T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEMEN HEMEN L-ZAYIF VE HEMEN HEMEN M-ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLERİN SIRA ÖZELLİKLERİ

Barış AKAY

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Prof. Dr. Ömer GÖK

Aralık, 2021

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEMEN HEMEN L-ZAYIF VE HEMEN HEMEN M-ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLERİN SIRA ÖZELLİKLERİ

Barış AKAY tarafından hazırlanan tez çalışması 10.12.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ömer GÖK
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Ömer GÖK, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi ____________________

Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN, Üye
İstanbul Üniversitesi ____________________

Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi ____________________

Doç. Dr. Özgür YILDIRIM , Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi ____________________

Dr. Öğr. Üye. Ezgi ERDOĞAN, Üye
Marmara Üniversitesi ____________________

Danışmanım Prof. Dr. Ömer GÖK sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Hemen Hemen L-zayıf ve Hemen Hemen M-zayıf Kompakt Operatörlerin Sıra Özellikleri başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Barış AKAY

İmza

Aileme ithaf ediyorum.

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim boyunca bana yol gösteren, yardımcı olan ve bu tez çalışması süresince bilgi ve tecrübesinden yararlandığım değerli hocam Prof. Dr. Ömer GÖK'e teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca üzerimde emeği olan tüm hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Barış AKAY

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

A^d	A kümesinin dik tümleyeni
$sol\,(A)$	A kümesinin katı zarfı
$AW_L^r(E,F)$	$AW_L(E,F)_+$ nin lineer olarak gerdiği uzay
$AW_M^r(E,F)$	$AW_M(E,F)_+$ nin lineer olarak gerdiği uzay
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$T : E \to F$	E den F ye T operatörü
$AW_L(E,F)$	E den F ye tüm hemen hemen L-zayıf kompakt operatörlerin uzayı
$AW_M(E,F)$	E den F ye tüm hemen hemen M-zayıf kompakt operatörlerin uzayı
$K\,(E,F)$	E den F ye tüm kompakt operatörlerin uzayı
$W_L(E,F)$	E den F ye tüm L-zayıf kompakt operatörlerin uzayı
$W_M(E,F)$	E den F ye tüm M-zayıf kompakt operatörlerin uzayı
$L\,(E,F)$	E den F ye tüm operatörlerin uzayı
$\mathscr{L}_r\,(E,F)$	E den F ye tüm regüler operatörlerin uzayı
$\mathscr{L}_b\,(E,F)$	E den F ye tüm sıra sınırlı operatörlerin uzayı
$\mathscr{L}\,(E,F)$	E den F ye tüm sürekli operatörlerin uzayı
$\exists$	en az bir tane vardır
E''	E nin ikinci norm duali
$E^{\sim\sim}$	E nin ikinci sıra duali
B_E	E nin kapalı birim yuvarı
E'	E nin norm duali
E_+	E nin pozitif konisi
$E^{\sim}$	E nin sıra duali
$\mathscr{L}_\infty$	esas sınırlı fonksiyonların Lebesgue uzayı

$\forall$	her
$\mathscr{L}_p$	p-integrallenebilir fonksiyonların Lebesgue uzayı
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
ℓ_p	p-toplanabilir dizilerin uzayı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
c_0	sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
ℓ_∞	sınırlı dizilerin uzayı
$\|T\|$	T nin operatör normu
$\|T\|_r$	T nin regüler normu
T'	T operatörünün eşleniği
$\lvert T\rvert$	T operatörünün modülü
$W_L^r(E,F)$	$W_L(E,F)_+$ nin lineer olarak gerdiği uzay
$W_M^r(E,F)$	$W_M(E,F)_+$ nin lineer olarak gerdiği uzay
$x \wedge y$	x ile y nin infimumu
$x \vee y$	x ile y nin supremumu
$x < y$	x kesin küçüktür y
$x \leq y$	x küçük eşittir y
$x_n \to x$	(x_n) dizisi x elemanına normda yakınsar
$x_n \xrightarrow{w} x$	(x_n) dizisi x elemanına zayıf yakınsar
$C(X)$	X üzerinde tanımlı tüm reel değerli sürekli fonksiyonları uzayı
$\lvert x\rvert$	x vektörünün modülü veya mutlak değeri
x^-	x vektörünün negatif kısmı
$\|x\|$	x vektörünün normu
x^+	x vektörünün pozitif kısmı
B_x	x vektörü tarafından üretilen band
I_x	x vektörü tarafından üretilen ideal
$x \perp y$	x vektörü y vektörüne diktir
c	yakınsak dizilerin uzayı

KISALTMA LİSTESİ

AM-uzayı	soyut M-uzayı
AL-uzayı	soyut L-uzayı
esssup	esas supremum
inf	infimum
sup	supremum

ÖZET

Hemen Hemen L-zayıf ve Hemen Hemen M-zayıf Kompakt Operatörlerin Sıra Özellikleri

Barış AKAY

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Ömer GÖK

L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörler ilk olarak Meyer-Nieberg [1] tarafından tanımlanmıştır. Bu operatörlerin modülünün varlığı [2, 3] çalışmalarında incelenmiştir. Bayram ve Wickstead [4], pozitif L-zayıf ve pozitif M-zayıf kompakt operatörlerin lineer olarak gerdiği uzayların Banach latis özelliklerini çalışmışlardır ve bu uzaylarla ilgili güçlü sonuçlar elde etmişlerdir. Burada yazarlar, L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörlerin baskınlık özelliğini kullanmışlardır. Hemen hemen L-zayıf ve hemen hemen M-zayıf kompakt operatörler ise Bouras, Lhaimer ve Moussa [5] tarafından tanımlanmıştır. X bir Banach uzayı, F bir Banach latis ve $T : X \to F$ sınırlı bir operatör olsun. Her $W \subseteq X$ relatif zayıf kompakt kümesi için $T(W)$ kümesi L-zayıf kompakt ise, T ye hemen hemen L-zayıf kompakt operatör denir. E bir Banach latis, Y bir Banach uzayı ve $T : E \to Y$ sınırlı bir operatör olsun. Her $(x_n) \subseteq B_E$ dik dizisi ve her $(f_n) \subseteq Y'$ zayıf yakınsak dizisi için $f_n(T(x_n)) \to 0$ ise, T ye hemen hemen M-zayıf kompakt operatör adı verilir.

Bu tez çalışmasında, öncelikle hemen hemen L-zayıf ve hemen hemen M-zayıf kompakt operatörlerin baskınlık özelliğini ve bazı yaklaşım özelliklerini inceledik. Baskınlık özelliğini kullanarak, pozitif hemen hemen L-zayıf ve pozitif hemen hemen M-zayıf kompakt operatörlerin lineer olarak gerdiği uzayın Banach latis olma ve sıra sürekli norma sahip olma durumlarını araştırdık. Ayrıca, regüler hemen hemen L-zayıf ve regüler hemen hemen M-zayıf kompakt operatörlerin Banach latis oluşturmasını sağlayan bazı ek koşullar verdik.

Anahtar Kelimeler: Hemen hemen L-zayıf kompakt operatör, hemen hemen M-zayıf

kompakt operatör, Banach latis, baskınlık özelliği, sıra sürekli norm

ABSTRACT

Order Properties of Almost L-weakly and Almost M-weakly Compact Operators

Barış AKAY

Department of Mathematics
Doctor of Philosophy Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Ömer GÖK

L-weakly and M-weakly compact operators were first introduced by Meyer-Nieberg [1]. The existence of the modulus of these operators was examined in [2, 3]. Bayram and Wickstead [4] studied Banach lattice properties of the linear span of positive L-weakly and positive M-weakly compact operators and obtained strong results. Here, the authors made use of the domination property of L-weakly and M-weakly compact operators. Almost L-weakly and almost M-weakly compact operators were defined by Bouras, Lhaimer and Moussa [5]. Let X be a Banach space and F be a Banach lattice. A bounded operator $T : X \to F$ is called almost L-weakly compact if for any relatively weakly compact set $W \subseteq X$, the set $T(W)$ is an L-weakly compact subset of F. Let E be a Banach lattice and Y be a Banach space. A bounded operator $T : E \to Y$ is called almost M-weakly compact if for each disjoint sequence (x_n) in B_E and for each weakly convergent sequence (f_n) in Y', we have $f_n(Tx_n) \to 0$.

In this thesis, we first study the domination property and some approximation properties of almost L-weakly and almost M-weakly compact operators. By using the domination property, we investigate when the linear span of positive L-weakly and positive M-weakly compact operators forms a Banach lattice and has an order continuous norm. We also give some conditions under which regular almost L-weakly and regular almost M-weakly compact operators form a Banach lattice.

Keywords: Almost L-weakly compact operator, almost M-weakly compact operator, Banach lattice, domination property, order continuous norm

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Banach latisleri arasında tanımlı kompakt ve kompakt tipi operatörler (örneğin, zayıf kompakt, Dunford-Pettis, AM-kompakt, yarı-kompakt operatörler) Banach latis teorisinde önemli bir yer tutar. Bu kapsamda, ilk olarak Krengel [6, 7] iki Banach latis arasında tanımlı bir kompakt operatörün hangi koşullar altında kompakt bir modüle sahip olduğunu incelemiştir. Krengel [7], iki Banach latis arasında tanımlı bir kompakt operatörün modülünün olmayabileceğini ve modülü olsa dahi bu modülün kompakt olmak zorunda olmadığını göstermiştir. Bunun yanında [6] çalışmasında, bazı ek koşullar altında kompakt operatörlerin kompakt bir modülü olduğunu ispatlamıştır. Buna bağlı olarak, bu ek koşullar altında kompakt operatörler bir Riesz uzayı, ve özel olarak regüler norm ile bir Banach latis oluşturur [8, Teorem 5.7, Teorem 5.9] . Benzer çalışmalar daha sonra Dunford-Pettis, AM-kompakt ve zayıf kompakt operatörler için de yapılmıştır [9–13].

Banach latisleri arasında tanımlı operatörler ile ilgili bir diğer önemli problem baskınlık (domination) problemidir. Bu problem şu şekilde ifade edilir: "E ve F Banach latis ve $S, T : E \to F$ pozitif operatörler olmak üzere, $0 \le S \le T$ şartı şağlansın. Eğer T operatörü bir (p) özelliğine sahip ise, S operatörü de (p) özelliğine sahip midir?" Eğer yanıt olumlu ise, (p) özelliğini sağlayan operatörler baskınlık özelliğini (domination property) sağlar, denir. Genel olarak, kompakt operatörlerin baskınlık özelliğini sağlamadığı bilinmektedir [14]. Diğer bir deyişle, $0 \le S \le T$ şartını sağlayan pozitif $S, T : E \to F$ operatörleri için, T kompakt ise, S kompakt olmak zorunda değildir. Dodds ve Fremlin [9], kompakt operatörlerde baskınlık özelliğinin sağlanması için bir yeter koşul vermişlerdir. Daha sonra Wickstead [15], gerek ve yeter koşul verip kompakt operatörler için problemin karakterizasyonunu elde etmiştir. Benzer şekilde, zayıf kompakt, Dunford-Pettis ve AM-kompakt operatör sınıfları da baskınlık özelliğini sağlamaz [8, 16, 17] . Bu operatör sınıfları için baskınlık özelliğinin hangi koşullar altında sağlandığı literatürde çalışılmıştır [10, 11, 15, 18–21]. Yarı-kompakt operatörler ise baskınlık özelliğini sağlayan operatörlere bir örnektir [8].

L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörler ilk olarak Meyer-Nieberg [1] tarafından, zayıf kompakt ve kompakt operatörleri çalışırken karşılaşılan bazı zorluklar sebebiyle tanımlanmıştır. Bu operatör sınıfları zayıf kompakt operatörlerin bir alt sınıfıdır ve baskınlık özelliğini sağlarlar [8, 16]. Ayrıca L-zayıf (M-zayıf) kompakt operatörlerin eşleniği M-zayıf (L-zayıf) kompakttır ve bunun tersi de doğrudur [8, 16]. Bu operatörlerin modülünün varlığı [2, 3] makalelerinde incelenmiştir. L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörlerin latis özellikleriyle ilgili diğer bir çalışma Bayram ve Wickstead'in [4] makalesidir. Burada yazarlar, sırasıyla pozitif L-zayıf ve pozitif M-zayıf kompakt operatörlerin gerdiği $W_L^r(E,F)$ ve $W_M^r(E,F)$ uzaylarını çalışmışlardır. Genel olarak, $W_L^r(E,F) \subseteq W_L(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ ve $W_M^r(E,F) \subseteq W_M(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ olduğu görülür [4, s.1]. Söz konusu çalışmada [4], her E ve F Banach latisi için, $W_L^r(E,F)$ nin Dedekind tam bir Banach latis ve F Dedekind tam ise, $W_M^r(E,F)$ nin Dedekind tam bir Banach latis olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu uzayların hangi koşullar altında sıra sürekli norma sahip olduğu incelenmiştir. Bu uzaylar için elde edilen sonuçlarda, L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörlerin baskınlık özelliğini sağlaması kritik bir rol oynar.

Hemen hemen L-zayıf ve hemen hemen M-zayıf kompakt operatörler Bouras, Lhaimer ve Moussa [5] tarafından, sırasıyla L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörlerin genellemeleri olarak tanımlanmıştır. Bu operatörlerin bazı özellikleri ve diğer bazı operatörlerle olan ilişkileri [5, 22, 23] makalelerinde incelenmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmada amacımız, hemen hemen L-zayıf ve hemen hemen M-zayıf kompakt operatörlerin latis özelliklerini araştırmaktır. Öncelikle, her iki operatör sınıfının da baskınlık özelliğini sağladığını göstereceğiz. Bu özelliği kullanarak, $AW_L^r(E,F)$ ve $AW_M^r(E,F)$ uzaylarının Banach latis olma ve sıra sürekli norma sahip olma özelliklerini inceleyeceğiz. Daha sonra da, regüler hemen hemen L-zayıf kompakt ve regüler hemen hemen M-zayıf kompakt operatörlerin hangi ek koşullar altında Banach latis oluşturduklarını ele alacağız.

1.3 Hipotez

E ve F Banach latis ve $S, T : E \to F$ pozitif operatörler olsun. Eğer $0 \leq S \leq T$ ve T operatörü hemen hemen L-zayıf (M-zayıf) kompakt ise, S operatörü de hemen hemen L-zayıf (M-zayıf) kompakttır.

Her E ve F Banach latisi için, $AW_L^r(E,F)$ uzayı regüler norm ile Dedekind tam bir Banach latis olur.

Her E ve F Banach latisi için, F Dedekind tam ise, $AW_M^r(E,F)$ uzayı regüler norm ile Dedekind tam bir Banach latis olur.

E ve F Banach latis ve $F^a \neq \{0\}$ olsun. $AW_L^r(E,F)$ nin regüler normunun sıra sürekli olması için gerek ve yeter şart E' nin normunun sıra sürekli olmasıdır.

Bazı ek koşullar altında, regüler hemen hemen L-zayıf ve regüler hemen hemen M-zayıf kompakt operatörlerin uzayı Banach latistir.

2
ÖN BİLGİLER

2.1 Riesz Uzayları

Bu kısımda Riesz uzayları ve bu uzaylar üzerinde tanımlanan operatörler ile ilgili temel bilgiler verilecektir. Referans olarak [8, 16, 24–26] kaynakları kullanılacaktır.

Tanım 2.1. E bir reel vektör uzayı olsun. E üzerinde

(i) Eğer $x \leq y$ ise, her $z \in E$ için $x + z \leq y + z$ dir.

(ii) Eğer $x \leq y$ ise, her $\alpha \geq 0$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ için $\alpha x \leq \alpha y$ dir.

koşullarını sağlayan bir $(\leq)$ sıralama bağıntısı varsa, E ye bir sıralı vektör uzayı denir.

Tanım 2.2. E bir sıralı vektör uzayı olmak üzere, $x \geq 0$ şartını sağlayan her $x \in E$ elemanına E nin bir pozitif elemanı denir. E deki tüm pozitif elemanlardan oluşan $E_+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ kümesine E nin pozitif konisi denir.

Şimdi Riesz uzayı (vektör latis) tanımını verelim.

Tanım 2.3. Bir E sıralı vektör uzayında, her $x, y \in E$ için x ve y nin supremumu (veya infimumu) mevcut ise, E ye bir Riesz uzayı denir.

Bir E Riesz uzayında, herhangi iki $x, y \in E$ elemanının supremumu ve infimumu sırasıyla aşağıdaki notasyonlar ile gösterilir.

$$x \vee y = sup\,\{x, y\} \qquad x \wedge y = inf\,\{x, y\} \tag{2.1}$$

Tanım 2.4. E bir Riesz uzayı olsun. Bir $x \in E$ vektörünün pozitif kısmı, negatif kısmı ve modülü sırasıyla

$$x^+ = x \vee 0, \quad x^- = (-x) \vee 0, \quad |x| = x \vee (-x), \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır.

Bir sıralı vektör uzayının vektör latis olduğunu göstermek için aşağıdaki önerme oldukça kullanışlıdır.

Önerme 2.1. *[25, Sonuç 2.6] E bir sıralı vektör uzayı olmak üzere, aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) *E bir vektör latistir.*

(ii) *Her $x \in E$ için $x^+ \in E$ dir.*

(iii) *Her $x \in E$ için $|x| \in E$ dir.*

Önerme 2.2. *E bir Riesz uzayı olsun. Her $x, y, z \in E$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

1) $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$, $x^+ \wedge x^- = 0$.

2) $x + y = x \vee y + x \wedge y$.

3) $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$.

4) $y = y \wedge x + (y - x)^+$.

5) $|x + y| \leq |x| + |y|$, $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

6) $|x \vee y - z \vee y| \leq |x - z|$, $|x \wedge y - z \wedge y| \leq |x - z|$.

Analizde kullanılan birçok dizi ve fonksiyon uzayı, üzerinde tanımlanan alışılmış sıralama ile bir Riesz uzayı oluşturur. Şimdi bazı Riesz uzayı örnekleri verelim.

Örnek 2.1. *a)* *$C(\Omega)$, bir Ω topolojik uzayı üzerinde tanımlanan tüm reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı,*

b) *$\ell_\infty(\Omega)$, bir Ω kümesi üzerinde tanımlanan tüm reel değerli sınırlı fonksiyonların uzayı,*

c) *ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ şartını sağlayan tüm (x_n) dizilerinin uzayı,*

d) *$\mathscr{L}_p(\mu)$, bir X kümesi üzerinde tanımlı ve $\int_X |f|^p \, d\mu < \infty$ şartını sağlayan tüm reel değerli μ-ölçülebilir fonksiyonların uzayı,*

e) *$\mathscr{L}_\infty(\mu)$, bir X kümesi üzerinde tanımlı ve $\operatorname{esssup} |f| < \infty$ şartını sağlayan tüm reel değerli μ-ölçülebilir fonksiyonların uzayı.*

Bir Riesz uzayında sıra yapısı kullanılarak aralıklar tanımlanabilir.

Tanım 2.5. E bir Riesz uzayı ve $x, y \in E$ $(x \leq y)$ olmak üzere, $[x, y]$ sıra aralığı $[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.6. E bir Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun. Bir $x \in E$ elemanı, her $y \in A$ için $y \leq x$ koşulunu sağlıyor ise, x elemanına A kümesinin bir üst sınırı ve bu durumda A kümesine üstten sınırlı bir küme denir. Alt sınır ve alttan sınırlı kümenin tanımları benzerdir. Hem alttan hem de üstten sınırlı bir kümeye sıra sınırlı küme denir.

Açıkça, bir kümenin sıra sınırlı olması için gerek ve yeter şart kümenin bir sıra aralığı tarafından kapsanmasıdır.

Tanım 2.7. Bir Riesz uzayında (x_α) ağı alalım. Eğer $\alpha \preceq \beta$ iken $x_\alpha \leq x_\beta$ oluyorsa, (x_α) ağı artandır denir ve $x_\alpha \uparrow$ yazılır. Eğer $sup\,(x_\alpha) = x$ ve $x_\alpha \uparrow$ ise, bu durum $x_\alpha \uparrow x$ ile gösterilir. Azalan ağ, $x_\alpha \downarrow$ ve $x_\alpha \downarrow x$ ifadelerinin tanımları benzerdir.

Şimdi, reel sayılar kümesinin sağladığı ancak her Riesz uzayında sağlanmayan Arşimet özelliği ve Dedekind tam olma tanımlarını verelim.

Tanım 2.8. E bir Riesz uzayı ve $x, y \in E_+$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq nx \leq y$ iken $x = 0$ oluyorsa, E ye Arşimet özelliğine sahiptir, denir. E uzayının Arşimet özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart her $x \in E_+$ için $\frac{1}{n}x \downarrow 0$ olmasıdır.

Örnek 2.1 de verilen uzaylar ve tanımını ileride vereceğimiz normlu Riesz uzayları Arşimet özelliğini sağlar [16, s. 7].

Tanım 2.9. Bir Riesz uzayında boştan farklı ve üstten sınırlı her kümenin supremumu varsa, bu uzaya Dedekind tam denir. Bir E Riesz uzayının Dedekind tam olması için gerek ve yeter şart E_+ üzerinde artan ve üstten sınırlı her ağın supremuma sahip olmasıdır. Benzer şekilde, alttan sınırlı küme ve azalan ağ kavramı kullanılarak denk tanımlar verilebilir.

Örnek 2.2. *$\mathscr{L}_p\,[0,1]$ $(1 \leq p < \infty)$, c_0 ve ℓ_∞ Dedekind tam Riesz uzaylarıdır [16, s. 8]. $C\,[0,1]$ ise Dedekind tam değildir [26, Örnek 1.5].*

Önerme 2.3. *Her Dedekind tam Riesz uzayı Arşimet özelliğini sağlar.*

Yukarıdaki önermenin tersi doğru değildir. Örnegin, $C\,[0,1]$ uzayı Arşimet özelliğini sağlar, ancak Dedekind tam değildir.

Riesz uzaylarında latis yapısı kullanılarak farklı türde alt uzaylar tanımlamak mümkündür. Bunun için öncelikle katı (solid) kümenin tanımını verelim.

Tanım 2.10. E bir Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun. Her $x, y \in E$ için, $|x| \leq |y|$ ve $y \in A$ iken $x \in A$ oluyorsa, A ya katı (solid) küme denir. Bir $A \subseteq E$ kümesini kapsayan en küçük katı kümeye A nın katı zarfı (solid hull) denir ve $sol(A)$ ile gösterilir. Bir kümenin katı zarfı,

$$sol(A) = \{x \in E : \exists a \in A,\ |x| \leq |a|\} \tag{2.3}$$

ile verilir.

Tanım 2.11. E bir Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ bir alt vektör uzayı olsun.

a) Her $x, y \in A$ için $x \vee y \in A$ (veya $x \wedge y \in A$) oluyorsa, A ya E nin bir Riesz alt uzayı veya alt vektör latisi denir.

b) A bir katı (solid) alt vektör uzayı ise, A ya E nin bir sıra ideali (veya ideali) denir.

c) A bir ideal olmak üzere, her $B \subseteq A$ için, $supB = x \in E$ iken $x \in A$ oluyorsa, A ya E nin bir bandı denir. Denk olarak, A idealinin bir band olması için gerek ve yeter şart $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ koşulunu sağlayan her $(x_\alpha) \subseteq A$ ağı için $x \in A$ olmasıdır.

Tanım 2.12. E bir Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun.

a) A kümesini kapsayan en küçük ideale, A nın ürettiği ideal denir ve $I(A)$ ile gösterilir. Özel olarak, bir $x \in E$ vektörü tarafından üretilen ideale esas ideal denir ve I_x ile gösterilir. Bu ideal,

$$I_x = \{y \in E : \exists \lambda > 0,\ |y| \leq \lambda |x|\} \tag{2.4}$$

ile verilir. Eğer bir $x \in E$ için $I_x = E$ sağlanıyorsa, x elemanına güçlü sıra birim (strong order unit) denir.

b) A kümesini kapsayan en küçük banda, A nın ürettiği band denir ve $B(A)$ ile gösterilir. Özel olarak, bir $x \in E$ vektörü tarafından üretilen banda esas band denir ve B_x ile gösterilir. Bu band,

$$B_x = \{y \in E : |y| \wedge n|x| \uparrow |y|\} \tag{2.5}$$

ile verilir. Eğer bir $x \in E$ için $B_x = E$ sağlanıyorsa, x elemanına zayıf sıra birim (weak order unit) denir.

Riesz uzaylarında diklik aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.13. E bir Riesz uzayı ve $x, y \in E$ olsun. Eğer $|x| \wedge |y| = 0$ ise, x ve y elemanları diktir (disjoint veya orthogonal) denir ve bu durum $x \perp y$ ile gösterilir.

Tanım 2.14. Bir Riesz uzayında tanımlı (x_n) dizisi, her $n, m \in \mathbb{N}$ $(n \neq m)$ için $|x_n| \wedge |x_m| = 0$ koşulunu sağlıyorsa, bu diziye dik dizi denir.

Diklik ile ilgili aşağıdaki özellikler sağlanır.

Önerme 2.4. *E bir Riesz uzayı olsun. Her $x, y, z \in E$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

1) $x \perp y$ *ve* $|z| \leq |x|$ *ise,* $z \perp y$ *dir.*

2) $x \perp y$ *ve* $x \perp z$ *ise, her* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *için* $x \perp (\alpha y + \beta z)$ *dir.*

3) $x \perp y \Leftrightarrow |x+y| = |x-y|$.

4) $x \perp y$ *ise,*

$$|x+y| = |x-y| = |x| + |y| = ||x| - |y|| = |x| \vee |y| \tag{2.6}$$

eşitlikleri sağlanır.

Tanım 2.15. E bir Riesz uzayı olsun. Boştan farklı bir $A \subseteq E$ kümesinin dik tümleyeni (disjoint complement),

$$A^d = \{x \in E : \forall y \in A,\ x \perp y\} \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır. A^d kümesinin dik tümleyeni A^{dd} ile gösterilir.

Boştan farklı bir $A \subseteq E$ kümesi için, $A^d \cap A^{dd} = \{0\}$ ve $A \subseteq A^{dd}$ sağlanır.

Önerme 2.5. *Bir Riesz uzayında, boştan farklı her alt kümenin dik tümleyeni bir banddır.*

Önerme 2.6. *Bir Arşimet Riesz uzayında, her B bandı için $B = B^{dd}$ sağlanır.*

Ayrık (discrete) vektör ve ayrık uzay aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.16. E bir Riesz uzayı olmak üzere, E de bir $x > 0$ elemanı tarafından üretilen ideal, x tarafından üretilen vektör uzayına eşit ise, yani $I_x = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\}$ oluyorsa, x elemanına E nin bir ayrık elemanı denir. Eğer E nin tüm ayrık elemanları tarafından üretilen band E ye eşit ise, E ye bir ayrık uzay denir.

Örnek 2.3. *c_0, c ve ℓ_p $(1 \leq p \leq \infty)$ ayrık Riesz uzaylarıdır [16, s. 113].*

Tanım 2.17. E ve F vektör uzayı olsun. Bir $T : E \to F$ lineer dönüşümüne, E den F ye tanımlı bir operatör denir.

Şimdi Riesz uzaylarında tanımlı operatörlerden bahsedelim. E ve F Riesz uzayı olsun. E den F ye tanımlı tüm operatörlerin uzayı $L(E, F)$ ile gösterilir. Aşağıda sırasıyla Riesz uzaylarında tanımlı pozitif, regüler ve sıra sınırlı operatörlerin tanımlarını verelim.

Tanım 2.18. E ve F Riesz uzayı, $T : E \to F$ bir operatör olsun.

(i) Her $x \geq 0$ için $Tx \geq 0$ sağlanıyorsa, T ye pozitif operatör denir. Bu ise $T(E_+) \subseteq F_+$ olmasına denktir. Bir T operatörünün pozitif olması $T \geq 0$ ile gösterilir.

(ii) T operatörü iki pozitif operatörün farkı olarak yazılabiliyorsa, T ye regüler operatör denir.

(iii) E nin sıra sınırlı alt kümelerinin T altındaki görüntüsü F de sıra sınırlı ise, T ye sıra sınırlı operatör denir.

Her pozitif operatör regüler ve her regüler operatör sıra sınırlıdır [16, s. 24]. Ancak her sıra sınırlı operatör regüler olmak zorunda değildir [8, Örnek 1.16].

$L(E,F)$ uzayı, $S \leq T \Leftrightarrow T - S \geq 0$ ile tanımlanan sıralama ile bir sıralı vektör uzayıdır. Bu sıralama bağıntısı kullanılarak bir operatörün modülü tanımlanır.

Tanım 2.19. $T : E \to F$, iki Riesz uzayı arasında tanımlı bir operatör olsun. Eğer $L(E,F)$ üzerinde $\{-T, T\}$ kümesinin supremumu, yani $|T| = T \vee (-T)$ varsa, T operatörünün modülü vardır denir.

Önerme 2.7. *Eğer bir $T : E \to F$ operatörünün modülü varsa, her $x \in E$ için $|Tx| \leq |T|(|x|)$ sağlanır.*

E den F ye tüm regüler operatörlerin sınıfını $\mathscr{L}_r(E,F)$ ve tüm sıra sınırlı operatörlerin sınıfını $\mathscr{L}_b(E,F)$ ile göstereceğiz. $L(E,F)$ üzerindeki sıralama ile, $\mathscr{L}_r(E,F)$ ve $\mathscr{L}_b(E,F)$ sıralı vektör uzaylarıdır. Ayrıca yukarıdaki gözlemden,

$$\mathscr{L}_r(E,F) \subseteq \mathscr{L}_b(E,F) \subseteq L(E,F) \tag{2.8}$$

olduğu görülür.

E ve F Riesz uzayı olmak üzere, genel olarak $L(E,F)$, $\mathscr{L}_b(E,F)$ ve $\mathscr{L}_r(E,F)$ sıralı vektör uzayları Riesz uzayı olmak zorunda değildir. Ancak F Dedekind tam ise, aşağıdaki teorem sağlanır.

Teorem 2.1 (Riesz-Kantorovich). *E ve F Riesz uzayı ve F Dedekind tam olsun. Bu durumda, $\mathscr{L}_r(E,F)$ bir Dedekind tam Riesz uzayıdır ve $\mathscr{L}_r(E,F) = \mathscr{L}_b(E,F)$ olur. Ayrıca, her $T \in \mathscr{L}_r(E,F)$ ve her $x \in E_+$ için*

1) $T^+(x) = sup\{Ty : 0 \leq y \leq x\}$

2) $T^{-}(x) = -inf\{Ty : 0 \leq y \leq x\}$

3) $|T|(x) = sup\{|Ty| : |y| \leq x\}$

eşitlikleri sağlanır.

Tanım 2.20. E bir Riesz uzayı ve $f : E \to \mathbb{R}$ bir lineer fonksiyonel olsun. Her $x \geq 0$ için $f(x) \geq 0$ oluyorsa, f ye pozitif fonksiyonel denir. Ayrıca, E nin sıra sınırlı alt kümelerinin f altındaki görüntüsü $\mathbb{R}$ de sınırlı ise, f ye sıra sınırlı fonksiyonel denir.

Tanım 2.21. E bir Riesz uzayı olsun. E üzerinde tanımlı tüm sıra sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayına E nin sıra duali (order dual) denir ve $E^{\sim}$ ile gösterilir.

$E^{\sim}$ uzayı, $f \geq g \Leftrightarrow \forall x \in E_{+},\ f(x) \geq g(x)$ ile tanımlı sıralama ile bir sıralı vektör uzayıdır. Ayrıca $\mathbb{R}$ Dedekind tam olduğundan, Teorem 2.1 gereğince, $E^{\sim}$ bir Dedekind tam Riesz uzayıdır.

2.2 Banach Latisleri

Bu kısımda Banach latisleri ile ilgili bazı temel tanımlar ve özellikler verilecektir. Kaynak olarak [8, 16, 17, 24, 27] kullanılacaktır.

Tanım 2.22. X bir vektör uzayı olsun. Eğer bir $p : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

(i) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$

(ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

şartlarını sağlıyorsa, p ye X üzerinde bir yarı norm denir. Eğer p yarı normu için, $p(x) = 0$ iken $x = 0$ oluyorsa, p ye bir norm denir.

Riesz uzaylarında latis normu, sıra yapısı ile uyumlu olacak şekilde tanımlanır.

Tanım 2.23. Bir Riesz uzayı üzerinde tanımlı bir $\|.\|$ normu, her $x, y \in E$ için, $|x| \leq |y|$ iken $\|x\| \leq \|y\|$ koşulunu sağlıyorsa, $\|.\|$ normuna latis normu denir. Bir latis normuna sahip Riesz uzayına ise normlu Riesz uzayı denir.

Önerme 2.8. *Bir normlu Riesz uzayında her x için $\|x\| = \||x|\|$ eşitliği sağlanır.*

Önerme 2.9. *Bir Riesz uzayının normlu Riesz uzayı olması için gerek ve yeter şart kapalı birim yuvarının katı olmasıdır.*

Aşağıda her normlu Riesz uzayında sağlanan bazı önemli özellikleri verelim.

Önerme 2.10. *E bir normlu Riesz uzayı olsun. Aşağıdakiler sağlanır.*

1) *E, Arşimet özelliğine sahiptir.*
2) *E nin latis işlemleri* $x \to x^+$, $x \to x^-$, $x \to |x|$, $(x, y) \to x \vee y$ *ve* $(x, y) \to x \wedge y$ *düzgün süreklidir.*
3) *E nin pozitif konisi kapalıdır.*
4) *E deki her sıra aralığı kapalı ve sınırlıdır.*
5) *E nin her sınırlı alt kümenisinin katı zarfı da sınırlıdır.*
6) *E nin her katı alt kümesinin kapanışı da katıdır.*
7) *E deki her band kapalıdır.*

Tanım 2.24. E normlu Riesz uzayı aynı zamanda bir Banach uzayı ise, E ye bir Banach latis denir.

Şimdi bazı Banach latis örnekleri verelim.

Örnek 2.4. a) *Her* $n \in \mathbb{N}$ *için Riesz uzayı* $\mathbb{R}^n$, *üzerinde tanımlı Öklid normu ile bir Banach latistir.*

b) *K kompakt bir Hausdorff uzayı olmak üzere, K dan R ye tanımlı tüm sürekli fonksiyonların Riesz uzayı* $C(K)$,

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in K\} \tag{2.9}$$

normu ile bir Banach latistir.

c) *Riesz uzayı* $\mathscr{L}_p(\mu)$ $(1 \le p < \infty)$,

$$\|f\| = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.10}$$

normu ile bir Banach latistir.

d) *Riesz uzayı* $\mathscr{L}_\infty(\mu)$,

$$\|f\|_\infty = inf\ \{M > 0 : hemen\ hemen\ her\ x\ icin\, |f\ (x)| \le M\} \tag{2.11}$$

normu ile bir Banach latistir.

e) Sıfıra yakınsak dizilerin Riesz uzayı c_0,

$$\|(x_1, x_2, ...)\|_\infty = sup\,\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} \tag{2.12}$$

normu ile bir Banach latistir.

E bir normlu Riesz uzayı olmak üzere, E nin norm dualini E' ile göstereceğiz.

Teorem 2.2. *E bir normlu Riesz uzayı olsun. Aşağıdakiler sağlanır.*

1) E', $E^\sim$ nin bir idealidir.

2) E', Dedekind tam bir Banach latistir.

3) E bir Banach latis ise, $E' = E^\sim$ dir.

Teorem 2.3. *E bir Banach latis ve F bir normlu Riesz uzayı olsun. Her pozitif $T : E \to F$ operatörü süreklidir.*

Sonuç 2.1. *Bir Riesz uzayının Banach latis olmasını sağlayan tüm latis normları denktir.*

Şimdi, sıra süreklilik kavramını verelim.

Tanım 2.25. E bir normlu Riesz uzayı olsun. E üzerinde $x_\alpha \downarrow 0$ şartını sağlayan her (x_α) ağı için $\|x_\alpha\| \to 0$ oluyorsa, E nin normu sıra süreklidir, denir.

Örnek 2.5. *$\mathscr{L}_p(\mu)$ $(1 \leq p < \infty)$ ve c_0 sıra sürekli norma sahip Banach latisleridir [27, s. 356]. $C[0,1]$, $\mathscr{L}_\infty[0,1]$ ve ℓ_∞ ise sıra sürekli norma sahip olmayan Banach latisleridir [8, s. 187].*

Önerme 2.11. *Her yansımalı Banach latis sıra sürekli norma sahiptir.*

Önerme 2.12. *Her sıra sürekli norma sahip Banach latis Dedekind tamdır.*

Aşağıda, sıra sürekli norma sahip Banach latisleri için bazı karakterizasyonlar vereceğiz.

Teorem 2.4. *E bir Banach latis olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

1) E nin sıra sürekli normu vardır.

2) E, E'' de bir idealdir.

3) E nin aralıkları zayıf kompakttır.

4) E üzerinde her sıra sınırlı dik dizi sıfıra normda yakınsar.

5) E nin her kapalı ideali bir banddır.

E bir Banach latis olsun. E uzayında, E den elde edilen norm ile sıra sürekli norma sahip maksimal ideal E^a ile gösterilir. E^a ideali, E de kapalıdır. Açıkça, E nin sıra sürekli normu varsa, $E = E^a$ olur.

Banach latislerinde iki önemli sınıf AM- ve AL-uzaylarıdır. Şimdi bu uzaylardan bahsedelim.

Tanım 2.26. E bir Banach latis olsun.

a) Her $x, y \in E^+$ için $\|x \vee y\| = max\,\{\|x\|, \|y\|\}$ ise, E ye bir AM-uzayı denir.

b) Her $x, y \in E^+$ için $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ ise, E ye bir AL-uzayı denir.

Önerme 2.13. *Her AL-uzayı sıra sürekli norma sahiptir.*

Aşağıdaki teorem AM-uzaylarının önemini göstermektedir.

Teorem 2.5. *[8, Teorem 4.21] E bir Banach latis ve $x \in E$ olsun. Bu durumda, E_x esas ideali,*

$$\|y\|_\infty = inf\,\{\lambda > 0 : |y| \leq \lambda\,|x|\} \tag{2.13}$$

normu ile bir AM-uzayıdır ve kapalı birim yuvarı $[-|x|, |x|]$ aralığıdır.

Yukarıdaki teoremde geçen $\|.\|_\infty$ normuna, sıra birim (order unit) normu denir.

AM- ve AL-uzayları aşağıda verilen duallik özelliğini sağlar.

Teorem 2.6. *E bir Banach latis olsun. E nin AL-uzayı (AM-uzayı) olması için gerek ve yeter şart E' nin AM-uzayı (AL-uzayı) olmasıdır.*

Çalışmamızda faydalandığımız diğer bir küme tipi yaklaşık sıra sınırlı (approximately order bounded) kümelerdir.

Tanım 2.27. [16, s. 73] E bir Banach latis ve $A \subseteq E$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $A \subseteq [-u_\varepsilon, u_\varepsilon] + \varepsilon B_E$ olacak şekilde bir $u_\varepsilon \in E_+$ varsa, A kümesine yaklaşık sıra sınırlı küme denir.

Önerme 2.14. *E bir Banach latis ve $A \subseteq E$ olsun. A nın yaklaşık sıra sınırlı olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için bir $u_\varepsilon \in E_+$ vardır, öyle ki her $x \in A$ için $\left\|(|x| - u_\varepsilon)^+\right\| < \varepsilon$ olmasıdır.*

Önerme 2.15. *Her sıra sınırlı ve her relatif kompakt küme yaklaşık sıra sınırlıdır.*

Önerme 2.16. *Her yaklaşık sıra sınırlı küme norm topolojisine göre sınırlıdır.*

L-zayıf kompakt kümeler Meyer-Nieberg tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 2.28. [16, Tanım 3.6.1] E bir Banach latis ve $A \subseteq E$ kümesi boştan farklı ve sınırlı olsun. Eğer A kümesinin katı zarfındaki her dik dizi sıfıra yakınsak ise, A ya L-zayıf kompakt küme denir.

E bir Banach latis olsun. E nin her L-zayıf kompakt alt kümesi E^a tarafından kapsanır [16, s. 212]. Her L-zayıf kompakt küme relatif zayıf kompakktır. İfadenin tersi AL-uzaylarında doğrudur [16, s. 212]. L-zayıf kompakt kümelerin aşağıda verilen karakterizasyonundan yararlanacağız.

Önerme 2.17. *[16, Önerme 3.6.2] E bir Banach latis ve $A \subseteq E$ kümesi boştan farklı ve sınırlı olsun. A kümesinin L-zayıf kompakt olması için gerek ve yeter şart A nın E^a üzerinde yaklaşık sıra sınırlı olmasıdır.*

Tanım 2.29. [3, s. 328] E bir Banach latis olmak üzere, sıfıra zayıf yakınsak her $(x_n) \subseteq E_+$ dizisi için $\|x_n\| \to 0$ oluyorsa, E nin pozitif Schur özelliği vardır, denir.

Her AL-uzayı pozitif Schur özelliğine sahiptir [3, s. 328]. Pozitif Schur özelliğinin bazı karakterizasyonlarını verelim.

Teorem 2.7. *[3, Teorem 3.1] E bir Banach latis olmak üzere, aşağıdaki ifadeler denktir.*

1) *E nin pozitif Schur özelliği vardır.*
2) *E_+ deki her sıfıra zayıf yakınsak dik dizi, sıfıra normda yakınsar.*
3) *E nin her relatif zayıf kompakt alt kümesi L-zayıf kompakttır.*
4) *E nin boştan farklı ve sınırlı bir alt kümesinin relatif zayıf kompakt olması için gerek ve yeter şart yaklaşık sıra sınırlı olmasıdır.*

E ve F Banach latis olsun. E den F ye tanımlı tüm sınırlı operatörlerin uzayını $\mathscr{L}(E,F)$ ile gösterelim. Bilindiği üzere, $\mathscr{L}(E,F)$ uzayı operatör normu ile bir Banach uzayıdır. $\mathscr{L}_r(E,F)$ uzayı ise operatör normu ile genel olarak bir Banach uzayı değildir. Bu sebeple, r-normu (regüler norm) denilen kavram tanımlanmıştır.

Tanım 2.30. [16, s. 27] E ve F Banach latis, $T \in \mathscr{L}_r(E,F)$ olsun. T operatörünün r-normu,

$$\|T\|_r = inf\ \{\|S\| : S \in \mathscr{L}(E,F)_+, |Tx| \leq Sx, \forall x \in E_+\} \tag{2.14}$$

olarak tanımlanır.

Yukarıdaki tanımdan, $\|T\| \leq \|T\|_r$ olduğu görülür ve T operatörünün modülü varsa, $\|T\|_r = \||T|\|$ eşitliği sağlanır. Ayrıca, $\mathscr{L}_r(E,F)$ uzayı r-normu ile bir Banach uzayıdır [16, Önerme 1.3.6].

Eğer F Dedekind tam ise, $\mathscr{L}_r(E,F)$ uzayı r-normu ile bir Banach latis oluşturur. Bu önemli teoremi ispatı ile birlikte verelim.

Teorem 2.8. *[8, Teorem 4.74] E ve F Banach latis ve F Dedekind tam olsun.* $\mathscr{L}_r(E,F)$ *uzayı, r-normu ile Dedekind tam bir Banach latistir.*

İspat. $\mathscr{L}_r(E,F)$ *uzayında r-normuna göre bir* (T_n) *Cauchy dizisi alalım. Bir alt diziye geçerek, her n için*

$$\|T_{n+1} - T_n\|_r = \||T_{n+1} - T_n|\| < \frac{1}{2^n} \tag{2.15}$$

olduğunu kabul edebiliriz. $\|T_{n+1} - T_n\| \leq \|T_{n+1} - T_n\|_r$ *eşitsizliğinden,* (T_n) *dizisinin* $\mathscr{L}(E,F)$ *uzayında operatör normuna göre Cauchy dizisi olduğu görülür. Yani, bir* $T \in \mathscr{L}(E,F)$ *için* $\|T_n - T\| \to 0$ *olur. Keyfi bir* $x \in E_+$ *alalım.* $|y| < |x|$ *koşulunu sağlayan her* $y \in E$ *için*

$$(T - T_n)y = \sum_{i=n}^{\infty}(T_{i+1} - T_i)y \leq \sum_{i=n}^{\infty}|T_{i+1} - T_i|x \tag{2.16}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $T - T_n$ *operatörünün modülü vardır ve her* $x \in E_+$ *için*

$$|T - T_n|x = sup\,\{(T - T_n)y : |y| \leq x\} \leq \sum_{i=n}^{\infty}|T_{i+1} - T_i|x \tag{2.17}$$

sağlanır. $T = (T - T_1) + T_1$ *ifadesinden* T *bir regüler operatör, yani* $T \in \mathscr{L}_r(E,F)$ *dir. Diğer yandan, (2.17) ifadesinden*

$$\|T - T_n\|_r \leq \sum_{i=n}^{\infty}\|T_{i+1} - T_i\|_r \leq 2^{1-n} \tag{2.18}$$

elde edilir, ve böylece $\lim_{n\to\infty}\|T - T_n\|_r = 0$ *bulunur. Yani,* $\mathscr{L}_r(E,F)$ *uzayı r-normu ile Dedekind tam bir Banach latistir.*

2.3 Kompakt ve Kompakt tipi Operatörler

Bu kısımda kompakt ve kompakt tipi (örneğin zayıf kompakt, Dunford-Pettis, L- ve M-zayıf kompakt) operatörlerin tanımlarını ve bazı özelliklerini vereceğiz. Bu operatör sınıfları için baskınlık probleminden bahsedeceğiz. Ayrıca, bu operatörlerin hangi durumda vektör latis ve özel olarak Banach latis oluşturduklarını göreceğiz. İlk olarak kompakt operatörleri ele alalım.

Tanım 2.31. [8, s. 273] X, Y normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ bir operatör olsun. Eğer $T(B_X)$, Y nin relatif kompakt bir alt kümesi ise, T ye kompakt operatör denir. Denk olarak, her sınırlı $(x_n) \subseteq X$ dizisi için (Tx_n) dizisinin Y de yakınsak bir alt dizisi varsa, T operatörüne kompakttır, denir.

Her kompakt operatör sınırlıdır. Ancak tersi doğru değildir, çünkü sonsuz boyutlu bir normlu uzay üzerinde tanımlı birim operatör sınırlıdır, ancak kompakt değildir.

Teorem 2.9. *[8, Teorem 5.1] X ve Y Banach uzayı olmak üzere, X den Y ye tüm kompakt operatörlerin kümesi $K(X,Y)$, $\mathscr{L}(X,Y)$ nin (operatör normuna göre) kapalı bir alt vektör uzayıdır.*

Kompakt operatörlerin diğer bir özelliği duallik özelliğini sağlamalarıdır. Bu özellik Schauder tarafından verilmiştir.

Teorem 2.10. *[8, Teorem 5.2] X ve Y Banach uzayları arasında tanımlı sınırlı bir $T : X \to Y$ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter şart $T' : Y' \to X'$ operatörünün kompakt olmasıdır.*

Zayıf kompakt operatörler aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.32. [8, s. 291] $T : X \to Y$ operatörü iki Banach uzayı arasında tanımlansın. Eğer $T(B_X)$, Y nin relatif zayıf kompakt bir alt kümesi ise, T ye zayıf kompakt operatör denir. Eberlein-Smulian Teoremi gereğince, T nin zayıf kompakt olması için gerek ve yeter koşul her sınırlı $(x_n) \subseteq X$ dizisi için (Tx_n) dizisinin Y de zayıf yakınsak bir alt diziye sahip olmasıdır.

Her kompakt operatör zayıf kompakt ve her zayıf kompakt operatör sınırlıdır. Ancak tersi doğru değildir.

Teorem 2.11. *[8, Teorem 5.24] X ve Y Banach uzayları olmak üzere, bu uzaylardan biri yansımalı ise, her $T : X \to Y$ sınırlı operatörü zayıf kompakttır.*

Zayıf kompakt operatörler de kompakt operatörler gibi duallik özelliğine sahiptir. Bu özellik Gantmacher Teoremi olarak bilinir.

Teorem 2.12. *[8, Teorem 5.23] X ve Y Banach uzayları olsun. Sınırlı bir $T : X \to Y$ operatörünün zayıf kompakt olması için gerek ve yeter koşul $T' : Y' \to X'$ operatörünün zayıf kompakt olmasıdır.*

Dunford-Pettis operatörleri ilk olarak Grothendieck tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 2.33. [8, s. 340] X ve Y Banach uzayları olmak üzere, bir $T : X \to Y$ operatörü alalım. Eğer X de $x_n \xrightarrow{w} 0$ şartını sağlayan her (x_n) dizisi için $\|Tx_n\| \to 0$ ise, T ye Dunford-Pettis operatörü denir.

Tanımdan her kompakt operatörün Dunford-Pettis ve her Dunford-Pettis operatörünün sınırlı olduğu görülür.

Örnek 2.6. *[8, s. 340] ℓ_1 uzayı üzerinde tanımlı birim operatör Dunford-Pettis operatörüdür, ancak zayıf kompakt (dolayısıyla kompakt) değildir. ℓ_∞ üzerinde tanımlı birim operatör ise sınırlıdır, ancak Dunford-Pettis operatörü değildir.*

Teorem 2.13. *[8, Teorem 5.23] X ve Y Banach uzayları arasında tanımlı sınırlı bir $T : X \to Y$ operatörünün Dunford-Pettis olması için gerek ve yeter şart her relatif zayıf kompakt $W \subseteq X$ kümesi için, $T(W)$ kümesinin tümden sınırlı olmasıdır.*

Şimdi, ilk olarak Meyer-Nieberg [1] tarafından tanımlanmış olan L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörlerden bahsedelim.

Tanım 2.34. [8, Tanım 5.59] X bir Banach uzayı, F bir Banach latis ve $T : X \to F$ sınırlı bir operatör olsun. $T(B_X)$ in katı zarfındaki her dik (y_n) dizisi için $\|y_n\| \to 0$ oluyorsa, T operatörüne L-zayıf kompakt operatör denir. Denk olarak, $T(B_X)$ kümesi L-zayıf kompakt ise, T operatörüne L-zayıf kompakt operatör denir.

Tanım 2.35. [8, Tanım 5.59] E bir Banach latis, Y bir Banach uzayı ve $T : E \to Y$ sınırlı bir operatör olsun. Her sınırlı ve dik $(x_n) \subseteq E$ dizisi için $\|Tx_n\| \to 0$ oluyorsa, T operatörüne M-zayıf kompakt operatör denir.

Teorem 2.14. *[8, Teorem 5.61] Her L-zayıf (M-zayıf) kompakt operatör zayıf kompakttır.*

Banach latisleri arasında tanımlı kompakt (dolayısıyla zayıf kompakt) operatörler L-zayıf veya M-zayıf kompakt olmak zorunda değildir [8, s. 322]. Benzer şekilde, L-zayıf (M-zayıf) kompakt operatörler de kompakt olmak zorunda değildir [16, s. 215].

Aşağıdaki teorem, L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörlerin neden bu şekilde adlandırıldığını bize söyler.

Teorem 2.15. *[8, Teorem 5.62]*

1) *E bir AM-uzayı, Y bir Banach uzayı ve $T : E \to Y$ bir sınırlı operatör olsun. T nin M-zayıf kompakt olması için gerek ve yeter şart zayıf kompakt olmasıdır.*

2) *X bir Banach uzayı, F bir AL-uzayı ve $T : X \to F$ bir sınırlı operatör olsun. T nin L-zayıf kompakt olması için gerek ve yeter şart zayıf kompakt olmasıdır.*

L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörler birbirlerinin eşleniğidir.

Teorem 2.16. *[8, Teorem 5.64] E bir Banach latis ve X bir Banach uzayı olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

1) *Bir $T : E \to X$ operatörünün M-zayıf kompakt olması için gerek ve yeter koşul $T' : X' \to E'$ nin L-zayıf kompakt olmasıdır.*

2) *Bir $T : X \to E$ operatörünün L-zayıf kompakt olması için gerek ve yeter koşul $T' : E' \to X'$ nin M-zayıf kompakt olmasıdır.*

Çalışmamızda kullanacağımız bir diğer sonuç, pozitif M-zayıf kompakt operatörlerin aşağıdaki karakterizasyonudur.

Teorem 2.17. *[16, Önerme 3.6.19] E ve F iki Banach latis olmak üzere, F nin normu sıra sürekli olsun. Bu durumda, her pozitif $T : E \to F$ operatörü için aşağıdaki ifadeler denktir.*

1) *T operatörü M-zayıf kompakttır.*

2) *$[0, T] \subseteq \mathscr{L}^r(E, F)$ üzerinde operatör normu sıra süreklidir.*

Yarı-kompakt operatörler ilk olarak Zaanen [17] tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 2.36. [16, Tanım 3.6.9] X bir Banach uzayı, F bir Banach latis ve $T : X \to F$ bir sınırlı operatör olsun. Eğer $T(B_X)$, F nin yaklaşık sıra sınırlı bir alt kümesi ise, T ye yarı-kompakt operatör denir. Diğer bir ifadeyle, T operatörünün yarı-kompakt olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için $T(B_X) \subset [-u, u] + \varepsilon B_F$ olmasını sağlayan bir $u \in F_+$ elemanının bulunmasıdır.

Her kompakt operatör yarı-kompakttır [8, Teorem 5.71]. Buna ek olarak, aşağıdaki teorem sağlanır.

Teorem 2.18. *1) Bir Banach uzayından bir Banach latise tanımlı her L-zayıf kompakt operatör yarı-kompakttır [16, Önerme 3.6.10].*

2) İki Banach latis arasında tanımlı her M-zayıf kompakt operatör yarı-kompakttır [16, Sonuç 3.6.14].

Örnek 2.7. *[8, s. 333] Yarı-kompakt bir operatör kompakt, L-zayıf kompakt veya M-zayıf kompakt olmak zorunda değildir. ℓ_∞ uzayı üzerinde tanımlı birim operatör yarı-kompakttır, ancak yukarıda sözü edilen hiçbir operatör sınıfına ait değildir.*

Bir diğer operatör türü, Dodds ve Fremlin [9] tarafından tanımlanan AM-kompakt operatörlerdir.

Tanım 2.37. [17, Tanım 123.1] E, F Banach latis ve $T : E \to F$ bir regüler operatör olsun. Her $x \in E_+$ için $T[-x, x]$ kümesi relatif kompakt ise, T ye AM-kompakt operatör denir.

İki Banach latis arasında tanımlı her $T : E \to F$ regüler kompakt operatörü AM-kompakttır. E nin sıra birimi varsa, ifadenin tersi de doğrudur [16, s. 218].

Örnek 2.8. *ℓ_1 uzayı üzerinde tanımlı birim operatör AM-kompakttır, ancak kompakt değildir.*

Teorem 2.19. *[17, Teorem 123.2] İki Banach latis arasında tanımlı $T : E \to F$ regüler operatörünün AM-kompakt olması için gerek ve yeter şart E nin yaklaşık sıra sınırlı alt kümelerinin T altındaki görüntüsünün relatif kompakt olmasıdır.*

Dunford-Pettis operatörleri ile AM-kompakt operatörleri arasında aşağıdaki ilişki vardır.

Teorem 2.20. *[16, Önerme 3.7.11] E ve F iki Banach latis olsun. Eğer E nin normu sıra sürekli ise, her $T : E \to F$ regüler Dunford-Pettis operatörü AM-kompakttır*

Son olarak, Sanchez [28] tarafından tanımı verilen hemen hemen Dunford-Pettis operatörlerini ele alalım.

Tanım 2.38. [29, 30] E bir Banach latis, Y bir Banach uzayı ve $T : E \to Y$ bir sınırlı operatör olsun. Her dik ve sıfıra zayıf yakınsak $(x_n) \subseteq E$ dizisi için $\|Tx_n\| \to 0$ oluyorsa, T ye hemen hemen Dunford-Pettis operatörü denir.

Bir Banach latisten bir Banach uzayına tanımlı her Dunford-Pettis operatörü hemen hemen Dunford-Pettis operatörüdür. Ancak tersi doğru değildir.

Örnek 2.9. *[30, s. 375] $\mathscr{L}_1[0,1]$ uzayı üzerinde tanımlı birim operatör hemen hemen Dunford-Pettis operatörüdür, ancak Dunford-Pettis değildir.*

Hemen hemen Dunford-Pettis operatörlerinin aşağıdaki karakterizasyonu önemlidir.

Teorem 2.21. *[30, Teorem 2.2-3] E bir Banach latis, Y bir Banach uzayı ve $T : E \to Y$ bir sınırlı operatör olsun. T nin hemen hemen Dunford-Pettis olması için gerek ve yeter koşul sıfıra zayıf yakınsak her $(x_n) \subseteq E_+$ dizisi için $\|Tx_n\| \to 0$ olmasıdır.*

Yukarıda sözünü ettiğimiz operatör sınıflarıyla ilgili olarak önemli özelliklerden biri, giriş bölümünde bahsettiğimiz baskınlık özelliğidir. Bu özelliğin sağlanmadığı durumlarda, hangi ek koşullar altında özelliğin sağlandığı problemi ortaya çıkar. Kompakt operatörler sınıfında baskınlık özelliğinin sağlanmadığı bilinmektedir [8, 16]. Dodds ve Fremlin [9], kompakt operatörlerde bu özelliğin gerçeklenmesini sağlayan bir yeter koşul vermişlerdir. Daha sonra, Wickstead [15] tarafından gerek ve yeter koşul elde edilmiştir.

Teorem 2.22. *[15, Teorem 1] E ve F iki Banach latis olmak üzere, $K(E,F)$ sınıfının baskınlık özelliğini sağlaması için gerek ve yeter şart aşağıdaki ifadelerden en az birinin sağlanmasıdır.*

1. *E' ve F nin sıra sürekli normu vardır.*
2. *F ayrıktır ve sıra sürekli bir norma sahiptir.*
3. *E' ayrıktır ve sıra sürekli bir norma sahiptir.*

Benzer şekilde zayıf kompakt, Dunford-Pettis ve AM-kompakt operatörler de baskınlık özelliğini sağlamaz [8, 16, 17]. Literatürde bu operatör sınıflarında baskınlık özelliğini inceleyen çalışmalar mevcuttur [10, 15, 18, 19, 21].

Şimdi baskınlık özelliğini sağlayan bazı operatör sınıflarını ele alalım. L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörler baskınlık özelliğini sağlar [4, 16].

Teorem 2.23. *[4, Önerme 2.1] E, F iki Banach latis, $S, T : E \to F$ pozitif operatörler ve $0 \leq S \leq T$ olsun.*

1. *Eğer $T \in W_L(E,F)$ ise, $S \in W_L(E,F)$ dir.*
2. *Eğer $T \in W_M(E,F)$ ise, $S \in W_M(E,F)$ dir.*

İspat. *$T \in W_L(E,F)$ olsun. $S(B_E)$ kümesinin katı zarfında dik bir (y_n) dizisi alalım. Bu durumda, $|y_n| \leq |Sx_n|$ olacak şekilde bir $(x_n) \subseteq B_E$ dizisi vardır. $|y_n| \leq |Sx_n| \leq S|x_n| \leq T|x_n|$ olduğundan, (y_n) dik dizisi $T(B_E)$ kümesinin katı zarfındadır. T operatörü L-zayıf kompakt olduğundan $\|y_n\| \to 0$ dır, ve böylece $S \in W_L(E,F)$ sağlanır.*
$T \in W_M(E,F)$ olsun. (x_n) dizisi B_E kümesinde dik bir dizi ise, $(|x_n|)$ dizisi de öyledir. Böylece, $\|T|x_n|\| \to 0$ olur. $|Sx_n| \leq S|x_n| \leq T|x_n|$ eşitsizliğinden, $\|Sx_n\| = \||Sx_n|\| \leq \|T|x_n|\|$ elde edilir, ve $\|Sx_n\| \to 0$ olduğu görülür. Yani $S \in W_M(E,F)$ dir.

Benzer şekilde, hemen hemen Dunford-Pettis operatörleri de baskınlık özelliğini sağlar.

Teorem 2.24. *[30, Sonuç 2.3] E,F iki Banach latis ve $S,T : E \to F$ pozitif operatörler olsun. Eğer $0 \leq S \leq T$ ve T operatörü hemen hemen Dunford-Pettis ise, S de hemen hemen Dunford-Pettis operatörüdür.*

İspat. *[30, Teorem 2.2-3] gereğince, sıfıra zayıf yakınsak her $(x_n) \subseteq E_+$ dizisi için $\|Sx_n\| \to 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için, sıfıra zayıf yakınsak bir $(x_n) \subseteq E_+$ dizisi alalım. T operatörü hemen hemen Dunford-Pettis olduğundan, [30, Teorem 2.2-3] den $\|Tx_n\| \to 0$ olur. Her n için $0 \leq Sx_n \leq Tx_n$, ve buradan $\|Sx_n\| \leq \|Tx_n\|$ elde edilir. Sonuç olarak, $\|Sx_n\| \to 0$ dır.*

Ele alacağımız diğer bir problem, Banach latisleri arasında tanımlı kompakt ve benzeri operatörlerin hangi durumda Riesz uzayı ve özel olarak Banach latis oluşturacakları problemidir. Kompakt operatörler için bu problem ilk olarak Krengel [6, 7] tarafından ele alınmıştır. Krengel, iki Banach latis arasında tanımlı bir kompakt operatörün modülünün olmayabileceğini ve modülü olsa dahi modülünün kompakt olmayabileceğini göstermiştir. Bunun yanında, bazı ek koşullar altında aşağıdaki olumlu sonuçları elde etmiştir.

Teorem 2.25. *[6] E bir Banach latis ve F bir AM-uzayı ise, her $T : E \to F$ kompakt operatörünün modülü vardır ve kompakttır. Bu durumda, $K(E,F)$ uzayı regüler norm ile bir Banach latistir.*

Teorem 2.26. *[6] E bir AL-uzayı ve F sıra sürekli norma sahip bir Banach latis ise, her sıra sınırlı $T : E \to F$ kompakt operatörünün modülü vardır ve kompakttır. Bu durumda, $\mathscr{L}_b(E,F)$ nin kompakt operatörleri regüler norm ile bir Banach latis oluşturur.*

Aynı problem, zayıf kompakt operatörler için de literatürde çalışılmıştır . AM-kompakt operatörler için ise Fremlin [20] aşağıdaki sonucu elde etmiştir.

Teorem 2.27. *[20] E ve F iki Banach latis olsun. Eğer F nin normu sıra sürekli ise, E den F ye tüm AM-kompakt operatörler $\mathscr{L}_r(E,F)$ uzayında bir band oluşturur.*

Yukarıdaki teoremden regüler Dunford-Pettis operatörleri için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 2.28. *[9] E sıra sürekli norma sahip bir Banach latis ve F bir AL-uzayı ise, E den F ye tüm regüler Dunford-Pettis operatörleri $\mathscr{L}_r(E,F)$ uzayında bir band oluşturur.*

L- ve M-zayıf kompakt operatörlerin modülünün varlığı ve aynı cinsten olması, yani buna denk olarak bu operatörlerin hangi durumda Riesz uzayı oluşturacakları Chen ve Wickstead [3] tarafından çalışılmıştır.

Teorem 2.29. *[3, Teorem 2.1] $E = \mathscr{L}_2[0,1]$ ve $F = c_0(\mathscr{L}_2[0,1])$ olsun. Bu durumda, hem M-zayıf hem de L-zayıf kompakt olan ancak regüler olmayan bir $T : E \to F$ kompakt operatörü vardır.*

Teorem 2.30. *[3, Teorem 2.2] $E = \mathscr{L}_2[0,1]$ ve $F = c(\mathscr{L}_2[0,1])$ olsun. Bu durumda, hem M-zayıf hem de L-zayıf kompakt olan ancak modülü olmayan bir regüler $T : E \to F$ kompakt operatörü vardır.*

Teorem 2.31. *[3, Teorem 2.4] E bir Banach latis olmak üzere, aşağıdaki ifadeler denktir.*

1) *E bir AL-uzayına latis izomorftur.*
2) *Her F Banach latisi için, her $T : E \to F$ L-zayıf kompakt operatörünün L-zayıf kompakt modülü vardır.*
3) *Her L-zayıf kompakt $T : E \to \ell_1$ opeatörünün L-zayıf kompakt modülü vardır.*

Teorem 2.32. *[3, Teorem 2.9] Bir Banach latisten bir AM-uzayına tanımlı her L-zayıf kompakt operatörün L-zayıf kompakt modülü vardır.*

L- ve M-zayıf kompakt operatörler ile ilgili başka bir çalışma Bayram ve Wickstead'in [4] çalışmasıdır. Burada yazarlar, pozitif L-zayıf (M-zayıf) kompakt operatörlerin lineer olarak gerdiği uzayı incelemişlerdir.

Teorem 2.33. *[4, Teorem 2.2] Her E ve F Banach latisi için, $W_L^r(E,F)$ uzayı regüler norm ile Dedekind tam bir Banach latistir.*

Teorem 2.34. *[4, Teorem 2.3] Her E ve F Banach latisi için, F Dedekind tam ise, $W_M^r(E,F)$ uzayı regüler norm ile Dedekind tam bir Banach latistir.*

Aynı çalışmada [4], $W_L^r(E,F)$ ve $W_M^r(E,F)$ uzaylarının hangi koşullar altında sıra sürekli norma sahip olacağı incelenmiştir.

Teorem 2.35. *[4, Teorem 3.1] E ve F Banach latis ve $F^a \neq \{0\}$ olsun. $W_L^r(E,F)$ uzayının regüler normunun sıra sürekli olması için gerek ve yeter şart E' nin normunun sıra sürekli olmasıdır.*

Teorem 2.36. *[4, Teorem 3.2] E ve F Banach latis ve $(E')^a \neq \{0\}$ olsun. $W_M^r(E,F)$ uzayının regüler normunun sıra sürekli olması için gerek ve yeter şart F nin normunun sıra sürekli olmasıdır.*

2.4 Hemen Hemen L-zayıf ve Hemen Hemen M-zayıf Kompakt Operatörler

Bu kısımda, [5] makalesinde tanımlanan hemen hemen L-zayıf ve hemen hemen M-zayıf kompakt operatörlerden söz edeceğiz. Tanımlayacağımız tüm operatörlerin sürekli olduğu kabul edilecektir.

Hemen hemen L-zayıf kompakt operatörler aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.39. [5, Tanım 2.1] X bir Banach uzayı, F bir Banach latis ve $T : X \to F$ bir operatör olsun. Her $W \subseteq X$ relatif zayıf kompakt kümesi için $T(W)$ kümesi L-zayıf kompakt ise, T ye hemen hemen L-zayıf kompakt operatör denir.

Her L-zayıf kompakt operatörün hemen hemen L-zayıf kompakt olduğu açıktır. Ancak bu ifadenin tersi doğru değildir.

Örnek 2.10. *[5, s. 1435] ℓ_1 uzayında $I : \ell_1 \to \ell_1$ birim operatörünü alalım. ℓ_1 uzayı Schur özelliğine sahip olduğundan, [16, Sonuç 3.6.8] gereğince, ℓ_1 uzayının her relatif zayıf kompakt alt kümesi L-zayıf kompakttır. Böylece, I operatörü hemen hemen L-zayıf kompakt olur. Diğer yandan, B_{ℓ_1} kümesi relatif zayıf kompakt değildir, yani L-zayıf kompakt değildir. Buna göre, I operatörü L-zayıf kompakt değildir.*

Hemen hemen M-zayıf kompakt operatörler aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.40. [5, Tanım 2.2] E bir Banach latis, Y bir Banach uzayı ve $T : E \to Y$ bir operatör olsun. Her $(x_n) \subseteq B_E$ dik dizisi ve her $(f_n) \subseteq Y'$ zayıf yakınsak dizisi için $f_n(T(x_n)) \to 0$ ise, T ye hemen hemen M-zayıf kompakt operatör denir

Her M-zayıf kompakt operatör hemen hemen M-zayıf kompakttır. Ancak ifadenin tersi doğru değildir.

Örnek 2.11. *[5, s. 1435] ℓ_∞ uzayında $I : \ell_\infty \to \ell_\infty$ birim operatörünü düşünelim. ℓ_∞' Banach uzayı pozitif Schur özelliğine sahip olduğundan, I operatörü hemen hemen M-zayıf kompakttır. Ancak ℓ_1 üzerinde tanımlı birim operatör L-zayıf kompakt olmadığından ve $\ell_1' = \ell_\infty$ olduğundan, I operatörü M-zayıf kompakt değildir.*

Şimdi, hemen hemen L-zayıf kompakt operatörlerin dizisel karakterizasyonlarını verelim.

Teorem 2.37. *[5, Teorem 2.2] X bir Banach uzayı ve F bir Banach latis olmak üzere, bir $T : X \to F$ operatörünün hemen hemen L-zayıf kompakt olması için gerek ve yeter şart X kümesindeki her zayıf yakınsak (x_n) dizisi ve $B_{F'}$ den alınan her ayrık (f_n) dizisi için $f_n(T(x_n)) \to 0$ olmasıdır.*

Teorem 2.38. *[5, Teorem 2.3] X bir Banach uzayı ve F bir Banach latis olmak üzere, bir $S : X' \to F'$ operatörünün hemen hemen L-zayıf kompakt olması için gerek ve yeter şart X' kümesindeki her zayıf yakınsak (f_n) dizisi ve B_F den alınan her dik (y_n) dizisi için $(S(f_n))(y_n) \to 0$ olmasıdır.*

Önerme 2.18. *[5, Önerme 2.1 (1)] X bir Banach uzayı ve F bir Banach latis olsun. X den F ye tanımlı tüm hemen hemen L-zayıf kompakt operatörlerin kümesi $AW_L(X,F)$, operatör normuna göre $\mathscr{L}(X,F)$ nin kapalı bir alt vektör uzayıdır*

İspat. *$T_1, T_2 \in AW_L(X,F)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $(x_n) \subseteq X$ zayıf yakınsak bir dizi ve $(f_n) \subseteq B_{F'}$ dik bir dizi olsun. $T_1, T_2 \in AW_L(X,F)$ olduğundan, [5, Teorem 2.2] gereğince*

$$f_n((\alpha T_1 + T_2)(x_n)) = \alpha f_n(T_1(x_n)) + f_n(T_2(x_n)) \to 0 \tag{2.19}$$

sağlanır. Yani $\alpha T_1 + T_2 \in AW_L(X,F)$ olur. Dolayısıyla $AW_L(X,F)$, $\mathscr{L}(X,F)$ nin bir alt vektör uzayıdır. $AW_L(X,F)$ nin kapalı olduğunu göstermek için, $AW_L(X,F)$ nin operatör normuna göre kapanışında bir T operatörü alalım. $(x_n) \subseteq X$ zayıf yakınsak bir dizi ve $(f_n) \subseteq B_{F'}$ dik bir dizi olsun. Amacımız $f_n(T(x_n)) \to 0$ olduğunu göstermektir. $\varepsilon > 0$ alalım. Bu durumda, $\|T - S\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $S : X \to F$ hemen hemen L-zayıf kompakt operatörü vardır. Buradan,

$$\begin{aligned} |f_n(T(x_n))| &\leq |f_n((T-S)(x_n))| + |f_n(S(x_n))| \\ &\leq \|f_n\| \, \|T-S\| \, \|(x_n)\| + |f_n(S(x_n))| \end{aligned} \tag{2.20}$$

eşitsizlikleri kullanılarak $\limsup |f_n(T(x_n))| \leq \varepsilon \|(x_n)\|$ elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $f_n(T(x_n)) \to 0$ sağlanır ve istenen elde edilir.

Şimdi yukarıdaki önermenin hemen hemen M-zayıf kompakt operatörler için olan versiyonunu verelim. İspat benzer şekildedir.

Önerme 2.19. *[5, Önerme 2.1 (2)] E bir Banach latis ve Y bir Banach uzayı olsun. E den Y ye tanımlı tüm hemen hemen M-zayıf kompakt operatörlerin kümesi $AW_M(E,Y)$, operatör normuna göre $\mathscr{L}(E,Y)$ nin kapalı bir alt vektör uzayıdır.*

Bir Banach latis üzerinde tanımlı birim operatörün hangi koşullar altında hemen hemen L-zayıf kompakt ve hemen hemen M-zayıf kompakt olduğunu gösteren sonuçları sırasıyla verelim.

Önerme 2.20. *[5, Önerme 2.2] E bir Banach latis olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*

1) *$I : E \to E$ birim operatörü hemen hemen L-zayıf kompakttır.*

2) *Her $(x_n) \subseteq E$ zayıf yakınsak dizisi ve her $(f_n) \subseteq B_{E'}$ dik dizisi için $f_n(T(x_n)) \to 0$ sağlanır.*

3) *E nin pozitif Schur özelliği vardır.*

Önerme 2.21. *[5, Sonuç 2.1] E bir Banach latis olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*

1) *E' nin pozitif Schur özelliği vardır.*

2) *$I : E' \to E'$ birim operatörü hemen hemen L-zayıf kompakttır.*

3) *Her $(f_n) \subseteq E'$ zayıf yakınsak dizisi ve her $(x_n) \subseteq B_E$ dik dizisi için $f_n(x_n) \to 0$ sağlanır.*

4) *$I : E \to E$ birim operatörü hemen hemen M-zayıf kompakttır.*

L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörlerin birbirlerinin eşleniği olduğunu biliyoruz. Bu bağlamda, hemen hemen L-zayıf ve hemen hemen M-zayıf kompakt operatörlerin sınıfı için aşağıdaki sonuç sağlanır.

Teorem 2.39. *[5, Teorem 2.5] E bir Banach latis ve X bir Banach uzayı olmak üzere, aşağıdakiler sağlanır.*

1) *Bir $T : E \to X$ operatörünün hemen hemen M-zayıf kompakt olması için gerek ve yeter şart T' operatörünün hemen hemen L-zayıf kompakt olmasıdır.*

2) *Bir $T : X \to E$ operatörünün eşleniği T' hemen hemen M-zayıf kompakt ise, T operatörü hemen hemen L-zayıf kompakttır.*

İspat. *(1) $T : E \to X$ bir operatör olsun. [5, Teorem 2.3] gereğince, T' operatörünün hemen hemen L-zayıf kompakt olması için gerek ve yeter şart her $(f_n) \subseteq X'$ zayıf yakınsak dizisi ve her $(x_n) \subseteq B_E$ dik dizisi için $T'(f_n)(x_n) \to 0$ olmasıdır. Bu ise her $(f_n) \subseteq X'$ zayıf yakınsak dizisi ve her $(x_n) \subseteq B_E$ dik dizisi için $f_n(T(x_n)) \to 0$ olmasına denktir. Diğer bir deyişle, $T : X' \to E'$ operatörünün hemen hemen L-zayıf kompakt olması $T : E \to X$*

operatörünün hemen hemen M-zayıf kompakt olmasına denktir.
(2) $T : X \to E$ bir operatör ve eşleniği T' hemen hemen M-zayıf kompakt olsun. $(x_n) \subseteq X$ zayıf yakınsak bir dizi ve $(f_n) \subseteq B_{E'}$ dik bir dizi olsun. $J : X \to X''$ kanonik dönüşümünü tanımlayalım. T' operatörü hemen hemen M-zayıf kompakt ve $(J(x_n)) \subseteq X''$ dizisi zayıf yakınsak olduğundan, $J(x_n)(T'(f_n)) = f_n(Tx_n) \to 0$ sağlanır. Yani, T operatörü hemen hemen L-zayıf kompakttır.

X bir Banach uzayı ve E bir Banach latis olsun. $T : X \to E$ operatörü hemen hemen L-zayıf kompakt ise, T' operatörü hemen hemen M-zayıf kompakt olmak zorunda değildir [5, Yorum 2.1].

Şimdi hemen hemen L-zayıf ve hemen hemen M-zayıf kompakt operatörlerin diğer bazı operatör sınıfları ile olan ilişkisinden söz edelim.

Teorem 2.38 gereğince, bir Banach latis üzerinde tanımlı birim operatörün hemen hemen L-zayıf kompakt olması ile hemen hemen Dunford-Pettis olması denktir. Buradan hareketle, ilk olarak bu iki operatör sınıfı arasındaki ilişkiden bahsedelim.

Önerme 2.22. *[5, Önerme 2.3] İki Banach latis arasında tanımlı her pozitif hemen hemen L-zayıf kompakt operatör hemen hemen Dunford-Pettis operatörüdür.*

Önerme 2.23. *[5, Önerme 2.4] E ve F Banach latis ve F nin sıra sürekli normu olsun. Bu durumda, her $T : E \to F$ pozitif hemen hemen Dunford-Pettis operatörü hemen hemen L-zayıf kompakttır.*

Banach latisleri arasında tanımlanan kompakt operatörler (dolayısıyla Dunford-Pettis operatörleri) hemen hemen L-zayıf veya hemen hemen M-zayıf olmak zorunda değildir.

Örnek 2.12. *[22, s. 142] $T : \ell_1 \to \ell_\infty$ operatörü, $e = (1, 1, 1, \ldots)$ olmak üzere,*

$$T(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n, \ldots \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) e \tag{2.21}$$

şeklinde tanımlansın. Açıkça, T operatörü kompakttır. Şimdi T nin hemen hemen L-zayıf kompakt olmadığını gösterelim. Bunun için, ℓ_1 uzayının standart birim vektörlerinden oluşan (e_n) dizisini alalım. Burada tek nokta kümesi $\{e_n\}$ nin ℓ_1 uzayında kompakt (dolayısıyla zayıf kompakt) olduğu görülür. Ancak $\{T(e_n)\} = \{e\}$ kümesi ℓ_∞ uzayında L-zayıf kompakt değildir, çünkü $e \notin (\ell^\infty)^a$ dir. Dolayısıyla T operatörü hemen hemen L-zayıf kompakt değildir. Diğer taraftan (e_n) dizisi, ℓ_1 uzayının $T(e_n) = e$ şartını sağlayan norm sınırlı dik bir dizisidir. ℓ_∞ uzayında δ sürekli fonksiyonelini $\delta(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) = \lambda_1$ şeklinde tanımlayalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\delta_n = \delta$ ile tanımlanan

(δ_n) sabit dizisi, $(\ell^\infty)'$ uzayında zayıf yakınsaktır. $\delta_n(T(e_n)) = 1 \nrightarrow 0$ olduğundan, T operatörü hemen hemen M-zayıf kompakt değildir.

Teorem 2.40. *[22, Teorem 1] X sıfırdan farklı bir Banach uzayı ve F bir Banach latis olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

1) *Her $T : X \to F$ Dunford-Pettis operatörü hemen hemen L-zayıf kompakttır.*

2) *Her $T : X \to F$ kompakt operatörü hemen hemen L-zayıf kompakttır.*

3) *F nin sıra sürekli normu vardır.*

Teorem 2.41. *[22, Teorem 2] E bir Banach latis ve X sıfırdan farklı bir Banach uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

1) *Her $T : E \to X$ kompakt operatörü hemen hemen M-zayıf kompakttır.*

2) *E' nin sıra sürekli normu vardır.*

Önceden gördüğümüz üzere, her hemen hemen L-zayıf kompakt operatörü L-zayıf veya M-zayıf kompakt olmak zorunda değildir. Aşağıdaki sonuçlar hangi koşullar altında bu durumun sağlanacağını ifade eder.

Teorem 2.42. *[22, Sonuç 4] E ve F iki Banach latis olsun. Eğer F nin sıra sürekli normu varsa aşağıdaki ifadeler denktir.*

1) *Her $T : X \to F$ Dunford-Pettis operatörü hemen hemen L-zayıf kompakttır.*

2) *Her $T : X \to F$ kompakt operatörü hemen hemen L-zayıf kompakttır.*

3) *F nin sıra sürekli normu vardır.*

Önerme 2.24. *[22, Teorem 4] E, F Banach latis ve $T : E \to F$ bir sıra sınırlı hemen hemen L-zayıf kompakt operatör olsun. Eğer E' nin sıra sürekli normu varsa, T operatörü M-zayıf kompakttır.*

Benzer şekilde, hemen hemen M-zayıf kompakt operatörlerin L-zayıf kompakt olmasını sağlayan bir yeterli koşuldan söz edelim.

Önerme 2.25. *[22, Sonuç 5] E, F Banach latis ve $T : E \to F$ bir sıra sınırlı hemen hemen M-zayıf kompakt operatör olsun. Eğer F'' nin sıra sürekli normu varsa, T operatörü L-zayıf kompakttır.*

3
BULGULAR

Bu bölümde X ve Y Banach uzaylarını, E ve F Banach latislerini gösterecektir. Tanımlanan tüm operatörlerin lineer ve sürekli olduğu kabul edilecektir.

3.1 Baskınlık ve Yaklaşım Özellikleri

İlk olarak, hemen hemen L-zayıf kompakt operatörlerin baskınlık özelliğini sağladığını gösterelim. Teoremin ispatında, hemen hemen Dunford-Pettis operatörlerinin baskınlık özelliğini sağlamasından yararlanacağız.

Teorem 3.1. *E ve F Banach latis ve $S, T : E \to F$ pozitif operatörler olsun. Eğer $0 \leq S \leq T$ ve T operatörü hemen hemen L-zayıf kompakt ise, S operatörü de hemen hemen L-zayıf kompakttır.*

İspat. *$T : E \to F$ operatörü pozitif hemen hemen L-zayıf kompakt olsun. Buradan, T operatörünün hemen hemen Dunford-Pettis operatörü olduğu görülür [5, Önerme 2.3]. Hemen hemen Dunford-Pettis operatörlerin sınıfının baskınlık özelliğini sağladığı bilinmektedir [30, Sonuç 2.3]. Yani, S bir hemen hemen Dunford-Pettis operatörüdür. $W \subseteq X$ bir relatif zayıf kompakt küme ve $\varepsilon > 0$ olsun. S operatörü hemen hemen Dunford-Pettis olduğundan, W kümesi q_S yarı normuna göre yaklaşık sıra sınırlıdır [30, Önerme 2.1]. Buna göre, bir $u \in E_+$ vardır, öyle ki her $x \in W$ için*

$$\left\| S\left(|x|-u\right)^+ \right\| \leq q_S\left(\left(|x|-u\right)^+\right) \leq \varepsilon \tag{3.1}$$

sağlanır. Ayrıca, T operatörü hemen hemen L-zayıf kompakt olduğundan $T(E) \subseteq F^a$ dır [22, Önerme 1]. Buradan, $0 \leq S \leq T$ eşitsizliği ve F^a nın katı olması kullanılarak, $S(E) \subseteq F^a$ olduğunu görmek kolaydır. $z = Su \in F^a_+$ olsun. Böylece, her $x \in W$ için

$$\begin{aligned} \left(|Sx|-z\right)^+ &= \left(|Sx|-Su\right)^+ \leq \left(S|x|-Su\right)^+ \\ &\leq \left(S\left(|x|-u\right)\right)^+ \leq S\left(|x|-u\right)^+ \end{aligned} \tag{3.2}$$

olduğu görülür. (3.1) ve (3.2) eşitsizliklerinden, her $x \in W$ için

$$\left\|(|Sx| - z)^+\right\| \leq \varepsilon \tag{3.3}$$

elde edilir. $|Sx| = |Sx| \wedge z + (|Sx| - z)^+$ *eşitliğinden,*

$$S(W) \subseteq [-z, z] + \varepsilon B_F \tag{3.4}$$

sağlanır. Böylece, $z \in F_+^a$ olduğundan, $S(W)$ kümesi F^a üzerinde yaklaşık sıra sınırlıdır. Bu ise, $S(W)$ kümesinin L-zayıf kompakt olması demektir [16, Önerme 3.6.2]. Dolayısıyla, S operatörü hemen hemen L-zayıf kompakttır.

Hemen hemen M-zayıf kompakt operatörlerin baskınlık özelliğini sağladığı yukarıdaki teoremden kolayca çıkar.

Teorem 3.2. *E ve F Banach latis ve $S, T : E \to F$ pozitif operatörler olsun. Eğer $0 \leq S \leq T$ ve T operatörü hemen hemen M-zayıf kompakt ise, S operatörü de hemen hemen M-zayıf kompakttır.*

İspat. *Açıkça, $0 \leq S' \leq T'$ olduğu görülür. T operatörü hemen hemen M-zayıf kompakt olduğundan, T' operatörü hemen hemen L-zayıf kompakttır [5, Teorem 2.5]. Teorem 3.1 den, S' operatörü de hemen hemen L-zayıf kompakttır. Dolayısıyla, S operatörü hemen hemen M-zayıf kompakttır [5, Teorem 2.5].*

Hemen hemen L-zayıf kompakt operatörlerin sınıfı aşağıda verilen yaklaşım özelliğini sağlar.

Önerme 3.1. *X bir Banach uzayı, F bir Banach latis ve $T : X \to F$ bir hemen hemen L-zayıf kompakt operatör olsun. Eğer $W \subseteq X$ kümesi relatif zayıf kompakt ise, her $\varepsilon > 0$ için $T(W)$ kümesinin ürettiği idealde bir $u_\varepsilon \in F_+$ vardır, öyle ki her $x \in W$ için*

$$\left\|(|Tx| - u_\varepsilon)^+\right\| < \varepsilon \tag{3.5}$$

sağlanır.

İspat. *$W \subseteq X$ kümesi relatif zayıf kompakt olsun. $T(W)$ kümesinin katı zarfını A ile gösterelim. A kümesinin sınırlı ve katı olduğu açıktır. T operatörü hemen hemen L-zayıf kompakt olduğundan, A kümesindeki her dik dizi sıfıra normda yakınsar. Şimdi $I : F \to F$ birim operatörünü ve F üzerinde $p(x) = \|x\|$ normunu tanımlayalım. A kümesindeki her (x_n) dik dizisi için, $p(I(x_n)) = \|x_n\| \to 0$ olduğu görülür. $\varepsilon > 0$ olsun. [8, Teorem 4.36] gereğince, A tarafından üretilen idealde bir $u_\varepsilon \in F_+$ vardır, öyle ki her $y \in A$ için*

$$\left\|I(|y| - u_\varepsilon)^+\right\| < \varepsilon \tag{3.6}$$

olur. Ayrıca $T(W) \subseteq A$ olduğundan, her $x \in W$ için

$$\left\| (|Tx| - u_\varepsilon)^+ \right\| < \varepsilon \tag{3.7}$$

sağlanır. $T(W)$ tarafından üretilen ideal ile A tarafından üretilen ideal eşit olduğundan, istenen sonuç elde edilir.

Pozitif hemen hemen M-zayıf kompakt operatörler için aşağıdaki karakterizasyonu verelim.

Önerme 3.2. *E ve F Banach latis, $T : E \to F$ bir pozitif operatör olsun. T operatörünün hemen hemen M-zayıf kompakt olması için gerek ve yeter şart her $V \subseteq F'$ relatif zayıf kompakt kümesi ve her dik $(x_n) \subseteq B_E$ dizisi için, (Tx_n) dizisinin V kümesinin katı zarfında sıfıra düzgün yakınsamasıdır.*

İspat. *Yeter koşul için, [8, Teorem 5.100] deki ispata benzer bir ispat vereceğiz. T operatörü hemen hemen M-zayıf kompakt olsun. $V \subseteq F'$ bir relatif zayıf kompakt küme ve $(x_n) \subseteq B_E$ pozitif terimlerden oluşan bir dik dizi olsun. $\varepsilon > 0$ alalım. Öncelikle, bir $g \in (F')_+$ ve $k \in \mathbb{N}$ için*

$$(|f| - g)^+ (Tx_n) < \varepsilon \tag{3.8}$$

ifadesinin her $f \in V$ ve her $n > k$ için sağlandığını gösterelim. Aksine, (3.8) ifadesi doğru olmasın. Yani, her $g \in (F')_+$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $(|f| - g)^+ (Tx_m) \geq \varepsilon$ olacak şekilde bir $f \in V$ ve bir $m > k$ olsun. Bir $(f_n) \subseteq V$ dizisi ve (x_n) dizisinin bir (z_n) alt dizisi için

$$\left(|f_{n+1}| - 4^n \sum_{i=1}^{n} |f_i| \right)^+ (Tz_n) \geq \varepsilon \tag{3.9}$$

ifadesinin her $n \in \mathbb{N}$ için sağlandığı tümevarım ile görülebilir. $f = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f_n|$ ve $h_n = \left(|f_{n+1}| - 4^n \sum_{i=1}^{n} |f_i| \right)^+$ tanımını yapalım. Her n için, $h_n(Tz_n) \geq \varepsilon$ olduğu görülür. F' üzerinde (g_n) dizisini

$$g_n = \left(|f_{n+1}| - 4^n \sum_{i=1}^{n} |f_i| - 2^{-n} f \right)^+ \tag{3.10}$$

olarak tanımlayalım. [8, Lemma 4.35] kullanılarak, (g_n) dizisinin V nin katı zarfında bir dik dizi olduğu görülür ve F' üzerinde $g_n \xrightarrow{w} 0$ olur [8, Teorem 4.34]. Diğer yandan, $(z_n) \subseteq B_E$ pozitif terimli bir dik dizidir. T operatörü hemen hemen M-zayıf kompakt olduğundan, $g_n(Tz_n) \to 0$ yazılır. F' üzerinde $i_n = f$ sabit dizisini tanımlayalım. Açıkça, (i_n) dizisi zayıf yakınsaktır ve T operatörü hemen hemen M-zayıf kompakt olduğundan, $i_n(Tz_n) = f(Tz_n) \to 0$ sağlanır. Buradan, $0 \leq h_n \leq g_n + 2^{-n} f$ eşitsizliğinden

$$0 < \varepsilon \leq h_n(Tz_n) \leq g_n(Tz_n) + 2^{-n} f(Tz_n) \to 0 \tag{3.11}$$

çelişkisi elde edilir. Yani, (3.8) ifadesi doğrudur. Buna göre, (3.8) ifadesini sağlayan bir $g \in (F')_+$ ve $k \in \mathbb{N}$ alalım. F' üzerinde $j_n = g$ sabit dizisini tanımlayalım. (j_n) dizisi zayıf yakınsak ve T operatörü hemen hemen M-zayıf kompakt olduğundan, $j_n(Tx_n) = g(Tx_n) \to 0$ elde edilir. Dolayısıyla bir $m > k$ vardır, öyle ki her $n \geq m$ için $g(Tx_n) < \varepsilon$ olur. Keyfi bir $h \in Sol(V)$ alalım. Buna göre, $|h| \leq |f|$ olacak şekilde bir $f \in V$ vardır. Buradan, her $n \geq m$ için

$$|h(Tx_n)| \leq |h|(Tx_n) \leq |f|(Tx_n) \leq (|f| - g)^+(Tx_n) + g(Tx_n) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad (3.12)$$

bulunur. Böylece, (Tx_n) dizisinin V kümesinin katı zarfında düzgün yakınsadığı görülür. Karşıt olarak, $(x_n) \subseteq B_E$ bir dik dizi ve (f_n) dizisi F' uzayında zayıf yakınsak bir dizi olsun. $V = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ tanımını yapalım. Bu durumda, $V \subseteq F'$ kümesi relatif zayıf kompakttır. Hipotezden, (Tx_n) dizisi V kümesinin katı zarfında düzgün yakınsaktır, yani $\sup\limits_{f \in Sol(V)} |f(Tx_n)| \to 0$ olur. Her n için

$$|f_n(Tx_n)| \leq \sup_{f \in V} |f(Tx_n)| \leq \sup_{f \in Sol(V)} |f(Tx_n)| \quad (3.13)$$

sağlanır. Buradan, $|f_n(Tx_n)| \to 0$ elde edilir, ve böylece T operatörünün hemen hemen M-zayıf kompakt olduğu görülür.

Verilen karakterizasyon kullanılarak aşağıdaki yaklaşım özelliği elde edilir.

Sonuç 3.1. *E ve F Banach latis, $T : E \to F$ bir pozitif hemen hemen M-zayıf kompakt operatör ve $V \subseteq F'$ bir relatif zayıf kompakt küme olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için bir $u_\varepsilon \in E_+$ vardır, öyle ki her $x \in B_E$ ve her $f \in V$ için*

$$|f|(T(|x| - u_\varepsilon)^+) < \varepsilon \quad (3.14)$$

sağlanır.

İspat. *E üzerinde $\rho(x) = \sup\{|f|(|x|) : f \in V\}$ yarı normunu tanımlayalım [8, Teorem 5.100 (2)]. Burada, ρ yarı normu E üzerinde süreklidir. Önerme 3.2 den, her dik $(x_n) \subseteq B_E$ dizisi için $\rho(Tx_n) \to 0$ olur. B_E kümesi katı olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için bir $u_\varepsilon \in E_+$ vardır, öyle ki her $f \in V$ ve her $x \in B_E$ için*

$$|f|(T(|x| - u_\varepsilon)^+) < \varepsilon \quad (3.15)$$

sağlanır [8, Teorem 4.36].

Önerme 3.2 kullanılarak, hemen hemen M-zayıf kompakt operatörlerin baskınlık özelliğini sağladığının farklı bir ispatını verelim.

Teorem 3.3. *E ve F Banach latis ve $S,T : E \to F$ pozitif operatörler olsun. Eğer $0 \le S \le T$ ve T operatörü hemen hemen M-zayıf kompakt ise, S operatörü de hemen hemen M-zayıf kompakttır.*

İspat. *$(x_n) \subseteq B_E$ bir dik dizi ve $(f_n) \subseteq F'$ bir zayıf yakınsak dizi olsun. Amacımız $f_n(Sx_n) \to 0$ olduğunu göstermektir. $V = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. Burada $V \subseteq F'$ bir relatif zayıf kompakt kümedir. Ayrıca, $(|f_n|)$ dizisi V nin katı zarfındadır. Her $n \in \mathbb{N}$ için*

$$|f_n(Sx_n)| \le |f_n|(|Sx_n|) \le |f_n|(S|x_n|) \le |f_n|(T|x_n|) \le \sup_{f \in sol(V)} f(T|x_n|) \tag{3.16}$$

sağlanır. Ayrıca, $(|x_n|) \subseteq B_E$ dizisi dik olduğundan, Önerme 3.2 gereğince $\sup_{f \in sol(V)} f(T|x_n|) \to 0$, ve buradan $|f_n(Sx_n)| \to 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla, S operatörü hemen hemen M-zayıf kompakttır.

3.2 $AW_L^r(E,F)$ ve $AW_M^r(E,F)$ uzayları

Bu kısımda, $AW_L^r(E,F)$ ve $AW_M^r(E,F)$ uzaylarının Banach latis olma ve sıra sürekli norma sahip olma durumlarını inceleyeceğiz. Bayram ve Wickstead [4], her E ve F Banach latisi için $W_L^r(E,F)$ uzayının Dedekind tam bir Banach latis olduğunu göstermişlerdir. Biz de benzer şekilde, $AW_L^r(E,F)$ uzayının Dedekind tam bir Banach latis olduğunu gösterelim.

Teorem 3.4. *Her E ve F Banach latisi için, $AW_L^r(E,F)$ uzayı regüler norm ile Dedekind tam bir Banach latistir*

İspat. *$T \in AW_L^r(E,F)$ olsun. Tanımdan, $T = T_1 - T_2$ olacak şekilde $T_1, T_2 \in AW_L^r(E,F)_+$ operatörleri vardır. $U = T_1 + T_2$ operatörünü tanımlayalım. Buradan, $\pm T \le U$ olduğu görülür. $T(E) \subseteq F^a$, $U(E) \subseteq F^a$, ve F^a Dedekind tam olduğundan, T operatörünün $\mathscr{L}^r(E,F^a)$ uzayında, ve dolayısıyla $\mathscr{L}^r(E,F)$ uzayında modülü vardır. Ayrıca, $|T| \le U$ eşitsizliği ve hemen hemen L-zayıf kompakt operatörler için baskınlık özelliği (Teorem 3.1) kullanılarak, $|T| \in AW_L^r(E,F)$ elde edilir. Yani, $AW_L^r(E,F)$ bir Riesz uzayıdır. Şimdi, $AW_L^r(E,F)$ nin $\mathscr{L}^r(E,F)$ uzayında regüler norma göre kapalı olduğunu gösterelim. Bu amaçla, $AW_L^r(E,F)$ uzayının kapanışında bir T operatörü alalım. Böylece, $AW_L^r(E,F)$ uzayında $\|T_n - T\|_r \to 0$ olacak şekilde bir (T_n) dizisi vardır. Her n için T_n operatörünün modülü olduğundan, T operatörünün $\mathscr{L}^r(E,F)$ uzayında modülü vardır ve $\||T_n| - |T|\|_r \to 0$ olur [31, Teorem 2.1]. Buradan, $\||T_n| - |T|\| \to 0$ elde edilir. Her n için $|T_n| \in AW_L(E,F)$, ve $AW_L(E,F)$ operatör normu ile $\mathscr{L}(E,F)$ uzayında kapalı olduğundan [5, Önerme 2.1 (1)], $|T| \in AW_L(E,F)$ olur. Teorem 3.1 den, T^+ ve T^- operatörlerinin de $AW_L(E,F)$ uzayında olduğu görülür. Dolayısıyla, $T \in AW_L(E,F)$ dir ve $AW_L^r(E,F)$ Dedekind tam bir Banach latistir.*

Değer uzayı F nin Dedekind tam bir Banach latis olduğu kabul edilerek, $AW_M^r(E,F)$ için aşağıdaki teorem elde edilir. Yukarıdaki teoremin ispatında ilgili değişiklikler yapılarak (Teorem 3.2 ve [5, Önerme 2.1 (2)]) teorem ispatlanır.

Teorem 3.5. *Her E ve F Banach latisi için, F Dedekind tam ise, $AW_M^r(E,F)$ uzayı regüler norm ile Dedekind tam bir Banach latistir.*

İspat. *$T \in AW_M^r(E,F)$ olsun. Tanımdan, $\pm T \leq U$ olacak şekilde bir pozitif $U \in AW_M(E,F)$ operatörü vardır. F Dedekind tam olduğundan, T operatörünün $\mathscr{L}^r(E,F)$ uzayında modülü vardır. Buradan, $|T| \leq U$ eşitsizliği ve hemen hemen M-zayıf kompakt operatörler için baskınlık özelliği (Teorem 3.2) kullanılarak, $|T| \in AW_L^r(E,F)$ olduğu görülür. Böylece, $AW_M^r(E,F)$ bir Riesz uzayıdır. Şimdi, $AW_M^r(E,F)$ uzayının kapanışında bir T operatörü alalım. Buna göre, $AW_M^r(E,F)$ uzayında $\|T_n - T\|_r \to 0$ olacak şekilde bir (T_n) dizisi vardır. Her n için T_n operatörünün modülü olduğundan, T operatörünün $\mathscr{L}^r(E,F)$ uzayında modülü vardır ve $\||T_n| - |T|\|_r \to 0$ olur [31, Teorem 2.1]. Buradan, $\||T_n| - |T|\| \to 0$ elde edilir. Her n için $|T_n| \in AW_M(E,F)$ ve $AW_M(E,F)$ operatör normu ile $\mathscr{L}(E,F)$ uzayında kapalı olduğundan [5, Önerme 2.1 (2)], $|T| \in AW_L(E,F)$ elde edilir. Teorem 3.2 gereğince, $T \in AW_M(E,F)$ olur,ve böylece $AW_M^r(E,F)$ Dedekind tam bir Banach latistir.*

Şimdi, $AW_L^r(E,F)$ ve $AW_M^r(E,F)$ uzaylarının hangi koşullar altında sıra sürekli regüler norma sahip olduğunu inceleyelim. $AW_L^r(E,F)$ uzayı için [4, Teorem 3.1] ile aynı gerek ve yeter şart elde edilir.

Teorem 3.6. *E ve F Banach latis ve $F^a \neq \{0\}$ olsun. $AW_L^r(E,F)$ nin regüler normunun sıra sürekli olması için gerek ve yeter şart E' nin normunun sıra sürekli olmasıdır.*

İspat. *E' nin normu sıra sürekli olsun. Teorem 3.1 gereğince, her $T \in AW_L^r(E,F)_+$ için $[0,T]$ aralığının $AW_L^r(E,F)$ ve $\mathscr{L}^r(E,F)$ uzaylarında eşit olduğu görülür. $T \in AW_L^r(E,F)_+$ alalım. E' sıra sürekli norma sahip olduğundan, T operatörü M-zayıf kompakttır [22, Teorem 4]. $T(E) \subseteq F^a$ bağıntısından ve F^a nın normu sıra sürekli olduğundan, [0,T] aralığında norm sıra süreklidir [16, Teorem 3.6.19]. Karşıt olarak, $AW_L^r(E,F)$ uzayı sıra sürekli norma sahip olsun. Bir $0 \neq y \in F_+^a$ ve E' üzerinde $f_\alpha \downarrow 0$ şartını sağlayan keyfi bir (f_α) ağı alalım. Her α için, $T_\alpha : E \to F$, $T_\alpha(x) = f_\alpha(x)y$, operatörünü tanımlayalım. Buradan, $T_\alpha \downarrow 0$ olduğu görülür, ve hipotezden $\|T_\alpha\| = \|f_\alpha\|\,\|y\| \to 0$ elde edilir. Yani, E' nin normu sıra süreklidir.*

$AW_M^r(E,F)$ uzayının sıra sürekli regüler norma sahip olması için öncelikle bir gerek şart verelim.

Teorem 3.7. *E ve F Banach latis ve $(E')^a \neq \{0\}$ olsun. Eğer $AW_M^r(E,F)$ nin regüler normu sıra sürekli ise, F nin sıra sürekli normu vardır.*

İspat. *Bir* $0 \neq f \in (E')^a$ *ve* F *üzerinde* $y_\alpha \downarrow 0$ *şartını sağlayan bir* (y_α) *ağı alalım. Her* α *için* $T_\alpha : E \to F$, $T_\alpha(x) = f(x)y_\alpha$, *operatörünü tanımlayalım.* T_α *operatörünün M-zayıf kompakt, dolayısıyla hemen hemen M-zayıf kompakt olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca, her* $x \in E_+$ *için* $T_\alpha(x) \downarrow 0$ *sağlanır. Yani,* $T_\alpha \downarrow 0$ *olur.* $AW_M^r(E,F)$ *uzayı sıra sürekli norma sahip olduğundan,* $\|T_\alpha\| = \|f\|\|y_\alpha\| \to 0$ *elde edilir. Sonuç olarak,* F *nin sıra sürekli normu vardır.*

Yukarıda verilen gerekli şartın yeterli olmadığını bir örnek ile gösterelim.

Örnek 3.1. $AW_M^r(c_0,c_0)$ *uzayını göz önüne alalım. Burada,* c_0 *ın sıra sürekli norma sahip olduğunu biliyoruz.* $AW_M^r(c_0,c_0)$ *uzayının sıra sürekli norma sahip olmadığını gösterelim. Aksine, sıra sürekli normu olduğunu kabul edelim.* $I : c_0 \to c_0$ *birim operatörünü tanımlayalım.* I *operatörü bir pozitif hemen hemen M-zayıf kompakt operatörüdür [22, s. 143]. Teorem 3.2 gereğince,* $[0,I]$ *aralığının* $AW_M^r(E,F)$ *ve* $\mathscr{L}^r(E,F)$ *uzayında eşit olduğu görülür. Dolayısıyla,* $[0,I]$ *aralığında norm sıra süreklidir. Böylece,* I *operatörü M-zayıf kompakt olur [16, Önerme 3.6.19]. Bu ise bir çelişkidir [22, s. 143].*

$AW_M^r(E,F)$ nin regüler normunun sıra sürekli olması için bazı yeter koşullar verelim.

Teorem 3.8. E *ve* F *Banach latis olsun. Eğer aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa,* $AW_M^r(E,F)$ *nin regüler normu sıra süreklidir.*

(i) E' *ve* F'' *nin sıra sürekli normu vardır.*

(ii) F *uzayı yansımalıdır.*

(iii) E *bir birimli AM-uzayıdır ve* F *nin sıra sürekli normu vardır.*

İspat. $T \in AW_M^r(E,F)_+$ *olsun. Yukarıdaki her bir (i-iii) şartında* F *sıra sürekli norma sahiptir. Dolayısıyla,* T *operatörünün M-zayıf kompakt olduğunu göstermek yeterlidir [16, Önerme 3.6.19]. Öncelikle (i) ifadesi sağlansın.* T *operatörü hemen hemen M-zayıf kompakt olduğundan,* T' *operatörü hemen hemen L-zayıf kompakttır [5, Teorem 2.5]. Böylece,* T' *operatörü L-zayıf kompakttır [22, Sonuç 4], ve dolayısıyla* T *operatörü M-zayıf kompakttır. Şimdi (ii) ifadesi sağlansın. Benzer şekilde,* T' *operatörü hemen hemen L-zayıf kompakttır.* F' *yansımalı olduğundan (çünkü* F *yansımalıdır),* T' *operatörü L-zayıf kompakttır, ve dolayısıyla* T *operatörü M-zayıf kompakttır. Son olarak (iii) sağlansın.* E *bir birimli AM-uzayı olduğundan,* T *operatörü yarı-kompakttır [8, s. 339, Ex. 15].* F *sıra sürekli norma sahip olduğundan,* T *operatörü L-zayıf kompakttır [16, Sonuç 3.6.14], ve dolayısıyla zayıf kompakttır. [8, Teorem 5.62] gereğince,* T *operatörü M-zayıf kompakttır.*

3.3 $AW_L(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ ve $AW_M(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ uzayları

Bu kısımda regüler hemen hemen L-zayıf kompakt ve regüler hemen hemen M-zayıf kompakt operatörlerin uzaylarının Banach latis olma durumlarını inceleyeceğiz. Genel olarak, $AW_L^r(E,F) \subseteq AW_L(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ ve $AW_M^r(E,F) \subseteq AW_M(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ bağıntıları sağlanır. Teorem 2.30 dan, $AW_L(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ ve $AW_M(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ uzaylarının genel olarak Riesz uzayı olmadıkları görülür. Öncelikle, $AW_L(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ uzayını ele alalım.

Önerme 3.3. *X bir Banach uzayı, F bir Banach latis ve $T : X \to F$ operatörü hemen hemen L-zayıf kompakt olsun. F uzayı ayrık ise, T bir Dunford-Pettis operatörüdür.*

İspat. *$W \subseteq X$ herhangi bir relatif zayıf kompakt küme olsun. $\varepsilon > 0$ alalım. Önerme 3.1 gereğince,*

$$T(W) \subseteq [-u,u] + \varepsilon B_F \tag{3.17}$$

olacak şekilde bir $u \in F_+^a$ vardır. F ayrık olduğundan, F^a ideali de ayrıktır. F^a ayrık ve sıra sürekli norma sahip olduğundan, $[-u,u]$ aralığı kompakttır [32, Teorem 6.1]. Dolayısıyla, $T(W)$ kümesi tümden sınırlıdır [8, Teorem 3.1]. Yani, T bir Dunford-Pettis operatörüdür.

Önerme 3.4. *X bir Banach uzayı, F bir Banach latis olsun. F uzayı ayrık ve sıra sürekli norma sahipse, bir $T : X \to F$ operatörünün hemen hemen L-zayıf kompakt olması için gerek ve yeter şart Dunford-Pettis operatörü olmasıdır.*

İspat. *F nin sıra sürekli normu olduğundan, her $T : X \to F$ Dunford-Pettis operatörü hemen hemen L-zayıf kompakttır [22, Teorem 1]. Gerek şart ise Önerme 3.3 den sağlanır.*

Sonuç 3.1. *E sıra sürekli norma sahip bir Banach latis ve F ayrık bir AL-uzayı ise, $AW_L(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ uzayı $\mathscr{L}_r(E,F)$ içinde bir band oluşturur. Bu durumda, $AW_L(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ uzayı r-normu ile bir Banach latistir.*

İspat. *Önerme 3.4 ve Teorem 2.28 gereğince, $AW_L(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ uzayı bir band olur. $AW_L(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ nin r-normu ile bir Banach latis olduğu ise Teorem 2.8 den görülür.*

Önerme 3.5. *E pozitif Schur özelliğine sahip bir Banach latis ve F sıra sürekli norma sahip ayrık bir Banach latis olsun. Bu durumda, regüler bir $T : E \to F$ operatörünün hemen hemen L-zayıf kompakt olması için gerek ve yeter şart AM-kompakt olmasıdır.*

İspat. *F ayrık ve sıra sürekli norma sahipse, her regüler $T : E \to F$ operatörü AM-kompakt olur [33, Önerme 2 (2)]. Tersine, T operatörü AM-kompakt olsun. Keyfi bir $W \subseteq E$ relatif zayıf kompakt küme alalım. E nin pozitif Schur özelliği olduğundan, W kümesi yaklaşık sıra sınırlıdır [3, Teorem 3.1]. T operatörü AM-kompakt olduğundan, [17, Teorem 123.2] gereğince $T(W)$ kümesi relatif kompakttır. Ayrıca, F nin sıra sürekli normu olduğundan, $T(W)$ kümesi L-zayıf kompakttır. Yani, T operatörü hemen hemen L-zayıf kompakttır.*

Sonuç 3.2. *E pozitif Schur özelliğine sahip bir Banach latis ve F sıra sürekli norma sahip ayrık bir Banach latis ise, $AW_L(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ uzayı $\mathscr{L}_r(E,F)$ içinde bir band oluşturur. Bu durumda, $AW_L(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ uzayı r-normu ile bir Banach latistir.*

İspat. *Önerme 3.5 ve Teorem 2.27 den, $AW_L(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ uzayının bir band ve dolayısıyla r-normu ile bir Banach latis olduğu görülür.*

Önerme 3.6. *E' nin sıra sürekli normu varsa ve F bir AM-uzayı ise, $AW_L(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ uzayı r-normu ile bir Banach latistir.*

İspat. *$T : E \to F$ operatörü regüler ve hemen hemen L-zayıf kompakt olsun. E' nin normu sıra sürekli olduğundan, T operatorü M-zayıf kompakttır [22, Teorem 4]. Ayrıca $T(E) \subseteq F^a$ ve F^a nın normu sıra sürekli olduğundan, T operatörü L-zayıf kompakttır [16, Sonuç 3.6.14]. Teorem 2.32 gereğince, T nin modülü vardır ve L-zayıf kompakttır (dolayısıyla hemen hemen L-zayıf kompakttır). Yani, $AW_L(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ uzayı bir Riesz uzayıdır. Şimdi bu uzayın $\mathscr{L}_r(E,F)$ içinde kapalı olduğunu gösterelim. $(T_n) \subseteq AW_L(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ dizisi, bir $T \in \mathscr{L}_r(E,F)$ elemanına r-normunda yakınsak olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için T_n nin modülü olduğundan, T nin $\mathscr{L}^r(E,F)$ uzayında modülü vardır ve $\||T_n| - |T|\|_r \to 0$ sağlanır [31, Teorem 2.1]. Dolayısıyla, $\||T_n| - |T|\| \to 0$ olur. Her n için $|T_n| \in AW_L(E,F)$, ve $AW_L(E,F)$ uzayı operatör normuna göre $\mathscr{L}(E,F)$ uzayında kapalı olduğundan [5, Önerme 2.1 (1)], $|T| \in AW_L(E,F)$ elde edilir. Teorem 3.1 gereğince, $T \in AW_L(E,F)$ dir. Yani, $AW_L(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ bir Banach latistir.*

Son olarak, $AW_M(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ uzayı için bir sonuç verelim.

Önerme 3.7. *E bir birimli AM-uzayı ve F sıra sürekli norma sahip ayrık bir Banach latis ise, regüler bir $T : E \to F$ operatörünün hemen hemen M-zayıf kompakt olması için gerek ve yeter şart AM-kompakt olmasıdır. Bu durumda, $AW_M(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ uzayı r-normu ile bir Banach latistir.*

İspat. *F ayrık ve sıra sürekli norma sahip olduğundan, T hemen hemen M-zayıf kompakt operatörü AM-kompakttır [33, Önerme 2 (2)]. Tersine, T operatörü AM-kompakt ise, E bir birimli AM-uzayı olduğundan, T kompakttır. E' nin normu sıra sürekli olduğundan, T operatörü M-zayıf kompakt [16, Teorem 3.7.10], dolayısıyla hemen hemen M-zayıf kompakttır. Teorem 2.27 gereğince, $AW_M(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ uzayı $\mathscr{L}_r(E,F)$ içinde bir band ve dolayısıyla r-normu ile bir Banach latistir.*

4
SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, hemen hemen L-zayıf ve hemen hemen M-zayıf kompakt operatörlerin baskınlık özelliğini sağladığını gösterdik. Bu özelliği kullanarak, $AW_L^r(E,F)$ uzayının Dedekind tam bir Banach latis olduğunu ve F Dedekind tam ise, $AW_M^r(E,F)$ uzayının da Dedekind tam bir Banach latis olduğunu elde ettik. Bu uzayların sıra sürekli norma sahip olması için gerek ve yeter koşullar verdik. Son olarak da, $AW_L(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ ve $AW_M(E,F) \cap \mathscr{L}_r(E,F)$ uzaylarının bazı ek koşullar altında Banach latis oluşturduğunu gözlemledik.

İlerisi için, çalıştığımız uzayların AL- veya AM-uzayı olma durumları incelenebilir.

KAYNAKÇA

[1] P. Meyer-Nieberg, "Über Klassen schwach kompakter Operatoren in Banachverbänden," *Mathematische Zeitschrift*, vol. 138, no. 2, pp. 145–159, 1974.

[2] K. D. Schmidt, "On the modulus of L-and M-weakly compact operators," vol. 91, no. 1, pp. 89–92, 1988.

[3] Z. L. Chen, A. W. Wickstead, "L-weakly and M-weakly compact operators," *Indagationes Mathematicae*, vol. 10, no. 3, pp. 321–336, 1999.

[4] E. Bayram, A. W. Wickstead, "Banach lattices of L-weakly and M-weakly compact operators," *Archiv der Mathematik*, vol. 108, no. 3, pp. 293–299, 2017.

[5] K. Bouras, D. Lhaimer, M. Moussa, "On the class of almost L-weakly and almost M-weakly compact operators," *Positivity*, vol. 22, no. 5, pp. 1433–1443, 2018.

[6] U. Krengel, "Über den Absolutbetrag stetiger linearer Operatoren und seine Anwendung auf ergodische Zerlegungen," *Mathematica Scandinavica*, vol. 13, no. 2, pp. 151–187, 1963.

[7] ——, "Remark on the modulus of compact operators," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 72, no. 1. P1, pp. 132–133, 1966.

[8] C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Positive operators*. Springer Science & Business Media, 2006.

[9] P. Dodds, D. Fremlin, "Compact operators in Banach lattices," *Israel Journal of Mathematics*, vol. 34, no. 4, pp. 287–320, 1979.

[10] C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, "On weakly compact operators on Banach lattices," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 83, no. 3, pp. 573–578, 1981.

[11] ——, "Dunford-Pettis operators on Banach lattices," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 274, no. 1, pp. 227–238, 1982.

[12] G. Groenewegen, A. van Rooij, "The modulus of a weakly compact operator," *Mathematische Zeitschrift*, vol. 195, no. 4, pp. 473–480, 1987.

[13] Z. Chen, A. Wickstead, "Vector lattices of weakly compact operators on Banach lattices," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 352, no. 1, pp. 397–412, 2000.

[14] C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, "Positive compact operators on Banach lattices," *Mathematische Zeitschrift*, vol. 174, no. 3, pp. 289–298, 1980.

[15] A. W. Wickstead, "Converses for the Dodds–Fremlin and Kalton–Saab theorems," vol. 120, no. 1, pp. 175–179, 1996.

[16] P. Meyer-Nieberg, *Banach lattices*. Springer Science & Business Media, 2012.

[17] A. C. Zaanen, *Riesz spaces II*. Elsevier, 1983.

[18] A. W. Wickstead, "Extremal structure of cones of operators," *The Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 32, no. 2, pp. 239–253, 1981.

[19] N. Kalton, P. Saab, "Ideal properties of regular operators between Banach lattices," *Illinois Journal of Mathematics*, vol. 29, no. 3, pp. 382–400, 1985.

[20] D. Fremlin, "Riesz spaces with the order-continuity property. ı," vol. 81, no. 1, pp. 31–42, 1977.

[21] B. Aqzzouz, R. Nouira, L. Zraoula, "Compactness properties of operators dominated by AM-compact operators," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 135, no. 4, pp. 1151–1157, 2007.

[22] A. Elbour, F. Afkir, M. Sabiri, "Some properties of almost L-weakly and almost M-weakly compact operators," *Positivity*, vol. 24, no. 1, pp. 141–149, 2020.

[23] F. Afkir, K. Bouras, A. Elbour, S. El Filali, "Weak compactness of almost L-weakly and almost M-weakly compact operators," *Quaestiones Mathematicae*, pp. 1–10, 2020.

[24] C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Locally solid Riesz spaces with applications to economics*, 105. American Mathematical Soc., 2003.

[25] H.-U. Schwarz, "Banach lattices and operators," *Teubner Texte zur Math.*, vol. 71, 1984.

[26] A. C. Zaanen, *Introduction to operator theory in Riesz spaces*. Springer Science & Business Media, 2012.

[27] C. D. Aliprantis, K. Border, *Infinite dimensional analysis*. Springer, 2006.

[28] J. Sanchez, "Operators on Banach lattices," Ph.D. dissertation, Complutense University, Madrid, 1985.

[29] W. Wnuk, "Banach lattices with the weak Dunford-Pettis property," *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, vol. 42, no. 1, pp. 227–236, 1994.

[30] B. Aqzzouz, A. Elbour, "Some characterizations of almost Dunford–Pettis operators and applications," *Positivity*, vol. 15, no. 3, pp. 369–380, 2011.

[31] Z. L. Chen, A. W. Wickstead, "The order properties of r–compact operators on Banach lattices," *Acta Mathematica Sinica, English Series*, vol. 23, no. 3, pp. 457–466, 2007.

[32] W. Wnuk, *Banach lattices with order continuous norms*. Polish Scientific Publishers PWN, 1999.

[33] B. Aqzzouz, A. Elbour, "Some new results on the class of AM-compact operators," *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, vol. 59, no. 2, pp. 267–275, 2010.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Makale

1. B. Akay, Ö. Gök, "On the Lattice Properties of Almost L-Weakly and Almost M-Weakly Compact Operators," Journal of Function Spaces, vol. 2021, pp. 1-5, 2021.

Konferans Bildirisi

1. B. Akay, Ö. Gök, "Vector lattices of almost L-weakly and almost M-weakly compact operators," International Conference of Young Mathematicians, Kyyiv, 2021.