

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK
ÇÖZÜMLERİ İÇİN GEGENBAUER DALGACIK GALERKİN
YÖNTEMİ

Neslihan ÖZDEMİR

DOKTORA TEZİ
Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı
Matematik Mühendisliği Programı

Danışman
Doç. Dr. Aydın SEÇER

Ekim, 2019

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ
İÇİN GEGENBAUER DALGACIK GALERKİN YÖNTEMİ

Neslihan ÖZDEMİR tarafından hazırlanan tez çalışması 23.10.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı Matematik Mühendisliği Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Aydın SEÇER
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Aydın SEÇER, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa BAYRAM, Üye
Biruni Üniversitesi

Prof. Dr. İsmail Müfit GİRESUNLU , Üye
İstanbul Üniversitesi

Prof. Dr. İbrahim EMİROĞLU, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Fatih TAŞÇI, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Danışmanım Doç. Dr. Aydın SEÇER sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri için Gegenbauer Dalgacık Galerkin Yöntemi başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Neslihan ÖZDEMİR

İmza



Bu çalışma, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından 2228-B Yüksek Lisans Öğrencileri için Doktora Burs Programı ile desteklenmiştir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında değerli bilgileriyle bana yol gösteren, yardım ve katkılarını esirgemeyen, ilgisini ve desteğini her zaman yanımda hissettiğim değerli ve saygıdeğer danışman hocam **Doç. Dr. Aydın SEÇER**'e teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Tez izleme komitesi üyeliğini kabul ederek beni onurlandıran, tez çalışmam boyunca değerli vakitlerini ayırarak öneri ve yorumları ile tezimin şekillenmesinde yardımcı olan saygıdeğer hocalarım **Prof. Dr. Mustafa BAYRAM** ve **Prof. Dr. İsmail Müfit GİRESUNLU**'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez savunma sınavı jüri üyeliğini kabul ederek beni onurlandıran **Prof. Dr. İbrahim EMİROĞLU** ve **Prof. Dr. Fatih TAŞÇI** hocalarıma teşekkür ederim.

“2228-B Yüksek Lisans Öğrencileri için Doktora Burs Programı” kapsamında doktora eğitimim süresince sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığına teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anının ortağı olan, sevgileriyle ve ilgileriyle çıktığım her yolda başarılarımın sebebi olan, sevgi ve saygımın sonsuz olduğu aileme teşekkürlerimle...

Neslihan ÖZDEMİR

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	vii
KISALTMA LİSTESİ	viii
ŞEKİL LİSTESİ	ix
TABLO LİSTESİ	xi
ÖZET	xiii
ABSTRACT	xv
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	5
1.3 Hipotez	5
2 GEGENBAUER POLİNOMLARI VE GEGENBAUER DALGACIKLARI	6
2.1 Ortogonal Polinomlar	6
2.1.1 Gegenbauer Polinomları ve Özellikleri	7
2.1.2 Block Pulse Fonksiyonları(BPFs)	9
2.2 Dalgacıklar	12
2.2.1 Gegenbauer Dalgacıkları ve Gegenbauer Dalgacıklarının Özellikleri	14
2.2.2 Gegenbauer Dalgacıklarıyla Fonksiyon Yaklaşımı	14
2.2.3 Gegenbauer Dalgacıklarının Yakınsaklık Analizi	16
2.2.4 Gegenbauer Dalgacıklarıyla Doğrusal Olmayan Terime Yaklaşım	18
2.2.5 İntegralin Operasyonel Matrisi	19
3 ISI DENKLEMİNİN GEGENBAUER DALGACIK GALERKİN YÖNTEMİYLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	20
3.1 Bir Boyutlu Isı Denklemine Gegenbauer Dalgacık Galerkin Yönteminin Uygulanması	21
3.2 Bir Boyutlu Isı Denklemi için Nümerik Sonuçlar	23

4	KdV- BURGERS- KURAMOTO DENKLEMİNİN GEGENBAUER DALGACIK GALERKİN YÖNTEMİYLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	31
4.1	KdV- Burgers- Kuramoto Denklemine Gegenbauer Dalgacık Galerkin Yönteminin Uygulanması	32
4.2	KdV- Burgers- Kuramoto Denklemi için Nümerik Sonuçlar	34
5	DOĞRUSAL VE DOĞRUSAL OLMAYAN KLEIN-GORDON DENKLEMLERİNİN GEGENBAUER DALGACIK GALERKİN YÖNTEMİYLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	45
5.1	Doğrusal Klein-Gordon Denklemine Gegenbauer Dalgacık Galerkin Yönteminin Uygulanması	46
5.1.1	Doğrusal Klein Gordon Denklemi için Nümerik Sonuçlar	49
5.2	Doğrusal Olmayan Klein-Gordon Denklemine Gegenbauer Dalgacık Galerkin Yönteminin Uygulanması	53
5.2.1	Doğrusal Olmayan Klein Gordon Denklemi için Nümerik Sonuçlar	55
6	ZAMAN KESİRLİ MERTEBEDEN İKİLİ BURGERS DENKLEMİNİN GEGENBAUER DALGACIK GALERKİN YÖNTEMİYLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	59
6.1	Zaman Kesirli İkili Burgers Denklemine Gegenbauer Dalgacık Galerkin Yönteminin Uygulanması	62
6.2	Zaman Kesirli İkili Burgers Denklemine Gegenbauer Dalgacık Sıralama Yönteminin Uygulanması	65
6.3	Nümerik Sonuçlar	67
7	SONUÇ VE ÖNERİLER	77
	Kaynakça	78
	Tezden Üretilmiş Yayınlar	85

SİMGE LİSTESİ

G_m^β	m . dereceden Gegenbauer polinomu
δ	Kronecker delta fonksiyonu
Γ	Gamma fonksiyonu
$T_m(x)$	Birinci mertebeden Chebyshev polinomu
$U_m(x)$	İkinci mertebeden Chebyshev polinomu
$L_m(x)$	m . dereceden Legendre polinomu
ϕ	Ölçekleme fonksiyonu
$\psi(x)$	Ana dalgacık
$\psi_{m,n}(x)$	Gegenbauer dalgacıkları
$\Phi_{m \times m}$	Gegenbauer dalgacık matrisi
\langle, \rangle	İç çarpım
p	Ölçekleme parametresi
q	Öteleme parametresi

KISALTMA LİSTESİ

BPF	Block- Pulse Fonksiyonları
GWGM	Gegenbauer Dalgacık Galerkin Metodu
GWCM	Gegenbauer Dalgacık Sıramala Metodu
KBK	KdV- Burgers- Kuramoto
MRA	Çoklu Çözünürlük Analizi

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1	$M = 6, k = 1$ ve $\beta = 1/2$ olması durumunda Problem 3.1' nin yaklaşık çözüm grafiği	26
Şekil 3.2	$M = 6, k = 1$ ve $\beta = 3/2$ olması durumunda Problem 3.1' nin yaklaşık çözüm grafiği	26
Şekil 3.3	Problem 3.1' in tam çözüm grafiği	27
Şekil 3.4	$M = 7, k = 1$ ve $\beta = 1/2$ olması durumunda Problem 3.2' nin yaklaşık çözüm grafiği	28
Şekil 3.5	$M = 7, k = 1$ ve $\beta = 3/2$ olması durumunda Problem 3.2' nin yaklaşık çözüm grafiği	28
Şekil 3.6	Problem 3.2' nin tam çözüm grafiği	28
Şekil 4.1	$M = 3, k = 1$ ve $\beta = 3/2$ olması durumunda Problem 4.1' in yaklaşık çözüm grafiği	40
Şekil 4.2	$M = 3, k = 1$ ve $\beta = 1/2$ olması durumunda Problem 4.1' in yaklaşık çözüm grafiği	40
Şekil 4.3	Problem 4.1' in tam çözüm grafiği	41
Şekil 4.4	$M = 3, k = 1$ ve $\beta = 3/2$ olması durumunda Problem 4.2' nin yaklaşık çözüm grafiği	44
Şekil 4.5	$M = 3, k = 1$ ve $\beta = 1/2$ olması durumunda Problem 4.2' nin yaklaşık çözüm grafiği	44
Şekil 4.6	Problem 4.2' nin tam çözüm grafiği	44
Şekil 5.1	$M = 10, k = 1$ ve $\beta = 1/2$ olması durumunda doğrusal Klein-Gordon denkleminin yaklaşık çözüm grafiği	52
Şekil 5.2	$M = 10, k = 1$ ve $\beta = 3/2$ olması durumunda doğrusal Klein-Gordon denkleminin yaklaşık çözüm grafiği	52
Şekil 5.3	$M = 10, k = 1$ ve $\beta = 1/2$ olması durumunda doğrusal Klein-Gordon denkleminin hata grafiği	52
Şekil 5.4	$M = 10, k = 1$ olması durumunda doğrusal Klein-Gordon denkleminin tam çözüm grafiği	52
Şekil 5.5	$M = 5, k = 1$ ve $\beta = 1/2$ olması durumunda doğrusal Klein-Gordon denkleminin yaklaşık çözüm grafiği	58

Şekil 5.6	$M = 4, k = 1$ ve $\beta = 3/2$ olması durumunda doğrusal olmayan Klein- Gordon denkleminin yaklaşık çözüm grafiği	58
Şekil 5.7	$M = 5, k = 1$ olması durumunda doğrusal olmayan Klein- Gordon denkleminin tam çözüm grafiği	58
Şekil 6.1	$M = 3, k = 1$ ve $\alpha = 0.75$ için farklı t zamanlarında mutlak hataların karşılaştırılması	75
Şekil 6.2	$M = 3, k = 1$ ve $\alpha = 0.90$ için farklı t zamanlarında mutlak hataların karşılaştırılması	75
Şekil 6.3	$M = 3, k = 1$ ve $\alpha = 1$ için farklı t zamanlarında mutlak hataların karşılaştırılması	75
Şekil 6.4	$M = 3, k = 1$ için GWGM ve GWCM için yazılan Maple kodlarının çalışma süreleri	76



TABLO LİSTESİ

Tablo 3.1	$M = 6, k = 1$ ve $\beta = 1/2$ için Problem 3.1' in Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırması . .	24
Tablo 3.2	$M = 6, k = 1$ ve $\beta = 3/2$ için Problem 3.1'in Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırması . .	25
Tablo 3.3	Problem 3.1' in L_∞ hataların karşılaştırması	26
Tablo 3.4	$M = 7, k = 1$ ve $\beta = 1/2$ için Problem 3.2'nin Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırması . .	29
Tablo 3.5	$M = 7, k = 1$ ve $\beta = 3/2$ için Problem 3.2'nin Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırması . .	30
Tablo 4.1	$\beta = 1/2, M = 3$ ve $k = 1$ için Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırması	38
Tablo 4.2	$\beta = 3/2, M = 3$ ve $k = 1$ için Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırması	39
Tablo 4.3	Problem 4.1' in L_∞ hataların karşılaştırması	40
Tablo 4.4	$\beta = 1/2, M = 3$ ve $k = 1$ için Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen Problem 4.2 nin mutlak hatalarının karşılaştırması .	42
Tablo 4.5	$\beta = 3/2, M = 3$ ve $k = 1$ için Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen Problem 4.2 nin mutlak hatalarının karşılaştırması .	43
Tablo 4.6	Problem 4.2' in L_∞ hataların karşılaştırması	44
Tablo 5.1	$\beta = 1/2, M = 10$ ve $k = 1$ için Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırması	50
Tablo 5.2	$\beta = 3/2, M = 10$ ve $k = 1$ için Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırması	51
Tablo 5.3	$\beta = 1/2, M = 5$ ve $k = 1$ için Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırması	56
Tablo 5.4	$\beta = 3/2, M = 4$ ve $k = 1$ için Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırması	57
Tablo 6.1	Zaman kesirli ikili Burgers denkleminin $k = 2, M = 3, \lambda = 0.005, \alpha = 0.75$ ve farklı β değerleri için Gegenbauer dalgacık sıralama yöntemi ile elde edilen maksimum hataları	72

Tablo 6.2	Zaman kesirli ikili Burgers denkleminin $k = 2, M = 3, \lambda = 0.005, \alpha = 0.90$ ve farklı β değerleri için Gegenbauer dalgacık sıralama yöntemi ile elde edilen maksimum hataları	73
Tablo 6.3	Zaman kesirli ikili Burgers denklemine $k = 1, M = 3, \beta = 1/2$ ve $\alpha = 0.75$ için GWGM ve GWCM uygulanarak elde edilen mutlak hataların karşılaştırması	73
Tablo 6.4	Zaman kesirli ikili Burgers denklemine $k = 1, M = 3, \beta = 1/2$ ve $\alpha = 0.90$ için GWGM ve GWCM uygulanarak elde edilen mutlak hataların karşılaştırması	74
Tablo 6.5	Zaman kesirli ikili Burgers denklemine $k = 1, M = 3, \beta = 1/2$ ve $\alpha = 1$ için GWGM ve GWCM uygulanarak elde edilen mutlak hataların karşılaştırması	74



Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri için Gegenbauer Dalgacık Galerkin Yöntemi

Neslihan ÖZDEMİR

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Danışman: Doç. Dr. Aydın SEÇER

Bu tez çalışmasında, kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemiyle, zaman kesirli mertebeden türevli kısmi diferansiyel denklem sistemlerinin nümerik çözümleri ise hem Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi hem de Gegenbauer dalgacık sıralama yöntemiyle ele alınmıştır. Bu tez çalışmasının asıl amacı, bu yöntemleri kullanarak bir boyutlu ısı denkleminin, KdV-Burgers-Kuramoto denkleminin, doğrusal ve doğrusal olmayan Klein-Gordon denklemlerinin ve zaman kesirli ikili Burgers denkleminin nümerik çözümlerini elde etmektir. Elde edilen nümerik sonuçlar tablolaştırılıp grafikleri çizildikten sonra hem analitik çözüm hem de elde edilen nümerik çözümler birbiri ile karşılaştırılmıştır. Bulunan sonuçlar değerlendirildiğinde, Gegenbauer dalgacık Galerkin yönteminin hem kısmi diferansiyel denklemlerin hem de kesirli mertebeden türevli doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklem sistemlerinin nümerik çözümlerini elde etmede çok etkili ve pratik bir yöntem olduğu gösterilmiştir.

Bu tez, yedi bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1’de konu ile ilgili literatür taraması yapıp tezin amacından ve hipotezden bahsedilmiştir.

Bölüm 2’de, ortogonal polinomlar ve dalgacıklar ile ilgili temel bilgiler verildikten sonra tezin alt yapısını oluşturan Gegenbauer dalgacıkları, Gegenbauer dalgacıklarıyla fonksiyonlara yaklaşım ve Gegenbauer dalgacıklarının yakınsaklık analizi ile ilgili bilgiler sunulmuştur.

Bölüm 3’te bir boyutlu ısı denklemini Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemiyle

nümerik olarak çözülmüştür. Elde edilen nümerik sonuçlar, tablolar halinde verilip grafikleri çizilerek analitik çözümlerle ve literatürde mevcut olan bazı sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Bölüm 4'te KdV- Burgers- Kuramoto denklemi ele alınmıştır. Bu denklemin nümerik çözümleri Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemiyle elde edilmiştir. Elde edilen nümerik çözümler hem analitik çözümlerle hem de literatürde mevcut olan Legendre dalgacık yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Ayrıca nümerik sonuçların grafikleri çizilmiştir.

Bölüm 5'te doğrusal ve doğrusal olmayan Klein-Gordon denklemleri ele alınmıştır. Bu denklemler, Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemiyle nümerik olarak çözülmüştür. Elde edilen nümerik sonuçlar tablolar halinde verilip grafikleri çizilerek tam çözümler ile karşılaştırılmıştır.

Bölüm 6'da, zaman kesirli ikili Burgers denklemi hakkında bilgi verilmiştir. Ele alınan problem hem Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi hem de Gegenbauer dalgacık sıralama yöntemiyle çözülmüştür. Elde edilen nümerik sonuçlar tablolaştırılıp grafikleri çizildikten sonra elde edilen nümerik çözümler analitik çözümler ile karşılaştırılmıştır.

Bölüm 7'de elde edilen tüm sonuçların detaylı olarak değerlendirmesi yapılmıştır.

Bu tez çalışmasında, Maple 15 programlama dili kullanılmış ve tüm hesaplamalar bu program ile yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi; integralin operasyonel matrisi; kısmi diferansiyel denklemler; kısmi diferansiyel denklem sistemleri

Gegenbauer Wavelets Galerkin Method for Numerical Solutions of Partial Differential Equations

Neslihan ÖZDEMİR

Department of Mathematical Engineering
Doctor of Philosophy Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Aydin SECER

In this thesis, Gegenbauer wavelet Galerkin method is applied to obtain the numerical solutions of partial differential equations, and both Gegenbauer wavelet Galerkin method and Gegenbauer wavelet collocation methods are applied to obtain the numerical solutions of time-fractional partial differential equation systems. The main purpose of this thesis is to obtain numerical solutions of one dimensional heat equation, Kdv-Burgers-Kuramoto equation, Klein-Gordon equation and the coupled system of Burgers' equations with time-fractional derivative. After the obtained numerical results were tabulated and plotted, both analytical and numerical solutions were compared with each other. When the results were evaluated, it was shown that Gegenbauer wavelet Galerkin method is a very effective and practical method in numerical solutions of both partial differential equations and fractional nonlinear partial differential systems.

This thesis consists of seven chapters. In Chapter 1, literature review is made and the aim of the thesis and the hypothesis are mentioned. In Chapter 2, after giving basic information about orthogonal polynomials and wavelets, the approximation of a function by using Gegenbauer wavelets, followed by Block Pulse functions and nonlinear term approximation by Gegenbauer wavelets that used in the thesis are introduced and the convergence analysis of Gegenbauer wavelets are presented.

In Chapter 3, the one-dimensional heat equation is solved numerically by the Gegenbauer wavelet Galerkin method. The obtained numerical results are given in tables and are plotted. Moreover they are compared with the exact solutions and

some results available in the literature.

In Chapter 4, the Kdv-Burger-Kuramoto equation is considered. Numerical solutions of this equation are obtained by Gegenbauer wavelet Galerkin method. The obtained numerical solutions are compared to the analytical solution and the numerical results obtained by Legendre wavelet method which is available in the literature. In addition, numerical results are plotted.

Chapter 5 deals with the linear and nonlinear Klein-Gordon equations. These equations are solved numerically by Gegenbauer wavelet Galerkin method. The obtained numerical results are given in tables and are plotted. Also they are compared with the exact solutions.

Chapter 6 provides information about the time-fractional-order coupled Burgers equation. Moreover, the problem is solved by both Gegenbauer wavelet Galerkin method and Gegenbauer wavelet collocation method. Then the numerical results are given in tables and are plotted. Also both analytical and numerical solutions were compared with each other.

In Chapter 7, conclusions are discussed in detail.

In this thesis, Maple 15 computer program was used and all calculations were calculated with this program.

Keywords: Gegenbauer wavelet Galerkin method; operational matrix of integration; partial differential equations; systems of partial differential equations

1.1 Literatür Özeti

Dalgacık analizi uygulamalı matematik alanında daha yeni olmasına rağmen, ilk kez Joseph Baptiste Fourier tarafından 1805 yılında ortaya atılmıştır. Joseph Fourier, karmaşık fonksiyonun temel trigonometrik fonksiyonların ağırlıklı toplamı olarak gösterilebileceğini ve yaklaşılabileceğini keşfetti. Bu tür yaklaşımların ve temsillerin, karmaşık fonksiyonların analizine değerli bir bakış açısı sağlaması nedeniyle birçok avantajı vardır. Fourier, temel fonksiyonlar olarak değişen frekanslarda sinüzoidleri kullandı. Bu gösterim, baz fonksiyonları olarak sinüzoidleri kullanıldığı için dezavantajlara sahiptir. Sinüzoidler, frekans alanında mükemmel bir kompakt desteğe sahip olmasına rağmen zaman alanında mükemmel bir kompakt desteğe değildir. Fourier'in çalışmasının temelini oluşturan frekans analizi konusunun önemli ve etkili bir yöntem olduğu ispatlanmıştır. Fakat frekans analizi tek başına yeterli olmadığı için frekans analizinden ölçek analizine geçiş yapılmıştır. Çünkü ölçülen ortalama dalgalanmaların farklı ölçeklerdeki analizlerinin gürültüye daha az duyarlı olduğu açıkça görülmüştür. Yani zaman dizilerinin geneline ilişkin kararlar vermek yerine bölgesel ölçekte oluşan küçük dalgalanmaların önemli olduğu ortaya atılmıştır. Bundan dolayı dalgacık analizi araştırmacılar için bir seçenek olmuştur.

Dalgacık analizi, hem uzun zaman aralığında alçak frekans bilgisini hem de kısa zaman aralığında yüksek frekans bilgilerini belirlememizi sağlar. Dalgacık analizi, Fourier analizinin aksine zaman-frekans alanını değil, zaman-ölçek alanını kullanır. Analiz sonucu tek boyutlu çizgi değil, alanlar oluşur. Dalgacık analizinin en önemli avantajı yerel analizi yapabilmesidir. Örneğin küçük bir süreksizlik noktası olan sinüs sinyalini düşünelim. Bu sinyalin Fourier analizi sonucunda elde edilen spektral bileşenlerin çizimi bir şey ifade etmez. Çünkü karşımıza sinyali temsil eden düz bir spektrum (2 zirve) çıkar. Buna karşılık dalgacık analizi sonucunda elde edilen spektral bileşenlerin çizimi zaman içerisindeki süreksizliğin kesin yerini gösterir. Yani dalgacık analizi boşluklu, eğilimli, kırılma noktalı, süreksizlik noktası bulunan sinyallerin analizinde kullanılan bir yöntemdir. Bunların yanı sıra geleneksel yöntemlerle karşılaştırıldığında

dalgacık analizi yardımıyla bir sinyali sıkıştırma işlemi sinyalin orjinalini bozmadan kolayca yapılabilir.

Dalgacık analizinin çalışma ve uygulama alanı çok hızlı bir şekilde büyümektedir. Genellikle veri ve sinyal işleme alanlarına uygulama yapılmıştır. Dalgacıkların diğer uygulama alanları astronomi, nükleer mühendislik, sinyal ve görüntü işleme, müzik, optik, insan görünüşü, radar, deprem tahmini, DNA analizi, protein analizi, kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri ve pür matematik uygulamalarıdır.

Şuanki kullanımıyla “dalgacık” sözü ilk kez Haar dalgacıkları olarak adlandırılan fonksiyonları tanıtan Alfred Haar’ın (1909) yüksek lisans tezinde kullanılmıştır. Dalgacık teorisinin yöntemleri Yves Meyer ve arkadaşları tarafından geliştirilmiştir. Meyer’in çalışmalarından ilham alan, Grossman’ın eski mezunlarından biri olan Ingrid Daubechies, Free’de Brüksel Üniversitesi, dalgacık dönüşümünün zaman ve ölçek parametrelerinin ayrıklaştırılması için dalgacık çerçevelerini geliştirdi. 1986’da Upenn’de lisansüstü öğrencisi olan Mallat, Meyer ile ayrık dalgacık dönüşümü (DWT) için çoklu çözünürlük analizini (MRA) keşfetti. 1988’de Ingrid Daubechies, bir dereceye kadar kompakt destekli ortonormal dalgacık aileleri inşa etti. Daubechies dalgacık ailesi farklı problemlerin çözümünde sıklıkla kullanılmaktadır [1]. Ancak Daubechies dalgacık ailesini analitik olarak yazmak mümkün değildir. Dolayısıyla bu dalgacıkların türevlerini ve integrallerini analitik olarak ifade etmek imkansızdır [2]. Bu dezavantajdan dolayı Daubechies ailesini diferansiyel denklemleri çözmek için kullanmak her zaman kolay değildir. Özellikle doğrusal olmayan denklemleri çözmek daha da karmaşık bir hal alır. Daubechies dalgacık ailesinin özel bir hali olan Haar dalgacıklarında ise yukarıda bahsedilen dezavantajlar yoktur. Haar dalgacık ailesi parçalı sabit fonksiyonlardan oluşur. Bu aileyi analitik olarak ifade etmek mümkündür. Fakat Haar dalgacık ailesi süreksiz fonksiyonlardan oluşur. Dolayısıyla bu fonksiyonların süreksiz olduğu noktalarda türevleri mevcut değildir. Bu durum Haar dalgacıklarını diferansiyel denklemlerin çözümünde doğrudan kullanmaya imkan vermez [3]. Benzer şekilde, literatürde var olan Symlet ve Coiflet dalgacık aileleri de Daubechies dalgacık ailesiyle aynı dezavantajlara sahiptir. Fakat çoğu yazar Chebyshev, Hermite, Bessel, Laguerre ve Legendre gibi ortogonal polinomlara dayalı dalgacıkları kullanmaktadır. Son zamanlarda daha çok polinom bazlı dalgacıklar kullanılmaktadır. Literatürde biyolojik ve fiziksel olayları modellemek için kullanılan bazı kısmi ve kesir türevli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri sonlu elemanlar metodu, sonlu farklar metodu ve spektral metotları ile sunulmuştur. Sonlu elemanlar metodu diferansiyel denkleme yaklaşım iken diğer metotlar denklemin çözümüne yaklaşımdır. Spektral baz fonksiyonları sonsuz kere türevlenebilir fakat bölgenin tamamında sıfırdan farklıdır. Diğer taraftan sonlu farklar ve sonlu elemanlar metodunda kullanılan baz fonksiyonları kompakt desteğe sahip olmalarına rağmen

süreklilik yönleri güçlü değildir. Fakat dalgacık fonksiyonları, diğer metotlarında kullanılan bazlara göre hem kompakt desteğe sahip hem de düzgün fonksiyonlardır. Bu özelliklerinin yanı sıra ortogonalite gibi birçok özelliğe sahiptir. Dalgacık metodunda kullanılan baz fonksiyonları türevlenebilir ve kompakt desteğe sahip olduğu aralıkta sıfırdan farklıdır. Bundan dolayı, dalgacık tabanlı nümerik metotlar literatürde var olan diğer metotlara göre daha avantajlıdır. Bu yüzden dalgacık analizi uluslararası bir yön kazanmıştır. Özellikle Daubechies, Wickherhouser ve Coifman önemli çalışmalarıyla konuya ivme kazandırmışlardır.

Ortogonal polinomlar ve ortogonal seriler mühendisliğin, fiziğin ve matematiğin pek çok alanında kullanılan önemli bir materyaldir. Ortogonal polinomlar ve seriler pek çok nümerik metodun arka planında bulunmaktadır. Çünkü iyi yakınsama özellikleri olduğundan ortogonal polinomları kullanmak kolaydır. Bu yüzden ortogonal polinomlar temel bilimlerde, mühendislikte ve fizikte karşımıza çıkan çeşitli problemlerin sayısal çözümlerini elde etmek için kullanılmıştır. Bahsedilen bu tip problemler çoğu zaman elemanter yöntemlerle çözülebilir; fakat çoğu zaman bu problemlerin tam çözümlerini bulmak zor olduğundan seri çözümlerine başvurulur. Ortogonal serilerin en önemli özelliklerinden biri de ele alınan problemi kolay çözülebilir cebirsel bir denklem sistemine dönüştürmesidir. Bu tez çalışmasında, Gegenbauer diferansiyel denkleminin çözümü olan Gegenbauer polinomlarına dayalı Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi kullanılmıştır.

Literatürde Gegenbauer dalgacıklarına dayalı çok az çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmaları şu şekilde sıralayabiliriz. Srivastava vd. [4] kesirli mertebeden Bagley-Torvik denklemlerinin sayısal sonuçlarını Gegenbauer dalgacıklarını kullanarak elde etmişlerdir. Rehman ve Saeed [5] kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerinin Gegenbauer dalgacıklarıyla sayısal çözümlerini vermişlerdir. Usman vd. [6] doğrusal ve doğrusal olmayan değişken mertebeden kesirli diferansiyel denklemlerinin nümerik çözümlerini Gegenbauer dalgacıklarıyla elde etmişlerdir. Asad Iqbal vd. [7] doğrusal olmayan kesirli mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemlerinin sayısal çözümlerini Gegenbauer dalgacıklarına dayalı yöntemle bulmuşlardır. Genelleştirilmiş Kuramoto- Sivashinsky denklemi Çelik [8] tarafından Gegenbauer dalgacıklarıyla çözülmüştür. Abd-Elhameed ve Yousri [9] tarafından kesirli Riccati diferansiyel denklemleri Gegenbauer dalgacıklarına dayalı Tau ve sıralama teknikleriyle çözülmüştür. Pathak ve Singh [10] Gegenbauer dalgacıklarıyla genelleştirilmiş Abel integral denklem sisteminin sayısal çözümünü elde etmişlerdir. Yousri vd. [11] astrofizikte ortaya çıkan Lane-Emden denklemlerinin, Gegenbauer dalgacıklarıyla sayısal sonuçlarını bulmuşlardır.

Bu tez çalışmasında, ilk olarak ele alınan probleme t zaman değişkenine göre

integralin operasyonel matrisi uygulanır. Daha sonra da x konum değişkenine göre problemde görülen en yüksek mertebeden türevli bilinmeyen fonksiyon Gegenbauer dalgacıkları serisine açılarak ardışık integral alma yöntemiyle bilinmeyen fonksiyonun kendisine ulaşır. Daha sonra elde edilen değerler t zaman değişkenine göre integralin operasyonel matrisi uygulanarak elde edilen ifadeye yerine yazılır. En son elde edilen bu ifadeye baz fonksiyonları olarak Gegenbauer dalgacıkları kullanılarak Galerkin yöntemi uygulanır daha sonra ele alınan problem kolay çözülebilir cebirsel bir denklem sistemine dönüşmektedir. Elde edilen bu cebirsel sistem Maple programı ile çözülerek problemin nümerik çözümü elde edilir. Elde edilen nümerik sonuçlar birbiri ile karşılaştırılmıştır. Farklı derecelerdeki dalgacık fonksiyonlarının kullanımı ile elde edilen nümerik yöntemler farklı problemler üzerinde test edilecektir. Nümerik sonuçları göstermede L_2 ve L_∞ hata normları kullanılmıştır.

Bu tez çalışmasında, Gegenbauer dalgacıkları ile aşağıdaki denklemler nümerik olarak çözülmüştür.

Bir boyutlu Isı denklemi:

$$u_t(x, t) = \bar{k}u_{xx}(x, t) - cu(x, t) + g(x, t).$$

Kdv- Burgers-Kuramoto(KBK) denklemi:

$$u_t(x, t) + u(x, t)u_x(x, t) - \lambda_1 u_{xx}(x, t) + \lambda_2 u_{xxx}(x, t) + \lambda_3 u_{xxxx}(x, t) = f(x, t).$$

Doğrusal ve doğrusal olmayan Klein- Gordon(KG) denklemi:

$$u_{tt}(x, t) + u_{xx}(x, t) + u(x, t) = f(x, t)$$

ve

$$u_{tt}(x, t) + \alpha u_{xx}(x, t) + \beta u(x, t) + u^2(x, t) = f(x, t).$$

Kesirli mertebeden türevli ikili Burgers denklemi $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere:

$$u_t^\alpha(x, t) = u_{xx}(x, t) + 2u(x, t)u_x(x, t) - \alpha_1 u_x(x, t)v(x, t) - \alpha_1 u(x, t)v_x(x, t) + q_1(x, t),$$

$$v_t^\alpha(x, t) = v_{xx}(x, t) + 2v(x, t)v_x(x, t) - \alpha_2 u_x(x, t)v(x, t) - \alpha_2 u(x, t)v_x(x, t) + q_2(x, t).$$

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasının temel amacı, Gegenbauer Dalgacıklarının yakınsalık analizini incelemek ve Gegenbauer Dalgacık Galerkin yöntemini kullanarak kısmi diferansiyel denklemlerin ve doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklem sistemlerinin sayısal çözüm analizini yapmaktır. Bu yöntemin temel amacı, kısmi diferansiyel denklemlerinin çözümüne Gegenbauer dalgacık serileri ile yaklaşımı sağlamaktır. Bu amaçtan hareketle, Gegenbauer Dalgacık Galerkin yöntemi, Isı denklemi, Kdv-Burgers-Kuramoto denklemi, Klein-Gordon denklemi ve zaman kesirli mertebeden ikili Burgers denklemine uygulanmış ve bu denklemlerin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen sayısal sonuçlar denklemlerin analitik çözümleri ile karşılaştırılmış ve yorumlanmıştır. Gegenbauer Dalgacık Galerkin yönteminin avantajları ve dezavantajlarından bahsedilmiştir.

1.3 Hipotez

"Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri için Gegenbauer Dalgacık Galerkin Yöntemi" adlı çalışmamızda hipotezimiz; ilk olarak literatür taraması yaptıktan sonra Gegenbauer Dalgacık Galerkin yönteminin, kısmi diferansiyel denklemlere ve kısmi diferansiyel denklem sistemlerine uygulamasını göstermek ve Gegenbauer Dalgacıklarının seri çözümünü kullanarak yakınsalık analizini incelemektir. Daha sonra paket programlar yardımıyla elde edilen sonuçları, diğer yöntemler ve analitik çözümler ile karşılaştırmak ve elde edilen çizelgeler ve grafiklerle çözümleri yorumlamaktır.

GEGENBAUER POLİNOMLARI VE GEGENBAUER DALGACIKLARI

2.1 Ortogonal Polinomlar

Ortogonal polinomlar, 19. yüzyılda sonsuza giden kesir ve moment problemlerinde kullanılmaya başlandı. Ortogonal teorisi de tellerin titreşimi ile ilgili tartışmalarla ortaya çıktı. Bu polinomların kullanım alanları zamanla genişledi; özellikle günümüzde bilgisayarların gelişi ile araştırma alanları hızla arttı. Ortogonal polinomların kullanım alanı, matematiksel fizik, mühendislik, bilgisayar bilimleri olup matematiğin de aktif bir araştırma alanı haline gelmiştir. Bu alanlardaki problemlerin matematiksel modelleri adi ve kısmi diferansiyel denklemler ile olur. Bu tip denklemlerin bazıları elementer yöntemlerle çözülebilir; fakat çoğunun tam çözümlerinin bulunması ya çok zor ya da mümkün değildir. Bu durumlarda genellikle seri çözümler kullanılır. Bu seriler, klasik ortogonal polinomlar veya özel fonksiyonlar olarak bilinen Chebyshev, Legendre, Hermite, Bessel, Gegenbauer ve Bernstein polinomlarına veya fonksiyonlarına dayalı serilerdir.

Bu tez çalışmasında, ortogonal polinomlar olan Gegenbauer polinomlarından ve Block- Pulse fonksiyonlarından bahsedildi.

Tanım 2.1 (Ortogonal Polinomların Tanımı). $\omega(x)$, (a, b) aralığında tanımlı negatif olmayan bir reel değerli fonksiyon olmak üzere $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ için

$$\int_a^b x^n \omega(x) dx$$

integrali mevcut ve

$$\int_a^b \omega(x) dx$$

integrali pozitif olsun. Bu durumda, aşağıdaki koşulları sağlayan bir tek $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ polinomlar dizisi vardır.

- $P_n(x)$, n . dereceden bir polinomdur ve bu polinomdaki x^n in katsayısı pozitiftir.
- $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ ortonormaldir.

Bu durumda, $P_n(x)$ polinomlarına, $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre, (a, b) aralığında bir ortogonal polinom sistemi denir.

2.1.1 Gegenbauer Polinomları ve Özellikleri

Leopold Gegenbauer tarafından adlandırılan Gegenbauer polinomları ultraküresel harmonik polinomlar olarakta bilinmektedir. $\beta > -\frac{1}{2}$, $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere m . dereceden Gegenbauer polinomları $[-1, 1]$ aralığında $G_m^\beta(x)$ şeklinde tanımlıdır. Gegenbauer polinomları Legendre, birinci tip Chebyshev ve ikinci tip Chebyshev polinomlarının genel bir hali olup, Jacobi polinomlarının özel bir halidir. Gegenbauer polinomları

$$(1-x^2)u'' - (2\beta+1)xu' + m(m+2\beta)u = 0$$

Gegenbauer diferansiyel denkleminin özel bir çözümüdür. $\beta = \frac{1}{2}$ olması durumunda bu denklem Legendre denklemine dönüşmektedir. Gegenbauer polinomları, üreten fonksiyonu $G^\beta(x, t)$ olmak üzere

$$G^\beta(x, t) = \frac{1}{(1-2xt+t^2)^\beta} = \sum_{m=0}^{\infty} G_m^\beta(x)t^m, (|t| < 1, |x| \leq 1)$$

şeklinde tanımlıdır. Gegenbauer polinomları aşağıdaki tekrar etme bağıntısıyla elde edilebilir.

$$G_0^\beta(x) = 1, G_1^\beta(x) = 2\beta x,$$

başlangıç değerleri olmak üzere

$$G_{m+1}^\beta(x) = \frac{1}{m+1} (2(m+\beta)xG_m^\beta(x) - (m+2\beta-1)G_{m-1}^\beta(x)), m = 1, 2, 3, \dots$$

dir [12]. $G^\beta(x, t)$ üreten fonksiyonunun t nin kuvvetleri cinsinden seriye açarak ve t^m e göre katsayıları karşılaştırarak, Gegenbauer polinomlarının açık hali

$$G_m^\beta(x) = \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k \frac{(\beta)_{m-k}}{k!(n-2k)!} (2x)^{m-2k}$$

şeklinde tanımlıdır. $G^\beta(x, t)$ üreten fonksiyonu kullanarak Gegenbauer polinomları için aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\frac{d}{dx} (G_m^\beta(x)) = 2\beta G_{m-1}^{\beta+1}(x), \frac{d^k}{dx^k} (G_m^\beta(x)) = 2^k \beta^k G_{m-1}^{\beta+k}(x)$$

$$(m + \beta) G_m^\beta(x) = \beta (G_m^{\beta+1}(x) - G_{m-2}^{\beta+1}(x)), \quad m \geq 2$$

$$\frac{d}{dx} (G_{m+1}^\beta(x) - G_{m-1}^\beta(x)) = 2\beta (G_m^{\beta+1}(x) - G_{m-2}^{\beta+1}(x)) = 2(m + \beta) G_m^\beta(x)$$

$2(m + \beta) G_m^\beta(x)$ nin -1 den x göre integrali alınır, aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\int_{-1}^x G_m^\beta(x) dx = \frac{1}{2(m + \beta)} (G_{m+1}^\beta(x) - G_{m-1}^\beta(x) - G_{m+1}^\beta(-1) + G_{m-1}^\beta(-1)), \quad m \geq 1$$

Rodrigues formülünden,

$$\int (1 - x^2)^{\beta - \frac{1}{2}} G_m^\beta(x) dx = -\frac{2\beta(1 - x^2)^{\beta + \frac{1}{2}}}{m(m + 2\beta)} G_{m-1}^{\beta+1}(x), \quad m \geq 1$$

eşitliği elde edilir. Gegenbauer polinomları,

$$G_m^\beta(-1) = \frac{(-1)^m \Gamma(m + 2\beta)}{m! \Gamma(2\beta)}, \quad G_m^\beta(1) = \frac{\Gamma(m + 2\beta)}{m! \Gamma(2\beta)}, \quad m \geq 1$$

eşitliklerini sağlar. Gegenbauer polinomları $[-1, 1]$ aralığında $\omega(x) = (1 - x^2)^{\beta - \frac{1}{2}}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogondur. Yani,

$$\int (1 - x^2)^{\beta - \frac{1}{2}} G_m^\beta(x) G_n^\beta(x) dx = K_m^\beta \delta_{mn}, \quad \beta > -\frac{1}{2}.$$

Burada,

$$K_m^\beta = \begin{cases} \frac{\pi 2^{1-2\beta} \Gamma(m + 2\beta)}{m!(m + \beta) (\Gamma(\beta))^2}, & \beta \neq 0 \\ \frac{2\pi}{m^2}, & \beta = 0 \\ \pi, & \beta = 0, m = 0 \end{cases}$$

ve δ Kronecker delta fonksiyonudur.

Teorem 2.1 (Bernstein-type eşitsizliği). Gegenbauer polinomları için

$$(\sin \theta)^\beta |G_m^\beta(\cos \theta)| < \frac{2^{1-\beta} \Gamma(m + 3\beta/2)}{\Gamma(\beta) \Gamma(m + 1 + \beta/2)}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, 0 < \beta < 1$$

dir [13].

Gegenbauer polinomları, Legendre polinomlarına ve Chebyshev polinomlarına genelleştirilebilir. $\beta = 0, \beta = 1$ ve $\beta = \frac{1}{2}$ için sırasıyla, birinci dereceden Chebyshev polinomları

$$T_m(x) = \frac{m}{2} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{G_m^\beta(x)}{\beta}, \quad m \geq 0$$

ikinci dereceden Chebyshev polinomları

$$U_m(x) = G_m^1(x)$$

ve Legendre polinomları

$$L_m(x) = G_m^{\frac{1}{2}}(x)$$

elde edilir.

2.1.2 Block Pulse Fonksiyonları(BPFs)

Block pulse fonksiyonları pek çok yazar tarafından çalışılmış ve farklı problemlere uygulanmıştır. Bu bölümde, Block pulse fonksiyonları ve Block pulse fonksiyonlarının özellikleri verilmiştir.

Block pulse fonksiyonlarının bir m - cümlesi, $t \in [0, b)$ aralığında,

$$b_i(t) = \begin{cases} 1 & \frac{i-1}{m}b \leq t < \frac{i}{m}b, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanan ortogonal fonksiyonların tam cümlesidir. Block pulse fonksiyonlarının cümlesi $[0, b)$ aralığında ayrıktır. $f(t)$, $[0, b)$ aralığında herhangi bir mutlak integrallenebilir fonksiyon olmak üzere block- pulse fonksiyonları yardımıyla

$$f(t) \simeq f_m(t) = \sum_{i=1}^m f_i b_i(t) = \xi^T B(t) \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilir. Burada,

$$\xi^T = [f_1, f_2, \dots, f_m], \quad B(t) = [b_1(t), b_2(t), \dots, b_m(t)]^T \quad (2.3)$$

ve f_i Block pulse fonksiyonu katsayıdır.

$$f_i = \frac{m}{b} \int_0^b f(t) b_i(t) dt = \frac{m}{b} \int_{((i-1)/m)b}^{(i/m)b} f(t) b_i(t) dt \quad (2.4)$$

formülü ile hesaplanır.

Block pulse fonksiyonlarının temel özellikleri aşağıdaki gibidir:

- Block-pulse fonksiyonlarının cümlesi $t \in [0, b)$ aralığında birbiriyle ayrıktır. Ve

$i, j = 1, 2, \dots, m$ için

$$b_i(t)b_j(t) = \delta_{ij}b_i(t) = \begin{cases} b_i(t) & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.5)$$

- Ortogonallik: Block pulse fonksiyonlarının cümlesi $t \in [0, b)$ aralığında birbiri ile ortogonaldır. Yani $i, j = 1, 2, \dots, m$ için

$$\int_0^b b_i(t)b_j(t)dt = \frac{b}{m}\delta_{ij} \quad (2.6)$$

Burada δ_{ij} Kronecker delta fonksiyonudur.

- Tamlik: m sonsuza yaklaştığında Block pulse fonksiyonlarının m - cümlesi $L^2[0, T)$ için tam bir bazdır. Parseval eşitliğinden,

$$\int_0^b f^2(t)dt = \sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 \|b_i(t)\|^2 \quad (2.7)$$

elde edilir. Burada,

$$f_i = \frac{m}{b} \int_0^b f(t)b_i(t)dt \quad (2.8)$$

dir.

Block pulse fonksiyonları vektör şeklinde ifade edilebilir. Yani,

$$B(t) = [b_1(t), b_2(t), \dots, b_m(t)]^T \quad (2.9)$$

biçiminde ifade edilebilir. (2.9) ifadesinden ve Block pulse fonksiyonlarının ayrıklık özelliğinden,

$$B(t)B^T(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_m(t) \end{bmatrix}$$

$$B(t)B^T(t) = 1, \quad B_m(t)B_m^T(t)V = \tilde{V}B_m(t).$$

Burada V , m boyutlu bir vektör ve $\tilde{V} = \text{diag}(V)$. Eğer A , $m \times m$ tipinde bir matris ise,

$$B^T(t)AB(t) = \tilde{A}^T B_m(t)$$

dir.

Benzer şekilde, herhangi bir iki boyutlu $g(x, t) \in L^2([0, b] \times [0, b])$ fonksiyonu Block pulse fonksiyonları cinsinden,

$$g(x, t) \simeq B^T(x)GB(t)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $B(t)$, Block pulse fonksiyonlarının m boyutlu bir vektörü ve G , Block pulse fonksiyonlarının $m \times m$ boyutlu katsayılar matrisidir. G matrisinin (i, j) . elemanı

$$G_{ij} = \frac{1}{h^2} \int_0^b \int_0^b g(x, t) b_i(x) b_j(t) dt ds, \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \quad h = \frac{b}{m}$$

formülü ile hesaplanır [14].

Tanım 2.2. A ve B $m \times m$ tipinde iki matris olmak üzere $A \otimes B = (a_{ij} \times b_{ij})_{mm}$ dir.

Teorem 2.2. Kabul edelim ki $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları, mutlak integrallenebilir fonksiyonlar ve $f(t) = FB(t)$ ve $g(t) = GB(t)$ olsun. Bu durumda, $H = F \otimes G$ olmak üzere,

$$f(t)g(t) = FB(t)B^T(t)G^T = HB(t).$$

Teorem 2.3. $f(x, t)$ ve $g(x, t)$ fonksiyonları, mutlak integrallenebilir fonksiyonlar ve $f(x, t) = B^T(x)FB(t)$ ve $g(x, t) = B^T(x)GB(t)$ olsun. Bu durumda, $H = F \otimes G$ olmak üzere,

$$f(x, t)g(x, t) = B^T(x)HB(t).$$

Burada, $H = F \otimes G$ dir.

2.1.2.1 Block Pulse Fonksiyonlarının (BPFs) Operasyonel Matrisi

Genelleştirilmiş integral operasyonel matrisi, Kılıçman ve Al Zhour [15] tarafından çalışılmış ve (2.9) ifadesindeki $B(t)$ matrisinin integrali gösterilmiştir. $B(t)$ matrisinin bir kez integrali alınarak elde edilen $m \times m$ tipindeki operasyonel bir P matrisi,

$$\int_0^t B(\eta) d\eta \cong PB(t), \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlıdır. Benzer şekilde, $B(t)$ nin n - kez integrali alınarak elde edilen P^n genelleştirilmiş operasyonel matrisi,

$$\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{n\text{-kez}} B(\eta) (d\eta)^n \cong P^n B(t) \quad (2.11)$$

formülü ile hesaplanır. Burada, $\xi_i = (i+1)^{n+1} - 2i^{n+1} + (i-1)^{n+1}$ olmak üzere

$$P_B^n = \frac{h^n}{(n+1)!} \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{m-1} \\ 0 & 1 & \xi_1 & \dots & \xi_{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \xi_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

2.2 Dalgacıklar

Dalgacık aileleri baba dalgacık ve ana dalgacık olarak adlandırılan dalgacıklardan oluşmaktadır. Genellikle baba dalgacık ve ana dalgacık sırasıyla ϕ ve ψ sembolleriyle gösterilmektedir. Literatürde baba dalgacık için ölçek fonksiyonu (Scaling function) ifadesi de kullanılmaktadır.

Bu bölümde amacımız, $L^2(\mathbb{R})$ uzayında $\psi(x)$ ana dalgacık fonksiyonunun genişlemesinden ve ötelemesinden oluşan tam ortonormal küme olan dalgacık sistemini inşa etmektir. Öncelikle dalgacık sisteminin yapısını çoklu çözünürlük analizinin yapısına indirgemeliyiz.

Tanım 2.3. $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$ ve $j, k \in \mathbb{Z}$ için $\phi_{j,k}, \psi_{j,k} \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k) \quad \text{and} \quad \psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$$

şeklinde tanımlanır.

$\phi_{j,k}, \psi_{j,k}$ tanımlarındaki $2^{j/2}$ çarpanı L^2 normlarının tüm j, k 'lar için aynı olması için vardır. Yani,

$$\begin{aligned} \|\psi_{j,k}\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} |2^{j/2} \psi(2^j x - k)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} 2^j |\psi(2^j x - k)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} 2^j |\psi(y)|^2 dy = \|\psi\|^2. \end{aligned}$$

Burada $y = 2^j x - k$ değişken dönüşümü yapılmıştır.

$\psi_{j,k}$,

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j(x - 2^{-j}k))$$

şeklinde de yazılabilir.

$\psi_{j,k}$ ' nin tanımı, bir genişleme, bir öteleme ve bir normalleştirme içerir. Genleşme

durumunu anlamak için, $j > 0$ için $\phi_{j,k}$ 'nin grafiği x eksenini boyunca sıkışır, $j < 0$ için $\psi_{j,k}$ 'nin grafiği x eksenini boyunca genişler. ψ kompakt desteğe sahip olduğunu kabul edelim ve $|x| > r$ ve her x için $\psi(x) = 0$ olacak şekilde en küçük $r > 0$ sayısını alalım. Bu durumda, $\psi(2^j x)$, $[-r/2^j, r/2^j]$ aralığında kompakt desteğe sahiptir. Yani, $|2^j x| > 0$ ya da $|x| > r/2^j$ için $\psi(2^j x) = 0$ dir.

$\psi(2^j x - k) = \psi(2^j(x - 2^{-j}k))$ 'nin grafiği $k > 0$ için $\psi(2^j x)$ 'nin grafiğinin x eksenini boyunca sağa tarafa $2^{-j}k$ ile ötelenmesiyle, $k < 0$ için $\psi(2^j x)$ 'nin grafiğinin x eksenini boyunca sola doğru $2^{-j}k$ ile ötelenmesiyle elde edilir. Eğer ψ , $[-r, r]$ aralığında kompakt desteğe sahip ise $\psi(2^j x - k)$, $[2^{-j}k - 2^{-j}r, 2^{-j}k + 2^{-j}r]$ aralığında kompakt desteğe sahiptir. Benzer özellikler $\phi_{j,k}$ için de geçerlidir.

Tanım 2.4. $L^2(\mathbb{R})$ için dalgacık sistemi herhangi bir $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ için

$$\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$$

cümlesi ortonormal cümledir. Burada, $\psi_{j,k}$ fonksiyonları dalgacık, ψ ise ana dalgacık olarak adlandırılır.

Tanım 2.5 (Çoklu Çözünürlük Analizi). Ölçek fonksiyonu veya ψ baba dalgacık fonksiyonu ile üretilen Çoklu Çözünürlük Analizi, $L^2(\mathbb{R})$ 'nin alt uzayı olan ve aşağıdaki özelliklere sahip $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ dizisidir.

- (Monotonluk) $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ dizisi artandır; yani $\forall j \in \mathbb{Z}$ için $V_j \subset V_{j+1}$ dir.
- (Ölçek fonksiyonunun varlığı) $\{\psi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ cümlesi ortonormal cümle ve

$$V_0 = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} z(k) \psi_{0,k} : z = (z(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}) \right\}$$

olacak şekilde $\psi \in V_0$ fonksiyonu vardır.

- (Ölçeleme özelliği) Her j için, $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j$.
- $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0$.
- (Yoğunluk) $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$.

Dalgacıkların hepsi aynı özelliklere sahip değildir. Farklı tiplerde dalgacıklar bulunmaktadır. Bu farklar aynı aile içerisindeki dalgacıkların değişen derecelerine bağlı olarak sahip oldukları birleşme sayısı, genişliği gibi farklar olabileceği gibi, daha temel farklar olan ortogonal olup olmama, ölçek fonksiyonu bulundurup bulundurmama, kompleks olma gibi farklardır. Bu bölümde sadece, tezde kullanılan Gegenbauer dalgacıkları tanıtılacaktır.

2.2.1 Gegenbauer Dalgacıkları ve Gegenbauer Dalgacıklarının Özellikleri

[0, 1] aralığında Gegenbauer dalgacıkları,

$$\psi_{n,m}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K_m^\beta}} 2^{\frac{k}{2}} G_m^\beta(2^k x - \hat{n}), & \frac{\hat{n}-1}{2^k} \leq x \leq \frac{\hat{n}+1}{2^k} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $k = 1, 2, 3, \dots$ çözünürlük seviyesi, $n = 1, 2, 3, \dots, 2^{k-1}$, $\hat{n} = 2n - 1$ kaydırma parametresi, $m = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ Gegenbauer polinomlarının derecesidir. k ölçek parametresi arttıkça dalgacıklar yatay ekseninde sıkışır yani gittikçe lokalize olur. Her $\beta > -\frac{1}{2}$ değeri için, farklı dalgacık aileleri elde edilir. $\beta = \frac{1}{2}$ için Legendre dalgacıkları [16], $\beta = 0$ ve $\beta = 1$ için sırasıyla birinci ve ikinci dereceden Chebyshev dalgacıkları elde edilir [17],[18].

Gegenbauer dalgacıklarının ortogonalliğini elde etmek için, Gegenbauer polinomlarının ağırlık fonksiyonunu ötelememiz ve genişletmemiz gerekmektedir. Yani Gegenbauer ağırlık fonksiyonu,

$$\omega_{n,k}(x) = \omega(2^k x - 2n + 1) = \left(1 - (2^k x - 2n + 1)^2\right)^{\beta - \frac{1}{2}} \quad (2.13)$$

şeklindedir. Sabit bir $k = p$ çözünürlük seviyesinde

$$\omega_{n,p}(x) = \begin{cases} \omega_{1,p}(x), & 0 < x \leq \frac{1}{2^{p-1}} \\ \omega_{2,p}(x), & \frac{1}{2^{p-1}} < x \leq \frac{2}{2^{p-1}} \\ \vdots & \vdots \\ \omega_{2^{p-1}-1,p}(x), & \frac{2^{p-1}-1}{2^{p-1}} < x \leq 1 \end{cases} \quad (2.14)$$

olarak elde edilir.

2.2.2 Gegenbauer Dalgacıklarıyla Fonksiyon Yaklaşımı

[0, 1] aralığında karesi integrallenebilir herhangi bir $u(x)$ fonksiyonu Gegenbauer dalgacıkları yardımıyla,

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(x) \quad (2.15)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, $c_{nm} = \langle u(x), \psi_{nm}(x) \rangle_{\omega_n(x)}$ dir. $u(x)$ sonsuz seri açılımı sonlu sayıda terim için

$$u(x) = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{nm}(x) = C^T \Psi(x) \quad (2.16)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$C = [c_{1,0}, c_{1,1}, \dots, c_{1,M-1}, c_{2,0}, c_{2,1}, \dots, c_{2,M-1}, \dots, c_{2^{k-1},0}, c_{2^{k-1},1}, \dots, c_{2^{k-1},M-1}]^T$$

$$\Psi(x) = [\psi_{1,0}, \psi_{1,1}, \dots, \psi_{1,M-1}, \psi_{2,0}, \psi_{2,1}, \dots, \psi_{2,M-1}, \dots, \psi_{2^{k-1},0}, \psi_{2^{k-1},1}, \dots, \psi_{2^{k-1},M-1}]^T$$

dir. Daha kompakt bir gösterim için, (2.16) ifadesi $\hat{m} = (2^{k-1}M)$ olmak üzere aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$C = [c_1, c_2, \dots, c_{\hat{m}}]^T, \quad \Psi(x) = [\psi_1(x), \dots, \psi_{\hat{m}}(x)]^T \quad (2.17)$$

olmak üzere

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\hat{m}} c_i \psi_i(x) = C^T \Psi(x) \quad (2.18)$$

şeklinde ifade edilir. Burada i indeksi $i = M(n-1) + m + 1$ bağıntısından elde edilir.

Tek değişkenli durumda olduğu gibi, $[0, 1] \times [0, 1]$ bölgesinde karesi integrallenebilir $u(x, t)$ fonksiyonu Gegenbauer dalgacıkları yardımıyla,

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\hat{m}} \sum_{j=1}^{\hat{m}} u_{ij} \psi_i(x) \psi_j(t) = \Psi^T(x) U \Psi(t) \quad (2.19)$$

şeklinde ifade edilir. u_{ij} dalgacık katsayıları olmak üzere,

$$u_{ij} = \left\langle \psi_i(x), \left\langle u(x, t), \psi_j(t) \right\rangle_{\omega_n(t)} \right\rangle_{\omega_n(x)} \quad (2.20)$$

şeklinde hesaplanır.

$$x_i = \frac{2i-1}{2\hat{m}}, \quad i = 1, 2, \dots, \hat{m} \quad (2.21)$$

sıralama noktaları olmak üzere bu sıralama noktaları (2.17) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\Phi_{\hat{m} \times \hat{m}} = \left[\Psi\left(\frac{1}{2\hat{m}}\right), \Psi\left(\frac{3}{2\hat{m}}\right), \dots, \Psi\left(\frac{2\hat{m}-1}{2\hat{m}}\right) \right]. \quad (2.22)$$

2.2.3 Gegenbauer Dalgacıklarının Yakınsaklık Analizi

Teorem 2.4 (Yakınsaklık teoremi). Eğer $\left| \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} \right| \leq M$ ise $[0, 1] \times [0, 1]$ bölgesinde karesi integrallenebilir $u(x, t)$ fonksiyonunun sonsuz Gegenbauer dalgacık seri açılımı $u(x, t)$ fonksiyonuna yakınsar.

İspat. Kabul edelim ki $u(x, t)$, $[0, 1] \times [0, 1]$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon ve M pozitif bir sabit olmak üzere $\left| \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} \right| \leq M$ olsun. Sürekli $u(x, t)$ fonksiyonunun Gegenbauer dalgacık katsayıları aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$\begin{aligned} u_{ij} &= \int_0^1 \int_0^1 u(x, t) \psi_i(x) \psi_j(t) \omega(x) \omega(t) dx dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{K_{m_1}^\beta}} \frac{1}{\sqrt{K_{m_2}^\beta}} 2^{\frac{k_1+k_2}{2}} \int_{\frac{n_2-1}{2^{k_2-1}}}^{\frac{n_2}{2^{k_2-1}}} \int_{\frac{n_1-1}{2^{k_1-1}}}^{\frac{n_1}{2^{k_1-1}}} u(x, t) G_{m_1}^\beta(2^{k_1}x - 2n_1 - 1) \\ &\quad \omega(2^{k_1}x - 2n_1 - 1) \psi_j(2^{k_1}x - 2n_1 - 1) \omega(2^{k_1}x - 2n_1 - 1) dx dt \end{aligned} \quad (2.23)$$

$2^{k_1}x - 2n_1 - 1 = x_1$ değişken değişimi yapılırsa,

$$\begin{aligned} u_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{K_{m_1}^\beta}} \frac{1}{\sqrt{K_{m_2}^\beta}} \frac{2^{\frac{k_1+k_2}{2}}}{2^{k_1}} \int_{\frac{n_2-1}{2^{k_2-1}}}^{\frac{n_2}{2^{k_2-1}}} \left(\int_{-1}^1 u\left(\frac{x_1+2n-1}{2^{k_1}}, t\right) G_{m_1}^\beta(x_1) \omega(x_1) dx_1 \right) \\ &\quad \psi_j(2^{k_1}x - 2n_1 - 1) \omega(2^{k_1}x - 2n_1 - 1) dt \end{aligned} \quad (2.24)$$

ifadesi elde edilir. Şimdi, aşağıdaki integral kısmi integrasyon yöntemi kullanarak hesaplanırsa

$$\int_{-1}^1 u\left(\frac{x_1+2n-1}{2^{k_1}}, t\right) G_{m_1}^\beta(x_1) \omega(x_1) dx_1 = \frac{1}{2^{k_1}} \frac{2\beta}{m_1(m_1+2\beta)} \int_{-1}^1 \frac{\partial u\left(\frac{x_1+2n-1}{2^{k_1}}\right)}{\partial x_1} G_{m_1-1}^{\beta+1}(x_1) (1-x_1^2)^{\beta+1/2} dx_1 \quad (2.25)$$

ifadesi elde edilir. Şimdi, (2.25) ifadesine tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u\left(\frac{x_1+2n-1}{2^{k_1}}, t\right) G_{m_1}^\beta(x_1) \omega(x_1) dx_1 &= \frac{2^2 \beta (\beta + 1)}{2^{2k_1} m_1 (m_1 + 2\beta) (m_1 - 1) (m_1 + 1 + 2\beta)} \\ &\quad \times \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} G_{m_1-2}^{\beta+2}(x_1) (1-x_1^2)^{2\beta+3/2} dx_1 \end{aligned} \quad (2.26)$$

ifadesi elde edilir ve bu ifade de $x_1 = \cos \theta_1$ alınırsa

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u\left(\frac{x_1+2n-1}{2^{k_1}}, t\right) G_{m_1}^\beta(x_1) \omega(x_1) dx_1 &= \frac{2^2 \beta (\beta + 1)}{2^{k_1} m_1 (m_1 + 2\beta) (m_1 - 1) (m_1 + 1 + 2\beta)} \\ &\quad \times \int_0^\pi \frac{\partial^2 u}{\partial \theta_1^2} G_{m_1-2}^{\beta+2}(\cos \theta_1) (\sin \theta_1)^{2\beta+4} d\theta_1 \end{aligned} \quad (2.27)$$

eşitliği elde edilir. (2.27) ifadesi (2.25) ifadesinde yerine yazılırsa

$$u_{ij} = \frac{1}{\sqrt{K_{m_1}^\beta}} \frac{1}{\sqrt{K_{m_2}^\beta}} \frac{2^{\frac{k_1+k_2}{2}}}{2^{3k_1}} \frac{2^{2\beta}(\beta+1)}{m_1(m_1+2\beta)(m_1-1)(m_1+1+2\beta)} \int_0^\pi \left(\int_{\frac{n_2-1}{2^{k_2-1}}}^{\frac{n_2}{2^{k_2-1}}} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta_1^2} G_{m_2}^\beta (2^{k_2}t - 2n_2 - 1) \omega(2^{k_2}t - 2n_2 - 1) dt \right) G_{m_1-2}^{\beta+2}(\cos \theta_1) (\sin \theta_1)^{2\beta+4} d\theta_1 \quad (2.28)$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde aşağıdaki integralde kısmi integrasyon kullanılarak hesaplanırsa,

$$\int_{\frac{n_2-1}{2^{k_2-1}}}^{\frac{n_2}{2^{k_2-1}}} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta_1^2} G_{m_2}^\beta (2^{k_2}t - 2n_2 - 1) \omega(2^{k_2}t - 2n_2 - 1) dt = \frac{1}{2^{k_2}} \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 u\left(\frac{\cos \theta_1 + 2n_2 - 1}{2^{k_1}}, \frac{t_1 + 2n_2 - 1}{2^{k_2}}\right)}{\partial \theta_1^2} \times G_{m_2}^\beta(t_1) \omega(t_1) dt_1 \quad (2.29)$$

elde edilir. Burada $2^{k_1} - 2n_2 - 1 = t_1$ dir. Eğer (2.28) ifadesinin iki kez integrali alınır ve elde edilen ifade de $t_1 = \cos \theta_2$ alınır

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial^2 u\left(\frac{\cos \theta_1 + 2n_2 - 1}{2^{k_1}}, \frac{\cos \theta_2 + 2n_2 - 1}{2^{k_2}}\right)}{\partial \theta_1^2} G_{m_2}^\beta(t_1) \omega(t_1) dt_1 = \frac{2^{k_2} 2^{2\beta} (\beta+1)}{2^{3k_2} m_2 (m_2 + 2\beta) (m_2 - 1) (m_2 + 1 + 2\beta)} \times \int_0^\pi \frac{\partial^4 u}{\partial \theta_1^2 \partial \theta_2^2} G_{m_2-2}^{\beta+2}(\cos \theta_2) (\sin \theta_2)^{2\beta+4} d\theta_2. \quad (2.30)$$

ifadesi elde edilir. (2.31) ifadesi (2.28) ifadesinde yerine yazılırsa

$$u_{ij} = \frac{1}{\sqrt{K_{m_1}^\beta}} \frac{1}{\sqrt{K_{m_2}^\beta}} \frac{1}{2^{\frac{5(k_1+k_2-8)}{2}}} \frac{\beta^2(\beta+1)^2}{(m_1-1)_2 (m_1-1+2\beta)_2 (m_2-1)_2 (m_2-1+2\beta)_2} \times \int_0^\pi \left(\int_0^\pi \frac{\partial^4 u}{\partial \theta_1^2 \partial \theta_2^2} G_{m_1-2}^{\beta+2}(\cos \theta_1) (\sin \theta_1)^{2\beta+4} G_{m_2}^\beta(\cos \theta_2) (\sin \theta_2)^{2\beta+4} d\theta_1 \right) d\theta_2 \quad (2.31)$$

ifadesi elde edilir. $\left| \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} \right| \leq M$ ve teorem 2.1 den,

$$\begin{aligned}
u_{ij} &\leq \frac{1}{\sqrt{K_{m_1}^\beta}} \frac{1}{\sqrt{K_{m_2}^\beta}} \frac{1}{2^{\frac{5(k_1+k_2-8)}{2}}} \frac{\beta^2(\beta+1)^2}{(m_1-1)_2 (m_1-1+2\beta)_2 (m_2-1)_2 (m_2-1+2\beta)_2} \\
&\quad \times \int_0^\pi \int_0^\pi \left| \frac{\partial^4 u}{\partial \theta_1^2 \partial \theta_2^2} \right| \left| G_{m_1-2}^{\beta+2}(\cos \theta_1) \right| (\sin \theta_1)^{2\beta+4} \left| G_{m_2}^\beta(\cos \theta_2) \right| (\sin \theta_2)^{2\beta+4} d\theta_1 d\theta_2 \\
&\leq \lambda M \int_0^\pi \int_0^\pi \left| G_{m_1-2}^{\beta+2}(\cos \theta_1) \right| (\sin \theta_1)^{2\beta+4} \left| G_{m_2-2}^\beta(\cos \theta_2) \right| (\sin \theta_2)^{2\beta+4} d\theta_1 d\theta_2 \\
&\leq \lambda M \pi^2 \frac{1}{2^{2\beta+2}} \frac{\Gamma(m_1+1+\frac{3\beta}{2}) \Gamma(m_2+1+\frac{3\beta}{2})}{\Gamma(m_1+\frac{\beta}{2}) \Gamma(m_2+\frac{\beta}{2}) \Gamma(\beta+2)^2}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

burada

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{K_{m_1}^\beta}} \frac{1}{\sqrt{K_{m_2}^\beta}} \frac{1}{2^{\frac{5(k_1+k_2-8)}{2}}} \frac{\beta^2(\beta+1)^2}{(m_1-1)_2 (m_1-1+2\beta)_2 (m_2-1)_2 (m_2-1+2\beta)_2} \tag{2.33}$$

elde edilir. Yani $u(x, t)$ sınırlıdır. Sonuç olarak $\sum_i^\infty \sum_j^\infty u_{ij}$ serisi yakınsaktır. ■

2.2.4 Gegenbauer Dalgacıklarıyla Doğrusal Olmayan Terime Yaklaşım

Gegenbauer dalgacıkları block pulse fonksiyonlarının m -cümlesi yardımıyla,

$$\Psi(t) = \Phi_{\hat{m} \times \hat{m}} B_{\hat{m}}(t) \tag{2.34}$$

şeklinde ifade edilir [19]. Gegenbauer dalgacıklarının çarpımının operasyonel matrisi, block pulse fonksiyonlarının özellikleri kullanılarak hesaplanabilir. Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü elde edebilmek için çarpımın operasyonel matrisi büyük öneme sahiptir.

Mutlak integrallenebilir $f_1(x, t)$ ve $f_2(x, t)$ fonksiyonları, Gegenbauer dalgacıkları yardımıyla

$$f_1(x, t) = \Psi^T(x) F_1 \Psi(t) \tag{2.35}$$

ve

$$f_2(x, t) = \Psi^T(x) F_2 \Psi(t) \tag{2.36}$$

olarak ifade edilebilir. (2.34) ifadesi kullanılarak, (2.35) ve (2.36) ifadelerinden sırasıyla,

$$\begin{aligned}
f_1(x, t) &= \Psi^T(x) F_1 \Psi(t) = B^T(x) \Phi_{\hat{m} \times \hat{m}}^T F_1 \Phi_{\hat{m} \times \hat{m}} B(t) = B^T(x) F_a B(t) \\
f_2(x, t) &= \Psi^T(x) F_2 \Psi(t) = B^T(x) \Phi_{\hat{m} \times \hat{m}}^T F_2 \Phi_{\hat{m} \times \hat{m}} B(t) = B^T(x) F_b B(t)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

ifadeleri yazılabilir. Burada, $F_a = \Phi_{\hat{m} \times \hat{m}}^T F_1 \Phi_{\hat{m} \times \hat{m}}$ ve $F_b = \Phi_{\hat{m} \times \hat{m}}^T F_2 \Phi_{\hat{m} \times \hat{m}}$ dir. $F_3 = F_a \otimes F_b$ alınırsa, $F_4 = \text{inv}(\Phi_{\hat{m} \times \hat{m}}^T) F_3 \text{inv}(\Phi_{\hat{m} \times \hat{m}})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_1(x, t) f_2(x, t) &= B^T(x) F_3 B(t) \\ &= B^T(x) (\Phi_{\hat{m} \times \hat{m}}^T) \text{inv}(\Phi_{\hat{m} \times \hat{m}}) F_3 \text{inv}(\Phi_{\hat{m} \times \hat{m}}) \Phi_{\hat{m} \times \hat{m}} B(t) \\ &= \Psi(x)^T F_4 \Psi(t) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

2.2.5 İntegralin Operasyonel Matrisi

Gegenbauer dalgacık Galerkin metodunu uygulamak için operatör matrisinin integralinin nasıl hesaplanacağını bilmesi gerekir. Bu nedenle Kılıçman ve Al Zhou [15], genelleştirilmiş integral operatör matrisini detaylı olarak araştırmışlardır.

Kılıçman ve Al Zhou'a göre (2.17) ifadesinde tanımlanan $\Psi(x)$ vektörünün α . mertebeden integrali,

$$(I^\alpha \Psi)(.) = P^\alpha \Psi(.) \quad (2.38)$$

şeklinde ifade edilir. Burada, P^α Gegenbauer dalgacıklarının α mertebeden integralinin operatör matrisidir. [15] de gösterildiği gibi, P^α matrisine aşağıdaki gibi yaklaşılabılır:

$$P^\alpha \cong P_{\hat{m} \times \hat{m}}^\alpha = \Phi P_B^\alpha \Phi^{-1}. \quad (2.39)$$

Burada, P_B^α matrisi block pulse fonksiyonlarının α mertebeden integralinin matrisidir ve P_B^α matrisi

$$P_B^\alpha = \frac{1}{\hat{m}^\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha + 2)} \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{\hat{m}-1} \\ 0 & 1 & \xi_1 & \dots & \xi_{\hat{m}-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \xi_{\hat{m}-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ifadesinden elde edilir ve burada $\xi_i = (i + 1)^{\alpha+1} - 2i^{\alpha+1} + (i - 1)^{\alpha+1}$ dir [15].

3

ISI DENKLEMİNİN GEGENBAUER DALGACIK GALERKİN YÖNTEMİYLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, L uzunluğundaki bir çubuğun ısı iletiminin fiziksel problemi ele alınmıştır. Bu problem ilk olarak Fourier tarafından 19. yüzyılın başında incelenmiştir. Bir çubuğun üzerinde ısının belli bir konumda ve zamanda nasıl dağılacığını gösteren diferansiyel denklem,

$$u_t = \bar{k}u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0 \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır [20]. Burada, $u = u(x, t)$, x konumunda ve t zamanındaki çubuğun sıcaklığını, \bar{k} ise ısı iletimi için çubuk yeteneği ölçen malzemenin termal yayılımını belirtir. Süresiz olarak devam eden L uzunluğundaki bir çubuğun çözüm bölgesi, $\frac{L}{2}$ genişlikte bir şerittir. Pratik bir hesaplamada, çözüm sadece $T = t_{max}$ gibi sınırlı bir süre için elde edilir. Denklem çözümü için, $t = 0$ başlangıç koşulunun ve $x = 0$ ve $x = 1$ sınır koşullarının belirtilmesi gerekir. Basit başlangıç ve sınır koşulları :

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3.2)$$

$$u(0, t) = h_1(t), \quad t \geq 0 \quad (3.3)$$

$$u(L, t) = h_2(t), \quad t \geq 0 \quad (3.4)$$

şeklinde. Cannon tarafından [20] bu problemin varlık ve tekliği üzerine çalışmıştır. Homojen ısı denklemi,

$$u_t = \bar{k}u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0 \quad (3.5)$$

şeklinde. Ayrıca yanal ısı kaybına sahip ısı denklemi c pozitif sabit olmak üzere,

$$u_t = \bar{k}u_{xx} - cu, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0 \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlıdır. Homojen olmayan ısı denklemi ise,

$$u_t = \bar{k}u_{xx} + g(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0 \quad (3.7)$$

şeklidir. Burada $g(x, t)$ ısı kaynağıdır.

Literatürde bir boyutlu ısı denklemi birçok yazar tarafından incelenmiştir. Bu çalışmalardan bazıları şunlardır: Secer [21]'de sinc-Galerkin yöntemini ve Mebrate [22]'de sonlu farklar yöntemini ve sonlu elemanlar yöntemini kullanarak bir boyutlu ısı denkleminin nümerik çözümlerini elde etmişlerdir. Gorguis ve Chan [23], ısı denklemini geleneksel değişkenlerine ayrışım yöntemi ve Adomian yöntemi ile çözüp karşılaştırmasını yapmışlardır. Dehghan [24], iki boyutlu ısı denkleminin çözümünü iki boyutlu sonlu fark şemasını kullanarak elde etmiştir. Mohebbi ve Dehghan [25], kompakt sonlu farklar yaklaşımı ve kübik C1-spline sıralama yöntemini kullanarak dördüncü dereceden doğrulukla ısı denkleminin çözümünü elde etmişlerdir. Dabral vd. [26]'da bir boyutlu ısı denkleminin nümerik çözümlerini bulmak için B-spline sonlu elemanlar yöntemini kullanmışlardır. Hooshmandashl vd. [27]'de Chebyshev dalgacık yöntemini ve Çağlar vd. [28]'de 3. dereceden B-spline fonksiyonlarını kullanarak bir boyutlu ısı denkleminin nümerik çözümlerini elde etmişlerdir.

3.1 Bir Boyutlu Isı Denklemine Gegenbauer Dalgacık Galerkin Yönteminin Uygulanması

Bu bölümde,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \bar{k} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - cu(x, t) + g(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.8)$$

yansal ısı kaybına sahip homojen olmayan bir boyutlu ısı denklemi

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.9)$$

$$u(0, t) = h_1(t), \quad t \geq 0 \quad (3.10)$$

$$u(1, t) = h_2(t), \quad t \geq 0 \quad (3.11)$$

başlangıç ve Dirichlet sınır koşulları ile birlikte göz önüne alınmıştır. Burada, $f(x)$, $h_1(t)$ ve $h_2(t)$ sürekli olarak türevlenebilir fonksiyonlar ve $u(x, t) \in L^2(\mathbb{R})$ dir. (3.8)-(3.11) problemini çözmek için, (3.8) denkleminin t zaman değişkenine göre 0'dan t 'ye integrali alınırsa,

$$u(x, t) = u(x, 0) + \bar{k} \int_0^t \frac{\partial^2 u(x, \eta)}{\partial x^2} d\eta - c \int_0^t u(x, \eta) d\eta + \int_0^t g(x, \eta) d\eta \quad (3.12)$$

şeklinde bir boyutlu ısı denkleminin integral formu elde edilir.

Şimdi, Gegenbauer dalgacık serisiyle bu denklemi çözmek için denklemde görülen en yüksek mertebeden türev terimi

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^{\hat{m}} \sum_{j=1}^{\hat{m}} u_{ij} \psi_i(x) \psi_j(t) = \Psi^T(x) U \Psi(t) \quad (3.13)$$

biçiminde Gegenbauer dalgacık serisine açılır. Burada, $U = [u_{ij}]_{\hat{m} \times \hat{m}}$ bulunması gereken bilinmeyen katsayı matrisidir. (3.13) denkleminin iki kez x konum değişkenine göre 0'dan x 'e göre integrali alınır ve (3.10) ve (3.11) ifadesindeki sınır koşulları göz önüne alınır sırasıyla,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} + \Psi^T(x) P^T U \Psi(t), \quad (3.14)$$

$$u(x, t) = u(0, t) + x \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) + \Psi^T(x) (P^2)^T U \Psi(t) \quad (3.15)$$

ifadeleri elde edilir. (3.15) ifadesinde $x = 1$ alınır

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_2(t) - h_1(t) - \Psi^T(1) (P^2)^T U \Psi(t) \quad (3.16)$$

bulunur. H_1 ve H_2 Gegenbauer dalgacık katsayı vektörleri olmak üzere,

$$h_1(t) = H_1^T \Psi(t), \quad h_2(t) = H_2^T \Psi(t) \quad (3.17)$$

ifadeleri yazabilir. (3.17) ifadesindeki denklemler (3.16) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = (H_2^T - H_1^T - \Psi^T(1) (P^2)^T U) \Psi(t) = \tilde{U}^T \Psi(t) \quad (3.18)$$

ifadesi bulunur. (3.18) ifadesinin (3.14) –(3.15) denklemlerinde yerine yazılmasıyla

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \Psi^T(x) A_1 \Psi(t), \quad (3.19)$$

$$u(x, t) = \Psi^T(x) A_2 \Psi(t) \quad (3.20)$$

ifadeleri bulunur. Burada,

$$A_1 = E\tilde{U}^T + P^T U,$$

$$A_2 = EH_1^T + X\tilde{U}^T + (P^2)^T U$$

ve X ve E sırasıyla $x = \psi(x)^T X$ ve $1 = \psi(x)^T E$ için Gegenbauer dalgacık katsayı vektörleridir. $g(x, t)$ integrali ve $u(x, 0) = f(x)$ fonksiyonu Gegenbauer dalgacık serisine açılırsa

$$g(x, t) = \Psi^T(x)G\Psi(t) \quad (3.21)$$

$$f(x) = \Psi^T(x)F \quad (3.22)$$

şeklinde elde edilir. Burada G ve F , Gegenbauer dalgacık katsayı vektörleridir.

(3.13) ve (3.20)- (3.22) denklemlerini (3.12) denkleminde yerine yazıp integralin operasyonel matrisi kullanılırsa, (3.12) denklemi için $R(x, t)$ kalan terim fonksiyonunu,

$$R(x, t) = \Psi^T(x)[A_2 - FE^T - \bar{k}UP + cA_2P - GP]\Psi(t)$$

şeklinde elde edilir.

$R(x, t)$ kalan terim fonksiyonuna Galerkin metodu uyguladığında,

$$\int_0^1 \int_0^1 R(x, t)\psi_i(x)\psi_j(t)\omega_n(x)\omega_n(t)dxdt = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, \hat{m}$$

doğrusal cebirsel denklem sistemi bulunur. Bu sistemin çözülmesiyle, $u_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, \hat{m}$ Gegenbauer dalgacık katsayıları elde edilir. Bu dalgacık katsayıları (3.20) denkleminde yerine yazılarak problemin $u(x, t)$ yaklaşık çözümü elde edilir.

3.2 Bir Boyutlu Isı Denklemi için Nümerik Sonuçlar

Problem 3.1 $\bar{k} = 1, c = 2$ ve $g(x, t) = 0$ olmak üzere (3.8) denklemi

$$u(x, 0) = \sinh(x)$$

başlangıç koşulu ve

$$u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$u(1, t) = \sinh(1)e^{-t}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

sınır koşulları ile göz önüne alınmıştır. Problemin tam çözümü $u(x, t) = e^{-t} \sinh(x)$ dir [29].

Tablo 3.1 $M = 6, k = 1$ ve $\beta = 1/2$ için Problem 3.1' in Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırması

$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $					
x	$t = 0.1$	$t = 0.3$	$t = 0.5$	$t = 0.7$	$t = 0.9$
$x = 0.1$	$2.09351137156547 \times 10^{-4}$	$4.25819686198370 \times 10^{-5}$	$5.50916239448265 \times 10^{-5}$	$2.36207498582885 \times 10^{-5}$	$4.51101943601123 \times 10^{-5}$
$x = 0.2$	$4.06611915207716 \times 10^{-4}$	$8.76604768249856 \times 10^{-5}$	$1.04374676955621 \times 10^{-4}$	$4.83185269853220 \times 10^{-5}$	$8.50096919486898 \times 10^{-5}$
$x = 0.3$	$5.79146081665316 \times 10^{-4}$	$1.36531114012683 \times 10^{-4}$	$1.42446516886496 \times 10^{-4}$	$7.47282856198572 \times 10^{-5}$	$1.14904210797004 \times 10^{-4}$
$x = 0.4$	$7.19100827411445 \times 10^{-4}$	$1.90852051937418 \times 10^{-4}$	$1.63022202597340 \times 10^{-4}$	$1.02800966954197 \times 10^{-4}$	$1.31373636997084 \times 10^{-4}$
$x = 0.5$	$8.04673496161257 \times 10^{-4}$	$2.43420588595611 \times 10^{-4}$	$1.63610794091440 \times 10^{-4}$	$1.33132207597919 \times 10^{-4}$	$1.26550628248512 \times 10^{-4}$
$x = 0.6$	$8.10817375729966 \times 10^{-4}$	$2.81010824830674 \times 10^{-4}$	$1.44971917685144 \times 10^{-4}$	$1.63809870368126 \times 10^{-4}$	$9.42929897638778 \times 10^{-5}$
$x = 0.7$	$7.19574559887803 \times 10^{-4}$	$2.87516542158750 \times 10^{-4}$	$1.10821784106818 \times 10^{-4}$	$1.87465729146574 \times 10^{-4}$	$3.65241855362908 \times 10^{-5}$
$x = 0.8$	$5.29937409789905 \times 10^{-4}$	$2.47481080844159 \times 10^{-4}$	$6.78564067911891 \times 10^{-5}$	$1.88586723954609 \times 10^{-4}$	$3.02142303413855 \times 10^{-5}$
$x = 0.9$	$2.67130798413451 \times 10^{-4}$	$1.50100032382472 \times 10^{-6}$	$2.61613318202070 \times 10^{-5}$	$1.41142825601070 \times 10^{-4}$	$6.79503744661081 \times 10^{-5}$
$x = 1.0$	$8.79132561437679 \times 10^{-6}$	$6.21348433427205 \times 10^{-4}$	$8.30546148522515 \times 10^{-8}$	$6.59298944749587 \times 10^{-6}$	$1.01610038439892 \times 10^{-5}$

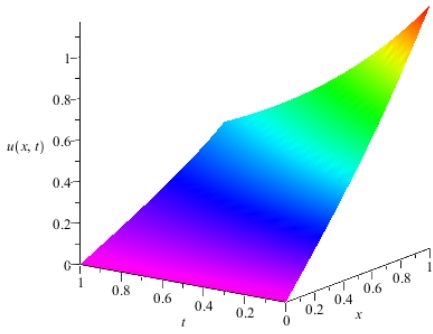
Tablo 3.2 $M = 6, k = 1$ ve $\beta = 3/2$ için Problem 3.1'in Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırması

x	$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $				
	$t = 0.1$	$t = 0.3$	$t = 0.5$	$t = 0.7$	$t = 0.9$
$x = 0.1$	$2.12821265858643 \times 10^{-4}$	$4.06135586618062 \times 10^{-5}$	$5.64862973277958 \times 10^{-5}$	$2.09311761856512 \times 10^{-5}$	$4.62423023853964 \times 10^{-5}$
$x = 0.2$	$4.12792805475654 \times 10^{-4}$	$8.37543197322044 \times 10^{-5}$	$1.06754842384552 \times 10^{-4}$	$4.36843703655460 \times 10^{-5}$	$8.58181716047873 \times 10^{-5}$
$x = 0.3$	$5.91365321504611 \times 10^{-4}$	$1.32454441058139 \times 10^{-4}$	$1.45692091268523 \times 10^{-4}$	$6.63672270674043 \times 10^{-5}$	$1.19702276107886 \times 10^{-4}$
$x = 0.4$	$7.39640081017789 \times 10^{-4}$	$1.88357030355690 \times 10^{-4}$	$1.66417846536621 \times 10^{-4}$	$9.00414936275407 \times 10^{-5}$	$1.42446792069650 \times 10^{-4}$
$x = 0.5$	$8.36094380743335 \times 10^{-4}$	$2.45179085714864 \times 10^{-4}$	$1.65216116455313 \times 10^{-4}$	$1.16536352382901 \times 10^{-4}$	$1.44902979443556 \times 10^{-4}$
$x = 0.6$	$8.55988330562441 \times 10^{-4}$	$2.90806862148996 \times 10^{-4}$	$1.41263460016416 \times 10^{-4}$	$1.45562980529312 \times 10^{-4}$	$1.19374195980848 \times 10^{-4}$
$x = 0.7$	$7.80398697004858 \times 10^{-4}$	$3.09696448143715 \times 10^{-4}$	$9.66067919525027 \times 10^{-5}$	$1.72033269978278 \times 10^{-4}$	$6.49370512480485 \times 10^{-5}$
$x = 0.8$	$6.04781346746908 \times 10^{-4}$	$2.85661342206422 \times 10^{-4}$	$3.64583877521252 \times 10^{-5}$	$1.83638117215001 \times 10^{-4}$	$7.02551935383156 \times 10^{-6}$
$x = 0.9$	$3.46954490106577 \times 10^{-4}$	$2.05132829414589 \times 10^{-4}$	$3.01226113245123 \times 10^{-5}$	$1.58742313155491 \times 10^{-4}$	$6.70313805711809 \times 10^{-5}$
$x = 1.0$	$5.43962245407315 \times 10^{-5}$	$6.09829579648613 \times 10^{-5}$	$8.90869932307359 \times 10^{-5}$	$6.46575330034427 \times 10^{-5}$	$6.13975232801600 \times 10^{-5}$

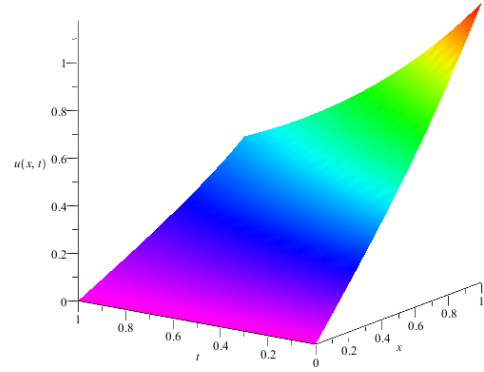
Tablo 3.3 Problem 3.1' in L_∞ hataların karşılaştırması

t	$L_\infty([27])$	$L_\infty(\beta = \frac{1}{2})$	$L_\infty(\beta = \frac{3}{2})$
0.1	8.44×10^{-3}	$8.10817375729966 \times 10^{-4}$	$8.55988330562441 \times 10^{-4}$
0.3	8.10×10^{-3}	$2.87516542158750 \times 10^{-4}$	$3.09696448143715 \times 10^{-4}$
0.5	7.43×10^{-3}	$1.63610794091440 \times 10^{-4}$	$1.66417846536621 \times 10^{-4}$
0.7	9.18×10^{-3}	$1.88586723954609 \times 10^{-4}$	$1.83638117215001 \times 10^{-4}$
0.9	1.07×10^{-3}	$1.31373636997084 \times 10^{-4}$	$1.44902979443556 \times 10^{-4}$

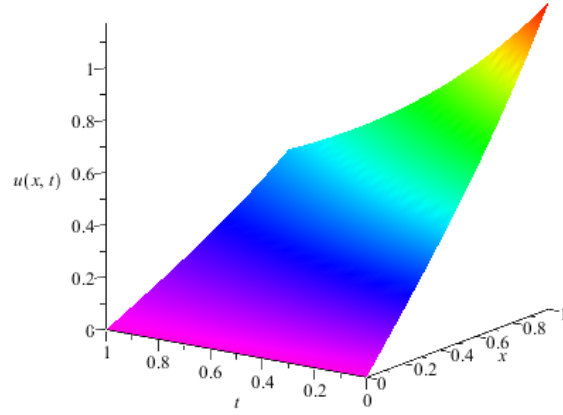
Tablo 3.3'ten, $M = 6, k = 1$ ve farklı β değerleri için Gegenbauer dalgacık Galerkin metodu ile elde edilen nümerik sonuçların, [27]'de elde edilen nümerik sonuçlardan daha iyi olduğu görülmektedir.



Şekil 3.1 $M = 6, k = 1$ ve $\beta = 1/2$ olması durumunda Problem 3.1' nin yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 3.2 $M = 6, k = 1$ ve $\beta = 3/2$ olması durumunda Problem 3.1' nin yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 3.3 Problem 3.1' in tam çözüm grafiği

Problem 3.2 $\bar{k} = 1, c = 0$ ve $g(x, t) = 0$ olmak üzere (3.8) denklemi

$$u(x, 0) = \sin(x)$$

başlangıç koşulu ve

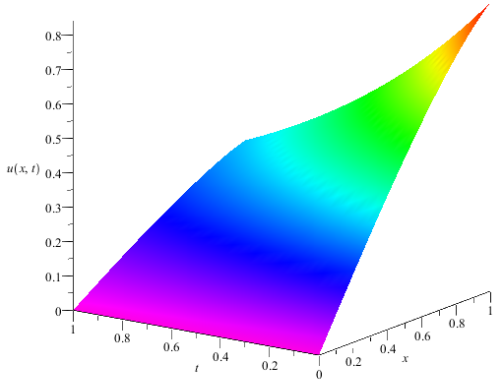
$$u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$u(1, t) = \sin(1)e^{-t}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

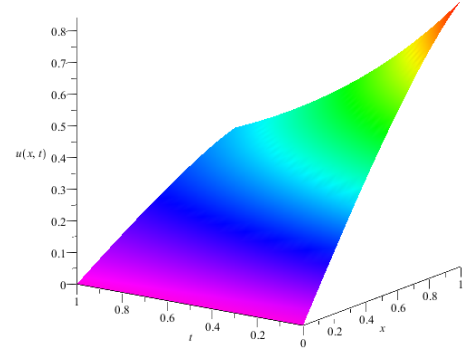
sınır koşulları ile göz önüne alınmıştır. Problemin tam çözümü,

$$u(x, t) = e^{-t} \sin(x)$$

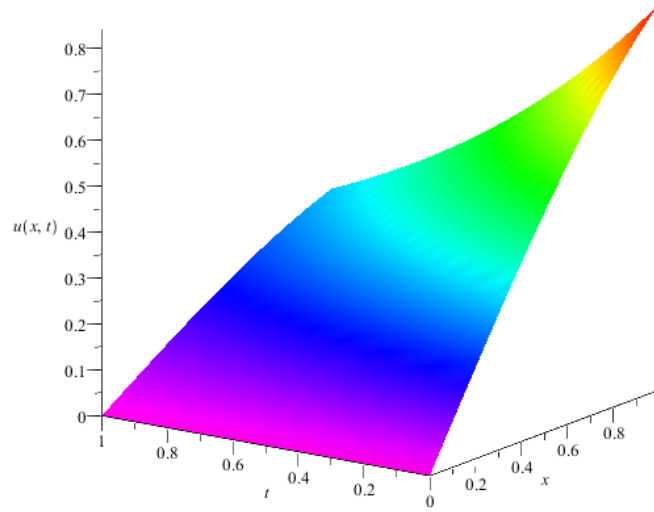
dir [29].



Şekil 3.4 $M = 7, k = 1$ ve $\beta = 1/2$ olması durumunda Problem 3.2' nin yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 3.5 $M = 7, k = 1$ ve $\beta = 3/2$ olması durumunda Problem 3.2' nin yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 3.6 Problem 3.2' nin tam çözüm grafiği

Tablo 3.4 $M = 7, k = 1$ ve $\beta = 1/2$ için Problem 3.2'nin Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırması

$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $					
x	$t = 0.1$	$t = 0.3$	$t = 0.5$	$t = 0.7$	$t = 0.9$
$x = 0.1$	$1.66265337126728 \times 10^{-4}$	$2.88583218519267 \times 10^{-5}$	$3.30255353695949 \times 10^{-5}$	$3.26341285369139 \times 10^{-5}$	$1.61430881363278 \times 10^{-5}$
$x = 0.2$	$3.23753166426299 \times 10^{-4}$	$5.96373402677874 \times 10^{-5}$	$6.17329122104271 \times 10^{-5}$	$6.56521889200318 \times 10^{-5}$	$2.67237492897338 \times 10^{-5}$
$x = 0.3$	$4.57536536064007 \times 10^{-4}$	$9.05395319868718 \times 10^{-5}$	$8.44240238122018 \times 10^{-5}$	$9.60293355039554 \times 10^{-5}$	$3.29794958834340 \times 10^{-5}$
$x = 0.4$	$5.53012286556520 \times 10^{-4}$	$1.18755582494967 \times 10^{-4}$	$9.97156614612471 \times 10^{-5}$	$1.20940987972690 \times 10^{-4}$	$3.56987940626219 \times 10^{-5}$
$x = 0.5$	$5.92577385078674 \times 10^{-4}$	$1.38179527603421 \times 10^{-4}$	$1.08221364453487 \times 10^{-4}$	$1.35682126759074 \times 10^{-4}$	$3.94968623531056 \times 10^{-5}$
$x = 0.6$	$5.50667560378026 \times 10^{-4}$	$1.36243394016133 \times 10^{-4}$	$1.15258505903215 \times 10^{-4}$	$1.29799775393957 \times 10^{-4}$	$6.06519853154908 \times 10^{-5}$
$x = 0.7$	$4.06537368696003 \times 10^{-4}$	$9.95349860122841 \times 10^{-5}$	$1.27015370849248 \times 10^{-4}$	$9.19524825497287 \times 10^{-5}$	$1.17115703549941 \times 10^{-4}$
$x = 0.8$	$1.74863947522641 \times 10^{-4}$	$2.81332220405384 \times 10^{-5}$	$1.40126261907347 \times 10^{-4}$	$2.34532895554418 \times 10^{-5}$	$2.00659087195465 \times 10^{-4}$
$x = 0.9$	$4.57487274156954 \times 10^{-5}$	$4.14028903918950 \times 10^{-5}$	$1.24600322477131 \times 10^{-4}$	$3.95477143203538 \times 10^{-5}$	$2.31120665797002 \times 10^{-4}$
$x = 1.0$	$6.29481354252892 \times 10^{-6}$	$4.44901658924746 \times 10^{-6}$	$5.93983086050187 \times 10^{-8}$	$4.72066784168446 \times 10^{-6}$	$7.27567120650807 \times 10^{-6}$

Tablo 3.5 $M = 7, k = 1$ ve $\beta = 3/2$ için Problem 3.2'nin Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırması

$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $					
x	$t = 0.1$	$t = 0.3$	$t = 0.5$	$t = 0.7$	$t = 0.9$
$x = 0.1$	$1.74369789141121 \times 10^{-4}$	$2.93994853371587 \times 10^{-5}$	$3.27834432300791 \times 10^{-5}$	$3.15461424079955 \times 10^{-5}$	$1.44381615703321 \times 10^{-5}$
$x = 0.2$	$3.22125614613200 \times 10^{-4}$	$5.23964699173374 \times 10^{-5}$	$6.76488602754655 \times 10^{-5}$	$5.46384163063601 \times 10^{-5}$	$4.22011550265111 \times 10^{-5}$
$x = 0.3$	$4.59225914128725 \times 10^{-4}$	$8.23451302751355 \times 10^{-5}$	$9.16351395976178 \times 10^{-5}$	$8.06418809385367 \times 10^{-5}$	$5.48299156355597 \times 10^{-5}$
$x = 0.4$	$5.70442702248541 \times 10^{-4}$	$1.16513393962459 \times 10^{-4}$	$1.03260885103040 \times 10^{-4}$	$1.06481317351276 \times 10^{-4}$	$5.42547634957979 \times 10^{-5}$
$x = 0.5$	$6.27135979631765 \times 10^{-4}$	$1.43936879582029 \times 10^{-4}$	$1.06491603984626 \times 10^{-4}$	$1.22819722597756 \times 10^{-4}$	$5.56365644930334 \times 10^{-5}$
$x = 0.6$	$5.99140323240266 \times 10^{-4}$	$1.50383051813363 \times 10^{-4}$	$1.07289684780854 \times 10^{-4}$	$1.18392783220178 \times 10^{-4}$	$7.79254857935785 \times 10^{-5}$
$x = 0.7$	$4.71256462087788 \times 10^{-4}$	$1.25704130245596 \times 10^{-4}$	$1.08450070741228 \times 10^{-4}$	$8.67819206730180 \times 10^{-5}$	$1.29637575534414 \times 10^{-4}$
$x = 0.8$	$2.64430088533274 \times 10^{-4}$	$7.35131620123175 \times 10^{-5}$	$1.02669668495370 \times 10^{-4}$	$3.55823986869508 \times 10^{-5}$	$1.89811376709592 \times 10^{-4}$
$x = 0.9$	$6.16947051185202 \times 10^{-5}$	$2.31193582305167 \times 10^{-5}$	$6.37961920269547 \times 10^{-5}$	$2.07739742619228 \times 10^{-6}$	$1.84110155251827 \times 10^{-4}$
$x = 1.0$	$3.89488069522104 \times 10^{-5}$	$4.36652942454874 \times 10^{-5}$	$6.37882580450944 \times 10^{-5}$	$4.62963904728220 \times 10^{-5}$	$4.39619576866890 \times 10^{-5}$

4

KdV- BURGERS- KURAMOTO DENKLEMİNİN GEGENBAUER DALGACIK GALERKİN YÖNTEMİYLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Türbülansın hareketindeki bazı fiziksel süreçleri ve diğer kararsız sistemlerin süreçlerini tanımlamak için birçok farklı fiziksel durumda ortaya çıkan önemli bir matematiksel model olan doğrusal olmayan KdV-Burgers-Kuramoto denklemi,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + \alpha_3 \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} = f(x, t) \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır [30]. Bu denklemde, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$ olmak üzere sırasıyla kararsızlık, yayılım ve enerji kaybını ifade eden reel değerli parametrelerdir [31]. Ayrıca, KdV-Burgers-Kuramoto denklemi eğimli bir düzlem boyunca akan viskoz bir sıvı üzerindeki uzun dalgaları [32], bir plazmadaki kararsız sürüklenme dalgalarını [33] ve barotropik atmosferdeki türbülanslı kaskad modeli [34] tanımlamak için de kullanılabilir.

KdV-Burgers-Kuramoto denkleminin sınırlı sayıda analitik başlangıç ve sınır değerleri için tam çözümleri bilinmektedir. Bu yüzden, bu denklem için nümerik çözümler büyük öneme sahiptir. Hesaplama teknikleri geliştikçe, sayısal sonuçları tam çözümlerle karşılaştırmak için birçok araştırmacı KdV-Burgers-Kuramoto denklemini çözmek için farklı sayısal ve yarı analitik yöntemlere başvurmuşlardır. Fu ve arkadaşları [35]'te trigonometrik fonksiyon seri yöntemini, Xie ve arkadaşları [36]'da kombinasyon metodunu kullanarak KdV-Burgers-Kuramoto denkleminin tam çözümlerini, Sayed ve arkadaşları [37]'de sech-tanh metodunu ve Wu eliminasyon metodunu kullanarak denklemin travelling dalga çözümlerini bulmuşlardır. Lakestani ve Dehghan tarafından [38]'te B- spline fonksiyonları kullanılarak sonlu farklar ve sıralama yöntemleriyle denklemin nümerik çözümleri elde edilmiştir. Çelik [8]'de Gegenbauer dalgacık sıralama metodunu kullanarak denklemin nümerik çözümlerini, Lai ve Changfeng [39]'da Lattice Boltzmann metodu ile denklemin nümerik çözümlerini elde etmişlerdir.

4.1 KdV- Burgers- Kuramoto Denkleminin Gegenbauer Dalgacık Galerkin Yönteminin Uygulanması

Bu bölümde, (4.1) ile verilen KdV- Burgers- Kuramoto denklemi

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.2)$$

başlangıç koşulu ve

$$\begin{aligned} u(0, t) &= h_1(t), \quad u(1, t) = h_2(t) \\ u_x(0, t) &= h_3(t), \quad u_{xx}(0, t) = h_4(t) \quad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

sınır koşulları ile birlikte göz önüne alınmıştır.

(4.2)-(4.3) başlangıç ve sınır koşulları altında (4.1) KBK denklemini çözmek için, (4.1) denkleminin t zaman değişkenine göre 0' dan t 'ye integrali alınırsa ve (4.2) başlangıç koşulu da göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} u(x, t) = - \int_0^t u(x, \eta) \frac{\partial u(x, \eta)}{\partial x} d\eta + \alpha_1 \int_0^t \frac{\partial^2 u(x, \eta)}{\partial x^2} d\eta - \alpha_2 \int_0^t \frac{\partial^3 u(x, \eta)}{\partial x^3} d\eta \\ - \alpha_3 \int_0^t \frac{\partial^4 u(x, \eta)}{\partial x^4} d\eta + \int_0^t f(x, \eta) d\eta \end{aligned} \quad (4.4)$$

ifadesi elde edilir.

Gegenbauer dalgacık serisiyle bu denklemi çözmek için denklemde görülen en yüksek mertebeden türev terimi,

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} \simeq \sum_{i=1}^{\hat{m}} \sum_{j=1}^{\hat{m}} u_{ij} \psi_i(x) \psi_j(t) = \Psi^T(x) U \Psi(t) \quad (4.5)$$

biçiminde Gegenbauer dalgacık serisine açılır. Burada $U = [u_{ij}]_{\hat{m} \times \hat{m}}$ bilinmeyen katsayı matrisidir. (4.5) denkleminin x konum değişkenine göre 0'dan x 'e göre dört kez integrali alınırsa ve (4.3) ifadesindeki sınır koşulları da göz önüne alınırsa sırasıyla,

$$\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=0} + \Psi^T(x) P^T U \Psi(t) \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} + x \left(\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=0} \right) + \Psi^T(x) (P^2)^T U \Psi(t) \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} + x \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} \right) + \frac{x^2}{2} \left(\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=0} \right) + \Psi^T(x) (P^3)^T U \Psi(t) \quad (4.8)$$

$$u(x, t) = u(0, t) + x \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) + \frac{x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} \right) + \frac{x^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=0} \right) + \Psi^T (P^4)^T (x) U \Psi(t) \quad (4.9)$$

denklemleri elde edilir. (4.9) denkleminde $x = 1$ alınrsa,

$$\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=0} = 6h_2(t) - 6h_1(t) - 6h_3(t) - 3h_4(t) - 6\Psi^T(1)(P^4)^T U \Psi(t) \quad (4.10)$$

ifadesi elde edilir.

$h_1(t), h_2(t), h_3(t)$ ve $h_4(t)$ sırasıyla,

$$\begin{aligned} h_1(t) &\simeq H_1^T \Psi(t), \\ h_2(t) &\simeq H_2^T \Psi(t), \\ h_3(t) &\simeq H_3^T \Psi(t), \\ h_4(t) &\simeq H_4^T \Psi(t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

biçiminde Gegenbauer dalgacık serisine açılır. Burada H_1, H_2, H_3 ve H_4 Gegenbauer dalgacık katsayı vektörleridir. (4.11) denklemindeki ifadeler (4.10) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=0} \simeq (6H_2^T(t) - 6H_1^T(t) - 6H_3^T(t) - 3H_4^T(t) - 6\Psi^T(1)(P^4)^T U) \Psi(t) \simeq \tilde{U}^T \Psi(t) \quad (4.12)$$

ifadesi elde edilir. (4.12) ifadesi (4.6)-(4.9) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} = \Psi^T(x) A_1 \Psi(t), \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \Psi^T(x) A_2 \Psi(t), \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \Psi^T(x) A_3 \Psi(t), \quad (4.15)$$

$$u(x, t) = \Psi^T(x) A_4 \Psi(t) \quad (4.16)$$

eşitlikleri bulunur. Burada,

$$A_1 = E \tilde{U}^T + P^T U, \quad (4.17)$$

$$A_2 = E H_4^T + X \tilde{U}^T + (P^2)^T U, \quad (4.18)$$

$$A_3 = EH_3^T + XH_4^T + H_5^T \tilde{U}^T + (P^3)^T U, \quad (4.19)$$

$$A_4 = EH_1^T + XH_3^T + H_5H_4^T + H_6^T \tilde{U}^T + (P^4)^T U \quad (4.20)$$

dir. Burada X, H_5, H_6 ve $E, x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{6}$ fonksiyonlarının Gegenbauer dalgacık serisine açılarak elde edilen katsayı vektörleridir.

$$\int_0^t f(x, \eta) d\eta = \Psi^T(x) F \Psi(t) \quad (4.21)$$

şeklinde Gegenbauer dalgacık serisine açılır.

(4.5), (4.13)- (4.16) ve (4.21) denklemleri (4.4) denkleminde yerine yazılırsa KBK denklemi için

$$R(x, t) = \Psi^T(x) [A_4 + \kappa P - \alpha_1 A_2 P + \alpha_2 A_1 P + \alpha_3 U P - F] \Psi(t) \quad (4.22)$$

kalan terim fonksiyonu elde edilir. Burada

$$[\Psi^T(x) A_3 \Psi(t)] [\Psi^T(x) A_4 \Psi(t)] = \Psi^T(x) \kappa \Psi(t)$$

dır.

$R(x, t)$ kalan terim fonksiyonuna Galerkin metodunu uyguladığımızda,

$$\int_0^1 \int_0^1 R(x, t) \psi_i(x) \psi_j(t) \omega_n(x) \omega_n(t) dx dt = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, \hat{m} \quad (4.23)$$

doğrusal olmayan cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözülmesiyle, $u_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \dots, \hat{m}$ Gegenbauer dalgacık katsayıları elde edilir. Bu dalgacık katsayıları, (4.16) denkleminde yerine yazılarak problemin yaklaşık çözümü elde edilir.

4.2 KdV- Burgers- Kuramoto Denklemi için Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemiyle elde edilen sonuçlar, tam çözüm ve literatürde mevcut olan başka yöntemler ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Nümerik çözümün tam çözüme ne kadar iyi yaklaştığını görmek için

$$L_\infty = \max_i |u_i^{tam} - u_i^{numerik}|$$

L_∞ hata normu kullanılmıştır. Burada, u_i^{tam} tam çözümü ve $u_i^{numerik}$ nümerik çözümü göstermektedir.

Problem 4.1 Birinci problem olarak $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ ve $f(x, t) = t \cos(t) + t^2 \cos(x) - \frac{t^4 \cos(x) \sin(x)}{4} + \frac{t^2 \sin(x)}{2}$ olmak üzere

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + \alpha_3 \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} = f(x, t) \quad (4.24)$$

KBK denklemi

$$u(x, t) = 0 \quad (4.25)$$

başlangıç koşulu ve

$$u(0, t) = \frac{t^2}{2}, \quad u(1, t) = \frac{t^2 \cos(1)}{2}, \quad u_x(0, t) = 0, \quad u_{xx}(0, t) = -\frac{t^2}{2} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.26)$$

sınır koşullarıyla göz önüne alınmıştır.

Problemin tam çözümü,

$$u(x, t) = \frac{t^2 \cos(x)}{2}$$

biçimindedir [40]. $\beta = 1/2, k = 1$ and $M = 3$ olmak üzere KBK problemini Gegenbauer Galerkin metodu ile çözelim. $\beta = 3/2, k = 1$ ve $M = 3$ için,

$$\psi_{1,0}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\psi_{1,1}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{15}\sqrt{2}}{2}(2x - 1), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\psi_{1,2}(x) = \begin{cases} \sqrt{21}(5x^2 - 5x + 1), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\Psi(x) = [\psi_{1,0}(x), \psi_{1,1}(x), \psi_{1,2}(x)] \quad (4.27)$$

şeklindedir. Benzer şekilde

$$\Psi(t) = [\psi_{1,0}(t), \psi_{1,1}(t), \psi_{1,2}(t)] \quad (4.28)$$

şeklindedir. $\beta = 3/2, k = 1$ ve $M = 3$ için (3.23) ile tanımlanan Φ matrisi,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1.224744872 & 1.224744872 & 1.224744872 \\ -1.825741857 & 0 & -1.825741857 \\ 1.400231462 & -1.145643923 & 1.400231462 \end{bmatrix}$$

olmak üzere (3.40) ifadesinde yerine yazılırsa P, P^2, P^3, P^4 matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$P = \begin{bmatrix} 0.5000000000000000 & 0.223606798004107 & 0 \\ -0.385100595634677 & 0.499999902592307e - 10 & 0.119522860884085 \\ 0.225192342594069 & 0.0232405563432054 & .499999971981246e - 10 \end{bmatrix},$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.154629629612045 & 0.111803399002053 & 0.0267261242132531 \\ -0.165634664778615 & -0.0925925925800000 & 0 \\ 0.103646219205490 & 0.0503545386675390 & -0.00648148147204455 \end{bmatrix},$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0.0356481481452723 & 0.0331269330413722 & 0.0133630621090319 \\ -0.0435941235786603 & -0.0370370370380000 & -0.0121736247230618 \\ 0.0288868524896300 & 0.0228101756360202 & 0.00601851852372772 \end{bmatrix},$$

$$P^4 = \begin{bmatrix} 0.00666152263321730 & 0.00724651660317751 & 0.00371196169703349 \\ -0.00874182953037906 & -0.00915637860160000 & -0.00442677262637234 \\ 0.00605485109082146 & 0.00613292458121095 & 0.00280349794358270 \end{bmatrix}.$$

$\beta = 3/2, k = 1, M = 3$, verilen başlangıç ve sınır koşulları için $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, E, X, F$ ve Q matrisleri,

$$H_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{20} & \frac{\sqrt{30}}{60} & \frac{\sqrt{21}}{210} \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{20} \cos(1) & \frac{\sqrt{30}}{60} \cos(1) & \frac{\sqrt{21}}{210} \cos(1) \end{bmatrix},$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_4 = \left[-\frac{\sqrt{6}}{20} \quad -\frac{\sqrt{30}}{60} \quad -\frac{\sqrt{21}}{210} \right],$$

$$H_5 = \left[\frac{\sqrt{6}}{20} \quad \frac{\sqrt{30}}{60} \quad \frac{\sqrt{21}}{210} \right],$$

$$H_6 = \left[\frac{\sqrt{6}}{90} \quad \frac{\sqrt{30}}{210} \quad \frac{\sqrt{21}}{420} \right],$$

$$E = \left[\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{3} \quad 0 \quad 0 \right]^T,$$

$$X = \left[\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{6} \quad \frac{\sqrt{15}\sqrt{2}}{30} \quad 0 \right]^T,$$

$$F_1 \left[0.004981250176 \quad -0.00001082520000 \quad 0.1000000000 \times 10^{-7} \right]^T,$$

ve

$$F = \begin{bmatrix} 0.1326533304 & 0.1085123355 & 0.0335340340 \\ -0.01132833 & -0.00872763331 & -0.002369068 \\ -0.0034699 & -0.0027895 & -0.00081050727 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Elde edilen bu matrisler (4.17)- (4.20) ifadelerinde yerine yazıldığında elde edilen A_1 , A_2 , A_3 ve A_4 matrisleri, (4.22) ifadesinde yerine yazılıp elde edilen $R_1(x, t)$ kalan terim fonksiyonunun, (4.23) ifadesinde yerine yazılmasıyla doğrusal olmayan denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülmesiyle elde edilen U katsayılar matrisi

$$U = \begin{bmatrix} 0.08861384446 & 0.07131214879 & 0.01539184310 \\ -0.01579705559 & -0.01379217189 & -0.004307862888 \\ -0.001352386001 & -0.0003781431227 & 0.0005382387923 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Tablo 4.1 $\beta = 1/2, M = 3$ ve $k = 1$ için Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırması

$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $		
x	$t = 0.1$	$t = 0.3$
0.1	$8.44023426375259 \times 10^{-5}$	$7.98318705742124 \times 10^{-5}$
0.2	$1.01453889005130 \times 10^{-5}$	$1.51016496490672 \times 10^{-5}$
0.3	$4.82189427856213 \times 10^{-5}$	$4.75138226363261 \times 10^{-5}$
0.4	$8.94551794209612 \times 10^{-5}$	$2.85239083874927 \times 10^{-5}$
0.5	$1.11850972005547 \times 10^{-4}$	$2.64569730974301 \times 10^{-5}$
0.6	$1.13234212539333 \times 10^{-4}$	$9.78798118184132 \times 10^{-5}$
0.7	$9.09947270223226 \times 10^{-5}$	$1.62253077775489 \times 10^{-5}$
0.8	$4.21103654545561 \times 10^{-5}$	$1.92377410968662 \times 10^{-4}$
0.9	$3.68228101639981 \times 10^{-5}$	$1.57617371397915 \times 10^{-4}$
1.0	$1.49556505833364 \times 10^{-5}$	$2.42076090632183 \times 10^{-5}$
$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $		
x	$t = 0.5$	$t = 0.7$
0.1	$2.35791132905200 \times 10^{-4}$	$3.83475250355397 \times 10^{-4}$
0.2	$3.99512711054678 \times 10^{-5}$	$8.46943642697218 \times 10^{-5}$
0.3	$1.38721985462470 \times 10^{-4}$	$2.25405329692785 \times 10^{-4}$
0.4	$9.14076101657668 \times 10^{-5}$	$9.91961459138602 \times 10^{-5}$
0.5	$5.91828547846091 \times 10^{-5}$	$2.10028587067118 \times 10^{-4}$
0.6	$2.58746809388685 \times 10^{-4}$	$5.95835069250122 \times 10^{-4}$
0.7	$4.42029853646470 \times 10^{-4}$	$9.30325000635251 \times 10^{-4}$
0.8	$5.33478337557944 \times 10^{-4}$	$1.06541308122240 \times 10^{-3}$
0.9	$4.47993761123103 \times 10^{-4}$	$8.34306411011593 \times 10^{-4}$
1.0	$9.17834743419388 \times 10^{-5}$	$5.31710900027738 \times 10^{-5}$
$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $		
x	$t = 0.9$	$t = 1.0$
0.1	$5.22884362924914 \times 10^{-4}$	$5.89485917379340 \times 10^{-4}$
0.2	$1.49330729141750 \times 10^{-4}$	$1.89108963468243 \times 10^{-4}$
0.3	$3.07564145327399 \times 10^{-4}$	$3.46946817421312 \times 10^{-4}$
0.4	$5.18891856318149 \times 10^{-5}$	$7.57494447939377 \times 10^{-6}$
0.5	$4.78994049944947 \times 10^{-4}$	$6.57771755357084 \times 10^{-4}$
0.6	$1.10914466140272 \times 10^{-3}$	$1.43188248208831 \times 10^{-3}$
0.7	$1.62713864874187 \times 10^{-3}$	$2.05373983571433 \times 10^{-3}$
0.8	$1.78818181196200 \times 10^{-3}$	$2.22112881623499 \times 10^{-3}$
0.9	$1.31655515106338 \times 10^{-3}$	$1.59365562365044 \times 10^{-3}$
1.0	$9.16294339541879 \times 10^{-5}$	$2.03850342039347 \times 10^{-4}$

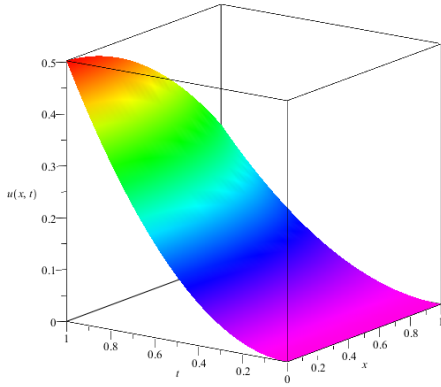
Tablo 4.2 $\beta = 3/2, M = 3$ ve $k = 1$ için Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırması

$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $		
x	$t = 0.1$	$t = 0.3$
0.1	$1.16323454320191 \times 10^{-6}$	$5.87312912886107 \times 10^{-5}$
0.2	$4.37862738458718 \times 10^{-6}$	$1.17538622877236 \times 10^{-5}$
0.3	$1.18903522953583 \times 10^{-5}$	$2.68520048517379 \times 10^{-5}$
0.4	$2.01364671892027 \times 10^{-5}$	$2.31760359661881 \times 10^{-6}$
0.5	$2.74046230660501 \times 10^{-5}$	$6.03438430572881 \times 10^{-5}$
0.6	$3.15227119258325 \times 10^{-5}$	$1.27677703530248 \times 10^{-4}$
0.7	$2.98805597686801 \times 10^{-5}$	$1.80827655015550 \times 10^{-4}$
0.8	$1.94560165945315 \times 10^{-5}$	$1.92594337513209 \times 10^{-4}$
0.9	$3.15485559659271 \times 10^{-6}$	$1.32342311023180 \times 10^{-4}$
1.0	$4.17037628047444 \times 10^{-5}$	$3.36937744545157 \times 10^{-5}$
$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $		
x	$t = 0.5$	$t = 0.7$
0.1	$1.76905460395921 \times 10^{-4}$	$3.53359078778731 \times 10^{-4}$
0.2	$4.30337140525372 \times 10^{-5}$	$8.94610389098049 \times 10^{-5}$
0.3	$1.01306983091479 \times 10^{-4}$	$2.11474366423881 \times 10^{-4}$
0.4	$2.88009467209749 \times 10^{-5}$	$7.32194037635914 \times 10^{-5}$
0.5	$1.31675395058969 \times 10^{-4}$	$2.41399249071100 \times 10^{-4}$
0.6	$3.25819442248382 \times 10^{-4}$	$6.25947792080250 \times 10^{-4}$
0.7	$4.88376794847256 \times 10^{-4}$	$9.52527925263763 \times 10^{-4}$
0.8	$5.43793802855616 \times 10^{-4}$	$1.07305434862176 \times 10^{-3}$
0.9	$4.06971966273401 \times 10^{-4}$	$8.20734162154058 \times 10^{-4}$
1.0	$1.58813648993145 \times 10^{-5}$	$1.17334658608637 \times 10^{-4}$
$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $		
x	$t = 0.9$	$t = 1.0$
0.1	$5.88092286436970 \times 10^{-4}$	$7.27313861244472 \times 10^{-4}$
0.2	$1.51035636859587 \times 10^{-4}$	$1.87503238244180 \times 10^{-4}$
0.3	$3.57354444848912 \times 10^{-4}$	$4.43686707221280 \times 10^{-4}$
0.4	$1.30937437531231 \times 10^{-4}$	$1.64783845686911 \times 10^{-4}$
0.5	$3.89515285093733 \times 10^{-4}$	$4.77970446358944 \times 10^{-4}$
0.6	$1.02806282302581 \times 10^{-3}$	$1.26736536891631 \times 10^{-3}$
0.7	$1.57328117626515 \times 10^{-3}$	$1.94238352198511 \times 10^{-3}$
0.8	$1.78037614481158 \times 10^{-3}$	$2.20080990556537 \times 10^{-3}$
0.9	$1.37362872866520 \times 10^{-3}$	$1.70225071965713 \times 10^{-3}$
1.0	$4.91508278260000 \times 10^{-5}$	$7.15353642604666 \times 10^{-5}$

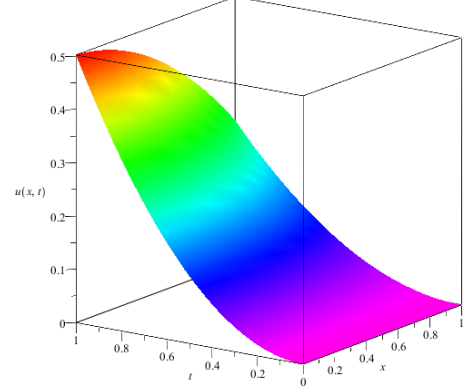
Tablo 4.3 Problem 4.1' in L_∞ hataların karşılaştırması

x	$L_\infty([40])$	$L_\infty(\beta = \frac{1}{2})$	$L_\infty(\beta = \frac{3}{2})$
0.1	2.50855×10^{-3}	$5.89485917379340 \times 10^{-4}$	$7.27313861244472 \times 10^{-4}$
0.2	2.64995×10^{-3}	$1.89108963468243 \times 10^{-4}$	$1.87503238244180 \times 10^{-4}$
0.3	2.83828×10^{-3}	$3.46946817421312 \times 10^{-4}$	$4.43686707221280 \times 10^{-4}$
0.4	3.09695×10^{-3}	$1.02188765043587 \times 10^{-4}$	$1.64783845686911 \times 10^{-4}$
0.5	3.44474×10^{-3}	$6.57771755357084 \times 10^{-4}$	$4.77970446358944 \times 10^{-4}$
0.6	3.89591×10^{-3}	$1.43188248208831 \times 10^{-3}$	$1.26736536891631 \times 10^{-3}$
0.7	4.46022×10^{-3}	$2.05373983571433 \times 10^{-3}$	$1.94238352198511 \times 10^{-3}$
0.8	5.14289×10^{-3}	$2.22112881623499 \times 10^{-3}$	$2.20080990556537 \times 10^{-3}$
0.9	5.94439×10^{-3}	$1.59365562365044 \times 10^{-3}$	$1.70225071965713 \times 10^{-3}$
1.0	6.86019×10^{-3}	$2.03850342039347 \times 10^{-4}$	$7.15353642604666 \times 10^{-5}$

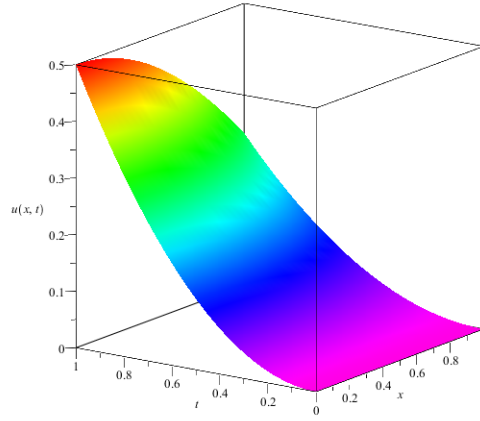
Tablo 4.3'ten $k = 1, M = 3$ ve farklı β değerleri için Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçların [40] çalışmasında Legendre dalgacık yöntemi ile elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu görülmektedir.



Şekil 4.1 $M = 3, k = 1$ ve $\beta = 3/2$ olması durumunda Problem 4.1' in yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 4.2 $M = 3, k = 1$ ve $\beta = 1/2$ olması durumunda Problem 4.1' in yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 4.3 Problem 4.1' in tam çözüm grafiği

Problem 4.2 İkinci problem olarak $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ ve $f(x, t) = t \sin(t) + t^2 \sin(x) - \frac{t^4 \cos(x) \sin(x)}{4} - \frac{t^2 \cos(x)}{2}$ olmak üzere

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + \alpha_3 \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} = f(x, t) \quad (4.29)$$

KBK denklemi

$$u(x, t) = 0 \quad (4.30)$$

başlangıç koşulu ve

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = \frac{t^2 \sin(1)}{2}, \quad u_x(0, t) = \frac{t^2}{2}, \quad u_{xx}(0, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.31)$$

sınır koşullarıyla göz önüne alınmıştır.

Problemin tam çözümü,

$$u(x, t) = \frac{t^2 \sin(x)}{2}$$

biçimindedir [40].

Tablo 4.4 $\beta = 1/2, M = 3$ ve $k = 1$ için Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen Problem 4.2 nin mutlak hatalarının karşılaştırması

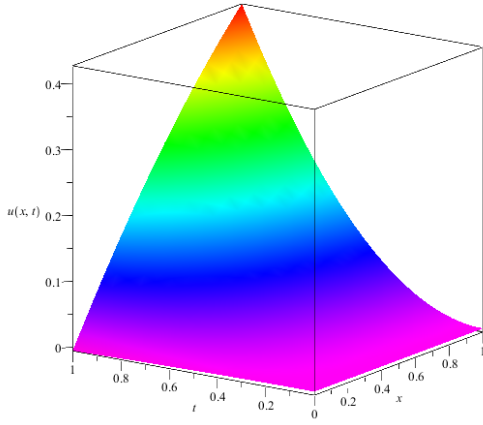
$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $		
x	$t = 0.1$	$t = 0.3$
0.1	$1.64448492039189 \times 10^{-5}$	$2.25988426999788 \times 10^{-5}$
0.2	$1.87731045064128 \times 10^{-5}$	$1.30555104564375 \times 10^{-4}$
0.3	$1.15879083329642 \times 10^{-5}$	$1.60605435236950 \times 10^{-4}$
0.4	$2.72228116434108 \times 10^{-7}$	$1.11098743317741 \times 10^{-4}$
0.5	$1.21163098417837 \times 10^{-5}$	$2.42539738067593 \times 10^{-5}$
0.6	$1.94477268430655 \times 10^{-5}$	$5.94593532960083 \times 10^{-5}$
0.7	$1.80091811202948 \times 10^{-5}$	$1.01725577990534 \times 10^{-4}$
0.8	$3.82522667346499 \times 10^{-6}$	$6.67656902768529 \times 10^{-5}$
0.9	$2.67580094974375 \times 10^{-5}$	$7.83051898450571 \times 10^{-5}$
1.0	$7.70363213923580 \times 10^{-5}$	$3.63149182375185 \times 10^{-4}$
$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $		
x	$t = 0.5$	$t = 0.7$
0.1	$5.89961635651670 \times 10^{-5}$	$9.27471171916459 \times 10^{-5}$
0.2	$3.61763131543378 \times 10^{-4}$	$7.12397194443416 \times 10^{-4}$
0.3	$4.41724140853646 \times 10^{-4}$	$8.54944029183041 \times 10^{-4}$
0.4	$3.01849624365656 \times 10^{-4}$	$5.71980447027304 \times 10^{-4}$
0.5	$5.94144820793979 \times 10^{-5}$	$9.33650879761383 \times 10^{-5}$
0.6	$1.73166116005138 \times 10^{-4}$	$3.60567947970458 \times 10^{-4}$
0.7	$2.89459579887921 \times 10^{-4}$	$5.81211210812393 \times 10^{-4}$
0.8	$1.90079859568967 \times 10^{-4}$	$3.73767700549782 \times 10^{-4}$
0.9	$2.16319894951716 \times 10^{-4}$	$4.40802182817390 \times 10^{-4}$
1.0	$1.01213453367412 \times 10^{-3}$	$2.02399233928921 \times 10^{-3}$
$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $		
x	$t = 0.9$	$t = 1.0$
0.1	$1.23851694579409 \times 10^{-4}$	$1.38411594683779 \times 10^{-4}$
0.2	$1.18245729826449 \times 10^{-3}$	$1.46227207802041 \times 10^{-3}$
0.3	$1.40026513022516 \times 10^{-3}$	$1.72246355051348 \times 10^{-3}$
0.4	$9.21491191302665 \times 10^{-4}$	$1.12601394279546 \times 10^{-3}$
0.5	$1.26105931496923 \times 10^{-4}$	$1.42022754866383 \times 10^{-4}$
0.6	$6.21664949191969 \times 10^{-4}$	$7.79849013273770 \times 10^{-4}$
0.7	$9.76980350764045 \times 10^{-4}$	$1.21387156162517 \times 10^{-3}$
0.8	$6.17829373219358 \times 10^{-4}$	$7.62500290187429 \times 10^{-4}$
0.9	$7.51751883442064 \times 10^{-4}$	$9.39652101039024 \times 10^{-4}$
1.0	$3.39872271922037 \times 10^{-3}$	$4.22216501205447 \times 10^{-3}$

Tablo 4.5 $\beta = 3/2, M = 3$ ve $k = 1$ için Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen Problem 4.2 nin mutlak hatalarının karşılaştırması

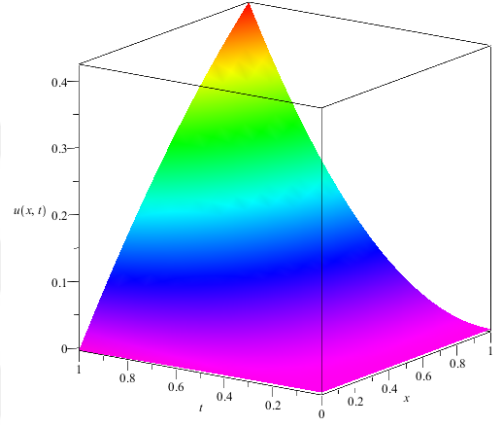
$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $		
x	$t = 0.1$	$t = 0.3$
0.1	$1.28974727966296 \times 10^{-5}$	$1.45775835758149 \times 10^{-4}$
0.2	$1.54800573070029 \times 10^{-6}$	$3.60282480863332 \times 10^{-5}$
0.3	$4.24271959892299 \times 10^{-6}$	$9.57015464695572 \times 10^{-5}$
0.4	$2.51800080738364 \times 10^{-8}$	$7.67906533915459 \times 10^{-5}$
0.5	$6.41361804184018 \times 10^{-6}$	$2.15145138523082 \times 10^{-5}$
0.6	$1.05770645508711 \times 10^{-5}$	$2.96573521481984 \times 10^{-5}$
0.7	$8.20786151897344 \times 10^{-6}$	$3.84092846099499 \times 10^{-5}$
0.8	$4.66943705380385 \times 10^{-6}$	$3.10377264670508 \times 10^{-5}$
0.9	$3.17087041675577 \times 10^{-5}$	$2.11568561082842 \times 10^{-4}$
1.0	$7.62057338221985 \times 10^{-5}$	$5.32845339237378 \times 10^{-4}$
$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $		
x	$t = 0.5$	$t = 0.7$
0.1	$4.03570606124785 \times 10^{-4}$	$7.86281787696533 \times 10^{-4}$
0.2	$9.93416519246351 \times 10^{-5}$	$1.91488226245602 \times 10^{-4}$
0.3	$2.63326777122097 \times 10^{-4}$	$5.07118415556534 \times 10^{-4}$
0.4	$2.09347529467621 \times 10^{-4}$	$3.97695840236287 \times 10^{-4}$
0.5	$5.46788089611991 \times 10^{-5}$	$9.30791402848352 \times 10^{-5}$
0.6	$8.82642143971712 \times 10^{-5}$	$1.86397584297809 \times 10^{-4}$
0.7	$1.13048950607528 \times 10^{-4}$	$2.32126883511680 \times 10^{-4}$
0.8	$7.97106503302308 \times 10^{-5}$	$1.50688242643332 \times 10^{-4}$
0.9	$5.81361438416028 \times 10^{-4}$	$1.14108739416710 \times 10^{-3}$
1.0	$1.47429826364986 \times 10^{-3}$	$2.90056447105969 \times 10^{-3}$
$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $		
x	$t = 0.9$	$t = 1.0$
0.1	$1.29390937147340 \times 10^{-3}$	$1.59456681668875 \times 10^{-3}$
0.2	$3.12467976049252 \times 10^{-4}$	$3.83770254257065 \times 10^{-4}$
0.3	$8.27076491772896 \times 10^{-4}$	$1.01561785904927 \times 10^{-3}$
0.4	$6.41835565697552 \times 10^{-4}$	$7.84827117687903 \times 10^{-4}$
0.5	$1.36715647823221 \times 10^{-4}$	$1.60497530172943 \times 10^{-4}$
0.6	$3.24057561850083 \times 10^{-4}$	$4.07709903495590 \times 10^{-4}$
0.7	$3.95642963322396 \times 10^{-4}$	$4.94065383317810 \times 10^{-4}$
0.8	$2.43970343406341 \times 10^{-4}$	$2.98975690706527 \times 10^{-4}$
0.9	$1.89074625833607 \times 10^{-3}$	$2.33680061857722 \times 10^{-3}$
1.0	$4.81164408146678 \times 10^{-3}$	$5.94898880029426 \times 10^{-4}$

Tablo 4.6 Problem 4.2' in L_∞ hataların karşılaştırması

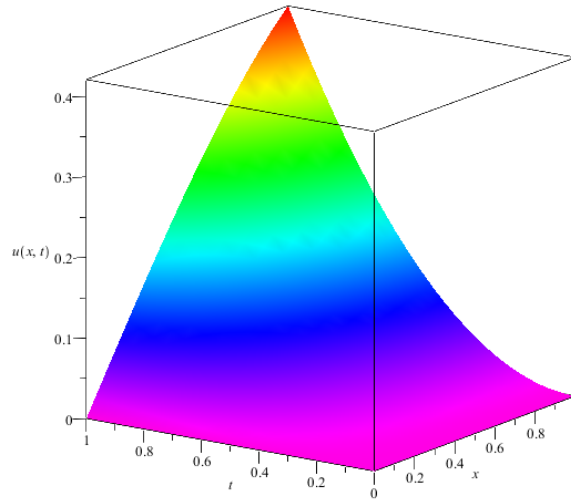
x	$L_\infty([21])$	$L_\infty(\beta = \frac{1}{2})$	$L_\infty(\beta = \frac{3}{2})$
0.2	2.80724×10^{-4}	$1.74733689594274 \times 10^{-4}$	$2.43923870655135 \times 10^{-4}$
0.3	1.03017×10^{-3}	$3.63149182375185 \times 10^{-4}$	$5.32845339237378 \times 10^{-4}$
0.4	2.54254×10^{-3}	$6.42282783735154 \times 10^{-4}$	$9.42970123568948 \times 10^{-4}$
0.5	5.29182×10^{-3}	$1.01213453367412 \times 10^{-3}$	$1.47429826364986 \times 10^{-3}$
0.6	9.52067×10^{-3}	$1.47270445219214 \times 10^{-3}$	$2.12682977948012 \times 10^{-3}$



Şekil 4.4 $M = 3, k = 1$ ve $\beta = 3/2$ olması durumunda Problem 4.2' nin yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 4.5 $M = 3, k = 1$ ve $\beta = 1/2$ olması durumunda Problem 4.2' nin yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 4.6 Problem 4.2' nin tam çözüm grafiği

DOĞRUSAL VE DOĞRUSAL OLMAYAN KLEIN-GORDON DENKLEMLERİNİN GEGENBAUER DALGACIK GALERKİN YÖNTEMİYLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, uygulamalı matematiğin ve fiziğin çeşitli alanlarında ilgili problemlerin modellenmesinde büyük öneme sahip olan Klein-Gordon denklemlerini inceleyeceğiz. Klein-Gordon denklemi relativistik dalga denklemi olarak da bilinmektedir. Bu denklemler sadece matematikte değil, aynı zamanda fizikte de büyük öneme sahiptir. Gerçekten, birçok doğrusal olmayan olayı modellemek için doğrusal olmayan Klein-Gordon denklemi kullanılır ve hareket denklemini temsil eder. Böyle bir problem radyasyon teorisi ve genel matematiksel fiziğin bazı doğrusal olmayan dinamik problemlerinin çalışmasında doğal olarak görelilik, kıvrımlar, girdaplar ve diğer tutarlı yapıların saçılması olarak ortaya çıkar [41]. İlk olarak relativistik elektronları tanımlayan bu denklem 1926 yılında iki fizikçi Oskar Klein ve Walter Gordon tarafından ortaya atılmıştır. Klein-Gordon denklemi, Dirac denkleminin eğirme elektronunu açıkladığı kompozit bir parçacık olan spinsiz piyonu doğru bir şekilde tanımlar. Klein, Fock, Schrödinger ve Broglie'nin aralarında bulunduğu birkaç fizikçi bu denklemi, Schrödinger denkleminin genelleştirilmiş haline getirmişlerdir. Schrodinger, 1927'de de Broglie dalgalarını tanımlayacak bir denklem için kuantum dalga denklemi olarak Klein-Gordon denklemini önerdi. Hidrojen atomunun ince yapısı bu denklem tarafından yanlış olarak tahmin edilir. Göreceli olmayan ince yapıya sahip olmayan Bohr enerji düzeylerini öngören yaklaşım, Klein-gordon denklemi yerine Schrödinger tarafından sunulmuştur. İkinci dereceden Klein-Gordon denklemi genel olarak α ve β reel parametreler olmak üzere

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \beta u^2(x, t) = f(x, t)$$

formunda ifade edilir.

Bu denklem üzerine literatürde yapılan bazı çalışmalar şunlardır: Wazwaz tarafından [42]'de denklemin analitik çözümü için Modifiye Ayırıştırma Yöntemi kullanılmıştır. Ducan tarafından [43]'de doğrusal olmayan Klein- Gordon denkleminin nümerik çözümü için belirleyici sonlu fark yaklaşımları yöntemi kullanılmıştır. Abbasbandy [44]'te doğrusal olmayan Klein-Gordon denkleminin nümerik çözümü için varyasyonlu iterasyon yöntemini, Yusufoglu [45]'de Klein-Gordon denkleminin nümerik çözümü için varyasyonel iterasyon yöntemini kullanmıştır. Doğrusal olmayan Klein-Gordon denkleminin nümerik çözümü için Wang ve Cheng [46]'te varyasyonel ve sonlu eleman yöntemini, Rashidinia vd [47] kübik B-spline kolokasyonu yöntemini kullanmışlardır. [48]'de Han ve Zang sonlu farklar yöntemini kullanarak bir boyutlu Klein Gordon denkleminin nümerik çözümlerini bulmuşlardır. Kaya ve El-Sayed [49]'de Klein-Gordon denklemini ayırıştırma yöntemi kullanarak çözmüştür. [50]'de Klein-Gordon denklemi Exp-fonksiyon yöntemi ve bir dönüşümün aracılığıyla tam çözümleri elde edilip Adomian yöntemiyle karşılaştırması yapılmıştır. Wang ve Zhu [51]'de varyasyonel iterasyon yöntemi ve Exp-fonksiyon yöntemi kullanılarak Klein-Gordon denkleminin açık çözümleri elde etmişlerdir. Odibat ve Momani [52]'de homotopi pertürbasyon yöntemi, Wazwaz [53]'de Tanh yöntemi, [54]'te Jacobi eliptik fonksiyonu yöntemi ile Klein-Gordon denklemini çözmüşlerdir. [55], [56], [57] ve [58] çalışmalarında Klein-Gordon denkleminin soliton çözümleri elde edilmiştir. Khalique ve Biswas Lie Simetri kullanarak doğrusal olmayan Klein-Gordon denkleminin sabit çözümlerini bulmuşlardır [59]. Dehghan ve Shokri Klein-Gordon denklemini radyal bazlı fonksiyonları kullanarak sayısal kolokasyon yöntemi ile çözmüşlerdir [60]. Biswas vd Klein-Gordon denkleminin dalga çözümleri üzerine çalışmışlardır [61].

Bu çalışmada, doğrusal ve doğrusal olmayan Klein-Gordon denklemlerinin nümerik çözümlerini elde etmek için Gegenbauer dalgacık Galerkin metodu uygulanmıştır.

5.1 Doğrusal Klein-Gordon Denklemine Gegenbauer Dalgacık Galerkin Yönteminin Uygulaması

Bu bölümde

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + u(x, t) = f(x, t) \quad (5.1)$$

doğrusal Klein-Gordon denklemi

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1] \quad (5.2)$$

başlangıç koşulları ve

$$u(0, t) = h_1(t), \quad u(1, t) = h_2(t), \quad t \in [0, 1] \quad (5.3)$$

sınır koşulları ile göz önüne alınmıştır.

(5.2)-(5.3) başlangıç ve sınır koşulları altında (5.1) doğrusal Klein Gordon denklemini çözmek için, (5.1) doğrusal Klein- Gordon denkleminin t zaman değişkenine göre iki kez integrali alınır ve (5.2) başlangıç koşulları da göz önüne alınır,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} + \int_0^t \frac{\partial^2 u(x, \eta)}{\partial x^2} d\eta - \int_0^t u(x, \eta) d\eta + \int_0^t f(x, \eta) d\eta, \quad (5.4)$$

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 u(x, \eta)}{\partial x^2} d\eta - \int_0^t \int_0^t u(x, \eta) d\eta + \int_0^t \int_0^t f(x, \eta) d\eta \quad (5.5)$$

ifadeleri elde edilir.

Gegenbauer dalgacıklarıyla bu denklemi çözmek için denklemde görülen en yüksek mertebeden türev terimi

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \simeq \sum_{i=1}^{\hat{m}} \sum_{j=1}^{\hat{m}} u_{ij} \psi_i(x) \psi_j(t) = \Psi^T(x) U \Psi(t) \quad (5.6)$$

biçiminde Gegenbauer dalgacık serisine açılır. Burada, $U = [u_{i,j}]_{\hat{m} \times \hat{m}}$ bilinmeyen matrisidir. (5.6) denkleminin x konum değişkenine göre iki kez integrali alınır ve (5.3) ifadesindeki sınır koşulları da göz önüne alınır sırasıyla,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} + \Psi^T(x) P^T U \Psi(t), \quad (5.7)$$

$$u(x, t) = u(0, t) + x \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) + \Psi^T(x) (P^2)^T U \Psi(t) \quad (5.8)$$

ifadeleri elde edilir.

(5.8) ifadesinde $x = 1$ alınır,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = u(1, t) - u(0, t) - \Psi^T(1) P^T U \Psi(t), \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_2(t) - h_1(t) - \Psi^T(1) P^T U \Psi(t) \quad (5.10)$$

ifadeleri elde edilir. H_1 ve H_2 Gegenbauer dalgacık katsayı vektörleri olmak üzere,

$h_1(t)$ ve $h_2(t)$ fonksiyonları Gegenbauer dalgacıkları yardımıyla

$$h_1(t) \simeq H_1^T \Psi(t) \quad h_2(t) \simeq H_2^T \Psi(t) \quad (5.11)$$

şeklinde yazılabilir. (5.11) ifadesindeki denklemler (5.10) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} \simeq (H_2^T - H_1^T - \Psi^T(1)(P^2)^T U) \Psi(t) \simeq \tilde{U}^T \Psi(t) \quad (5.12)$$

ifadeleri bulunur. (5.12) denklemini, (5.7) ve (5.8) denklemlerinde yerine yazarsak

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \Psi^T A_1 \Psi(t), \quad (5.13)$$

$$u(x, t) = \Psi^T A_2 \Psi(t) \quad (5.14)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada, $1 = \Psi^T(x)E$ ve $x = \Psi^T(x)X$ olmak üzere

$$A_1 = E\tilde{U} + P^T U,$$

$$A_2 = EH_1^T + X\tilde{U} + (P^2)^T U$$

şeklindedir.

$f(x, t)$ fonksiyonu Gegenbauer dalgacık serisine açılırsa aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$f(x, t) = \Psi^T(x)F\Psi(t). \quad (5.15)$$

Burada F , Gegenbauer dalgacık katsayı matrisidir.

(5.6) ve (5.13)- (5.15) denklemleri (5.5) denkleminde yerine yazılıp integralin operasyonel matrisi kullanılırsa $R(x, t)$ kalan terim fonksiyonu,

$$R(x, t) = \Psi^T(x)[A_2 - UP^2 + A_2P^2 - FP^2]\Psi(t). \quad (5.16)$$

biçimindedir

$R(x, t)$ kalan terim fonksiyonuna Galerkin metodu uygulandığında,

$$\int_0^1 \int_0^1 R(x, t) \psi_i(x) \psi_j(t) \omega_n(x) \omega_n(t) dx dt = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, \hat{m} \quad (5.17)$$

doğrusal olmayan cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözülmesiyle, $u_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \dots, \hat{m}$ Gegenbauer dalgacık katsayıları elde edilir. Bu dalgacık katsayı matrisi (5.14) denkleminde yerine yazılarak problemin yaklaşık çözümü elde edilir.

5.1.1 Doğrusal Klein Gordon Denklemi için Nümerik Sonuçlar

Problem 5.1 (5.1) denklemi ile verilen Klein-Gordon deklemini

$$f(x, t) = 6x^3 t + (x^3 - 6x) t^3 \quad (5.18)$$

olmak üzere

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1] \quad (5.19)$$

başlangıç koşulu ve

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = t^3, \quad x \in [0, 1] \quad (5.20)$$

sınır koşulları ile ele alınmıştır. (5.1) denkleminin (5.18)-(5.20) koşulları altında tam çözümü $u(x, t) = x^3 t^3$ olarak verilmiştir [62].

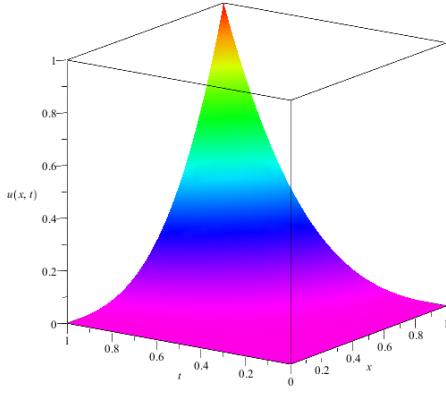
Bu problem $\beta = 1/2, \beta = 3/2, k = 1$ ve $M = 10$ parametreleri altında ele alınmıştır.

Tablo 5.1 $\beta = 1/2, M = 10$ ve $k = 1$ için Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırması

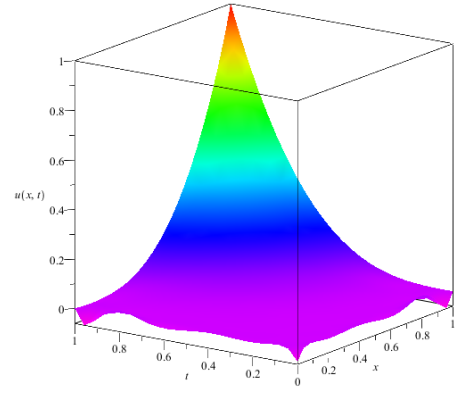
$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $		
x	$t = 0.1$	$t = 0.3$
0.1	$3.91257122448327e - 7$	$1.37693069554825e - 5$
0.2	$1.24152730682512e - 6$	$2.71213602721263e - 5$
0.3	$1.91130477512716e - 6$	$4.03940390231403e - 5$
0.4	$2.27618142558287e - 6$	$5.31780375417289e - 5$
0.5	$2.40584697087942e - 6$	$6.54328556653930e - 5$
0.6	$3.63299540702210e - 6$	$7.70639168365837e - 5$
0.7	$5.27044033043068e - 6$	$8.76281688467102e - 5$
0.8	$3.94447277349643e - 6$	$9.23922794005202e - 5$
0.9	$5.93488188728279e - 7$	$7.37286297965746e - 5$
1.0	$1.13353812230751e - 10$	$3.43871597863199e - 11$
$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $		
x	$t = 0.5$	$t = 0.7$
0.1	$6.07476987105213e - 5$	$1.64695285331964e - 4$
0.2	$1.21938120532834e - 4$	$3.24711282496403e - 4$
0.3	$1.81185546107707e - 4$	$4.83087695144838e - 4$
0.4	$2.38725614850980e - 4$	$6.31384153030705e - 4$
0.5	$2.93440091529318e - 4$	$7.51239377210965e - 4$
0.6	$3.40590503375090e - 4$	$8.09072279227732e - 4$
0.7	$3.61761604742127e - 4$	$7.80649978712467e - 4$
0.8	$3.24472994885153e - 4$	$6.63163463415190e - 4$
0.9	$2.04536702798644e - 4$	$4.31830604846029e - 4$
1.0	$1.12190895462660e - 10$	$6.86666279392512e - 11$
$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $		
x	$t = 0.9$	$t = 1.0$
0.1	$3.31335557981961e - 4$	$4.46402838178790e - 4$
0.2	$6.63159687806118e - 4$	$8.63315974880270e - 4$
0.3	$9.60420196771179e - 4$	$1.22386005505523e - 3$
0.4	$1.19515868373889e - 3$	$1.50048325552413e - 3$
0.5	$1.34099151446715e - 3$	$1.66704324087086e - 3$
0.6	$1.39601736134223e - 3$	$1.69858711081633e - 3$
0.7	$1.32862725355937e - 3$	$1.57126958286508e - 3$
0.8	$1.05571398626464e - 3$	$1.26152670711299e - 3$
0.9	$5.63384785369325e - 4$	$7.44485408183615e - 4$
1.0	$3.15243386950215e - 11$	$8.39341929292914e - 11$

Tablo 5.2 $\beta = 3/2, M = 10$ ve $k = 1$ için Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırması

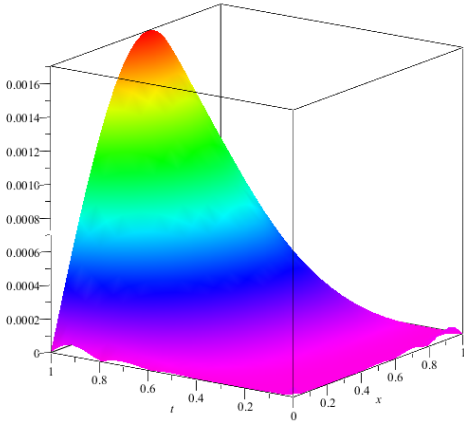
$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $		
x	$t = 0.1$	$t = 0.3$
0.1	$4.73644590538997e - 4$	$1.58808126897939e - 4$
0.2	$2.43231645315028e - 4$	$2.96074505268997e - 4$
0.3	$6.43405110858573e - 5$	$1.44138344344434e - 7$
0.4	$2.79794015174178e - 4$	$1.54804463332868e - 4$
0.5	$2.64251169972628e - 4$	$3.04120113382922e - 4$
0.6	$5.46925186479613e - 4$	$1.88409151107776e - 4$
0.7	$5.19715096584389e - 4$	$3.12130814672790e - 4$
0.8	$1.50581329156008e - 3$	$1.46351513472112e - 3$
0.9	$1.18737536222559e - 3$	$8.80973533749624e - 3$
1.0	$2.76655182053151e - 10$	$1.55238460974871e - 10$
$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $		
x	$t = 0.5$	$t = 0.7$
0.1	$6.12538308007032e - 4$	$2.02044257292451e - 4$
0.2	$5.76113778628698e - 4$	$1.01801395442292e - 3$
0.3	$4.01838193554922e - 4$	$7.34890069680461e - 4$
0.4	$2.92693734610643e - 5$	$1.07632126163090e - 3$
0.5	$5.98350532921694e - 4$	$6.71681702250694e - 3$
0.6	$1.33033605504923e - 3$	$1.33339580381319e - 2$
0.7	$8.11900879556066e - 3$	$1.07737555560637e - 2$
0.8	$1.39680139181060e - 2$	$3.31246410840944e - 3$
0.9	$1.13599737069063e - 2$	$2.31377148602625e - 2$
1.0	$2.49077980463142e - 11$	$6.78086475858208e - 11$
$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $		
x	$t = 0.9$	$t = 1.0$
0.1	$2.16789487424933e - 3$	$3.28681701987494e - 3$
0.2	$8.26472862747734e - 4$	$5.80524070415778e - 3$
0.3	$6.61416480356487e - 3$	$8.52396191262382e - 3$
0.4	$1.28942068457376e - 2$	$1.08229276000175e - 2$
0.5	$8.04619061435678e - 3$	$1.22139999702214e - 2$
0.6	$2.72704715493605e - 3$	$1.30302702929171e - 2$
0.7	$2.08116462483448e - 2$	$1.31014180299889e - 2$
0.8	$4.22561033455710e - 2$	$1.22812362456455e - 2$
0.9	$5.42959117653197e - 3$	$1.15660298296351e - 2$
1.0	$3.02111557992646e - 10$	$3.10840131412249e - 10$



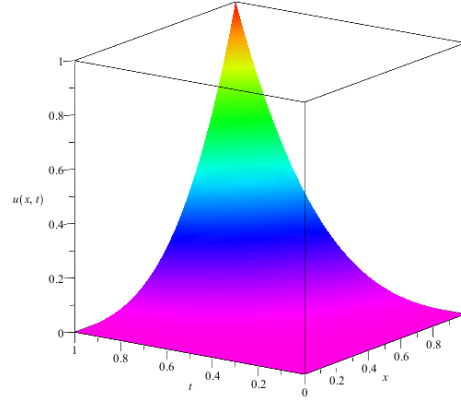
Şekil 5.1 $M = 10, k = 1$ ve $\beta = 1/2$ olması durumunda doğrusal Klein- Gordon denkleminin yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 5.2 $M = 10, k = 1$ ve $\beta = 3/2$ olması durumunda doğrusal Klein- Gordon denkleminin yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 5.3 $M = 10, k = 1$ ve $\beta = 1/2$ olması durumunda doğrusal Klein- Gordon denkleminin hata grafiği



Şekil 5.4 $M = 10, k = 1$ olması durumunda doğrusal Klein- Gordon denkleminin tam çözüm grafiği

5.2 Doğrusal Olmayan Klein-Gordon Denkleminin Gegenbauer Dalgacık Galerkin Yönteminin Uygulaması

Bu bölümde, α, β and γ reel parametreler olmak üzere

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \beta u(x, t) + \gamma u^2(x, t) = f(x, t) \quad (5.21)$$

ikinci dereceden doğrusal olmayan Klein-Gordon denklemi

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1] \quad (5.22)$$

başlangıç koşulları ve

$$u(0, t) = h_1(t), \quad u(1, t) = h_2(t), \quad t \in [0, 1] \quad (5.23)$$

sınır koşulları ile göz önüne alınmıştır [63].

(5.22)-(5.23) başlangıç ve sınır koşulları altında (5.21) doğrusal olmayan Klein Gordon denklemini çözmek için, (5.21) doğrusal olmayan Klein- Gordon denkleminin t zaman değişkenine göre iki kez integralini alınırsa ve (5.22) başlangıç koşulları da göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} - \alpha \int_0^t \frac{\partial^2 u(x, \eta)}{\partial x^2} d\eta - \beta \int_0^t u(x, \eta) d\eta - \gamma \int_0^t u^2(x, \eta) d\eta, \\ + \int_0^t f(x, \eta) d\eta, \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} u(x, t) = -\alpha \int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 u(x, \eta)}{\partial x^2} d\eta - \beta \int_0^t \int_0^t u(x, \eta) d\eta - \gamma \int_0^t \int_0^t u^2(x, \eta) d\eta \\ + \int_0^t \int_0^t f(x, \eta) d\eta \end{aligned} \quad (5.25)$$

ifadesi elde edilir.

Gegenbauer dalgacıklarıyla bu denklemi çözmek için denklemde görülen en yüksek mertebeden türev terimi,

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \simeq \sum_{i=1}^{\hat{m}} \sum_{j=1}^{\hat{m}} u_{ij} \psi_i(x) \psi_j(t) = \Psi^T(x) U \Psi(t) \quad (5.26)$$

biçiminde Gegenbauer dalgacık serisine açılır. Burada, $U = [u_{i,j}]_{\hat{m} \times \hat{m}}$ bilinmeyen matrisidir.

(5.26) denkleminin x konum değişkenine göre iki kez integrali alınır ve (5.23) ifadesindeki sınır koşulları da göz önüne alınır sırasıyla,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} + \Psi^T(x) P^T U \Psi(t) \quad (5.27)$$

$$u(x,t) = u(0,t) + x \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) + \Psi^T(x) (P^2)^T U \Psi(t) \quad (5.28)$$

ifadeleri elde edilir.

(5.28) ifadesinde $x = 1$ alınır,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = u(1,t) - u(0,t) - \Psi^T(1) (P^2)^T U \Psi(t), \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_2(t) - h_1(t) - \Psi^T(1) (P^2)^T U \Psi(t) \quad (5.30)$$

ifadeleri elde edilir. H_1 ve H_2 Gegenbauer dalgacık katsayı vektörleri olmak üzere, $h_1(t)$ ve $h_2(t)$ fonksiyonları Gegenbauer dalgacıkları yardımıyla

$$h_1(t) \simeq H_1^T \Psi(t), \quad h_2(t) \simeq H_2^T \Psi(t) \quad (5.31)$$

şeklinde yazılabilir. (5.31) ifadesindeki denklemler (5.30) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} \simeq (H_2^T - H_1^T - \Psi^T(1) (P^2)^T U) \Psi(t) = \tilde{U}^T \Psi(t) \quad (5.32)$$

ifadeleri bulunur. (5.32) denklemini, (5.27) ve (5.28) denklemlerinde yerine yazarsak

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \Psi^T A_1 \Psi(t), \quad (5.33)$$

$$u(x,t) = \Psi^T A_2 \Psi(t) \quad (5.34)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada, $1 = \Psi^T(x) E$ ve $x = \Psi^T(x) X$ olmak üzere

$$A_1 = E \tilde{U}^T + P^T U,$$

$$A_2 = E H_1^T + X \tilde{U}^T + (P^2)^T U$$

şeklinde dir.

$f(x, t)$ fonksiyonu Gegenbauer dalgacık serisine açılırsa aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$f(x, t) = \Psi^T(x)F\Psi(t). \quad (5.35)$$

Burada F , Gegenbauer dalgacık katsayı matrisidir.

(5.26), (5.34) ve (5.35) denklemlerini (5.25) denkleminde yerine yazılıp integralin operasyonel matrisi kullanılırsa $R(x, t)$ kalan terim fonksiyonu,

$$R(x, t) = \Psi^T(x) [A_2 + \alpha UP^2 + \beta A_2 P^2 + \gamma A_3 P^2 - FP^2] \Psi(t) \quad (5.36)$$

biçimindedir.

$R(x, t)$ kalan terim fonksiyonuna Galerkin metodu uyguladığında,

$$\int_0^1 \int_0^1 R(x, t) \psi_i(x) \psi_j(t) \omega_n(x) \omega_n(t) dx dt = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, \hat{m} \quad (5.37)$$

doğrusal olmayan cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözülmesiyle, $u_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \dots, \hat{m}$ Gegenbauer dalgacık katsayıları elde edilir. Elde edilen katsayı matrisi (5.34) denkleminde yerine yazılarak problemin yaklaşık çözümü elde edilir.

5.2.1 Doğrusal Olmayan Klein Gordon Denklemi için Nümerik Sonuçlar

Problem 5.2 Bu bölümde,

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1] \quad (5.38)$$

başlangıç koşulu ve

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = t^3, \quad x \in [0, 1] \quad (5.39)$$

sınır koşulları ile verilen

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \beta u(x, t) + u^2(x, t) = 6xt(x^2 - t^2) + x^6 t^6 \quad (5.40)$$

şeklinde verilen KG denklemini göz önüne alalım. (5.38)-(5.40) probleminin tam çözümü $u(x, t) = x^3 t^3$ olarak verilmiştir [63]. Burada $\alpha = -1, \beta = 0$ ve $\gamma = 1$ olsun.

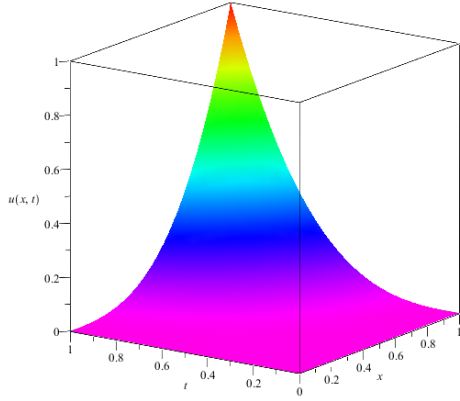
Bu problem $\beta = 1/2, \beta = 3/2, k = 1$ ve $M = 5$ parametreleri altında ele alınmıştır.

Tablo 5.3 $\beta = 1/2, M = 5$ ve $k = 1$ için Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırması

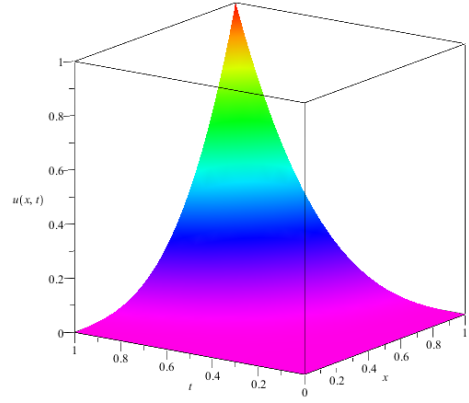
$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $		
x	$t = 0.1$	$t = 0.3$
0.1	$5.15210321495812e - 5$	$2.38004930600071e - 5$
0.2	$1.07138685923903e - 4$	$2.99126409915192e - 5$
0.3	$1.52672693216575e - 4$	$7.01936225233186e - 5$
0.4	$1.99384425764234e - 4$	$9.94926110675983e - 5$
0.5	$2.49527128449775e - 4$	$9.23713329026490e - 5$
0.6	$2.96345919346600e - 4$	$4.31040663031535e - 5$
0.7	$3.24077789674533e - 4$	$3.43223575899974e - 5$
0.8	$3.07951603800025e - 4$	$1.06208553997785e - 4$
0.9	$2.14188099211155e - 4$	$1.19142586380280e - 4$
1.0	$1.13432921042267e - 10$	$3.46138638585014e - 11$
$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $		
x	$t = 0.5$	$t = 0.7$
0.1	$2.44806975958855e - 4$	$6.31617310484274e - 4$
0.2	$5.18348627295045e - 4$	$1.12568832797047e - 3$
0.3	$6.85863661953602e - 4$	$1.63411833414124e - 3$
0.4	$8.04243761634444e - 4$	$2.03195503436058e - 3$
0.5	$9.01264539172070e - 4$	$2.23314147585747e - 3$
0.6	$9.75585534922968e - 4$	$2.19051603749766e - 3$
0.7	$9.96750220378116e - 4$	$1.89581244001211e - 3$
0.8	$9.05186001920383e - 4$	$1.37965975603266e - 3$
0.9	$6.12204211353495e - 4$	$7.11582385107046e - 4$
1.0	$1.11696679683249e - 10$	$6.85402845590488e - 11$
$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $		
x	$t = 0.9$	$t = 1.0$
0.1	$9.09126609982683e - 4$	$8.68373406692129e - 4$
0.2	$1.80251576718189e - 3$	$2.26019319243323e - 3$
0.3	$2.45882558979958e - 3$	$2.65754309907344e - 3$
0.4	$2.70167210537889e - 3$	$2.27093378944596e - 3$
0.5	$2.46896881272034e - 3$	$1.34836219096665e - 3$
0.6	$1.81292665923868e - 3$	$1.75311464039207e - 4$
0.7	$9.00054063606548e - 4$	$9.25248966349712e - 4$
0.8	$1.11569378308807e - 5$	$1.59286337922093e - 3$
0.9	$4.58661367632618e - 4$	$1.42958983602559e - 3$
1.0	$3.13875592183877e - 11$	$1.33736577367927e - 10$

Tablo 5.4 $\beta = 3/2, M = 4$ ve $k = 1$ için Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırması

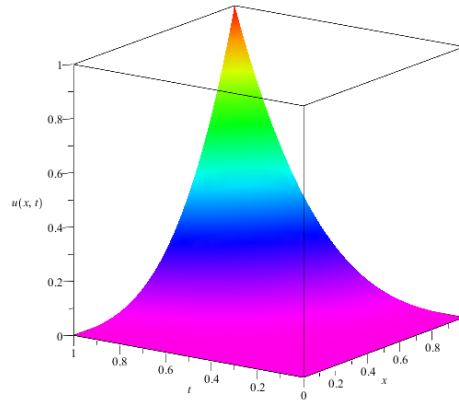
$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $		
x	$t = 0.1$	$t = 0.3$
0.1	$2.41458877189035e - 5$	$1.34926866805689e - 4$
0.2	$1.94397865900091e - 5$	$1.09056063030921e - 4$
0.3	$2.92459222296294e - 5$	$1.84576025220513e - 4$
0.4	$1.53670250493796e - 5$	$3.19199169335062e - 4$
0.5	$1.21023991013538e - 5$	$4.70637911335142e - 4$
0.6	$4.30678443731806e - 5$	$5.96604667181333e - 4$
0.7	$6.74348049166371e - 5$	$6.54811852834248e - 4$
0.8	$7.51087748824157e - 5$	$6.02971884254429e - 4$
0.9	$5.59952484211214e - 5$	$3.98797177402446e - 4$
1.0	$2.80316715152440e - 10$	$1.48238938485479e - 10$
$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $		
x	$t = 0.5$	
0.1	$4.69496275782574e - 4$	$1.03449885566897e - 3$
0.2	$9.06555378255357e - 4$	$2.18078373166291e - 3$
0.3	$1.39456109740350e - 3$	$3.14006466825533e - 3$
0.4	$1.85926216690751e - 3$	$3.85735451047411e - 3$
0.5	$2.22640732044785e - 3$	$4.27766610334711e - 3$
0.6	$2.42174529170503e - 3$	$4.34601229190221e - 3$
0.7	$2.37102481435954e - 3$	$4.00740592116726e - 3$
0.8	$1.99999462209186e - 3$	$3.20685983617014e - 3$
0.9	$1.23440344858249e - 3$	$1.88938688193874e - 3$
1.0	$2.75119094172993e - 11$	$9.64991420104866e - 11$
$ u_{tam}(x, t) - u_{num}(x, t) $		
x	$t = 0.9$	$t = 1.0$
0.1	$1.88487112292208e - 3$	$2.43423855070404e - 3$
0.2	$3.70058712265314e - 3$	$4.48034383205415e - 3$
0.3	$4.90195026725271e - 3$	$5.62680618026747e - 3$
0.4	$5.53527469274227e - 3$	$6.01098225236049e - 3$
0.5	$5.64687453514327e - 3$	$5.77022870534966e - 3$
0.6	$5.28306393047717e - 3$	$5.04190219625139e - 3$
0.7	$4.49015701476541e - 3$	$3.96335938208214e - 3$
0.8	$3.31446792402951e - 3$	$2.67195691985844e - 3$
0.9	$1.80231079429083e - 3$	$1.30505146659676e - 3$
1.0	$2.38428721210937e - 10$	$3.20686588395347e - 10$



Şekil 5.5 $M = 5, k = 1$ ve $\beta = 1/2$ olması durumunda doğrusal Klein- Gordon denkleminin yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 5.6 $M = 4, k = 1$ ve $\beta = 3/2$ olması durumunda doğrusal olmayan Klein-Gordon denkleminin yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 5.7 $M = 5, k = 1$ olması durumunda doğrusal olmayan Klein- Gordon denkleminin tam çözüm grafiği

6

ZAMAN KESİRLİ MERTEBEDEN İKİLİ BURGERS DENKLEMİNİN GEGENBAUER DALGACIK GALERKİN YÖNTEMİYLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Kesirli analiz, klasik analizin temel kavramları olan tamsayı mertebeli türevlerin ve katlı integrallerin reel ya da kompleks mertebeye genişlemesi olarak ortaya çıkmış bir teoridir. Klasik analiz kavramlarının doğadaki pek çok olayın gerçeğine en uygun halde matematiksel olarak modellenmesinde tam olarak yeterli olamadığı gerçeğinin fark edilmesi Leibniz (1646-1716) ve Newton'un (1643-1727) diferansiyel hesaplama tekniğini buldukları tarihe dayanır.

Biyoloji ve biyomühendislik, fizik, elektromanyetik teori, termodinamik, mekanik, sinyal ve sistem teorisi, kaos teorisi ve fraktallar, jeoloji, akışkanlar mekaniği ve kompleks sistemler içerisindeki madde iletimi teorisi, olasılık ve istatistik teorileri, elektrik-elektronik ve kontrol teorisi kesirli analizin en yaygın olarak kullanıldığı başlıca uygulama alanlarıdır [64–66]. Bundan dolayı, bu denklemlerin hem analitik hem de sayısal çözümlerini elde etmek çok önemlidir.

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin klasik diferansiyel denklemlerden en önemli farkı, klasik diferansiyel denklemlerdeki gibi tek bir türev tanımının olmamasıdır. Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerde birden fazla türev tanımı vardır. Farklı türev tanımlarının varlığı problemin türüne en uygun olanının kullanılması ve böylece problemin en iyi çözümünün elde edilmesini sağlar. Başlıca türev tanımları Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Riesz ve Marchaud kesirli türevleridir. Bu türev tanımları arasında geçişler olmasına rağmen tanımları ve tanımlarının fiziksel yorumları birbirlerinden farklıdır. Bu bölümde ele alınan kısmi türevli denklemlerdeki kesirli mertebeden türevler Caputo anlamında olduğu için Caputo anlamında kesirli mertebeden türev tanımı kullanılmıştır.

Tanım 6.1 (Riemann-Liouville Kesirli Integrali). $\alpha > 0$ ve $u(t)$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integrali

$$I^\alpha = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\rho)^{\alpha-1} u(\rho) d\rho, & \alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}^+ \\ u(t), & \alpha = 0. \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır [67, 68].

I^α operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir [67, 68].

- $I^\alpha I^\mu = I^{\alpha+\mu}$, ($\alpha > 0, \mu > 0$)
- $I^\alpha I^\mu = I^\mu I^\alpha$
- $(I^\alpha I^\mu u)(t) = (I^\mu I^\alpha u)(t)$
- $I^\alpha (t-\alpha)^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} (t-\alpha)^{\alpha+\gamma}$, ($\gamma > -1$)

Tanım 6.2 (Caputo Kesirli Türev Tanımı). $\alpha > 0$ ve $u(t)$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere Caputo kesirli türevi

$$D_t^\alpha = I^{m-\alpha} D^m u(t) \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-\rho)^{(\alpha-m+1)}} \frac{d^m u(\rho)}{d\rho^m} d\rho, & m-1 < \alpha \leq m, m \in \mathbb{N} \\ \frac{d^m u(\rho)}{d\rho^m}, & \alpha = m. \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Caputo kesirli türevinin bazı özellikleri aşağıdaki gibidir [67, 68].

- $I^\alpha D^\alpha u(t) = u(t) - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!}$, $m-1 < \alpha \leq m, m \in \mathbb{N}$
- $D^\alpha I^\alpha u(t) = u(t)$
- $D^\alpha t^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} t^{\mu-\alpha}$, $\mu > \alpha - 1$

Bu tezin konusu kısmi diferansiyel denklemler olmasına rağmen Gegenbauer Dalgacık Galerkin yönteminin zaman kesirli kısmi diferansiyel denklem sistemlerindeki başarısını görmek için bu bölümde,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + 2u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial(u(x, t)v(x, t))}{\partial x} + q_1(x, t), \\ \frac{\partial^\alpha v(x, t)}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + 2v(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} - \alpha_2 \frac{\partial(u(x, t)v(x, t))}{\partial x} + q_2(x, t) \end{aligned} \quad (6.1)$$

doğrusal olmayan zaman kesirli mertebeden ikili Burgers denklemi

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad v(x, 0) = f_2(x) \quad (6.2)$$

başlangıç koşulları ve

$$\begin{aligned} u(0, t) &= g_1(x), \quad u(1, t) = g_2(t), \\ v(0, t) &= h_1(x), \quad v(1, t) = h_2(t) \end{aligned} \quad (6.3)$$

sınır koşulları ile birlikte ele alındı. Burada $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ yeterince diferansiyellenebilen x konum, t zaman değişkenlerine bağlı fonksiyonlardır. α_1 ve α_2 sistem parametrelerine bağlı sabitlerdir [69].

Bu sistem ilk olarak Esipov tarafından ortaya atılmıştır [70]. Bu sistem, iki tür madde içeren sıvı süspansiyonlarında ya da koloitlerde ki yer çekiminin etkisiyle meydana gelen çökme veya yayılımların incelenmesi sonucu ortaya atılmıştır [70]. İkili Burgers denkleminin nümerik çözümleri, hem mühendisler hem de bilim insanları tarafından çalışılmıştır. Dehghan vd. [71] çalışmalarında Adomian-Padé yöntemiyle ikili Burgers denkleminin yaklaşık çözümünü bulmuşlardır. Khater vd. [72] çalışmalarında Chebyshev spectral sıralama yöntemini, Ghotbi vd. [73] çalışmasında homotopi pertürbasyon yöntemini kullanarak ikili Burgers denkleminin yaklaşık çözümlerini bulmuşlardır. Abazari ve Borhanifar [74] çalışmasında Burgers ve ikili Burgers denklemlerinin hem analitik hemde nümerik çözümlerini bulmak için diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanmışlardır. Yıldırım ve Kelleci [75] çalışmalarında Padé ve homotopy pertürbasyon tekniklerini birlikte kullanarak ikili Burgers denkleminin nümerik çözümlerini elde etmişlerdir. Mittal ve Arora [75] çalışmalarında zaman integrasyonunu Crank- Nicolson formüllerine ve konum integrasyonu için de kübik B-spline fonksiyonlarına dayalı düzgün dağılımlı düğüm noktaları üzerinde kübik B-spline sıralama yöntemi ile ikili Burgers denkleminin yaklaşık çözümünü bulmuşlardır. Jima vd. [76] Fourier seri açılımını kullanarak diferansiyel kuadratür yöntemini ile ikili viskoz Burgers denkleminin nümerik çözümünü elde etmişlerdir. Srivastava vd. [77] çalışmalarında bir boyutlu ikili Burgers denkleminin nümerik çözümleri için kapalı formda logaritmik sonlu farklar yöntemini kullanmışlardır.

İkili Burgers denkleminin tam çözümlerini bulmak için, Abdou ve Soliman [78] çalışmalarında Adomian ayrışım yöntemini, Soliman [79] çalışmasında modifiye edilmiş tanh- fonksiyon yöntemini çalışmışlardır. Kaya [80] homojen ve homojen olmayan ikili viskoz Burgers denklemlerinin yakınsak seri formunda çözümlerini elde etmek için ayrışım yöntemini kullanmıştır.

Albuohimad ve Adibi [81] ve [82] çalışmalarında sırasıyla zaman kesirli mertebeden ikili Burgers denkleminin yaklaşık çözümünü bulmak için Chebyshev sıralama yöntemini ve hibrit spektral üstel Chebyshev yöntemi kullanmışlardır. Alam vd. [83] zaman kesirli mertebeden ikili Burgers denklemini genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ve Homotopy pertürbasyon yöntemi ile çözmüşlerdir. Kaplan vd. [84] modifiye edilmiş basit denklem yöntemini, Zhao vd. [85] genişletilmiş kesirli alt denklem yöntemini, Chen ve An [86] Adomian ayrışım yöntemini, Liu ve Hou [87] genelleştirilmiş iki boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanarak zaman-konum kesirli mertebeden ikili Burgers denkleminin yaklaşık çözümünü bulmuşlardır. Sihng vd. [88] zaman-konum kesirli mertebeden ikili Burgers denklemini q-homotopi analizi dönüşüm yöntemi ile çözmüşlerdir.

Bu bölümde zaman kesirli mertebeden ikili Burgers denklemine, Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ve Gegenbauer Dalgacık Sıralama yöntemi uygulanarak nümerik çözümleri elde edilecektir.

6.1 Zaman Kesirli İkili Burgers Denklemine Gegenbauer Dalgacık Galerkin Yönteminin Uygulanması

Bu bölümde (6.1)-(6.3) problemi göz önüne alınsın. (6.1)-(6.3) problemi çözmek için Gegenbauer seri açılımı ve kesirli integralin operasyonel matrisi kullanılmıştır.

(6.1)-(6.3) problemi çözmek için (6.1) denkleminin t zaman değişkenine göre α mertebeden integrali alınıp ve (6.2) başlangıç koşulları göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f_1(x) + \int_0^t \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} d\tau + 2 \int_0^t u(x, \tau) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} d\tau - \alpha_1 \int_0^t \frac{\partial (u(x, \tau)v(x, \tau))}{\partial x} d\tau + \int_0^t q_1(x, \tau) d\tau, \\ v(x, t) &= f_2(x) + \int_0^t \frac{\partial^2 v(x, \tau)}{\partial x^2} d\tau + 2 \int_0^t v(x, \tau) \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} d\tau - \alpha_2 \int_0^t \frac{\partial (u(x, \tau)v(x, \tau))}{\partial x} d\tau + \int_0^t q_2(x, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (6.4)$$

şeklinde zaman kesirli mertebeden ikili Burgers denkleminin integral formu elde edilir.

Gegenbauer dalgacık serisiyle (6.1) çözmek için denklemde görülen en yüksek mertebeden türev terimi

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \simeq \sum_{i=1}^{\hat{m}} \sum_{j=1}^{\hat{m}} u_{ij} \psi_i(x) \psi_j(t) = \Psi^T(x) U \Psi(t) \quad (6.5)$$

biçiminde Gegenbauer dalgacık serisine açılır. Burada $U = [u_{ij}]_{\hat{m} \times \hat{m}}$ bilinmeyen katsayı matrisidir. (6.5) denkleminin x konum değişkenine göre 0'dan x 'e göre iki kez

integrali alınır ve (6.3) ifadesindeki sınır koşulları da göz önüne alınır sırasıyla,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \simeq \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} + \Psi(x)^T P^T U \Psi(t) \quad (6.6)$$

ve

$$u(x, t) \simeq u(0, t) + x \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) + \Psi(x)^T (P^2)^T U \Psi(t) \quad (6.7)$$

ifadeleri elde edilir. (6.3) sınır koşulları göz koşulları göz önüne alınarak (6.7) ifadesinde $x = 1$ alınır

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} \simeq g_2(t) - g_1(t) - \Psi(1)^T (P^2)^T U \Psi(t) \quad (6.8)$$

eşitliği elde edilir. $g_1(t)$ ve $g_2(t)$ fonksiyonları sırasıyla,

$$\begin{aligned} g_1(t) &\simeq G_1^T \Psi(t) \\ g_2(t) &\simeq G_2^T \Psi(t) \end{aligned} \quad (6.9)$$

biçiminde Gegenbauer dalgacık serisine açılır. Burada G_1 ve G_2 Gegenbauer dalgacık katsayı vektörleridir. (6.9) daki ifadeler (6.8) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} \simeq (G_2^T - G_1^T - \Psi(1)^T (P^2)^T U) \Psi(t) = \hat{U}^T \Psi(t) \quad (6.10)$$

ifadesi elde edilir.

Şimdi (6.10) ifadesi (6.6) ve (6.7) ifadelerinde yerine yazılırsa sırasıyla,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \simeq \Psi(x)^T (E \hat{U}^T + P^T U) \Psi(t) = \Psi(x)^T A_1 \Psi(t) \quad (6.11)$$

ve

$$u(x, t) \simeq \Psi(x)^T (E G_1^T + X \hat{U}^T + (P^2)^T U) \Psi(t) = \Psi(x)^T A_2 \Psi(t) \quad (6.12)$$

ifadeleri elde edilir. Burada $x = \Psi(x)^T X$ ve $1 = \Psi(x)^T E$ dir. Benzer şekilde, (6.4) ifadesindeki f_1 ve $q_1(x, t)$ fonksiyonları Gegenbauer dalgacık serisine açılırsa,

$$f_1(x) \simeq \Psi(x)^T F_1, \quad q_1(x, t) \simeq \Psi(x)^T Q_1 \Psi(t) \quad (6.13)$$

ifadeleri elde edilir. Burada, F_1 ve Q_1 Gegenbauer dalgacık katsayı matrisleridir.

Benzer şekilde, Gegenbauer dalgacık serisiyle (6.4) sistemindeki ikinci denklemi

çözmek için denklemden görülen en yüksek mertebeden türev terimi

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \simeq \sum_{i=1}^{\hat{m}} \sum_{j=1}^{\hat{m}} v_{ij} \psi_i(x) \psi_j(t) = \Psi^T(x) V \Psi(t) \quad (6.14)$$

biçiminde Gegenbauer dalgacık serisine açılır. Burada $V = [v_{ij}]_{\hat{m} \times \hat{m}}$ bilinmeyen katsayı matrisidir. (6.14) denkleminin x konum değişkenine göre 0'dan x 'e göre iki kez integrali alınır ve (6.3) ifadesindeki sınır koşulları da göz önüne alınır sırasıyla,

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \simeq \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} + \Psi(x)^T P^T V \Psi(t) \quad (6.15)$$

ve

$$v(x, t) \simeq v(0, t) + x \left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) + \Psi(x)^T (P^2)^T V \Psi(t) \quad (6.16)$$

ifadeleri elde edilir. (6.3) sınır koşulları göz koşulları göz önüne alınarak (6.16) ifadesinde $x = 1$ alınır

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} \simeq h_2(t) - h_1(t) - \Psi(1)^T (P^2)^T U \Psi(t) \quad (6.17)$$

ifadesi elde edilir. Burada $h_1(t)$ ve $h_2(t)$ fonksiyonları sırasıyla,

$$\begin{aligned} h_1(t) &\simeq H_1^T \Psi(t) \\ h_2(t) &\simeq H_2^T \Psi(t) \end{aligned} \quad (6.18)$$

biçiminde Gegenbauer dalgacık serisine açılır. Burada H_1 ve H_2 Gegenbauer dalgacık katsayı vektörleridir. (6.18) daki ifadeler (6.17) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} \simeq (H_2^T - H_1^T - \Psi(1)^T (P^2)^T V) \Psi(t) = \hat{V}^T \Psi(t) \quad (6.19)$$

Şimdi (6.19) ifadesi (6.15) ve (6.16) ifadelerinde yerine yazılırsa sırasıyla,

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \simeq \Psi(x)^T (E \hat{V}^T + P^T V) \Psi(t) \simeq \Psi(x)^T A_3 \Psi(t) \quad (6.20)$$

ve

$$v(x, t) \simeq \Psi(x)^T (E H_1^T + X \hat{V}^T + (P^2)^T V) \Psi(t) \simeq \Psi(x)^T A_4 \Psi(t) \quad (6.21)$$

ifadeleri elde edilir. Burada $x = \Psi(x)^T X$ ve $1 = \Psi(x)^T E$ dir. Benzer şekilde, (6.4)

ifadesindeki $f_2(x)$ ve $q_2(x, t)$ fonksiyonları Gegenbauer dalgacık serisine açılırsa,

$$f_2(x) \simeq \Psi(x)^T F_2, \quad q_2(x, t) \simeq \Psi(x)^T Q_2 \Psi(t) \quad (6.22)$$

ifadeleri elde edilir. Burada, F_2 ve Q_2 Gegenbauer dalgacık katsayı matrisleridir. (6.5), (6.11)- (6.14) ve (6.20)- (6.21) ifadeleri (6.4) ifadesinde denklemlerde yerine yazılırsa, (6.1)- (6.3) problemi için $R_1(x, t)$ ve $R_2(x, t)$ kalan terim fonksiyonları,

$$\begin{aligned} [\Psi(x)^T A_1 \Psi(t)] [\Psi(x)^T A_2 \Psi(t)] &= \Psi(x)^T K_1 \Psi(t) \\ [\Psi(x)^T A_3 \Psi(t)] [\Psi(x)^T A_4 \Psi(t)] &= \Psi(x)^T K_2 \Psi(t) \\ [\Psi(x)^T A_1 \Psi(t)] [\Psi(x)^T A_4 \Psi(t)] &= \Psi(x)^T K_3 \Psi(t) \\ [\Psi(x)^T A_2 \Psi(t)] [\Psi(x)^T A_3 \Psi(t)] &= \Psi(x)^T K_4 \Psi(t) \end{aligned} \quad (6.23)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} R_1(x, t) &= \Psi(x)^T [A_2 - F_1 E^T - U P^\alpha - 2K_1 P^\alpha + \alpha_1 K_3 P^\alpha + \alpha_1 K_4 P^\alpha - Q_1 P^\alpha] \Psi(t) \\ R_2(x, t) &= \Psi(x)^T [A_4 - F_2 E^T - V P^\alpha - 2K_2 P^\alpha + \alpha_2 K_3 P^\alpha + \alpha_2 K_4 P^\alpha - Q_2 P^\alpha] \Psi(t) \end{aligned} \quad (6.24)$$

biçiminde elde edilir. $R_1(x, t)$ ve $R_2(x, t)$ kalan terim fonksiyonlarına Galerkin yöntemini uyguladığında,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 R_1(x, t) \psi_i(x) \psi_j(t) \omega_n(x) \omega_n(t) dx dt &= 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, \hat{m}, \\ \int_0^1 \int_0^1 R_2(x, t) \psi_i(x) \psi_j(t) \omega_n(x) \omega_n(t) dx dt &= 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, \hat{m} \end{aligned} \quad (6.25)$$

$2\hat{m}^2$ denklemden oluşan doğrusal olmayan cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözülmesiyle, $u_{i,j}, v_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \dots, \hat{m}$ Gegenbauer dalgacık katsayıları elde edilir. Bu dalgacık katsayıları (6.12) ve (6.21) denklemlerinde yerine yazılarak problemin $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ yaklaşık çözümleri elde edilir.

6.2 Zaman Kesirli İkili Burgers Denklemine Gegenbauer Dalgacık Sıralama Yönteminin Uygulanması

(6.1)-(6.3) problemini çözmek için,

$$\frac{\partial^{\alpha+2} u(x, t)}{\partial t^\alpha \partial x^2} \simeq \Psi(x)^T U \Psi(t), \quad (6.26)$$

$$\frac{\partial^{\alpha+2}v(x,t)}{\partial t^\alpha \partial x^2} \simeq \Psi(x)^T V \Psi(t) \quad (6.27)$$

olsun. Burada $U = [u_{ij}]_{\hat{m} \times \hat{m}}$ ve $V = [v_{ij}]_{\hat{m} \times \hat{m}}$ bilinmeyen katsayı matrisleridir. (6.26) ifadesinin (6.2) başlangıç koşulları göz önüne alınarak t zaman parametresine göre α mertebeden integrali alınır,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \simeq \Psi(x)^T U P^\alpha \Psi(t) + f''(x) \quad (6.28)$$

ifadesi bulunur. Benzer şekilde (6.27) ifadesinin x konum değişkenine göre iki kez integrali alınır,

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} \simeq \Psi(x)^T (P^2)^T U \Psi(t) + \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} \Big|_{x=0} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} \right) \Big|_{x=0} \quad (6.29)$$

ifadesi elde edilir.

(6.29) ifadesinde $x = 1$ alınır,

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} \simeq \Psi(x)^T (P^2)^T U \Psi(t) - x \Psi(1)^T (P^2)^T U \Psi(t) + \frac{\partial^\alpha g_1(t)}{\partial t^\alpha} + \left(\frac{\partial^\alpha g_2(t)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^\alpha g_1(t)}{\partial t^\alpha} \right) \quad (6.30)$$

ifadesi elde edilir. Şimdi, (6.30) ifadesinin t zaman değişkenine göre α mertebeden integrali alınır,

$$u(x,t) \simeq \Psi(x)^T (P^2)^T U P^\alpha \Psi(t) - x \Psi(1)^T (P^2)^T U P^\alpha \Psi(t) + G_1(x,t) \quad (6.31)$$

ifadesi bulunur. Burada

$$G_1(x,t) = f_1(x) + g_1(t) - g_1(0) + x(g_2(t) - g_2(0) - g_1(t) + g_1(0)),$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \Psi(x)^T P^T U P^\alpha \Psi(t) - \Psi(1)^T (P^2)^T U P^\alpha \Psi(t) + \frac{\partial G_1(x,t)}{\partial x} \quad (6.32)$$

dir. Benzer şekilde, (6.27) ifadesinin (6.2) başlangıç koşulları göz önüne alınarak t zaman parametresine göre α mertebeden integrali alınır,

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \simeq \Psi(x)^T V P^\alpha \Psi(t) + f_2''(x) \quad (6.33)$$

ifadesi bulunur. Benzer şekilde (6.27) ifadesinin x konum değişkenine göre iki kez integrali alınır,

$$\frac{\partial^\alpha v(x,t)}{\partial t^\alpha} \simeq \Psi(x)^T (P^2)^T V \Psi(t) + \frac{\partial^\alpha v(x,t)}{\partial t^\alpha} \Big|_{x=0} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^\alpha v(x,t)}{\partial t^\alpha} \right) \Big|_{x=0} \quad (6.34)$$

ifadesi elde edilir.

(6.34) ifadesinde $x = 1$ alınırsa,

$$\frac{\partial^\alpha v(x, t)}{\partial t^\alpha} \simeq \Psi(x)^T (P^2)^T V \Psi(t) - x \Psi(1)^T (P^2)^T V \Psi(t) + \frac{\partial^\alpha h_1(t)}{\partial t^\alpha} + \left(\frac{\partial^\alpha h_2(t)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^\alpha h_1(t)}{\partial t^\alpha} \right) \quad (6.35)$$

ifadesi elde edilir. Şimdi, (6.35) ifadesinin t zaman değişkenine göre α mertebeden integrali alınırsa,

$$v(x, t) \simeq \Psi(x)^T (P^2)^T V P^\alpha \Psi(t) - x \Psi(1)^T (P^2)^T V P^\alpha \Psi(t) + G_2(x, t) \quad (6.36)$$

ifadesi bulunur. Burada

$$G_2(x, t) = f_2(x) + h_1(t) - h_1(0) + x (h_2(t) - h_2(0) - h_1(t) + h_1(0))$$

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = \Psi(x)^T P^T V P^\alpha \Psi(t) - \Psi(1)^T (P^2)^T V P^\alpha \Psi(t) + \frac{\partial G_2(x, t)}{\partial x} \quad (6.37)$$

dir. (6.28), (6.30)- (6.34) ve (6.36)- (6.37) ifadeleri (6.3) denklemlerinde yerine yazıldığında elde edilen sonuçlar $x_i = \frac{2i-1}{2\hat{m}}, i = 1, 2, \dots, \hat{m}$ noktalarında ayrıklaştırılırsa zaman kesirli mertebeden ikili Burgers denklemi için doğrusal olmayan lineer denklem sistemi bulunur. Bu doğrusal olmayan cebirsel sistemin çözülmesiyle u_{ij}, v_{ij} dalgacık katsayıları elde edilir. Bu dalgacık katsayıları (6.31) ve (6.36) ifadelerinde yerine yazılırsa $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ yaklaşık çözümleri elde edilir.

6.3 Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde yukarıda tanımlanan nümerik şemalar çerçevesinde zaman kesirli ikili Burgers Denklemi için elde edilen nümerik sonuçlar verilmiştir. Elde edilen nümerik sonuçların tam çözüme ne kadar iyi yaklaştığını ölçmek için

$$E(x_i, t_i) = |u_{tam}(x_i, t_i) - u_{num}(x_i, t_i)|$$

$$L_\infty = \max |u_{tam}(x, t_i) - u_{num}(x, t_i)|$$

şeklinde tanımlanan E ve L_∞ hata normları kullanılmıştır. Burada u_{tam} tam çözümü ve u_{num} nümerik çözümü göstermektedir.

Problem. Bu bölümde $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{5}{2}$ ve $q_1(x, t) = 0, q_2(x, t) = 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + 2u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \frac{5}{2} \frac{\partial (u(x, t)v(x, t))}{\partial x}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ \frac{\partial^\alpha v(x, t)}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + 2v(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} - \frac{5}{2} \frac{\partial (u(x, t)v(x, t))}{\partial x} \quad 0 < \alpha \leq 1\end{aligned}\quad (6.38)$$

problemi göz önüne alınsın. $\alpha = 1$ için bu problemin tam çözümü λ keyfi sabit olmak üzere

$$u(x, t) = v(x, t) = \lambda \left[1 - \tanh \left(\frac{3}{2} \lambda (x - 3\lambda t) \right) \right]$$

dir [74]. Bu problem $[0, 1]$ aralığında tam çözümden alınan başlangıç ve sınır koşulları ile çözülmüştür.

Tablo 6.1 ve Tablo 6.2 sırasıyla $k = 2, M = 3$ ve β ve α nın farklı değerleri için Gegenbauer dalgacık sıralama yöntemi ile elde edilen sonuçları göstermektedir. Tablo 6.2 den $\alpha = 0.90$ için Gegenbauer dalgacık sıralama yöntemiyle elde edilen sonuçların daha iyi olduğu görülmektedir. Yani $\alpha = 1$ 'e yaklaştıkça elde edilen hatalar daha iyidir. Tablo 6.3, Tablo 6.4 ve Tablo 6.5 sırasıyla $k = 1, M = 3, \beta = 1/2$ ve α nın farklı değerleri (x_i, t_i) noktalarında Gegenbauer dalgacık sıralama yöntemi ve Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçları göstermektedir. Tablo 6.3, Tablo 6.4 ve Tablo 5.5 'ten Gegenbauer dalgacık sıralama yöntemiyle elde edilen sonuçların Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu görülmektedir

$k = 1, M = 3, \alpha = 1$ ve $\beta = 1/2$ için zaman kesirli mertebeden ikili Burgers denkleminde Gegenbauer Dalgacık Galerkin yöntemini uygulayalım. $k = 1, M = 3$ ve $\beta = 1/2$ için,

$$\Psi(\cdot) = [\psi_{1,0}(\cdot), \psi_{1,1}(\cdot), \psi_{1,2}(\cdot)]^T \quad (6.39)$$

olmak üzere

$$\psi_{1,0}(\cdot) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \cdot \leq 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\psi_{1,1}(\cdot) = \begin{cases} \sqrt{3}(2x-1), & 0 \leq \cdot \leq 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\psi_{1,0}(\cdot) = \begin{cases} \sqrt{5}(6x^2-6x+1), & 0 \leq \cdot \leq 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçimindedir.

$$\Psi(1) = \left[1 \quad \frac{\sqrt{6}\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{10}\sqrt{2}}{2} \right]^T$$

bulunur. Bu durumda, $x_i = \frac{2i-1}{2\hat{m}}, i = 1, 2, \dots, \hat{m}$ sıralama noktalarını (6.39) da yerine yazılarak,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1.154700538 & 0 & 1.154700538 \\ 0.3726779962 & -1.118033988 & 0.3726779962 \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

matrisi elde edilir. (6.40) matrisini (2.22) ifadesinde yazılarak elde edilen P ve P^2 matrisleri

$$P = \begin{bmatrix} 0.5000000000000000 & 0.288675134660758 & -0.555111512312578 \times 10^{-16} \\ -0.240562612078642 & 0.500000318925942 \times 10^{-10} & 0.129099444887539 \\ -0.0621129992604554 & -0.107582870651534 & 0.500000110759125 \times 10^{-10} \end{bmatrix}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.171296296276910 & 0.144337567330379 & 0.0372677996412662 \\ -0.128300059764948 & -0.0925925925800000 & -0.138777878078145 \times 10^{-16} \\ -0.00517608324878795 & -0.0179304784274886 & -0.0231481481369098 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. (6.9)- (6.13) ifadelerindeki G_1, G_2, E, X, F_1, A_1 ve A_2 matrisleri,

$$G_1 = H_1 \begin{bmatrix} 0.005000281250 & 0.4000000000 \times 10^{-6} & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = H_2 [0.004962781920 \quad 0 \quad -0.010000000000]$$

$$E = [1 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$X = \left[\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{6} \quad 0 \right]^T$$

$$F_1 = F_2 = [0.004981250176 \quad -0.00001082520000 \quad 0.1000000000 \times 10^{-7}]^T$$



$$\begin{aligned}
 A_1 = A_3 &= \begin{bmatrix} -0.00003749933000 - 0.004629629700u_{1,1} + 0.04811252250u_{2,1} + 0.02588041642u_{3,1} & -0.4000000000 \times 10^{-6} - 0.004629629700u_{2,1} + 0.04811252250u_{2,2} + 0.02588041642u_{3,2} & -0.01000000000 - 0.004629629700u_{1,3} + 0.04811252250u_{2,3} + 0.02588041642u_{3,3} \\ 0.2886751347u_{1,1} + 0.5000003189 \times 10^{-10} * u_{2,1} - 0.1075828707u_{3,1} & 0.2886751347u_{2,1} + 0.5000003189 \times 10^{-10}u_{2,2} - .1075828707u_{3,2} & 0.2886751347u_{1,3} + 0.5000003189 \times 10^{-10}u_{2,3} - 0.1075828707u_{3,3} \\ -0.5551115123 \times 10^{-16}u_{1,1} + 0.1290994449u_{2,1} + 0.5000001108 \times 10^{-10}u_{3,1} & -0.5551115123 \times 10^{-16}u_{1,2} + 0.1290994449u_{2,2} + .5000001108 \times 10^{-10}u_{3,2} & -0.5551115123 \times 10^{-16}u_{3,3} + .1290994449u_{2,3} + .5000001108e - 10u_{3,3} \end{bmatrix} \\
 A_2 = A_4 &= \begin{bmatrix} 0.004981531585 - 0.08101851863u_{1,1} + 0.01603750752u_{2,1} + 0.03882062459u_{3,1} & 0.2000000000 \times 10^{-6} - 0.08101851863u_{1,2} + 0.01603750752u_{2,2} + 0.03882062459u_{3,2} & -0.005000000000 - 0.08101851863u_{1,3} + 0.01603750752u_{2,3} + 0.03882062459u_{3,3} \\ -0.00001082512414 - 0.001336458940u_{1,1} - 0.009259259270u_{2,1} + 0.007471032686u_{3,1} & -0.1154700539 \times 10^{-6} - 0.001336458940u_{1,2} - 0.009259259270u_{2,2} + 0.007471032686u_{3,2} & -0.002886751347 - 0.001336458940u_{1,3} - 0.009259259270u_{2,3} + 0.007471032686u_{3,3} \\ 0.03726779964u_{1,1} - 0.1387778781 \times 10^{-16}u_{2,1} - 0.02314814814u_{3,1} & 0.03726779964u_{1,2} - 0.1387778781 \times 10^{-16}u_{2,2} - 0.02314814814u_{3,2} & 0.03726779964u_{1,3} - 0.1387778781 \times 10^{-16}u_{2,3} - 0.02314814814u_{3,3} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

şeklindedir. Elde edilen bu matrislerin (6.24) de yerine yazılmasıyla elde edilen $R_1(x, t)$ ve $R_2(x, t)$ kalan terim fonksiyonları (6.25) yerine yazılırsa doğrusal olmayan cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülmesiyle U ve V katsayılar matrisi,

$$U = V = \begin{bmatrix} -0.01388640185 & -0.01962440014 & -0.04618364216 \\ -0.01427402708 & -0.01992066841 & -0.03986284231 \\ -0.007638356213 & -0.01039420691 & -0.01605779633 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Tablo 6.1 Zaman kesirli ikili Burgers denkleminin $k = 2, M = 3, \lambda = 0.005, \alpha = 0.75$ ve farklı β değerleri için Gegenbauer dalgacık sıralama yöntemi ile elde edilen maksimum hataları

x	$\beta = -0.49$	$\beta = 0.5$
0.08333333333	$5.56091888323387 \times 10^{-9}$	$5.56091887990606 \times 10^{-9}$
0.25000000000	$1.38776963054663 \times 10^{-8}$	$1.38776962940260 \times 10^{-8}$
0.41666666667	$1.81658498433006 \times 10^{-8}$	$1.81658498265648 \times 10^{-8}$
0.58333333333	$1.82082635178889 \times 10^{-8}$	$1.82082634993186 \times 10^{-8}$
0.75000000000	$1.40062564340391 \times 10^{-8}$	$1.40062564027202 \times 10^{-8}$
0.91666666667	$5.69678491962975 \times 10^{-9}$	$5.69678489380017 \times 10^{-9}$
x	$\beta = 1.5$	$\beta = 2.5$
0.08333333333	$5.56091888573703 \times 10^{-9}$	$5.56091888078351 \times 10^{-9}$
0.25000000000	$1.38776963109158 \times 10^{-8}$	$1.38776962990505 \times 10^{-8}$
0.41666666667	$1.81658498502864 \times 10^{-8}$	$1.81658498408983 \times 10^{-8}$
0.58333333333	$1.82082635154496 \times 10^{-8}$	$1.82082634759442 \times 10^{-8}$
0.75000000000	$1.40062564202905 \times 10^{-8}$	$1.40062564107182 \times 10^{-8}$
0.91666666667	$5.69678490879393 \times 10^{-9}$	$5.69678493132917 \times 10^{-9}$

Tablo 6.2 Zaman kesirli ikili Burgers denkleminin $k = 2, M = 3, \lambda = 0.005, \alpha = 0.90$ ve farklı β değerleri için Gegenbauer dalgacık sıralama yöntemi ile elde edilen maksimum hataları

x	$\beta = -0.49$	$\beta = 0.5$
0.08333333333	$2.48736492703210 \times 10^{-9}$	$2.48736492339469 \times 10^{-9}$
0.25000000000	$6.33715105072939 \times 10^{-9}$	$6.33715104907696 \times 10^{-9}$
0.41666666667	$8.31540044959192 \times 10^{-9}$	$8.31540045263156 \times 10^{-9}$
0.58333333333	$8.33164878981551 \times 10^{-9}$	$8.33164879335693 \times 10^{-9}$
0.75000000000	$6.39224777036601 \times 10^{-9}$	$6.39224776493989 \times 10^{-9}$
0.91666666667	$2.59610208919879 \times 10^{-9}$	$2.59610208092303 \times 10^{-9}$
x	$\beta = 1.5$	$\beta = 2.5$
0.08333333333	$2.48736492649088 \times 10^{-9}$	$2.48736492450080 \times 10^{-9}$
0.25000000000	$6.33715105527478 \times 10^{-9}$	$6.33715105248488 \times 10^{-9}$
0.41666666667	$8.31540046084903 \times 10^{-9}$	$8.31540046005840 \times 10^{-9}$
0.58333333333	$8.33164879823062 \times 10^{-9}$	$8.33164878389264 \times 10^{-9}$
0.75000000000	$6.39224777102112 \times 10^{-9}$	$6.39224776947591 \times 10^{-9}$
0.91666666667	$2.59610208695513 \times 10^{-9}$	$2.59610209831542 \times 10^{-9}$

Tablo 6.3 Zaman kesirli ikili Burgers denkleminin $k = 1, M = 3, \beta = 1/2$ ve $\alpha = 0.75$ için GWGM ve GWCM uygulanarak elde edilen mutlak hataların karşılaştırması

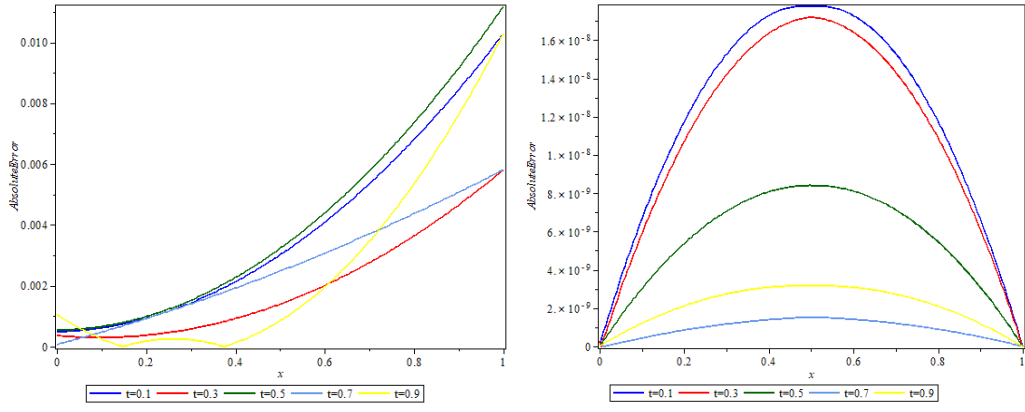
$\alpha = 0.75, \beta = 1/2$		
t	$ u_{tamcoz} - u_{GWGM} $	$ u_{tamcoz} - u_{GWCM} $
(0.1, 0.1)	$6.13025693527975 \times 10^{-4}$	$6.66661856928545 \times 10^{-9}$
(0.2, 0.2)	$1.96106407883844 \times 10^{-4}$	$1.23238756518206 \times 10^{-8}$
(0.3, 0.3)	$5.76008412287644 \times 10^{-4}$	$4.19958608311320 \times 10^{-8}$
(0.4, 0.4)	$1.80785975016607 \times 10^{-3}$	$1.05634171814097 \times 10^{-8}$
(0.5, 0.5)	$3.23042755391540 \times 10^{-3}$	$7.21275298414753 \times 10^{-10}$
(0.6, 0.6)	$4.20113073168401 \times 10^{-3}$	$4.01824477114943 \times 10^{-9}$
(0.7, 0.7)	$3.70382715260461 \times 10^{-3}$	$1.19582281105710 \times 10^{-9}$
(0.8, 0.8)	$3.48813645794342 \times 10^{-4}$	$6.88844784126224 \times 10^{-10}$
(0.9, 0.9)	$7.62717399664530 \times 10^{-3}$	$1.18956826178091 \times 10^{-9}$

Tablo 6.4 Zaman kesirli ikili Burgers denklemine $k = 1, M = 3, \beta = 1/2$ ve $\alpha = 0.90$ için GWGM ve GWCM uygulanarak elde edilen mutlak hataların karşılaştırması

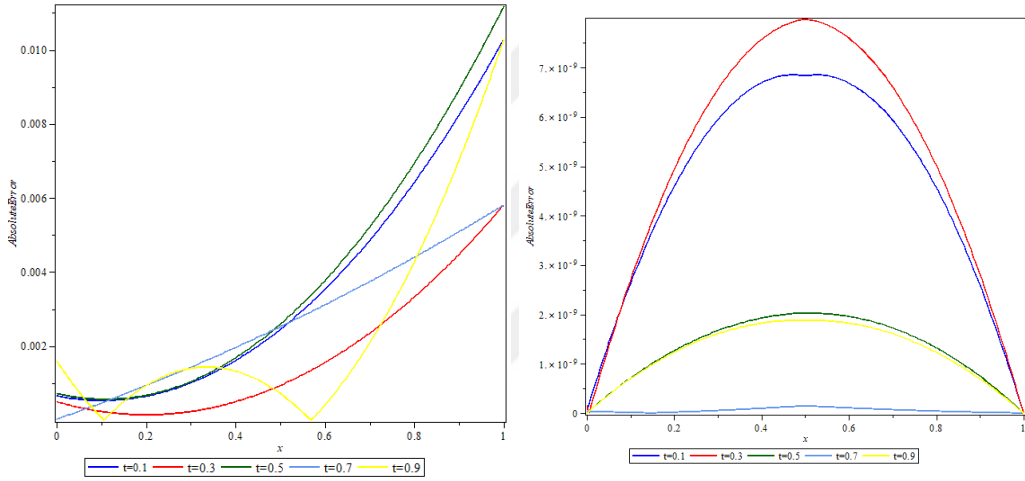
$\alpha = 0.90, \beta = 1/2$		
t	$ u_{tamcoz} - u_{GWGM} $	$ u_{tamcoz} - u_{GWCM} $
(0.1, 0.1)	$5.29045965455882 \times 10^{-4}$	$2.62846240061929 \times 10^{-9}$
(0.2, 0.2)	$2.20293920176328 \times 10^{-4}$	$5.47257522501428 \times 10^{-9}$
(0.3, 0.3)	$2.27882222894827 \times 10^{-4}$	$6.55618936267295 \times 10^{-9}$
(0.4, 0.4)	$1.20101728292158 \times 10^{-3}$	$4.61118750103048 \times 10^{-9}$
(0.5, 0.5)	$2.59246452767595 \times 10^{-3}$	$1.32748682069936 \times 10^{-10}$
(0.6, 0.6)	$3.80339566853798 \times 10^{-3}$	$1.25973539069898 \times 10^{-9}$
(0.7, 0.7)	$3.74280086149575 \times 10^{-3}$	$7.03441479770895 \times 10^{-11}$
(0.8, 0.8)	$8.27488706145341 \times 10^{-4}$	$6.44803361647952 \times 10^{-10}$
(0.9, 0.9)	$7.01791375130911 \times 10^{-3}$	$6.98040561718981 \times 10^{-10}$

Tablo 6.5 Zaman kesirli ikili Burgers denklemine $k = 1, M = 3, \beta = 1/2$ ve $\alpha = 1$ için GWGM ve GWCM uygulanarak elde edilen mutlak hataların karşılaştırması

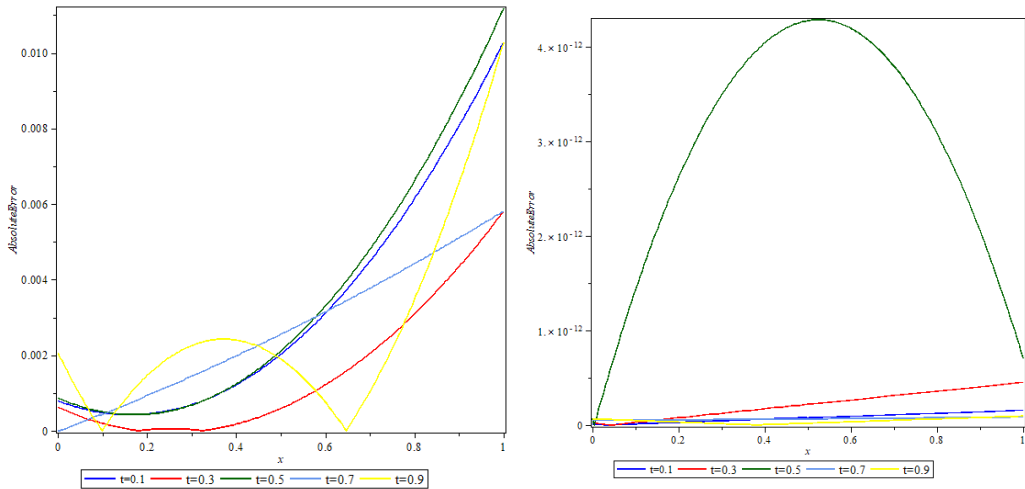
$\alpha = 1, \beta = 1/2$		
t	$ u_{tamcoz} - u_{GWGM} $	$ u_{tamcoz} - u_{GWCM} $
(0.1, 0.1)	$4.41008546402439 \times 10^{-4}$	$2.79364047818072 \times 10^{-13}$
(0.2, 0.2)	$2.36885253966561 \times 10^{-4}$	$3.67973403970119 \times 10^{-15}$
(0.3, 0.3)	$2.97862564205458 \times 10^{-5}$	$1.78829812543299 \times 10^{-14}$
(0.4, 0.4)	$7.46813081452347 \times 10^{-4}$	$2.42305348966039 \times 10^{-14}$
(0.5, 0.5)	$2.11220965345779 \times 10^{-3}$	$4.11579218934484 \times 10^{-12}$
(0.6, 0.6)	$3.50273601972239 \times 10^{-3}$	$5.42193099334388 \times 10^{-13}$
(0.7, 0.7)	$3.77176040769366 \times 10^{-3}$	$6.38553105209211 \times 10^{-13}$
(0.8, 0.8)	$1.18968671114004 \times 10^{-3}$	$4.01833606504698 \times 10^{-14}$
(0.9, 0.9)	$6.55604550684911 \times 10^{-3}$	$4.42734126124196 \times 10^{-13}$



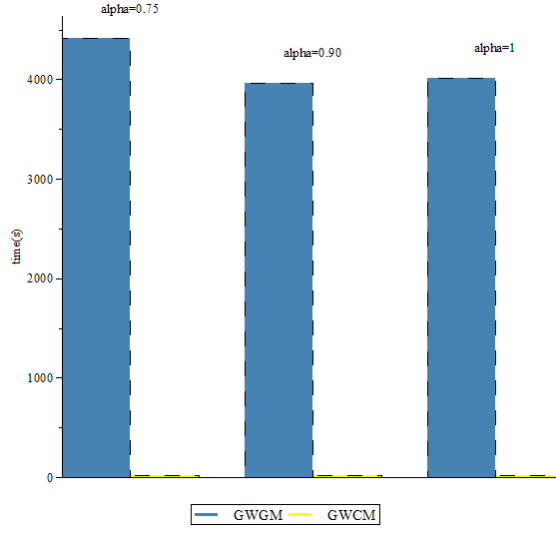
Şekil 6.1 $M = 3, k = 1$ ve $\alpha = 0.75$ için farklı t zamanlarında mutlak hataların karşılaştırılması



Şekil 6.2 $M = 3, k = 1$ ve $\alpha = 0.90$ için farklı t zamanlarında mutlak hataların karşılaştırılması



Şekil 6.3 $M = 3, k = 1$ ve $\alpha = 1$ için farklı t zamanlarında mutlak hataların karşılaştırılması



Şekil 6.4 $M = 3, k = 1$ için GWGM ve GWCM için yazılan Maple kodlarının çalışma süreleri

7

SONUÇ VE ÖNERİLER

Matematiksel, fiziksel, kimya ve mühendislik bilimlerindeki birçok önemli problem, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler veya kesirli kısmi diferansiyel denklemlerle iyi modellenebilir. Fiziksel ve mühendislik problemlerinin çoğunun doğrusal olmadığı bilinmektedir ve bazı durumlar için bu tip denklemlerin kesin çözümlerini bulmak çok zor olabilir. Bu nedenle doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler ve doğrusal olmayan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri çok önemlidir. Bunun için doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin ve kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümü için güvenilir ve verimli bir tekniğe ihtiyaç vardır.

Bu tez çalışmasında, dalgacıklarla ilgili temel bilgiler verilmiş olup Gegenbauer dalgacık Galerkin yönteminin kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini ve Gegenbauer dalgacık Galerkin yönteminin ve Gegenbauer dalgacık sıralama yönteminin zaman-kesirli diferansiyel denklem sistemlerinin nümerik çözümlerini elde etmede nasıl kullanıldığı detaylı olarak ilk defa bu tezde gösterilmiştir. Literatür taramasından da anlaşılacağı üzere, Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemi kullanarak doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini ele alan çalışma yoktur. Benzer şekilde, hem Gegenbauer dalgacık Galerkin yöntemini hem de Gegenbauer dalgacık sıralama yöntemini kullanarak kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerini de ele alan çalışmaya rastlanmamıştır. Bu tezde, bir boyutlu ısı denklemi, KBK ve KG denklemleri gibi kısmi diferansiyel denklemler ve zaman-kesirli ikili Burgers denklemi model problemler olarak ele alınmıştır. Bu problemler için Gegenbauer dalgacıklarına dayalı nümerik yöntem ile elde edilen sonuçlar, nümerik yöntemin geçerliliğini test etmek için tam çözümlerle ve literatürde mevcut olan başka yöntemlerle elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldığında iyi sonuçlar elde edildiği görülmüştür.

Sonuç olarak bu çalışma, literatürde çok önemli yere sahip olan problemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için nümerik yöntemlerle ilgili literatürü zenginleştirmektedir.

- [1] M. Mehra, "Wavelets and differential equations-a short review," in *AIP Conference Proceedings*, AIP, vol. 1146, 2009, pp. 241–252.
- [2] Ü Lepik and H Hein, "Application of the haar wavelet method for solution the problems of mathematical calculus," *Waves, Wavelets and Fractals*, vol. 1, no. 1, 2015.
- [3] C. Chen and C. Hsiao, "Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems," *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, vol. 144, no. 1, pp. 87–94, 1997.
- [4] H. Srivastava, F. Shah, and R. Abass, "An application of the gegenbauer wavelet method for the numerical solution of the fractional bagley-torvik equation," *Russian Journal of Mathematical Physics*, vol. 26, no. 1, pp. 77–93, 2019.
- [5] M. Rehman and U. Saeed, "Gegenbauer wavelets operational matrix method for fractional differential equations," *J. Korean Math. Soc.*, vol. 52, no. 5, pp. 1069–1096, 2015.
- [6] M. Usman, M. Hamid, R. U. Haq, and W. Wang, "An efficient algorithm based on gegenbauer wavelets for the solutions of variable-order fractional differential equations," *The European Physical Journal Plus*, vol. 133, no. 8, p. 327, 2018.
- [7] M. Asad Iqbal, M. Shakeel, S. T. Mohyud-Din, and M. Rafiq, "Modified wavelets-based algorithm for nonlinear delay differential equations of fractional order," *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 9, no. 4, p. 1 687 814 017 696 223, 2017.
- [8] I. Celik, "Generalization of gegenbauer wavelet collocation method to the generalized kuramoto–sivashinsky equation," *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, vol. 4, no. 5, p. 111, 2018.
- [9] W. Abd-Elhameed and Y. Youssri, "New ultraspherical wavelets spectral solutions for fractional riccati differential equations," in *Abstract and Applied Analysis*, Hindawi, vol. 2014, 2014.
- [10] A. Pathak and R. K. Singh, "Solution of a system of generalized abel integral equations using gegenbauer wavelets," *Int. J. Computer Appl.*, vol. 95, pp. 1–4, 2014.
- [11] Y. Youssri, W. Abd-Elhameed, and E. Doha, "Ultraspherical wavelets method for solving lane–emden type equations," *Rom. J. Phys.*, vol. 60, no. 9-10, pp. 1298–1314, 2015.
- [12] G. Szeg, *Orthogonal polynomials*. American Mathematical Soc., 1939, vol. 23.

- [13] C Giordano and A Laforgia, "On the bernstein-type inequalities for ultraspherical polynomials," *Journal of computational and applied mathematics*, vol. 153, no. 1-2, pp. 243–248, 2003.
- [14] M. Heydari, M. R. Hooshmandasl, F. M. Ghaini, and C. Cattani, "Wavelets method for solving fractional optimal control problems," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 286, pp. 139–154, 2016.
- [15] A. Kilicman and Z. A. A. Al Zhour, "Kronecker operational matrices for fractional calculus and some applications," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 187, no. 1, pp. 250–265, 2007.
- [16] M. Razzaghi and S Yousefi, "The legendre wavelets operational matrix of integration," *International Journal of Systems Science*, vol. 32, no. 4, pp. 495–502, 2001.
- [17] L. Yuanlu, "Solving a nonlinear fractional differential equation using chebyshev wavelets," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 15, no. 9, pp. 2284–2292, 2010.
- [18] Y. Wang and Q. Fan, "The second kind chebyshev wavelet method for solving fractional differential equations," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 218, no. 17, pp. 8592–8601, 2012.
- [19] F. Yin, J. Song, X. Cao, and F. Lu, "Couple of the variational iteration method and legendre wavelets for nonlinear partial differential equations," *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2013, 2013.
- [20] J. R. Cannon, *The one-dimensional heat equation*, 23. Cambridge University Press, 1984.
- [21] A. Secer, "Numerical solution and simulation of second-order parabolic pdes with sinc-galerkin method using maple," in *Abstract and Applied Analysis*, Hindawi, vol. 2013, 2013.
- [22] B. Mebrate, "Numerical solution of a one dimensional heat equation with dirichlet boundary conditions," *American Journal of Applied Mathematics*, vol. 3, no. 6, pp. 305–311, 2015.
- [23] A. Gorguis and W. K. B. Chan, "Heat equation and its comparative solutions," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 55, no. 12, pp. 2973–2980, 2008.
- [24] M. Dehghan, "A finite difference method for a non-local boundary value problem for two-dimensional heat equation," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 112, no. 1, pp. 133–142, 2000.
- [25] A. Mohebbi and M. Dehghan, "High-order compact solution of the one-dimensional heat and advection–diffusion equations," *Applied mathematical modelling*, vol. 34, no. 10, pp. 3071–3084, 2010.
- [26] V Dabral, S Kapoor, and S Dhawan, "Numerical simulation of one dimensional heat equation: B-spline finite element method," *Indian Journal of Computer Science and Engineering (IJCSE) Vol*, vol. 2, pp. 222–235, 2011.
- [27] M. Hooshmandasl, M. Heydari, and F. Ghaini, "Numerical solution of the one dimensional heat equation by using chebyshev wavelets method," *Applied and Computational Mathematics*, vol. 1, no. 6, 2012.

- [28] H. Çağlar, M. Özer, and N. Çağlar, “The numerical solution of the one-dimensional heat equation by using third degree b-spline functions,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 38, no. 4, pp. 1197–1201, 2008.
- [29] A.-M. Wazwaz, *Partial differential equations and solitary waves theory*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [30] L. Wei, Y. He, A. Yildirim, and S. Kumar, “Numerical algorithm based on an implicit fully discrete local discontinuous galerkin method for the time-fractional kdv-burgers-kuramoto equation,” *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 93, no. 1, pp. 14–28, 2013.
- [31] T. Kawahara, “Formation of saturated solitons in a nonlinear dispersive system with instability and dissipation,” *Physical Review Letters*, vol. 51, no. 5, p. 381, 1983.
- [32] J. Topper and T. Kawahara, “Approximate equations for long nonlinear waves on a viscous fluid,” *Journal of the Physical society of Japan*, vol. 44, no. 2, pp. 663–666, 1978.
- [33] B. I. Cohen, J. Krommes, W. Tang, and M. Rosenbluth, “Non-linear saturation of the dissipative trapped-ion mode by mode coupling,” *Nuclear fusion*, vol. 16, no. 6, p. 971, 1976.
- [34] F. Huang and S. Liu, “Physical mechanism and model of turbulent cascades in a barotropic atmosphere,” *Advances in Atmospheric Sciences*, vol. 21, no. 1, pp. 34–40, 2004.
- [35] Z. Fu, S. Liu, and S. Liu, “New exact solutions to the kdv–burgers–kuramoto equation,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 23, no. 2, pp. 609–616, 2005.
- [36] Y. Xie, S. Zhu, and K. Su, “Solving the kdv-burgers-kuramoto equation by a combination method,” *International Journal of Modern Physics B*, vol. 23, no. 08, pp. 2101–2106, 2009.
- [37] S. Sayed, O. O. Elhamahmy, and G. Gharib, “Travelling wave solutions for the kdv-burgers-kuramoto and nonlinear schrödinger equations which describe pseudospherical surfaces,” *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2008, 2008.
- [38] M. Lakestani and M. Dehghan, “Numerical solutions of the generalized kuramoto–sivashinsky equation using b-spline functions,” *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, no. 2, pp. 605–617, 2012.
- [39] H. Lai and C. Ma, “Lattice boltzmann method for the generalized kuramoto–sivashinsky equation,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 388, no. 8, pp. 1405–1412, 2009.
- [40] A. Gupta and S. S. Ray, “Traveling wave solution of fractional kdv-burger-kuramoto equation describing nonlinear physical phenomena,” *AIP Advances*, vol. 4, no. 9, p. 097120, 2014.
- [41] M. Dehghan, A. Mohebbi, and Z. Asgari, “Fourth-order compact solution of the nonlinear klein-gordon equation,” *Numerical Algorithms*, vol. 52, no. 4, p. 523, 2009.

- [42] A.-M. Wazwaz, "The modified decomposition method for analytic treatment of differential equations," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 173, no. 1, pp. 165–176, 2006.
- [43] D. Duncan, "Symplectic finite difference approximations of the nonlinear klein–gordon equation," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 34, no. 5, pp. 1742–1760, 1997.
- [44] S. Abbasbandy, "Numerical solution of non-linear klein–gordon equations by variational iteration method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 70, no. 7, pp. 876–881, 2007.
- [45] E. Yusufoglu, "The variational iteration method for studying the klein–gordon equation," *Applied Mathematics Letters*, vol. 21, no. 7, pp. 669–674, 2008.
- [46] Q. Wang and D. Cheng, "Numerical solution of damped nonlinear klein–gordon equations using variational method and finite element approach," *Applied mathematics and computation*, vol. 162, no. 1, pp. 381–401, 2005.
- [47] J. Rashidinia, M. Ghasemi, and R. Jalilian, "Numerical solution of the nonlinear klein–gordon equation," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 233, no. 8, pp. 1866–1878, 2010.
- [48] H. Han and Z. Zhang, "An analysis of the finite-difference method for one-dimensional klein–gordon equation on unbounded domain," *Applied Numerical Mathematics*, vol. 59, no. 7, pp. 1568–1583, 2009.
- [49] D. Kaya and S. M. El-Sayed, "A numerical solution of the klein–gordon equation and convergence of the decomposition method," *Applied mathematics and computation*, vol. 156, no. 2, pp. 341–353, 2004.
- [50] A. Ebaid, "Exact solutions for the generalized klein–gordon equation via a transformation and exp-function method and comparison with adomian's method," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 223, no. 1, pp. 278–290, 2009.
- [51] T.-m. Wang and J.-m. Zhu, "New explicit solutions of the klein–gordon equation using the variational iteration method combined with the exp-function method," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 58, no. 11-12, pp. 2444–2448, 2009.
- [52] Z. Odibat and S. Momani, "A reliable treatment of homotopy perturbation method for klein–gordon equations," *Physics Letters A*, vol. 365, no. 5-6, pp. 351–357, 2007.
- [53] A.-M. Wazwaz, "Compactons, solitons and periodic solutions for variants of the kdv and the kp equations," *Applied mathematics and computation*, vol. 161, no. 2, pp. 561–575, 2005.
- [54] S. Liu, Z. Fu, and S. Liu, "Periodic solutions for a class of coupled nonlinear partial differential equations," *Physics Letters A*, vol. 336, no. 2-3, pp. 175–179, 2005.
- [55] M. Song, Z. Liu, E. Zerrad, and A. Biswas, "Singular solitons and bifurcation analysis of quadratic nonlinear klein-gordon equation," *Applied Mathematics & Information Sciences*, vol. 7, no. 4, p. 1333, 2013.

- [56] R. Sassaman, M. Edwards, F. Majid, and A. Biswas, "1-soliton solution of the coupled nonlinear klein-gordon equations," *Studies in Mathematical Sciences*, vol. 1, no. 1, pp. 30–37, 2010.
- [57] R. Sassaman and A. Biswas, "1-soliton solution of the perturbed klein-gordon equation," 2011.
- [58] R. Sassaman and A. Biswas, "Soliton solution of the generalized klein-gordon equation by semi-inverse variational principle.," *Mathematics in Engineering, Science & Aerospace (MESA)*, vol. 2, no. 1, 2011.
- [59] C. M. Khalique and A. Biswas, "Analysis of non-linear klein-gordon equations using lie symmetry," *Applied Mathematics Letters*, vol. 23, no. 11, pp. 1397–1400, 2010.
- [60] A. Biswas, C. M. Khalique, and A. R. Adem, "Traveling wave solutions of the nonlinear dispersive klein-gordon equations," *Journal of King Saud University-Science*, vol. 24, no. 4, pp. 339–342, 2012.
- [61] M. Dehghan and A. Shokri, "Numerical solution of the nonlinear klein-gordon equation using radial basis functions," *Journal of computational and Applied mathematics*, vol. 230, no. 2, pp. 400–410, 2009.
- [62] Z. Odibat and S. Momani, "The variational iteration method: An efficient scheme for handling fractional partial differential equations in fluid mechanics," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 58, no. 11-12, pp. 2199–2208, 2009.
- [63] N. Raza, A. R. Butt, and A. Javid, "Approximate solution of nonlinear klein-gordon equation using sobolev gradients," *Journal of Function Spaces*, vol. 2016, 2016.
- [64] A. Atangana and E. Alabaraoye, "Solving a system of fractional partial differential equations arising in the model of hiv infection of cd4+ cells and attractor one-dimensional keller-segel equations," *Advances in Difference Equations*, vol. 2013, no. 1, p. 94, 2013.
- [65] H. Azizi and G. B. Loghmani, "A numerical method for space fractional diffusion equations using a semi-discrete scheme and chebyshev collocation method," *J Math Comput Sci*, vol. 8, no. 03, pp. 226–235, 2014.
- [66] L. Debnath *et al.*, "Recent applications of fractional calculus to science and engineering," *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 2003, no. 54, pp. 3413–3442, 2003.
- [67] I. Podlubny, *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier, 1998, vol. 198.
- [68] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *et al.*, *Fractional integrals and derivatives*. Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon Yverdon-les-Bains, Switzerland, 1993, vol. 1993.
- [69] J. Nee and J. Duan, "Limit set of trajectories of the coupled viscous burgers' equations," *Applied mathematics letters*, vol. 11, no. 1, pp. 57–61, 1998.
- [70] S. E. Esipov, "Coupled burgers equations: A model of polydispersive sedimentation," *Physical Review E*, vol. 52, no. 4, p. 3711, 1995.

- [71] M. Dehghan, A. Hamidi, and M. Shakourifar, "The solution of coupled burgers' equations using adomian–pade technique," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 189, no. 2, pp. 1034–1047, 2007.
- [72] A. Khater, R. Temsah, and M. Hassan, "A chebyshev spectral collocation method for solving burgers'-type equations," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 222, no. 2, pp. 333–350, 2008.
- [73] A. R. Ghotbi, A. Avaei, A. Barari, and M. Mohammadzade, "Assessment of hes homotopy perturbation method in burgers and coupled burgersequations," *Journal of Applied Sciences*, vol. 8, pp. 322–327, 2008.
- [74] R. Abazari and A. Borhanifar, "Numerical study of the solution of the burgers and coupled burgers equations by a differential transformation method," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 59, no. 8, pp. 2711–2722, 2010.
- [75] R. Mittal and G. Arora, "Numerical solution of the coupled viscous burgers' equation," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 16, no. 3, pp. 1304–1313, 2011.
- [76] M. Jima, A. Shiferaw, and A. Tsegaye, "Numerical solution of the coupled viscous burgers' equation using differential quadrature method based on fourier expansion basis," *Applied Mathematics*, vol. 9, no. 07, p. 821, 2018.
- [77] V. K. Srivastava, M. Tamsir, M. K. Awasthi, and S. Singh, "One-dimensional coupled burgers' equation and its numerical solution by an implicit logarithmic finite-difference method," *Aip Advances*, vol. 4, no. 3, p. 037 119, 2014.
- [78] M. Abdou and A. Soliman, "Variational iteration method for solving burger's and coupled burger's equations," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 181, no. 2, pp. 245–251, 2005.
- [79] A. Soliman, "The modified extended tanh-function method for solving burgers-type equations," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 361, no. 2, pp. 394–404, 2006.
- [80] D. Kaya, "An explicit solution of coupled viscous burgers' equation by the decomposition method," *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 27, no. 11, pp. 675–680, 2001.
- [81] B. Albuohimad and H. Adibi, "The chebyshev collocation solution of the time fractional coupled burgers' equation," *JOURNAL OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE-JMCS*, vol. 17, no. 1, pp. 179–193, 2017.
- [82] B. Albuohimad and H. Adibi, "On a hybrid spectral exponential chebyshev method for time-fractional coupled burgers equations on a semi-infinite domain," *Advances in Difference Equations*, vol. 2017, no. 1, p. 85, 2017.
- [83] N. Alam Khan, A. Ara, and A. Mahmood, "Numerical solutions of time-fractional burgers equations: A comparison between generalized differential transformation technique and perturbation method," *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, vol. 22, no. 2, pp. 175–193, 2012.
- [84] M. Kaplan, A. Bekir, A. Akbulut, and E. Aksoy, "The modified simple equation method for nonlinear fractional differential equations," *Romanian Journal of Physics*, vol. 60, no. 9-10, pp. 1374–1383, 2015.

- [85] J. Zhao, B. Tang, S. Kumar, and Y. Hou, "The extended fractional subequation method for nonlinear fractional differential equations," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2012, 2012.
- [86] Y. Chen and H.-L. An, "Numerical solutions of coupled burgers equations with time-and space-fractional derivatives," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 200, no. 1, pp. 87–95, 2008.
- [87] J. Liu and G. Hou, "Numerical solutions of the space-and time-fractional coupled burgers equations by generalized differential transform method," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 217, no. 16, pp. 7001–7008, 2011.
- [88] J. Singh, D. Kumar, and R. Swroop, "Numerical solution of time-and space-fractional coupled burgers' equations via homotopy algorithm," *Alexandria Engineering Journal*, vol. 55, no. 2, pp. 1753–1763, 2016.



Tezden Üretilmiş Yayınlar

İletişim Bilgileri: ozdemirn511@gmail.com

Makale

1. N. Özdemir , A. Seçer ve M. Bayram, "The Gegenbauer Wavelets-Based Computational Methods for the Coupled System of Burgers' Equations with Time-Fractional Derivative", *Mathematics*, cilt.7, ss.1-17, 2019.
2. A. Seçer ve N. Özdemir , "An effective computational approach based on Gegenbauer wavelets for solving the Kdv- Burgers- Kuramoto Equation with time- fractional derivative", *Advances in Difference Equations*,386,ss. 1-9, 2019.

Konferans Bildirisi

1. N. Özdemir , A. Seçer ve M. Bayram, "Numerical Approaches for solving the Coupled System of Burgers' Equations with Time-Fractional Derivative using Gegenbauer wavelets", International Conference on Computational Methods in Applied Sciences, İstanbul, Türkiye, 12-16 Temmuz 2019, ss.202-203.
2. N. Özdemir ve A. Seçer, "Approximate Solutions of Linear and Nonlinear Klein-Gordon Equations", International Conference on Computational Methods in Applied Sciences, İstanbul, Türkiye, 12-16 Temmuz 2019, ss.201.
3. N. Özdemir , A. Seçer ve M. Bayram, "An Efficient Legendre Wavelet-Galerkin Based Approximation for the One-Dimensional Heat Equation", International Conference on Computational Methods in Applied Sciences, İstanbul, Türkiye, 12-16 Temmuz 2019, ss.205-211.
4. N. Özdemir ve A. Seçer, "Wavelets Galerkin Method for the Kdv- Burgers- Kuramoto Equation", International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, İstanbul, Türkiye, 10-13 Mart 2019, ss.163-163.