ da bir sabit eleman olsun. $\forall a,b\in S$ için $a.b=a\alpha b$ olarak tanımlansın. $(S,.)$ bir yarı gruptur ve S_α ile gösterilir.

Örnek 2.12 [47] S bir yarı grup ve Γ boş kümeden farklı bir küme olsun. $\forall a,b\in S$ ve $\alpha\in\Gamma$ için

$$\begin{gathered}S\times\Gamma\times S\to S\\(a,\alpha,b)\mapsto ab\end{gathered}$$

dönüşümü tanımlansın. Bu durumda S bir $\Gamma-$ yarı gruptur. Gerçekten, $a,b,c\in S$ ve $\alpha,\beta\in\Gamma$ alalım ve $(a\alpha b)\beta c=(ab)\beta c=(ab)c=a(bc)=a\alpha(bc)=a\alpha(b\beta c)$ elde edilir. Dolayısıyla S bir yarı grup olduğu görülür.

Her yarı grup bir $\Gamma-$yarı grup olarak düşünülebilir. Böylece tüm $\Gamma-$yarı grupların sınıfı tüm yarı grupların sınıfını içermektedir.

Tanım 2.6 [47] $\forall a,b\in S$ ve $\gamma\in\Gamma$ için eğer $a\gamma b=b\gamma a$ oluyorsa $\Gamma-$yarı grup S'ye değişmeli denir.

Eğer S değişmeli $\Gamma-$yarı grup ise, bu takdirde $\forall a,b\in S$ için $a\Gamma b=b\Gamma a$'dir.

Şimdi ise, normal $\Gamma-$yarı grup kavramını vereceğiz.

Tanım 2.7 [47] $\Gamma-$yarı grup S'nin normal olarak adlandırılması için $\forall a\in S$ ve $\forall\alpha\in\Gamma$ için $a\alpha S=S\alpha a$ olmasıdır.

Eğer $\Gamma-$yarı grup S normal ise, bu takdirde $\forall a\in S$ için $a\Gamma S=S\Gamma a$'dir.

Örnek 2.13 [47] $S=\{a,b,c\}$ olsun.

.	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	b	c

yukarıdaki tabloda gösterildiği gibi "." ikili işlemi tanımlansın. $\forall a,b\in S$ ve $\alpha\in\Gamma$ için

$$S \times \Gamma \times S \to S$$
$$(a, \alpha, b) \mapsto a\alpha b = a.b$$

dönüşümü tanımlansın. S'nin bir $\Gamma -$ yarı grup olduğu aşikardır. Fakat $b\alpha c = b.c = a \neq c\alpha b = c.b = b$ olduğundan S bir değişmeli $\Gamma -$ yarı grup değildir.

Bir $\Gamma -$ yarı grubun sol birimi, sağ birimi ve birim tanımları verilecektir.

Tanım 2.8 [47] S bir $\Gamma -$ yarı grup olsun. $\forall s \in S$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $a\alpha s = s$ oluyorsa a elemanına $\Gamma -$ yarı grup S'nin bir sol birimi denir.

Tanım 2.9 [47] S bir $\Gamma -$ yarı grup olsun. $\forall s \in S$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $s\alpha a = s$ oluyorsa a elemanına $\Gamma -$ yarı grup S'nin bir sağ birimi denir.

Tanım 2.10 [47] S bir $\Gamma -$ yarı grup olsun. "a" elemanı S'nin birimi olarak adlandırılması için S'nin hem sağ birimi hem de sol birimi olmasıdır.

Tanım 2.11 [47] S bir $\Gamma -$ yarı grup ve $\varnothing \neq T \subseteq S$ olsun. $\forall a, b \in T$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $a\gamma b \in T$ oluyorsa T'ye S'nin bir $\Gamma -$ alt yarı grubu denir.

S bir $\Gamma -$ yarı grup ve $\varnothing \neq T \subseteq S$ olsun. T'nin $\Gamma -$ yarı grup S'nin bir $\Gamma -$ altyarı grubu olması için gerek ve yeter koşul $T\Gamma T \subseteq T$ olmasıdır.

Örnek 2.14 [47] $S = [0,1]$ ve $\Gamma = \{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ olsun. Bu durumda klasik çarpma işlemi altında S bir $\Gamma -$ yarı gruptur. $T = [0, 1/2]$ alalım. Bu durumda T kümesi S'nin boştan farklı bir alt kümesi, $\forall a, b \in T$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $a\gamma b \in T$ olur. Dolayısıyla T, S'nin bir $\Gamma -$ alt yarı grubudur.

Teorem 2.1 [47] $\Gamma -$ yarı grup S'nin iki $\Gamma -$ alt yarı grubunun boştan farklı arakesiti de S'nin bir $\Gamma -$ alt yarı grubudur.

İspat. T_1 ve T_2, S'nin iki $\Gamma -$ alt yarı grubu olsun. $a, b \in T_1 \cap T_2$ ve $\gamma \in \Gamma$ olsun.

$a, b \in T_1 \cap T_2$ olduğundan $a, b \in T_1$ ve $a, b \in T_2$ olur.

$a, b \in T_1$, $\gamma \in \Gamma$ ve T_1 S'nin $\Gamma -$ alt yarı grubu olduğundan $a\gamma b \in T_1$ bulunur.

$a, b \in T_2$ $\gamma \in \Gamma$ ve T_2 S'nin $\Gamma -$ alt yarı grubu olduğundan $a\gamma b \in T_2$ bulunur.

Böylece $a\gamma b \in T_1$ ve $a\gamma b \in T_2$ olduğundan $a\gamma b \in T_1 \cap T_2$ elde edilir.

Dolayısıyla $T_1 \cap T_2$, S'nin bir $\Gamma-$alt yarı grubudur.

Tanım 2.12 [47] $\varnothing \neq A \subseteq S$ olsun. Eğer $S\Gamma A \subseteq A$ ise, A'ya $\Gamma-$yarı grup S'nin bir $\Gamma-$sol ideali denir.

Tanım 2.13 [47] $\varnothing \neq A \subseteq S$ olsun. Eğer $A\Gamma S \subseteq A$ ise, A'ya $\Gamma-$yarı grup S'nin bir $\Gamma-$sağ ideali denir.

Tanım 2.14 [47] A eğer $\Gamma-$yarı grup S'nin hem $\Gamma-$sol ideali hem de $\Gamma-$sağ ideali ise, A'ya $\Gamma-$yarı grup S'nin $\Gamma-$ ideali denir.

Tanım 2.15 [47] Γ-yarı grup S'nin bir $\Gamma-$alt yarı grubu B olsun. Eğer $B\Gamma S\Gamma B \subseteq B$ oluyorsa, B'ye $\Gamma-$yarı grup S'nin bir bi-$\Gamma-$ideali denir.

Tanım 2.16 [47] Γ-yarı grup S'nin bir $\Gamma-$altyarı grubu A olmak üzere eğer $S\Gamma A\Gamma S \subseteq A$ oluyorsa, A'ye $\Gamma-$yarı grup S'nin iç $\Gamma-$ideali $\Gamma-$denir.

Tanım 2.17 [47] Γ-yarı grup S'nin bir I ideali olmak üzere eğer S'nin herhangi A ve B idealleri için $A\Gamma B \subseteq I$ iken $A \subseteq I$ veya $B \subseteq I$ oluyorsa I'ya $\Gamma-$yarı grup S'nin asal Γ-ideali denir.

Tanım 2.18 [47] $\Gamma-$yarı grup S'nin bir I ideali olmak üzere eğer S'nin A ideali için $A\Gamma A \subseteq I$ iken $A \subseteq I$ oluyorsa I'ya $\Gamma-$yarı grup S'nin yarı asal $\Gamma-$ideali denir.

Tanım 2.19 [47] $x = x\alpha s\beta x$ iken $\exists s \in S$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ ise, x elemanına Γ-yarı grup S'nin regüler elemanı denir.

Tanım 2.20 [47] Γ-yarı grup S'nin her elemanın regüler ise S'ye regüler Γ-yarı grup denir.

2.3 Bulanık Kümeler

Bulanık küme kavramını ilk olarak Zadeh tarafından tanımlanmıştır. Bu bölümde bulanık küme kavramı ve özellikleri verilecektir. Bu bölüm M. Mordeson'un yazmış olduğu "Fuzzy Commutative Algebra" [48] isimli kitaptan alınmıştır.

Tanım 2.21 [48] $\varnothing \neq X$ küme olsun. Bu durumda $\mu : X \to [0,1]$ şeklinde tanımlanan μ fonksiyonuna X'in bir bulanık (fuzzy) alt kümesi denir. X'in bütün bulanık alt kümelerinin oluşturduğu küme X'in bulanık kuvvet kümesi olarak adlandırılır ve L^X ile gösterilir, burada $L^X = \{\mu \mid \mu : X \to [0,1]\}$ şeklindedir.

Tanım 2.22 [48] $\mu \in L^X$ olsun. Bu durumda

$$\mu(X) = \mathrm{Im}(\mu) = \{\mu(x) \mid x \in X\}$$

ile tanımlanan kümeye X'in μ altındaki görüntü kümesi denir.

Tanım 2.23 [48] $\mu \in L^X$ olsun. Bu durumda

$$\mu^* = \{x \mid \mu(x) > 0 \text{ ve } x \in X\}$$

kümesine μ'nün destekleyicisi denir. Eğer μ^* sonlu bir küme ise μ'ye sonlu bulanık küme, aksi takdirde μ'ye sonsuz bulanık küme denir. Eğer $1 \in \mu(X)$ ise, μ'ye X'in normal bulanık alt kümesi (1 içeren) denir.

Eğer $\mu \in L^X$ ise, bu durumda $\mu(X)$'in her alt kümesi bir maximal elemana sahip ise μ'ye sup-property özelliğini sağlar.

Tanım 2.24 [48] $Y \subseteq X$ ve $a \in L$ olmak üzere $a_Y \in L^X$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$a_Y(x) = \begin{Bmatrix} a; & x \in Y \text{ ise} \\ 0; & x \notin Y \text{ ise} \end{Bmatrix}$$

Özel olarak, eğer $Y = \{x\}$ ise bu durumda a_Y kümesi $a_{\{x\}}$ şeklinde ifade edilir ve L-nokta (point) veya L-singleton adı verilir. Eğer $a = 1$ alınırsa

$$1_Y(x) = \begin{Bmatrix} 1; & x \in Y \text{ ise} \\ 0; & x \notin Y \text{ ise} \end{Bmatrix}$$

fonksiyonuna karakteristik fonksiyon denir.

Ayrıca, S bir L - noktaların kümesi ise, bu durumda $foot(S) = \{y \mid y_a \in S\}$.

Tanım 2.25 [48] $\mu, \nu \in L^X$ bulanık alt kümeleri olsun. Eğer $\forall x \in$ S için $\mu(x) \le \nu(x)$ ise, bu durumda μ bulanık kümesi ν bulanık kümesi içinde kapsanır denir ve $\mu \subseteq \nu$

şeklinde gösterilir. Eğer $\mu \subsetneq \nu$ ise, μ bulanık kümesi ν bulanık kümesi içinde öz olarak kapsanır.

Tanım 2.26 [48] $\mu, \nu \in L^X$ olsun. Sırasıyla $\mu \cap \nu$ ve $\mu \cup \nu \in L^X$ kümeleri $\forall x \in$ S için

$$(\mu \cap \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x)$$

$$(\mu \cup \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x)$$

olarak tanımlanır.

Yukarıda verilen iki bulanık küme arasındaki kesişim ve birleşim işlemleri her hangi bir bulanık küme ailesi için şu şekilde genelleştirilir. X'in bulanık alt kümelerinin herhangi bir ailesi $\{\mu_i \mid i \in I\}$ olsun, burada I boştan farklı bir indeks kümesidir. $\forall x \in X$ için μ_i bulanık alt kümelerinin en küçük üst sınırı $\bigcap_{i\in I} \mu_i$ ve en büyük alt sınırı $\bigcup_{i\in I} \mu_i$

$$\left(\bigcap_{i\in I} \mu_i\right)(x) = \bigwedge_{i\in I} \mu_i(x)$$
$$\left(\bigcup_{i\in I} \mu_i\right)(x) = \bigvee_{i\in I} \mu_i(x)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $I = \{1, 2, ..., n\}$ ise, bu durumda

$$\bigcap_{i\in I} \mu_i = \bigcap_{i=1}^{n} \mu_i = \mu_1 \cap \mu_2 \cap ....\cap \mu_n$$
$$\bigcup_{i\in I} \mu_i = \bigcup_{i\in I}^{n} \mu_i = \mu_1 \cup \mu_2 \cup ....\cup \mu_n$$

olarak ifade edilir.

Aşağıda verilecek olan seviye alt küme tanımı klasik cebir ile bulanık cebir arasındaki ilişkiyi kuracaktır.

Tanım 2.27 [48] $\mu \in L^X$ olsun. Bu durumda $a \in L$ için

$$\mu_a = \{x \mid x \in X,\ \mu(x) \geq a\}$$

ile gösterilen kümeye μ'nün $a-$kesimi veya $a-$seviye alt kümesi olarak adlandırılır.

Örnek 2.15 $X=\mathbb{Z}$ olsun ve X'in μ bulanık alt kümesi

$$\mu(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}; & x\in 2\mathbb{Z} \\ 0; & x\notin 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. μ bulanık alt kümesinin seviye alt kümeleri

$\mu_{\frac{1}{2}}=2\mathbb{Z}$ ve $\mu_0=\mathbb{Z}=\{x\in\mathbb{Z} \mid \mu(x)\geq 0\}$ olarak görülür.

Örnek 2.16 $X=\mathbb{Z}$ olsun ve X'in μ bulanık alt kümesi

$$\mu(x)=\begin{cases} 1; & x=0 \\ 0.25; & x\in 2\mathbb{Z}\setminus 4\mathbb{Z} \\ 0; & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. μ bulanık alt kümesinin seviye alt kümeleri μ_t olmak üzere

$t\geq 0$ için $\mu(x)\geq 0$ ve $x\in\mathbb{Z}$ bulunur, dolayısıyla $\mu_t=\mu_0=\mathbb{Z}$,

$t\geq 0.25$ için $\mu(x)\geq 0.25$ ve $x\in 4\mathbb{Z}$ bulunur, dolayısıyla $\mu_t=\mu_{0.25}=4\mathbb{Z}$,

$t\geq 1$ için $\mu(x)\geq 1$ ve $x=0$ bulunur, dolayısıyla $\mu_t=\mu_1=0$ olarak elde edilir.

Teorem 2.2 [48] $\mu,\nu\in L^X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i) $\mu\subseteq\nu$, $a\in[0,1]\Rightarrow\mu_a\subseteq\nu_a$,

ii) $a\leq b$, $a,b\in[0,1]\Rightarrow\mu_b\subseteq\mu_a$,

iii) $\mu=\nu\Leftrightarrow\mu_a=\nu_a$, $\forall a\in L$.

İspat:

i) $\mu\subseteq\nu$ olsun. $\forall x\in X$ için $\mu(x)\leq\nu(x)$ olur. $a\in L$ alalım ve $y\in\mu_a$ ise $\mu(y)\geq a$ dır. Ayrıca $\mu_a\subseteq X$ ve $\mu\subseteq\nu$ olduğundan $\mu(y)\leq\nu(y)$ dir. Böylece $\nu(y)\geq\mu(y)\geq a$ elde edilir ve $\nu(y)\geq a$ bulunur. Dolayısıyla $\nu(y)\geq a$ olduğundan $y\in\nu_a$ olduğu görülür. $y\in\mu_a$ iken $y\in\nu_a$ olduğundan $\mu_a\subseteq\nu_a$ elde edilir.

ii) $a,b\in L$ olmak üzere $a\le b$ olsun. $x\in\mu_b$ alalım. Bu durumda $\mu(x)\ge b$ ve $\mu(x)\ge b\ge a$ olur ve $\mu(x)\ge a$ elde edilir. Dolayısıyla $x\in\mu_a$ olur ve $x\in\mu_b$ iken $x\in\mu_a$ olduğundan $\mu_b\subseteq\mu_a$ sonucuna ulaşılır.

iii) $\mu=\nu$ olsun. $a\in L$ için $x\in\mu_a$ ise $\mu(x)\ge a$ olur. $\mu=\nu$ olduğundan $\forall x\in X$ için $\mu(x)=\nu(x)$ dir. $\mu(x)=\nu(x)\ge a$ ise $x\in\nu_a$ dır ve $\mu_a\subseteq\nu_a$...(*) elde edilir. Benzer şekilde $x\in\nu_a$ alalım. $\nu(x)=\mu(x)\ge a$ olduğundan $x\in\mu_a$ bulunur ve $\nu_a\subseteq\mu_a$...(**) olduğu görülür. Dolayısıyla (*) ve (**)'den $\mu_a=\nu_a$ elde edilir. Diğer taraftan $\forall a\in L$ için $\mu_a=\nu_a$ olsun. Bu durumda $\forall x\in X$ için $\mu(x)=\nu(x)\ge a$ olur ve $\mu=\nu$ bulunur.

Verilecek olan 2 teorem seviye alt kümelerinin bazı temel özelliklerini gösterecektir.

Teorem 2.3 [48] $\{\mu_i : i\in I\}\subseteq L^X$ olsun. Bu durumda herhangi bir $a\in L$ için

i) $\bigcup_{i\in I}(\mu_i)_a\subseteq\left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right)_a$

ii) $\bigcap_{i\in I}(\mu_i)_a=\left(\bigcap_{i\in I}\mu_i\right)_a$

sağlanır. Ayrıca L bir sonlu zincir ise i'de eşitlik hali vardır.

İspat:

i) $x\in\bigcup_{i\in I}(\mu_i)_a=(\mu_1)_a\cup(\mu_2)_a\cup$..........$\cup(\mu_k)_a\cup$.......olsun. $\exists k\in I$ için $x\in(\mu_k)_a$ olsun.

$$x\in(\mu_k)_a\Rightarrow a\le(\mu_k)(x)$$

$$\Rightarrow a\le(\mu_k)(x)\le\mu_1(x)\vee\mu_2(x)\vee\ldots\vee\mu_k(x)\ldots=\left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right)(x)$$

dolayısıyla $x\in\left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right)_a$ elde edilirve $\bigcup_{i\in I}(\mu_i)_a\subseteq\left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right)_a$ olduğu görülür.

ii) $x\in\bigcap_{i\in I}(\mu_i)_a=(\mu_1)_a\cap(\mu_2)_a\cap$... olsun.

$x\in\bigcap_{i\in I}(\mu_i)_a$ olduğundan $x\in(\mu_1)_a$, $x\in(\mu_2)_a$,..., $x\in(\mu_k)_a$,... bulunur.

Eğer $x\in(\mu_1)_a$ ise, bu durumda $\mu_1(x)\ge a$, Eğer $x \in (\mu_2)_a$ ise, bu durumda $\mu_2(x) \geq a$,

$\vdots$

Eğer $x \in (\mu_k)_a$ ise, bu durumda $\mu_k(x) \geq a$ elde edilir. Buradan,

$\mu_1(x) \wedge \mu_2(x) \wedge \ldots \wedge \mu_k(x) \wedge \ldots \geq a$ olduğu görülür. Dolayısıyla

$\mu_1(x) \wedge \mu_2(x) \wedge \ldots \wedge \mu_k(x) \wedge \ldots = \left(\bigcap_{i\in I} \mu_i\right)(x) \geq a$ olacağından $x \in \left(\bigcap_{i\in I} \mu_i\right)_a$ bulunur ve $\bigcap_{i\in I} (\mu_i)_a \subseteq \left(\bigcap_{i\in I} \mu_i\right)_a \ldots(*)$ elde edilir. Diğer taraftan $x \in \left(\bigcap_{i\in I} \mu_i\right)_a$ alalım. Bu durumda $\left(\bigcap_{i\in I} \mu_i\right)(x) \geq a$ olur. Buradan kolaylıkla $x \in \bigcap_{i\in I} (\mu_i)_a$'da olduğu gösterilebilir. Böylece $\left(\bigcap_{i\in I} \mu_i\right)_a \subseteq \bigcap_{i\in I} (\mu_i)_a \ldots(**)$ elde edilir. $(*)$ ve $(**)$'dan $\bigcap_{i\in I} (\mu_i)_a = \left(\bigcap_{i\in I} \mu_i\right)_a$ bulunur.

Teorem 2.4 [48] $\mu \in L^X$ ve $\{a_i \mid i \in I\} \subseteq L$'in olmak üzere $b = \underset{i\in I}{\wedge} a_i$ ve $c = \underset{i\in I}{\vee} a_i$ için

i) $\bigcup_{i\in I} \mu_{a_i} \subseteq \mu_b$

ii) $\bigcap_{i\in I} \mu_{a_i} = \mu_c$.

İspat:

i) $x \in \bigcup_{i\in I} \mu_{a_i}$ olsun. $a_t \leq \mu(x)$ olmak üzere en az bir $t \in I$ vardır. $b = \underset{i\in I}{\wedge} a_i \leq a_t$ olduğuna göre

$$\begin{aligned} b \leq a_t \leq \mu(x) &\Rightarrow b \leq \mu(x) \\ &\Rightarrow x \in \mu_b \\ &\Rightarrow \bigcup_{i\in I} \mu_{a_i} \subseteq \mu_b \end{aligned}$$

ii) $x \in \bigcap_{i\in I} \mu_{a_i}$ olsun. $\forall i \in I$ için $a_i \leq \mu(x)$ dir. $c = \underset{i\in I}{\vee} a_i$ için $c \leq \mu(x)$ elde edilir ve

$x \in \mu_c \Rightarrow \bigcap_{i\in I} \mu_{a_i} \subseteq \mu_c \ldots(1)$ bulunur. $x \in \mu_c$ alalım. $c = \underset{i\in I}{\vee} a_i$ olmak üzere $\forall i \in I$ için

$\underset{i\in I}{\vee} a_i = c \le \mu(x) \Rightarrow a_i \le \mu(x)$ elde edilir, dolayısıyla $x \in \bigcap_{i\in I} \mu_{a_i}$ olduğu görülür. Buradan $\mu_c \subseteq \bigcap_{i\in I} \mu_{a_i}$ ...(2) bulunur. Sonuç olarak (1) ve (2) den $\bigcap_{i\in I} \mu_{a_i} = \mu_c$ elde edilir.

Teorem 2.5 [48] $\mu \in L^X$ olmak üzere $\mu = \bigcup_{a\in[0,1]} a_{\mu_a} = \bigcup_{a\in\mu(S)} a_{\mu_a}$ dır.

İspat: $x \in X$ alalım.

$$\bigcup_{a\in[0,1]} a_{\mu_a}(x) = \underset{a\in[0,1]}{\vee} a_{\mu_a}(x) = \vee\{a \in [0,1] : a \le \mu(x)\} = \mu(x)$$
$$\Rightarrow \mu = \bigcup_{a\in[0,1]} a_{\mu_a}$$
$$\bigcup_{a\in\mu(S)} a_{\mu_a}(x) = \underset{a\in\mu(S)}{\vee} a_{\mu_a}(x) = \vee\{a \in \mu(S) : a \le \mu(x)\} = \mu(x)$$
$$\Rightarrow \mu = \bigcup_{a\in\mu(S)} a_{\mu_a}$$

Tanım 2.28 [48] $\{X_i \mid i \in I\}$ kümesi boştan farklı kümeler ailesi olsun. X ile X_i'lerin kartezyen çarpımı $X = \prod_{i\in I} X_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in X_i, i \in I\}$ şeklinde tanımlansın. $\forall i \in I$ için $\mu \in L^{X_i}$ olmak üzere $\forall x = (x_i)_{i\in I} \in X$ için $\mu(x) = \underset{i\in I}{\wedge} \mu_i(x)$ şeklinde tanımlanmış ve $\mu \in L^X$ bulanık kümesine μ_i lerin tam direkt çarpımı denir, $\mu = \prod_{i\in I} \mu_i$ şeklinde gösterilir.

Eğer $I = \{1, 2, ..., n\}$ ise, bu durumda $S = \prod_{i\in I} S_i = S_1 x S_2 x..........x S_n$ şeklindedir ve $\prod_{i\in I} \mu_i = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes .... \otimes \mu_n$ şeklinde tanımlanır.

Ayrıca, $\mu_i, \nu_i \in L^{X_i}$ ve $\forall i \in I$ için $\mu_i \subseteq \nu_i$ ise, $\prod_{i\in I} \mu_i \subseteq \prod_{i\in I} \nu_i$ olduğu açıktır.

Tanım 2.29 [48] X, Y herhangi iki küme ve $\mu \in L^X$, $\nu \in L^Y$ olsun. $f : X \to Y$ bir tasvir olmak üzere $f(\mu) \in L^Y$ ve $f^{-1}(\nu) \in L^X$ bulanık kümelerini alalım. $\forall y \in Y$ için, f'nin μ altındaki görüntüsü

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \vee\{\ \mu(x) \mid x \in X,\ f(x) = y\ \} & ; \quad f^{-1}(y) \ne \varnothing \\ 0 & ; \quad f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $\forall x \in$ X için f'nin ν altındaki ters görüntüsü ise

$$f^{-1}(\nu)(x) = \nu f(x)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.6 [48] $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ fonksiyonlarını alalım. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(1) Herhangi $\mu_i \in L^X$ ve $i \in I$ için $f\left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(\mu_i)$ sağlanır ve dolayısıyla $\forall \mu_1, \mu_2 \in L^X$ için $\mu_1 \subseteq \mu_2 \Rightarrow f(\mu_1) \subseteq f(\mu_2)$.

(2) Herhangi $\nu_j \in L^Y$ ve $j \in J$ için, burada J boştan farklı indeks kümesi olmak üzere

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J}\nu_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(\nu_j)$$
$$f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J}\nu_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(\nu_j)$$

olur. Ayrıca $\forall \nu_1, \nu_2 \in L^Y$ için $\nu_1 \subseteq \nu_2 \Rightarrow f^{-1}(\nu_1) \subseteq f^{-1}(\nu_2)$.

(3) $\forall \mu \in L^X$ için $f^{-1}(f(\mu)) \supseteq \mu$. Eğer f fonksiyonu 1-1 ise, bu durumda

$\forall \mu \in L^X$ için, $f^{-1}(f(\mu)) = \mu$.

Ayrıca, $L^X \to L^Y (\mu \mapsto f(\mu))$ dönüşümü 1-1 ve $L^Y \to L^X (\nu \mapsto f^{-1}(\nu))$ dönüşümü

ise örtendir.

(4) $\forall \nu \in L^Y$ için $f(f^{-1}(\nu)) \subseteq \nu$. Eğer f örten ise, bu durumda

$\forall \nu \in L^Y$ için $f(f^{-1}(\nu)) = \nu$.

(5) $f(\mu) \subseteq \nu \Leftrightarrow \mu \subseteq f^{-1}(\nu)$ $\forall \mu \in L^X$ ve $\forall \nu \in L^Y$ için.

(6) $\forall \mu \in L^X$ için $g(f(\mu)) = (g \circ f)(\mu)$ ve $\forall \varepsilon \in L^Z$ için

$$f^{-1}(g^{-1}(\varepsilon)) = (g \circ f)^{-1}(\varepsilon).$$

İspat:

(1) $\forall y \in Y$ için

$$f\left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right)(y) = \vee\left\{\bigcup_{i\in I}\mu_i(x) \quad : \quad x\in X,\ f(x)=y\right\}$$

$$= \vee\left\{\underset{i\in I}{\vee}\mu_i(x) \quad : \quad x\in X,\ f(x)=y\right\}$$

$$= \underset{i\in I}{\vee}\left\{\vee\left\{\mu_i(x) \quad : \quad x\in X,\ f(x)=y\right\}\right\} = \bigcup_{i\in I} f(\mu_i)(y)$$

$\forall \mu_1,\mu_2 \in L^X$ için $\mu_1 \subseteq \mu_2$ olsun. $\forall x\in X$ için $\mu_1(x) \le \mu_2(x)$ dir. $\forall y\in Y$ için

$$f(\mu_1)(y) = \vee\left\{\mu_1(x) \quad : \quad x\in X\ ,\ f(x)=y\right\}$$

$$\le \vee\left\{\mu_2(x) \quad : \quad x\in X\ ,\ f(x)=y\right\}$$

$$= f(\mu_2)(y)$$

$$\Rightarrow f(\mu_1) \subseteq f(\mu_2)$$

(2) $\forall x\in X$ için

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J}\nu_j\right)(x) = \bigcup_{j\in J}\nu_j\left(f(x)\right) = \underset{j\in J}{\vee}\nu_j\left(f(x)\right)$$

$$= \underset{j\in J}{\vee}\left(\nu_j\left(f(x)\right)\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(\nu_j)(x)$$

$\forall x\in X$ için

$$f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J}\nu_j\right)(x) = \bigcap_{j\in J}\nu_j\left(f(x)\right) = \underset{j\in J}{\wedge}\nu_j\left(f(x)\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(\nu_j)(x)$$

ve $\forall \nu_1,\nu_2 \in L^Y$, $\forall y\in Y$ için $\nu_1 \subseteq \nu_2 \Rightarrow \nu_1(y) \le \nu_2(y)$ dir. $y = f(x)$ olsun.

$\forall x\in X$ için

$$f^{-1}(\nu_1)(x) = \nu_1\left(f(x)\right) \Rightarrow \nu_1\left(f(x)\right) \le \nu_2\left(f(x)\right)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\nu_1)(x) \le f^{-1}(\nu_2)(x)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\nu_1) \subseteq f^{-1}(\nu_2)$$

(3) $\forall \mu \in L^X$ ve $\forall x\in X$ için

$$f^{-1}\left(f(\mu)\right)(x) = f(\mu)\left(f(x)\right) = \vee\left\{\mu(x_1)\ :\ x_1\in X,\ f(x_1)=f(x)\right\} \ge \mu(x)$$

Eğer f , 1-1 ise $\forall x_1, x \in X$ için

$f(x_1) = f(x) \Rightarrow x_1 = x$'dir.

$$f^{-1}(f(\mu))(x) = f(\mu)(f(x)) = \vee\{\mu(x_1) \;:\; x_1 \in X,\; f(x_1) = f(x)\}$$
$$= \vee\{\mu(x) \;:\; x \in X, f(x) = f(x_1)\}$$
$$= \mu(x)$$

(4) $\forall \nu \in L^Y$, $\forall y \in Y$ için

$$f(f^{-1}(\nu))(y) = \vee\{f^{-1}(\nu)(x) \;:\; x \in X, f(x) = y\}$$
$$= \vee\{\nu(f(x)) \;:\; x \in X, f(x) = y\}$$
$$= \begin{cases} \nu(y) & ; \quad y \in f(x) \\ 0 & ; \quad y \notin f(x) \end{cases}$$
$$\leq \nu(y)$$

$$\Rightarrow f(f^{-1}(\nu)) \subseteq \nu$$

Eğer f örten ise $f(f^{-1}(\nu))(y) \neq 0$ ve $f(f^{-1}(\nu)) = \nu$ dır.

(5) $\forall \mu \in L^X$, $\forall \nu \in L^Y$ olmak üzere $\forall x \in X$ ve $\forall y \in f(X)$ için

$$f(\mu)(y) \leq \nu(y) \Leftrightarrow \vee\{\mu(x) \;:\; x \in X, f(x) = y\} \leq \nu(y)$$
$$\Leftrightarrow \mu(x) \leq \nu(f(x))$$
$$\Leftrightarrow \mu(x) \leq f^{-1}(\nu)(x)$$

(6) $\forall z \in Z,\; \forall \mu \in L^X$ için

$$g(f(\mu))(z) = \vee\{f(\mu)(y) \;:\; y \in Y,\; g(y) = z\}$$
$$= \vee\{\vee\{\mu(x) \;:\; x \in X, f(x) = y\} \;:\; y \in Y,\; g(y) = z\}$$
$$= \vee\{\mu(x) \;:\; x \in X,\; g \circ f(x) = z\}$$
$$= (g \circ f)(\mu)(x)$$

$\forall x \in X$ ve $\forall \varepsilon \in L^Z$ için

$$(g \circ f)^{-1}(\varepsilon)(x) = \varepsilon(g(f(x))) = g^{-1}(\varepsilon)(f(x)) = f^{-1}(g^{-1}(\varepsilon))(x)$$

2.4 Bulanık Yarı gruplar

Bu bölüm J.N. Mordeson, D.S. Malik ve N. Kuroki'nin yazmış oldukları "Fuzzy Semigroups" [49] adlı kitabından alınmıştır.

Tanım 2.30 [49] Yarı grup S'nin bir bulanık alt kümesi f $\forall a,b\in S$ için

$$f(ab)\geq f(a)\wedge f(b)$$

olursa f'ye S'nin bir bulanık alt yarı grubu (fuzzy semigroup) denir. Eğer

$$f(ab)\geq f(b)\ \left(f(ab)\geq f(a)\right)$$

olursa f'ye yarı grup S'nin bir bulanık sol (sağ) ideali denir. Hem S'nin bir bulanık sol ideali hem de bulanık sağ ideali ise f'ye yarı grup S'nin bir bulanık ideali denir.

Önerme 2.3 [49] S bir yarı grup olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. f ve g yarı grup S'nin iki bulanık alt yarı grubu olsun. Bu durumda $f\cap g$ de S'nin bir bulanık alt yarı grubudur.

ii. f ve g yarı grup S'nin iki bulanık (sol, sağ) ideali olsun. Bu durumda $f\cap g$ de S'nin bir bulanık (sol, sağ) idealidir.

Tanım 2.31 [49] Yarı grup S'nin bir bulanık alt kümesi f $\forall x,y,z\in S$ için

$$f(xyz)\geq f(x)\wedge f(z)$$

olursa f'ye S'nin bir bulanık bi ideali denir.

Tanım 2.32 [49] Yarı grup S'nin bir bulanık alt kümesi f $\forall x,y,z\in S$ için

$$f(xyz)\geq f(y)$$

olursa f'ye S'nin bir bulanık iç ideali denir.

Yarı grup S'nin her bulanık ideali S'nin bir iç idealidir. Fakat tersi doğru değildir.

Örnek 2.17 [49] $S=\{a,b,c,d\}$ elemanlarıyla birlikte aşağıda verilen çarpım tablosuyla bir yarı grup olsun.

.	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	b	a
d	a	a	b	b

f ise yarı grup S'nin bir bulanık kümesi için

$f(a)=0.7, f(b)=0, f(c)=0.3, f(d)=0$ olsun. Bu durumda $\forall a,b,c \in S$ için

$$f(abc)=f(a)=0.7 \geq 0=f(b)$$

olur ve f bulanık kümesi yarı grup S'nin bir iç idealidir, fakat

$$f(dc)=f(b)=0 \ngeq 0.3=f(c)$$

olduğundan S'nin bir sol ideali değildir. Dolayısıyla f bulanık kümesi yarı grup S'nin bir bulanık ideali değildir.

Teorem 2.7 [49] Regüler yarı grup S'nin f bulanık kümesi için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i. f bulanık kümesi S'nin bir bulanık idealidir.

ii. f bulanık kümesi S'nin bir bulanık iç idealidir.

Tanım 2.33 [49] Yarı grup S'nin bir bulanık alt kümesi f eğer

$$(f \circ S) \cap (S \circ f) \subseteq f$$

oluyorsa f'ye yarı grup S'nin bir bulanık quasi ideali denir.

Herhangi bir yarı grup S'nin bulanık sol ideali ve bulanık sağ ideali S'nin bir bulanık quasi idealidir. Ayrıca, herhangi bir yarı grup S'nin bulanık quasi ideali S'nin bir bulanık bi idealidir. Fakat bu durumların tersi genelde doğru değildir. Tersinin doğru olmadığına dair örnekler verelim.

Örnek 2.18 [49] $S=\{0,a,b,c\}$ elemanlarıyla birlikte verilen aşağıda verilen çarpım tablosuyla bir yarı grup olsun.

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	b	0
b	0	0	0	0
c	0	c	0	0

Bu durumda $Q=\{0,a\}$ yarı grup S'nin bir quasi idealidir ve S'nin bir (sol, sağ) ideali değildir. S'nin f bulanık kümesi $f(0)=f(a)=0.7$ ve $f(b)=f(c)=0$ olarak tanımlansın. Bu durumda f bir bulanık quasi idealidir fakat bulanık (sol, sağ) ideali değildir.

Örnek 2.19 [49] $S=\{0,a,b,c\}$ elemanlarıyla birlikte verilen aşağıda verilen çarpım tablosuyla bir yarı grup olsun.

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	0	0
b	0	0	0	a
c	0	0	a	b

Bu durumda $B=\{0,b\}$ yarı grup S'nin bir bi idealidir ve S'nin quasi ideali değildir. S'nin f bulanık kümesi $f(0)=f(b)=0.7$ ve $f(a)=f(c)=0$ olarak tanımlansın. Bu durumda f bir bulanık bi idealidir, fakat bulanık quasi ideali değildir.

Tanım 2.34 [49] S bir yarı grup ve $\varnothing \neq A \subseteq S$ olsun. Eğer $ASA \subseteq A$ oluyorsa A'ya S'nin genelleştirilmiş bi ideali denir. Yarı grup S'nin bir bulanık alt kümesi f, $\forall x,y,z \in S$ için

$$f(xyz) \geq f(x) \wedge f(z)$$

olursa f'ye yarı grup S'nin bir bulanık genelleştirilmiş bi ideali denir.

Yarı grup S'nin her bulanık bi ideali S'nin bir bulanık genelleştirilmiş bi idealidir. Fakat tersi doğru değildir.

Örnek 2.20 [49] $S=\{a,b,c,d\}$ elemanlarıyla birlikte verilen aşağıda verilen çarpım tablosuyla bir yarı grup olsun.

.	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	b	a
d	a	a	b	b

ise yarı grup S'nin f bulanık kümesi için $f(a)=0.5, f(b)=0, f(c)=0.2, f(d)=0$ olsun. Bu durumda f genelleştirilmiş bi idealdir, fakat S'nin bir bulanık bi ideali değildir.

Bu durumun tersi regüler yarı gruplarda sağlanır.

Teorem 2.8 [49] Regüler yarı grup S'nin her bulanık genelleştirilmiş bi ideali S'nin bir bulanık bi idealidir.

2.5 Bulanık Γ -yarı gruplar

Bu bölüm M.Shabir ve M.I.Ali'nin yazmış oldukları "Soft ideals and Generalized Fuzzy ideals in Semigroups" [23] adlı makalesinden alınmıştır.

Tanım 2.35 [23] Γ-yarı grup M'nin μ bulanık kümesi $\forall x, y \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için

$$\mu(x\alpha y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$$

oluyorsa μ'ye M'nin bulanık Γ-yarı grubu denir ve eğer

$$\mu(x\alpha y) \geq \mu(y) \quad \left(\mu(x\alpha y) \geq \mu(x)\right)$$

olursa μ'ye Γ-yarı grup M'nin bulanık sol (sağ) ideali denir. Hem bulanık sol hem bulanık sağ ideali ise μ'ye Γ-yarı grup M'nin bulanık ideali denir.

Örnek 2.21 [23] M tüm pozitif olmayan tam sayıların kümesi olsun ve Γ'da tüm pozitif olmayan çift tamsayıların kümesi olsun. Bu durumda tam sayıların çarpma işlemi altında M bir Γ-yarı gruptur. Γ-yarı grup M'nin bir μ bulanık kümesi

$$\mu(x) = \begin{Bmatrix} 1 & \text{eğer } x = 0 \\ 0.1 & \text{eğer } x = -1, -2 \\ 0.2 & \text{eğer } x < -2 \end{Bmatrix}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda μ, Γ-yarı grup M'nin bulanık idealidir.

Tanım 2.36 [23] Γ-yarı grup M'nin μ bulanık kümesi eğer

i. $\mu(x\alpha y)\geq\mu(x)\wedge\mu(y)\quad(\forall x,y\in M,\alpha\in\Gamma)$

ii. $\mu(x\alpha y\beta z)\geq\mu(x)\wedge\mu(z)\quad(\forall x,y,z\in M,\alpha,\beta\in\Gamma)$

olursa μ'ye Γ-yarı grup M'nin bulanık bi Γ-ideali denir.

Örnek 2.22 [23] Boştan farklı $M=\{0,a,b,c\}$ ve $\Gamma=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ kümelerinin ikili işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

α	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	a	a	a
b	0	0	0	b
c	0	0	0	c

β	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	0	0
b	0	0	b	0
c	0	0	0	c

γ	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	b	0	a
b	0	b	0	c
c	0	0	0	b

M bir Γ-yarı gruptur. Ayrıca, $\mu:M\to[0,1]$ ile

$$\mu(0)=0.6,\ \mu(a)=0.7,\ \mu(b)=0.8,\ \mu(c)=0.9$$

tanımlanan μ bulanık kümesi için M'nin bir bulanık bi Γ-idealidir.

Tanım 2.37 [23] Γ-yarı grup M'nin μ bulanık kümesi eğer

i. $\mu(x\alpha y)\geq\mu(x)\wedge\mu(y)\quad(\forall x,y\in M,\alpha\in\Gamma)$

ii. $\mu(x\alpha y\beta z)\geq\mu(y)\quad(\forall x,y,z\in M,\alpha,\beta\in\Gamma)$

olursa μ'ye Γ-yarı grup M'nin bulanık iç Γ-ideali denir.

Örnek 2.23 [23] M pozitif olmayan tam sayıların kümesi olsun ve Γ'da pozitif olmayan çift tamsayıların kümesi olsun. Bu durumda tam sayıların çarpma işlemi altında M bir Γ-yarı gruptur. Γ-yarı grup M'nin bir μ bulanık kümesi

$$\mu(x)=\begin{cases}1 & \text{eğer } x=0\\ 0.1 & \text{eğer } x=-1,-2\\ 0 & \text{eğer } x=-3,-6\\ 0.4 & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda μ, Γ-yarı grup M'nin bulanık iç Γ-idealidir, fakat bulanık Γ-ideali değildir.

2.6 Esnek Kümeler

Bu bölüm Molodtdov [18], Maji ve arkadaşlarının [19,21] yazmış oldukları makalelerden alınmıştır.

Tanım 2.38 [18] U evrensel küme ve E parametrelerin bir ailesi olmak üzere $A \subset E$ alalım. $P(U)$ ile U'nun kuvvet kümesi gösterilmek üzere

$$F : A \to P(U)$$

ile verilen dönüşüm altında tanımlanan (F, A) ikilisi U üzerinde esnek küme olarak isimlendirilir. U üzerindeki esnek küme, U evrensel kümenin alt kümelerinin parametrize edilmiş bir ailesi olarak da ifade edilebilir. $\forall \varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon)$ değeri (F, A) esnek kümesinin $\varepsilon-$yaklaşımlı elemanlarının sınıfını belirtir.

Örnek 2.24 Kabul edelim ki, U göz önüne alınan şartlar altındaki evlerin kümesi ve E parametrelerin kümesi olsun. Her bir parametre bir kelime ya da cümledir.

$$E = \{\text{pahalı, güzel, ahşap, ucuz, etrafı bahçeli, modern, iyi durumda, kötü durumda}\}$$

olarak alalım. Bu durumda bir esnek küme tanımlamak, pahalı evler, güzel evler ve diğerlerini belirtmek anlamına gelir. (F, E) esnek kümesi, Mr. X'in satın alacağı "evlerin çekiciliği"ni belirtiyor. Sonraki tartışmalarımız için aynı örneği daha detaylı olarak aşağıda göz önüne alalım. Kabul edelimki $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ ile verilen U evreninde 6 ev olsun ve e_1 "pahalı" parametresini, e_2 "güzel" parametresini, e_3 "ahşap" parametresini, e_4 "ucuz" parametresini, e_5 "bahçeli" parametresini göstermek üzere, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ şeklinde verilsin. Kabul edelim ki $F(e_1) = \{h_2, h_4\}$, $F(e_2) = \{h_1, h_3\}$, $F(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$, $F(e_4) = \{h_1, h_3, h_5\}$ ve $F(e_5) = \{h_1\}$ olsun. (F, E) esnek kümesi U kümesinin alt kümelerinin $\{F(e_i), i = 1, 2, 3, ...\}$ parametrize edilmiş bir ailesidir ve bir nesnenin yaklaşık tanımlarının bir koleksiyonunu verir. Göz önüne alınan F tasviri "evler(.)" şeklindedir. Burada nokta (.), bir $e \in E$ parametresi ile doldurulur. Bu yüzden, $F(e_1)$ fonksiyonel değeri $\{h_2, h_4\}$ kümesi olan "pahalı evler" anlamına gelmektedir.

Bu nedenle, biz (F,E) esnek kümesi aşağıdaki gibi yaklaşımların bir koleksiyonu olarak gösterebiliriz;

$$(F,E)=\left\{\begin{matrix}\left(pahalı\, evler,\{h_2,h_4\}\right),\left(güzel\, evler,\{h_1,h_3\}\right), \\ \left(tahta\, evler,\{h_3,h_4,h_5\}\right), \\ \left(ucuz\, evler,\{h_1,h_3,h_5\}\right),\left(bahçeli\, evler,\{h_1\}\right)\end{matrix}\right\}$$

Burada her bir yaklaşımın iki kısmı vardır.

i. Bir tahmini p ; ve
ii. Bir v yaklaşık değer kümesi (veya basitçe v değer kümesi)

Örneğin $pahalı\, evler,\{h_2,h_4\}$ yaklaşımı için biz, aşağıdaki özelliklere sahibiz.

i. Tahmini isim yaklaşık evlerdir.
ii. Yaklaşık değer kümesi veya değer kümesi $\{h_2,h_4\}$'tür.

Bu yüzden (F,E) esnek kümesi;

$$(F,E)=\{(p_1,v_1),(p_2,v_2),...,(p_n,v_n)\}$$

olacak şekilde yaklaşımların koleksiyonu olarak gösterilebilir.

Tanım 2.38 (F,E) esnek kümesinin tüm değer kümelerinin sınıfına, esnek kümenin değer sınıfı denir ve $C_{(F,E)}$ ile gösterilir. Yukarıdaki örnek için, $C_{(F,E)}=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ şeklindedir. Açıkca $C_{(F,E)}\subseteq P(U)$ kapsaması doğrudur [50].

Tanım 2.39 U üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek kümeleri için, eğer

(i) $A\subseteq B$ ve

(ii) $\forall\varepsilon\in A$ için $F(\varepsilon)$ ve $G(\varepsilon)$ özdeş yaklaşımlar ise;

(F,A), (G,B)'nin esnek alt kümesidir diyebiliriz ve $(F,A)\tilde{\subseteq}(G,B)$ ile gösteririz.

Eğer (G,B), (F,A)'nin esnek alt kümesi ise (F,A)'ya (G,B)'nin esnek üst kümesidir denir ve $(F,A)\tilde{\supseteq}(G,B)$ ile gösterilir [50].

Tanım 2.40 Eğer (F,A), (G,B)'nin esnek alt kümesi ve (G,B) de (F,A)'nın esnek kümesi ise (F,A) ve (G,B) esnek kümelerine U üzerinde esnek eşittir denir [50].

Örnek 2.25 $A=\{e_1,e_3,e_5\}\subset E$ ve $B=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}\subset E$ şeklinde olsun. Açıkça $A\subset B$'dir. (F,A) ve (G,B) aynı $U=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6\}$ evrensel kümesi üzerinde $G(e_1)=\{h_2,h_4\}$, $G(e_2)=\{h_1,h_3\}$, $G(e_3)=\{h_3,h_4,h_5\}$, $G(e_5)=\{h_1\}$, $F(e_1)=\{h_2,h_4\}$, $F(e_3)=\{h_3,h_4,h_5\}$ ve $F(e_5)=\{h_1\}$ olacak şekilde iki esnek küme olsun. Bu durumda $(F,A)\tilde{\subseteq}(G,B)$ dir [50].

Tanım 2.41 $E=\{e_1,e_2,e_3,...,e_n\}$ parametrelerin bir kümesi olsun. $\neg E$ ile gösterilen DEĞİL küme $\neg E=\{\neg e_1,\neg e_2,\neg e_3,...,\neg e_n\}$ ile tanımlanır ve $\forall\, i$ için $\neg e_i$=değil e_i ile gösterilir [50].

Önerme 2.4 Aşağıdaki sonuçlar aşikardır.

(i) $\neg(\neg A)=A$

(ii) $\neg(A\cup B)=\neg A\cup\neg B$

(iii) $\neg(A\cap B)=\neg A\cap\neg B$ [50].

Örnek 2.26 Örnek 2.24'de verilen örnek düşünülürse $\neg E$={pahalı değil, güzel değil, ahşap değil, ucuz değil, bahçeli değil, modern değil, iyi durumda değil, kötü durumda değil} şeklinde yazılır [50].

Tanım 2.42 Bir (F,A) esnek kümesinin $(F,A)^c$ ile gösterilen tümleyeni $(F,A)^c=(F^c,\neg A)$ olarak tanımlanır. Burada $F^c:\neg A\to P(U)$, $F^c(\alpha)=U-F(\neg\alpha)$, $\forall\alpha\in\neg A$ ile verilen bir dönüşümdür.

F^c'yi F'nin esnek tümleyen fonksiyonu olarak isimlendirelim. Açıkça, $(F^c)^c$ F ile aynıdır ve $((F,A)^c)^c=(F,A)$ şeklindedir [50].

Örnek 2.27 Örnek 2.24 göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}(F,E)^c = \{&(\text{pahalı olmayan evler}, \{h_1, h_3, h_5, h_6\}),\ (\text{güzel olmayan evler}, \{h_2, h_4, h_5, h_6\}),\\ &(\text{ahşap olmayan evler}, \{h_1, h_2, h_6\}),\ (\text{ucuz olmayan evler}, \{h_2, h_4, h_6\}),\\ &(\text{bahçeli olmayan evler}, \{h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\})\}\end{aligned}$$

şeklinde yazılır [50].

Tanım 2.43 Eğer $\forall \varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon) = \varnothing$ (boş küme) ise U üzerinde bir (F, A) esnek kümesi boş esnek küme olarak isimlendirilir ve $\varnothing$ ile gösterilir [50].

Örnek 2.28 Kabul edelim ki U, göz önüne alınan şartlar altındaki ahşap evlerin kümesi ve A parametrelerin bir kümesi olsun. $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ ile verilen U evreninde beş ev olsun ve $B = \{\text{tuğla,çamur,çelik,taş}\}$ şeklinde verilsin. (F, A) esnek kümesi "evlerin yapımı" olarak tanımlansın. Tuğladan yapılan evler anlamına gelen $F(\text{tuğla})$; çamurdan yapılan evler anlamına gelen $F(\text{çamur})$; çelikten yapılan evler anlamına gelen $F(\text{çelik})$; taştan yapılan evler anlamına gelen $F(\text{taş})$ olarak tanımlanan (F, A) esnek kümesi yaklaşımlarının bir koleksiyonu olarak

$$(F, A) = \left\{\begin{matrix}(\text{Tuğladan yapılan evler}, \varnothing), (\text{çamurdan yapılan evler}, \varnothing), \\ (\text{çelikten yapılan evler}, \varnothing), (\text{taştan yapılan evler}, \varnothing)\end{matrix}\right\}$$

şeklinde yazılır. Burada (F, A) boş esnek kümedir [50].

Tanım 2.44 Eğer $\forall \varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon) = U$ ise, bu durumda U üzerinde (F, A) esnek kümesi mutlak esnek küme olarak isimlendirilir ve $\tilde{A}$ ile gösterilir. Açıkça $\tilde{A}^c = \varnothing$ ve $\varnothing^c = \tilde{A}$ dır [50].

Örnek 2.29 Kabul edelim ki U, göz önüne alınan şartlar altındaki ahşap evlerin kümesi ve B parametrelerin bir kümesi olsun. $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ ile verilen U evreninde beş ev olsun ve $B = \{\text{tuğla değil,çamur değil,çelik değil,taş değil}\}$ şeklinde verilsin. (G, B) esnek kümesi "evlerin yapımı" olarak tanımlansın. Tuğla olmayan evler anlamına gelen $G(\text{tuğla değil})$; çamur olmayan evler anlamına gelen $G(\text{çamur değil})$; çelik olmayan evler anlamına gelen $G(\text{çelik değil})$; taş olmayan evler anlamına gelen $G(\text{taş değil})$ olarak tanımlanan (G,B) esnek kümesi yaklaşımlarının bir koleksiyonunu olarak

$$(G,B)=\left\{\begin{array}{l}(\text{tuğla olmayan evler},\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\}),(\text{çamur olmayan evler},\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\}),\\(\text{çelik olmayan evler},\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\}),(\text{taş olmayan evler},\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\})\end{array}\right\}$$

şeklinde yazılır. Burada (G,B) mutlak esnek kümedir [50].

Tanım 2.45 Eğer (F,A) ve (G,B) iki esnek küme ise, $(F,A)\wedge(G,B)$ ile gösterilen "$(F,A)VE(G,B)$" işlemi $(F,A)\wedge(G,B)=(H,A\times B)$ ile tanımlanır. Burada $H(\alpha,\beta)=F(\alpha)\cap G(\beta),\forall(\alpha,\beta)\in A\times B$ şeklindedir [50].

Örnek 2.30 "Evlerin değeri" ile tanımlanan (F,A) ve "evlerin çekiciliği" olarak tanımlanan (G,B) esnek kümelerini göz önüne alınsın. Kabul edelim ki,

$U=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6,h_7,h_8,h_9,h_{10}\}$,

$$A=\{\text{çok pahalı,pahalı,ucuz}\} \text{ ve } B=\{\text{güzel,bahçeli,ucuz}\}$$

şeklinde verilsin.

$F(\text{çok pahalı})=\{h_2,h_4,h_7,h_8\}$, $F(\text{pahalı})=\{h_1,h_3,h_5\}$, $F(\text{ucuz})=\{h_6,h_9,h_{10}\}$,
$G(\text{güzel})=\{h_2,h_3,h_7\}$, $G(\text{bahçeli})=\{h_5,h_6,h_8\}$, $G(\text{ucuz})=\{h_6,h_9,h_{10}\}$

olsun. Bu durumda $(F,A)\wedge(G,B)=(H,A\times B)$ olduğundan burada

$H(\text{çok pahalı,güzel})=\{h_2,h_7\}$, $H(\text{çok pahalı,bahçeli})=\{h_8\}$, $H(\text{çok pahalı,ucuz})=\varnothing$,
$H(\text{pahalı,güzel})=\{h_3\}$, $H(\text{pahalı,bahçeli})=\{h_5\}$, $H(\text{pahalı,ucuz})=\varnothing$,
$H(\text{ucuz,güzel})=\varnothing$, $H(\text{ucuz,bahçeli})=\{h_6\}$, $H(\text{ucuz,ucuz})=\{h_6,h_9,h_{10}\}$

şeklindedir [50].

Tanım 2.46 (F,A) ve (G,B) esnek kümeler olmak üzere $(F,A)\vee(G,B)$ ile gösterilen "$(F,A)VEYA(G,B)$" işlemi $(F,A)\vee(G,B)=(O,A\times B)$ ile tanımlanır. Burada

$$O(\alpha,\beta)=F(\alpha)\cup G(\beta),\forall(\alpha,\beta)\in A\times B$$

şeklindedir [50].

Örnek 2.31 Örnek 2.30'u düşünelim. Bu durumda $(F,A)\vee(G,B)=(O,A\times B)$ olduğundan,

$O(\text{çok pahalı,güzel})=\{h_2,h_3,h_4,h_7,h_8\}$, $O(\text{çok pahalı,bahçeli})=\{h_2,h_4,h_5,h_6,h_7,h_8\}$,

$O(\text{çok pahalı,ucuz})=\{h_2,h_4,h_6,h_7,h_8,h_9,h_{10}\}$, $O(\text{pahalı,güzel})=\{h_1,h_2,h_3,h_5,h_7\}$,

$O(\text{pahalı,bahçeli})=\{h_1,h_3,h_5,h_6,h_8\}$, $O(\text{pahalı,ucuz})=\{h_1,h_3,h_5,h_6,h_9,h_{10}\}$,

$O(\text{ucuz,güzel})=\{h_2,h_3,h_6,h_7,h_9,h_{10}\}$, $O(\text{ucuz,bahçeli})=\{h_5,h_6,h_8,h_9,h_{10}\}$,

$O(\text{ucuz,ucuz})=\{h_6,h_9,h_{10}\}$

şeklindedir [50].

Önerme 2.4 Aşağıdaki işlemler De Morgan kurallarını sağlar.

(i) $\left((F,A)\vee(G,B)\right)^c=(F,A)^c\wedge(G,B)^c$

(ii) $\left((F,A)\wedge(G,B)\right)^c=(F,A)^c\vee(G,B)^c$ [50].

İspat

(i) Kabul edelimki, $(F,A)\vee(G,B)=(O,A\times B)$ olsun. Bu durumda $\left((F,A)\vee(G,B)\right)^c=(O,A\times B)^c=\left(O^c,\neg(A\times B)\right)$ şeklindedir. Buradan

$$\begin{aligned}(F,A)^c\wedge(G,B)^c&=\left(F^c,\neg A\right)\cap\left(G^c,\neg B\right)\\&=\left(J,\neg A\times\neg B\right)\\&=\left(J,\neg(A\times B)\right)\end{aligned}$$

burada $J(x,y)=F^c(x)\cap G^c(y)$ elde edilebilir. $\left(\neg\alpha,\neg\beta\right)\in\neg(A\times B)$ alalım. Bu takdirde;

$$
\begin{aligned}
O^c\left(\neg\alpha,\neg\beta\right) &= U - O(\alpha,\beta) \\
&= U - \left[F(\alpha)\cup G(\beta)\right] \\
&= \left[U - F(\alpha)\right]\cap\left[U - G(\beta)\right] \\
&= F^c\left(\neg\alpha\right)\cap G^c\left(\neg\beta\right) \\
&= J\left(\neg\alpha,\neg\beta\right)
\end{aligned}
$$

O^c ve J aynıdırlar. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

(ii) Kabul edelim ki, $(F,A)\cap(G,B)=(H,A\times B)$ olsun. Bu durumda,

$\left((F,A)\cap(G,B)\right)^c=(H,A\times B)^c=\left(H^c,\neg(A\times B)\right)$ şeklindedir. Burada

$$
\begin{aligned}
(F,A)^c\cup(G,B)^c &= \left(F^c,\neg A\right)\cup\left(G^c,\neg B\right) \\
&= \left(K,\neg A\times\neg B\right) \\
&= \left(K,\neg(A\times B)\right)
\end{aligned}
$$

burada $K(x,y)=F^c(x)\cup G^c(y)$ elde edilir. Şimdi $\left(\neg\alpha,\neg\beta\right)\in\neg(A\times B)$ alalım. Bu takdirde;

$$
\begin{aligned}
H^c\left(\neg\alpha,\neg\beta\right) &= U - H(\alpha,\beta) \\
&= U - \left[F(\alpha)\cap G(\beta)\right] \\
&= \left[U - F(\alpha)\right]\cup\left[U - G(\beta)\right] \\
&= F^c\left(\neg\alpha\right)\cup G^c\left(\neg\beta\right) \\
&= K\left(\neg\alpha,\neg\beta\right)
\end{aligned}
$$

H^c ve K aynıdırlar. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Tanım 2.47 U üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin birleşimi, (H,C) dir.

Burada; $C=A\cup B$ olmak üzere $\forall e\in C$ için,

$$
H(e)=\begin{cases} F(e) & eğer\ e\in A-B, \\ G(e) & eğer\ e\in B-A, \\ F(e)\cup G(e) & eğer\ e\in A\cap B, \end{cases}
$$

ile tanımlanır ve $(F,A)\tilde{\cup}(G,B)=(H,C)$ olarak ifade edilir [50].

Örnek 2.32 [50] Örnek 2.30'u ele alırsak, $(F,A)\tilde{\cup}(G,B)=(H,C)$ olduğundan burada;

$H(\text{çok pahalı})=\{h_2,h_4,h_7,h_8\}$, $H(\text{pahalı})=\{h_1,h_3,h_5\}$, $H(\text{ucuz})=\{h_2,h_3,h_7\}$,

$H(\text{güzel})=\{h_2,h_3,h_7\}$, $H(\text{bahçeli})=\{h_5,h_6,h_8\}$

şeklindedir.

Tanım 2.48 U üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin kesişimi, (H,C) dir. Burada; $C=A\cap B$ olmak üzere $\forall e\in C$ için, $H(e)=F(e)$ veya $H(e)=G(e)$,

ile tanımlanır. Bu ifade $(F,A)\tilde{\cap}(G,B)=(H,C)$ şeklinde gösterilir [50].

Örnek 2.33 [50] Örnek 2.30'u düşünürsek (F,A) ve (G,B) esnek kümelerin kesişimi (H,C) dir. Burada; $A\cap B=C=\{\text{ucuz}\}$ olduğundan $H(\text{ucuz})=\{h_2,h_3,h_7\}$ şeklindedir.

Aşağıdaki sonuçlar açıktır.

Önerme 2.5

(i) $(F,A)\tilde{\cup}(F,A)=(F,A)$

(ii) $(F,A)\tilde{\cap}(F,A)=(F,A)$

(iii) $(F,A)\tilde{\cup}\varnothing=(F,A)$, burada $\varnothing$ boş esnek kümedir.

(iv) $(F,A)\tilde{\cap}\varnothing=\varnothing$

(v) $(F,A)\tilde{\cup}\tilde{A}=\tilde{A}$, burada $\tilde{A}$ mutlak esnek kümedir.

(vi) $(F,A)\tilde{\cap}\tilde{A}=(F,A)$ [50].

Önerme 2.6

(i) $\left((F,A)\tilde{\cup}(G,B)\right)^c=(F,A)^c\tilde{\cap}(G,B)^c$

(ii) $\left((F,A)\tilde{\cap}(G,B)\right)^c=(F,A)^c\tilde{\cup}(G,B)^c$ [50].

İspat.

(i) Kabul edelimki $(F,A)\tilde{\cup}(G,B)=(H,C)$ olsun. Burada;

$$H(\alpha)=\begin{cases} F(\alpha) & eğer\ \alpha\in A-B, \\ G(\alpha) & eğer\ \alpha\in B-A, \\ F(\alpha)\cup G(\alpha) & eğer\ \alpha\in A\cap B, \end{cases}$$

şeklindedir. Bu takdirde, $\left((F,A)\tilde{\cup}(G,B)\right)^c=(H,A\cup B)^c=\left(H^c,\neg A\cup\neg B\right)$ şeklindedir.

$H^c\left(\neg\alpha\right)=U-H(\alpha),\ \forall\neg\alpha\in\neg A\cup\neg B$ alalım. Bu takdirde,

$$H^c\left(\neg\alpha\right)=\begin{cases} F^c\left(\neg\alpha\right) & eğer\ \neg\alpha\in\neg A-\neg B, \\ G^c\left(\neg\alpha\right) & eğer\ \neg\alpha\in\neg B-\neg A, \\ F^c\left(\neg\alpha\right)\cup G^c\left(\neg\alpha\right) & eğer\ \neg\alpha\in\neg A\cap\neg B, \end{cases}$$

şeklindedir. Tekrar, $(F,A)^c\,\tilde{\cup}(G,B)^c=\left(F^c,\neg A\right)\tilde{\cup}\left(G^c,\neg B\right)=\left(K,\neg A\cup\neg B\right)$ dir.

Burada,

$$K\left(\neg\alpha\right)=\begin{cases} F^c\left(\neg\alpha\right) & eğer\ \neg\alpha\in\neg A-\neg B, \\ G^c\left(\neg\alpha\right) & eğer\ \neg\alpha\in\neg B-\neg A, \\ F^c\left(\neg\alpha\right)\cup G^c\left(\neg\alpha\right) & eğer\ \neg\alpha\in\neg A\cap\neg B, \end{cases}$$

H^c ve K aynıdır. Bu durumda ispat tamamlanır.

(ii) Kabul edelimki $\left((F,A)\tilde{\cap}(G,B)\right)^c$ olsun. Bu takdirde,

$$\left((F,A)\tilde{\cap}(G,B)\right)^c=\left(H^c,\neg A\cap\neg B\right)$$

dir. Şimdi $(F,A)^c\,\tilde{\cap}(G,B)^c=\left(F^c,\neg A\right)\tilde{\cap}\left(G^c,\neg B\right)=\left(K,\neg A\cap\neg B\right)$ alalım. Burada,

$\forall\neg\alpha\in\neg A\cap\neg B$ için

$$K\left(\neg\alpha\right)=F^c\left(\neg\alpha\right)\text{ veya }K\left(\neg\alpha\right)=G^c\left(\neg\alpha\right)$$

$$K\left(\neg\alpha\right)=F(\alpha)\text{ veya }K\left(\neg\alpha\right)=G(\alpha)$$

$$K\left(\neg\alpha\right)=H(\alpha),\text{ burada }\alpha\in A\cap B$$

$$K\left(\neg\alpha\right)=H^c\left(\neg\alpha\right)$$

K ve H^c aynı fonksiyonlardır. Bu yüzden ispat tamamlanmıştır.

Önerme 2.7 Eğer U üzerinde $(F,A),(G,B)$ ve (H,C) esnek kümeler ise, bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) $(F,A)\tilde{\cup}\left((G,B)\tilde{\cup}(H,C)\right)=\left((F,A)\tilde{\cup}(G,B)\right)\tilde{\cup}(H,C)$

(ii) $(F,A)\tilde{\cap}\left((G,B)\tilde{\cap}(H,C)\right)=\left((F,A)\tilde{\cap}(G,B)\right)\tilde{\cap}(H,C)$

(iii) $(F,A)\tilde{\cap}\left((G,B)\tilde{\cup}(H,C)\right)=\left((F,A)\tilde{\cap}(G,B)\right)\tilde{\cup}\left((F,A)\tilde{\cap}(H,C)\right)$

(iv) $(F,A)\tilde{\cup}\left((G,B)\tilde{\cap}(H,C)\right)=\left((F,A)\tilde{\cup}(G,B)\right)\tilde{\cap}\left((F,A)\tilde{\cup}(H,C)\right)$ [50].

Önerme 2.8 U üzerinde $(F,A),(G,B)$ ve (H,C) esnek kümeler olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) $(F,A)\tilde{\vee}\left((G,B)\tilde{\vee}(H,C)\right)=\left((F,A)\tilde{\vee}(G,B)\right)\tilde{\vee}(H,C)$

(ii) $(F,A)\tilde{\wedge}\left((G,B)\tilde{\wedge}(H,C)\right)=\left((F,A)\tilde{\wedge}(G,B)\right)\tilde{\wedge}(H,C)$

(iii) $(F,A)\tilde{\wedge}\left((G,B)\tilde{\vee}(H,C)\right)=\left((F,A)\tilde{\wedge}(G,B)\right)\tilde{\vee}\left((F,A)\tilde{\wedge}(H,C)\right)$

(iv) $(F,A)\tilde{\vee}\left((G,B)\tilde{\wedge}(H,C)\right)=\left((F,A)\tilde{\vee}(G,B)\right)\tilde{\wedge}\left((F,A)\tilde{\vee}(H,C)\right)$ [50].

2.7 Esnek Yarı Gruplar

Bu bölüm M.Shabir ve M.I.Ali'nin yazmış oldukları "Soft ideals and Generalized Fuzzy ideals in Semigroups" [23] adlı makalesinden alınmıştır.

Tanım 2.49 [23] Yarı grup S üzerinde (F,A) esnek küme olsun. $\forall a\in A$ için $\varnothing\neq F(a)$, S'nin bir alt yarı grubu oluyorsa (F,A)'ya S üzerinde esnek yarı grup denir.

Eğer yarı grup S üzerinde (F,A) esnek yarı grup ise, $(F,A)\circ(F,A)\tilde{\subseteq}(F,A)$ sağlanır.

Tanım 2.50 [23] Yarı grup S üzerinde (F,A) esnek küme olsun. $\forall a\in A$ için $\varnothing\neq F(a)$, S'nin bir (sol, sağ) ideali oluyorsa (F,A)'ya S üzerinde esnek (sol,sağ) ideal denir.

Örnek 2.34 [23] Aşağıda verien tabloyla birlikte $S=\{a,b,c,d\}$ bir yarı grup olsun.

.	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	b	a
d	a	a	b	b

S parametrelerin bir ailesi, $F(a)=\{a\}$, $F(b)=\{a,b\}$, $F(c)=\{a,b,c\}$ ve $F(d)=\{a,b,d\}$ olmak üzere $\forall x \in S$ için $F(x)$, S'nin alt yarı grubu olduğundan S üzerinde (F,S) bir esnek yarı gruptur.

Örnek 2.35 [23] Aşağıda verilen Cayley tablosuyla $S=\{1,a,b,f\}$ yarı grup olsun.

.	1	a	b	f
1	1	a	b	f
a	a	e	b	f
b	b	b	f	b
f	f	f	b	f

$A=\{1,a\}$ ve $B=\{b,f\}$ olmak üzere $F(1)=S, F(a)=\{b,f\}$, $G(b)=G(f)=\{b,f\}$ olarak alındığında S üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek idealdir.

2.8 Esnek $\Gamma-$ yarı gruplar

Bu bölüm T.Changphas ve B.Thongham'ın yazmış oldukları "On soft Γ-semigroups" [25] adlı makalesinden alınmıştır.

Tanım 2.51 [25] S üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin $\Gamma-$kısıtlı çarpımı $(F,A)\overline{\Gamma}(G,B)$ olarak gösterilir ve bir esnek küme olarak

$$(K,D)=(F,A)\overline{\Gamma}(G,B)$$

şeklinde tanımlanır, burada $D=A\cap B\neq\varnothing$ ve $\forall d\in D$ için $K:D\to P(S)$ olmak üzere

$$K(d)=F(d)\Gamma G(d)$$

olarak ifade edilir.

Tanım 2.52 [25] Eğer $(F,A)\overline{\Gamma}(F,A)\subseteq(F,A)$ oluyorsa, S üzerinde bir (F,A) esnek kümesi S üzerinde (F,A) esnek $\Gamma-$yarı grup olarak adlandırılır.

Örnek 2.36 [25] $M=\{-i,0,i\}$ ve $\Gamma=A=\{-i,i\}$ olarak alalım ve M bir $\Gamma-$yarı gruptur. $F:A\to P(M)$ ile $F(i)=F=(-i)=A$ tanımlansın. Bu durumda (F,A), M üzerinde bir esnek $\Gamma-$yarı gruptur.

Örnek 2.37 [25] M ve Γ pozitif tamsayılar kümesi üzerinde bütün 3×3 tipindeki diagonal matrislerin kümesi olsunlar. Bu durumda M matris çarpımı altında bir $\Gamma-$yarı gruptur. $\mathbb{N}$ bütün pozitif tamsayıların kümesi olsun. $F:\mathbb{N}\to P(M)$ ile $F(n)=\{A\in M:\det A\geq n\}$ şeklinde tanımlansın. Böylece $(F,\mathbb{N})$, M üzerinde bir esnek $\Gamma-$yarı grup olarak elde edilir.

Örnek 2.38 [25] $n\geq4$ olmak üzere $n\in\mathbb{N}$ için, $\mathbb{Z}_{2n}=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},...,\overline{2n-1}\}$ ve $\Gamma=\{\overline{0},\overline{n}\}$ olarak düşünelim. $\mathbb{Z}_{2n}$'in kolaylıkla bir $\Gamma-$yarı grup olduğu görülür. $A=\{\overline{4a}:0<a<n\}$ ve $B=\{\overline{2b}:0<b<n\}$ alalım. $F:A\to P(\mathbb{Z}_{2n})$ ile $F(\overline{x})=\{\overline{0},\overline{2x}\}$ tarafından ve $G:B\to P(\mathbb{Z}_{2n})$ ile $G(\overline{x})=\{\overline{0},\overline{2x},\overline{4x}\}$ tarafından tanımlansın. Bu durumda $\forall\overline{a}\in A,\overline{b}\in B$ için

$$F(\overline{a})\Gamma F(\overline{a})=\{\overline{0}\}\subseteq F(\overline{a})$$

ve

$$G(\overline{b})\Gamma G(\overline{b})=\{\overline{0}\}\subseteq G(\overline{b})$$

elde edilir. Bu durumda (F,A) ve (G,B), $\mathbb{Z}_{2n}$ üzerinde esnek $\Gamma-$yarı gruplardır.

Teorem 2.9 [25] S üzerinde bir (F,A) esnek kümesinin S üzerinde bir esnek $\Gamma-$yarı grup olabilmesi için gerek ve yeter koşul $F(a)\neq\varnothing$ olmak üzere $\forall a\in A$ için $F(a)$, S'nin bir $\Gamma-$alt yarı grubudur.

İspat. S üzerinde (F,A) esnek kümesinin S üzerinde bir esnek $\Gamma-$yarı grup olduğunu kabul edelim. $F(a)\neq\varnothing$ olmak üzere $a\in A$ olsun. Bu durumda $\forall a\in A$ için

$$(F,A)\overline{\Gamma}(F,A)=(K,A\cap A) \quad \text{ve} \quad K(a)=F(a)\Gamma F(a)$$

sağlanır. $K\subseteq F$ olduğundan $K(a)\subseteq F(a)$'dır. Dolayısıyla, $F(a)\Gamma F(a)\subseteq F(a)$ bulunur. Böylece $F(a)$, S'nin bir $\Gamma-$alt yarı grubudur.

Tersine, $F(a)\neq\varnothing$ olmak üzere $\forall a\in A$ için $F(a)$, S'nin bir $\Gamma-$alt yarı grubu olduğunu varsayalım. $\forall a\in A$ için

$$(F,A)\overline{\Gamma}(F,A)=(K,A\cap A) \quad \text{ve} \quad K(a)=F(a)\Gamma F(a)$$

bulunur. Varsayımımızdan $K(a)\subseteq F(a)$ elde edilir. Böylece $(K,A)\subseteq(F,A)$ bulunur. Bundan dolayı S üzerinde bir (F,A) esnek kümesi S üzerinde bir esnek $\Gamma-$yarı gruptur.

S üzerinde bir (S,E) esnek kümesi olmak üzere $\forall e\in S$ için $S(e)=S$ ile tanımlanan bu esnek küme S üzerinde bir tam (absolute) esnek küme olarak adlandırılır.

Tanım 2.53 [25] S üzerinde (F,A) esnek kümesi eğer

$$(S,E)\overline{\Gamma}(F,A)\subseteq(F,A) \ \left((F,A)\overline{\Gamma}(S,E)\subseteq(F,A)\right)$$

oluyorsa, S üzerinde bir esnek $l-$idealistik ($r-$idealistik) olarak adlandırılır.

Örnek 2.39 [25] $\mathbb{Z}_8=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},...,\bar{7}\}$'yi düşünelim. $\Gamma=\{\bar{1},\bar{4}\}$ olmak üzere, $\mathbb{Z}_8$ bir $\Gamma-$yarı gruptur. $C=\{\bar{0},\bar{4}\}$ alalım. $\forall c\in C$ için $H:C\to P(\mathbb{Z}_8)$ ile $H(c)=C$ olarak tanımlansın. Bu durumda (H,C), $\mathbb{Z}_8$ üzerinde bir esnek $l-$idealistiktir.

Teorem 2.10 [25] S üzerinde bir (F,A) esnek kümesinin S üzerinde bir esnek $l-$idealistik ($r-$idealistik) olabilmesi için gerek ve yeter koşul $F(a)\neq\varnothing$ olmak üzere $\forall a\in A$ için $F(a)$, S'nin bir sol(sağ) idealidir.

İspat. S üzerinde bir (F,A) esnek kümesini S üzerinde bir esnek $l-$idealistik olduğunu kabul edelim. $F(a)\neq\varnothing$ olmak üzere $\forall a\in A$ için $F(a)$'nın S'nin bir sol (sağ) ideali olduğunu göstereceğiz. $\forall a\in A$ için

$$(S,E)\overline{\Gamma}(F,A)=(K,E\cap A) \text{ ve } K(a)=S(a)\Gamma F(a)$$

sağlanır. $K\subseteq F$ olduğundan $K(a)\subseteq F(a)$'dır. $S\Gamma F(a)=S(a)\Gamma F(a)\subseteq F(a)$ olduğundan dolayı, $F(a)$, S'nin bir sol idealidir.

Tersine, $F(a)\neq\varnothing$ olmak üzere $\forall a\in A$ için $F(a)$'nın S'nin bir sol ideali olduğunu varsayalım. S üzerinde bir (F,A) esnek kümesinin S üzerinde bir esnek $l-$idealistik olduğunu göstereceğiz. $\forall a\in A$ için

$$(S,E)\overline{\Gamma}(F,A)=(K,E\cap A) \text{ ve } K(a)=S(a)\Gamma F(a)$$

sağlanır. Varsayımımızdan

$$K(a)=S(a)\Gamma F(a)=S\Gamma F(a)\subseteq F(a)$$

elde edilir. Böylece $(K,A)\subseteq(F,A)$ bulunur. Bundan dolayı S üzerinde bir (F,A) esnek kümesi S üzerinde bir esnek $l-$idealistiktir.

Benzer şekilde S üzerinde bir (F,A) esnek kümesini S üzerinde bir esnek $r-$ idealistik olabilmesi için gerek ve yeter koşul $F(a)\neq\varnothing$ olmak üzere $\forall a\in A$ için $F(a)$'nın S'nin bir sağ ideali olduğu kolaylıkla gösterilir.

Tanım 2.54 (F,A) ve (G,B) esnek kümeleri S üzerinde esnek $\Gamma-$yarı grup olsun.

i. (F,A) ve (G,B)'nin genişletilmiş (extension) kesişimi

$(F,A)\tilde{\cap}_E(G,B)=(H,C)$ ile gösterilir ve $C=A\cup B$ olmak üzere $\forall e\in C$ için,

$$H(e)=\begin{cases} F(e) & \text{eğer } e\in A\setminus B \\ G(e) & \text{eğer } e\in B\setminus A \\ F(e)\cap G(e) & \text{eğer } e\in A\cap B \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

ii. (F,A) ve (G,B)'nin kısıtlanmış (restricted) kesişimi

$(F,A)\tilde{\cap}_R(G,B)=(H,C)$ ile gösterilir ve burada $C=A\cap B$ olmak üzere $\forall e\in C$ için $H(e)=F(e)\cap G(e)$ 'dir.

Önerme 2.9 [25] S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki esnek $\Gamma-$yarı grup olsun. Eğer $A\cap B\neq\varnothing$ ise, bu durumda S üzerinde $(F,A)\tilde{\cap}_R(G,B)$ esnek $\Gamma-$yarı gruptur.

İspat. $A\cap B\neq\varnothing$ olduğunu varsayalım. $(F,A)\tilde{\cap}_R(G,B)=(H,C)$ alalım ve burada $C=A\cap B\neq\varnothing$ ve $\forall c\in C$ için $H(c)=F(c)\cap G(c)$ 'dir. Burada (H,C)'nin bir esnek $\Gamma-$yarı grup olduğunu göstermek için, $(H,C)\overline{\Gamma}(H,C)\subseteq(H,C)$ olduğunu göstermemiz gereklidir. $(K,D)=(H,C)\overline{\Gamma}(H,C)$ alalım, burada $D=C\cap C$ ve $\forall d\in D$ için $K(d)=H(d)\Gamma H(d)$ olur. $d\in D$ için,

$$K(d)=H(d)\Gamma H(d)=\big(F(d)\cap G(d)\big)\Gamma\big(F(d)\cap G(d)\big)\subseteq F(d)\cap G(d)=H(d)$$

elde edilir. Bu durumda $K\subseteq H$'dır. Bundan dolayı S üzerinde $(F,A)\tilde{\cap}_R(G,B)$ esnek $\Gamma-$yarı gruptur.

Tanım 2.55 (F,A) ve (G,B) esnek kümeleri S üzerinde esnek $\Gamma-$yarı grup olsun.

i. (F,A) ve (G,B)'nin genişletilmiş (extension) birleşimi

$(F,A)\tilde{\cup}_E(G,B)=(H,C)$ ile gösterilir ve $C=A\cup B$ olmak üzere $\forall e\in C$ için,

$$H(e)=\begin{cases} F(e) & \text{eğer } e\in A\setminus B \\ G(e) & \text{eğer } e\in B\setminus A \\ F(e)\cup G(e) & \text{eğer } e\in A\cap B \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

ii. (F,A) ve (G,B)'nin kısıtlanmış (restricted) birleşimi $(F,A)\tilde{\cup}_R(G,B)=(H,C)$ ile gösterilir ve burada $C=A\cap B$ olmak üzere $\forall e\in C$ için $H(e)=F(e)\cup G(e)$ 'dir.

Önerme 2.10 [25] S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki esnek $\Gamma-$yarı grup olsun. Eğer $A\cap B\neq\varnothing$ ise, bu durumda S üzerinde $(F,A)\tilde{\cup}_E(G,B)$ esnek $\Gamma-$yarı gruptur.

İspat. $A \cap B \neq \varnothing$ olduğunu varsayalım. $(H,C)=(F,A)\tilde{\cup}_E(G,B)$ alalım, burada $C=A\cup B$ olmak üzere $\forall c\in C$ için

$$H(c)=\begin{cases} F(c) & \text{eğer}\, c\in A\setminus B \\ G(c) & \text{eğer}\, c\in B\setminus A \\ F(c)\cup G(c) & \text{eğer}\, c\in A\cap B \end{cases}$$

şeklindedir. (H,C)'nin bir esnek $\Gamma-$yarı grup olduğunu göstermek için,

$$(H,C)\overline{\Gamma}(H,C)\subseteq(H,C)$$

olduğunu göstermeliyiz. $(K,D)=(H,C)\overline{\Gamma}(H,C)$ alalım, burada $D=C\cap C$ ve $\forall d\in D$ için

$$K(d)=H(d)\Gamma H(d)$$

olur. $d\in D$ için,

$$K(d)=H(d)\Gamma H(d)\subseteq H(c)=\begin{cases} F(d) & \text{eğer}\, d\in A\setminus B \\ G(d) & \text{eğer}\, d\in B\setminus A \\ F(d)\cup G(d) & \text{eğer}\, d\in A\cap B \end{cases}$$

elde edilir. Bu durumda $K(d)\subseteq H(d)$ bulunur. Böylece S üzerinde $(F,A)\tilde{\cup}_E(G,B)$ esnek $\Gamma-$yarı grup olduğu görülür.

Tanım 2.56 (F,A) ve (G,B) esnek kümeleri S üzerinde esnek $\Gamma-$yarı grup olsun. (F,A) ve (G,B)'nin AND operatörüyle işlemi "$(F,A)AND(G,B)$" S üzerinde $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)=(H,A\times B)$ burada $\forall(a,b)\in A\times B$ için $H(a,b)=F(a)\cap G(b)$ olarak tanımlanır.

Önerme 2.11 [25] S üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek $\Gamma-$yarı grup olsun. Bu durumda $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)$ de S üzerinde bir esnek $\Gamma-$yarı gruptur.

İspat. $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)=(H,A\times B)$ alalım, burada $\forall(a,b)\in A\times B$ için $H(a,b)=F(a)\cap G(b)$'dir. S üzerinde $(H,A\times B)$'yi esnek $\Gamma-$yarı grup olduğunu göstermek amacıyla (K,D) olarak $(K,D)=(H,A\times B)\overline{\Gamma}(H,A\times B)$ alalım, burada

$D=(A\times B)\cap(A\times B)$ ve $\forall(a,b)\in D$ için $K(a,b)=H(a,b)\Gamma H(a,b)$ olur ve

$K(a,b)=H(a,b)\Gamma H(a,b)=(F(a)\cap G(b))\Gamma(F(a)\cap G(b))\subseteq F(a)\cap G(b)=H(a,b)$

sağlanır. Bu durumda $K\subseteq H$ elde edilir. Bundan dolayı S üzerinde $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)$ esnek $\Gamma-$yarı gruptur.

Tanım 2.57 [25] $\Gamma-$yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek iki küme olsun. $(F,A)\Gamma^{*}(G,B)$ olarak $(F,A)\Gamma^{*}(G,B)=(K,A\times B)$ bir esnek kümedir ve burada $K(a,b)=F(a)\Gamma G(b)$'dir.

Önerme 2.12 [25] S üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek iki $\Gamma-$yarı grup olsun. Eğer S değişmeli ise, bu durumda S üzerinde $(F,A)\Gamma^{*}(G,B)$ esnek $\Gamma-$yarı gruptur.

İspat. $(F,A)\Gamma^{*}(G,B)=(H,A\times B)$ alalım, burada $\forall(a,b)\in A\times B$ için $H(a,b)=F(a)\Gamma G(b)$'dir. S üzerinde $(H,A\times B)$ bir esnek $\Gamma-$yarı grup olduğunu göstermek için,

$$(K,D)=(H,A\times B)\overline{\Gamma}(H,A\times B)$$

alalım, burada $D=(A\times B)\cap(A\times B)$ ve $\forall(a,b)\in D$ için $K(a,b)=H(a,b)\Gamma H(a,b)$ olur. $(a,b)\in D$ için S değişmeli olduğundan dolayı

$K(a,b)=H(a,b)\Gamma H(a,b)=(F(a)\Gamma G(b))\Gamma(F(a)\Gamma G(b))\subseteq F(a)\Gamma G(b)=H(a,b)$

elde edilir. Bu durumda $K\subseteq H$ olur. Dolayısıyla S üzerinde $(F,A)\Gamma^{*}(G,B)$ esnek $\Gamma-$yarı gruptur.

Önerme 2.13 Eğer S üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek $l-$idealistik ($r-$idealistik) ise, bu durumda S üzerinde $(F,A)\tilde{\cap}_R(G,B)$ esnek $l-$idealistiktir ($r-$idealistik).

İspat. S üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek $l-$idealistik olduğunu kabul edelim. $C=A\cap B$ ve $\forall c\in C$ için $H(c)=F(c)\cap G(c)$ olmak üzere $(H,C)=(F,A)\tilde{\cap}_R(G,B)$ olarak alalım. S üzerinde (H,C) esnek $l-$idealistik olduğunu göstermek için,

$(S,E)\bar{\Gamma}(H,C)\subseteq(H,C)$ olduğunu göstermek gereklidir. $D=S\cap C$ ve $\forall d\in D$ için $K(d)=S(d)\Gamma H(d)$ olmak üzere $(K,D)=(S,E)\bar{\Gamma}(H,C)$ olarak alalım. $d\in D$ için

$$\begin{aligned}K(d)&=S(d)\Gamma H(d)=S(d)\Gamma\big(F(d)\cap G(d)\big)\\&\subseteq\big(S(d)\Gamma F(d)\big)\cap\big(S(d)\Gamma G(d)\big)\\&\subseteq F(d)\cap G(d)=H(d)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $K(d)\subseteq H(d)$ olduğundan $K\subseteq H$ olur. Dolayısıyla S üzerinde $(F,A)\tilde{\cap}_R(G,B)$ esnek $l-$idealistiktir. Benzer şekilde eğer S üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek $r-$idealistik ise, bu durumda S üzerinde $(F,A)\tilde{\cap}_R(G,B)$ esnek $r-$idealistik olduğu kolayca gösterilebilir.

Önerme 2.14 Eğer S üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek $l-$idealistik ($r-$idealistik) ise, bu durumda S üzerinde $(F,A)\tilde{\cup}_E(G,B)$ esnek $l-$idealistiktir ($r-$idealistik).

Önerme 2.15 Eğer S üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek $l-$idealistik ($r-$idealistik) ise, bu durumda S üzerinde $(F,A)\tilde{\vee}(G,B)$ esnek $l-$idealistiktir ($r-$idealistik).

Önerme 2.16 Eğer S üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek $l-$idealistik ($r-$idealistik) ise, bu durumda S üzerinde $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)$ esnek $l-$idealistiktir ($r-$idealistik).

Önerme 2.14, 2.15 ve 2.16'nın ispatları benzer biçimde operatörlerin tanım işlemlerini kullanarak kolay bir şekilde gösterilebilir.

Tanım 2.58 [25] $(G,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ olmak üzere S üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek küme olsunlar. Bu durumda $\forall b\in B$ için $F(b)$'nin bir $\Gamma-$alt yarı grubu $G(b)$ ise, (G,B)de (F,A)'nın esnek $\Gamma-$alt yarı grubu olarak isimlendirilir.

Tanım 2.59 [25] $(G,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ olmak üzere S üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek küme olsunlar. Bu durumda $\forall b\in B$ için $G(b)$ de $F(b)$'nin bir ideali ise, (G,B) de (F,A)'nın esnek ideali olarak adlandırılır.

Örnek 2.40 $M=[0,1]$ ve $\Gamma=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$ alalım. $n\in\mathbb{N}$ için $A_n=\left[0,\frac{1}{n}\right]$ ve $B_n=\left[0,\frac{1}{2n}\right]$ olsun. $\forall x\in A_n$ için $F_n:A_n\to P(M)$ ile $F_n(x)=[0,x]$ ve $\forall y\in B_n$ için $G_n:B_n\to P(M)$ ile $G_n(y)=\left[0,\frac{y}{2}\right]$ tanımlayalım. $m\le n$ olmak üzere $m,n\in\mathbb{N}$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır [25].

i. M üzerinde (F_n,A_n) ve (G_n,B_n) esnek $\Gamma-$yarı gruptur.

ii. (G_n,B_n), (F_m,A_m)'nin esnek $\Gamma-$alt yarı grubudur.

iii. (G_n,B_n), (F_m,A_m)'nin esnek idealidir.

iv. M üzerinde (F_n,A_n) ve (G_n,B_n) esnek $l-$idealistiktirler.

Örnek 2.41 $\Gamma=\{\overline{1},\overline{4}\}$ olmak üzere $\mathbb{Z}_8=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},...,\overline{7}\}$ bir $\Gamma-$yarı gruptur. $A=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{4}\}$ ve $B=\{\overline{0},\overline{1},\overline{4}\}$ olsun. $\forall a\in A$ için $F:A\to P(\mathbb{Z}_8)$ ile $F(a)=A$ ve $\forall b\in B$ için $G:B\to P(\mathbb{Z}_8)$ ile $G(b)=B$ tanımlansın. Bu durumda $\mathbb{Z}_8$ üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek $\Gamma-$yarı grupturlar. Ayrıca (G,B), (F,A)'nın bir esnek $\Gamma-$alt yarı grubudur. Öte yandan (G,B), (F,A)'nın esnek ideali değildir, çünkü $\overline{2}=\overline{1}\,\overline{1}\overline{2}\in G(\overline{1})\Gamma F(\overline{1})$ ve $\overline{2}\notin B=G(\overline{1}), G(\overline{1})\Gamma F(\overline{1})\not\subseteq G(\overline{1})$'dir [25] .

Teorem 2.11 [25] S üzerinde (F,A) esnek $\Gamma-$yarı grup olsun. (F,A)'nın esnek $\Gamma-$alt yarı gruplarının boştan farklı bir ailesi olarak $\{(H_i,B_i)|i\in I\}$ alalım.

i. $\tilde{\cap}_R(H_i,B_i)$**,** (F,A)'nın esnek $\Gamma-$alt yarı grubudur.

ii. $\tilde{\wedge}_{i\in I}(H_i,B_i)$**,** (F,A)'nın esnek $\Gamma-$altyarı grubudur.

iii. $i\in I$ için B_i ikişerli ayrık ise; $\tilde{\cup}_E(H_i,B_i)$ (F,A)'nın bir esnek $\Gamma-$alt yarı grubudur

Teorem 2.12 [25] S üzerinde (F,A) esnek $\Gamma-$yarı grup olsun. (F,A)'nın esnek ideallerinin boştan farklı bir ailesi olarak $\{(H_i,B_i)|i\in I\}$ alalım.

i. $\tilde{\cap}_R(H_i,B_i)$**;** (F,A)'nın esnek idealidir.

ii. $\tilde{\wedge}_{i\in I}(H_i,B_i)$**;** (F,A)'nın esnek idealidir.

iii. $\tilde{\cup}_E (H_i, B_i)$ **;** (F,A)'nın esnek idealidir.

iv. $\tilde{\vee}_{i\in I} (H_i, B_i)$**;** (F,A)'nın esnek idealidir.

Teorem 2.13 [25] Eğer (F,A)'nın bir esnek ideali (G,B) ise, bu durumda (G,B) de (F,A)'nın esnek $\Gamma-$alt yarı grubudur.

İspat. (F,A)'nın bir esnek ideali (G,B) olsun. Bu durumda $\forall b\in B$ için $G(b)\subseteq F(b)$ ve $G(b)\trianglelefteq F(b)$ (ideal) sağlanır. Dolayısıyla $\forall b\in B$ için

$$G(b)\Gamma G(b)\subseteq G(b)\Gamma F(b)\subseteq F(b)$$

elde edilir. Böylece (G,B), (F,A)'nın esnek $\Gamma-$alt yarı grubu olduğu görülür.

2.9 Bulanık Esnek Yarı Gruplar

Bu bölüm Cheng-Fu Yang'ın 2011 yılında yazmış olduğu "Fuzzy soft semigroups and fuzzy soft ideals" [31] adlı makalesinden alınmıştır.

Tanım 2.60 [31] S üzerinde (F,A) bulanık esnek küme olsun. (F,A)'nın bulanık esnek yarı grup (fuzzy soft semigrup) olarak adlandırılması için gerek ve yeter koşul $\forall\varepsilon\in A$ için S üzerinde $F(\varepsilon)$ bulanık alt yarı gruptur.

Tanım 2.61 [31] S üzerinde (F,A) bulanık esnek küme olsun. (F,A)'nın bulanık esnek sol (sağ) ideal olarak adlandırılması için gerek ve yeter koşul $\forall\varepsilon\in A$ için S üzerinde $F(\varepsilon)$ bulanık sol (sağ) idealdir.

Örnek 2.42 [31] $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ alalım ve verilen çarpma tablosu altında

.	x	y	z
x	x	z	z
y	z	y	z
z	z	z	z

$S=\{x,y,z\}$ bir yarı grup olsun. S üzerinde bulanık esnek küme olarak $(F,A)=\{e_1=\{x_{0.1},y_{0.4},z_{0.8}\}\}$ seçelim. $F(e_1)$'in kolaylıkla S üzerinde bulanık sol ideal olduğu görülebilir. Böylece S üzerinde (F,A) bir bulanık esnek sol idealdir.

Tanım 2.62 [31] S üzerinde (F,A) bulanık esnek küme olsun. (F,A) bulanık esnek ideal olarak adlandırılması için gerek ve yeter koşul S üzerinde (F,A)'nın hem bulanık esnek sol ideal hem de bulanık esnek sağ ideal olmasıdır.

Örnek 2.43 [31] $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ alalım ve Örnek 2.42'de verilen aynı çarpma tablosu altında $S=\{x,y,z\}$ bir yarı grup olsun. S üzerinde bulanık esnek küme olarak

$$(F,A)=\{e_1=\{x_{0.1},y_{0.3},z_{0.5}\},e_3=\{x_{0.2},y_{0.4},z_{0.8}\}\}$$

seçelim. $F(e_1)$ ve $F(e_3)$'ün kolaylıkla S üzerinde hem bulanık esnek sol ideal hem de bulanık esnek sağ ideal olduğu görülür. Böylece (F,A), S üzerinde bulanık esnek idealdir.

Teorem 2.14 [31] S üzerinde (F,A) bulanık esnek küme olsun. (F,A)'nın bulanık esnek yarı grup olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\forall\alpha\in[0,1]$ için $(F,A)^{\alpha}$'nın S üzerinde bir esnek yarı grup olmasıdır.

İspat. (F,A) bir bulanık esnek yarı grup olduğunu kabul edelim. $\forall\alpha\in[0,1]$ için $\varepsilon\in A$ ve $x_1,x_2\in F^{\alpha}(\varepsilon)$ alalım, bu durumda $F(\varepsilon)(x_1)\geq\alpha$ ve $F(\varepsilon)(x_2)\geq\alpha$ elde edilir. (F,A) bulanık esnek yarı grup olduğundan tanım gereği S üzerinde $F(\varepsilon)$ bir bulanık alt yarı grup olur, böylece

$$F(\varepsilon)(x_1.x_2)\geq\min\{F(\varepsilon)(x_1),F(\varepsilon)(x_2)\}\geq\alpha$$

bulunur. Bu da $x_1.x_2\in F^{\alpha}(\varepsilon)$ olduğunu ifade eder, yani $F^{\alpha}(\varepsilon)$'nin bir alt yarı grup olduğu görülür. Dolayısıyla $\alpha-$seviye kümesinin tanımı gereğince $\forall\alpha\in[0,1]$ için S üzerinde $(F,A)^{\alpha}$ esnek yarı gruptur.

Tersine, $\forall\alpha\in[0,1]$ için $(F,A)^{\alpha}$'nın S üzerinde bir esnek yarı grup olduğunu varsayalım. (F,A)'nın bulanık esnek yarı grup olduğunu göstericez. $\forall\varepsilon\in A$ ve $x_1,x_2\in S$ için $\alpha=\min\{F(\varepsilon)(x_1),F(\varepsilon)(x_2)\}$ alalım, bu durumda $x_1,x_2\in F^{\alpha}(\varepsilon)$ elde edilir. $(F,A)^{\alpha}$'nın S üzerinde bir esnek yarı grup olduğundan $F^{\alpha}(\varepsilon)$ alt yarı grup olur ve böylece $x_1.x_2 \in F^{\alpha}(\varepsilon)$ bulunur. Bu da

$$F(\varepsilon)(x_1.x_2) \geq \alpha = \min\{F(\varepsilon)(x_1), F(\varepsilon)(x_2)\}$$

olduğunu ifade eder, yani $F(\varepsilon)$'nin S üzerinde bulanık alt yarı grup olduğunu belirtir ve S üzerinde (F,A) bulanık esnek yarı gruptur.

2.10 Sezgisel Bulanık Kümeler

Atanassov 1983 yılında Zadeh'in bulanık küme teorisinin genelleştirilmiş hali olan sezgisel bulanık küme teorisini inşa etti. Atanassov sezgisel bulanık küme kavramını aşağıda verilen şekliyle tanımladı. Bu bölüm Atanassov'un yazmış olduğu "Intuitionistic Fuzzy Set" [16] adlı makaleden ve "Intuitionistic Fuzzy Set: Theory and Applications" [17] isimli kitaptan alınmıştır.

Tanım 2.63 [16] $\varnothing \neq X$ üzerinde A sezgisel bulanık kümesi

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), v_A(x)\rangle \mid x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır ve $\mu_A(x): X \to [0,1]$ ve $v_A(x): X \to [0,1]$ olmak üzere $\forall x \in X$ için

$$0 \leq \mu_A(x) + v_A(x) \leq 1.$$

$\mu_A(x)$ ifadesi x'in A'ya ait üyelik derecesi ve $v_A(x)$ ifadesi de x'in A'ya üye olmama derecesini belirtir. Sezgisel bulanık küme teorisinde üye olma derecesi ile üye olmama derecesi toplamı 1'e eşit veya 1'den küçüktür. Dolayısıyla her bulanık küme bir sezgisel bulanık kümedir. Fakat tersi doğru değildir. Ancak, üye olma derecesi ile üye olmama derecesi toplamı 1'e eşit ise sezgisel bulanık küme bulanık kümeye dejenere olur.

A'da tüm sezgisel bulanık kümelerin ailesi $IF(A)$ ile gösterilir.

Tanım 2.64 [17] X'te $A = (\mu_A, v_A)$ ve $B = (\mu_B, v_B)$ sezgisel bulanık küme olsun. Bu durumda,

1. $A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A \leq \mu_B$ ve $v_A \geq v_B$

2. A'nın tümleyeni A^c olmak üzere $A^c = (v_A, \mu_A)$

3. $A \cap B = (\mu_A \wedge \mu_B, v_A \vee v_B)$

4. $A \cup B = (\mu_A \vee \mu_B, v_A \wedge v_B)$

Tanım 2.65 [17] $f : X \to Y$ ve $A = (\mu_A, v_A)$ ve $B = (\mu_B, v_B)$ sırasıyla X ve Y'de sezgisel bulanık küme olsun. Bu durumda $x \in X$ ve $y \in Y$ için,

1. f altında A'nın görüntüsü $f(A)$ sezgisel bulanık kümesi

$$\mu_{f(A)}(y) = \begin{Bmatrix} \bigvee\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) & \text{eğer } f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{Bmatrix}$$

$$v_{f(A)}(y) = \begin{Bmatrix} \bigwedge\limits_{x \in f^{-1}(y)} v_A(x) & \text{eğer } f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{Bmatrix}$$

olarak tanımlanır.

2. f altında B'nin ters görüntüsü $f^{-1}(B)$ sezgisel bulanık kümesi

$$\mu_{f^{-1}(B)}(x) = \mu_B(f(x)) \text{ ve } v_{f^{-1}(B)}(x) = v_B(f(x))$$

şeklinde tanımlanır.

2.11 Sezgisel Bulanık Esnek Kümeler

Atanassov'un sezgisel bulanık küme teorisi ile esnek küme teorisinin birleşiminden sezgisel bulanık esnek küme teorisini Maji modelledi. Bu bölüm Maji, Biswas ve Roy'un yazmış oldukları "Intuitionistic Fuzzy Soft Sets" [43] adlı makalesinden alınmıştır.

Tanım 2.66 [43] U bir evrensel küme, E parametreler ailesi, $A \subset E$ ve $IF(U)$ da U'nun sezgisel bulanık kuvvet kümesi olsun.

$$F : A \to IF(U)$$

şeklinde dönüşüm tanımlansın. Bu durumda (F,A) ikilisine U üzerinde sezgisel bulanık esnek küme denir. Sezgisel bulanık esnek küme, U'nun sezgisel bulanık alt kümelerinin parametrize edilmiş ailesidir.

$\forall \varepsilon \in A \subseteq E$ için $F(\varepsilon)$; U üzerinde (F,A) sezgisel bulanık esnek kümesinin ε-yaklaşımlı elemanlarının bir kümesini ifade eder ve aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$F(\varepsilon)=\left\{\left\langle x,\mu_{F(\varepsilon)}(x),v_{F(\varepsilon)}(x)\right\rangle \mid x\in U\right\}.$$

Sezgisel bulanık esnek küme teorisinde $\mu_{F(\varepsilon)}(x)$ ifadesi x nesnesinin ε parametresi üzerindeki üyelik derecesini, $v_{F(\varepsilon)}(x)$ ise x nesnesinin ε parametresi üzerindeki üye olmama derecesini belirtir.

Eğer $\forall x\in U$ için ve $\forall \varepsilon \in A\subseteq E$ için $\mu_{F(\varepsilon)}(x)+v_{F(\varepsilon)}(x)=1$ ise, bu durumda $F(\varepsilon)$ standart bir bulanık küme olmaktadır ve bu durumda (F,A) sezgisel bulanık esnek kümesi bir bulanık esnek küme olur.

Eğer $\forall x\in U$ için ve $\forall \varepsilon \in A\subseteq E$ için $F(\varepsilon)(x)=(0,1)$ veya $F(\varepsilon)(x)=(1,0)$ ise, bu durumda $F(\varepsilon)$ klasik bir küme ve (F,A) da klasik esnek küme olur.

Örnek 2.44 [43] Akademik yıl içerisinde en başarılı öğrenciyi seçmek amacıyla (F,A) sezgisel bulanık esnek kümesi verilen parametrelere göre öğrencilerin karakterini betimlesin. Öğrencilerin kümesi $U=\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$ ve

$A=\{r=$ sınav sonuçları, $c=$ davranış biçimi, $g=$ oyun ve spor performansı$\}\subseteq E$

olsun. Bu durumda

$$F(r)=\ \{(s_1,0.8,0.1),(s_2,0.9,0.05),(s_3,0.85,0.1),(s_4,0.75,0.2)\}$$

$$F(c)=\ \{(s_1,0.6,0.3),(s_2,0.65,0.2),(s_3,0.7,0.2),(s_4,0.65,0.2)\}$$

$$F(g)=\ \{(s_1,0.75,0.2),(s_2,0.5,0.3),(s_3,0.5,0.4),(s_4,0.7,0.2)\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $(F,A)=\{F(r),F(c),F(g)\}$ olmak üzere U üzerinde (F,A) sezgisel bulanık esnek kümedir.

Tanım 2.67 [43] U üzerinde (F,A) ve (G,B) sezgisel bulanık esnek iki küme olsun. Bu durumda,

1. $A \subseteq B$

2. $\forall \varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon) \subseteq G(\varepsilon)$

şartları sağlanırsa (F,A)'ya (G,B)'nin sezgisel bulanık esnek alt kümesi denir ve

$(F,A) \tilde{\subseteq} (G,B)$ ile gösterilir.

Eğer $(F,A) \tilde{\subseteq} (G,B)$ ve $(G,B) \tilde{\subseteq} (F,A)$ ise, (F,A) ve (G,B) sezgisel bulanık esnek kümeleri eşit olur $(F,A) \tilde{=} (G,B)$ ile gösterilir.

2.12 Latis Teorisi

Bu bölümde çalışmamızın son bölümü için gerekli olan latis teorisi hakkında temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.68 [51] S bir küme ve β, S de bir bağıntı olsun

i. Yansıma; $\forall a \in S$ için $a \leq a$

ii. Ters simetri; $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$

iii. Geçişme; $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$

özelliklerini sağlıyorsa β'ya S de bir kismi sıralama bağıntısı denir. Genellikle kismi sıralama bağıntısında β yerine "$\leq$" kullanılır. Üzerinde bir sıralama bağıntısı tanımlanan kümeye ise kısmi sıralı küme denir. Kısmi sıralama bağıntısı yerine kısaca sıralama bağıntısı da denmektedir. S de bir kısmi sıralama bağıntısı varsa, S'ye $\leq$ bağıntısına göre kısmi sıralı bir küme denir ve $(S,\leq)$ olarak gösterilir.

Örnek 2.45 [52] $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde $\leq$ bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır.

Örnek 2.46 [52] Bir S kümesinin kuvvet kümesinde $\forall S_1, S_2 \in P(S)$ için $S_1 \subset S_2$ ise $S_1 \leq S_2$ dir, şeklinde tanımlanan $\leq$ bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır.

Tanım 2.69 [52] $(S,\leq)$ sıralı küme olmak üzere $a,b\in S$ için $a\leq b$ veya $b\leq a$ ise a ve b elemanlarına kıyaslanabilen elemanlar denir.

Tanım 2.70 [51] Eğer $(S,\leq)$ sıralı kümesinde her eleman ikilisi kıyaslanabiliyorsa yani,

$\forall a,b\in S$ için $a\leq b$ veya $b\leq a$ ise

bu sıralı kümeye tam sıralı denir.

Örnek 2.47 [52] $A=\{2,4,8,16,32,64\}$ kümesi üzerinde $\forall a,b\in A$ için, $a|b$ ise $a\leq b$ dir, şeklinde $\leq$ bağıntısı tanımlanırsa bu bir tam sıralama bağıntısı olur.

Tanım 2.71 [52] $\leq$, S de bir sıralama bağıntısı olsun.

i. Bir $a\in A$ ile kıyaslanabilen $\forall c\in A$ için, $c\leq a$ ise, a'ya S de bir maksimal eleman denir.

Yani, $a\leq c$ olması $a=c$ olmasını gerektiriyorsa, kendisinden kesin büyük hiçbir eleman yoksa, a elamanına maksimal eleman denir.

ii. Bir $b\in B$ ile kıyaslanabilen $\forall c\in A$ için, $b\leq c$ ise, b'ye S de bir minimal eleman denir.

Yani $c\leq b$ olması $b=c$ olmasını gerektiriyorsa, kendisinden kesin küçük hiçbir eleman yoksa, b elemanına minimal eleman denir.

Sıralı kümede bir çok maksimal (minimal) eleman bulunabileceği gibi hiç de bulunmayabilir.

Tanım 2.72 [51] $(S,\leq)$ sıralı kümesinde, $a,b\in S$ elemanları için

i. $a\leq z$, $b\leq z$ ve

ii. $a\leq z'$, $b\leq z'\Rightarrow z\leq z'$ olmasını gerektirecek şekilde bir $z\in S$ varsa z'ye a ile b'nin supremumu (en küçük üst sınır) denir ve $z=\sup\{a,b\}$ ile gösterilir.

Benzer şekilde infimum da tanımlanabilir.

Tanım 2.73 $(S,\leq)$ sıralı kümesinde, $a,b\in S$ elemanları için

i. $y \le a,\ y \le b$ ve

ii. $y' \le a,\ y' \le b \Rightarrow y' \le y$ olmasını gerektirecek bir $y \in S$ varsa y'ye a ile b'nin

infimumu (en büyük alt sınır) denir ve $y = \inf\{a,b\}$ ile gösterilir.

Örnek 2.48 [52] $S = \{2,3,4,6,12,36,60\}$ kümesi üzerinde $a,b \in S$ için $a \le b \Leftrightarrow a \mid b$ şeklindeki "$\le$" bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır. Bu sıralama aşağıdaki diyagramla gösterilebilir.

$$\begin{array}{ccccc}
36 & & 60 & & \\
 & \nwarrow\nearrow & & & \\
 & 12 & & 8 & \\
 \nearrow & & \nwarrow & \nearrow & \\
6 & & 4 & & \\
\uparrow & \nwarrow & \uparrow & & \\
3 & & 2 & &
\end{array}$$

S'nin minimal elemanları; $2,3$

S'nin maksimal elemanları; $36,60$

S'nin $A = \{4,6,12\}$ alt kümesinin alt sınırı 2, üst sınırları ise $12,36,60$ dır. Böylece $\sup A = 12$ ve $\inf A = 2$ olur.

Tanım 2.74 [51] $(S,\le)$ sıralı kümesinde $\forall a,b \in S$ elemanının bir supremumu ve bir infimumu varsa, bu sıralı kümeye bir latis denir. $\sup\{a,b\} = a \vee b$ ve $\inf\{a,b\} = a \wedge b$ ile gösterilir.

Bir latiste, sonlu ve boş olmayan her A alt kümesinin $\sup A$ ve $\inf A$ vardır.

Örnek 2.49 [51] Bir kümenin tüm alt kümeleri ailesi, yani kuvvet kümesi, birleşim ve kesişim altında bir latis oluşturur.

Tanım 2.75 [51] Bir S latisinde en büyük eleman (mevcut) 1 ve en küçük eleman (mevcut) 0 olsun. Eğer $\forall a \in S$ için, $a \vee a' = 1$ ve $a \wedge a' = 0$ olacak şekilde bir $a' \in S$ elemanı bulunabiliyorsa bu latise bir tamlamalı latis denir.

Tanım 2.76 [51] Bir latisin her alt kümesinin supremumu ve infimumu varsa bu latise tam latis denir.

Tam latiste bir en büyük eleman ve bir en küçük eleman her zaman vardır.

Örnek 2.50 [51] $P(S)$ kuvvet kümesi bir tamlanmış latistir. 1 en büyük elemanı S, 0 en küçük elemanı $\varnothing$ kümedir. $\forall A \subseteq S$ için, $A \cup (S/A) = S$ ve $A \cap (S/A) = \varnothing$ olduğu açıktır.

Örnek 2.51 [51] Bir S tam sıralı kümesinde, $\forall a,b \in S$ için, $a \leq b$ ise $a \vee b = b$ ve $a \wedge b = a$ olduğundan, tam sıralı her küme bir latistir.

Tanım 2.77 [51] Bir S latisinde $\forall a,b,c \in S$ için

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

ise, S'ye dağılmalı latis denir.

Dağılmalı bir latiste, dual olarak $\forall a,b,c \in S$ için

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

eşitliği de sağlanır. Bu özelliğin daha zayıf ifadesi aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 2.78 [51] Bir S latisinde $\forall a,b,c \in S$ ve $a \leq c$ için,

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$$

ise S'ye modüler latis denir.

Dağılmalı latisin modüler latis olduğu açıktır. Fakat tersi doğru değildir.

Örnek 2.52 [51] Bir S yarı grubunun tüm normal alt grupları ailesi $N(S)$ de $\wedge$ olarak arakesiti ve $\vee$ olarak çarpımı alırsak $N(S)$ bir modüler latis oluşturur. Çünkü, $\forall A,B,C \in N(S)$ ve $A \subseteq S$ için, $A(B \cap C) = AB \cap C$ dir.

Tanım 2.79 [51] Sıralı bir kümenin tam sıralı bir alt kümesine zincir denir.

Tanım 2.80 [52] "$\leq$", S kümesinde bir sıralama bağıntısı olsun. $\varnothing \neq A \subset S$ alt kümesi bir alt sınıra ve bir üst sınıra sahipse A kümesine sınırlı alt küme denir.

Tanım 2.81 [52] Kısmi sıralı bir S kümesinin boş kümeden farklı tüm alt kümelerinin bir en küçük elemanı varsa, A'ya iyi sıralı küme denir.

Örneğin $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi iyi sıralı bir kümedir. Fakat, tam sayılar kümesi tam sıralı olmasına karşın iyi sıralı değildir. Çünkü negatif tam sayılarından oluşan alt kümenin bir en küçük elemanı yoktur.

Ayrıca, boş olmayan bir S sıralı kümesinin her zincirinin S de bir üst sınırı varsa, S sıralı kümesinin en az bir maksimal elemanı vardır ve buna Zorn Teoremi de denir [51].

BÖLÜM 3

SEZGİSEL BULANIK ESNEK Γ-YARI GRUPLAR

Bu çalışmada, Atanassov'un sezgisel bulanık küme teorisini kullanarak Γ-yarı gruplar üzerinde Maji'nin sezgisel bulanık esnek küme teorisini uygulayarak sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup tanımı verilecek ve bununla ilgili örnekler ve bazı özellikler incelenecektir. Sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grupların kesişim, birleşim, ve, veya, çarpım operatör işlemleri altında yine bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olduğu gösterilecektir. (λ,θ)-birimsel sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup ve (λ,θ)-tam sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup tanımları verilecektir. Sezgisel bulanık esnek kümesinin seviye alt esnek ve seviye üst esnek küme tanımları verilecek ve sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olması için seviye üst esnek küme ile seviye alt esnek kümelerinin esnek Γ-yarı grup olduğunu göstererek klasik cebir ile sezgisel bulanık cebir arasındaki ilişki kurulacaktır.

Γ-yarı grup üzerinde sezgisel bulanık esnek (sol,sağ, iç, bi) Γ-ideal kavramları verilecek ve bazı operatörleri uygulayarak bu operatör işlemleri altında tekrar sezgisel bulanık esnek (sol,sağ, iç, bi) Γ-ideal oldukları görülecektir. Her sezgisel bulanık esnek Γ-idealin bir sezgisel bulanık esnek (iç,bi) Γ-ideal olduğu, fakat terslerinin doğru olmadığına dair örnekler verilecektir.

İdealistik sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup tanımı verilecek ve her idealistik sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grubun bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olduğu gösterilecektir.

Sezgisel bulanık esnek fonksiyonu altında sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grupların homomorf görüntüsü ve ters homomorf görüntüsünün de sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olduğu görülecektir. Ayrıca idealistik sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grupların sezgisel bulanık esnek homomorf görüntüsü ve ters homomorfik görüntüsünün de idealistik sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olduğu ispatlanacaktır.

Normal sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup kavramı verilecek ve bu kavramla ilgili bazı sonuçlar elde edilecektir.

Son olarak, Γ-yarı grupların sezgisel bulanık esnek Γ- ideallerinin ailesinin sıralama bağıntısı altında dağılmalı tam latis yapısı üretilecektir.

Aksi belirtilmediği sürece S bir Γ-yarı grup olarak alınacaktır.

3.1 Sezgisel Bulanık Esnek Γ-Yarı Gruplar

Bu bölümde Atanassov'un sezgisel bulanık küme teorisini kullanılarak sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup kavramı incelenecektir.

Tanım 3.1 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) bir sezgisel bulanık esnek küme olsun. Eğer $F(a)$, S'nin bir sezgisel bulanık alt Γ-yarı grubu ise S üzerinde (F,A)'ya sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup denir.

Sezgisel bulanık esnek kavramı ayrıca aşağıdaki gibi de tanımlanabilir.

Tanım 3.2 Γ – yarı grup S üzerinde (F,A) bir sezgisel bulanık esnek küme olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon \in A$, $x,y \in S$ ve $\alpha \in \Gamma$ için eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa

$$\mu_{F(\varepsilon)}(x\alpha y) \geq \mu_{F(\varepsilon)}(x) \wedge \mu_{F(\varepsilon)}(y) \quad \text{ve}$$

$$\nu_{F(\varepsilon)}(x\alpha y) \leq \nu_{F(\varepsilon)}(x) \vee \nu_{F(\varepsilon)}(y)$$

(F,A)'ya Γ – yarı grup S üzerinde bir sezgisel bulanık esnek Γ – yarı grup denir.

Tanım 3.3 Γ – yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek Γ – yarı grubu için, eğer

i. $A \subseteq B$, ve

ii. $\forall x\in S,\varepsilon\in A$ için $\mu_{F(\varepsilon)}(x)\le \mu_{G(\varepsilon)}(x)$ ve $\nu_{F(\varepsilon)}(x)\ge \nu_{G(\varepsilon)}(x)$

şartları sağlanırsa (F,A)'ya (G,B)'nin bir sezgisel bulanık esnek alt $\Gamma-$yarı grubu denir ve $(F,A)\subseteq(G,B)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 3.1 $S=\{a,b,c\}$ ve $\Gamma=\{\alpha,\beta\}$ olsun. Bu durumda S aşağıdaki tabloda verilen işlemler altında bir $\Gamma-$yarı gruptur.

$$\begin{array}{cccc} \alpha & a & b & c \\ a & a & c & c \\ b & c & b & c \\ c & c & c & c \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{cccc} \beta & a & b & c \\ a & a & a & a \\ b & a & a & a \\ c & a & a & b \end{array}$$

Parametre ailesi $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ ve $A=\{e_1,e_2\}\subseteq E$ olsun. $F:A\to IF(S)$ dönüşümü için

$$\mu_{F(e_1)}(x)=\begin{Bmatrix} 0.6 & x=a \\ 0.4 & x=b \\ 0.2 & x=c \end{Bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mu_{F(e_2)}(x)=\begin{Bmatrix} 0.8 & x=a \\ 0.6 & x=b \\ 0.5 & x=c \end{Bmatrix}$$

$$\nu_{F(e_1)}(x)=\begin{Bmatrix} 0.3 & x=a \\ 0.5 & x=b \\ 0.7 & x=c \end{Bmatrix} \quad \text{ve} \quad \nu_{F(e_2)}(x)=\begin{Bmatrix} 0.1 & x=a \\ 0.3 & x=b \\ 0.4 & x=c \end{Bmatrix}$$

olarak verilsin. Bu durumda

$$F(e_1)=\{(a,0.6,0.3),(b,0.4,0.5),(c,0.2,0.7)\}$$

$$F(e_2)=\{(a,0.8,0.1),(b,0.6,0.3),(c,0.5,0.4)\}$$

olur ve S üzerinde $(F,A)=\{F(e_1),F(e_2)\}$ bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

Örnek 3.2 $\mathbb{Q}$ rasyonel sayıların kümesi olsun ve $\Gamma=\mathbb{N}$ doğal sayıların kümesi olarak alalım. $a,b\in\mathbb{Q}$ ve $\alpha\in\Gamma$ için

$$\begin{array}{c} \mathbb{Q}\times\Gamma\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q} \\ (a,\,\alpha,\,b)\mapsto a\alpha b \end{array}$$

dönüşümü altında $\mathbb{Q}$ bir $\Gamma-$yarı gruptur. $\forall x\in\mathbb{Q}$ ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$F:\mathbb{N}\to IF(\mathbb{Q})$$

$$\mu_{F(n)}(x)=\begin{cases}0 & \text{eğer } x\in\mathbb{Z}\\ \dfrac{1}{n} & \text{eğer } x\notin\mathbb{Z}\end{cases} \quad \text{ve} \quad \nu_{F(n)}(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{n} & \text{eğer } x\in\mathbb{Z}\\ 0 & \text{eğer } x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\mathbb{Q}$ üzerinde $(F,\mathbb{N})$ sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

Tanım 3.4 Eğer $(F,A)\subseteq(G,B)$ ve $(G,B)\subseteq(F,A)$ ise, bu durumda Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grubu eşittir.

Teorem 3.1 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grubu olsun. Eğer $\forall\varepsilon\in A$ için $F(\varepsilon)\leq G(\varepsilon)$ ise, bu durumda (F,A), (G,B)'nin bir sezgisel bulanık esnek alt Γ-yarı grubudur.

İspat. Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grubu olsun. Eğer $\forall\varepsilon\in A$ için $F(\varepsilon)\leq G(\varepsilon)$ olduğundan $\forall x\in S$ için $\mu_{F(\varepsilon)}(x)\leq\mu_{G(\varepsilon)}(x)$ ve $\nu_{F(\varepsilon)}(x)\geq\nu_{G(\varepsilon)}(x)$ sağlanır. Dolayısıyla Tanım 3.3'ten (F,A)'nın (G,B)'nin sezgisel bulanık esnek alt Γ-yarı grubu olduğu görülür.

Tanım 3.5 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grubunun birleşimi $(F,A)\tilde{\cup}_\Gamma(G,B)$ şeklinde gösterilir ve $H:A\cup B\to([0,1]\times[0,1])^S$ olmak üzere $\forall\varepsilon\in A\cup B=C$ için

$$H(\varepsilon)=\begin{cases}\left(\mu_{F(\varepsilon)}(x),\nu_{F(\varepsilon)}(x)\right) & \text{eğer } \varepsilon\in A-B,\\ \left(\mu_{G(\varepsilon)}(x),\nu_{G(\varepsilon)}(x)\right) & \text{eğer } \varepsilon\in B-A,\\ \left(\mu_{F(\varepsilon)}(x)\vee\mu_{G(\varepsilon)}(x),\nu_{F(\varepsilon)}(x)\wedge\nu_{G(\varepsilon)}(x)\right) & \text{eğer } \varepsilon\in A\cap B,\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $(H,C)=(F,A)\tilde{\cup}_\Gamma(G,B)$ olarak gösterilir.

Teorem 3.2 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup ise, bu durumda $(F,A)\tilde{\cup}_\Gamma(G,B)$ de bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

İspat. $(F,A)\tilde{\cup}(G,B)=(H,A\cup B)$ ve $\forall\varepsilon\in A\cup B$ olmak üzere $\forall x,y\in S$ ve $\alpha\in\Gamma$ için 3 durumu inceleyelim.

1.durum: $\varepsilon\in A-B$ olsun.

$$\mu_{H(\varepsilon)}(x\alpha y)=\mu_{F(\varepsilon)}(x\alpha y)\geq\mu_{F(\varepsilon)}(x)\wedge\mu_{F(\varepsilon)}(y)=\mu_{H(\varepsilon)}(x)\wedge\mu_{H(\varepsilon)}(y)$$

ve

$$v_{H(\varepsilon)}(x\alpha y)=v_{F(\varepsilon)}(x\alpha y)\leq v_{F(\varepsilon)}(x)\vee v_{F(\varepsilon)}(y)=v_{H(\varepsilon)}(x)\vee v_{H(\varepsilon)}(y).$$

2.durum: $\varepsilon\in B-A$ olsun.

$$\mu_{H(\varepsilon)}(x\alpha y)=\mu_{G(\varepsilon)}(x\alpha y)\geq\mu_{G(\varepsilon)}(x)\wedge\mu_{G(\varepsilon)}(y)=\mu_{G(\varepsilon)}(x)\wedge\mu_{G(\varepsilon)}(y)$$

ve

$$v_{H(\varepsilon)}(x\alpha y)=v_{G(\varepsilon)}(x\alpha y)\leq v_{G(\varepsilon)}(x)\vee v_{G(\varepsilon)}(y)=v_{G(\varepsilon)}(x)\vee v_{G(\varepsilon)}(y).$$

3.durum: $\varepsilon\in A\cap B$ olsun.

$$\begin{aligned}\mu_{H(\varepsilon)}(x\alpha y)&=\mu_{F(\varepsilon)}(x\alpha y)\vee\mu_{G(\varepsilon)}(x\alpha y)\\&\geq\left(\mu_{F(\varepsilon)}(x)\wedge\mu_{F(\varepsilon)}(y)\right)\vee\left(\mu_{G(\varepsilon)}(x)\wedge\mu_{G(\varepsilon)}(y)\right)\\&=\left(\mu_{F(\varepsilon)}(x)\vee\mu_{G(\varepsilon)}(x)\right)\wedge\left(\mu_{F(\varepsilon)}(y)\vee\mu_{G(\varepsilon)}(y)\right)\\&=\mu_{H(\varepsilon)}(x)\wedge\mu_{H(\varepsilon)}(y)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}v_{H(\varepsilon)}(x\alpha y)&=v_{F(\varepsilon)}(x\alpha y)\wedge v_{G(\varepsilon)}(x\alpha y)\\&\leq\left(v_{F(\varepsilon)}(x)\vee v_{F(\varepsilon)}(y)\right)\wedge\left(v_{G(\varepsilon)}(x)\vee v_{G(\varepsilon)}(y)\right)\\&=\left(v_{F(\varepsilon)}(x)\wedge v_{G(\varepsilon)}(x)\right)\vee\left(v_{F(\varepsilon)}(y)\wedge v_{G(\varepsilon)}(y)\right)\\&=v_{H(\varepsilon)}(x)\vee v_{H(\varepsilon)}(y).\end{aligned}$$

Böylece S üzerinde $(H,A\cup B)=(F,A)\tilde{\cup}(G,B)$ sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

Tanım 3.6 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grubunun kesişimi $(F,A)\tilde{\cap}_{\Gamma}(G,B)$ şeklinde gösterilir ve $H: A\cap B \to ([0,1]\times[0,1])^S$ olmak üzere $\forall \varepsilon \in A\cup B = C$ için

$$H(\varepsilon)=\begin{Bmatrix} \left(\mu_{F(\varepsilon)}(x), v_{F(\varepsilon)}(x)\right) & \text{eğer } \varepsilon\in A-B, \\ \left(\mu_{G(\varepsilon)}(x), v_{G(\varepsilon)}(x)\right) & \text{eğer } \varepsilon\in B-A, \\ \left(\mu_{F(\varepsilon)}(x)\wedge\mu_{G(\varepsilon)}(x), v_{F(\varepsilon)}(x)\vee v_{G(\varepsilon)}(x)\right) & \text{eğer } \varepsilon\in A\cap B, \end{Bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır ve $(H,C)=(F,A)\tilde{\cap}_{\Gamma}(G,B)$ olarak gösterilir.

Teorem 3.3 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup ise, bu durumda $(F,A)\tilde{\cap}_{\Gamma}(G,B)$ de sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

İspat. $(F,A)\tilde{\cap}(G,B)=(H,C)$ ve $\forall \varepsilon\in A\cup B=C$ olmak üzere $\forall x,y\in S$ ve $\alpha\in\Gamma$ için 3 durumu inceleyelim.

1.durum: $\varepsilon\in A-B$ olsun.

$$\mu_{H(\varepsilon)}(x\alpha y)=\mu_{F(\varepsilon)}(x\alpha y)\geq \mu_{F(\varepsilon)}(x)\wedge\mu_{F(\varepsilon)}(y)=\mu_{H(\varepsilon)}(x)\wedge\mu_{H(\varepsilon)}(y)$$

ve

$$v_{H(\varepsilon)}(x\alpha y)=v_{F(\varepsilon)}(x\alpha y)\leq v_{F(\varepsilon)}(x)\vee v_{F(\varepsilon)}(y)=v_{H(\varepsilon)}(x)\vee v_{H(\varepsilon)}(y).$$

2.durum: $\varepsilon\in B-A$ olsun.

$$\mu_{H(\varepsilon)}(x\alpha y)=\mu_{G(\varepsilon)}(x\alpha y)\geq \mu_{G(\varepsilon)}(x)\wedge\mu_{G(\varepsilon)}(y)=\mu_{G(\varepsilon)}(x)\wedge\mu_{G(\varepsilon)}(y)$$

ve

$$v_{H(\varepsilon)}(x\alpha y)=v_{G(\varepsilon)}(x\alpha y)\leq v_{G(\varepsilon)}(x)\vee v_{G(\varepsilon)}(y)=v_{G(\varepsilon)}(x)\vee v_{G(\varepsilon)}(y).$$

3.durum: $\varepsilon\in A\cap B$ olsun.

$$\begin{aligned}\mu_{H(\varepsilon)}(x\alpha y)&=\mu_{F(\varepsilon)}(x\alpha y)\wedge\mu_{G(\varepsilon)}(x\alpha y)\\ &\geq\left(\mu_{F(\varepsilon)}(x)\wedge\mu_{F(\varepsilon)}(y)\right)\wedge\left(\mu_{G(\varepsilon)}(x)\wedge\mu_{G(\varepsilon)}(y)\right)\\ &=\left(\mu_{F(\varepsilon)}(x)\wedge\mu_{G(\varepsilon)}(x)\right)\wedge\left(\mu_{F(\varepsilon)}(y)\wedge\mu_{G(\varepsilon)}(y)\right)\\ &=\mu_{H(\varepsilon)}(x)\wedge\mu_{H(\varepsilon)}(y)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \nu_{H(\varepsilon)}(x\alpha y) &= \nu_{F(\varepsilon)}(x\alpha y) \vee \nu_{G(\varepsilon)}(x\alpha y) \\ &\leq \left(\nu_{F(\varepsilon)}(x) \vee \nu_{F(\varepsilon)}(y)\right) \vee \left(\nu_{G(\varepsilon)}(x) \vee \nu_{G(\varepsilon)}(y)\right) \\ &= \left(\nu_{F(\varepsilon)}(x) \vee \nu_{G(\varepsilon)}(x)\right) \vee \left(\nu_{F(\varepsilon)}(y) \vee \nu_{G(\varepsilon)}(y)\right) \\ &= \nu_{H(\varepsilon)}(x) \vee \nu_{H(\varepsilon)}(y). \end{aligned}$$

Dolayısıyla S üzerinde $(H,C)=(F,A)\tilde{\cap}(G,B)$ sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

Tanım 3.7 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olsun. "(F,A) *VE* (G,B)" operatörü ve $(F,A)\,\tilde{\wedge}_\Gamma\,(G,B)=(H,C)$ sezgisel bulanık esnek kümesi olmak üzere $C=A\times B$ ve $H:C\to([0,1]\times[0,1])^S$ ile $\forall(a,b)\in A\times B=C$ için

$$H(a,b)=F(a)\cap G(b)$$

şeklinde tanımlanır ve $(F,A)\,\tilde{\wedge}_\Gamma\,(G,B)$ olarak gösterilir.

Teorem 3.4 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup ise, bu durumda $(F,A)\,\tilde{\wedge}_\Gamma\,(G,B)$ sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

İspat. $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)=(H,C)$ ve $C=A\times B$ olmak üzere $\forall(a,b)\in A\times B$, $\forall x,y\in S$ ve $\alpha\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned} \mu_{H(a,b)}(x\alpha y) &= \left(\mu_{F(a)}(x\alpha y) \wedge \mu_{G(b)}(x\alpha y)\right) \\ &\geq \left(\mu_{F(a)}(x) \wedge \mu_{F(a)}(y)\right) \wedge \left(\mu_{G(b)}(x) \wedge \mu_{G(b)}(y)\right) \\ &= \left(\mu_{F(a)}(x) \wedge \mu_{G(b)}(x)\right) \wedge \left(\mu_{F(a)}(y) \wedge \mu_{G(b)}(y)\right) \\ &= \mu_{H(a,b)}(x) \wedge \mu_{H(a,b)}(y) \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
v_{H(a,b)}(x\alpha y) &= \left(v_{F(a)}(x\alpha y) \vee v_{G(b)}(x\alpha y)\right) \\
&\leq \left(v_{F(a)}(x) \vee v_{F(a)}(y)\right) \vee \left(v_{G(b)}(x) \vee v_{G(b)}(y)\right) \\
&= \left(v_{F(a)}(x) \vee v_{G(b)}(x)\right) \vee \left(v_{F(a)}(y) \vee v_{G(b)}(y)\right) \\
&= v_{H(a,b)}(x) \vee v_{H(a,b)}(y)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Sonuç olarak S üzerinde $(H,C)=(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)$ sezgisel bulanık esnek Γ- yarı gruptur.

Tanım 3.8 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olsun. "(F,A) *VEYA* (G,B)" operatörü ve $(F,A)\tilde{\vee}_{\Gamma}(G,B)=(H,C)$ sezgisel bulanık esnek kümesi olmak üzere $C=A\times B$ ve $H:C\to([0,1]\times[0,1])^S$ ile $\forall(a,b)\in A\times B=C$ için

$$H(a,b)=F(a)\cup G(b)$$

şeklinde tanımlanır ve $(F,A)\tilde{\vee}_{\Gamma}(G,B)$ olarak gösterilir.

Teorem 3.5 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grubu ise, bu durumda $(F,A)\tilde{\vee}_{\Gamma}(G,B)$ sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

İspat. Bir önceki teoremin ispatına benzer olarak yapılabilir.

Tanım 3.9 $[15]$ (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek küme ve $A\cap B\neq\varnothing$ olsun. (F,A) ve (G,B)'nin bi-birleşimi olan (H,C) sezgisel bulanık esnek kümesi olmak üzere, burada $C=A\cap B$ ve $\forall\varepsilon\in C$ için $H(\varepsilon)=F(\varepsilon)\cup G(\varepsilon)$ olarak tanımlanır. $(H,C)=(F,A)\tilde{\sqcup}_{\Gamma}(G,B)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.10$[15]$ (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek küme ve $A\cap B\neq\varnothing$ olsun. (F,A) ve (G,B)'nin bi-kesişimi olan (H,C) sezgisel bulanık esnek kümesi olmak üzere, burada $C=A\cap B$ ve $\forall\varepsilon\in C$ için $H(\varepsilon)=F(\varepsilon)\cap G(\varepsilon)$ olarak tanımlanır. $(H,C)=(F,A)\tilde{\sqcap}_{\Gamma}(G,B)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.6 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grubu ise, bu durumda $(F,A)\tilde{\sqcap}_\Gamma (G,B)$ ve $(F,A)\tilde{\sqcup}_\Gamma (G,B)$ de sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

İspat. $(H,C)=(F,A)\tilde{\sqcap}_\Gamma (G,B)$ olmak üzere $C=A\cap B$ ve $\forall\varepsilon\in C$ için $H(\varepsilon)=F(\varepsilon)\cap G(\varepsilon)$ olarak tanımlandığından $\forall x,y\in S$ ve $\alpha\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned}
\mu_{H(\varepsilon)}(x\alpha y) &= \mu_{F(\varepsilon)}(x\alpha y)\wedge \mu_{G(\varepsilon)}(x\alpha y)\\
&\geq \left(\mu_{F(\varepsilon)}(x)\wedge \mu_{F(\varepsilon)}(y)\right)\wedge\left(\mu_{G(\varepsilon)}(x)\wedge \mu_{G(\varepsilon)}(y)\right)\\
&= \left(\mu_{F(\varepsilon)}(x)\wedge \mu_{G(\varepsilon)}(x)\right)\wedge\left(\mu_{F(\varepsilon)}(y)\wedge \mu_{G(\varepsilon)}(y)\right)\\
&= \mu_{H(\varepsilon)}(x)\wedge \mu_{H(\varepsilon)}(y)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
v_{H(\varepsilon)}(x\alpha y) &= v_{F(\varepsilon)}(x\alpha y)\vee v_{G(\varepsilon)}(x\alpha y)\\
&\leq \left(v_{F(\varepsilon)}(x)\vee v_{F(\varepsilon)}(y)\right)\vee\left(v_{G(\varepsilon)}(x)\vee v_{G(\varepsilon)}(y)\right)\\
&= \left(v_{F(\varepsilon)}(x)\vee v_{G(\varepsilon)}(x)\right)\vee\left(v_{F(\varepsilon)}(y)\vee v_{G(\varepsilon)}(y)\right)\\
&= v_{H(\varepsilon)}(x)\vee v_{H(\varepsilon)}(y).
\end{aligned}$$

Bundan dolayı S üzerinde $(F,A)\tilde{\sqcap}_\Gamma (G,B)$ sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur. Benzer olarak $(F,A)\tilde{\sqcup}_\Gamma (G,B)$'nin de S üzerinde bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Sonuç 3.1 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup ve $\{(F_i,A_i)\}_{i\in I}$ ise Γ-yarı grup S üzerinde sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grupların boştan farklı ailesi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır;

1. Γ-yarı grup S üzerinde $\tilde{\cap}_\Gamma \{(F_i,A_i)\}_{i\in I}$ sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

2. Γ-yarı grup S üzerinde $\tilde{\cup}_\Gamma \{(F_i,A_i)\}_{i\in I}$ sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

3. Γ-yarı grup S üzerinde $\tilde{\wedge}_\Gamma \{(F_i,A_i)\}_{i\in I}$ sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

4. Γ-yarı grup S üzerinde $\tilde{\vee}_\Gamma \{(F_i,A_i)\}_{i\in I}$ sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

5. Γ-yarı grup S üzerinde $\tilde{\sqcap}_\Gamma \{(F_i, A_i)\}_{i\in I}$ sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

6. Γ-yarı grup S üzerinde $\tilde{\sqcup}_\Gamma \{(F_i, A_i)\}_{i\in I}$ sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

Teorem 3.7 [43] $A=\{\langle x,\mu_A(x),v_A(x)\rangle \mid x\in X\}$ sezgisel bulanık küme ve $r,t\in[0,1]$ olmak üzere $r+t\leq 1$ olsun. Bu durumda;

$$\square A=\{< x,\mu_A(x),\mu_A^c(x) > \mid x\in X\},$$

$$\Diamond A=\{\langle x,v_A^c(x),v_A(x)\rangle \mid x\in X\}$$

$$P_{r,t}(A)=\{(x,\max\{r,\mu_A(x)\},\min\{t,v_A(x)\}) \mid x\in X\},$$

$$Q_{r,t}(A)=\{(x,\min\{r,\mu_A(x)\},\max\{t,v_A(x)\}) \mid x\in X\}$$

olarak tanımlanır ve $\square A$, $\Diamond A$, $P_{r,t}(A)$ ve $Q_{r,t}(A)$ de sezgisel bulanık kümelerdir.

Teorem 3.8 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup ve $r,t\in[0,1]$ olmak üzere $r+t\leq 1$ olsun.

$$\square(F,A)=\{\langle x,\mu_{F(\varepsilon)}(x),\mu^c{}_{F(\varepsilon)}(x)\rangle, x\in S \text{ ve } \varepsilon\in A\}$$

$$\Diamond(F,A)=\{\langle x,v^c{}_{F(\varepsilon)}(x),v_{F(\varepsilon)}(x)\rangle, x\in S \text{ ve } \varepsilon\in A\}$$

$$P_{r,t}(F,A)=\{(x,\max\{r,\mu_{F(\varepsilon)}(x)\},\min\{t,v_{F(\varepsilon)}(x)\}) \mid x\in S\}$$

$$Q_{r,t}(F,A)=\{(x,\min\{r,\mu_{F(\varepsilon)}(x)\},\max\{t,v_{F(\varepsilon)}(x)\}) \mid x\in S\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda Γ-yarı grup S üzerinde,

1. $\square(F,A)$ sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

2. $\Diamond(F,A)$ sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

3. $P_{r,t}(F,A)$ sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

4. $\mathbb{Q}_{r,t}(F,A)$ sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

İspat. 1. Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olsun. Bu durumda $\square(F,A)=\left\{\left\langle x,\mu_{F(\varepsilon)}(x),{\mu^{c}}_{F(\varepsilon)}(x)\right\rangle, x\in S \text{ ve } \varepsilon\in A\right\}$ şeklinde tanımlanır. (F,A) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olduğundan $\forall x,y\in S$ ve $\alpha\in\Gamma$ için

$$\mu_{F(\varepsilon)}(x\alpha y)\geq \mu_{F(\varepsilon)}(x)\wedge \mu_{F(\varepsilon)}(y)$$

otomatik olarak sağlanır. $\mu^{c}_{F(\varepsilon)}(x\alpha y)\leq \mu^{c}_{F(\varepsilon)}(x)\vee \mu^{c}_{F(\varepsilon)}(y)$ olduğunu gösterirsek $\square(F,A)$'nın sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olduğunu ispatlamış olacağız.

$$\begin{aligned}\mu^{c}_{F(\varepsilon)}(x\alpha y)&=1-\mu_{F(\varepsilon)}(x\alpha y)\\&\leq 1-\left(\mu_{F(\varepsilon)}(x)\wedge\mu_{F(\varepsilon)}(y)\right)\\&=\left(1-\mu_{F(\varepsilon)}(x)\right)\vee\left(1-\mu_{F(\varepsilon)}(y)\right)\\&=\mu^{c}_{F(\varepsilon)}(x)\vee\mu^{c}_{F(\varepsilon)}(y)\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla Γ-yarı grup S üzerinde $\square(F,A)$ bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

2. Γ-yarı grup üzerinde (F,A) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olsun. Bu durumda $\Diamond(F,A)=\left\{\left\langle x,{v^{c}}_{F(\varepsilon)}(x),v_{F(\varepsilon)}(x)\right\rangle, x\in S \text{ ve } \varepsilon\in A\right\}$ şeklinde tanımlanır.

(F,A) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olduğundan $\forall x,y\in S$ ve $\alpha\in\Gamma$ için

$$v_{F(\varepsilon)}(x\alpha y)\leq v_{F(\varepsilon)}(x)\vee v_{F(\varepsilon)}(y)$$

sağlanır. $v^{c}_{F(\varepsilon)}(x\alpha y)\geq v^{c}_{F(\varepsilon)}(x)\wedge v^{c}_{F(\varepsilon)}(y)$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}v^{c}_{F(\varepsilon)}(x\alpha y)&=1-v_{F(\varepsilon)}(x\alpha y)\\&\geq 1-\left(v_{F(\varepsilon)}(x)\vee v_{F(\varepsilon)}(y)\right)\\&=\left(1-v_{F(\varepsilon)}(x)\right)\wedge\left(1-v_{F(\varepsilon)}(y)\right)\\&=v^{c}_{F(\varepsilon)}(x)\wedge v^{c}_{F(\varepsilon)}(y)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece Γ-yarı grup S üzerinde $\Diamond(F,A)$ sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur. Benzer olarak 3. ve 4. ispatı yapılabilir.

Örnek 3.3 Örnek 3.1 ele alalım.

$$F(e_1)=\{(a,0.6,0.3),(b,0.4,0.5),(c,0.2,0.7)\}$$

$$F(e_2)=\{(a,0.8,0.1),(b,0.6,0.3),(c,0.5,0.4)\}$$

olmak üzere $(F,A)=\{F(e_1),F(e_2)\}$'in sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olduğunu biliyoruz. $\square(F,A)$ sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grubu

$$F(e_1)=\{(a,0.6,0.4),(b,0.4,0.6),(c,0.2,0.8)\}$$

$$F(e_2)=\{(a,0.8,0.2),(b,0.6,0.4),(c,0.5,0.5)\}$$

ve $\Diamond(F,A)$ sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grubu

$$F(e_1)=\{(a,0.7,0.3),(b,0.5,0.5),(c,0.3,0.7)\}$$

$$F(e_2)=\{(a,0.9,0.1),(b,0.7,0.3),(c,0.6,0.4)\}$$

şeklinde olur.

Tanım 3.11 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olsun. (F,A) ve (G,B)'nin çarpımı $(F\circ G,C)$ şeklinde tanımlanır, burada $C=A\cup B$ olmak üzere $\forall\varepsilon\in C$ ve $x\in S$ için

$$\mu_{F\circ G(\varepsilon)}(x)=\begin{cases}\mu_{F(\varepsilon)}(x) & \text{eğer } \varepsilon\in A-B,\\ \mu_{G(\varepsilon)}(x) & \text{eğer } \varepsilon\in B-A,\\ \bigvee\limits_{x=a\alpha b}\{\mu_{F(\varepsilon)}(a)\wedge\mu_{G(\varepsilon)}(b)\} & \text{eğer } \varepsilon\in A\cap B,\end{cases}$$

ve

$$\nu_{F\circ G(\varepsilon)}(x)=\begin{cases}\nu_{F(\varepsilon)}(x) & \text{eğer } \varepsilon\in A-B,\\ \nu_{G(\varepsilon)}(x) & \text{eğer } \varepsilon\in B-A,\\ \bigwedge\limits_{x=a\alpha b}\{\nu_{F(\varepsilon)}(a)\vee\nu_{G(\varepsilon)}(b)\} & \text{eğer } \varepsilon\in A\cap B,\end{cases}$$

olarak tanımlanır. $(F\circ G,C)=(F,A)\circ(G,B)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.9 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grubu ise, bu durumda $(F,A)\circ(G,B)$ de bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

Teorem 3.10 S bir Γ-yarı grup ve S üzerinde (F,A) sezgisel bulanık esnek küme olsun. Bu durumda S üzerinde (F,A) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olması için gerek ve yeter koşul $(F,A)\circ(F,A)\tilde{\subseteq}(F,A)$ olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: S üzerinde (F,A)'nın sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olduğunu kabul edelim ve $x \in S$ alalım. Eğer $(F,A)\circ(F,A)=(\mu_F \circ \mu_F, \nu_F \circ \nu_F)=\varnothing$ ise, bu durumda $(\mu_F \circ \mu_F)(a)=\varnothing$ ve $(\nu_F \circ \nu_F)(a)=\varnothing$ olur ve $(\mu_F \circ \mu_F)(a)\subseteq \mu_F(a)$, $(\nu_F \circ \nu_F)(a)\supseteq \nu_F(a)$ elde edilir. Öte yandan, $x = a\alpha b$ olmak üzere $\exists a,b \in S$ ve $\alpha \in \Gamma$. Bu durumda, S üzerinde (F,A) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olduğundan

$$\begin{aligned}(\mu_F \circ \mu_F)(a) &= \bigvee_{x=a\alpha b}(\mu_F(a)\wedge \mu_F(b))\\ &\subseteq \bigvee_{x=a\alpha b}\mu_F(a\alpha b)=\bigvee_{x=a\alpha b}\mu_F(x)=\mu_F(x)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(\nu_F \circ \nu_F)(a) &= \bigwedge_{x=a\alpha b}(\nu_F(a)\vee \nu_F(b))\\ &\supseteq \bigwedge_{x=a\alpha b}\nu_F(a\alpha b)=\bigwedge_{x=a\alpha b}\nu_F(x)=\nu_F(x)\end{aligned}$$

Dolayısıyla $(F,A)\circ(F,A)\tilde{\subseteq}(F,A)$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$: $(F,A)\circ(F,A)\tilde{\subseteq}(F,A)$ olduğunu varsayalım. $a,b \in S$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $x = a\alpha b$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\mu_F(a\alpha b) &= \mu_F(x)\\ &\geq (\mu_F \circ \mu_F)(x)\\ &= \bigvee_{x=a\alpha b}(\mu_F(a)\wedge \mu_F(b))\\ &\geq \mu_F(a)\wedge \mu_F(b)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \nu_F(a\alpha b) &= \nu_F(x) \\ &\leq (\nu_F \circ \nu_F)(x) \\ &= \bigwedge_{x=a\alpha b} (\nu_F(a) \vee \nu_F(b)) \\ &\leq \nu_F(a) \vee \nu_F(b) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece S üzerinde (F,A)'nın bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olduğu görülür.

Tanım 3.12 S üzerinde (F,A) bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup ve $\lambda,\theta \in [0,1]$ olmak üzere $\lambda+\theta \leq 1$ olsun. Bu durumda,

1. $\forall a \in A$ ve $\forall x \in S$ için

$$F(a)(x) = \begin{cases} (\lambda,\theta) & \text{eğer } x = e_s \\ (0,1) & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

ise, (F,A)'ya S üzerinde bir (λ,θ)-birimsel (identity) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup denir.

2. $\forall a \in A$ ve $\forall x \in S$ için

$$(F)(a)(x) = (\lambda,\theta)$$

ise, (F,A)'ya S üzerinde bir (λ,θ)-tam (absolute) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup denir.

Buradaki (λ,θ) değeri, (α,β) seviye kesim kümelerinde kullanılan sezgisel bulanık kümelerin gösteriminden farklı olarak sezgisel bulanık kümelerinin $[0,1]^2$ latis değerleri düşünülmelidir.

Örnek 3.4 $S=\mathbb{Z}$ ve $\Gamma=\mathbb{Z}$ olsun. $a,b \in S$, $\alpha \in \Gamma$ için $+$ tamsayıların toplama işlemi olmak üzere $a\alpha b = a+\alpha+b$ olarak tanımlanan yeni işleme göre $\mathbb{Z}$ bir $\Gamma-$ yarı gruptur. Tüm pozitif tamsayıların kümesi $\mathbb{N}$ olmak üzere $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathbb{Z}$ için

$$F:\mathbb{N} \to IF(\mathbb{Z})$$

dönüşümü altında

$$\mu_{F(n)}(x)=\begin{cases}\lambda & \text{eğer } x=0\\ 0 & \text{eğer } x\neq 0\end{cases} \quad \text{ve} \quad \nu_{F(n)}(x)=\begin{cases}\theta & \text{eğer } x=0\\ 1 & \text{eğer } x\neq 0\end{cases}$$

tanımlansın. Bu durumda $(F,\mathbb{N})$ sezgisel bulanık esnek kümesi $\mathbb{Z}$ üzerinde (λ,θ)-birimsel sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

$$G:\mathbb{N}\to IF(\mathbb{Z})$$

dönüşümü altında

$$\mu_{G(n)}(x)=\lambda \text{ ve } \nu_{G(n)}(x)=\theta$$

olarak tanımlanırsa $(G,\mathbb{N})$ sezgisel bulanık esnek kümesi $\mathbb{Z}$ üzerinde (λ,θ)-tam sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

Tanım 3.13 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) bir sezgisel bulanık esnek küme olsun. $u+l\leq 1$ olmak üzere $u,l\in[0,1]$ alalım. (F,A) sezgisel bulanık esnek kümesinin $l-$seviye alt esnek kümesi $(F,A)_l=(F_l,A)$ keskin esnek kümedir ve $\forall a\in A$ için

$$F_l(a)=\left\{x\in S\,\middle|\,\mu_{F(a)}(x)\geq l\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca, (F,A) sezgisel bulanık esnek kümesinin $u-$seviye üst esnek kümesi $(F,A)_u=(F^u,A)$ da bir keskin esnek kümedir ve $\forall a\in A$ için

$$F^u(a)=\left\{x\in S\,\middle|\,\nu_{F(a)}(x)\leq u\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Ek olarak, (F,A) sezgisel bulanık esnek kümesinin (l,u)-seviye kesim esnek kümesi $(F,A)_{(l,u)}=\left(F_{(l,u)},A\right)$ olmak üzere

$$F_{(l,u)}(a)=\left\{x\in S\,\middle|\,\mu_{F(a)}(x)\geq l \text{ ve } \nu_{F(a)}(x)\leq u\right\}$$

şeklinde de tanımlanabilir.

Örnek 3.5 $S=\{x,y,z\}$ ve $\Gamma=\{\alpha\}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki tabloda tanımlanan işleme göre S bir Γ-yarı gruptur.

α	x	y	z
x	x	z	z
y	z	y	z
z	z	z	z

$E=\{e_1,e_2,e_3\}$ ve $A=\{e_1,e_2\}$ olsun. Bu durumda (F,A) sezgisel bulanık esnek kümesi aşağıda verilen şekliyle tanımlansın.

$$(F,A)=\begin{Bmatrix} F(e_1)=\{(x,0.2,0.7),(y,0.4,0.6),(z,0.6,0.4)\} \\ F(e_2)=\{(x,0.3,0.6),(y,0.5,0.5),(z,0.9,0.1)\} \end{Bmatrix}$$

Dolayısıyla (F,A) bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

$l=0.3$ ve $u=0.5$ alalım. Bu durumda

$$(F,A)_{(0.3,0.5)}=\left(F_{(0.3,0.5)},A\right)=\left\{F_{(0.3,0.5)}(e_1)=\{z\},F_{(0.3,0.5)}(e_2)=\{y,z\}\right\}.$$

Teorem 3.11 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) bir sezgisel bulanık esnek küme olsun. Bu durumda S üzerinde (F,A) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olması için gerek ve yeter koşul $u+l\leq 1$ ve $u,l\in[0,1]$ için $F_l(a)\neq\varnothing$, $F^u(a)\neq\varnothing$ olmak üzere hem $(F,A)_l$ $l-$seviye alt esnek kümesi hem de $(F,A)^u$ $u-$seviye üst esnek kümesi S üzerinde klasik esnek Γ-yarı gruptur.

İspat. $(\Rightarrow)$: Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olsun. Bu durumda $\forall a\in A$ için $F(a)$, S'nin bir sezgisel bulanık alt Γ-yarı grubudur. $u+l\leq 1$ ve $u,l\in[0,1]$ için $F_l(a)\neq\varnothing$, $F^u(a)\neq\varnothing$ olmak üzere $\alpha,\beta\in\Gamma$, $x,y\in F_l(a)$ ve $z,w\in F^u(a)$ alalım. Bu durumda

$$\mu_{F(a)}(x)\geq l \text{ ve } \mu_{F(a)}(y)\geq l$$

$$v_{F(a)}(z)\leq u \text{ ve } v_{F(a)}(w)\leq u$$

olur. Böylece

$$\mu_{F(a)}(x\alpha y) \geq \mu_{F(a)}(x) \wedge \mu_{F(a)}(y) \geq l \wedge l = l$$

$$\nu_{F(a)}(z\beta w) \leq \nu_{F(a)}(z) \vee \nu_{F(a)}(w) \leq u \vee u = u$$

bulunur. Dolayısıyla $x\alpha y \in F_l(a)$, $z\beta w \in F^u(a)$ ve $F_l(a)$, $F^u(a)$ kümeleri S'nin alt Γ-yarı grubu olarak elde edilir. Sonuç olarak $(F,A)_l$ ve $(F,A)^u$ kümeleri S üzerinde klasik esnek Γ-yarı gruptur.

$(\Leftarrow)$: $(F,A)_l$ ve $(F,A)^u$ kümeleri S üzerinde klasik esnek Γ-yarı grup olsun ve Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olmadığını kabul edelim. Bu durumda S'nin bir $F(a)$ sezgisel bulanık alt Γ-yarı grubu olmayacak şekilde $a \in A$ vardır. Diğer bir ifadeyle sezgisel bulanık alt Γ-yarı grubu olması için sağlaması gereken 2 koşuldan en azından birisini sağlamasın. Genelliği bozmadan, $x_0, y_0 \in S$, $\alpha \in \Gamma$ olmak üzere

$$\mu_{F(a)}(x_0\alpha y_0) < \mu_{F(a)}(x_0) \wedge \mu_{F(a)}(y_0)$$

olduğunu varsayalım.

$$\mu_{F(a)}(x_0\alpha y_0) = m,\ \mu_{F(a)}(x_0) = n,\ \mu_{F(a)}(y_0) = p$$

alalım. Bu durumda $m < n \wedge p$ olur. $q = \dfrac{m+(n \wedge p)}{2}$ alalım. Bu durumda

$m < q < n \wedge p$ olur ve $\mu_{F(a)}(x_0\alpha y_0) = m < q$ ve $x_0\alpha y_0 \notin F_q(a)$ elde edilir. Diğer taraftan,

$$\mu_{F(a)}(x_0) = n > n \wedge p > q \quad \text{ve} \quad \mu_{F(a)}(y_0) = p > n \wedge p > q$$

olmak üzere $x_0 \in F_q(a)$ ve $y_0 \in F_q(a)$ elde edilir. Bu sonuç S üzerinde $(F,A)_l$'nin klasik esnek Γ-yarı grubu olmasıyla çelişir. Bundan dolayı Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

Teorem 3.12 S üzerinde (F,A) ve (G,B) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olmak üzere $(F,A)\tilde{\subseteq}(G,B)$ olsun. Bu durumda $l+u\leq 1$ ve $l,u\in[0,1]$ için $(F,A)_{(l,u)}\tilde{\subseteq}(G,B)_{(l,u)}$.

İspat. $(F,A)\tilde{\subseteq}(G,B)$ olsun ve $\forall a\in A$ için $F(a)\subseteq G(a)$. $l+u\leq 1$ ve $l,u\in[0,1]$ için

$(F,A)_{(l,u)}=\left(F_{(l,u)},A\right)$, S üzerinde bir esnek Γ-yarı gruptur. Benzer şekilde,

$(G,B)_{(l,u)}=\left(G_{(l,u)},B\right)$ de S üzerinde bir esnek Γ-yarı gruptur. $(F,A)_{(l,u)}\tilde{\subseteq}(G,B)_{(l,u)}$ ispatlamak için $A\subseteq B$ ve $\forall a\in A$ için $F_{(l,u)}(a)\subseteq G_{(l,u)}(a)$ olduğunu göstermeliyiz.

İlk olarak $(F,A)\tilde{\subseteq}(G,B)$ olduğundan $A\subseteq B$ varsayımımızdan sağlanır. Herhangi bir $a\in A$ için $x\in F_{(l,u)}(a)$ alalım. $\mu_{F(a)}(x)\geq l$ ve $v_{F(a)}(x)\leq u$ sağlanır. $\mu_{G(a)}(x)\geq \mu_{F(a)}(x)$ ve $v_{G(a)}(x)\leq v_{F(a)}(x)$ olduğundan $\mu_{G(a)}(x)\geq l$ ve $v_{G(a)}(x)\leq u$ bulunur ve $x\in G_{(l,u)}(a)$ elde edilir. Dolayısıyla $\forall a\in A$ için $F_{(l,u)}(a)\subseteq G_{(l,u)}(a)$ olur ve $(F,A)_{(l,u)}\tilde{\subseteq}(G,B)_{(l,u)}$ sonucuna ulaşılır.

Sonuç 3.2 S üzerinde (F,A) ve (G,B) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olsun. Eğer $(F,A)\tilde{=}(G,B)$ ise, bu durumda $l+u\leq 1$ ve $l,u\in[0,1]$ için $(F,A)_{(l,u)}\tilde{=}(G,B)_{(l,u)}$.

Teorem 3.13 S üzerinde (F,A) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olsun. $l_1,l_2,u_1,u_2\in[0,1]$ olmak üzere $l_1\leq l_2$ ve $u_1\geq u_2$ olsun. Bu durumda

$$(F,A)_{(l_2,u_2)}\tilde{\subseteq}(F,A)_{(l_1,u_1)}.$$

İspat. $l_1,l_2,u_1,u_2\in[0,1]$ olmak üzere $l_1\leq l_2$ ve $u_1\geq u_2$ olsun.

$(F,A)_{(l_1,u_1)}=\left(F_{(l_1,u_1)},A\right)$ ve $(F,A)_{(l_2,u_2)}=\left(F_{(l_2,u_2)},A\right)$ olur. Herhangi bir $a\in A$ için

$$x\in F_{(l_2,u_2)}(a)\Rightarrow \mu_{F(a)}(x)\geq l_2 \text{ ve } v_{F(a)}(x)\leq u_2.$$

$l_1\leq l_2$ olduğundan $\mu_{F(a)}(x)\geq l_2\geq l_1\Rightarrow \mu_{F(a)}(x)\geq l_1$

$u_1\geq u_2$ olduğundan $v_{F(a)}(x)\leq u_2\leq u_1\Rightarrow v_{F(a)}(x)\leq u_1$

$\mu_{F(a)}(x) \geq l_1$ ve $v_{F(a)}(x) \leq u_1$ olduğundan $\forall a \in A$ için $x \in F_{(l_1,u_1)}(a)$ bulunur. Böylece, $F_{(l_2,u_2)}(a) \subseteq F_{(l_1,u_1)}(a)$ ve $(F,A)_{(l_2,u_2)} \tilde{\subseteq} (F,A)_{(l_1,u_1)}$ elde edilir.

Teorem 3.14 S üzerinde (F,A) ve (G,B) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olsun. Bu durumda $l+u \leq 1$ ve $l,u \in [0,1]$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i. $(F,A) \tilde{\subseteq} (G,B) \Rightarrow (F,A)_{(l,u)} \tilde{\subseteq} (G,B)_{(l,u)}$

ii. $((F,A) \tilde{\cup} (G,B))_{(l,u)} = (F,A)_{(l,u)} \tilde{\cup} (G,B)_{(l,u)}$

iii. $((F,A) \tilde{\cap} (G,B))_{(l,u)} = (F,A)_{(l,u)} \tilde{\cap} (G,B)_{(l,u)}$

İspat. i. $(F,A) \tilde{\subseteq} (G,B)$ olsun. Bu durumda $A \subseteq B$ ve $\forall a \in A, \forall x \in S$ için $\mu_{F(a)}(x) \leq \mu_{G(a)}(x)$ ve $v_{F(a)}(x) \geq v_{G(a)}(x)$ olur. $(F,A)_{(l_0,u_0)} \tilde{\nsubseteq} (G,B)_{(l_0,u_0)}$ olacak şekilde $l_0, u_0 \in [0,1]$ olduğunu varsayalım. En azından bir tane $a \in A$ için

$x_0 \in F_{(l_0,u_0)}(a)$ ve $x_0 \notin G_{(l_0,u_0)}(a)$ olacak şekilde $x_0 \in S$ elemanı vardır. Yani,

$$\mu_{F(a)}(x_0) \geq l_0,\ v_{F(a)}(x_0) \leq u_0 \text{ ve } \mu_{G(a)}(x_0) < l_0,\ v_{G(a)}(x_0) > u_0 .$$

$\forall a \in A, \forall x \in S$ için $\mu_{F(a)}(x) \leq \mu_{G(a)}(x)$ ve $v_{F(a)}(x) \geq v_{G(a)}(x)$ olduğundan bu durum bir çelişkidir. Dolayısıyla varsayımımız yanlış olup $F_{(l_0,u_0)}(a) \subseteq G_{(l_0,u_0)}(a)$ ve $(F,A)_{(l_0,u_0)} \tilde{\subseteq} (G,B)_{(l_0,u_0)}$ elde edilir. Benzer olarak ii. ve iii. durumları da kolaylıkla ispatlanabilir.

3.2 Sezgisel Bulanık Esnek Γ-idealler

Bu bölümde, Γ-yarı grup S üzerinde sezgisel bulanık esnek Γ-ideal, sezgisel bulanık esnek iç Γ-ideal ve sezgisel bulanık esnek bi Γ-ideal tanımları verilecektir. Kesişim, birleşim, VE, VEYA operatör işlemleri altında tekrar sezgisel bulanık esnek (sol, sağ, iç, bi) Γ-ideal olduğu ifade edilecektir.

3.2.1 Sezgisel Bulanık Esnek Γ-ideal

Tanım 3.14 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olmak üzere eğer $\forall a\in A$, $\forall x,y\in S$ ve $\alpha\in\Gamma$ için aşağıdaki koşulları sağlarsa

$$\mu_{F(a)}(x\alpha y)\geq \mu_{F(a)}(y)\left[\mu_{F(a)}(x\alpha y)\geq \mu_{F(a)}(x)\right] \quad \text{ve}$$

$$v_{F(a)}(x\alpha y)\leq v_{F(a)}(y)\left[v_{F(a)}(x\alpha y)\leq v_{F(a)}(x)\right]$$

Γ-yarı grup S üzerinde (F,A)'ya bir sezgisel bulanık esnek sol (sağ) Γ-ideal denir.

Tanım 3.15 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) hem sezgisel bulanık esnek sol Γ-ideal hem de sezgisel bulanık esnek sağ Γ-ideal ise, (F,A)'ya sezgisel bulanık esnek Γ-ideal denir.

Ayrıca aşağıdaki gibi de tanımlanabilir.

Tanım 3.16 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grubu eğer $\forall a\in A,\ \forall x,y\in S$ ve $\alpha\in\Gamma$ için

$$\mu_{F(a)}(x\alpha y)\geq \mu_{F(a)}(x)\vee \mu_{F(a)}(y)$$

$$v_{F(a)}(x\alpha y)\leq v_{F(a)}(x)\wedge v_{F(a)}(y)$$

şartlarını sağlarsa (F,A)'ya bir sezgisel bulanık esnek ideal denir.

Not 3.1 Γ-yarı grup S üzerinde her sezgisel bulanık esnek sol (sağ) Γ-ideal S'nin bir sezgisel bulanık esnek alt Γ-yarı grubudur, fakat tersi genellikle doğru değildir.

Örnek 3.6 $S=\{x,y,z\}$ ve $\Gamma=\{\alpha\}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki tabloda tanımlanan işleme göre S bir Γ-yarı gruptur.

α	x	y	z
x	x	z	z
y	z	y	z
z	z	z	z

$E=\{e_1,e_2,e_3\}$ ve $A=\{e_1,e_2\}$ olsun. Bu durumda (F,A) sezgisel bulanık esnek kümesi aşağıda verilen şekliyle tanımlansın.

$$\mu_{F(e_1)} = \{(x,0.2),(y,0.4),(z,0.6)\}$$

$$\mu_{F(e_2)} = \{(x,0.3),(y,0.5),(z,0.9)\}$$

$$\nu_{F(e_1)} = \{(x,0.7),(y,0.6),(z,0.4)\}$$

$$\nu_{F(e_2)} = \{(x,0.6),(y,0.5),(z,0.05)\}.$$

Dolayısıyla (F,A) bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur. Aynı zamanda S üzerinde sezgisel bulanık esnek sol Γ-ideal ve sezgisel bulanık esnek sağ Γ-idealdir. Böylece S üzerinde (F,A) bir sezgisel bulanık esnek idealdir.

Öte yandan $B=\{e_3\}$ alalım ve (G,B) sezgisel bulanık esnek kümesini de

$$\mu_{G(e_3)} = \{(x,0.3),(y,0.9),(z,0.5)\}$$

$$\nu_{G(e_3)} = \{(x,0.6),(y,0.1),(z,0.4)\}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda S üzerinde (G,B) bir sezgisel bulanık esnek alt Γ-yarı grubudur, fakat

$$\mu_{G(e_3)}(x\alpha y) = \mu_{G(e_3)}(z) = 0.5 \not\geq 0,9 = \mu_{G(e_3)}(x) \vee \mu_{G(e_3)}(y)$$

olduğundan S üzerinde (G,B) bir sezgisel bulanık esnek ideal değildir.

Teorem 3.15 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek (sol, sağ) Γ-ideal olsun. Bu durumda $(F,A)\tilde{\wedge}_\Gamma(G,B)$ ve $(F,A)\tilde{\sqcap}_\Gamma(G,B)$ de S üzerinde sezgisel bulanık esnek (sol, sağ) Γ-idealdir.

İspat. Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek (sol, sağ) Γ-ideal olsun. Bu durumda $\forall(a,b)\in C=A\times B$ için $H(a,b)=F(a)\cap G(b)$ olmak üzere $(F,A)\tilde{\wedge}_\Gamma(G,B)=(H,C)$ şeklinde tanımlanır. Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek (sol, sağ) Γ-ideal olduğundan $\forall(a,b)\in C=A\times B$, $\forall x,y\in S$ ve $\alpha\in\Gamma$ için,

$$\begin{aligned}\mu_{H(a,b)}(x\alpha y) = \mu_{F(a)\cap G(b)}(x\alpha y) \\ &= \mu_{F(a)}(x\alpha y) \wedge \mu_{G(b)}(x\alpha y) \\ &\geq \left(\mu_{F(a)}(x) \vee \mu_{F(a)}(y)\right) \wedge \left(\mu_{G(b)}(x) \vee \mu_{G(b)}(y)\right) \\ &= \left(\mu_{F(a)}(x) \wedge \mu_{G(b)}(x)\right) \vee \left(\mu_{F(a)}(y) \wedge \mu_{G(b)}(y)\right) \\ &= \left(\mu_{F(a)\cap G(b)}(x)\right) \vee \left(\mu_{F(a)\cap G(b)}(y)\right) \\ &= \mu_{H(a,b)}(x) \vee \mu_{H(a,b)}(y)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}v_{H(a,b)}(x\alpha y) = v_{F(a)\cap G(b)}(x\alpha y) \\ &= v_{F(a)}(x\alpha y) \wedge v_{G(b)}(x\alpha y) \\ &\leq \left(v_{F(a)}(x) \wedge v_{F(a)}(y)\right) \vee \left(v_{G(b)}(x) \wedge v_{G(b)}(y)\right) \\ &= \left(v_{F(a)}(x) \vee v_{G(b)}(x)\right) \wedge \left(v_{F(a)}(y) \vee v_{G(b)}(y)\right) \\ &= \left(v_{F(a)\cap G(b)}(x)\right) \wedge \left(v_{F(a)\cap G(b)}(y)\right) \\ &= v_{H(a,b)}(x) \wedge v_{H(a,b)}(y)\end{aligned}$$

elde edilir. Γ-yarı grup S üzerinde $(F,A)\tilde{\wedge}_\Gamma(G,B)=(H,C)$ 'nin sezgisel bulanık esnek (sol, sağ) Γ-ideal olduğu görülür. Benzer şekilde Γ-yarı grup S üzerinde $(F,A)\tilde{\sqcap}_\Gamma(G,B)$'nin de sezgisel bulanık esnek (sol, sağ) Γ-ideal olduğu ispatlanabilir.

Teorem 3.16 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek (sol, sağ) Γ-ideal olsun. Bu durumda $(F,A)\tilde{\vee}_\Gamma(G,B)$ ve $(F,A)\tilde{\sqcup}_\Gamma(G,B)$ de S üzerinde sezgisel bulanık esnek (sol, sağ) Γ-idealdir.

İspat. Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek (sol, sağ) Γ-ideal olsun. Bu durumda $\forall(a,b)\in C=A\times B$ için $K(a,b)=F(a)\cup G(b)$ olmak üzere $(F,A)\tilde{\vee}_\Gamma(G,B)=(K,C)$ şeklinde tanımlanır. S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek (sol, sağ) Γ-ideal olduğundan her $x,y\in S$ ve $\alpha\in\Gamma$ için

$$
\begin{aligned}
\mu_{K(a,b)}(x\alpha y) &= \mu_{F(a)\cup G(b)}(x\alpha y) \\
&= \mu_{F(a)}(x\alpha y) \vee \mu_{G(b)}(x\alpha y) \\
&\geq \left(\mu_{F(a)}(x) \vee \mu_{F(a)}(y)\right) \vee \left(\mu_{G(b)}(x) \vee \mu_{G(b)}(y)\right) \\
&= \left(\mu_{F(a)}(x) \vee \mu_{G(b)}(x)\right) \vee \left(\mu_{F(a)}(y) \vee \mu_{G(b)}(y)\right) \\
&= \left(\mu_{F(a)\cup G(b)}(x)\right) \vee \left(\mu_{F(a)\cup G(b)}(y)\right) \\
&= \mu_{K(a,b)}(x) \vee \mu_{K(a,b)}(y)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
v_{K(a,b)}(x\alpha y) &= v_{F(a)\cup G(b)}(x\alpha y) \\
&= v_{F(a)}(x\alpha y) \wedge v_{G(b)}(x\alpha y) \\
&\leq \left(v_{F(a)}(x) \wedge v_{F(a)}(y)\right) \wedge \left(v_{G(b)}(x) \wedge v_{G(b)}(y)\right) \\
&= \left(v_{F(a)}(x) \wedge v_{G(b)}(x)\right) \wedge \left(v_{F(a)}(y) \wedge v_{G(b)}(y)\right) \\
&= \left(v_{F(a)\cup G(b)}(x)\right) \wedge \left(v_{F(a)\cup G(b)}(y)\right) \\
&= v_{K(a,b)}(x) \wedge v_{K(a,b)}(y)
\end{aligned}
$$

bulunur. Γ-yarı grup S üzerinde $(F,A)\tilde{\vee}_\Gamma(G,B)=(K,C)$ sezgisel bulanık esnek (sol, sağ) Γ-idealdir. Benzer şekilde S üzerinde $(F,A)\tilde{\sqcup}_\Gamma(G,B)$ de sezgisel bulanık esnek (sol, sağ) Γ-ideal olduğu ispatlanır.

Teorem 3.17 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek (sol, sağ) Γ-ideal olsun. Bu durumda $(F,A)\tilde{\cap}_\Gamma(G,B)$ ve $(F,A)\tilde{\cup}_\Gamma(G,B)$ de S üzerinde sezgisel bulanık esnek (sol, sağ) Γ-idealdir.

İspat. Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek (sol, sağ) Γ-ideal olsun. Bu durumda her $c\in C=A\cup B$ için

$$
H(c)=\left\{\begin{array}{ll}
F(c) & \text{eğer } c\in A-B \\
G(c) & \text{eğer } c\in B-A \\
F(c)\wedge G(c) & \text{eğer } c\in A\cap B
\end{array}\right\}
$$

olmak üzere $(F,A)\tilde{\cap}_\Gamma(G,B)=(H,C)$ şeklinde tanımlanır. $c\in C$, $x,y\in S$ ve $\alpha\in\Gamma$

için

$i)$ Eğer $c \in A - B$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned}\mu_{H(c)}(x\alpha y) &= \mu_{F(c)}(x\alpha y)\\ &\geq \mu_{F(c)}(x) \vee \mu_{F(c)}(y)\\ &= \mu_{H(c)}(x) \vee \mu_{H(c)}(y)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\nu_{H(c)}(x\alpha y) &= \nu_{F(c)}(x\alpha y)\\ &\leq \nu_{F(c)}(x) \wedge \nu_{F(c)}(y)\\ &= \nu_{H(c)}(x) \wedge \nu_{H(c)}(y)\end{aligned}$$

elde edilir.

$ii)$ Eğer $c \in B - A$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned}\mu_{H(c)}(x\alpha y) &= \mu_{G(c)}(x\alpha y)\\ &\geq \mu_{G(c)}(x) \vee \mu_{G(c)}(y)\\ &= \mu_{H(c)}(x) \vee \mu_{H(c)}(y)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\nu_{H(c)}(x\alpha y) &= \nu_{G(c)}(x\alpha y)\\ &\leq \nu_{G(c)}(x) \wedge \nu_{G(c)}(y)\\ &= \nu_{H(c)}(x) \wedge \nu_{H(c)}(y)\end{aligned}$$

bulunur.

$iii)$ Eğer $c \in A \cap B$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned}\mu_{H(c)}(x\alpha y) &= \mu_{F(c)\cap G(c)}(x\alpha y)\\ &= \mu_{F(c)}(x\alpha y) \wedge \mu_{G(c)}(x\alpha y)\\ &\geq \left(\mu_{F(c)}(x) \vee \mu_{F(c)}(y)\right) \wedge \left(\mu_{G(c)}(x) \vee \mu_{G(c)}(y)\right)\\ &= \left(\mu_{F(c)}(x) \wedge \mu_{G(c)}(x)\right) \vee \left(\mu_{F(c)}(y) \wedge \mu_{G(c)}(y)\right)\\ &= \mu_{F(c)\cap G(c)}(x) \vee \mu_{F(c)\cap G(c)}(y)\\ &= \mu_{H(c)}(x) \vee \mu_{H(c)}(y)\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
v_{H(c)}(x\alpha y) &= v_{F(c)\cap G(c)}(x\alpha y) \\
&= v_{F(c)}(x\alpha y) \wedge v_{G(c)}(x\alpha y) \\
&\leq \left(v_{F(c)}(x) \wedge v_{F(c)}(y)\right) \wedge \left(v_{G(c)}(x) \wedge v_{G(c)}(y)\right) \\
&= \left(v_{F(c)}(x) \wedge v_{G(c)}(x)\right) \wedge \left(v_{F(c)}(y) \wedge v_{G(c)}(y)\right) \\
&= v_{F(c)\cap G(c)}(x) \wedge v_{F(c)\cap G(c)}(y) \\
&= v_{H(c)}(x) \wedge v_{H(c)}(y)
\end{aligned}
$$

bulunur ve ispat tamamlanır. Benzer şekilde $(F,A)\tilde{\cup}_{\Gamma}(G,B)$ de S üzerinde sezgisel bulanık esnek (sol, sağ) Γ-ideal olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

3.2.2 Sezgisel Bulanık Esnek Bi Γ-ideal

Tanım 3.17 Γ-yarı grup S'nin bir (F,A) sezgisel bulanık esnek alt Γ-yarı grubu eğer $\forall a \in A,\ \forall x, y \in S$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ için

$$\mu_{F(a)}(x\alpha y\beta z) \geq \mu_{F(a)}(x) \wedge \mu_{F(a)}(z) \quad \text{ve}$$

$$v_{F(a)}(x\alpha y\beta z) \leq v_{F(a)}(x) \vee v_{F(a)}(z)$$

koşullarını sağlarsa (F,A)'ya sezgisel bulanık esnek bi-Γ-ideali denir.

Γ-yarı grup S'nin her sezgisel bulanık esnek Γ-ideali S'nin bir sezgisel bulanık esnek bi Γ-idealidir, fakat tersi doğru değildir. Tersinin doğru olmadığına örnek aşağıdaki gibidir.

Örnek 3.7 $S=\{a,b,c,d,e\}$ ve $\Gamma=\{\alpha,\beta\}$ olsun. Bu durumda S aşağıdaki tabloda verilen işlemler altında bir Γ-yarı gruptur.

α	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	a	a	b	c
c	a	b	c	a	a
d	a	a	a	d	e
e	a	d	e	a	a

ve

β	a	b	c	d	e
a	a	d	a	d	d
b	a	b	a	d	d
c	a	d	c	d	e
d	a	d	a	d	d
e	a	d	c	d	e

Parametre ailesi $E=\{e_1,e_2\}$ ve $A=\{e_1\}\subseteq E$ olsun. $F:A\to IF(S)$ dönüşümü için

μ	e_1	e_2		v	e_1	e_2
a	0.7	0.6		a	0.3	0.4
b	0.6	0.5		b	0.4	0.5
c	0.5	0.4	*ve*	c	0.5	0.6
s	0.7	0.7		d	0.2	0.3
e	0.7	0.7		e	0.3	0.3

olarak verilsin. S üzerinde (F,A) bir sezgisel bulanık esnek bi-Γ-idealidir. Fakat

$$\mu_{F(e_1)}(b\alpha d\alpha d)=\mu_{F(e_1)}(b)=0.6\not\geq 0.7=\mu_{F(e_1)}(b)\vee\mu_{F(e_1)}(d)$$

olduğundan S üzerinde (F,A) bir sezgisel bulanık esnek Γ-ideali değildir.

Aşağıda verilecek olan teorem $\Gamma-$yarı grup S üzerinde sezgisel bulanık esnek küme S üzerinde bir sezgisel bulanık esnek bi ideal olması için gerek ve yeter koşul S üzerinde sezgisel bulanık esnek kümenin (l,u) seviye kümesi S üzerinde bir esnek bi ideal olduğunu göstereceğiz.

Teorem 3.18 $\Gamma-$yarı grup S üzerinde (F,A) bir sezgisel bulanık esnek bi Γ-idealdir $\Leftrightarrow$ $\forall l,u\in[0,1]$ için S üzerinde $(F,A)_{l,u}$ esnek bi Γ-idealdir.

İspat. $(\Rightarrow)$: $\Gamma-$yarı grup S üzerinde (F,A) bir sezgisel bulanık esnek bi Γ-ideal olduğunu kabul edelim. $\forall l,u\in[0,1]$ olmak üzere $a\in A$ ve $\alpha,\beta\in\Gamma$ için $x,y\in F_{(l,u)}(a)$ alalım.

$$\mu_{F(a)}(x)\geq l,\ \ \mu_{F(a)}(y)\geq l,$$
$$v_{F(a)}(x)\leq u,\ \ v_{F(a)}(y)\leq u$$

sağlanır. Kabulümüzden dolayı S'de $F(a)$ bir sezgisel bulanık bi Γ-idealdir ve

$$\mu_{F(a)}(x\alpha y)\geq\mu_{F(a)}(x)\wedge\mu_{F(a)}(y)\geq l$$
$$v_{F(a)}(x\alpha y)\leq v_{F(a)}(x)\vee v_{F(a)}(y)\leq u$$

olur. Buradan $x\alpha y \in F_{(l,u)}(a)$ elde edilir. Dolayısıyla $F_{(l,u)}(a)$, S'nin bir alt yarı grubudur.

Ayrıca,

$$\mu_{F(a)}(x\alpha z\beta y) \geq \mu_{F(a)}(x) \wedge \mu_{F(a)}(y) \geq l$$
$$v_{F(a)}(x\alpha z\beta y) \leq v_{F(a)}(x) \vee v_{F(a)}(y) \leq u$$

olur ve $x\alpha z\beta y \in F_{(l,u)}(a)$ bulunur. Bu da $F_{(l,u)}(a)$'nın S'nin bir bi Γ-ideali olduğunu ve S üzerinde $(F,A)_{l,u}$ esnek bi Γ-ideal olduğunu gösterir.

$(\Leftarrow)$: Tersine, $\forall l,u \in [0,1]$ için S üzerinde $(F,A)_{l,u}$ esnek bi Γ-ideal olduğunu varsayalım.

$a \in A$, $\alpha,\beta \in \Gamma$ ve $x,y \in S$ olsun.

$$l = \mu_{F(a)}(x) \wedge \mu_{F(a)}(y)$$
$$u = v_{F(a)}(x) \vee v_{F(a)}(y)$$

olarak seçelim. Bu durumda $x,y \in F_{(l,u)}(a)$ olur . $F_{(l,u)}(a)$ da S'nin bir alt Γ- yarı grubu olduğundan $x\alpha y \in F_{(l,u)}(a)$ bulunur. Bu da

$$\mu_{F(a)}(x\alpha y) \geq \mu_{F(a)}(x) \wedge \mu_{F(a)}(y) = l$$
$$v_{F(a)}(x\alpha y) \leq v_{F(a)}(x) \vee v_{F(a)}(y) = u$$

sağlar ve $F(a)$'nın S'nin bir sezgisel bulanık alt Γ-yarı grubu olduğu görülür. Bu kez,

$$l = \mu_{F(a)}(x) \wedge \mu_{F(a)}(z)$$
$$u = v_{F(a)}(x) \vee v_{F(a)}(z)$$

olarak seçelim. $\forall z \in S$ için varsayımımız gereği $x\alpha y\beta z \in F_{(l,u)}$. Böylece,

$$\mu_{F(a)}(x\alpha y\beta z) \geq \mu_{F(a)}(x) \wedge \mu_{F(a)}(z) = l$$
$$v_{F(a)}(x\alpha y\beta z) \leq v_{F(a)}(x) \vee v_{F(a)}(z) = u$$

olur ve $F(a)$ da S'nin bir sezgisel bulanık bi Γ-ideali olduğu görülür. Sonuç olarak S üzerinde (F,A) sezgisel bulanık esnek bi Γ-idealdir.

Teorem 3.19 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek bi Γ- ideal olsun. Bu durumda $(F,A)\tilde{\curlywedge}_{\Gamma}(G,B)$ ve $(F,A)\tilde{\sqcap}_{\Gamma}(G,B)$ de S üzerinde sezgisel bulanık esnek bi Γ- idealdir.

İspat. Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) sezgisel bulanık esnek bi Γ- ideal olsun. Tanım 3.7 gereğince $(F,A)\tilde{\curlywedge}(G,B)=(K,C)$'nin $C=A\times B$ olmak üzere $\forall(a,b)\in C$ için $K(a,b)=F(a)\cap G(b)$ olarak tanımlandığını biliyoruz. $x,y,z\in S$ ve $\alpha,\beta\in\Gamma$ alalım.

$$\begin{aligned}
\mu_{K(a,b)}(x\alpha y\beta z) &= \mu_{F(a)\cap G(b)}(x\alpha y\beta z)\\
&= \mu_{F(a)}(x\alpha y\beta z)\wedge\mu_{G(b)}(x\alpha y\beta z)\\
&\geq \left(\mu_{F(a)}(x)\wedge\mu_{F(a)}(z)\right)\wedge\left(\mu_{G(b)}(x)\wedge\mu_{G(b)}(z)\right)\\
&= \left(\mu_{F(a)}(x)\wedge\mu_{G(b)}(x)\right)\wedge\left(\mu_{F(a)}(z)\wedge\mu_{G(b)}(z)\right)\\
&= \mu_{F(a)\cap G(b)}(x)\wedge\mu_{F(a)\cap G(b)}(z)\\
&= \mu_{K(a,b)}(x)\wedge\mu_{K(a,b)}(z)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
v_{K(a,b)}(x\alpha y\beta z) &= v_{F(a)\cup G(b)}(x\alpha y\beta z)\\
&= v_{F(a)}(x\alpha y\beta z)\vee v_{G(b)}(x\alpha y\beta z)\\
&\leq \left(v_{F(a)}(x)\vee v_{F(a)}(z)\right)\vee\left(v_{G(b)}(x)\vee v_{G(b)}(z)\right)\\
&= \left(v_{F(a)}(x)\vee v_{G(b)}(x)\right)\vee\left(v_{F(a)}(z)\vee v_{G(b)}(z)\right)\\
&= v_{F(a)\cap G(b)}(x)\vee v_{F(a)\cap G(b)}(z)\\
&= v_{K(a,b)}(x)\vee v_{K(a,b)}(z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Γ-yarı grup S üzerinde $(F,A)\tilde{\curlywedge}(G,B)=(K,C)$ sezgisel bulanık esnek bi Γ- idealdir.

Teorem 3.20 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek bi Γ- ideal olsun. Bu durumda $(F,A)\tilde{\cap}_{\Gamma}(G,B)$ ve $(F,A)\tilde{\cup}_{\Gamma}(G,B)$ de S üzerinde sezgisel bulanık esnek bi Γ- idealdir.

İspat. Teorem 3.17'nin ispatına benzer olarak gösterilebilir.

Örnek 3.8 $S=\{s_1,s_2,s_3\}$ ve $\Gamma=\{\alpha\}$ olmak üzere aşağıda verilen tablo ile

α	s_1	s_2	s_3
s_1	s_1	s_2	s_3
s_2	s_2	s_2	s_3
s_3	s_3	s_3	s_3

S bir Γ-yarı gruptur. $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ parametrelerin kümesi olmak üzere $A=\{e_2,e_4\}\subseteq E$ ve $B=\{e_2,e_3\}\subseteq E$ olsun. S üzerinde (F,A) ve (G,B) sezgisel bulanık esnek bi Γ-idealleri

$$F(e_2)=\{s_1/(0.3,0.7),s_2/(0.5,0.5),s_3/(0.7,0.3)\}$$

$$F(e_4)=\{s_1/(0.4,0.6),s_2/(0.6,0.3),s_3/(0.8,0.1)\}$$

$$G(e_2)=\{s_1/(0.2,0.8),s_2/(0.6,0.3),s_3/(0.8,0.1)\}$$

$$G(e_3)=\{s_1/(0.3,0.7),s_2/(0.7,0.2),s_3/(0.8,0.2)\}$$

ile tanımlayalım.

$$\mu_{F\cap G(e_2)}(s_1)=\mu_{F(e_2)}(s_1)\wedge\mu_{G(e_2)}(s_1)=0.3\wedge 0.2=0.2$$

$$\mu_{F\cap G(e_2)}(s_2)=\mu_{F(e_2)}(s_2)\wedge\mu_{G(e_2)}(s_2)=0.5\wedge 0.6=0.5$$

$$\mu_{F\cap G(e_2)}(s_3)=\mu_{F(e_2)}(s_3)\wedge\mu_{G(e_2)}(s_3)=0.7\wedge 0.8=0.7$$

ve

$$v_{F\cap G(e_2)}(s_1)=v_{F(e_2)}(s_1)\vee v_{G(e_2)}(s_1)=0.7\vee 0.8=0.8$$

$$v_{F\cap G(e_2)}(s_2)=v_{F(e_2)}(s_2)\vee v_{G(e_2)}(s_2)=0.5\vee 0.3=0.5$$

$$v_{F\cap G(e_2)}(s_3)=v_{F(e_2)}(s_3)\vee v_{G(e_2)}(s_3)=0.3\vee 0.1=0.3$$

olur ve

$$F\cap G(e_2)=\{s_1/(0.2,0.8),s_2/(0.5,0.5),s_3/(0.7,0.3)\}$$

$$F\cap G(e_3)=\{s_1/(0.3,0.7),s_2/(0.7,0.2),s_3/(0.8,0.2)\}$$

$$F \cap G(e_4) = \{s_1/(0.4,0.6), s_2/(0.6,0.3), s_3/(0.8,0.1)\}$$

bulunur ve böylece S üzerinde $(F,A)\tilde{\cap}(G,B)$ sezgisel bulanık esnek bi Γ-idealdir.

Benzer şekilde,

$$F \cup G(e_2) = \{s_1/(0.3,0.7), s_2/(0.6,0.3), s_3/(0.8,0.1)\}$$

$$F \cup G(e_3) = \{s_1/(0.3,0.7), s_2/(0.7,0.2), s_3/(0.8,0.2)\}$$

$$F \cup G(e_4) = \{s_1/(0.4,0.6), s_2/(0.6,0.3), s_3/(0.8,0.1)\}$$

olur ve dolayısıyla S üzerinde $(F,A)\tilde{\cup}(G,B)$ sezgisel bulanık esnek bi Γ-idealdir.

Teorem 3.21 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek bi Γ- ideal olsun. Bu durumda $(F,A)\tilde{\vee}_\Gamma(G,B)$ ve $(F,A)\tilde{\sqcup}_\Gamma(G,B)$ de S üzerinde sezgisel bulanık esnek bi Γ- idealdir.

İspat. Teorem 3.16'nın ispatına benzer olarak kolaylıkla yapılır.

3.2.3 Sezgisel Bulanık Esnek İç Γ-ideal

Tanım 3.18 Γ-yarı grup S'nin bir (F,A) sezgisel bulanık esnek alt Γ-yarı grubu eğer $\forall a \in A,\ \forall x,y \in S$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için

$$\mu_{F(a)}(x\alpha y\beta z) \geq \mu_{F(a)}(y) \quad \text{ve}$$

$$\nu_{F(a)}(x\alpha y\beta z) \leq \nu_{F(a)}(y)$$

koşullarını sağlarsa (F,A)'ya sezgisel bulanık esnek interior (iç) Γ-ideali denir.

Not 3.2 Γ-yarı grup S'nin her sezgisel bulanık esnek Γ-ideali S'nin bir sezgisel bulanık esnek interior (iç) Γ-idealidir, fakat tersi doğru değildir. Tersinin doğru olmadığına örnek aşağıdaki gibidir.

Örnek 3.9 $S = \{a,b,c\}$ ve $\Gamma = \{\alpha,\beta\}$ olsun. Bu durumda S aşağıdaki tabloda verilen işlemler altında bir Γ-yarı gruptur.

α	a	b	c
a	a	c	c
b	c	b	c
c	c	c	c

ve

β	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	b

Parametre ailesi $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ ve $A=\{e_1,e_2\}\subseteq E$ olsun. $F:A\to IF(S)$ dönüşümü için

μ	e_1	e_2	e_3
a	0.5	0.6	0.7
b	0.5	0.6	0.7
c	0.4	0.5	0.4

ve

ν	e_1	e_2	e_3
a	0.4	0.3	0.2
b	0.4	0.3	0.2
c	0.6	0.4	0.5

olarak verilsin. Böylece Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) bir sezgisel bulanık esnek iç Γ-idealidir. Fakat

$$\mu_{F(e_1)}(a\alpha b)=\mu_{F(e_1)}(c)=0.4\ngeq 0.5=\mu_{F(e_1)}(a)\vee\mu_{F(e_1)}(b)$$

olduğundan S üzerinde (F,A) bir sezgisel bulanık esnek Γ-ideal değildir.

Teorem 3.22 $\Gamma-$yarı grup S üzerinde (F,A) bir sezgisel bulanık esnek iç Γ-idealdir $\Leftrightarrow$ $\forall l,u\in[0,1]$ için S üzerinde $(F,A)_{l,u}$ esnek iç Γ-idealdir.

İspat. Teorem 3.18'in ispatına benzer olarak kolaylıkla yapılır.

Teorem 3.23 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek iç Γ- ideal olsun. Bu durumda $(F,A)\tilde{\wedge}_\Gamma(G,B)$ ve $(F,A)\tilde{\sqcap}_\Gamma(G,B)$ de S üzerinde sezgisel bulanık esnek iç Γ- idealdir.

İspat. Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) sezgisel bulanık esnek iç Γ- ideal olsun. AND operatörü tanımı gereği $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)=(H,C)$'nin $C=A\times B$ olmak üzere $\forall(a,b)\in C$ için $H(a,b)=F(a)\cap G(b)$ olarak tanımlandığını biliyoruz. $x,y,z\in S$ ve $\alpha,\beta\in\Gamma$ alalım.

$$
\begin{aligned}
\mu_{H(a,b)}(x\alpha y\beta z) &= \mu_{F(a)\cap G(b)}(x\alpha y\beta z) \\
&= \mu_{F(a)}(x\alpha y\beta z) \wedge \mu_{G(b)}(x\alpha y\beta z) \\
&\geq \left(\mu_{F(a)}(y)\right) \wedge \left(\mu_{G(b)}(y)\right) \\
&= \mu_{F(a)\cap G(b)}(y) \\
&= \mu_{H(a,b)}(y)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\nu_{H(a,b)}(x\alpha y\beta z) &= \nu_{F(a)\cup G(b)}(x\alpha y\beta z) \\
&= \nu_{F(a)}(x\alpha y\beta z) \vee \nu_{G(b)}(x\alpha y\beta z) \\
&\leq \left(\nu_{F(a)}(y)\right) \vee \left(\nu_{G(b)}(y)\right) \\
&= \nu_{F(a)\cap G(b)}(y) \\
&= \nu_{H(a,b)}(y)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Γ-yarı grup S üzerinde $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)=(H,C)$ sezgisel bulanık esnek iç Γ- idealdir.

Teorem 3.24 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek iç Γ- ideal olsun. Bu durumda $(F,A)\tilde{\vee}_\Gamma(G,B)$ ve $(F,A)\tilde{\sqcup}_\Gamma(G,B)$ de S üzerinde sezgisel bulanık esnek iç Γ- idealdir.

İspat. Teorem 3.16'nın ispatına benzer olarak gösterilebilir.

Teorem 3.25 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek iç Γ- ideal olsun. Bu durumda $(F,A)\tilde{\cap}_\Gamma(G,B)$ ve $(F,A)\tilde{\cup}_\Gamma(G,B)$ de S üzerinde sezgisel bulanık esnek iç Γ- idealdir.

İspat. Teorem 3.17'nin ispatına benzer olarak gösterilebilir.

3.3 İdealistik Sezgisel Bulanık Esnek Γ-Yarı Gruplar

Tanım 3.19 S bir Γ-yarı grup ve S üzerinde (F,A) bir sezigsel bulanık esnek küme olsun. $\forall a\in A$ için $F(a)$, S'nin bir sezgisel bulanık Γ-ideali ise (F,A)'ya S üzerinde idealistik sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup denir.

S'nin her sezgisel bulanık Γ-ideali bir sezgisel bulanık alt Γ-yarı grubu olduğundan S üzerinde her idealistik sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

Örnek 3.10 Tüm pozitif tamsayıların kümesi $\mathbb{N} = \Gamma$ olmak üzere $S = \mathbb{Z}$ olsun. $a,b \in S$, $\alpha \in \Gamma$ için . tamsayıların çarpma işlemi olmak üzere $a\alpha b = a.\alpha.b$ olarak tanımlanan işleme göre $\mathbb{Z}$ bir $\Gamma -$ yarı gruptur. $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathbb{Z}$ için

$$F : \mathbb{N} \to IF(\mathbb{Z})$$

dönüşümü altında

$$\mu_{F(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{eğer } x = 2k-1,\ \exists k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{2}{n} & \text{eğer } x = 2k,\ \exists k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ve

$$\nu_{F(n)}(x) = \begin{cases} 1-\dfrac{2}{n} & \text{eğer } x = 2k-1,\ \exists k \in \mathbb{Z} \\ 1-\dfrac{3}{n} & \text{eğer } x = 2k,\ \exists k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

tanımlansın. Bu durumda $\mathbb{Z}$ üzerinde $(F,\mathbb{N})$ idealistik sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

Teorem 3.26 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) bir sezigisel bulanık esnek küme ve $B \subseteq A$ olsun. Eğer S üzerinde (F,A) bir idealistik sezigisel bulanık esnek Γ-yarı grup ise, bu durumda S üzerinde (F,B) de idealistik sezigisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

Teorem 3.27 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) idealistik sezigisel bulanık esnek Γ-yarı grup olsun. Bu durumda S üzerinde $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)$ de idealistik sezigisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

İspat. Tanım gereğince $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B) = (H, A\times B)$ ve $\forall (a,b) \in A\times B$ için $H(a,b) = F(a) \cap G(b)$ olduğunu biliyoruz. S üzerinde (F,A) ve (G,B) idealistik sezigisel bulanık esnek Γ-yarı grup olduğundan $\forall a \in A$ için $F(a)$ ve $\forall b \in B$ için $G(b)$, S'nin sezgisel bulanık Γ-idealleridir. İki sezgisel bulanık Γ-idealin ara kesiti de bir sezgisel bulanık Γ-ideal olduğundan $F(a) \cap G(b) = H(a,b)$ de S'nin sezgisel bulanık Γ-idealidir. Dolayısıyla S üzerinde $(F,A) \tilde{\wedge} (G,B)$ de idealistik sezigisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

Teorem 3.28 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) idealistik sezigisel bulanık esnek Γ-yarı grup olsun. Bu durumda S üzerinde $(F,A) \tilde{\vee} (G,B)$ de bir idealistik sezigisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

İspat. Teorem 3.27'nin ispatına benzer olarak kolaylıkla yapılabilir.

Teorem 3.29 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) idealistik sezigisel bulanık esnek Γ-yarı grup olsun. Bu durumda S üzerinde $(F,A) \tilde{\cap} (G,B)$ de bir idealistik sezigisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

İspat. Sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grubun ara kesiti

$(F,A) \tilde{\cap} (G,B) = (H,C)$ ve $C = A \cup B$ olmak üzere $\forall c \in C$, $\forall x, y \in S$ ve $\alpha \in \Gamma$ için

$$H(c) = \begin{cases} F(c) & \text{eğer } c \in A - B \\ G(c) & \text{eğer } c \in B - A \\ F(c) \wedge G(c) & \text{eğer } c \in A \cap B \end{cases}$$

şeklinde tanımlandığını biliyoruz.

1.durum: $c \in A - B$

$H(c) = F(c)$ olur ve Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) idealistik sezigisel bulanık esnek Γ-yarı grup olduğundan $F(c)$ da S'nin sezgisel bulanık Γ-ideali olur ve otomatik olarak $H(c)$ de S'nin sezgisel bulanık Γ-ideali olur. Böylece S üzerinde (H,C) idealistik sezgisel bulanık Γ-yarı gruptur.

2.durum: $c \in B - A$

1.duruma benzer olarak ispatı yapılabilir.

3.durum: $c \in A \cap B$

1. ve 2.duruma benzer olarak ispatı yapılır.

Teorem 3.30 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) idealistik sezigisel bulanık esnek Γ-yarı grup olsun. Bu durumda S üzerinde $(F,A)\tilde{\cup}(G,B)$ de idealistik sezigisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

İspat. Bir önceki teoremin ispatına benzer olarak yapılabilir.

Teorem 3.31 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) idealistik sezigisel bulanık esnek Γ-yarı grup olsun. Bu durumda S üzerinde $(F,A)\tilde{\sqcap}(G,B)$ idealistik sezigisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

İspat. Tanım gereğince $(F,A)\tilde{\cap}(G,B)=(H,A\cap B)$ ve $\forall c \in A\cap B$ için $H(c)=F(c)\cap G(c)$ olduğunu biliyoruz. S üzerinde (F,A) ve (G,B) idealistik sezigisel bulanık esnek Γ-yarı grup olduğundan $\forall c \in A\cap B$ için $F(c)$ ve $G(c)$ S'nin sezgisel bulanık Γ-idealleridir. S'nin iki sezgisel bulanık Γ-idealin ara kesiti de bir sezgisel bulanık Γ-ideal olduğundan $\forall c \in A\cap B$ için $F(c)\cap G(c)=H(c)$ de S'nin bir sezgisel bulanık Γ-idealidir ve böylece S üzerinde $(F,A)\tilde{\cap}(G,B)$ de idealistik sezigisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

Teorem 3.32 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) idealistik sezigisel bulanık esnek Γ-yarı grup olsun. Bu durumda S üzerinde $(F,A)\tilde{\sqcup}_{\Gamma}(G,B)$ idealistik sezigisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

İspat. Teorem 3.31'in ispatına benzer olarak yapılabilir.

Örnek 3.11 $S=\mathbb{Z}_6=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$ ve $\Gamma=\mathbb{Z}$ olmak üzere $\forall \bar{x},\bar{y}\in S$ ve $\alpha\in\Gamma$ için tamsayıların çarpma işlemi altında $\bar{x}\alpha\bar{y}=\overline{x\alpha y}$ tanımlanan işleme göre $\mathbb{Z}_6$ bir Γ-yarı gruptur. $E=\{a,b,c\}$, $A=\{a,b\}\subset E$ ve $B=\{b\}\subset E$ olsun. $\forall x\in S$ için

$\mu_{F(a)}(x)=\dfrac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ $\nu_{F(a)}(x)=\dfrac{1}{3}$

$$\mu_{F(b)}(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & x=\overline{0},\overline{3}\\ 0 & \text{aksi takdirde}\end{cases} \qquad \nu_{F(b)}(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & x=\overline{0},\overline{3}\\ 1 & \text{aksi takdirde}\end{cases}$$

$$\mu_{G(b)}(x)=\begin{cases}\frac{2}{5} & x=\overline{0},\overline{2},\overline{4}\\ 0 & \text{aksi takdirde}\end{cases} \qquad \nu_{G(b)}(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & x=\overline{0},\overline{2},\overline{4}\\ 1 & \text{aksi takdirde}\end{cases}$$

tanımlansın. Bu durumda $\mathbb{Z}_6$ üzerinde (F,A) ve (G,B) idealistik sezigisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur. $\mathbb{Z}_6$ üzerinde $(F,A)\tilde{\cap}(G,B)$, $(F,A)\tilde{\cup}(G,B)$, $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)$ ve $(F,A)\tilde{\vee}(G,B)$'nin idealistik sezigisel bulanık esnek Γ-yarı grup olduğu kolaylıkla görülebilir.

3.4 Sezgisel Bulanık Esnek Γ-Yarı grup Homomorfizması

Bu bölümde, ilk olarak sezgisel bulanık esnek Γ- fonksiyonu verilecek. Ardından sezgisel bulanık esnek Γ- fonksiyon altında sezgisel bulanık esnek kümenin görüntü ve ters görüntüleri tanımlanacak. Ek olarak, sezgisel bulanık esnek Γ-homomorfizması tanımı verilecek ve sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grubun homomorf görüntü ve ters homomorf görüntülerinin de sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grubu olduğu gösterilecektir.

Tanım 3.20 (F,A) ve (G,B) sırasıyla Γ-yarı grup S ve R üzerinde sezgisel bulanık esnek küme olsun. A ve B sırasıyla S ve R için parametre kümeleri olmak üzere

$$f:S\rightarrow R \quad \text{ve} \quad g:A\rightarrow B$$

iki fonksiyon olsun. Bu durumda (f,g) ikilisine S'den R'ye sezgisel bulanık esnek Γ-fonksiyonu denir.

Tanım 3.21 Γ-yarı grup S ve R üzerinde sırasıyla (F,A) ve (G,B) sezgisel bulanık esnek küme ve (f,g) de S'den R'ye sezgisel bulanık esnek Γ-fonksiyonu olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanırsa;

i. $f:S\rightarrow R$'ye bir $\Gamma-$yarı grup homomorfizması

ii. $g:A\rightarrow B$'ye bir örten fonksiyon

iii. $\forall a \in A$ için $f\left(F\left(a\right)\right) = G\left(g\left(a\right)\right)$

$\left(f,g\right)$'ye sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup homomorfizması denir.

Tanım 3.22 Sırasıyla S ve R üzerinde $\left(F,A\right)$ ve $\left(G,B\right)$ sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup ve $\left(f,g\right)$ ise S'den R'ye bir sezgisel bulanık esnek Γ-fonksiyonu olsun.

1. $\left(f,g\right)$ sezgisel bulanık esnek Γ-fonksiyonu altında $\left(F,A\right)$'nın görüntüsü R üzerinde bir sezgisel bulanık esnek kümedir, $\left(f,g\right)\left(F,A\right)$ ile gösterilir ve $\left(f,g\right)\left(F,A\right) = \left(f\left(F\right), g\left(A\right)\right)$ şeklinde tanımlanır, burada $\forall b \in g\left(A\right)$ ve $\forall r \in R$ için

$$\mu_{f(F)(b)}(r) = \begin{cases} \underset{f(x)=r}{\vee} \underset{g(a)=b}{\vee} \mu_{F(a)}(x) & \text{eğer } f^{-1}\left(r\right) \neq \varnothing \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

ve

$$\nu_{f(F)(b)}(r) = \begin{cases} \underset{f(x)=r}{\wedge} \underset{g(a)=b}{\wedge} \nu_{F(a)}(x) & \text{eğer } f^{-1}\left(r\right) \neq \varnothing \\ 1 & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

2. $\left(f,g\right)$sezgisel bulanık esnek Γ-fonksiyonu altında $\left(G,B\right)$'nin ters görüntüsü S üzerinde bir sezgisel bulanık esnek kümedir, $\left(f,g\right)^{-1}\left(G,B\right)$ ile gösterilir ve

$$\left(f,g\right)^{-1}\left(G,B\right) = \left(f^{-1}\left(G\right), g^{-1}\left(B\right)\right)$$

şeklinde tanımlanır, burada $\forall a \in g^{-1}\left(B\right)$ ve $\forall x \in S$ için

$$\mu_{f^{-1}(G)(a)}\left(x\right) = \mu_{G\left(g(a)\right)}\left(f\left(x\right)\right) \qquad \text{ve}$$

$$\nu_{f^{-1}(G)(a)}\left(x\right) = \nu_{G\left(g(a)\right)}\left(f\left(x\right)\right)$$

olur. Eğer f ve g injektif ise (surjektif), bu durumda $\left(f,g\right)$ sezgisel bulanık esnek Γ-fonksiyonu da injektiftir (surjektiftir).

Tanım 3.23 Sırasıyla S ve R üzerinde $\left(F,A\right)$ ve $\left(G,B\right)$ iki sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grubu ve $\left(f,g\right)$ ise S'den R'ye bir sezgisel bulanık esnek Γ-fonksiyonu olsun. Eğer $f : S \to R$ bir Γ-yarı grup homomorfizması ise, bu durumda $\left(f,g\right)$ sezgisel bulanık esnek Γ-homomorfizması adı verilir. (F,A) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grubu (G,B)'ye sezgisel bulanık esnek homomorfiktir denir ve $(F,A)\sim_\Gamma (G,B)$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $f:S\to R$ bir izomorfizma ve $g:A\to B$'ye $1-1$ dönüşüm ise, bu durumda (f,g)'ye sezgisel bulanık esnek Γ-izomorfizması denir. (F,A) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grubu (G,B)'ye sezgisel bulanık esnek izomorfiktir denir ve $(F,A)\simeq_\Gamma (G,B)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 3.12 0 dahil olmak üzere tüm çift doğal sayıların kümesi S toplamsal değişmeli bir yarı grup ve tüm doğal sayıların kümesi Γ da toplamsal bir yarı grup olsun. Bu durumda doğal sayıların çarpma işlemi altında $a,b\in S$ ve $\alpha\in\Gamma$ için $a\alpha b$ ile tanımlanan S bir Γ-yarı gruptur. $A=S$ alalım ve $F(a)=\left(\mu_{F(a)},\nu_{F(a)}\right)$ olmak üzere

$$\mu_{F(a)}(x)=\begin{Bmatrix}0.4 & \text{eğer } x=0\\ \dfrac{1}{2a} & \text{eğer } x\in\{a,2a,3a,...\}\\ 0 & \text{aksi takdirde}\end{Bmatrix} \text{ ve } \nu_{F(a)}(x)=\begin{Bmatrix}0.5 & \text{eğer } x=0\\ 1-\dfrac{1}{2a} & \text{eğer } x\in\{a,2a,3a,...\}\\ 1 & \text{aksi takdirde}\end{Bmatrix}$$

olarak tanımlansın. 0 dahil olmak üzere tüm pozitif tam sayıların toplamsal değişmeli yarı grubu R ve tüm doğal sayıların toplamsal yarı grubu da Γ olsun. Bu durumda tam sayıların çarpma işlemi altında $a,b\in S$ ve $\alpha\in\Gamma$ için $a\alpha b$ ile tanımlanan R bir Γ-yarı gruptur. $B=R$ alalım ve $G(b)=\left(\mu_{G(b)},\nu_{G(b)}\right)$ olmak üzere

$$\mu_{G(b)}(x)=\begin{Bmatrix}0.4 & \text{eğer } x=0\\ \dfrac{1}{b} & \text{eğer } x\in\{a,2a,3a,...\}\\ 0 & \text{aksi takdirde}\end{Bmatrix} \text{ ve } \nu_{F(a)}(x)=\begin{Bmatrix}0.5 & \text{eğer } x=0\\ 1-\dfrac{1}{b} & \text{eğer } x\in\{a,2a,3a,...\}\\ 1 & \text{aksi takdirde}\end{Bmatrix}$$

Bu durumda (F,A) ve (G,B) sezgisel bulanık esnek kümelerdir. $\forall x\in S$ için

$$\begin{aligned} f:S&\to R\\ x&\mapsto f(x)=x\end{aligned}$$

ve $\forall a\in A$ için

$$\begin{aligned} g:A&\to B\\ a&\mapsto g(a)=2a\end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda (f,g) sezgisel bulanık esnek Γ-fonksiyonu S'den R'ye bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup homomorfizmasıdır ve (F,A) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grubu (G,B)'ye sezgisel bulanık esnek homomorfiktir.

U üzerinde (F,A) bir sezgisel bulanık esnek küme ve $f:U\to V$ bir fonksiyon olsun. V üzerinde $(f(F),A)$ sezgisel bulanık esnek kümesi $\forall a\in A$ için

$$\begin{aligned} f(F):A &\to IF(V) \\ a &\mapsto f(F)(a)=f(F(a)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.33 S ve R birer Γ-yarı grup olmak üzere S üzerinde (F,A) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olsun. $f:S\to R$ bir örten Γ-homomorfizması olmak üzere $\forall a\in A$ ve $\forall x\in S$ için $f(F)(a)(x)=f(F)_a(x)$ alınmak üzere

$$f(F)_a(x)=F_a(f(x))$$

yani

$$\begin{aligned} \mu_{f(F)(a)}(x) &= \mu_{F(a)}(f(x)) \\ v_{f(F)(a)}(x) &= v_{F(a)}(f(x)) \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda R üzerinde $(f(F),A)$ sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

İspat. S üzerinde (F,A) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olsun. $x,y\in S$, $a\in A$ ve $\alpha\in\Gamma$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mu_{f(F)(a)}(x\alpha y) &= \mu_{F(a)}f(x\alpha y) \\ &= \mu_{F(a)}(f(x)\alpha f(y)) \\ &\geq \mu_{F(a)}f(x)\wedge \mu_{F(a)}f(y) \\ &= \mu_{f(F)(a)}(x)\wedge \mu_{f(F)(a)}(y) \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\nu_{f(F)(a)}(x\alpha y) &= \nu_{F(a)} f(x\alpha y) \\
&= \nu_{F(a)}\big(f(x)\alpha f(y)\big) \\
&\leq \nu_{F(a)} f(x) \vee \nu_{F(a)} f(y) \\
&= \nu_{f(F)(a)}(x) \vee \nu_{f(F)(a)}(y)
\end{aligned}
$$

olur ve $f(F)_a(x) = \big(\mu_{f(F)(a)}(x), \nu_{f(F)(a)}(x)\big)$ R'nin bir sezgisel bulanık alt Γ-yarı grubudur. Dolayısıyla R üzerinde (fF, A) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

Teorem 3.34 S ve R sırasıyla Γ-yarı grup ve $f : S \to R$ bir epimorfizma olsun. Bu durumda,

1.Eğer S üzerinde (F, A) bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup ise, $\forall a \in A$ ve $\forall x \in S$ için

$$
F(a)(x) = \begin{Bmatrix} (\lambda, \theta) & \text{eğer } x \in Kerf \\ (0,1) & \text{aksi takdirde} \end{Bmatrix}
$$

olmak üzere R üzerinde $\big(f(F), A\big)$ bir (λ, θ)-birimsel sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

2.Eğer S üzerinde (F, A) bir (λ, θ)-tam sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup ise, R üzerinde $\big(f(F), A\big)$ bir (λ, θ)-tam sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

İspat.

1) $a \in A$ için

$$
\mu_{f(F)(a)}(e_R) = \mu_{f(F(a))}(e_R) = \bigvee_{x \in f^{-1}(e_R)} \mu_{F(a)}(x) = \bigvee_{x \in Kerf} \mu_{F(a)}(x) = \lambda
$$

$$
\nu_{f(F)(a)}(e_R) = \nu_{f(F(a))}(e_R) = \bigwedge_{x \in f^{-1}(e_R)} \nu_{F(a)}(x) = \bigwedge_{x \in Kerf} \nu_{F(a)}(x) = \theta
$$

Böylece, $f(F)(a)(e_R) = (\lambda, \theta)$ bulunur. Eğer $y \neq e_R$ ise, bu durumda $\mu_{f(F)(a)}(y) = 0$ ve $\nu_{f(F)(a)}(y) = 1$ olur. Dolayısıyla R üzerinde $\big(f(F), A\big)$ bir (λ, θ)-birimsel sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

2) $\forall a \in A$ ve $\forall y \in R$ için

$$\mu_{f(F)(a)}(y)=\mu_{f(F(a))}(y)=\bigvee_{x\in f^{-1}(y)}\mu_{F(a)}(x)=\lambda$$

$$\nu_{f(F)(a)}(y)=\nu_{f(F(a))}(y)=\bigwedge_{x\in f^{-1}(y)}\nu_{F(a)}(x)=\theta\,.$$

Dolayısıyla R üzerinde $(f(F),A)$ bir (λ,θ)-tam sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

Teorem 3.35 S ve R birer Γ-yarı grup ve $f:S\to R$ epimorfizma olsun. Eğer S üzerinde (F,A) idealistik sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup ise, bu durumda R üzerinde $(f(F),A)$ idealistik sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

İspat. Teorem 3.33'ün ispatına benzer olarak ispat yapılır.

Teorem 3.36 S ve R sırasıyla Γ-yarı grup ve $f:S\to R$ bir epimorfizma olsun. Bu durumda,

1. Eğer S üzerinde (F,A) idealistik sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup ise, $\forall a\in A$ ve $\forall x\in S$ için

$$F(a)(x)=\begin{Bmatrix}(\lambda,\theta) & \text{eğer } x\in Kerf\\ (0,1) & \text{aksi takdirde}\end{Bmatrix}$$

olmak üzere R üzerinde $(f(F),A)$ bir (λ,θ)-birimsel idealistik sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

2. Eğer S üzerinde (F,A) bir (λ,θ)-tam idealistik sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup ise, R üzerinde $(f(F),A)$ bir (λ,θ)-tam idealistik sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

İspat. Teorem 3.34 ve Teorem 3.35'e benzer olarak yapılabilir.

Teorem 3.37 S üzerinde (F,A) bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup ve (f,g) de S'den R'ye bir sezgisel bulanık esnek Γ-homomorfizması olsun. Bu durumda R üzerinde $(f,g)(F,A)$ bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

İspat. S üzerinde (F,A) sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grubu alalım. (f,g) de S'den R'ye bir sezgisel bulanık esnek Γ-homomorfizması olduğundan Tanım 3.21

gereğince $f:S\to R$'ye bir $\Gamma-$yarı grup homomorfizması ve $g:A\to B$'ye bir dönüşümdür. $g(a)=b$ ve $y_1,y_2\in R$ olsun. Eğer $f^{-1}(y_1)=\varnothing$ veya $f^{-1}(y_2)=\varnothing$ ise, bu durumda

$$\mu_{f(F)(b)}(y_1\alpha y_2)\geq \mu_{f(F)(b)}(y_1)\wedge \mu_{f(F)(b)}(y_2)=0\wedge 0=0$$

$$v_{f(F)(b)}(y_1\alpha y_2)\leq v_{f(F)(b)}(y_1)\vee v_{f(F)(b)}(y_2)=1\vee 1=1$$

olur. Böylece R üzerinde $(f,g)(F,A)$ bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

Eğer $f^{-1}(y_1)\neq\varnothing$ ve $f^{-1}(y_2)\neq\varnothing$ ise, bu durumda $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$ ve $f(x_1\alpha x_2)=y_1\alpha y_2$ olacak şekilde $x_1,x_2\in S$ vardır ve $f^{-1}(y_1\alpha y_2)\neq\varnothing$ olur.

$$\begin{aligned}\mu_{f(F)(b)}(y_1\alpha y_2)&=\bigvee_{f(x_1\alpha x_2)=y_1\alpha y_2}\ \bigvee_{g(a)=b}\mu_{F(a)}(x_1\alpha x_2)\\&\geq \bigvee_{g(a)=b}\mu_{F(a)}(x_1\alpha x_2)\\&\geq \bigvee_{g(a)=b}\left(\mu_{F(a)}(x_1)\wedge\mu_{F(a)}(x_2)\right)\\&=\left(\bigvee_{g(a)=b}\mu_{F(a)}(x_1)\right)\wedge\left(\bigvee_{g(a)=b}\mu_{F(a)}(x_2)\right)\end{aligned}$$

bu eşitlik $f(x_1)=y_1$ ve $f(x_2)=y_2$ sağlayan $\forall x_1,x_2\in S$ için doğru olacağından

$$\begin{aligned}\mu_{f(F)(b)}(y_1\alpha y_2)&\geq\left(\bigvee_{f(x_1)=y_1}\ \bigvee_{g(a)=b}\mu_{F(a)}(x_1)\right)\wedge\left(\bigvee_{f(x_2)=y_2}\ \bigvee_{g(a)=b}\mu_{F(a)}(x_2)\right)\\&=\mu_{f(F)(b)}(y_1)\wedge\mu_{f(F)(b)}(y_2)\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$v_{f(F)(b)}(y_1\alpha y_2)\leq v_{f(F)(b)}(y_1)\vee v_{f(F)(b)}(y_2)$$

olduğu ispatlanabilir. Sonuç olarak R üzerinde $(f,g)(F,A)$ bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

Teorem 3.38 R üzerinde (G,B) bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup ve (f,g) de S'den R'ye bir sezgisel bulanık esnek Γ-homomorfizması olsun. Bu durumda S üzerinde $(f,g)^{-1}(G,B)$ bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

İspat. R üzerinde (G,B) bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup ve (f,g) de S'den R'ye bir sezgisel bulanık esnek Γ-homomorfizması olsun. Tanım 3.22 gereğince $\forall a \in g^{-1}(B)$ ve $\forall x \in S$ için $(f,g)^{-1}(G,B) = \left(f^{-1}(G), g^{-1}(B)\right)$

$$\mu_{f^{-1}(G)(a)}(x) = \mu_{G(g(a))}(f(x))$$

$$\nu_{f^{-1}(G)(a)}(x) = \nu_{G(g(a))}(f(x))$$

şeklinde tanımlanır. $x_1, x_2 \in S$ ve $\alpha \in \Gamma$ alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\mu_{f^{-1}(G)(a)}(x_1 \alpha x_2) &= \mu_{G(g(a))}(f(x_1 \alpha x_2)) \\
&= \mu_{G(g(a))}(f(x_1)\alpha f(x_2)) \\
&\geq \mu_{G(g(a))}(f(x_1)) \wedge \mu_{G(g(a))}(f(x_2)) \\
&= \mu_{f^{-1}(G)(a)}(x_1) \wedge \mu_{f^{-1}(G)(a)}(x_2)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\nu_{f^{-1}(G)(a)}(x_1 \alpha x_2) &= \nu_{G(g(a))}(f(x_1 \alpha x_2)) \\
&= \nu_{G(g(a))}(f(x_1)\alpha f(x_2)) \\
&\leq \nu_{G(g(a))}(f(x_1)) \vee \nu_{G(g(a))}(f(x_2)) \\
&= \nu_{f^{-1}(G)(a)}(x_1) \vee \nu_{f^{-1}(G)(a)}(x_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece S üzerinde $(f,g)^{-1}(G,B)$ bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olduğu ispatlanır.

Teorem 3.39 S üzerinde (F,A) idealistik sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup ve (f,g) de S'den R'ye sezgisel bulanık esnek surjektif Γ-homomorfizması olsun. Bu durumda R üzerinde $(f,g)(F,A)$ idealistik sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

İspat. S üzerinde (F,A) idealistik sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grubu alalım. (f,g) de S'den R'ye bir sezgisel bulanık esnek Γ-homomorfizması olduğundan Tanım 3.21 gereğince $f: S \to R$'ye bir $\Gamma-$ yarı grup homomorfizması ve $g: A \to B$'ye bir dönüşümdür. $g(a)=b$ ve $y_1, y_2 \in R$ olsun. $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$ ve $f(x_1\alpha x_2)=y_1\alpha y_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in S$ vardır.

$$\begin{aligned} v_{f(F)(b)}(y_1\alpha y_2) &= \underset{f(x_1\alpha x_2)=y_1\alpha y_2}{\wedge}\ \underset{g(a)=b}{\wedge} v_{F(a)}(x_1\alpha x_2) \\ &\leq \underset{g(a)=b}{\wedge} v_{F(a)}(x_1\alpha x_2) \\ &\leq \underset{g(a)=b}{\wedge}\left(v_{F(a)}(x_1)\vee v_{F(a)}(x_2)\right) \\ &= \left(\underset{g(a)=b}{\wedge} v_{F(a)}(x_1)\right)\vee\left(\underset{g(a)=b}{\wedge} v_{F(a)}(x_2)\right) \end{aligned}$$

bu eşitlik $f(x_1)=y_1$ ve $f(x_2)=y_2$ sağlayan $\forall x_1, x_2 \in S$ için doğru olacağından

$$\begin{aligned} v_{f(F)(b)}(y_1\alpha y_2) &\leq \left(\underset{f(x_1)=y_1}{\wedge}\ \underset{g(a)=b}{\wedge} v_{F(a)}(x_1)\right)\vee\left(\underset{f(x_2)=y_2}{\wedge}\ \underset{g(a)=b}{\wedge} v_{F(a)}(x_2)\right) \\ &= v_{f(F)(b)}(y_1)\vee v_{f(F)(b)}(y_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\mu_{f(F)(b)}(y_1\alpha y_2) \geq \mu_{f(F)(b)}(y_1)\wedge \mu_{f(F)(b)}(y_2)$$

olduğu ispatlanabilir. Sonuç olarak R üzerinde $(f,g)(F,A)$ idealistik sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

Teorem 3.40 R üzerinde (G,B) idealistik sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup ve (f,g) de S'den R'ye sezgisel bulanık esnek Γ-homomorfizması olsun. Bu durumda S üzerinde $(f,g)^{-1}(G,B)$ idealistik sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

İspat. Teorem 3.38'in ispatına benzer olarak yapılabilir.

3.5 Normal Sezgisel Bulanık Esnek Γ-Yarı gruplar

Tanım 3.24 S bir Γ-yarı grup olsun. S'nin bir R sezgisel bulanık alt Γ-yarı grubu eğer $\forall x, y \in S$ ve $\alpha \in \Gamma$ için

$$\mu_R(x\alpha y)=\mu_R(y\alpha x) \text{ ve}$$

$$v_R(x\alpha y)=v_R(y\alpha x)$$

koşullarını sağlarsa R'ye S'nin bir normal sezgisel bulanık alt Γ-yarı grubu denir.

Örnek 3.13 $S=\{0,a,b,c\}$ ve $\Gamma=\{\alpha\}$ olsun. Aşağıda verilen tablo işlemiyle

α	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

S bir Γ-yarı gruptur.

$$\mu_R(0)=0.9,\ \mu_R(a)=0.6,\ \mu_R(b)=0.6,\ \mu_R(c)=0.6$$

$$\nu_R(0)=0.1,\ \nu_R(a)=0.2,\ \nu_R(b)=0.2,\ \nu_R(c)=0.2$$

alınırsa R, S'nin bir sezgisel bulanık alt Γ-yarı grubudur.

Tanım 3.25 S bir Γ-yarı grup ve S üzerinde (F,A) bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olsun. Eğer $\forall a\in A$ için $F(a)$, S'nin bir normal sezgisel bulanık esnek alt Γ-yarı grubu oluyorsa (F,A)'ya S üzerinde bir normal bulanık esnek Γ-yarı grup denir. Yani $\forall x,y\in S,\ \forall a\in A$ ve $\alpha\in\Gamma$ için

$$\mu_{F(a)}(x\alpha y)=\mu_{F(a)}(y\alpha x) \quad \text{ve}$$

$$\nu_{F(a)}(x\alpha y)=\nu_{F(a)}(y\alpha x)$$

olmasıdır.

Örnek 3.14 $S=\mathbb{Z}_4=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}$ ve $\Gamma=\mathbb{Z}$ olsun. $\forall x,y\in S$ ve $\alpha\in\Gamma$ için $x\alpha y=x\alpha y$ olarak tanımlansın. Bu durumda S bir Γ-yarı gruptur. $\forall a\in A$ için

$$F:A\rightarrow IF(\mathbb{Z}_4)$$

şeklinde tanımlansın ve

$$\mu_{F(a)}(x)=\begin{cases}0.5 & x\in\{\overline{0},\overline{2}\}\\ 0 & \text{aksi takdirde}\end{cases} \qquad \text{ve}$$

$$\nu_{F(a)}(x)=\begin{cases}0 & x\in\{\overline{0},\overline{2}\}\\ 0.3 & \text{aksi takdirde}\end{cases}$$

olarak verilsin. Bu durumda $\mathbb{Z}_4$ üzerinde (F,A) bir normal sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

Teorem 3.41 Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki normal sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olsun. Bu durumda

i. S üzerinde $(F,A)\tilde{\cap}_\Gamma(G,B)$ bir normal sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

ii. S üzerinde $(F,A)\tilde{\cup}_\Gamma(G,B)$ bir normal sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

iii. S üzerinde $(F,A)\tilde{\vee}_\Gamma(G,B)$ bir normal sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

iv. S üzerinde $(F,A)\tilde{\wedge}_\Gamma(G,B)$ bir normal sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

Teorem 3.42 S üzerinde (F,A) bir normal sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup ve (f,g) de S'den R'ye bir sezgisel bulanık esnek Γ-homomorfizması olsun. Bu durumda R üzerinde $(f,g)(F,A)$ bir normal sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

İspat. S üzerinde (F,A) bir normal sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup ve (f,g) de S'den R'ye bir sezgisel bulanık esnek Γ-homomorfizması olsun

$f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$ ve $f(x_1\alpha x_2)=y_1\alpha y_2$ olacak şekilde $x_1,x_2\in S$ vardır

$$\begin{aligned}\mu_{f(F)(b)}(y_1\alpha y_2) &= \bigvee_{f(x_1\alpha x_2)=y_1\alpha y_2}\ \bigvee_{g(a)=b}\mu_{F(a)}(x_1\alpha x_2)\\ &= \bigvee_{f(x_2\alpha x_1)=y_2\alpha y_1}\ \bigvee_{g(a)=b}\mu_{F(a)}(x_2\alpha x_1)\\ &= \mu_{f(F)(b)}(y_2\alpha y_1)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\nu_{f(F)(b)}(y_1\alpha y_2) &= \bigwedge_{f(x_1\alpha x_2)=y_1\alpha y_2}\ \bigwedge_{g(a)=b}\nu_{F(a)}(x_1\alpha x_2)\\ &= \bigwedge_{f(x_2\alpha x_1)=y_2\alpha y_1}\ \bigwedge_{g(a)=b}\nu_{F(a)}(x_2\alpha x_1)\\ &= \nu_{f(F)(b)}(y_2\alpha y_1)\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla R üzerinde $(f,g)(F,A)$ bir normal sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

Teorem 3.43 R üzerinde (G,B) bir normal sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup ve (f,g) de S'den R'ye bir sezgisel bulanık esnek Γ-homomorfizması olsun. Bu durumda S üzerinde $(f,g)^{-1}(G,B)$ bir normal sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

İspat. R üzerinde (G,B) normal sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup ve (f,g) de S'den R'ye bir sezgisel bulanık esnek Γ-homomorfizması olsun. Tanım 3.22 gereğince

$\forall a \in g^{-1}(B)$ ve $\forall x \in S$ için $(f,g)^{-1}(G,B) = \left(f^{-1}(G), g^{-1}(B)\right)$

$$\mu_{f^{-1}(G)(a)}(x) = \mu_{G(g(a))}(f(x))$$

$$\nu_{f^{-1}(G)(a)}(x) = \nu_{G(g(a))}(f(x))$$

şeklinde tanımlanır. $x_1, x_2 \in S$ ve $\alpha \in \Gamma$ alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\mu_{f^{-1}(G)(a)}(x_1 \alpha x_2) &= \mu_{G(g(a))}(f(x_1 \alpha x_2)) \\
&= \mu_{G(g(a))}(f(x_1) \alpha f(x_2)) \\
&= \mu_{G(g(a))}(f(x_2) \alpha f(x_1)) \\
&= \mu_{G(g(a))}(f(x_2 \alpha x_1)) \\
&= \mu_{f^{-1}(G)(a)}(x_2 \alpha x_1)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\nu_{f^{-1}(G)(a)}(x_1 \alpha x_2) &= \nu_{G(g(a))}(f(x_1 \alpha x_2)) \\
&= \nu_{G(g(a))}(f(x_1) \alpha f(x_2)) \\
&= \nu_{G(g(a))}(f(x_2) \alpha f(x_1)) \\
&= \nu_{G(g(a))}(f(x_2 \alpha x_1)) \\
&= \nu_{f^{-1}(G)(a)}(x_2 \alpha x_1)
\end{aligned}$$

olur ve S üzerinde $(f,g)^{-1}(G,B)$ normal sezgisel bulanık esnek Γ-yarı gruptur.

3.6 Γ-yarı grup üzerinde Sezgisel Bulanık Esnek Γ-ideallerin Latis Yapısı

Bu bölümde, Γ-yarı grup S'nin sezgisel bulanık esnek Γ-ideallerinin ailesinin bir dağılmalı latis formunda olduğunu göstereceğiz.

Γ-yarı grup S üzerinde bütün sezgisel bulanık esnek Γ-ideallerin (sol, sağ, iç, bi) ailesini $\Delta(S,E)$ olarak gösterelim. Aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 3.44 $\tilde{\subseteq}$ sıralama bağıntısı altında $(\Delta(S,E),\tilde{\cup},\tilde{\sqcap})$ dağılmalı tam latistir.

İspat. Γ-yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek Γ-ideal (sol, sağ, iç, bi) olsun, yani $(F,A),(G,B)\in\Delta(S,E)$. Bu durumda S üzerinde $(F,A)\tilde{\cup}(G,B)$ ve $(F,A)\tilde{\sqcap}(G,B)$ sezgisel bulanık esnek Γ-idealdir (sol, sağ, iç, bi). Dolayısıyla $(F,A)\tilde{\cup}(G,B)$, $(F,A)\tilde{\sqcap}(G,B)\in\Delta(S,E)$ bulunur. $(F,A)\tilde{\cup}(G,B)$ ve $(F,A)\tilde{\sqcap}(G,B)$, $\{(F,A),(G,B)\}$ alt sınıflarının sırasıyla en küçük üst sınırı ve en büyük alt sınır oldukları aşikardır. Böylece $\Delta(S,E)$'nin herhangi bir keyfi ailesi için bir en küçük üst sınır ve en büyük alt sınırı mevcut olup $\Delta(S,E)$ bir tam latistir. Şimdi ise, $(F,A),(G,B)$ ve $(H,C)\in\Delta(S,E)$ için dağılmalı olduğunu gösterelim.

$$(F,A)\tilde{\sqcap}((G,B)\tilde{\cup}(H,C))=((F,A)\tilde{\sqcap}(G,B))\tilde{\cup}((F,A)\tilde{\sqcap}(H,C)).$$

$$(F,A)\tilde{\sqcap}((G,B)\tilde{\cup}(H,C))=(I,A\cap(B\cup C))$$

$$((F,A)\tilde{\sqcap}(G,B))\tilde{\cup}((F,A)\tilde{\sqcap}(H,C))=(J,(A\cap B)\cup(A\cap C))$$

olarak alalım. Herhangi bir $s\in(A\cap(B\cup C))$ için, $I(s)=J(s)$ olduğu kolaylıkla görülür. $s\in(A\cap(B\cup C))$ için $s\in A$ ve $s\in B\cup C$ olmak üzere aşağıdaki durumları inceleyelim.

1.durum: $s\in A$, $s\notin B$ ve $s\in C$ olsun. Bu durumda $I(s)=F(s)\cap H(s)=J(s)$.

2.durum: $s\in A$, $s\in B$ ve $s\notin C$ olsun. Bu durumda $I(s)=F(s)\cap G(s)=J(s)$.

3.durum: $s\in A$, $s\in B$ ve $s\in C$ olsun. Bu durumda

$$I(s)=F(s)\cap(G(s)\cup H(s))=(F(s)\cap G(s))\cup(F(s)\cap H(s))=J(s).$$

Dolayısıyla I ve J'nin aynı operatör olduğu görülür ve

$$(F,A)\tilde{\sqcap}((G,B)\tilde{\cup}(H,C))=((F,A)\tilde{\sqcap}(G,B))\tilde{\cup}((F,A)\tilde{\sqcap}(H,C))$$

elde edilir. Sonuç olarak, $(\Delta(S,E),\tilde{\cup},\tilde{\sqcap})$ tam dağılmalı bir latistir.

Teorem 3.45 Γ-yarı grup S üzerinde bütün sezgisel bulanık esnek Γ-ideallerin (sol, sağ, iç, bi) ailesi $\Delta(S,E)$ olsun. Bu durumda $\tilde{\subseteq}$ sıralama bağıntısı altında $(\Delta(S,E),\tilde{\sqcup},\tilde{\cap})$ dağılmalı tam latistir.

İspat. Teorem 3.44'ün ispatına benzer olarak kolaylıkla yapılır.

Teorem 3.46 $\tilde{\subseteq}$ sıralama bağıntısı altında $(\Delta(S,E),\tilde{\sqcup},\tilde{\cap})$ tam dağılmalı bir latis olmak üzere $(F,A),(G,B)\in\Delta(S,E)$ olsun. $(F,A)\tilde{\subseteq}(G,B)$ olması için gerek ve yeter koşul $A\subseteq B$ ve $\forall a\in B$ için $F(a)\subseteq G(a)$ olmasıdır.

Şimdi, tanımlı bir parametre kümesi üzerindeki sezgisel bulanık esnek kümeleri düşünelim. $D\subseteq E$ olacak şekilde parametrenin bir özel ailesi olsun. D özel parametre kümesi ile Γ-yarı grup S üzerindeki sezgisel bulanık esnek Γ-ideallerinin kümesini $\Delta_D(S)$ ile gösterelim ve burada

$$\Delta_D(S)=\{(F,A)\in\Delta(S,E)\,|\,F:D\to P(IFS(S))\}$$

şeklinde tanımlansın.

Teorem 3.47 (F,A) ve $(G,B)\in\Delta_D(S)$ olsun. Bu durumda $(F,A)\tilde{\cup}(G,B)\in\Delta_D(S)$ ve $(F,A)\tilde{\sqcap}(G,B)\in\Delta_D(S)$.

Teorem 3.48 (F,A) ve $(G,B)\in\Delta_D(S)$ olsun. Bu durumda $(F,A)\tilde{\sqcup}(G,B)\in\Delta_D(S)$ ve $(F,A)\tilde{\cap}(G,B)\in\Delta_D(S)$.

Sonuç 3.3 $(\Delta_D(S),\tilde{\cup},\tilde{\sqcap})$ ve $(\Delta_D(S),\tilde{\sqcup},\tilde{\cap})$ sırasıyla $(\Delta(S,E),\tilde{\cup},\tilde{\sqcap})$ ve $(\Delta(S,E),\tilde{\sqcup},\tilde{\cap})$'nin alt latisleridir.

Tanım 3.26 Γ -yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek küme olsun. (F,A) ve (G,B)'nin çarpımı $C=A\cup B$ olmak üzere $\forall c\in C=A\cup B$ ve $x\in S$ için

$$\mu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x)=\begin{cases}\mu_{F(c)}(x), & \text{eğer } c\in A-B\\ \mu_{G(c)}(x), & \text{eğer } c\in B-A\\ \bigvee_{x=a\alpha b}\left(\mu_{F(c)}(a)\wedge\mu_{G(c)}(b)\right), & \text{eğer } c\in A\cap B\end{cases}$$

ve

$$v_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x)=\begin{cases}v_{F(c)}(x) & \text{eğer } c\in A-B\\ v_{G(c)}(x) & \text{eğer } c\in B-A\\ \bigwedge_{x=a\alpha b}\left(v_{F(c)}(a)\vee v_{G(c)}(b)\right) & \text{eğer } c\in A\cap B\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $(F,A)\circ_\Gamma(G,B)=(F\circ_\Gamma G,C)$ olarak gösterilir.

Teorem 3.49 Γ -yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek (sol, sağ, iç, bi) Γ -ideal olsun, bu durumda $(F,A)\circ_\Gamma(G,B)$'de S üzerinde bir sezgisel bulanık esnek (sol, sağ, iç, bi) Γ -idealdir.

İspat. Γ -yarı grup S üzerinde (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek Γ -ideal olsun. $c\in C=A\cup B$, $x,y\in S$ ve $\alpha\in\Gamma$ olsun. Aşağıdaki durumları inceleyelim.

1.durum: Eğer $c\in A-B$ ise, bu durumda

$$\mu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x\alpha y)=\mu_{F(c)}(x\alpha y)\geq\mu_{F(c)}(x)\vee\mu_{F(c)}(y)=\mu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x)\vee\mu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(y)$$
$$v_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x\alpha y)=v_{F(c)}(x\alpha y)\leq v_{F(c)}(x)\wedge v_{F(c)}(y)=v_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x)\wedge v_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(y)$$

elde edilir.

2.durum: Eğer $c\in B-A$ ise, 1. duruma benzer olarak

$$\mu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x\alpha y)=\mu_{G(c)}(x\alpha y)\geq\mu_{G(c)}(x)\vee\mu_{G(c)}(y)=\mu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x)\vee\mu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(y)$$
$$v_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x\alpha y)=v_{G(c)}(x\alpha y)\leq v_{G(c)}(x)\wedge v_{G(c)}(y)=v_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x)\wedge v_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(y)$$

olduğu görülür.

3.durum: Eğer $c \in A \cap B$ ise,

$$\begin{aligned}
\mu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(y) &= \bigvee_{y=a\alpha b}\left(\mu_{F(c)}(a) \wedge \mu_{G(c)}(b)\right) \\
&\leq \bigvee_{x\beta y=x\beta a\alpha b}\left(\mu_{F(c)}(x\beta a) \wedge \mu_{G(c)}(b)\right) \\
&\leq \bigvee_{x\beta y=c\alpha d}\left(\mu_{F(c)}(c) \wedge \mu_{G(c)}(d)\right) \\
&= \mu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x\beta y)
\end{aligned}$$

olduğundan $\mu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(y) \leq \mu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x\beta y)$ bulunur. Benzer şekilde $\mu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x) \leq \mu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x\beta y)$ bulabiliriz. Dolayısıyla

$$\mu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x\beta y) \geq \mu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x) \vee \mu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(y)$$

elde edilir. Benzer olarak ayrıca $\nu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x\beta y) \leq \nu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x) \wedge \nu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(y)$ olduğu gösterilir ve sonuç olarak Γ -yarı grup S üzerinde $(F,A)\tilde{\circ}_\Gamma(G,B)$ bir sezgisel bulanık esnek Γ -idealdir.

Not 3.2 S birimli bir Γ -yarı grup olsun, $e \in S$. Γ -yarı grup S üzerinde $\mu_F(e)=1$ ve $\nu_F(e)=0$ olacak şekildeki (F,A) sezgisel bulanık esnek Γ -ideallerinin kümesini $\Omega(S,E)$ ile gösterelim. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.50 S birimli bir Γ -yarı grup olsun, $e \in S$. Bu durumda $\tilde{\subseteq}$ sıralama bağıntısı altında $\left(\Omega(S,E),\tilde{\circ},\tilde{\sqcap}\right)$ tam latistir.

İspat. $(F,A),(G,B) \in \Omega(S,E)$ olsun. Bu durumda

$(F,A) \in \Omega(S,E)$ olduğundan $\mu_F(e)=1$ ve $\nu_F(e)=0$ ve

$(G,B) \in \Omega(S,E)$ olduğundan $\mu_G(e)=1$ ve $\nu_G(e)=0$.

Teorem 3.15 ve Teorem 3.49’dan $(F,A)\tilde{\sqcap}(G,B) \in \Omega(S,E)$ ve $(F,A)\tilde{\circ}_\Gamma(G,B) \in \Omega(S,E)$ olduğu görülür. Ayrıca $\mu_{(F\cap G)(c)}(e)=1$ ve $\nu_{(F\cap G)(c)}(e)=0$. (F,A) ve (G,B)’nin en büyük alt sınırı $(F,A)\tilde{\sqcap}(G,B)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla

$\{(F,A),(G,B)\}$ sınıfının en küçük üst sınırının $(F,A)\tilde{\circ}_\Gamma(G,B)$ olduğunu göstereceğiz. $c\in C=A\cup B$ ve $x\in S$ alalım.

1.durum: Eğer $c\in A-B$ ise,

$$\mu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x)=\mu_{F(c)}(x) \text{ ve } \nu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x)=\nu_{F(c)}(x).$$

2.durum: Eğer $c\in B-A$ ise,

$$\mu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x)=\mu_{G(c)}(x) \text{ ve } \nu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x)=\nu_{G(c)}(x).$$

3.durum: : Eğer $c\in A\cap B$ ise, $e\in S$ ve böylece

$$\mu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x)=\bigvee_{x=x\alpha e}\{\mu_{F(c)}(x)\wedge\mu_{G(c)}(e)\}\geq\mu_{F(c)}(x)\wedge\underbrace{\mu_{G(c)}(e)}_{1}=\mu_{F(c)}(x) \text{ ve}$$

$$\nu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x)=\bigwedge_{x=x\alpha e}\{\nu_{F(c)}(x)\vee\nu_{G(c)}(e)\}\leq\nu_{F(c)}(x)\vee\underbrace{\nu_{G(c)}(e)}_{0}=\nu_{F(c)}(x) \text{ bulunur.}$$

$\mu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x)\geq\mu_{F(c)}(x)$ ve $\nu_{(F\circ_\Gamma G)(c)}(x)\leq\nu_{F(c)}(x)$ olduğundan $(F,A)\tilde{\subseteq}(F,A)\tilde{\circ}_\Gamma(G,B)$ elde edilir. Benzer yolla $(G,B)\tilde{\subseteq}(F,A)\tilde{\circ}_\Gamma(G,B)$ kolaylıkla görülür. Dolayısıyla $(F,A)\tilde{\circ}_\Gamma(G,B)$ çarpımı (F,A) ve (G,B)'nin bir üst sınırıdır. Şimdi, en küçük üst sınır olduğunu gösterelim.

$(F,A)\tilde{\subseteq}(H,C)$ ve $(G,B)\tilde{\subseteq}(H,C)$ olacak şekilde $(H,C)\in\Omega(S,E)$ alalım. Bu durumda

$$(F,A)\tilde{\circ}_\Gamma(G,B)\tilde{\subseteq}(H,C)\tilde{\circ}_\Gamma(H,C)\tilde{\subseteq}(H,C)$$

olduğu kolaylıkla görülür. $\Omega(S,E)$'nin keyfi bir alt sınıfı (F,A) ve (G,B)'nin en küçük üst sınırı $(F,A)\tilde{\circ}_\Gamma(G,B)$ bulunur. Sonuç olarak, $\tilde{\subseteq}$ sıralama bağıntısı altında $(\Omega(S,E),\tilde{\circ},\tilde{\sqcap})$ tam latistir.

BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Atanassov'un sezgisel bulanık küme teorisini kullanarak Γ-yarı gruplar üzerinde Maji'nin sezgisel bulanık esnek küme teorisini uygulayarak sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup tanımı verildi ve buna ilişkin örnekler ve bazı özellikler incelendi.

Γ-yarı grup üzerinde sezgisel bulanık esnek (sol,sağ, interior, bi) Γ-ideal kavramları verildi ve bazı operatörleri uygulayarak sezgisel bulanık esnek (sol,sağ, interior, bi) Γ-ideal oldukları görüldü.

Her sezgisel bulanık esnek Γ-idealin bir sezgisel bulanık esnek (iç,bi) Γ-ideal, fakat tersinin doğru olmadığına ilişkin örnekler verildi.

İdealistik sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup tanımı verilerek her idealistik sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grubun bir sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olduğu gösterildi.

Sezgisel bulanık esnek fonksiyonu altında sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grupların görüntü ve ters görüntüsünün de sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup olduğu görüldü.

Normal sezgisel bulanık esnek Γ-yarı grup kavramı verilerek bazı sonuçlar elde edildi.

Son bölümde ise, Γ-yarı grupların sezgisel bulanık esnek ideallerinin kümesinin bazı latis yapıları üretildi.

Ayrıca araştırmacılar ileriki çalışmalarda bu kavramların vague soft set, rough soft set ve hiper yapılardaki uygulamalarına bakabilir.

KAYNAKLAR

[1] Zadeh, L. A.,(1965). “Fuzzy sets”, Information and Control, 8: 338- 353.

[2] Kuroki, N., (1981). “On fuzzy ideals and fuzzy bi-ideals in semigroups”, Fuzzy sets and systems, 5(2): 5203-215.

[3] Kuroki, N., (1982). “Fuzzy semiprime ideals in semigroups”, Fuzzy sets and systems, 8: 71-79.

[4] Kuroki, N., (1986). “On fuzzy semigroups”, Information Sciences, 53: 203-236.

[5] Sen, M. K. ve Saha, N. K., (1986). “On G -semigroup I”, Bull. Calcutta Math. Soc., 78: 180-186.

[6] Saha, N. K., (1987). “On Γ-semigroup II”, Bull. Calcutta Math. Soc., 79: 331-335.

[7] Saha, N. K., (1988). “On Γ-semigroup III”, Bull. Calcutta Math. Soc.,80: 1-13.

[8] Dutta, T. K. ve Adhikari, N. C., (1994). “On prime radical of Γ-semigroup”, Bull. Cal. Math. Soc., 86: 437-444.

[9] Chinram, R. ve Jirojkul, C., (2007). “On bi-Γ-ideals in Γ-semigroups”, Songklanakarin J. Sci. Technol., 29: 231-234.

[10] Shabir, M. ve Ali, S., (2012). “Prime bi-ideals of Γ-semigroups”, J. Adv. Res. in Pure Math., 4: 47-58.

[11] Sardar, S. K. ve Majumder, S. K., (2009). “A note on characterizationof prime ideals of Γ-semigroups in terms of fuzzy subsets”, Int. J. Contemp. Math. Sci., 4: 1465-1472.

[12] Sardar, S. K., Majumder, S. K. ve Kayal, S., (2011). “On fuzzy bi-ideals and fuzzy quasi ideals in gamma-semigroups”,arXiv:1101.4720v1 [math.GM].

[13] Dutta, T. K., Sardar, S. K. ve Majumder, S. K., (2009). “Fuzzy ideals extensions of Γ-semigroups”, International Mathematical Forum 4, 42: 2093-2100.

[14] William, D. R. P., Latha K. B. ve Chandrasekeran E., (2009). “Fuzzy bi-Γ-ideals in Γ-semigroups”, Hacettepe Journal of Mathematics and statistics, 38: 1-15.

[15] Faisal, N. Yaqoob ve Chinram, R., (2012). "A note on $(\in,\in \vee qk)$- fuzzy Γ-ideals of Γ-semigroups", Applied Mathematical Sciences, 6: 5013-5028.

[16] Atanassov, K., (1986). "Intuitionistic fuzzy sets," Fuzzy Sets and Systems, 20 (1): 87-96.

[17] Atanassov, K., (1999). Intuitionistic Fuzzy Sets: Theory and Applications, Heidelberg: Physica-Verlag.

[18] Molodtsov, D., (1999). "Soft set theory-First results", Comput. Math. Appl., 37: 19-31.

[19] Maji, P.K., Roy, A. R. ve Biswas, R., (2002). "An application of soft sets in a decision making problem", Comput. Math. Appl. 44: 1077-1083.

[20] Chen, D., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S. ve Wang, X., (2005). "The parameterization reduction of soft sets and its applications", Comput. Math. Appl. 49: 757-763.

[21] Maji, P. K, Roy, A. R. ve Biswas, R.,(2003). "Soft set theory", Comput. Math. Appl., 45: 555-562.

[22] Ali, M. I., Feng, F., Liu, X. Y. ve Shabir, M., (2009). "On some new operations in soft set theory", Comput. Math. Appl., 57: 1547-1553.

[23] Shabir, M. ve Ali, M. I., (2009). "Soft ideals and generalized fuzzy ideals in semigroups", New Math. and Nat. Comput., 5: 599- 615.

[24] Shabir, M. ve Ahmad, A., (2012). "On soft ternary semigroups", Annals of Fuzzy Math. Inform., 3: 39-59.

[25] Changphas, T. ve Thongkam, B., (2012). "On soft Γ-semigroups", Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 4: 217-223.

[26] Maji, P. K., Roy, A. R. ve Biswas, R., (2001). "Fuzzy soft sets", The journal of fuzzy mathematics, 9: 589-602.

[27] Ahmad, B. ve Kharal, A., (2009). "On fuzzy soft sets", Advances in fuzzy systems, 2009: 1-6.

[28] Kharal, A. ve Ahmad, B., (2009), "Mappings on fuzzy soft classes", Adv. Fuzzy Syst. 6. Article ID 407890

[29] Aygünoğlu, A. ve Aygün, H., (2009). "Introduction to fuzzy soft groups", Comput. Math. appl., 58: 1279-1286.

[30] Aktas, H. ve Cağman, N., (2007). "Soft sets and soft groups", Inform. Sci., 177: 2726-2735.

[31] Yang, C. F., (2011). "Fuzzy soft semigroups and fuzzy soft ideals", Computers and Mathematics with Applications, 61: 255-261.

[32] Borah, M., Neog, T. J. ve Sut, D. K., (2012). "A study on some operations of fuzzy soft sets", International Journal of Modern Engineering Research, 2 (2): 219-225.

[33] Akram, M., Kavikumar, J. ve Khamis, A. B., (2014). "Fuzzy Soft Gamma Semigroups", Appl. Math. Inf. Sci. 2: 929-934.

[34] Bhowmik, M. ve Pal, M., (2012). “Some results on generalized interval-valued intuitionistic fuzzy sets”, International Journal of Fuzzy Systems, 14 (2): 193-203.

[35] Mahapatra, G. S., Mitra, M. ve Roy, T. K., (2010). “Intuitionistic fuzzy multi-objective mathematical programming on reliability optimization model”, International Journal of Fuzzy Systems, 12 (3): 259-266.

[36] Xia, M. M. ve Xu, Z. S., (2012). “Entropy/cross entropy-based group decision making under intuitionistic fuzzy environment”, Information Fusion, 13 (1): 31-47.

[37] Guo, K. H. ve Li, W. L., (2012). “An attitudinal-based method for constructing intuitionistic fuzzy information in hybrid MADM under uncertainty,” Information Sciences, 208: 28-38.

[38] Wang, Z. J. ve Li, K. W., (2012). “An interval-valued intuitionistic fuzzy multiattribute group decision making framework with incomplete preference over alternatives,” Expert Systems with Applications, 39 (18): 13509-13516.

[39] Xu, Z. S., (2012). “Intuitionistic fuzzy multi-attribute decision making: An interactive method,” IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 20 (2): 514-525.

[40] Banerjee, B. ve Basnet, D. K., (2003). “Intuitionistic fuzzy subrings and ideals,” The Journal of Fuzzy Mathematics, 11 (1): 139-155.

[41] Hur, K., Kang, H. W. ve Song, H. K., (2003). “Intuitionistic fuzzy subgroups and subrings,” Honam Mathematical Journal, 25 (2): 19-41.

[42] Veeramani, V., Arjunan, K. ve Palaniappan, N., (2010). “Some properties of intuitionistic fuzzy normal subrings,” Applied Mathematical Sciences, 4 (43): 2119-2124.

[43] Maji, P. K., Biswas, R. ve Roy, A. R., (2001). “Intuitionistic fuzzy soft sets”, J. Fuzzy Math. 9 (3): 677-692.

[44] Zhang, Z., (2012). “Intuitionistic Fuzzy Soft Rings”, International Journal of Fuzzy Systems, 14 (3): 420-433.

[45] Zhou, J., Li, Y. ve Yin, Y., (2011). “Intuitionistic Fuzzy Soft Semigroups”, Mathematica Aeterna, 1 (3): 173-183.

[46] Howie, J. M., (1976). An Introduction to Semigroup Theory, Academic Press, London.

[47] Rao, A. G., Anjaneyelu, A. ve Rao, D. M., (2012). “Duo chained Γ-semigroups”, International Journal of Mathematic Sciences, Technology and Humanities, 50: 520-533.

[48] Mordeson, J. N. ve Malik, D. S. (1998). Fuzzy Commutative Algebra, World Scientific.

[49] Mordeson, J. N., Malik, D. S. ve Kuroki, N., (2003). Fuzzy Semigroups, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[50] Yılmaz, Z., (2015). Sezgisel Bulanık Esnek Gamma Halkaları, Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

[51] Çallıalp, F., Tekir, Ü., (2009). Değişmeli Halkalar ve Modülleri, Birsen Yayınevi.

[52] Balkanay E., Ağargün A., Aygör N., (2000). Soyut Cebir Cilt 1, Y.T.Ü. Vakfı.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Serkan Onar

Doğum Tarihi ve Yeri : 20.02.1988, İstanbul-Bakırköy

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : serkan10ar@gmail.com.

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Matematik	YTÜ	2012
Lisans	Matematik	YTÜ	2010
Lise	Fen – Matematik	İbrahim Turhan(Y.D.A) Lisesi	2004

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	**Firma/Kurum**	**Görevi**
2013-2018	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2012-2013	Düzce Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

SCI,SSCI,AHCI İNDEKSLERİNE GİREN DERGİLERDE YAYINLANAN MAKALELER

1-Onar, S., Yavuz, S., Ersoy, B.A. ve Hila, K., (2018). "Vague Soft Modules", Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 34 (4): 2597-2609.

2- Onar, S., Sönmez, D., Ersoy, B.A., Yeşilot, G. ve Hila, K., (2017). "A Study on Fuzzy 2-absorbing Primary Γ-ideals in Γ-rings", Filomat, 31 : 5753-5767.

3- Sönmez, D., Yeşilot, G., **Onar, S.,** Ersoy, B.A. ve Davvaz, B., (2017). "On 2-Absorbing Primary Fuzzy Ideals of Commutative Rings", Mathematical Problems in Engineering, Article ID 5485839, 2017 : 1-7.

4- Ersoy, B.A., **Onar, S.,** Davvaz, B. ve Hila, K., (2015). "Structure of Idealistic Fuzzy Soft Γ-Near-ring", University Politehnica of Bucharest Scientific Bulletin-Series A-Applied Mathematics and Physics, 77 : 15-28.

5-Hila, K., Ersoy, B.A., **Onar, S.** ve Davvaz, B., (2015). "On Generalized ROUGH (m,n)-Bi-Gamma-Hyperideals in Gamma-Semihypergroups", University Politehnica of Bucharest Scientific Bulletin-Series A-Applied Mathematics and Physics, 77 : 93-104.

6-Ersoy, B.A., Davvaz, B., **Onar, S.** ve Leoreanu-Fotea, V., (2014). "Fuzzy Gamma-Hyperideals in Gamma Hypersemirings by Using Triangular Norms", The Scientific World Journal, 1 : 1-8.

7-Hila, K., **Onar, S.,** Ersoy, B.A. ve Davvaz, B., (2013). "On generalized intuitionistic fuzzy subhyperalgebras of Boolean hyperalgebras", Journal of Inequalities and Applications, 2013 : 1-15.

8-Onar, S., Ersoy, B.A. ve Tekir, U., (2012). "Fuzzy soft Γ-ring", Iranian Journal of Science & Technology, A : 469-476.

DİĞER DERGİLERDE YAYIMLANAN MAKALELER

1-Arkan, T., **Onar, S.,** Sönmez, D. ve Ersoy, B.A., (2017). "Intuitionistic Fuzzy Weakly Prime Ideals", Journal of Hyperstructures, 6 : 83-92.

2-Yeşilkurt, G., **Onar, S.,** Sönmez, D. ve Ersoy, B.A., (2017). "Fuzzy Weakly Prime Γ-ideals in Γ-rings", Journal of Hyperstructures, 6: 14-26.

3-Onar, S., Yavuz, S. ve Ersoy, B.A., (2017) "Soft Gamma-Modules", Ratio Mathematica, 32 (2017) : 45-62.

4-Yavuz, S., **Onar, S.,** Sönmez, D. ve Ersoy, B.A., (2017). "Intuitionistic Fuzzy 2-absorbing Ideals of Commutative Rings", Journal of Hyperstructures, 6 : 56-71.

5-Ersoy, B.A., **Onar, S.,** Hila, K. ve Davvaz, B., (2013). "Some Properties of Intuitionistic Fuzzy Soft Rings", Journal of Mathematics, 2013 : 1-8.

6-Naka, K., Hila, K., **Onar, S.** ve Ersoy, B.A., (2018). "The Embedding of an Ordered Semihypergroup in terms of Fuzzy Sets ", Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 9 (1) : 17-22.

7-Yavuz, S., **Onar, S.**, Sönmez, D., Ersoy, B.A. ve Yeşilot, G., (2018). " Intuitionistic Fuzzy 2-Absorbing Primary Ideals of Commutative Rings ", Turk J. Math. Comp. Sci., 8 (2018): 37-48.

8-Sönmez, D., Yeşilot, G., **Onar, S.** ve Ersoy, B.A., (2018). "2-Absorbing δ-Primary Fuzzy Ideals of Commutative Rings", Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 9 (1): 23-29.

HAKEMLİ KONGRE / SEMPOZYUMLARIN BİLDİRİ KİTAPLARINDA YER ALAN YAYINLAR

1-Onar, S. ve Ersoy, B.A., (2017). "Intuitionistic Fuzzy Soft Gamma-semigroups", International Conference on Mathematics and Engineering, 10-12 Mayıs 2017, İstanbul, Türkiye, syf.157.

2-Onar, S. ve Ersoy, B.A., (2017). "Intuitionistic Fuzzy Soft Γ-Regular Semigroups", 4th International Conference on Pure and Applied Sciences: Renewable Energy (ICPAS 2017), 23-25 Kasım 2017, İstanbul, Türkiye, syf.99.

3-Onar, S. ve Ersoy, B.A., (2017). "Vague Soft Gamma Semigroup", The 5th International Fuzzy Systems Symposium (FUZZYSS'17), 14-15 Ekim 2017, Ankara, Türkiye, syf.64.

4-Yavuz, S., **Onar, S.,** Ersoy, B.A. ve Sönmez, D., (2017). "Intuitionistic Fuzzy 2-Absorbing Primary Ideals of Commutative Rings", The 5th International Fuzzy Systems Symposium (FUZZYSS'17), 14-15 Ekim 2017, Ankara, Türkiye, syf.52.

5-Sönmez, D., Yeşilot, G., **Onar, S.** ve Ersoy, B.A., (2017). "A Note On 2-Absorbing Primary Fuzzy Ideals", The 5th International Fuzzy Systems Symposium (FUZZYSS'17), 14-15 Ekim 2017, Ankara, Türkiye, syf. 9.

6-Yeşilkurt, G., **Onar, S.,** Sönmez, D. ve Ersoy, B.A., (2017). "Fuzzy Weakly Prime Γ-Ideal in Γ-Rings", 13th Algebraic Hyperstructures and its Applications (AHA2017), 24-27 Temmuz 2017, İstanbul, Türkiye, syf.59.

7-Naka, K., Hila, K., **Onar, S.** ve Ersoy, B.A., (2017). "The embedding of an ordered semihypergroup in terms of fuzzy sets", 13th Algebraic Hyperstructures and its Applications (AHA2017), 24-27 Temmuz 2017, İstanbul, Türkiye, syf.84-85.

8-Naka, K., Hila, K., **Onar, S.** ve Ersoy, B.A., (2017). "Study of Γ-hyperrings by fuzzy hyperideals with respect to a t-norm", 13th Algebraic Hyperstructures and its Applications (AHA2017), 24-27 Temmuz 2017,İstanbul, Türkiye, syf.78-80.

9-Yavuz, S., **Onar, S.,** Sönmez, D. ve Ersoy, B.A., (2017). "Intuitionistic Fuzzy 2-Absorbing Ideals of Commutative Rings", 13th Algebraic Hyperstructures and its Applications (AHA2017), 24-27 Temmuz 2017, İstanbul, Türkiye, syf.60.

10-Arkan, T., **Onar, S.,** Sönmez, D. ve Ersoy, B.A., (2017). "Intuitionistic Fuzzy Weakly Prime Ideals", 13th Algebraic Hyperstructures and its Applications (AHA2017), 24-27 Temmuz 2017, İstanbul, Türkiye, syf.52.

11-Sönmez, D., Yeşilot, G., **Onar, S.** ve Ersoy, B.A., (2017). "2-Absorbing δ-Primary Fuzzy Ideals of Commutative Rings", 13th Algebraic Hyperstructures and its Applications (AHA2017), 24-27 Temmuz 2017, İstanbul, Türkiye, syf.46.

12-Naka, K., Hila, K., **Onar, S.** ve Ersoy, B.A., (2017). "On an algebra of fuzzy m-ary semihypergroups", 13th Algebraic Hyperstructures and its Applications (AHA2017), 24-27 Temmuz 2017, İstanbul, Türkiye, syf.81-82.

13-Sönmez, D., Yeşilot, G., **Onar, S.** ve Ersoy, B.A., (2017). "A new study on 2-absorbing Ideals of Gamma Rings", International Conference on Mathematics and Engineering, 10-12 Mayıs 2017, İstanbul, Türkiye, syf.99.

14-Yavuz, S., **Onar, S.** ve Ersoy, B.A., (2017). "Intuitionistic Fuzzy 2-Absorbing Semiprimary Ideals of Commutative Rings", 4th International Conference on Pure and Applied Sciences: Renewable Energy (ICPAS 2017), 23-25 Kasım 2017, İstanbul, Türkiye, syf.98.

15-Yılmaz, Z., Ersoy, B.A., **Onar, S.** ve Davvaz, B., (2015). "Characterization of Intuitionistic Fuzzy Soft Γ-Rings", International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling (ICAAMM2015), 8-12 Haziran 2015, İstanbul, Türkiye, syf.359.

16-Aktaş, E., Ersoy, B.A., **Onar, S.** ve Davvaz, B., (2015). "Isomorphism Theorems for Fuzzy Soft Gamma-rings", International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling (ICAAMM2015), 8-12 Haziran 2015, İstanbul, Türkiye, syf.100.

17-Bolat, M., Ersoy, B.A., **Onar, S.** ve Davvaz, B., (2015). "Vague Soft Gamma Rings and Idealistic Vague Soft Gamma Rings", The 4th International Fuzzy Systems Symposium (FUZZYSS'15), 5-6 Kasım 2015, İstanbul, Türkiye, syf.484-506.

18-Bolat, M., Ersoy, B.A., **Onar, S.** ve Davvaz, B., (2015). "Structure of Vague Soft Gamma-rings", International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling (ICAAMM2015), 8-12 Haziran 2015, İstanbul, Türkiye, syf.198.

19-Aktaş, E., Ersoy, B.A., **Onar, S.** ve Davvaz, B., (2015). "Fuzzy Isomorphism Theorems of Idealistic Soft Gamma Rings", The 4th International Fuzzy Systems Symposium (FUZZYSS'15), 5-6 Kasım 2015, İstanbul, Türkiye, syf.476-483.

20-Ersoy, B.A., **Onar, S.,** Davvaz, B. ve Leoreanu-Fotea, V., (2014). "Fuzzy Gamma-Hyperideals in Gamma Hypersemirings by Using Triangular Norms", 12th International Conference on Algebraic Hyperstructures and its Applications , 2-7 Eylül 2014, Xanthi, Yunanistan, syf.66-67.

21-Onar, S., Ersoy, B.A., Davvaz, B. ve Hila, K., (2013). "A New Study on Generalized Intuitionistic Fuzzy Subhyperalgebras of Boolean Hyperalgebras", 2nd International

Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Saraybosna, 26-29 Ağustos 2013, Bosna Hersek, syf.16.

22-Onar, S., Ersoy, B.A., Davvaz, B. ve Hila, K., (2012). "Intuitionistic Fuzzy Soft Ring", 13th International Conference of Mathematics and its Applications (ICMA 2012), 1-3 Kasım 2012, Timişoara, Romanya, syf.1.

23-Hila, K., Ersoy, B.A., **Onar, S.** ve Davvaz, B., (2012). "On Generalized Rough (m,n)-Bi-Hyperideals in Semihypergroups", International Conference on Applied Analysis and Algebra (ICAAA2012), 20-24 Haziran 2012, İstanbul, Türkiye, syf.57.

24-Onar, S., Ersoy, B.A., Tekir, U. ve Davvaz, B., (2012). "Fuzzy Soft Gamma Ring" International Conference on Applied Analysis and Algebra (ICAAA2012), 20-24 Haziran 2012, İstanbul, Türkiye, syf.238-239.

25-Onar, S., Ersoy, B.A. ve Özbek, İ., (2012). "Intuitionistic Fuzzy Soft Gamma Ring", International Congress in Honour of Professor Hari M.Srivastava, 23-26 Ağustos 2012, Bursa, Türkiye, syf.206.

26-Hila, K., **Onar, S.,** Ersoy, B.A. ve Davvaz, B., (2012). "Characterizations of Generalized Fuzzy Subhyperalgebras of Boolean Hyperalgebras", International Conference on Applied Analysis and Algebra (ICAAA2012), 20-24 Haziran 2012, İstanbul, Türkiye, syf.239.

27-Onar, S. ve Ersoy, B.A., (2012). "On Fuzzy Soft Gamma Rings", 1st International Eurasian Confernece on Mathematical Sciences and Applications, Priştine, Kosova, 3-7 Eylül 2012, Priştine, Kosova, syf.363.

ÖDÜLLER VE BURSLAR

1- Akademik Teşvik,YÖK, Şubat 2018.

2- Yayın Teşvik Ödülü, Yıldız Teknik Üniversitesi, Şubat 2016.

3- Akademik Teşvik, YÖK, Ocak 2016.

4- Yayın Teşvik Ödülü, Yıldız Teknik Üniversitesi, Ocak 2015.

5- 2211 Yurt İçi Doktora Bursu, TÜBİTAK, Eylül 2012.