

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

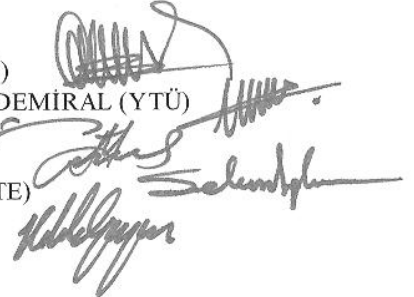
**DOYUMLU EYLEYİCİLERE SAHİP DPD SİSTEMLER  
İÇİN DAYANIKLI KONTROLÇÜ TASARIMI**

Elektrik Yük. Müh. Akın DELİBAŞI

**FBE Elektrik Mühendisliği Anabilim Dalı Kontrol ve Otomasyon Programında  
Hazırlanan**

**DOKTORA TEZİ**

**Tez Savunma Tarihi** : 20 Ekim 2008  
**Tez Danışmanı** : Prof. Dr. Galip CANSEVER (YTÜ)  
**İkinci Tez Danışmanı**: Yrd. Doç. Dr. İbrahim B. KÜÇÜKDEMİRAL (YTÜ)  
**Jüri Üyeleri** : Prof. Dr. Leyla GÖREN (İTÜ)  
: Prof. Dr. Çingiz HACIYEV (İTÜ)  
: Prof. Dr. Selim SİVRİOĞLU (GYTE)  
: Doç. Dr. Haluk GÖRGÜN (YTÜ)



**İSTANBUL, 2008**

## İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ . . . . .	iv
KISALTMA LİSTESİ . . . . .	v
ŞEKİL LİSTESİ . . . . .	vi
ÇİZELGE LİSTESİ . . . . .	vii
ÖNSÖZ . . . . .	viii
ÖZET . . . . .	ix
ABSTRACT . . . . .	x
1. GİRİŞ . . . . .	1
2. DIŞBÜKEY OPTİMİZASYON VE DOĞRUSAL MATRİS EŞİTSİZLİĞİ . . . . .	4
2.1. Giriş . . . . .	4
2.2. Dışbükey Analiz Olgusu . . . . .	5
2.3. Dışbükey Optimizasyon . . . . .	9
2.3.1. Yerel ve Global En Küçüklük . . . . .	9
2.3.2. Dışbükey Programlar . . . . .	10
2.4. Doğrusal Matris Eşitsizlikleri (DME) . . . . .	12
2.4.1. DMElerin Kullanım Alanları . . . . .	14
2.5. DMElerin Çözüm Yöntemleri . . . . .	16
2.5.1. Elipsoid Yöntemi . . . . .	16
2.5.2. İç Nokta Yöntemi . . . . .	17
3. KAZANÇ PLANLAMALI KONTROL VE SÖZDE DPD SİSTEMLER . . . . .	19
3.1. Kazanç Planlamalı Kontrol . . . . .	19
3.1.1. Kazanç Planlamamın Özellikleri . . . . .	20
3.2. Doğrusal Parametreleri Değişen (DPD) Sistemler . . . . .	21
3.2.1. Sözde-DPD Sistemler . . . . .	23
4. EYLEYİCİ DOYUMU . . . . .	25
4.1. Giriş . . . . .	25
4.2. Doyumlu Eyleyicilere Sahip Sistemlerde $\mathcal{L}_2$ Kazanç Kararlılığı . . . . .	29
5. DPD SİSTEMLER İÇİN YENİ $\mathcal{H}_2$ NORM HESABI . . . . .	36

6.	PBHÇLF TABANLI KONTROLÇÜ TASARIMI . . . . .	38
6.1.	Parametrelerine Bağımlı DMElerin Çokterimli Çözümlerinin Varlığı . . . . .	38
6.2.	Parametrelerine Bağımlı Homojen Çokterimli Matris Gösterimi . . . . .	39
6.3.	Tutuculuğun Azaltılması: Pólya Gevşetmesi (Relaxation) . . . . .	40
6.4.	PBHÇLF Tabanlı, Garanti Edilmiş $\mathcal{H}_2$ Performansı Sağlayan Kontrol . . . . .	41
6.5.	PBHÇLF Tabanlı, $\mathcal{L}_2$ Kararlı Kılıcı Kontrol . . . . .	42
6.6.	Optimizasyon Problemi . . . . .	44
6.7.	Sayısal Örnek . . . . .	44
6.7.1.	Ters Sarkacın Sözde DPD Modeli . . . . .	44
6.7.1.1.	Sözde-DPD Modelin Köşe Noktaları . . . . .	48
6.7.2.	Doyumlu Eyleyicilere Sahip DPD Sistemler için $\mathcal{L}_2$ , $\mathcal{H}_2$ Karışık Kontrol . . . . .	49
7.	SONUÇLAR ve ÖNERİLER . . . . .	52
	EKLER . . . . .	59
Ek 1.	ÖNERİLEN YÖNTEMİN m. DOSYASI . . . . .	59
	ÖZGEÇMİŞ . . . . .	63

## SİMGE LİSTESİ

- $m_c$  : Arabanın kütlesi  
 $m_p$  : Sarkacın kütlesi  
 $L_p$  : Sarkacın uzunluğu  
 $I_p$  : Sarkacın atalet momenti  
 $K_m$  : Motorun ters EMK sabiti  
 $K_t$  : Motorun tork sabiti  
 $K_g$  : Dişli takımı oranı  
 $R_a$  : Araba motorun armatür direnci  
 $r$  : Arabanın tekerlek yarıçapı  
 $B_{eq}$  : Motorun eşdeğer viskoz sönüm sabiti  
 $B_p$  : Sarkacın eşdeğer viskoz sönüm sabiti  
 $\zeta$  : Sarkacın düşey eksen açısı  
 $\alpha$  : Zamanla değişen parametrelerin sahiptelik vektörü

## KISALTMA LİSTESİ

- DPD : Doğrusal Parametreleri Değişen  
PBHÇ : Parametrelerine Bağımlı Homojen Çokterimli  
DME : Doğrusal Matris Eşitsizliği  
PBHÇLF : Parametrelerine Bağımlı Homojen Çokterimli Lyapunov Fonksiyonu

## ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.1	DPD Yapı ve DPD Kontrolcünün oluşturduğu sistem. . . . . 22
Şekil 6.1	Ters Sarkaç . . . . . 45
Şekil 6.2	$g = 2$ iken $-\sigma_1 \eta + \sigma_2 \frac{1}{\beta} + \sigma_3 \gamma$ 'nın değişim eğrisi. . . . . 50
Şekil 6.3	Farklı $g$ değerleri için $\mathcal{S}_0$ elipsoidinin mümkün olan tüm projeksiyonları: $g = 1$ (noktalı çizgi), $g = 2$ (kesik çizgi), $g = 4$ (kesik-noktalı çizgi), $g =$ $10$ (düz çizgi). . . . . 50

## ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 6.1 Ters sarkaç sisteminin parametre değerleri. . . . .	46
Çizelge 6.2 $g$ ve $d$ 'nin farklı değerleri için oluşan $1/\beta$ değeri. . . . .	51

## ÖNSÖZ

Doktora tezimi sonlandırmış olmam yine bende bir şeylerin başlangıcında olduğum hissini uyandırmakta. Yani bir şeyler devam edip de ortaya meyvelerini çıkardıkça hep başlangıçta olduğunuzu görme hissi. Neden sonu değildir diye merak ediyorsanız, insan hayatındaki bu evrelerin, aynen akademik yaşamın bir sonu olmadığı gibi, sonu olmamasıdır.

Her zaman olduğu gibi beni karşılıksız destekleyen aileme, tüm üniversite öğrenimim boyunca beni destekleyen ve akademik yaşam içersine sokan sevgili hocam Prof. Dr. Galip Cansever'e, dayanıklı kontrol kuramı ile tanışmamı sağlayan Prof. Dr. Leyla Gören'e ve Doç. Dr. M. T. Söylemez'e, oda arkadaşım Arş. Gör. Türker Türker'e ve adımı bu sınırlı satırlar dahilinde sayamadığım, tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Tezin oluşumunda en büyük katkıya sahip olan kişiye, dersler dahil her an yanımda olan, değerli hocama, sıkıntımı paylaştığım abime, doktora dönemi boyunca elde ettiğim tüm başarı ve başarısızlıklarımın ortağına, Yrd. Doç. Dr. İbrahim Beklan Küçükdemiral'a sonsuz teşekkür ederim.

Ağustos 2008

Akın Delibaşı



# DOYUMLU EYLEYİCİLERE SAHİP DPD SİSTEMLER İÇİN DAYANIKLI KONTROLCÜ TASARIMI

## ÖZET

Kazanç planlamalı kontrol doğrusal kontrolün basit yapısı ile doğrusal olmayan kontrolün global etkisini bir araya toplayan en popüler doğrusal olmayan kontrol tekniklerinden birisidir. Bundan dolayı, bu teknik kimyasal işlemlerin kontrolünden havacılık sistemlerine kadar işlemlerde sıklıkla ve başarılı ile uygulanmaktadır. Aynı zamanda kazanç planlamalı kontrol, doğrusal parametreleri değişen (DPD) sistemlerde çok güçlü bir tekniktir. Sistem için doğrusal parametreleri değişen modelin hesaplanabilmesi için iki temel metot vardır. Tarihsel olarak en yaygın yaklaşım doğrusal olmayan yapının denge noktalarında veya bir başka değişle çalışma noktalarında Jacobian doğrusallaştırma temelinde kuruludur. Bir başka yaklaşımsa sözde-DPD planlama olarak bilinen sistem dinamiklerinin, doğrusal olmayan terimlerin ölçülebilen planlama parametreleri olarak şekil değiştirip tekrar yazılmasıdır. Bundan dolayı sözde-DPD yaklaşımı doğrusal olmayan sistemlerde hiç bir ihmal yapmadan doğrusal kontrol tekniklerini uygulanabilmesi gibi çok güzel bir imkan sağlamaktadır.

Doğrusal matris eşitsizlikleri DPD sistemler için uygun kontrolcünün bulunmasında sıklıkla kullanılmaktadır. Ancak, ürettikleri çözümlerin tutucu olması beklenilmektedir. Çünkü bu çeşit araçların gevşetmelerinin genellikle sıkı olduğu gözlenmektedir. Bu tezde, tutuculuğun sistematik azaltılması için gerekli olan Pólya gevşetme tekniği kullanılmıştır.

Bu tezin temel amacı doyumlu eyleyicilere ve  $\mathcal{L}_2$  sınırlı bozuculara sahip, doğrusal parametreleri değişen (DPD) sistemler için  $\mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{H}_2$  karışık kazanç planlamalı doğrusal olmayan durum geribesleme kontrolcüsünü tasarlamaktır. Öncelikle, Parametrelerine Bağımlı Homojen Çokterimli (PBHÇ) gösterimi üzerine kurulu yeni bir  $\mathcal{H}_2$  kontrolcü formalizasyonu gösterilmiştir. Sonra doyumlu eyleyicili ve  $\mathcal{L}_2$  sınırlı bozuculu DPD sistemler için alt optimal  $\mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{H}_2$  durum geribesleme kontrolcüsünün kesinliğini arttırıcı ardışıl DME koşullarının üretilmesi için sistematik bir prosedür ortaya koyulmuştur. Ortaya konulan metotda eyleyici doyumunu için modifiye edilmiş sektör durumlarından ve PBHÇ matris gösteriminden faydalanmaktadır.

Son olarak, ters sarkacın sözde-DPD modeli hareket denklemlerinden elde edilmiş ve bu model önerilen yaklaşımın faydalarının gösterilmesi için kullanılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Parametrelerine Bağlı Homojen Çokterimli Lyapunov Fonksiyonu, Giriş Çıkış arasındaki kararlılık: DMEler, Doyumlu Eyleyiciler

# ROBUST CONTROLLER DESIGN FOR LPV SYSTEMS WITH SATURATING ACTUATORS

## ABSTRACT

Gain-scheduling control is one of the most popular nonlinear control method which gathers the simple structure of linear controllers together with the global effectiveness of the nonlinear controllers. Hence, this method has been widely and successfully applied in fields ranging from chemical process control to aerospace systems. Gain-scheduling is also a very powerful method for control of linear parameter varying (LPV) systems. There are two main methods to compute a linear parameter varying model for the plant. Historically, the most common approach is based on Jacobian linearization of the nonlinear plant about a family of equilibrium points, also called operating points or set points. Another approach is quasi-LPV scheduling, in which the plant dynamics are rewritten to disguise nonlinearities. In this approach, time-varying parameters are mostly used as scheduling variables. Therefore, quasi-LPV approach gives us very good opportunity to use efficient and well-known linear control techniques over nonlinear plants without any negligences.

Linear Matrix Inequalities are generally used to find adequate controllers for LPV systems. However, their solutions are expected to be conservative since they mostly provide sufficient conditions. It is well known that the provided solutions are mostly tight. To overcome this problem, in this work, an extended Pólya relaxation technique has been developed. This extended Pólya relaxation is necessary for systematic reduction of conservatism that can be actually shown to be asymptotically exact.

Main purpose of this thesis is to solve the design problem of mixed  $\mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{H}_2$  gain-scheduling nonlinear state feedback controller for Linear Parameter Varying (LPV) systems subjected to actuator saturations and  $\mathcal{L}_2$  bounded disturbances. First, a new formulation of  $\mathcal{H}_2$  controllers has been presented based on the Homogeneous Polynomial Parameter Dependent (HPPD) representation. Then a systematic procedure has been presented to generate a sequence of LMI conditions of increasing precision for obtaining a sub-optimal  $\mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{H}_2$  state-feedback controller for LPV systems subject to actuator saturations and  $\mathcal{L}_2$ -bounded disturbances. The presented method utilizes the modified sector condition for actuator saturation formalization and HPPD matrix representation.

Finally, the efficiency of the proposed approach has been presented through the control of an inverted pendulum system which has been modeled by quasi-LPV modeling technique.

**Key words:** Homogeneous-Polynomial-Parameter-Dependent Lyapunov Functions, Input to State Stability:LMIs, Actuator Saturations

## 1. GİRİŞ

Kazanç planlamalı kontrol, doğrusal kontrolün basit yapısı ile doğrusal olmayan kontrolün global etkisini bir araya toplayan en popüler doğrusal olmayan kontrol tekniklerinden birisidir. Bundan dolayı, bu teknik; kimyasal işlemlerin kontrolünden, havacılık sistemlerine kadar oldukça fazla alanda başarılı ile uygulanmaktadır. Rugh ve Shamma (2000) ve Leith ve Leihead (2000)'ın yayınları, kazanç planlamalı kontrolün tarih boyunca gelişimini ve geldiği noktayı özetlemek açısından faydalı kaynaklar olmuştur. Kazanç planlamalı kontrol, doğrusal parametreleri değişen (DPD) sistemler için oldukça güçlü bir kontrol tekniğidir. Kontrol tekniğinin sistemdeki parametre değişimleri ile ilişkili olması, sistemin farklı modlara geçtiği durumda, bazı kabullenmeler yapılmadan aynı performans ile çalışmasını sağlamaktadır. Bu etkin özellikleri nedeni ile, çok karmaşık (ileri derecede doğrusal olmayan) kontrol problemlerinde rahatlıkla uygulanabilmektedirler.

Rugh ve Shamma (2000) çalışmasında, kazanç planlamalı kontrol tekniğinin iyi ve kötü yönleri derlemiş ve tasarım için gerekli adımlar alternatifleriyle vurgulanmıştır. Özellikle bu yayında, sözde-DPD sistemlerin hesaplanmasına yönelik dikkat edilmesi gereken noktaların vurgulanması ve basit doğrusal olmayan ifadelerden havacılık modellerindeki karmaşık ifadeler kadar geniş bir alanda örnekler sunulması, konu üzerinde çalışan araştırmacıların ufkunu açmıştır.

Son yıllarda DPD kontrol tekniklerinde belirgin ilerlemeler kaydedilmiştir. Özellikle, önceki dönemlerde kullanılan sabit Lyapunov fonksiyonu yaklaşımından, parametrelerine bağımlı Lyapunov fonksiyonlarına geçilmesi, bu çalışma konusundaki en büyük sıçrama olmuştur (Feron vd., 1996), (de Souza vd., 2000), (Montagner ve Peres, 2004). Gelişimin en büyük sebebi ortaya çıkarılan bu yeni yaklaşımın daha az tutucu çözümler üretmesidir.

Feron vd. (1996) yayınlarında, parametrik belirsizlikler içeren sistemler için dayanıklı kararlılık problemini incelemişlerdir. Popov'un kararlılık kriterini hatırlatan ancak ondan daha az tutucu bir kriterle, parametrelerine bağımlı Lyapunov fonksiyonlarının varlığı için gerek koşullar verilmiştir. Ayrıca bu çalışmada, eşdeğer frekans tanım bölgesi kriterleri gösterilmiştir. Dayanıklı kontrol sentezi için parametrelerine bağımlı Lyapunov fonksiyonları incelenmiştir. Yayında, üretilen dayanıklı kontrolcünün derecesinin, sistemin kendi derecesi ile sınırlı olabileceği gösterilmiştir.

de Souza vd. (2000) çalışmalarında gerçek zamanda değişen belirsiz parametreler içeren doğrusal sistemler için dayanıklı  $\mathcal{H}_\infty$  performans analizi yapılmıştır. Belirsiz parametreler, sistem matrisi içersinde ilgin bir şekilde bulunmakta ve sistem bir politop oluşturmaktadır. Feron vd. (1996) çalışmasından farklı olarak, parametrelerine bağımlı Lyapunov fonksiyonlarıyla, temel dayanıklı kontrol problemlerinden  $\mathcal{H}_\infty$  performans analizini yapmışlardır.

(Montagner ve Peres, 2004) Doğrusal parametreleri değişen sistemler için aynı yaklaşımı kullanarak durum geri-besleme mantığında kazanç planlamalı kontrol geliştirerek sistemin dayanıklı kararlılığını ispatlamışlardır.

Lyapunov fonksiyonu temelli tasarımın esas amacı dayanıklı kararlılıktır. Bu yaklaşım zamanla dayanıklı performans sentezi içinde kullanılmış ve temel performans problemleri üzerinde çalışılmaya başlanmıştır ( $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$ , ...v.b.). Performans probleminin aşılması için, ilgin parametrelerine bağımlı Lyapunov fonksiyonu yaklaşımı ortaya çıkmıştır (Oliveira ve Peres, 2005), (Gahinet vd., 1996), (de Oliveira vd., 2002), (de Oliveira vd., 2004a), (de Oliveira vd., 2004b). Daha sonra bu yaklaşımı, parametrelerine bağımlı çokterimli Lyapunov fonksiyonu tabanlı yaklaşım takip etmiştir (Oliviera vd., 2006), (Sato, 2005). Çokterimli eşitsizliklerin yaklaşım içersinde yer alması, DMEler üzerinde yeni açılımların oluşmasına zemin hazırlamıştır.

Scherer (2006) çalışmasında dayanıklı kontrolde DME gevşetmelerine değinmiş ve son bölümünde tutuculuğun nasıl azaltılabileceğine dair iki yeni gevşetme yöntemi sunmuştur. Bunlardan Pólya gevşetmesi, Pólya teoreminin bir kolu olarak ortaya çıkarılmış ve tutuculuğun asimtotik olarak azaltılabildiği gösterilmiştir.

Bu yeni gevşetme yaklaşımı ile birlikte Lyapunov tabanlı yaklaşımlarda, Parametrelerine Bağımlı Homojen Çokterimli Lyapunov Fonksiyonu (PBHÇLF) tabanlı yaklaşım üretilmiş ve tutuculuğun sistematik bir şekilde azaltılabildiği ispatlanmıştır (Montagner vd., 2007), (Oliveira ve Peres, 2007), (Montagner vd., 2006), (Chesi vd., 2007).

Kontrol tasarımlarının önündeki bir başka engel ise sistem eyleyicilerinin doyumlu olmasıdır. Eyleyici doyumu kapalı çevrim sistemin kararlılığını etkileyebilecek kadar önemli doğrusal olmayan bir yapıdır. Son yıllarda enerjisi sınırlı bozucu etkisi altındaki sistemin girişi ile çıkışı arasındaki  $\mathcal{L}_2$  kararlılığını sağlayan ve aynı zamanda giriş sinyalinin eyleyici doyum sınırları arasında kalması şartını gerçekleyen kontrolcü arayışı ortaya

çıkıştır (Montagner vd., 2007), (Lin, 1997), (Hu vd., 1998), (Hu vd., 2000b), (Liu vd., 1996), (Castelan vd., 2006)

Bu çalışmada, sistemin  $\mathcal{H}_2$  norm hesabı için Xie (2005)'nin yaklaşımı kullanılacaktır. Ancak, Xie (2005)'nin çalışmasındaki yaklaşım, parametrelerine bağımlı Lyapunov fonksiyonları olmasına karşın; bu tezde parametrelerine bağımlı homojen çokterimli Lyapunov fonksiyonları yaklaşımı seçilerek daha az tutucu bir çözüm ortaya çıkarılmıştır. Ortaya çıkarılacak DME tabanlı optimizasyon problemleri, çokterimli algoritmaların (Gahinet ve Nemirovski, 1997), (Sturm, 1999), (Toh vd., 1999), (Boyd, 1998) kullanıldığı kolay çalışılabilir arabirimler (Lofberg, 2004), (Gahinet vd., 1995), (Labit vd., 2002) ile günümüzde efektif olarak çözümlenebilmektedir.

Özetle, bu tezde yapılması planlanan yenilikleri şöyle sıralayabiliriz: birincisi PBÇH gösterimi ile yeni bir  $\mathcal{H}_2$  norm hesabı ortaya çıkarılacak, ikincisi PBHÇLF ile DPD sistemler için  $\mathcal{L}_2$  kazanç minimizasyonu yapılacak ve son olarak enerjisi sınırlı bozucu etkisi altında doyumlu eyleyicilere sahip DPD sistemlerde, karışık  $\mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{H}_2$  kontrol tasarımı için sistematik olarak tutuculuğun azaltıldığı bir yöntem ortaya atılacaktır.

## 2. DIŞBÜKEY OPTİMİZASYON VE DOĞRUSAL MATRİS EŞİTSİZLİĞİ

### 2.1 Giriş

Optimizasyon kelimesini, günlük hayattaki problemlerde elde edebileceğimiz çözüm kümelerinden veya ihtimallerinden bizim için en iyisini seçmek olarak tanımlayabiliriz. Teknik bilim dalları olan elektrik, makina ve kimya mühendisliğinde, biyolojik ve ekolojik sistemler ile ekonomide bu konunun bir çok örneğine rastlamak mümkündür. Örneğin günümüzde endüstrüdeki üretim işlemi daha fazla bir şekilde pazar odaklı hale gelmiş ve üretim maliyetlerini, özelliklerini doğrudan tüketicilerin istekleri belirler olmuştur. Bu doğrultuda üreticiler artık ürünlerinden maksimum ekonomik fayda elde ederken, bazı kati ürün özellikleri içersinde kalıp, çok çeşitlilikte, kaliteli, rekabetçi fiyatlarla ürünlerini üretmeli bunu yaparken de en az enerji ve kaynak tüketmelidir. Üreticilerin yukarıda belirtildiği gibi problemleri formalize edilip ağırlıkları belirlendiğinde, onlar için en iyi çözüm analitik olarak hesaplanabilmektedir.

Matematiksel problemlerde ise aday kararların özellikleri ve en önemlisi en iyi kararın analitik olarak belirlenmesi doğrudan optimizasyon teorisinin ilgi alanına girmektedir. Bir optimizasyon problemi içersindeki bütün kararların oluşturduğu kümeyi  $\mathcal{X}$  ile ifade edelim. Ayrıca, aday kararı da  $\mathcal{X}$  kümesinin alt kümesi olan bir  $\mathcal{S}$  ile tanımlayalım. Aday kararın performansını nicelemek üzere, aday kararlar içersinden alınan  $x$  ler kullanılarak oluşturulan  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  şeklinde bir  $f(x)$  fonksiyonu atayalım. Bu fonksiyon maliyet veya amaç fonksiyonu olarak isimlendirilmektedir. Bu durumda, maliyet fonksiyonun yorumuna göre  $\mathcal{S}$  kümesi içersindeki tüm aday çözümler üzerinde  $f$ 'i minimize veya maksimize edebiliriz. Sonuç olarak optimum karar,  $f$ 'i makul tüm alternatifler içersinde minimum veya maksimum yapan  $\mathcal{S}$ 'nin bir elemanı olarak tanımlanır (Scherer ve Weiland, 2004). Amaç fonksiyonun minimizasyonuna dayalı optimizasyon problemi bir kaç özel soru içermektedir. Bunlar;

- Optimum değeri belirleyen en düşük mümkün maliyet nedir? Yani başka bir deyişle

$$V_{opt} := \inf_{x \in \mathcal{S}} f(x) = \inf\{f(x) | x \in \mathcal{S}\} \quad (2.1)$$

değerinin belirlenmesi. Bu durumda, kural olarak  $\mathcal{S}$  kümesi boş olduğunda  $V_{opt} = +\infty$ , problem sınırsız olduğunda ise  $V_{opt} = -\infty$  olarak ifade edilir.

- Rastgele seçilen bir  $\varepsilon > 0$  değeri kullanılarak,

$$V_{opt} \leq f(x_\varepsilon) \leq V_{opt} + \varepsilon \quad (2.2)$$

eşitsizliğini sağlayan yarı-optimal  $x_\varepsilon \in \mathcal{S}$  çözümü nasıl tanımlanır?

- (**Varlık problemi**)  $f(x_{opt}) = V_{opt}$  koşulunu sağlayan optimal bir  $x_{opt} \in \mathcal{S}$  çözümü mevcut mudur? Eğer böyle bir çözüm mevcut ise, bu ifadenin minimum değerine ulaşılabilir. Biz bu değeri  $f(x_0) = \min_{x \in \mathcal{S}} f(x)$  şeklinde gösterebiliriz.
- (**Teklik problemi**) Eğer optimizasyon probleminin  $x_{opt}$  gibi bir çözümü varsa bu çözüm tek midir?

## 2.2 Dışbükey Analiz Olgusu

Bu alt bölümdeki tanımlamalar oldukça temel ve basittir. Ancak optimizasyon teorisinde oldukça önemli bir yere sahiptirler.

Öncelikle, doğrusal cebir ve fonksiyonel analizden bazı temel özellikleri ve tanımlamaları özetliyeceğim.

### Süreklilik:

$\mathcal{X}$  ve  $\mathcal{Y}$  normlu doğrusal uzaylar olsun. Ayrıca  $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$  olacak şekilde bir  $\mathcal{S}$  kümesi tanımlansın.  $\mathcal{X}$ 'den  $\mathcal{Y}$ 'e tanımlı bir  $f$  fonksiyonu  $x_0$  noktasında ancak ve ancak seçilen her  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $\|x - x_0\| < \delta$  alındığında

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon \quad (2.3)$$

olacak şekilde bir  $\delta > 0$  sayısı bulunabiliyorsa süreklidir. Genellikle  $\delta = \delta(\varepsilon; x_0)$  şeklinde verileceği açıktır. Bu  $\delta$  sayıları,  $x$  noktalarına bağlı olmadan belirlenebiliyorsa, yani  $\delta = \delta(\varepsilon)$  bulunabiliyor ise  $f$  fonksiyonu  $\mathcal{S}$  üzerinde *düzgün süreklidir*.

Aslında süreklilik normlu  $\mathcal{X}$  ve  $\mathcal{Y}$  uzaylarındaki norm tanımına bağlıdır. Normlu doğrusal uzay olan  $\mathcal{X}$ 'in alt kümesi olarak bir  $\mathcal{S}$  tanımladığımızda, eğer alt küme içersindeki her bir ardışıl  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  için  $x_0 \in \mathcal{S}$  elemanına yakınsayan bir alt ardışıl  $\{x_{n_m}\}_{m=1}^\infty$  dizisi var ise, bu alt küme kompakttır. Sonlu vektör uzaylarındaki kompakt kümeler kolaylıkla karakterize edilebilir. Bu bağlamda  $\mathcal{S}$  alt kümesi eğer kapalı, sınırlı ve aynı zamanda  $\mathcal{X}$  kümesi sonlu boyutlu ise  $\mathcal{S}$  kompakttır.

Weierstrass teoremi bizlere optimizasyon problemimizin kabul edilebilir bir sonuca ulaşmış olup olmadığına dair kullanabileceğimiz bir araç sağlamaktadır.

### Weierstrass Teoremi

Eğer normlu doğrusal uzay olan  $\mathcal{X}$  kümesi içerisinde kompakt bir küme olan  $\mathcal{S}$  kümesinde tanımlı sürekli bir  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu tanımlanırsa,  $x_{min}, x_{max} \in \mathcal{S}$

$$f(x_{min}) = \inf_{x \in \mathcal{S}} f(x) \leq f(x) \leq \sup_{x \in \mathcal{S}} f(x) = f(x_{max}) \quad \forall x \in \mathcal{S} \quad (2.4)$$

şeklinde elde edilebilir.

### Dışbükey Küme

Doğrusal vektör uzayında  $\mathcal{S}$  kümesi

$$\{x_1, x_2 \in \mathcal{S}\} \Rightarrow \{x := \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in \mathcal{S} \quad \forall \alpha \in (0, 1)\} \quad (2.5)$$

şartını sağlıyorsa, bu kümeye dışbükey küme denir.

Geometrik olarak burada iki noktanın oluşturduğu bir çizgi dışbükey küme olarak gösterilmiştir. Genelde sadece bir nokta içeren kümeler de dışbükey küme olarak kabul edilir.  $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$   $\alpha \in (0, 1)$  ile gösterilen nokta  $x_1$  ve  $x_2$  gibi iki noktanın dışbükey kombinasyonu olarak tanımlanır.

### Dışbükey Kombinasyon

$\mathcal{S}$  vektör uzayını bir alt uzay olarak ele aldığımızda

$$x := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad (2.6)$$

ile tanımlı nokta  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  ve  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  koşulunu sağladığı sürece,  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{S}$  noktalarının dışbükey kombinasyonu olarak tanımlanır.

Normlu  $\mathcal{X}$  uzayının alt uzayı olarak  $\mathcal{S}$ yi ele alalım. Eğer pozitif tanımlı bir  $\varepsilon$  için  $\|x - y\| < \varepsilon$  eşitsizliğini sağlayan tüm  $y \in \mathcal{X}$  noktaları  $\mathcal{S}$  alt kümesine ait ise, burada seçilen  $x \in \mathcal{S}$  noktası  $\mathcal{S}$  alt kümesinin bir iç noktasıdır.  $\mathcal{S}$  kümesinin içi ise tüm iç noktaların toplamından oluşur.  $\mathcal{S}$  kümesi eğer içine eşit ise aynı zamanda açık olarak da adlandırılır. Eğer pozitif tanımlı bir  $\varepsilon$  için  $\|x - y\| < \varepsilon$  koşulunu sağlayan bir  $y \in \mathcal{S}$  noktası var ise burada seçilen  $x \in \mathcal{X}$  noktası  $\mathcal{S}$  kümesinin kapanma noktasıdır. Kapanış ise kapanma noktalarının toplanmasıyla oluşturulur. Eğer,  $\mathcal{S}$  kümesi kapanışına eşit ise kapalı bir küme olarak adlandırılır.

Dışbükey kümeler ile ilgili bazı temel özellikleri aşağıdaki gibi sıralayabiliriz:

$\mathcal{X}$  normlu vektör uzayına ait  $\mathcal{S}$  ve  $\mathcal{T}$  gibi iki dışbükey küme ele alalım.

- $\alpha \mathcal{S} := \{x | x = \alpha s, \quad s \in \mathcal{S}\}$  şeklinde tanımlı küme her hangi bir skaler  $\alpha$  için dışbükeydir.



- $\mathcal{S} + \mathcal{T} := \{x|x = s+t, \quad s \in \mathcal{S}, t \in \mathcal{T}\}$  toplamları dışbükeydir.
- Herhangi bir  $\alpha_1 \geq 0$  ve  $\alpha_2 \geq 0$  için  $(\alpha_1 + \alpha_2)\mathcal{S} = \alpha_1\mathcal{S} + \alpha_2\mathcal{S}$  eşitliği sağlanır.
- Bu kümelerin kapanışları ve içleri dışbükeydir.
- Herhangi bir doğrusal eşleme olarak tanımlı  $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  için görüntüsü  $T\mathcal{S} := \{x|x = Ts, \quad s \in \mathcal{S}\}$  ve ters görüntüsü  $T^{-1}\mathcal{S} := \{x|Tx \in \mathcal{S}\}$  dışbükeydir.
- İki dışbükey kümenin kesişimi  $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} := \{x|x \in \mathcal{S} \vee x \in \mathcal{T}\}$  de dışbükeydir.

Belirtilen bu özellikler ışığında  $a \in \mathbb{R}^n$  ve  $b \in \mathbb{R}$  için  $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b\}$  şeklinde gösterilen hiper düzlem ve  $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x \leq b\}$  şeklindeki gösterilen yarı-uzay da dışbükeydir. Sonlu sayıda hiper düzlem ve yarı-uzayların kesişiminden oluşan şekle polihedron denir ve bu küme yukarıdaki son özellik sayesinde dışbükeydir. Bir Politop ise kompakt polihedrondur.

### Dışbükey Kabuk

$\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$  kümesinin dışbükey kabuğu  $\text{conv } \mathcal{S}$  ile gösterilir ve  $\mathcal{S} \in \mathcal{X}$  alt kümesini kapsayan tüm Dışbükey kümelerin kesişimidir. Eğer  $\mathcal{S}$  kümesini kapsayan sonlu sayıda dışbükey küme varsa, bu kümelerin kesişim noktalarına  $\text{conv } \mathcal{S}$  kümesinin köşe noktaları adı verilir. Açıktır ki, sonlu bir kümenin (sonlu sayıda eleman içeren) dışbükey kabuğu bir politopdur. Bu önermenin tersi de aynen geçerlidir.

Eğer her  $x \in \mathcal{S}$  ve  $\alpha > 0$  için  $\alpha x \in \mathcal{S}$  sağlanıyorsa bu küme bir koniktir. Dışbükey olan her konik kümeye dışbükey konik denir. Dışbükey kümeler için verilen tüm önermeler dışbükey konikler içinde geçerlidir. Örneğin rastgele seçilen dışbükey konik kümelerin kesişimi de yine bir dışbükey küme oluşturur. Eğer  $\mathcal{X}$  Hilbert uzayı iç çarpım işlemiyle teçhiz edilmişse

$$\mathcal{S} := \{x \in \mathcal{X} | \langle x, k_i \rangle \leq 0, \quad i \in A\} \quad (2.7)$$

bu küme her hangi  $A$  dizin kümesi ve her hangi  $k_i \in \mathcal{X}$  elemanlarının koleksiyonunda kapalı konik dışbükey bir kümedir. Bu bağlamda, doğrusal eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesi konik dışbükey kümeyi tanımlar.

### Dışbükey Fonksiyon

$\mathcal{S}$  boş olmayan dış bükey bir küme,  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  şeklinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, her  $x_1, x_2 \in \mathcal{S}$  ve  $\alpha \in (0, 1)$  koşulunda

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad (2.8)$$

eşitsizliği sağlıyorsa,  $f$  dışbükey bir fonksiyondur.

Eğer bu eşitsizlik kesin ise ( $<$ ) o zaman fonksiyon kesin dışbükey bir fonksiyon olarak anılır.

Örnek olarak  $\mathbb{R}$  de tanımlı  $f(x) = x^2$  fonksiyonu,  $[\pi, 2\pi]$  aralığında tanımlı  $f(x) = \sin x$  fonksiyonu ya da  $x > 0$  bölgesinde tanımlı  $f(x) = -\log x$  fonksiyonunu verilebilir. Şayet,  $-f$  fonksiyonu dışbükeyse  $f$  fonksiyonu içbükeydir.

Bu bağlamda,  $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun minimumunu bulma problemini,  $f$  fonksiyonunun garanti edilmiş bir üst sınırından daha küçük kalmasını temin edecek tüm  $x \in \mathcal{S}$  değerlerini bulma problemine indirgeyebiliriz. Bunun için  $\gamma \in \mathbb{R}$  gibi bir eleman tanımlayıp  $f$  fonksiyonuyla oluşan alt seviye kümeyi

$$\mathcal{S}_\gamma := \{x \in \mathcal{S} \mid f(x) \leq \gamma\} \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Açıktır ki,  $\gamma < \inf_{x \in \mathcal{S}} f(x)$  olduğu durumda  $\mathcal{S}_\gamma = \emptyset$  olacaktır. Bununla birlikte  $\gamma = \inf_{x \in \mathcal{S}} f(x)$  olduğu durumda ise  $f$  fonksiyonunun global minimizör kümesi olacaktır. Burada önemli bir nokta  $\gamma' \leq \gamma''$  olduğunda  $\mathcal{S}_{\gamma'} \subseteq \mathcal{S}_{\gamma''}$  dir. Bir başka deyişle, bu kümeler azalmayan kümelerdir. Tahmin edileceği gibi, dışbükey fonksiyonlarla, dışbükey alt seviye kümeler birbirleriyle çok yakından ilişkilidirler. Eğer  $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  dışbükey ise,  $\mathcal{S}_\gamma$  alt seviye kümesi de her  $\gamma \in \mathbb{R}$  için dışbükeydir.

Alt seviye kümeler daha ziyade çoklu amaç ölçütleri içeren kontrol problemlerinde istenen davranışın belirlenmesinde kullanılır.

### Sözde Dışbükey Fonksiyonlar

$f$ , ancak ve ancak her  $\alpha \in (0, 1)$  ve her  $x_1, x_2 \in \mathcal{S}$  için

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \max[f(x_1), f(x_2)] \quad (2.10)$$

koşulu sağlıyorsa sözde dışbükey bir fonksiyondur. Özel olarak, her dışbükey fonksiyon aynı zamanda sözde dışbükey bir fonksiyondur.

### İlgin (Affine) Küme

Her  $x_1 \in \mathcal{S}$ ,  $x_2 \in \mathcal{S}$  ve  $\alpha \in \mathbb{R}$  için  $x := \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$  ile tanımlanan nokta, doğrusal vektör uzayında tanımlı alt küme olan  $\mathcal{S}$  içersinde ise bu kümeye ilgin küme denir. İlgin kümelerde, ilgili küme içersinden seçilen iki nokta arasındaki doğru parçası her zaman ilgili küme içersinde kalır. Açıktır ki, her ilgin küme dışbükeydir.

## İlgin Fonksiyon

Her  $x_1 \in \mathcal{S}$ ,  $x_2 \in \mathcal{S}$  ve  $\alpha \in \mathbb{R}$  için,

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad (2.11)$$

ise,  $f$  fonksiyonu ilgin bir fonksiyondur.

## 2.3 Dışbükey Optimizasyon

### 2.3.1 Yerel ve Global En Küçüklük

Nümerik optimizasyon yöntemlerinde yerel en küçüklük ve yerel en büyüklük, tehlikeli durumlar ortaya çıkartabilir. Dışbükey fonksiyonlarla çalışmanın en önemli ve güzel yanı yerel en küçüğün her zaman için global en küçüğe eşit olmasıdır.

### Yerel ve Global En İyilik

Normlu  $\mathcal{X}$  uzayının bir alt kümesi olarak  $\mathcal{S}$  kümesini ele alalım. Eğer  $\varepsilon > 0$ ,  $\|x - x_0\| < \varepsilon$  koşulu altındaki her  $x \in \mathcal{S}$  için  $f(x_0) \leq f(x)$  eşitsizliği sağlanıyorsa,  $x_0 \in \mathcal{S}$ ,  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun yerel optimum çözümüdür. Eğer bu eşitsizlik bir koşul gerektirmeksizin her  $x \in \mathcal{S}$  için sağlanıyorsa çözüm artık global optimum olur.

**Önerme:**  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunu dışbükey kabul ettiğimizde,  $f$  fonksiyonunun her yerel optimum çözümü aynı zamanda global optimum çözümü olacaktır. Dahası, eğer  $f$  fonksiyonu kesin dışbükey ise global optimum çözüm tektir.

**İspat:**  $f$  fonksiyonu dışbükey ise ve  $x_0 \in \mathcal{S}$  noktası bu fonksiyonun yerel optimum çözümü ise her  $x \in \mathcal{S}$  ve  $\alpha \in (0, 1)$  için

$$f(x_0) \leq f(x_0 + \alpha(x - x_0)) = f((1 - \alpha)x_0 + \alpha x) \leq (1 - \alpha)f(x_0) + \alpha f(x) \quad (2.12)$$

eşitsizliği ve bu eşitsizlikten de eşitsizliği elde edilir,

$$0 \leq \alpha(f(x) - f(x_0)) \quad (2.13)$$

elde edilir. Bir başka gösterimle  $f(x_0) \leq f(x)$  sonucuna ulaşılır. Bundan dolayı  $x_0$  fonksiyonu global optimum çözümdür. Eğer fonksiyon kesin dışbükey ise bu durumda (2.12) eşitsizliğindeki ikinci kısım kesin olacak, bunun doğal bir sonucu olarak (2.13) eşitsizliği de kesin olacak ve  $x_0$  tek olacaktır.  $\square$

Bu ispat hiçbir şekilde çözümün varlığı hakkında bilgi sunmamaktadır. Burada amaç, dışbükey fonksiyonlarda eğer bir yerel optimum çözüm varsa bunun aynı zamanda

global optimum olduğunu göstermektedir. Bu yüzden dışbükey fonksiyonlarda sadece yerel optimum çözümü bulmak, global optimum çözümü bulmak anlamına gelmektedir. Ancak bu önerme sözde dışbükey fonksiyonlar için geçerli değildir.

### 2.3.2 Dışbükey Programlar

Birçok optimizasyon problemi,

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (2.14)$$

$$h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, l \quad (2.15)$$

gibi eşitsizlikleri veya eşitlikleri sağlayacak, gerçek değerli sonlu vektör uzayı  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ 'den seçilen  $x \in \mathcal{X}$  lerin oluşturduğu olası kararlar uzayını bulmak üzerine kuruludur.

Gerçekte, doyum sınırlamaları, güvenlik kısıtları, fiziksel olarak anlamlı değişkenler ve denge denklemleri gibi ifadeler bu yolla yazılabilir. Bu durumda, olası kararlar uzayı  $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$

$$\mathcal{S} := \{x \in \mathcal{X} | g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0\} \quad (2.16)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu gösterimde,  $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^k$  ve  $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^l$  vektör değerli fonksiyonları temsil etmektedir.  $g_i$  ile  $h_i$  bu fonksiyonun bileşenleri olmak üzere  $g(x) \leq 0$  eşitsizliği bileşen bazda değerlendirilmektedir. Bundan dolayı olası  $\mathcal{S}$  kümesi  $k$  adet eşitsizlik ve  $l$  adet eşitlik sınırlaması ile tanımlanmaktadır.

Optimizasyon problemi

$$P_{opt} := \inf_{x \in \mathcal{S}} f(x) \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlanan optimum değeri bulma problemidir. Mümkün olan optimum sonuçlar,  $f(x_{opt}) = P_{opt}$  eşitliğini sağlayan  $x_{opt} \in \mathcal{S}$  elemanlarıdır. Burada,  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  amaç fonksiyonunu göstermektedir.

### Elipsoid Algoritması

Optimum değeri belirlemek için nümerik olarak dayanıklı ve apaçık bir iteratif algoritma olan elipsoid algoritmasını inceleyelim.

Amacımız,  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  dışbükey fonksiyonunun optimum değerini hesaplamaktır.

**Giriş:**  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  dışbükey fonksiyonu ve  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  merkezli optimum çözümü içeren

$$\mathcal{E}_0 := \{x \in \mathbb{R}^n | (x - x_0)^T P_0^{-1} (x - x_0) \leq 1\} \quad (2.18)$$

tanımlı bir elipsoid ele alalım.

Doğruluk seviyesini  $\varepsilon > 0$  olarak seçip ve  $k = 0$  kabul ederek algoritmanın adımlarına geçsek.

**Adım 1:** Alt gradyan olan  $g_k \in \partial f(x_k)$  değerini hesapla ve

$$L_k := \max_{l \leq k} \left( f(x_l) - \sqrt{g_l^T P_l g_l} \right) \quad (2.19)$$

$$U_k := \min_{l \leq k} f(x_l) \quad (2.20)$$

atamalarını yap. Eğer  $g_k = 0$  veya  $U_k - L_k < \varepsilon$  sağlanıyorsa  $x^* = x_k$  atanır ve algoritma durdurulur. Aksi takdirde ikinci adıma geçilir.

**Adım 2:**

$$\mathcal{H}_k := \mathcal{E}_k \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle g_k, x - x_k \rangle \leq 0\} \quad (2.21)$$

ifadesi hesaplanır.

**Adım 3:**

$$x_{k+1} := x_k - \frac{P_k g_k}{(n+1) \sqrt{g_k^T P_k g_k}} \quad (2.22)$$

$$P_{k+1} := \frac{n^2}{n^2 - 1} \left( P_k - \frac{2}{(n+1) g_k^T P_k g_k} P_k g_k g_k^T P_k \right) \quad (2.23)$$

ifadeleri hesaplanarak, merkezi  $x_{k+1}$ , yönelimi  $P_{k+1}$  olan

$$\mathcal{E}_{k+1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - x_{k+1})^T P_{k+1}^{-1} (x - x_{k+1}) \leq 1\} \quad (2.24)$$

elipsoidi oluşturulur.

**Adım 4:**  $k$  parametresi,  $k+1$  olarak ayarlayıp birinci adıma dönülür.

**Çıkış:**  $|f(x^*) - \inf_{x \in \mathcal{S}} f(x)| \leq \varepsilon$  özelliğini sağlayan  $x^*$  noktasıdır.

Algoritmanın temel çalışma prensibi şu şekilde açıklanabilir: Rastgele seçilen  $x_0$  merkezli,  $P_0$  yönelimli,  $x_{opt}$  çözümünü içeren  $\mathcal{E}_0$  elipsoidi ile algoritmaya başlanır. Bu elipsoid önce  $g_k \in \partial f(x_k)$  gibi bir alt gradyan ile ikiye bölünerek optimal çözümü içeren yarı

uzayda oluşturulan yeni elipsoid ile algoritma devam ettirilir. Her adımda oluşturulan elipsoidlerin hacimleri

$$\text{vol}(\mathcal{E}_{k+1}) = \det(P_{k+1}) \leq e^{-\frac{1}{2n}} \det(P_k) = e^{-\frac{1}{2n}} \text{vol}(\mathcal{E}_k) \quad (2.25)$$

oranda azalmaktadır. Ardışıl olarak oluşturulan elipsoidlerin merkez noktaları olan  $x_0, x_1, x_2, \dots$  lerin ürettiği  $f(x_k)$  fonksiyonları da optimum değer olan  $f(x_{opt})$ 'e yakınsamaktadır. Algoritmadaki  $L_k$  ve  $U_k$ , optimum sonucun alt ve üst sınırlarını göstermektedir.

## 2.4 Doğrusal Matris Eşitsizlikleri (DME)

Bir doğrusal matris eşitsizliği

$$F(x) := F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_n F_n \prec 0 \quad (2.26)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Burada;

- $x = (x_1, \dots, x_n)$  n tane karar değişkeni içeren vektörü göstermektedir.
- $F_0, \dots, F_n$  gerçekte simetrik matrisleri göstermektedir.
- $\prec 0$  ifadesi kesin negatifliği göstermektedir. Bu bağlamda ifade tüm özdeğerlerin sıfırdan kesin küçük olmasını söylemekte bir başka gösterim ile en büyük özdeğerinin sıfırdan küçük olması  $\lambda_{max}(F(x)) < 0$  gerektiğini belirtmektedir.

Doğrusal matris eşitsizliği aracını kullanırken gerekli olacak bazı notasyonları da burada belirtmemizde fayda vardır.  $A$  matrisi kare ve  $A = A^* = \bar{A}^T$  eşitliğini sağlıyorsa Hermityen bir matristir. Burada bar sembolü  $A$  matrisi reel ise  $A = A^T$  dur ve simetriktir. Notasyon olarak  $m \times m$  boyutlu bir Hermityen ve simetrik matris için sırasıyla  $\mathbb{H}^m$  ve  $\mathbb{S}^m$  gösterimleri kullanılacaktır.

Doğrusal matris eşitsizlikleri (DME),  $x$  gibi bir değişken üzerinden dışbükey bir kıstas belirlemek için kullanılabilir. Bu da, DME aracının günümüz optimizasyon problemlerinin çözümünde ilgi çekici olmasını sağlamaktadır.

$$\mathcal{S} := \{x | F(x) \prec 0\} \quad (2.27)$$

$F(x) \prec 0$  DMEsinin çözüm kümesi dışbükeydir. Gerçekte,  $x_1, x_2 \in \mathcal{S}$  ve  $\alpha \in (0, 1)$  olduğu durumda,

$$F(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \alpha F(x_1) + (1 - \alpha)F(x_2) \prec 0 \quad (2.28)$$

şeklindeki  $F$  fonksiyonu  $\alpha > 0$ ,  $(1 - \alpha) > 0$  koşulu altında ılgındır.  $F(x) \prec 0$  DMEnin  $x$  üzerinden dışbükey kıstas olması özel bir durum olsada bir çok dışbükey küme bu şekilde kolaylıkla tanımlanabilir. Bu sayede DMEler genel dışbükey küme özelliklerine ilaveten daha bir çok cazip özelliği de barındırırlar. Sonraki kısımda, birden çok kısıtlamanın aynı DME içersinde gösterilmesi durumunu inceleyeceğiz.

**DME Sistemleri:** Doğrusal Matris Eşitsizliği sistemleri sonlu sayıda DMEden oluşmaktadır. Dışbükey fonksiyon ve küme tanımlarından da bilindiği gibi

$$F_1(x) \prec 0, \dots, F_k(x) \prec 0 \quad (2.29)$$

şeklindeki DMElerin her birinin oluşturduğu olası kümenin kesişimi de dışbükeydir. Bir başka ifadeyle, (2.29) DMElerini sağlayan tüm  $x$  lerin kümesi dışbükeydir. Gerçekte, tek tek DME leri yazmak yerine tamamını tek bir DME de

$$F(x) := \begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_k(x) \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.30)$$

yazabiliriz. Bu son eşitsizlik aslında her hangi bir  $x$  için  $F(x)$  matrisinin simetrik (veya Hermityen) olduğunu belirtmektedir.  $F(x)$  matrisinin özdeğerlerinin oluşturduğu küme  $F_1(x), \dots, F_k(x)$  matrislerinin tek tek özdeğerlerinin birleşiminden oluşan küme ile aynıdır.  $F(x) \prec 0$  DME sini sağlayan  $x$  ifadesi (2.29) ile belirtilen tüm DMEleri sağlamaktadır. Sonuç olarak çoklu DME kısıtlamaları tek bir DME kısıtlamasına indirgenebilir.

Yine DMEler üzerinde yapacağımız bazı cebrik uygulamalarla, doğrusal olmayan eşitsizlikleri, doğrusal olan eşitsizliklere çevirebiliriz. Örneğin  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  şeklinde bir matris ele alalım

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

bu matris içersinde  $M_{11}$ 'in  $r \times r$  boyutunda tekil olmayan bir matris olduğunu kabul edersek,

$$S := M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12} \quad (2.32)$$

şeklinde tanımlı  $S$  matrisi,  $M$  matrisi içersinde  $M_{11}$ 'in Schur tümleyeni olmaktadır. Eğer  $M$  simetrikse

$$M \prec 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \prec 0 \Leftrightarrow \begin{cases} M_{11} \prec 0 \\ S \prec 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

### Schur Tümleyen

$F : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{S}$  tanımlanmış ve

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_{11}(x) & F_{12}(x) \\ F_{21}(x) & F_{22}(x) \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

şeklinde parçalanmış olsun. Bu ayrıştırmada  $F_{11}(x)$  karedir ve aşağıdaki önermeler birbirine eşdeğerdir.

a)  $F(x) \prec 0$ .

b)

$$\begin{cases} F_{11}(x) \prec 0 \\ F_{22}(x) - F_{21}(x)[F_{11}(x)]^{-1}F_{12}(x) \prec 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

c)

$$\begin{cases} F_{22}(x) \prec 0 \\ F_{11}(x) - F_{12}(x)[F_{22}(x)]^{-1}F_{21}(x) \prec 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

#### 2.4.1 DMElerin Kullanım Alanları

Kontrol konusu içersindeki bir çok optimizasyon probleminde, sistem tanılamada ve işaret işlemede, kısıtlar Doğrusal Matris Eşitsizlikleri ile formalize edilebilir. Burada akla gelen soru şudur; "Acaba tüm optimizasyon problemleri DME formalizasyonuna indirgenerek, verimli ve gerçekçi bir çözüme ulaşılabilir mi?"  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  tanımlı bir performans fonksiyonunun minimizasyonu veya maksimasyonu problemi doğrusal matris eşitsizliği olan  $F(x) \prec 0$  gibi  $x$  değişkeni üzerinden tanımlı dışbükey kısıtlamalar gösteriyorsa, bu tip problemler bir çeşit dışbükey optimizasyon problemidir. Çok açıktırki  $F(x)$  performans fonksiyonu, dışbükey olduğu sürece çözüme ilişkin algoritmalar ve geliştirmeler dışbükey optimizasyon teorisi ile ilişkilidir.

Aslında DMEler için  $F : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{S}$  ilgin ise genelde iki temel çalışma alanı vardır.

**a)Varlık (Feasibility):** Bu çalışma alanında belirtilen  $F(x) \prec 0$  DME kısıtlamasını sağlayan en az bir  $x \in \mathbb{X}$ 'in var olup olmadığını irdelemektir.

**b)Optimizasyon:** DME kısıtlamalarını sağlayan elemanlar ile oluşturulmuş küme  $\mathcal{S} := \{x|F(x) \prec 0\}$  şeklinde ifade edilmiş olsun. Burada,  $V_{opt} = \inf_{x \in \mathcal{S}} f(x)$  belirleme problemine DME kısıtlamalarıyla optimizasyon problemi denir.



Bazı temel örnekler vermek gerekirse;

**Örnek 1 Kararlılık:**  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  olmak üzere, zamanla değişmeyen doğrusal otonom bir sistem

$$\dot{x} = Ax \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.37)$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Bu türden bir sistem ancak ve ancak  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  sağlanıyorsa asimtotik kararlıdır. Açıkta ki  $X \succ 0$  ve  $A^T X + XA \prec 0$  eşitsizliklerini sağlayan öyle bir  $X = X^T$  bulabilirsek bu sistem asimtotik olarak kararlıdır. Aslında bu önerme  $V(x) := x^T X x$  Lyapunov fonksiyonuyla gösterilmektedir. Öyleyse sistemin asimtotik kararlılık problemini

$$\begin{bmatrix} -X & 0 \\ 0 & A^T X + XA \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.38)$$

gibi bir DME'nin çözümüne ait varlık problemine indirgeyebiliriz.

**Örnek 2  $\mu$  Analizi:** Çoğu zaman  $\mu$  analizinde, bir  $M$  matrisine karşın  $\|DMD^{-1}\| < 1$  eşitsizliğini sağlayan köşegen bir  $D$  matrisinin aranması problemi ile karşılaşılır.

$$\|DMD^{-1}\| < 1 \iff D^{-T} M^T D^T DMD^{-1} \prec I \quad (2.39)$$

$$\iff M^T D^T D M \prec D^T D \quad (2.40)$$

$$\iff M^T X M - X \prec 0 \quad (2.41)$$

Burada,  $X := D^T D \succ 0$  dir. Bu örnekteki problemde belirtilen kıstaslar altında bir matrisin varlığının incelenmesi bir DME varlık problemidir.

**Örnek 3 Tekil Değer Minimizasyonu:**  $F: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{S}$  tanımlı ilginç bir fonksiyon,  $\sigma_{\max}(\cdot)$  ifadesinin de gerçek simetrik bir matrisin en büyük tekil değerini gösterdiğini kabul edelim. Bu durumda tekil değer minimizasyon problemini  $x$  üzerinden  $f(x) := \sigma_{\max}(F(x))$  gibi bir fonksiyonun minimizasyonu olarak tanımlayabiliriz.

$$f(x) < \gamma \iff \lambda_{\max}(F^T(x)F(x)) < \gamma^2 \iff \frac{1}{\gamma}(F^T(x)F(x)) - \gamma I \prec 0 \quad (2.42)$$

$$\iff \begin{bmatrix} \gamma I & F(x) \\ F^T(x) & \gamma I \end{bmatrix} \succ 0 \quad (2.43)$$

Şimdi

$$y := \begin{bmatrix} \gamma \\ x \end{bmatrix}, \quad G(y) := - \begin{bmatrix} \gamma I & F(x) \\ F^T(x) & \gamma I \end{bmatrix}, \quad g(y) := \gamma \quad (2.44)$$

tanımlamalarını yapmış olalım. Bu durumda  $x$  üzerinden  $f$  gibi bir fonksiyonu minimize etme problemi,  $G(y) \prec 0$  kıstasını sağlayan her  $y$  üzerinden  $g$ 'yi minimize etme problemine dönüşür. Bundan dolayı, bu problem de bir çeşit DME ile optimizasyon problemidir.

### Örnek 4 Durum Geribesleme Problemi: Zamandan bağımsız

$$\dot{x} = A_i x + B_i u \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.45)$$

gibi  $k$  tane doğrusal zamanla değişmeyen sistem tanımlayalım. Burada,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ve  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , şeklindedir. Problem,  $k$  adet otonom  $\dot{x} = (A_i + B_i F)x$ ,  $i = 1, \dots, k$  sistemi  $u = Fx$  durum geri besleme kuralı ile asimtotik kararlı kılan  $F$  statik kazanç matrisinin belirlenmesidir. Örnek 1 den yola çıkarak gibi tüm iler için

$$\begin{cases} X_i \succ 0 \\ (A_i + B_i F)^T X_i + X_i (A_i + B_i F) \prec 0 \end{cases} \quad (2.46)$$

matris eşitsizliklerini sağlayan  $F$  ve  $X_i$  matrislerini bulduğunuzda problem çözülmüş olacaktır. Ancak  $X_i$  ve  $F$  matrisleri bilinmeyen olduğu sürece, tanımlanan bu eşitsizlikler DME değildir. DME sistemlerine dönüştürebilmek için bir yol  $Y = X^{-1}$  ve  $K = FY$  gibi yeni değişkenler tanımlayıp yukarıdaki eşitsizlikleri tekrar yazmaktır. Bu durumda elde edilen eşitsizlikler bilinmeyenler üzerinden doğrusal olacaktır.

$$\begin{cases} Y \succ 0 \\ A_i Y + Y A_i^T + B_i K + K^T B_i^T \prec 0 \end{cases} \quad (2.47)$$

Görüldüğü gibi  $Y$  ve  $K$  değişkenlerine sahip DMEler elde etmiş olmaktadır. Durum geribesleme problemimiz, (2.47) DMElerinde  $Y$  ve  $K$  matrislerinin varlığının incelenmesi problemine dönüşmüştür. Bu durumda kontrol problemin çözümünün  $F = KY^{-1}$  olacağı açıktır.

## 2.5 DMElerin Çözüm Yöntemleri

### 2.5.1 Elipsoid Yöntemi

Elipsoid algoritması diğer algoritmalar ile karşılaştırıldığında, numerik olarak daha dayanıklı ve uygulanabilirliği ile ön plana çıkmaktadır. Ancak bu yöntemin dezavantajı büyük ölçekli optimizasyon problemlerinde oldukça yavaş çalışmasıdır.

Bu bölümde, DMElerin kullanım alanlarından çözümün varlığı probleminin bu algoritma ile nasıl çözümlenebildiğine dair temel noktaları inceleyeceğiz.

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}$  tanımlı ve ilginç bir fonksiyon olsun. Ayrıca optimum değerini  $V_{opt} := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$  olarak tanımladığımız  $f(x) := \lambda_{max}(F(x))$  fonksiyonunu ele alalım. Bu noktada  $F(x) \prec 0$  şartının sağlanmasının ancak  $\lambda_{max}(F(x)) < 0$  durumunda gerçekleştirilebileceğini

hatırlatmakta fayda vardır. Açıktır ki DME  $F(x) \prec 0$  ancak ve ancak  $V_{opt} < 0$  iken gerçekleşebilir.  $V_{opt} \geq 0$  olduğu durumda ise olası değildir.

Tekil değer minimizasyonu örneğinde tanımlanan  $y = \text{col}(\gamma, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$  vektörünü ve doğrusal maliyet fonksiyonu olan  $g(y) := \gamma y$ , dışbükey kümemiz  $\mathcal{S} := \{y \in \mathbb{R}^n \mid G(y) \prec 0\}$  üstünde tanımlayalım. Burada

$$G(y) := - \begin{bmatrix} \gamma I & F(x) \\ F^T(x) & \gamma I \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

şeklinde ilginç bir fonksiyondur.  $F(x) \prec 0$  DMEsinin çözümünün varlığı, optimizasyon probleminde dışbükey  $\mathcal{S}$  kümesi üzerinde minimize edilen  $g$  maliyet fonksiyonunun optimum değerinin işaretiyle belirlenmektedir.

Algoritmadaki birinci adıma  $g$  dışbükey fonksiyonunu uygulayıp,  $g$ 'nin  $y_k \in \mathcal{S}$  noktasındaki  $g_k$  altgradyanı belirlenir.  $g$  fonksiyonu doğrusal olduğu sürece,  $y_k$  noktasındaki  $g$ 'nin altgradyanı  $k$  ve  $y_k$  dan bağımsız olarak tektir ve  $g_k = \text{col}(1, 0, \dots, 0)$  şeklindedir. Elipsoid algoritmasının geri kalan adımları artık kolaylıkla uygulanabilir.

### 2.5.2 İç Nokta Yöntemi

Dışbükey optimizasyon konusundaki en büyük ve önemli buluş, iç nokta yönteminin bulunmasıdır. Nesterov ve Nemirovskii (1994)'nin çalışması DME problemlerinin gerçekçi ve uygulanabilir bir anlam kazanmasını sağlamıştır.

Algoritmanın ana fikri şu şekilde özetlenebilir:  $F$  ilginç bir fonksiyon ve minimize etmek istediğimiz  $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{S} := \{x \mid F(x) \prec 0\}$  uzayında tanımlı bir dışbükey fonksiyon olsun. Optimize etmek istediğimiz dışbükey problem ise

$$V_{opt} = \inf_{x \in \mathcal{S}} f(x) \quad (2.49)$$

olsun. Bu problemi çözebilmek için (optimum veya optimuma çok yakın çözüm) öncelikle bir bariyer fonksiyonu tanımlanır. Bu fonksiyon aşağıdaki özelliklere haiz olmalıdır:

- $\mathcal{S}$ 'nin içinde kesin dışbükey olmalı,
- $\mathcal{S}$ 'nin içindeki birbirini takip eden  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  noktaları boyunca  $+\infty$  yaklaşıldığında, fonksiyon da  $\mathcal{S}$ 'nin sınırına yakınsamalıdır.

Yukarıda belirtildiği gibi  $\emptyset$  gibi bir bariyer fonksiyonu verildiğinde,  $x \in \mathcal{S}$  koşulundaki  $f(x)$  fonksiyonunun minimizasyonu şeklindeki kısıtlamalı optimizasyon problemi,

$$f_t(x) := t f(x) + \emptyset(x) \quad (2.50)$$

şeklindeki kısıtlamasız bir optimizasyon problemine dönüşmüş olur. Burada  $t > 0$  dır ve ceza parametresini simgelemektedir. Ayrıca  $f_t$  fonksiyonu  $\mathbb{R}^n$  de kesin dışbükeydir. Temel fikir  $f_t$  fonksiyonunun  $x(t)$ 'sini herhangi  $t > 0$  anında minimize edebilecek  $t \rightarrow x(t)$  ye uygun eşlemeyi belirlemektir. Kısıtlamasız optimizasyon problemi çözümü için kullanılan hemen hemen tüm iç nokta yöntemlerinde Newton-Raphson iterasyon tekniği kullanılır.

Eğer  $F(x) < 0$  gibi bir DME'nin çözümünün varlığı problemi ile karşı karşıyaysak, burada  $f$  fonksiyonun bir rolü yoktur.

Olası bariyer fonksiyonlarından biri logaritmik fonksiyondur. Bir bariyer fonksiyonu logaritmik fonksiyon olarak

$$\theta(x) := \begin{cases} \log \det -F(x)^{-1} & \text{Eğer } x \in \mathcal{S} \\ \infty & \text{tüm diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.51)$$

$\mathcal{S}$  kümesinin boş olmadığı ve sınırlı olduğu kabul edilirse,  $\theta$  kesin dışbükey olur ve  $\mathcal{S}$  üzerinde bir bariyer fonksiyonu olur. Bu durumda  $\theta$  fonksiyonunun minimumunu teşkil eden  $x_{opt}$  çözümünün tek olarak var olduğu gösterilebilir. Açıktır ki bu nokta  $\mathcal{S}$  kümesinin içindedir ve  $\mathcal{S}$ 'in çözüm kümesinin analitik merkezi olarak adlandırılır.

$x_{opt}$  noktası genellikle klasik Newton iterasyonununundan kolayca

$$x_{k+1} := x_k - (\theta''(x_k))^{-1} \theta'(x_k) \quad (2.52)$$

şeklinde hesaplanabilir. Buradaki  $\theta'$  ve  $\theta''$  ifadeleri sırasıyla  $\theta$ 'nin gradyanı ve Hesiyanını göstermektedir.

Eğer  $F(x) < 0$  gibi bir DME ye bağlı  $f(x)$  fonksiyonun minimizasyonu problemi başka bir deyişle

$$\hat{F}_t(x) := \begin{bmatrix} f(x) - t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F(x) \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (2.53)$$

DME'nin çözümünün varlığı problemi şeklinde de ifade edilebilir. Burada  $t > t_0 := \inf_{x \in \mathcal{S}} f(x)$  ceza parametresidir. Aynı bariyer fonksiyonunu kullandığımızda, kısıtlamasız optimizasyon problemimiz

$$g_t(x) := \log \det -\hat{F}_t(x)^{-1} = \underbrace{\log \frac{1}{t - f(x)}}_{\theta_0(t-f(x))} + \underbrace{\log \det -F(x)^{-1}}_{\theta(x)} \quad (2.54)$$

fonksiyonunun minimizasyonu olarak şekillenmektedir.

### 3. KAZANÇ PLANLAMALI KONTROL VE SÖZDE DPD SİSTEMLER

Bu bölümde Kazanç Planlamalı Kontrol tekniği, Doğrusal Parametreleri Değişen (DPD) sistemlerin oluşturulması, DPD sistemlerin Lyapunov fonksiyonu tabanlı kararlılık analizi ve doğrusal olmayan sistemlerin sözde DPD modelleme ile oluşturulması konularına değinilecektir.

Geçmiş yıllardan günümüze doğru ilerledikçe, kazanç planlamalı kontrol ve DPD sistemler üzerine yapılan akademik çalışmaların hızla arttığı görülmektedir. Bu hızlı ilgi artışındaki en önemli etken, konu ile ilgili yeni teorik formülasyonların geliştirilmesidir. Öte yandan, Doğrusal kontrol teorisinde geliştirilen etkin analiz ve tasarım yöntemlerinin, doğrusal olmayan problemlere sözde-DPD sistemler üzerinden çözüm getirebilmesi de, ayrıca konunun ilgi çekmesine yol açmaktadır.

#### 3.1 Kazanç Planlamalı Kontrol

Bir çok sisteme ait kontrol problemi kazanç planlamalı olarak gösterilebilir. Örneğin, doğrusal olmayan kazancın, ters kazanç fonksiyonu ile kompanzasyonunu içinde bulunan çalışma noktasına ait kazancın anahtarlanmasıyla oluşturulan yapıyı, kazanç planlamalı kontrol olarak tanımlayabiliriz. Bundan başka, bir çok kontrolcünün anahtarlanması veya birleştirilmesi ile oluşan yeni kontrolcüyü de kazanç planlamalı kontrolör olarak gösterebiliriz. Ancak, bizim ilgilendiğimiz kazanç planlama tekniği ise sistemin değişken parametrelerinin o anki durumuna göre kontrollör katsayılarının sürekli olarak değiştiği tipdir.

Temel olarak doğrusal olmayan bir problemin kazanç planlamalı tipte çözümünü gerçekleştirebilmek için dört aşama gerekir. Elbette her aşamanın teknik olarak alt dalları mevcuttur, ancak burada genel bir tanımla verilecektir.

İlk aşama, doğrusal olmayan yapının Doğrusal Parametreleri Değişen tipte modellenmesinden oluşur. Tarihsel olarak bu modellemeye baktığımızda sıklıkla kullanılan tekniğin, sistemin denge noktalarında bir başka ifadeyle çalışma noktalarında veya tespit noktalarında Jakobiyen doğrusallaştırması üzerine kurulu olan yaklaşım olduğu görülmektedir. Bu da doğrusallaştırılmış planlama olarak tanımlanan, doğrusallaştırılmış yapının parametrikleştirilmiş halini vermektedir. Belirttiğimiz bu parametrisasyon, sistem içindeki değişkenler, fonksiyonlar veya harici sinyaller gibi planlama değişkenlerinin sabit

değerleri ile ilişkilidir. Modelleme için doğrusallaştırmadan başka bir yol ise sözde-DPD modelleme tekniğidir. Sözde-DPD model, doğrusal olmayan ifadelerin zamanla değişen parametrelere dönüştürülerek, sistem dinamiklerinin tekrar yazılmasıyla elde edilir. Bu parametrelere, planlama parametreleri de denir. Doğrusal olmayan genel yapıların durumuna göre, sözde-DPD tipinde modellemede, sistem dinamiklerinin Jakobiyen doğrusallaştırılmasına ihtiyaç yoktur.

İkinci adım, bir önceki adımda doğrusallaştırma yolu ile veya sözde-DPD modelleme tekniği ile elde edilmiş doğrusal parametreleri değişen sistem için, doğrusal denetleyici tasarımı içermektedir. Tasarım işlemi doğrudan doğrusal parametreleri değişen sistem için olabileceği gibi, planlama parametresinin çalışma bölgelerinde elde edilecek kontrolcülerin birleşimiyle de yapılabilir. Geçmişte çoğunlukla sabit değerler için, istenilen kapalı çevrim performansını sağlayabilecek kontrolcülerin birleşimi tekniği kullanılmıştır. Yeni teknikler ise zamanla değişen parametrenin yörüngesi boyunca istenilen performansın gerçekleşmesi mantığı üzerine kuruludur.

Gerçek kazanç planlaması üçüncü adımda yapılmaktadır. Bu adımda sistemden ölçülerek elde edilen değişken parametrenin durumuna göre elde edilen doğrusal kontrolcünün katsayıları veya kontrolcü kazançları ilişkilendirilir.

Son aşama, performans değerlendirmesidir. Kazanç planlamalı kontrolcünün yerel kararlılık ve performans özelliklerine analitik olarak tetkik yapılarak ulaşılabılır. Yerel olmayan performans hakkındaki bilgiye ise benzetim sonuçlarıyla ulaşılır.

### **3.1.1 Kazanç Planlamasının Özellikleri**

Kazanç planlama tekniğinin bir çok önemli özelliği vardır. Bunları şu şekilde sıralayabiliriz:

- Kazanç planlamalı yaklaşım zor doğrusal olmayan problemlerde güçlü doğrusal tasarım araçlarının kullanılmasına imkan sağlamaktadır. Belirtilen bu kolaylık, hem doğrusallaştırma kullanıldığında, hem de sözde-DPD modelleme yapıldığında geçerlidir.
- Zaman çalışma bölgesinin ve frekans çalışma bölgesinin özelliklerinin karışımı gibi en önemli performans özelliklerini, en azından, yerel olarak doğrusal ifadelerle gösterilebilmektedir.

- Kazanç planlamalı teknik, sistem modeli üzerinde katı şekilde kabullere gereksinim duymamaktadır. Özellikle, sistem bilgilerinin sınırlı olduğu ve sadece birkaç denge noktası hakkında bilgi edinebildiğimiz durumlarda, doğrusal planlama kullanılabilir.
- Kazanç planlamalı tasarım yaklaşımı, tüm kontrol probleminin ayrıştırılması için doğal olarak uyumludur. Buradaki ayrışım tipik bir hiyerarjik ayrışım değildir ve alt problemlerin birbirleri ile olan ilişkisi planlama değişkenleri ile sağlanmaktadır.
- Kazanç planlamalı yaklaşım, çalışma durumundaki değişimlere çok çabuk bir şekilde cevap verebilir.
- Planlama yaklaşımının doğrusallaştırmasının hesaplama yükü, genelde doğrusal olmayan diğer tasarım yaklaşımlarından çok azdır. Diğer taraftan sözde-DPD yaklaşımının hesaplaması yoğun olmasına karşın, kararlılığı ve performans özelliklerini garanti eder.

Bu özellikler, kullanıcıları geniş bir yayılımla uygulamaya teşvik etmiştir. Yaklaşımın sınırlarının kolay anlaşılabilir hale gelmesi, son zamandaki araştırmaları motive etmektedir..

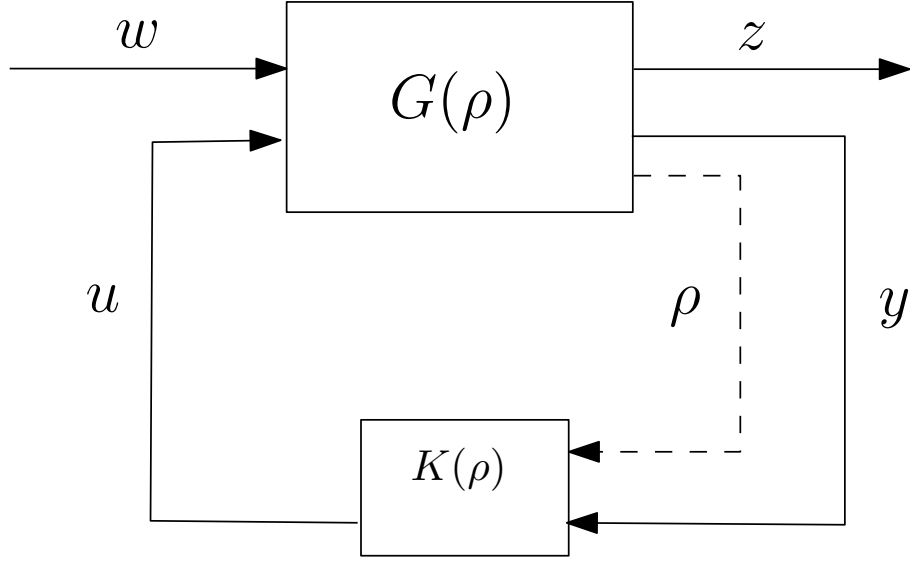
### 3.2 Doğrusal Parametreleri Değişen (DPD) Sistemler

Belirsizlik içeren sistemlerden farklı olarak, parametreye bağımlı sistemler, kesin değerleri bilinmeyen zamanla değişen parametrelerin, çalışma süresince gerçek zamanlı olarak ölçülmesi ve/veya hesaplanması ile oluşturulan sistemlerdir. Doğrusal parametreleri değişen bir sistemi, kompakt bir kümeden gelen  $\rho(t)$  gibi değişken parametrelere sahip,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\rho) & B_1(\rho) & B_2(\rho) \\ C_1(\rho) & D_{11}(\rho) & D_{12}(\rho) \\ C_2(\rho) & D_{21}(\rho) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

bir yapı ile ifade edebiliriz.

3.1 nolu bölümün ikinci adımında belirtildiği gibi, yeni tekniklerin, değişen parametrelerin yörüngesi boyunca istenilen performansın gerçekleşmesi mantığı üzerine kurulu olduğu düşünüldüğünde; tasarlanacak kontrolcünün de performans çıkışı dışında harici bir giriş olarak ölçülen parametre bilgilerine gerçek-zamanlı olarak ihtiyaç duyacağı aşikardır. Öyleyse, kontrol edilmek istenen yapı ve kontrolcüden oluşan genel sistem şekil3.1de görüldüğü gibidir.



Şekil 3.1: DPD Yapı ve DPD Kontrolcünün oluşturduğu sistem.

Şekil 3.1 deki sisteme ait ölçülebilen parametreler, sistem içerisinde ilgin bir şekilde bulduklarında, bu sisteme ait kararlılık analizi için parametrelere bağlı Lyapunov fonksiyonunu

$$V(t) := x^T X(\rho)x \quad (3.2)$$

şeklinde seçilmiş olsun. Ayrıca kapalı çevrim sistemi de

$$\dot{x} = A_{kl}(\rho)x \quad (3.3)$$

şeklinde gösterilsin. Bu durumda kapalı çevrim sistem ancak ve ancak

$$X(\rho)A_{kl}(\rho) + A_{kl}^T X(\rho) + \bar{\rho} \frac{\partial X(\rho)}{\partial \rho} < 0, \quad (3.4)$$

$$X(\rho)A_{kl}(\rho) + A_{kl}^T X(\rho) + \underline{\rho} \frac{\partial X(\rho)}{\partial \rho} < 0 \quad (3.5)$$

matris eşitsizliklerini birlikte sağlayacak pozitif tanımlı  $X(\rho)$  bulunabiliyorsa, üstel kararlı olur.

Burada sırasıyla  $\bar{\rho}$  ve  $\underline{\rho}$  parametre değişiminin üst ve alt sınırını göstermektedir.

Parametre değişimlerinin sınırlarının da bilinmesi durumunda, sistem için üretilen çözümün tutuculuğu azalacaktır. Ancak pratikte bu sınırların bilinmesi o kadarda mümkün olmayabilir. İşte bu durumlarda parametre değişimine ait ifadeler, sanki parametreler sabitmiş gibi düşünülerek, sıfır kabul edilir.



### 3.2.1 Söзде-DPD Sistemler

Bu yaklaşım, sistem içersindeki doğrusal olmayan ifadelerin tekrar yazılarak sistemin zamanla değişen planlama parametreleri haline getirilmesi temel mantığı üzerine dayanır. Doğrusal olmayan bu ifadeler sistem durumlarını da içerebilirler. Bahsi geçen durum veya durumların oluşturduğu doğrusal olmayan ifade yeniden isimlendirilerek, içereğinde barındırdığı durum veya durumlar ile birlikte kullanılırlar.

Söзде-DPD yaklaşımı, doğrusallaştırma yaklaşımından farklı olarak bir denge veya çalışma noktasına ihtiyaç duymaz. Bu bakımdan, sistemde doğrusallaştırmadan kaynaklanan bilgi kayıpları, bu yaklaşım ile modellenmiş sistemlerde bulunmaz.

Bu alt bölümün devamında, Söзде-DPD yaklaşımı ile doğrusal olmayan bazı sistemlerin doğrusal parametreleri değişen tipte modellenmesine ilişkin örneklere yer verilmiştir. Ancak, yapılan tez çalışmasında kullanılan ters sarkaçta ait Söзде-DPD tipteki modellemeye 5nci bölümde yer verilmiştir.

**Örnek 1:** Bir doğrusal olmayan sistem

$$\dot{x}_1 = \sin x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 x_2 + u \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Bu modelde görüldüğü gibi  $\sin x_1$  ve  $x_1 x_2$  ifadeleri hem sistem durumları olan  $x_1$  ve  $x_2$ 'yi içermekte, hem de doğrusal olmayan kısımları oluşturmaktadır.

Söзде DPD model gösterimi için bir alternatif

$$\dot{x} = A(x)x + Bu = \begin{bmatrix} \frac{\sin x_1}{x_1} & 1 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (3.7)$$

şeklinde dir. Sistem durumlarının hepsine ulaşılabilse de, bu gösterim kazanç planlamalı kontrol için çok ta uygun değildir. Çünkü, sistem matrisi olan  $A$  matrisi, ölçülebilir parametre olarak her iki durumu da içermektedir. Buna karşın sadece  $x_1$  durumunu içeren

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{\sin x_1}{x_1} & 1 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (3.8)$$

bir gösterim kontrolcü tasarımı için daha uygun olacaktır. Sonuçta (3.6) nolu ifade de gösterilen doğrusal olmayan sistem, ölçülebilir  $x_1$  gibi bir parametre ile (3.8) Söзде-DPD model oluşturulmuş olur.

Bu örnekte olduğu gibi, Söзде-DPD model için birden çok seçenek olabilir. İşte bu durumda işlem yükünü hafifletecek tipte olan yapının seçilmesi uygun olacaktır.

**Örnek 2:** Füzenin boylamsal dinamiğine ait doğrusal olmayan modeli ele alalım.

$$\dot{\alpha} = MC_n(\alpha, \delta, M) \cos \alpha + q, \quad \dot{q} = M^2 C_m(\alpha, \delta, M), \quad (3.9)$$

Burada  $\alpha(t)$  saldırı açısını ve  $q(t)$  yunuslama oranını göstermektedir.  $M(t)$  harici değişken olan mach numarasını ve  $\delta(t)$  de kuyruk sapmasını sembolize etmektedir. Ayrodinamik sabitler olan  $C_n(\alpha, \delta, M)$  ve  $C_m(\alpha, \delta, M)$  ifadeleri ampirik olarak kuyruk sapması ile doğrusal ilişkili olup

$$C_n(\alpha, \delta, M) = c_n(\alpha, M) + d_n \delta \quad C_m(\alpha, \delta, M) = c_m(\alpha, M) + d_m \delta \quad (3.10)$$

şeklinde ele alınmıştır. Aynı zamanda kontrolcü çıkışının yapısının

$$\eta = KM^2 C_n(\alpha, \delta, M), \quad (3.11)$$

şeklinde olduğu varsayılmıştır. İfadedeki  $K$  sabittir.

Sisteme ait sözde DPD modeli elde edebilmek için sistem değişkenlerini

$$\hat{q} = q - q_e(\alpha, M), \quad \hat{\delta} = \delta - \delta_e(\alpha, M), \quad \hat{\eta} = \eta - \eta_e(\alpha, M), \quad (3.12)$$

şeklinde değiştirilerek o anki değerler ile denge noktaları arasındaki sapma sembolize edilmiştir. Bu değişiklikten sonra sistem durumlarına ait dinamik

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \hat{q} + Md_n \cos \alpha \hat{\delta}, \\ \dot{\hat{q}} &= -\frac{\partial q_e(\alpha, M)}{\partial \alpha} \hat{q} + \left( M^2 d_m - Md_n \cos \alpha \frac{\partial q_e(\alpha, M)}{\partial \alpha} \right) \hat{\delta} - \frac{\partial q_e(\alpha, M)}{\partial M} \dot{M}, \\ \dot{\hat{\eta}} &= KM^2 d_n \hat{\delta}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

şeklini almaktadır.  $\dot{M}$  yeni bir bozucu girişi gibi görülmektedir. Sistemde gerçek-zamanlı olarak ölçülebilen parametreleri de  $\alpha$  ve  $M$  olarak belirlediğimizde, sözde DPD gösterimi

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\hat{q}} \\ \dot{\hat{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & b_{2a}(\sigma_1, \sigma_2) \\ 0 & a_{22}(\sigma_1, \sigma_2) & b_{1b}(\sigma_1, \sigma_2) & b_{2b}(\sigma_1, \sigma_2) \\ 0 & 0 & 0 & d_{22}(\sigma_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \hat{q} \\ \dot{M} \\ \hat{\delta} \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

şeklini alır.

## 4. EYLEYİCİ DOYUMU

Bu bölümde doyumlu eyleyicilere sahip sistemler üzerinde yapılan çalışmalara ait örnekler verilmiş ve bu sistemlerin  $\mathcal{L}_2$  kazanç kararlılığı, DME aracı kullanılarak incelenmiştir.

### 4.1 Giriş

Gerçek dünyadaki eyleyici içeren geri-beslemeli kontrol uygulamalarında, eyleyiciler üzerinde çok katı genlik ve değişim sınırlamaları bulunmaktadır. Pratikte, herhangi fiziksel elektromekanik bir aygıt kullanıcıya sınırlı kuvvet, tork, strok, akış kapasitesi veya doğrusal/açısal oran sağlayabilmektedir. Eyleyici limitlerini göz ardı eden denetleyici tasarımları, beklenilmeyen geçici hal cevapları ile karşılaşılmasını mümkün kılmakta, kapalı çevrim performansını düşürmekte ve hatta kapalı çevrim kararsızlığına dahi yol açabilmektedir. Örneğin, yüksek manevra kabiliyeti gerekli olan ileri taktik muharebe uçaklarında, eyleyici üzerindeki genlik ve değişimindeki doyum, uçuş performansını düşürmekte ve hatta ölümcül arızalara yol açabilmektedir. Bu bakımdan, eyleyici doyumları, birçok doğrusal ve doğrusal olmayan kontrol tasarım tekniğinde temel sınırlamalar oluşturur. Bu nedenle, bu konu ile ilgili olarak araştırma sayısı giderek artmaktadır.

Konuyla ilgili ilk araştırmalar, kontrol doyum probleminin optimal kontrol teorisi ile çözümü (Hsia, 1967), anti-windup kompensasyonu (Astrom ve Rundqwist, 1989), hata yönetimi yaklaşımı (Kapasouris vd., 1988), Ricati ve Lyapunov tabanlı yarı veya global kararlı kılıcılar, sınırlı reel, pozitif reel ve mutlak kararlılık gibi teori ve yaklaşımların uzantılarını birer çalışma alanı olarak ele alınmıştır. Literatürdeki bu öncü çalışmalar ve şu anki gelişmelerin yönelimi doyumlu eyleyiciler hakkında zengin çeşitlilikte tekniklerin oluşmasını sağlamıştır. Günümüzdeki çalışmalarda ise, doyumlu eyleyicili ileri kontrol tasarım teknikleri adı altında performans kaybı, bozucu bastırma, belirsizliklere ve zaman gecikmelerine karşın dayanıklılık, çekim bölgesinin kestirimi ve değişim doyumunu gibi sorunlara değinilmektedir.

Biz bu bölümde, konu hakkındaki günümüzdeki ileri gelişmeleri inceleyeceğiz. Burada, daha ziyade tutucu çözümler içermeyen, matematiksel olarak formalize edilebilmiş ve etkin algoritmalara sahip tekniklere değinilecektir.

Barbu vd. (2000) eksponansiyel kararsız modlar içeren doğrusal sistemler için girişlerde genlik ve değişim doyumunu olduğu durumda anti-windup kontrolcü tasarımı ele almışlardır. Bu çalışmada yazarların konuyla ilgili öncü çalışmalarındaki yerel ve global kontrolcülerden bahsedilmiştir. Özellikle bu yayında doyumlu ve eksponansiyel modlar içeren doğrusal sistemler için yapılan anti-windup tasarımı, geniş bir çalışma bölgesinde tatmin edici sonuçlar vermiştir. Ayrıca bu çalışmada bu tipte bir sistem için yerel performans ve global kararlılığın sağlanabilmesi için gerek koşullar gösterilmiştir. Son olarakda doyumlu eyleyiciler içeren kararsız bir uçağın manuel uçuş kontrol örneği verilmiştir. Bu örnekte agresif manevralar altında sistemin kararlılığının devamlılığı gösterilerek önerilen kontrolcünün faydası belirtilmiştir.

Eun vd. (2001) ise doğrusal tasarımda küçük olabilecek performans kayıpları için eyleyici doyumunun seviyesi üzerine yoğunlaşmışlardır. Genel stokastik doğrusallaştırma metodolojisinin yeni bir uygulaması olarak doğrusal olmayan eyleyici doyumuna sözde doğrusal kazanç yaklaşımı yapılmıştır. Özellikle, kabul edilebilir doyumlu eyleyici seviyesi, performansdaki azalmanın stokastik doğrusallaştırma kullanılarak elde edilmesiyle belirlenmiştir. Sonuç ifadesinde kabul edilebilir doyumlu eyleyici seviyesi performans kayıpları cinsinden bir fonksiyon olarak gösterilmektedir. Bu fonksiyonu pozitif reel sayılar ile sistemin doğrusal kısmının Nyquist grafiği ve kontrolcü çıkışının standart sapmasıyla oluşturmuşlardır.

Hu vd. (2000a) asimetric eyleyicilerin pratik problemleri üzerine motive olmuşlardır. Yazarların, bu çalışmadan önce, doğrusal eyleyici doyumuna sahip üstel olarak kararsız sistemlerin kararlılığı ve boş kontrol edilebilir bölge üzerine yayınları bulunmaktadır. Ancak önceki çalışmaları simetric doyumlu eyleyiciler ile sınırlı olduğundan dolayı gerçek dünyada rastladığımız asimetric doyumlu eyleyicileri dışlamaktadır. Araştırmacılar bu çalışmalarında ise asimetric doyumlu eyleyiciler içeren, üstel olarak kararsız doğrusal sistemler için boş kontrol edilebilir bölge karakterizasyonunu ve bu bölge üzerinde kararlılığı göstermişlerdir. Öncelikle, kesin erişilebilir sınırlar içeren düşük dereceli doğrusal sistemlerin harici kontrol girişleri ile oluşturulan yörüngeler gösterilmiştir. Daha sonra, kesin koşullar altında kapalı yörüngenin çekim bölgesinin sınırı olduğu gösterilmiştir. Son olarak da, doğrusal karesel kontrol etkisi altında kararsız ikinci dereceden bir sistemin çekim bölgesinin yüksek kazanç geribeslemesi kullanılıp keyfi olarak genişletilip boş kontrol edilebilir bölgeye yaklaştırılabileceği ispatlanmıştır.

Iwasaki ve Fu (2002) kontrol girişlerinin genlikleri sınırlı olan zamandan bağımsız doğrusal sistemler için dinamik çıkış geribesleme kontrolcüsünün bölgesel  $\mathcal{H}_2$  performans sentezi ile ilgilenmişlerdir. Kapalı çevrim kararlılığını ve  $\mathcal{H}_2$  performansını sağlayabilmek için araştırmacılar daire ve doğrusal analiz tekniklerini kullanmışlardır. Daire tekniği, durum uzayında eyleyicilerin doyumlu olduğu bölgelerde uygunken; doğrusal analiz teknikleri, doyumun aktif olmadığı bölgelerde kullanılmıştır. Sonuç olarak ileri sürülen yöntemin doğrusal analiz metoduna göre performansı geliştirdiği gözlenmiştir.

Jabbari (2001) çalışmasında Doğrusal Parametreleri Değişen (DPD) sistem yaklaşımı içersinde bozucu bastırma probleminde oluşan eyleyici kapasitelerinin sınırlamaları üzerine yoğunlaşmıştır. Yayın, doyumlu eyleci kontrol probleminin, kısıtlamasız DPD problemine dönüştürülmesiyle başlamaktadır. Daha sonra, sabit Lyapunov fonksiyonu yaklaşımıyla politopik DPD sistemler için çıkış geri besleme problemi ele alınmıştır. Sabit Lyapunov fonksiyonu üzerine kurulu DPD tasarımdan kaynaklanan tutuculuk sorununu aşabilmek için parametrelere bağlı DPD kontrol metodolojisi çalışmanın önemli bir yönüdür. Çalışma, DPD kontrol tasarımının, giriş genlik ve değişim doyumu probleminin üstesinden gelebildiği göstermektedir. Aynı zamanda, planlamalı kontrol tasarım yaklaşımının da aynı problemin üstesinden gelebildiği gösterilmiştir. İki numerik örnekle önerilen kontrol metodolojisinin etkinliği belirtilmiştir.

Pan ve Kapila (2001) doyumlu eyleyicilere sahip ayrık zamanlı sistemler üzerinde çalışmışlardır. Önceki çalışmaların esas katkısının sürekli zamanlı sistemler için olduğu belirtilmiş ve bununla birlikte gerçek pratik uygulamaların günümüzde dijitalleştiği vurgulanmıştır. Bu çalışmalarında, doyumlu eyleyici genliği ve değişimi içeren ayrık zamandaki sistemler için DME formülasyonu ile durum geri besleme ve çıkış geri besleme kontrolcüsü tasarımına değinmişlerdir. Bundan başka, tutuculuğu azatacak kararlılık çarpanlarının belirlenmesi için direk bir metodoloji belirtmişlerdir. Yayınlarını, önerilen kontrolcünün verimini göstermek üzere iki numerik örnek ile sonlandırmışlardır.

Pare vd. (1999) doyumlu geribesleme sistemleri için yerel kararlılık ve yerel performans sentezi üzerinde durmuşlardır. Çalışmalarında özellikle üç farklı performans ölçütü için doyumlu geri besleme sistemleri için optimal kontrolcü tasarımını formalize etmişlerdir. Bu üç performans ölçütünü; çekim bölgesi, bozucu bastırma ve  $\mathcal{L}_2$  kazanç olarak sıralayabiliriz. Ortaya çıkarılan optimal kontrolcü tasarımının temelleri Popov kriterlerine ve doyumlu yapının sektör sınırlamalı doğrusal olmayan yapısına dayandığı görülmektedir.

Sonuçta, elde edilen optimal kontrolcünün karakterizasyonunda, DME ler ve Doğrusal Olmayan Matris Eşitsizlikleri kullanılmıştır.

Tarbouriech ve Garcia (2002) Ricati ve DME tabanlı yaklaşımla, pozisyonu ve değişimi doyumlu eyleyicili, belirsizlikler içeren sistemler için dayanıklı çıkış geri besleme kontrolcüsü tasarlamışlardır. Önerilen kontrolcü; normu sınırlı, zamanla değişen parametrik belirsizlikler içeren sistemler için dayanıklı kararlılık ve dayanıklı performans sağlamaktadır. Buna ilaveten, önerilen kontrol metodolojisi, açık çevrim kararsız sistemlerin yerel kararlılığını da sağlayabilmektedir. Bu çalışmalarında ayrıca eyleyici doyum problemine ilişkin yeni bir yaklaşım yaparak, doğrusal olmayan doyum ifadesini politopik bir şekilde göstermişlerdir. Önerilen tekniğin etkinliği iki numerik örnek ile pekiştirilmiştir.

Wu vd. (1998) genliği doyumlu eyleyicili sistemler için geribesleme problemini incelemişlerdir. Özellikle, çalışmada DPD tasarım aracını kullanarak sistematik bir anti-windup kontrol tasarım metodolojisi ortaya çıkarmışlardır. Geleneksel iki adımlı tasarımdan üstün olarak; önerilen teknik, indirgenmiş  $\mathcal{L}_2$  kazanç kontrolcüsünü içermekte ve doyum gösterge parametresini kullanarak DPD kontrolcüyü planlamaktadır. DPD kontrol kuralı geliştirilirken DME aracı seçilmiş ve üretilen eşitsizlikler kolaylıkla iç nokta algoritmasıyla çözümlenmiştir. Etkinliğini göstermek üzere iki adet doğrusal olmayan doyumlu giriş içeren muharebe uçağı (F-8) üzerinde boylamsal kontrol yapılmıştır.

da Silva Jr ve Tarbouriech (2005) doyumlu eyleyicilere sahip doğrusal sistemlerde daha geniş bir kararlılık bölgesi elde edebilmek amacıyla bu çalışmayı gerçekleştirmişlerdir. Çalışmalarında, doyumsuz doğrusal sistemi kararlı kılan, doğrusal dinamik çıkış geri besleme kontrolcüsünün tasarımı göz önünde tutularak, kapalı çevrim sisteminin çekim havuzunun kestirimini maksimize etmek amacı ile anti-windup kazanç tasarımı önerilmiştir. Görülmüştür ki, kapalı çevrim sistem içersindeki kontrolcü ve anti-windup yapısı, ölü bölge gibi modellenenbilmektedir. Daha sonra modifiye edilen sektör koşulları, kararlılık koşullarının karesel Lyapunov fonksiyonu tabanında elde edilmesi için kullanılmıştır. Önceki çalışmalardan farklı olarak ortaya çıkarılan koşullar, DME biçiminde verilmiştir. Son olarak da, önceki çalışmalar ile olan farklarının ortaya çıkartılması ve önerilen yöntemin etkisinin gözlenmesi açısından bazı nümerik örnekler verilmiştir.

Hu vd. (2006) genel geri besleme konfigürasyonu içerisinde, doyumlu sistemler için, bölgesel kararlılık ve performans analizini, sistematik Lyapunov yaklaşımıyla geliştirmişlerdir. Sistem hakkındaki tek kabullenmeleri tüm cebirsel döngülerin ve yerel kararlılığın iyi konumlandırılmış olmasıdır. Enerjisi sınırlı bozucular altında erişebilir kümeler, doğrusal olmayan  $\mathcal{L}_2$  kazancı ve çekim bölgesinin kestirimi problemleri üzerinde durulmuştur.

Castelan vd. (2006) enerjisi sınırlı bozucu etksi altında eyleyicileri doyumlu doğrusal sistemlerin kontrol problemini ele almışlardır. Girişten duruma kapalı çevrim kararlılığını ve kapalı çevrim sınırlı kazanç  $\mathcal{L}_2$  kararlılığını sağlayacak durum geri besleme kazancının belirlenmesinde DME kıstaslarını ortaya çıkarmışlardır. Karasel Lyapunov fonksiyonu kullanılarak elde edilen bu kıstaslar için temelde iki araç kullanılmıştır. Bunlardan birincisi; doğrusal olmayan sektör kıstaslarını gözönünde tutan modifiye edilmiş sektör kıstasları; ikincisi ise, çoklu amaç ölçütleri altında olabildiğince en az tutucu çalışma bölgesini ortaya çıkarabilecek Finsler yardımcı teoremidir.

## 4.2 Doyumlu Eyleyicilere Sahip Sistemlerde $\mathcal{L}_2$ Kazanç Kararlılığı

Amaç, genel olarak, doyumlu eyleyicilere sahip sistemlerde, sınırlı enerjiye sahip bozucuların bastırılmasına ilişkin durum geribesleme kontrolcüsünü, DME kıstasları kullanarak, çoklu amaç ölçütleriyle hesaplamaktır. Bu doğrultuda,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\alpha)x + B_w(\alpha)w + B_u u \\ z &= C(\alpha)x \end{aligned} \quad (4.1)$$

sistemini ele alalım. Burada  $x \in \mathbb{R}^n$  durum vektörünü,  $u \in \mathbb{R}^m$  kontrol vektörünü,  $z \in \mathbb{R}^p$ 'nin sözde performans çıkışlarını (kontrol edilen çıkış) gösterebilir. Ayrıca  $w \in \mathcal{L}_2^q[0, \infty)$  sınırlı enerjiye sahip bozucu girişleri sembolize etsin. Bu durumda açıktır ki

$$\|w\|_2^2 = \int_0^\infty w(\tau)^T w(\tau) d\tau < \frac{1}{\delta} \quad 0 < 1/\delta < \infty. \quad (4.2)$$

koşulunu sağlayan  $\delta$  sabiti her zaman bulunabilir. Diğer taraftan  $\alpha \in \mathbb{R}^N$ 'nin gerçek-zamanlı olarak ölçülebilen ve

$$\Theta = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, N \right\}. \quad (4.3)$$

politopu içerisinde zamanla değişen parametrelerin sahipteliklerini gösteren vektör olsun. Bu durumda, bu sistemi gösteren politopu

$$\mathcal{P} = \left\{ (A, B_u, B_w, C)(\alpha) : (A, B_u, B_w, C)(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j (A, B_u, B_w, C)_j, \alpha \in \Theta \right\}. \quad (4.4)$$

şeklinde gösterebiliriz.

Durum geri besleme kontrol işaretinin doyumlu olmasına ilişkin yapıyı ise, doyum fonksiyonu olan  $sat(\cdot)$  kullanarak

$$u = sat(K_{sat}(\alpha)x), K_{sat}(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (4.5)$$

şeklinde belirtebiliriz. Bu durumda, üretilen bu kontrol vektörü içersindeki,  $u_i = sat(K_{sat_i}(\alpha)x)$  şeklinde tanımlanmış herbir kontrol işareti, her  $i = 1, \dots, m$  ve  $\alpha \in \Theta$  için

$$u_i = \begin{cases} \rho_i & \text{eğer } K_{sat_i}(\alpha)x > \rho_i \\ K_{sat_i}(\alpha)x & \text{eğer } -\rho_i \leq K_{sat_i}(\alpha)x \leq \rho_i \\ -\rho_i & \text{eğer } K_{sat_i}(\alpha)x < -\rho_i \end{cases} \quad (4.6)$$

ifadesinde olduğu gibi gösterilebilir. Buradaki  $\rho_i$  ifadeleri  $i$ . eyleyiciye ait doyum genliğini göstermektedir.

Öyleyse, kapalı-çevrim sistemimizi

$$\begin{aligned} \psi(K_{sat}(\alpha)x) &:= K_{sat}(\alpha)x - sat(K_{sat}(\alpha)x) \\ \psi(K_{sat_i}(\alpha)x) &:= \begin{cases} K_{sat_i}(\alpha)x - \rho_i & \text{eğer } K_{sat_i}(\alpha)x > \rho_i \\ 0 & \text{eğer } -\rho_i \leq K_{sat_i}(\alpha)x \leq \rho_i \\ K_{sat_i}(\alpha)x + \rho_i & \text{eğer } K_{sat_i}(\alpha)x < -\rho_i \end{cases} \end{aligned} \quad (4.7)$$

tanımlamaları altında; dağıtılmış, doğrusal olmayan ölü bölge mantığı ile ilişkili tanımlamayı kullanarak

$$\dot{x} = A_{cl}(\alpha)x - B_u \psi(K_{sat}(\alpha)x) + B_w(\alpha)w \quad (4.8)$$

formunda elde ederiz. Burada  $A_{cl}(\alpha) = A(\alpha) + B_u K_{sat}(\alpha)$ .

Bu tanımlamalar ışığında, kontrol problemimizi, aşağıda sıralanan özelliklere sahip,  $K_{sat}(\alpha)$  şeklinde tanımlanmış durum geri-beslemeli bir kontrolcü ile  $\mathcal{S}_0$ ,  $\mathcal{S}_1$  şeklinde tanımlanmış iki kümeyi verilen  $\delta$  için bulmak şeklinde ifade edebiliriz.

$K_{sat}(\alpha)$  kontrolcüsünün özellikleri:

- İlgili kontrol mekanizması,  $w = 0$  ve  $x(0) \in \mathcal{S}_0$  şeklinde herhangi bir ilk koşulda, sistem yörüngesini asimtotik olarak orjine yakınsamasını sağlayacaktır.
- İlgili kontrol mekanizması,  $w \neq 0$ ,  $x(0) \in \mathcal{S}_0$  şeklinde herhangi bir ilk koşulda ve (4.2) koşuluna uyan her  $w$  bozucusu altında, kapalı çevrim yörüngesinin  $\mathcal{S}_1$  kümesi içersinde sınırlı kalması koşulunu sağlayacak; ayrıca  $\eta > 0$  ve  $b \geq 0$  sabitler olmak üzere (buradaki



$b$ , ilk koşullar göz önünde tutulduğunda bias ifadesini göstermektedir) kapalı çevrim sistem performansının

$$\|z(t)\|_2^2 \leq \frac{1}{\eta} \|w(t)\|_2^2 + b \quad \forall t > 0 \quad (4.9)$$

şeklinde tanımlanmış garanti edilen bir maliyetten az olmasını temin edecektir.

Tanımlanan bu kontrol problemin çözümü olan durum geri besleme kazancının hesaplanabilmesi için öncelikle modifiye edilmiş sektör koşulunu kullanabileceğimiz bir yardımcı teorem gereklidir.

**Yardımcı Teorem 4.1:** (da Silva Jr ve Tarbouriech, 2005)  $i = 1, \dots, m$  ve her  $\alpha \in \Theta$  olacak şekilde  $G(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  gibi bir matris ve

$$\mathcal{S}_a(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : |[K_{sat_i}(\alpha) - G_i(\alpha)]x| \leq \rho_i\} \quad (4.10)$$

gibi bir küme ele alındığında. Bu kümeden seçilen her  $x \in \mathcal{S}_a(\alpha)$  ile (4.7)'de tanımlanan  $\psi(K_{sat}(\alpha)x)$  kullanılarak her  $\alpha \in \Theta$  için

$$\psi(K_{sat}(\alpha)x)^T T(\alpha)(\psi(K_{sat}(\alpha)x) - G(\alpha)x) \leq 0 \quad (4.11)$$

eşitsizliği herhangi pozitif tanımlı diyagonal matris olan  $T(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  için gerçekleşir.

**İspat:**(4.7)'deki tanımlamada bulunan üç durumu ayrı ayrı inceleyecek olursak

**a)**  $-\rho_i \leq K_{sat_i}(\alpha)x \leq \rho_i$  durumunda tanımlamada görüldüğü gibi  $\psi(K_{sat_i}(\alpha)x) = 0$  olacaktır ve dolayısıyla

$$\psi(K_{sat_i}(\alpha)x)^T T_{i,i}(\alpha)(\psi(K_{sat_i}(\alpha)x) - G_i(\alpha)x) = 0 \quad (4.12)$$

eşitliği elde edilecektir.

**b)**  $K_{sat_i}(\alpha)x > \rho_i$  durumunda tanımlamadan

$$\psi(K_{sat_i}(\alpha)x) = K_{sat_i}(\alpha)x - \rho_i \quad (4.13)$$

olacaktır.  $x \in \mathcal{S}_a(\alpha)$  koşulu altında

$$K_{sat_i}(\alpha)x - G_i(\alpha)x \leq \rho_i \quad (4.14)$$

eşitsizliği sağlanır. (4.13) ve (4.14) kullanılarak

$$\psi(K_{sat_i}(\alpha)x) - G_i(\alpha)x = K_{sat_i}(\alpha)x - \rho_i - G_i(\alpha)x \leq 0 \quad (4.15)$$

eşitsizliği elde edilir.  $\psi(K_{sat_i}(\alpha)x) > 0$  durumunda

$$\psi(K_{sat_i}(\alpha)x)^T T_{i,i}(\alpha)(\psi(K_{sat_i}(\alpha)x) - G_i(\alpha)x) \leq 0, \quad \forall T_{i,i} > 0 \quad (4.16)$$

c)  $K_{sat_i}(\alpha)x < -\rho_i$  durumunda tanımlamadan

$$\psi(K_{sat_i}(\alpha)x) = K_{sat_i}(\alpha)x + \rho_i \quad (4.17)$$

olacaktır.  $x \in \mathcal{S}_a(\alpha)$  koşulu altında

$$K_{sat_i}(\alpha)x - G_i(\alpha)x \geq -\rho_i \quad (4.18)$$

eşitsizliği sağlanır. (4.17) ve (4.18) kullanılarak

$$\psi(K_{sat_i}(\alpha)x) - G_i(\alpha)x = K_{sat_i}(\alpha)x + \rho_i - G_i(\alpha)x \geq 0 \quad (4.19)$$

eşitsizliği elde edilir.  $\psi(K_{sat_i}(\alpha)x) < 0$  durumunda

$$\psi(K_{sat_i}(\alpha)x)^T T_{i,i}(\alpha)(\psi(K_{sat_i}(\alpha)x) - G_i(\alpha)x) \leq 0, \quad \forall T_{i,i} > 0 \quad (4.20)$$

Bu üç durum incelendiğinde görülmüştürki  $x \in \mathcal{S}_a(\alpha)$  koşulu altında

$$\psi(K_{sat_i}(\alpha)x)^T T_{i,i}(\alpha)(\psi(K_{sat_i}(\alpha)x) - G_i(\alpha)x) \leq 0, \quad \forall T_{i,i} > 0, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (4.21)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Oluşan yapıyı (4.11)'deki gibi gösterebiliriz.  $\square$

Takip eden teorem Castelan vd. (2006) yayınında faydalanılarak geliştirilmiştir.

**Teorem 4.1:** Eğer simetrik pozitif tanımlı  $W(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  matrisi,  $M(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $Y(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  gibi iki matris ve  $S(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  gibi diyagonal bir matris

$$N_1(\alpha) := \begin{bmatrix} W(\alpha) & M_i(\alpha)^T - Y_i(\alpha)^T & M_i(\alpha)^T - Y_i(\alpha)^T \\ * & \frac{1}{\beta} \rho_i^2 & 0 \\ * & * & \eta \delta \rho_i^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.22)$$

$$N_2(\alpha) := \begin{bmatrix} \mathcal{V}(\alpha) & -B_u S(\alpha) + Y(\alpha)^T & \eta B_w(\alpha) & W(\alpha)^T C(\alpha)^T \\ * & -2S(\alpha) & 0 & 0 \\ * & * & -\eta I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.23)$$

burada

$$\mathcal{V}(\alpha) = A(\alpha)W(\alpha) + W(\alpha)A^T(\alpha) + B_u M(\alpha) + M(\alpha)^T B_u^T \quad (4.24)$$

eşitsizlikleri sağlayacak şekilde  $\alpha \in \Theta$  bölgesinde bulunabiliyorsa kontrol kazancını

$$K_{sat}(\alpha) = M(\alpha)W^{-1}(\alpha) \quad (4.25)$$

eşitliği ile belirlenebilir.

- (4.2) nolu denklemdeki enerjisi sınırlı her  $w(t)$  bozucu sinyali ve

$$x(0) \in \mathcal{S}_0 = \mathcal{E}(P(\alpha), \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n; x^T P(\alpha)x \leq \beta\} \quad (4.26)$$

kümesinden seçilen her başlangıç durumu için

$$\|z(t)\|_2^2 \leq \frac{1}{\eta} \|w(t)\|_2^2 + \beta, \quad \forall t > 0 \quad (4.27)$$

ile kapalı çevrim sistemi  $\mathcal{L}_2$  kararlı kılar.

- Sıfırdan farklı her (4.2)nolu denklemi sağlayan bozucu sinyali ve  $x(0) \in \mathcal{S}_0 = \mathcal{E}(P(\alpha), \beta)$  kümesinden seçilen her başlangıç durumu için, kapalı çevrim yörüngesi

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{E}\left(P(\alpha), \frac{1}{\mu}\right) = \left\{x : x^T P(\alpha)x \leq \frac{1}{\mu}\right\} \quad \frac{1}{\mu} = \beta + \frac{1}{\eta\delta} \quad (4.28)$$

kümesi içersinde kalır.

- $w = 0$  olduğu durumda,  $\mathcal{S}_1 = \mathcal{E}(P(\alpha), 1/\mu)$  büzülür ve kapalı çevrim sistemin çekim bölgesinde kalır.

**İspat:** Lyapunov aday fonksiyonu olarak

$$V(x) = x^T P(\alpha)x \quad (4.29)$$

ifadesini ele alalım. Burada her  $\alpha \in \Theta$  için  $P(\alpha)^T = P(\alpha)$  dir. (4.22) nolu DMEler önden ve arkadan  $diag\{W^{-1}(\alpha), 1, 1\}$  ifadesi ile çarpıldığında,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} W^{-1}(\alpha) & 0 & 0 \\ \star & 1 & 0 \\ \star & \star & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(\alpha) & M_i(\alpha)^T - Y_i(\alpha)^T & M_i(\alpha)^T - Y_i(\alpha)^T \\ \star & \frac{1}{\beta}\rho_i^2 & 0 \\ \star & \star & \eta\delta\rho_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{-1}(\alpha) & 0 & 0 \\ \star & 1 & 0 \\ \star & \star & 1 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} W^{-1}(\alpha) & 0 & 0 \\ \star & 1 & 0 \\ \star & \star & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & M_i(\alpha)^T - Y_i(\alpha)^T & M_i(\alpha)^T - Y_i(\alpha)^T \\ (M_i(\alpha) - Y_i(\alpha))W^{-1}(\alpha) & \frac{1}{\beta}\rho_i^2 & 0 \\ (M_i(\alpha) - Y_i(\alpha))W^{-1}(\alpha) & \star & \eta\delta\rho_i^2 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} W^{-1}(\alpha) & W^{-1}(\alpha)(M_i(\alpha)^T - Y_i(\alpha)^T) & W^{-1}(\alpha)(M_i(\alpha)^T - Y_i(\alpha)^T) \\ \star & \frac{1}{\beta}\rho_i^2 & 0 \\ \star & \star & \eta\delta\rho_i^2 \end{bmatrix} \\ & \qquad \qquad \qquad i = 1, \dots, m \quad (4.30) \end{aligned}$$

ve daha sonra  $M(\alpha) = K_{sat}(\alpha)W(\alpha)$ ,  $Y(\alpha) = G(\alpha)W(\alpha)$  ve  $W^{-1}(\alpha) = P(\alpha)$  değişken dönüşümlerini yapıldığında,

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & K_{sat_i}(\alpha)^T - G_i(\alpha)^T & K_{sat_i}(\alpha)^T - G_i(\alpha)^T \\ \star & \frac{1}{\beta}\rho_i^2 & 0 \\ \star & 0 & \eta\delta\rho_i^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.31)$$

matris eşitsizlikleri elde edilir. Eşitsizlikler schur birleştirmesi ile tek satıra indirildiğinde,

$$P(\alpha) - \left( \frac{1}{\eta\delta\rho_i^2} + \frac{\beta}{\rho_i^2} \right) [K_{sat_i}(\alpha)^T - G_i(\alpha)^T][K_{sat_i}(\alpha) - G_i(\alpha)] \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.32)$$

eşitsizliklerine ulaşılır.

$$\frac{1}{\mu} = \beta + \frac{1}{\eta\delta} \quad (4.33)$$

koşulu altında  $\mathcal{S}_1(P(\alpha), 1/\mu)$  kümesi içersinden herhangi bir  $x$  alınıp, (4.32) eşitsizlikleri önden ve arkadan bu durum ile çarpıldığında

$$\begin{aligned} x^T P(\alpha)x - x^T \left( \frac{1}{\eta\delta\rho_i^2} + \frac{\beta}{\rho_i^2} \right) [K_{sat_i}(\alpha)^T - G_i(\alpha)^T][K_{sat_i}(\alpha) - G_i(\alpha)]x &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ \frac{1}{\mu} &\geq \left( \frac{1}{\eta\delta\rho_i^2} + \frac{\beta}{\rho_i^2} \right) x^T [K_{sat_i}(\alpha)^T - G_i(\alpha)^T][K_{sat_i}(\alpha) - G_i(\alpha)]x, \quad i = 1, \dots, m \\ \beta + \frac{1}{\eta\delta} &\geq \left( \frac{1}{\eta\delta\rho_i^2} + \frac{\beta}{\rho_i^2} \right) x^T [K_{sat_i}(\alpha)^T - G_i(\alpha)^T][K_{sat_i}(\alpha) - G_i(\alpha)]x, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4.34)$$

ifadesi elde edilir. Denklemin her iki tarafı  $\rho_i^2$  ile çarpıldığında

$$\rho_i^2 \geq x^T [K_{sat_i}(\alpha)^T - G_i(\alpha)^T][K_{sat_i}(\alpha) - G_i(\alpha)]x, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.35)$$

elde edilir ve bu bize  $1/\mu = \beta + 1/\eta\delta$  koşulu altında  $\mathcal{S}_1(P(\alpha), 1/\mu) \subseteq \mathcal{S}_a(\alpha)$ ,  $\forall \alpha \in \Theta$  ifadesini göstermektedir. Dahası,  $\mu$  tanımından  $\mathcal{S}_0 = \mathcal{E}(P(\alpha), \beta) \subseteq \mathcal{E}(P(\alpha), 1/\mu)$  ifadesinide belirtmektedir.

(4.23) nolu DMEnin Schur tümleyenini aldığımızda, (4.23) nolu eşitsizlik,

$$\begin{bmatrix} \mathcal{V}(\alpha) + W(\alpha)^T C(\alpha)^T C(\alpha) W(\alpha) & -B_u S(\alpha) + Y(\alpha)^T & \eta B_w(\alpha) \\ \star & -2S(\alpha) & 0 \\ \star & \star & -\eta I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.36)$$

şeklini almaktadır. Şimdi, harici  $\xi := [x^T \psi(K_{sat}(\alpha)x) w]^T$  gibi bir durum vektörü belirleyip,  $W(\alpha) = P(\alpha)^{-1}$ ,  $S(\alpha) = T(\alpha)^{-1}$ ,  $Y(\alpha) = G(\alpha)P(\alpha)^{-1}$  tanımlamalarını yaptıktan sonra temel cebrik işlemler kullanılarak

$$\dot{V}(x) + z^T z - \frac{1}{\eta} w^T w - 2\psi(K_{sat}(\alpha)x)^T T(\alpha)(\psi(K_{sat}(\alpha)x) - G(\alpha)x) < 0, \quad T(\alpha) > 0 \quad (4.37)$$

eşitsizliği elde edilir. Yardımcı teorem 4.1'e göre, eğer  $x \in \mathcal{S}_a(\alpha)$  ise (4.37) nolu ifade

$$\dot{V}(x) + z'z - \frac{1}{\eta} w'w < 0 \quad (4.38)$$

haline gelecektir. Başlangıç durumunun  $x(0) \in \mathcal{S}_0$  şeklinde seçilmesiyle

$$V(x(T(\alpha))) \leq \frac{1}{\eta} \int_0^T w(t)^T w(t) dt + V(x(0)) \leq \frac{1}{\eta} \|w\|_2^2 + \beta \leq \frac{1}{\eta\delta} + \beta = \frac{1}{\mu}, \quad \forall T(\alpha) > 0 \quad (4.39)$$

ifadesi ortaya çıkar. Bundan dolayı sistem yörüngesi  $\mathcal{S}_1$  yörüngesi dışına asla çıkamaz. Öyleyse (4.22) nolu DMElerin  $\forall T(\alpha) > 0, x(T(\alpha)) \in \mathcal{S}_a(\alpha)$  koşulu altında sağlanması teoremin ikinci önermesini ispatlamaktadır.  $T$  sonsuza yakınsadığı zaman ise  $\|z\|_2^2 < (1/\eta)\|w\|_2^2 + \beta$  denklemi gerçekleşmekte ve teoremin ilk önermesi ispatlanmaktadır. Son olarak  $w(t) = 0$  olduğunda, her  $x(t) \in \mathcal{S}_1$  için ifade  $\dot{V}(x) \leq 0$  halini alacak ve bu  $\mathcal{S}_1$  kümesinin büzülen bir küme olduğunu gösterecektir.  $\square$

## 5. DPD SİSTEMLER İÇİN YENİ $\mathcal{H}_2$ NORM HESABI

Bu bölümde, 4. bölümde girişlerden durumlara kararlılığı incelenmiş ve  $\mathcal{L}_2$  kazancı garanti edilebilir bir seviyede tutulabilmiş (4.1) sistemi için geleneksel yöntemlere nazaran daha az tutucu bir  $\mathcal{H}_2$  kontrolcüsü, durum geri besleme mantığı ile ortaya çıkarılacaktır.

$\mathcal{H}_2$  norm hesabı için sistem çıkışı kullanıldığında (4.1) sistemi için  $\mathcal{H}_2$  normu

$$\|G_s\|_2^2 = \lim_{h \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h \text{tr}[C(\alpha)Q(\alpha)C(\alpha)^T] dt \right\}, \quad (5.1)$$

şeklinde hesaplanabilir. Buradaki  $Q(\alpha)$

$$\dot{Q}(\alpha) = A_{cl}(\alpha)Q(\alpha) + Q(\alpha)A_{cl}(\alpha)^T + B_w(\alpha)B_w(\alpha)^T, \quad Q(0) = 0. \quad (5.2)$$

Riccati eşitliğini sağlamaktadır. Bilindiği gibi geleneksel olarak  $\gamma > 0$  gibi skaler bir sayı belirleyip, bunu sistemin  $\mathcal{H}_2$  normunu üstten sınırladığını kabul ederek oluşturduğumuz optimizasyon problemi

$$\begin{bmatrix} A_{cl}(\alpha)W(\alpha) + W(\alpha)A_{cl}(\alpha)^T & B_w(\alpha) \\ * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (5.3)$$

$$\begin{bmatrix} W(\alpha) & W(\alpha)C(\alpha)^T \\ * & L(\alpha) \end{bmatrix} > 0, \quad (5.4)$$

$$\text{Tr}L(\alpha) < \gamma \quad (5.5)$$

eşitsizliklerini  $\alpha \in \Theta$  olmak üzere sağlayan bir simetrik pozitif tanımlı  $W(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$  bulmak ve  $w \in L_2^q[0, \infty)$  bozucu etkisi altında  $\gamma$  değerini minimize etmek mantığı üzerine kuruludur.

Xie (2005) yaptığı çalışmada parametrelere bağlı Lyapunov fonksiyonu kullanarak daha az tutucu bir hesaplama ve kontrolcü tasarım metodu ortaya atmıştır.

**Teorem 5.1:** (Xie, 2005) (5.3)-(5.5) DMElerini sağlayan simetrik pozitif tanımlı  $W(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$  matrisinin bulunmasının yegane koşulu

$$R_1(\alpha) := \begin{bmatrix} A_{cl}(\alpha)Q(\alpha) + Q(\alpha)^T A_{cl}(\alpha)^T & W(\alpha) - Q(\alpha)^T + rA_{cl}(\alpha)Q(\alpha) & B_w(\alpha) \\ * & -r(Q(\alpha) + Q(\alpha)^T) & 0 \\ * & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.6)$$

$$R_2(\alpha) := \begin{bmatrix} Q(\alpha) + Q(\alpha)^T - W(\alpha) & Q(\alpha)^T C(\alpha)^T \\ C(\alpha)Q(\alpha) & L(\alpha) \end{bmatrix} > 0, \quad (5.7)$$

$$R_3(\alpha) := \text{Tr}L(\alpha) < \gamma \quad (5.8)$$

matris eşitsizliklerini sağlayan simetrik pozitif tanımlı  $W(\alpha)$  matrisi,  $Q(\alpha)$  matrisi ve yeteri kadar küçük pozitif skaler  $r > 0$  bulunmasına eşdeğerdir.

**İspat:** Eğer (5.3)-(5.5) DMElerini sağlayan simetrik pozitif tanımlı  $W(\alpha)$  matrisi var ise her zaman

$$\lambda_1 I < \left( - \begin{bmatrix} A_{cl}(\alpha)W(\alpha) + W(\alpha)A_{cl}(\alpha)^T & B_w(\alpha) \\ \star & -I \end{bmatrix} \right) \quad (5.9)$$

$$\text{ve } \lambda_2 I > \left( \begin{bmatrix} A_{cl}(\alpha)W(\alpha)A_{cl}(\alpha)^T & 0 \\ \star & 0 \end{bmatrix} \right) \quad (5.10)$$

eşitsizliklerini sağlayan  $2\lambda_1/\lambda_2 > r > 0$  olacak şekilde  $r$  skaleri bulunabilir. (5.6) nolu DMEye  $Q(\alpha) = W(\alpha)$  seçerek Schur birleşimi uygulandığında

$$\begin{bmatrix} A_{cl}(\alpha)W(\alpha) + W(\alpha)A_{cl}(\alpha)^T & B_w(\alpha) \\ \star & -I \end{bmatrix} + \frac{r}{2} \begin{bmatrix} A_{cl}(\alpha)W(\alpha)A_{cl}(\alpha)^T & 0 \\ \star & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (5.11)$$

eşitsizliği elde edilir. Skaler  $r$  her zaman (5.11) eşitsizliğini sağlar.  $Q(\alpha) = W(\alpha)$  ve skaler  $r$  (5.6)-(5.8) eşitsizliklerini sağlar.

(5.6) matrisi soldan

$$T(\alpha) = \begin{bmatrix} I & A(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

ile çarpılıp, sağdan da  $T^T(\alpha)$  ile çarpıldığında (5.3) elde edilir.  $Q(\alpha) + Q^T(\alpha) > W(\alpha) > 0$  olmasından dolayı ( buradaki  $Q(\alpha)$  tekil değildir),  $W(\alpha)$  pozitif tanımlı olduğu sürece

$$(W(\alpha) - Q(\alpha))^T W^{-1}(\alpha) \times (W(\alpha) - Q(\alpha)) \geq 0 \quad (5.13)$$

eşitsizliği sağlanır. (5.4) denkleminde

$$Q^T(\alpha)W^{-1}(\alpha)Q(\alpha) \geq Q(\alpha) + Q^T(\alpha) - W(\alpha) \quad (5.14)$$

eşitsizliği uygulandığında

$$\begin{bmatrix} Q^T(\alpha)W^{-1}(\alpha)Q(\alpha) & Q(\alpha)^T C(\alpha)^T \\ C(\alpha)Q(\alpha) & L(\alpha) \end{bmatrix} > 0, \quad (5.15)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik soldan

$$T(\alpha) = \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & W(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

ile çarpılıp sağdan da  $T^T(\alpha)$  ile çarpıldığında (5.4) nolu eşitsizlik (5.7) nolu eşitsizlikten elde edilmiş olur.  $\square$

## 6. PBHÇLF TABANLI KONTROLCÜ TASARIMI

Bu bölümde (Sözde-)DPD sistemler için durum geri-besleme kontrolcüsünün tasarımı yapılacaktır. Tasarımı amaçlanan kontrolcünün, sisteme etki eden enerjisi sınırlı bozucuları bastırması ve giriş doyum sınırları içerisinde çalışması beklenmektedir. Kontrolcü, Parametrelerine Bağımlı Homojen Çokterimli (PBHÇ) Lyapunov Fonksiyonları yaklaşımıyla gerçekleştirilecek ve tasarım için sistematik bir yol ortaya konulacaktır. Ayrıca bu bölüm içerisinde tek çubuklu ters sarkaç sistemi üzerinde önerilen kontrolcünün üstün yanları vurgulanacaktır.

### 6.1 Parametrelerine Bağımlı DMELerin Çokterimli Çözümlerinin Varlığı

**Tek Terimli (Monomial):**  $N$  adet değişken ile her  $K \in \mathbb{Z}_+^N$  için

$$m_K(\alpha) = \alpha^K := \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N} \quad (6.1)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona tek terimli (monomial) denir. Tek terimlinin derecesi

$$\deg m_K := \sum_{i=1}^N k_i \quad (6.2)$$

ifadesi ile tanımlanır.

**Çokterimli (Polynomial):**  $N$  adet değişken ile  $c_K \in \mathbb{R}$  nin oluşturduğu  $m_K$  tek terimlisinin sonlu sayıda doğrusal kombinasyonuna

$$f := \sum_K c_K m_K = \sum_K c_K \alpha^K \quad (6.3)$$

çokterimli (Polynomial) denir.  $f$  çokterimlisinin derecesi

$$\deg f := \max_K (\deg m_K) \quad (6.4)$$

şeklinde tanımlanır.

**Yardımcı Teorem 6.1** (Bliman vd., 2006) Politopik bir kümeden seçilen  $\theta$  için

$$\mathcal{L}(\zeta, \theta) = \mathcal{L}_0(\theta) + \zeta_1 \mathcal{L}_1(\theta) + \cdots + \zeta_M \mathcal{L}_M(\theta) > 0 \quad (6.5)$$

ifadesinde gösterildiği gibi parametrelerine bağlı DME ele alınıp,  $\theta$ 'nın fonksiyonu olan  $\mathcal{L}_i(\theta)$ ,  $i = 0, \dots, M$  ifadesinin sürekli bir fonksiyon olduğu varsayıldığında, her  $\theta$  için  $\mathcal{L}(\zeta(\theta), \theta) > 0$  eşitsizliğini sağlayan parametrelerine bağlı  $\zeta(\theta) \in \mathbb{R}^M$  çözümü bulunabiliyorsa. Her  $\theta$  için  $\mathcal{L}(\zeta^*(\theta), \theta) > 0$  eşitsizliğini sağlayan homojen çokterimli  $\zeta^*(\theta) > 0$  çözümü bulunabilir.  $\square$



## 6.2 Parametrelerine Bağımlı Homojen Çokterimli Matris Gösterimi

Çokterimli matris oluşturulmak üzere, derecesi  $g$  olan çokterimli parametreye bağlı matris

$$M_g(\theta) = \sum_{k \in \mathcal{K}(g)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N} M_k, \quad k = k_1 k_2 \cdots k_N \quad (6.6)$$

şeklinde elde edilir. Bu gösterimdeki  $\alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N}$ ,  $\alpha \in \Theta$ ,  $k_i \in \mathbb{Z}_+$ ,  $i = 1, \dots, N$  tek terimlili ve  $M_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\forall k \in \mathcal{K}(g)$  matris formundaki katsayıları belirtmektedir. İfadedeki  $k$  sembolü, genelde anlaşıldığı gibi  $k_1 \times k_2 \times \dots \times k_N$  sonucunu belirtmemektedir. Belirtilen, sadece ilgili derecelerin yan yana gelerek oluşturduğu sayıyı göstermektedir. Örneğin  $N = 2$  olduğunda  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 0$  olacak ve bu durumda  $k = 20$  olarak ifade edilecektir. Kısacası  $k$  ifadesinin içeriği bir matematiksel değil sadece bir nümerik notasyondur. Diğer taraftan,  $k$  elemanlarının içerisinde seçildiği  $\mathcal{K}(g)$  kümesi, mümkün olan tüm negatif olmayan  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $N$ -lisinden oluşur. Parametreye bağlı matris homojen kavramının eklenmeside işte tam bu noktada ortaya çıkmaktadır. Dikkat edilecek nokta ihtimallerin  $k_1 + k_2 + \dots + k_N = g$  eşitliği ile sınırlı olmasıdır. Yani, tek terimliliği oluşturan ifadedeki derecelerin toplamı, daima çokterimli matrisimizin derecesine eşit olmalıdır. Bu da homojenliği sağlamaktadır. (Montagner vd., 2007)  $\mathcal{P}$  politopunun köşe sayısı  $N$ 'e eşit olduğu sürece,  $\mathcal{K}(g)$  kümesi içerisindeki eleman sayısı

$$J(g) = \frac{(N + g - 1)!}{g!(N - 1)!} \quad (6.7)$$

denklemleriyle elde edilebilir.

Örneğin, çokterimlinin derecesi  $g = 1$  ve değişken sayısı  $N = 4$  olduğunda, mümkün olan tüm derece dörtlülerinin oluşturduğu küme

$$\mathcal{K}(1) = \{0001, 0010, 0100, 1000\} \quad (6.8)$$

şeklinde olur. Bu kümenin eleman sayısını bulmak üzere (6.7) formülü kullanıldığında  $J(1) = 4$  sonucu elde edilir ve bu öngörülen eleman sayısı ile aynıdır. Homojen parametreye bağlı çokterimli matris

$$M_1(\theta) = \alpha_1 M_{1000} + \alpha_2 M_{0100} + \alpha_3 M_{0010} + \alpha_4 M_{0001} \quad (6.9)$$

şeklinde oluşturulur. Gösterimi daha iyi anlayabilmek için ikinci bir örnek vermek gerekirse  $g = 2$  ve  $N = 2$  seçildiğinde mümkün olan tüm derece ikililerinin oluşturduğu küme

$$\mathcal{K}(2) = \{02, 11, 20\} \quad (6.10)$$

şeklinde olacaktır. (6.7) formülü kullanıldığında  $J(2) = 3$  sonucu elde edilir. Homojen parametreye bağlı çokterimli matris

$$M_2(\theta) = \alpha_2^2 M_{02} + \alpha_1 \alpha_2 M_{11} + \alpha_1^2 M_{20} \quad (6.11)$$

şeklinde oluşturulur.  $g = 0$  olduğu durumda sabit matrisler (6.6) denkleminde elde edilir. (Oliveira ve Peres, 2007), eşitsizliklerin oluşturulmasında kullanılacak sistematik için gerekli olan  $k'$   $N$ -lilerinin,  $k$   $N$ -lileriyle  $k > k'$  şeklinde karşılaştırması eleman eleman karşılaştırmaya dayalıdır. Yani  $k$   $N$ -lisi içersindeki elemanların her birinin kendine  $k'$   $N$ -lisinde karşılık gelen elemandan büyük olması gerekmektedir  $k_i \geq k'_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Örneğin  $k = 20$  ve  $k' = 01$  gibi ikilileri için,  $k \not> k'$  ifadesi ortaya çıkar, çünkü  $k_1 > k'_1$  sağlanırken  $k_2 > k'_2$  ifadesi sağlanmaz. Bununla birlikte  $N$ -liler arasındaki toplama  $k + k'$  ve çıkarma  $k - k'$  işlemi ancak  $k > k'$  olduğu durumda geçerlilik kazanmaktadır. Ayrıca gösterim için kullanılacak  $e_i$   $N$ -lisi ve  $\pi(k)$  katsayısı

$$e_i = 0 \cdots 0 \underbrace{1}_i 0 \cdots 0, \quad \pi(k) := (k_1!)(k_2!) \cdots (k_N!) \quad (6.12)$$

şeklinde belirtilir.

### 6.3 Tutuculuğun Azaltılması: Pólya Gevşetmesi (Relaxation)

Doğrusal matris eşitsizliklerinin kullanım alanlarından biri olan, belirli kısıtlamalar altında optimum değer hesaplanması problemine bakıldığında, DMEler ile ifade edilen kısıtlamaları, genelde gerçek kısıtlamaları içine alan daha büyük dışbükey yapılar olarak görmekteyiz. İşte, gerçek optimum değer ile hesaplanan optimum değer arasındaki boşluk bu tutucu gösterimlerden kaynaklanmaktadır (Scherer, 2005). Günümüzdeki çalışmalar bu tutuculuğun giderilmesine yöneliktir. Bunlardan biride Pólya gevşetmesidir. Pólya teoremi ilk olarak 1928 yılında ortaya çıkmıştır (Almanca) (Pólya, 1928). İngilizce olarak ise eşitsizlikler adlı kitap ile literatüre girmiştir (Littlewood vd., 1952).

Scherer (2006)'in yayınının 7.bölümünde gösterildiği gibi homojen çokterimli eleman kullanılarak oluşturulan optimizasyon problemlerinde, hesaplanan optimum değer ile gerçek optimum değer arasındaki fark konveks çekirdek gevşetmesinden genelde daha küçük çıkmaktadır. Gevşetmenin kalitesini artırmak amacıyla Pólya Gevşetmesinin seviyesini belirleyen, negatif olmayan bir  $d$  tam sayısı belirleyip,  $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N)^d$  şeklinde eşitsizlik içinde kullanıldığımızda,  $d$  parametresinin artışıyla üstel olarak orantılı bir şekilde, DME kısıtlar da artmaktadır. Ancak görülmüştürki Pólya Gevşetme

seviyemizi yükseltmek, bizi optimum değere asimtotik olarak yaklaştırmaktadır Yani

$$\lim_{d \rightarrow \infty} p_{ger}^d = p_{opt}. \quad (6.13)$$

#### 6.4 PBHÇLF Tabanlı, Garanti Edilmiş $\mathcal{H}_2$ Performansı Sağlayan Kontrol

Bu kısımda (4.1) nolu sistem için Parametrelerine Bağlı Homojen Çokterimli Lyapunov Fonksiyonu kullanılarak karesel yaklaşıma göre daha az tutucu, sistemin  $\mathcal{H}_2$  normunu garanti edilmiş maliyettin altında tutan, durum geri-beslemeli kontrol kuralının belirlenmesi üzerinde durulacaktır.

Aşağıdaki teorem Delibasi vd. (2008) çalışmasından geliştirilmiştir.

**Teorem 6.1:** (5.6), (5.7) ve (5.8) DMElerini sağlayan  $W_g(\alpha)$ ,  $Q_g(\alpha)$  ve  $L_g(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M_g(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  PBHÇ matrisleri ve değeri keyfi belirlenmiş  $g$  ancak ve ancak

$$\bar{W}_k := \sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}(d) \\ k \geq k'}} \frac{d!}{\pi(k')} (W_{k-k'}) > 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}(g+d) \quad (6.14)$$

$$\bar{Q}_k := \sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}(d) \\ k \geq k'}} \frac{d!}{\pi(k')} (Q_{k-k'}) > 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}(g+d) \quad (6.15)$$

$$\mathcal{R}_{1k}(\alpha) := \sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}(d) \\ k \geq k'}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i \geq k'_i}} \frac{d!}{\pi(k')} \begin{bmatrix} \Omega & \Phi & \zeta_{k,i} B_{w_i} \\ \star & \Upsilon & 0 \\ \star & \star & -\zeta_{k,i} I \end{bmatrix} < 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}(g+d+1), \quad (6.16)$$

$$\mathcal{R}_{2k}(\alpha) := \sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}(d) \\ k \geq k'}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i \geq k'_i}} \frac{d!}{\pi(k')} \begin{bmatrix} \Psi & Q_{k-k'-e_i}^T C_i^T \\ \star & L_{k-k'-e_i} \end{bmatrix} > 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}(g+d+1), \quad (6.17)$$

$$\mathcal{R}_{3k}(\alpha) := \sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}(d) \\ k \geq k'}} \frac{d!}{\pi(k')} Tr \left[ L_{k-k'} - \frac{g! \gamma}{\pi(k-k')} \right] < 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}(g+d) \quad (6.18)$$

eşitsizliklerini yeterince büyük bir  $d \in \mathbb{Z}_+$  için sağlayan  $k \in \mathcal{K}(g)$  de simetrik  $Q_k$  ve  $W_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrisleri,  $L_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ve  $M_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrisleri bulunduğunda ve pozitif skaler  $r$  verildiğinde sağlanır. Eşitsizlikler de

$$\Omega = A_i Q_{k-k'-e_i} + Q_{k-k'-e_i}^T A_i^T + B_u M_{k-k'-e_i} + M_{k-k'-e_i}^T B_u^T$$

$$\Phi = W_{k-k'-e_i} - Q_{k-k'-e_i}^T + r A_i Q_{k-k'-e_i} + r B_u M_{k-k'-e_i},$$

$$\Upsilon = -r(Q_{k-k'-e_i} + Q_{k-k'-e_i}^T),$$

$$\Psi = Q_{k-k'-e_i} + Q_{k-k'-e_i}^T - W_{k-k'-e_i},$$

$$\zeta_{k,i} = g! / \pi(k - k' - e_i),$$

şeklindedir. Bu probleme geçerli bir çözüm bulunduğunda ,durum geri-besleme kazancı

$$K_{\mathcal{H}_g}(\alpha) = \sum_{k \in \mathcal{K}(g)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N} K_{\mathcal{H}_{2_k}}, \quad k = k_1 k_2 \cdots k_N \quad (6.19)$$

şeklinde  $K_{\mathcal{H}_{2_k}} = M_k W_k^{-1}$  tanımlanmasıyla hesaplanır.

**İspat:**  $W(\alpha) = W_g(\alpha)$ ,  $Q(\alpha) = Q_g(\alpha)$  ve  $M(\alpha) = M_g(\alpha)$  ile birlikte  $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_N)^d = 1$  olduğu sürece,  $d \in \mathbb{Z}_+$  sabitinin herhangi bir değeri için (6.16) eşitsizliğindeki  $\mathcal{R}_{1_k}$  kullanılarak  $R_1(\alpha)$ ,

$$\left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^d R_1(\alpha) = \sum_{k \in \mathcal{K}(g+d)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N} \mathcal{R}_{1_k} \quad (6.20)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da çok açıktır ki,  $\forall \alpha \in \Theta$  için eğer  $\mathcal{R}_{1_k} > 0$  ise  $R_1(\alpha) > 0$ dır. Matris değerli çokterimliler ile ilgili Pólya teoreminin uzantısını kullanarak (Scherer, 2006), (Oliveira ve Peres, 2005), şunu söyleyebiliriz: Eğer  $R_1(\alpha) > 0$  ise (6.20) denklemindeki  $\mathcal{R}_{1_k}$  matris değerli katsayılarını pozitif tanımlı yapabilecek, yeterince büyük bir  $d \in \mathbb{Z}_+$  bulunabilir. Benzer adımları uygulayarak (6.17) eşitsizliği yeterince büyük bir  $d \in \mathbb{Z}_+$  değeri için, (5.7) eşitsizliğinin verilen bir  $g$  değerinde sağlanabilmesinde gerek ve yeter olduğu görülmektedir. Yine benzer adımlar uygulanıp diğer eşitsizlikler arasındaki ilişki gösterilebilir.  $\square$

## 6.5 PBHÇLF Tabanlı, $\mathcal{L}_2$ Kararlı Kılıcı Kontrol

Bu bölümde, 4. bölümde incelenen doyumlu eyleycilere sahip sistemlerdeki, enerjisi sınırlı bozucuların durum geri-besleme kontrol mantığı ile bastırılmasına yönelik olarak; bu kısımda, Parametrelerine Bağımlı Homojen Çokterimli Lyapunov Fonksiyonu kullanılarak tasarlanması ele alınacaktır.

**Teorem 6.2:** (4.22) ve (4.23) DMElerini sağlayan  $W_g(\alpha)$ ,  $M_g(\alpha)$  ve  $Y_g(\alpha)$  PBHÇ matrisleri,  $S_g(\alpha)$  köşegen PBHÇ matrisi ve değeri keyfi belirlenmiş  $g$  ancak ve ancak

$$\bar{W}_k := \sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}(d) \\ k \succeq k'}} \frac{d!}{\pi(k')} (W_{k-k'}) > 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}(g+d) \quad (6.21)$$

$$\mathcal{N}_{1_k} := \sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}(d) \\ k \succeq k'}} \frac{d!}{\pi(k')} \begin{bmatrix} W_{k-k'} & (M_{k-k'})_{(l)}^T - (Y_{k-k'})_{(l)}^T & (M_{k-k'})_{(l)}^T - (Y_{k-k'})_{(l)}^T \\ * & \zeta_k \frac{1}{\beta} \rho_{(l)}^2 & 0 \\ * & * & \zeta_k \eta \delta \rho_{(l)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (6.22)$$

$$l = 1, \dots, m, \quad \forall k \in \mathcal{K}(g+d)$$

$$\mathcal{N}_{2_k} := \sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}(d) \\ k \geq k'}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i \geq k'_i}} \frac{d!}{\pi(k')} \begin{bmatrix} \mathcal{X} & \mathcal{Y} & \zeta_{k,i} \eta B_{w_i} & W_{k-k'-e_i}^T C_i^T \\ \star & -2S_{k-k'-e_i} & 0 & 0 \\ \star & \star & -\zeta_{k,i} \eta I & 0 \\ \star & \star & \star & -\zeta_{k,i} I \end{bmatrix} < 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}(g+d+1) \quad (6.23)$$

$k \in \mathcal{K}(g)$  durumunda eşitsizliklerini yeterince büyük bir  $d \in \mathbb{Z}_+$  için sağlayan simetrik  $W_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrisleri,  $Y_k$  ve  $M_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$  matrisleri ve köşegen  $S_k$  and  $L_k \in \mathbb{R}^{q \times q}$  matrisleri bulunduğunda sağlanır. Eşitsizlikler de

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= A_i W_{k-k'-e_i} + W_{k-k'-e_i}^T A_i^T + B_u M_{k-k'-e_i} + M_{k-k'-e_i}^T B_u^T \\ \mathcal{Y} &= -B_u S_{k-k'-e_i} + Y_{k-k'-e_i}^T, \quad \zeta_k = g! / \pi(k-k') \\ \zeta_{k,i} &= g! / \pi(k-k'-e_i) \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu durumda PBHÇ kontrol kazancı,

$$\begin{aligned} K_{sat_g}(\alpha) &= \sum_{k \in \mathcal{K}(g)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_N^{k_N} K_{sat_k}, \quad k = k_1 k_2 \dots k_N \\ K_{sat_k} &= M_k W_k^{-1} \end{aligned} \quad (6.24)$$

$\forall \alpha \in \Theta$  için  $\mathcal{S}_0$  elipsoid bölgesi içinde olan kapalı çevrim sistem için asimtotik kararlılığı sağlar.

**İspat:**  $W(\alpha) = W_g(\alpha)$ ,  $M(\alpha) = M_g(\alpha)$  ve  $Y(\alpha) = Y_g(\alpha)$  ile birlikte  $(\alpha_1 + \dots + \alpha_N)^d = 1$  olduğu sürece  $d \in \mathbb{Z}_+$  herhangi bir değeri için (6.22) eşitsizliğindeki  $\mathcal{N}_{1_k}$  kullanılarak  $N_1(\alpha)$ ,

$$\left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^d N_1(\alpha) = \sum_{k \in \mathcal{K}(g+d)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_N^{k_N} \mathcal{N}_{1_k} \quad (6.25)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan çok açıktır ki,  $\forall \alpha \in \Theta$  için eğer  $\mathcal{N}_{1_k} > 0$  ise  $N_1(\alpha) > 0$  dır. Matris değerli çokterimliler ile ilgili Pólya teoreminin uzantısını kullanarak (Scherer, 2006), (Oliveira ve Peres, 2005), şunu söyleyebiliriz:  $N_1(\alpha) > 0$  koşulu sağlandığında (6.25) denklemindeki  $\mathcal{N}_{1_k}$  matris değerli katsayılarını pozitif tanımlı yapabilecek, yeterince büyük bir  $d \in \mathbb{Z}_+$  bulunabilir. Benzer adımlar uygulanırsa, yeterince büyük bir  $d \in \mathbb{Z}_+$  değeri için, (6.23) eşitsizliğinin çözümünün varlığını; verilen bir  $g$  değerinde, (4.23) eşitsizliğinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart olduğu görülür.  $\square$

## 6.6 Optimizasyon Problemi

Eğer bazı  $g = \hat{g}$  ve  $d = \hat{d}$  değerleri için Teorem 6.1 ve Teorem 6.2 deki kısıtlamalar sağlanırsa,

$$\begin{aligned} & \min_{W, Q, M, L, Y, S, \eta, 1/\beta, \gamma} -\sigma_1 \eta + \sigma_2 \frac{1}{\beta} + \sigma_3 \gamma \\ \text{s.t.} & \sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}(d) \\ k \geq k'}} \frac{d!}{\pi(k')} \begin{bmatrix} \zeta_k \frac{1}{\beta} I & \zeta_k I \\ \star & W_{k-k'} \end{bmatrix} \geq 0, \\ & l = 1, \dots, m, \quad \forall k \in \mathcal{K}(g+d) \end{aligned} \quad (6.26)$$

optimizasyon problemi çözülerek  $\mathcal{S}_0$  elipsoid bölgesinin maksimize edilebilmesi, kapalı çevrim sistemin  $\mathcal{H}_2$  normunun minimize edilebilmesi ve kabul edilebilir bozucu sinyalinin maksimize edilebilmesi gibi çoklu amaç ölçütleri bir arada gerçekleştirilebilir. Buradaki  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  and  $\sigma_3$  ifadeleri negatif olmayan skalerlerdir ve tasarımın ihtiyaç duyduğu orandaki ağırlık faktörlerini sembolize ederler. Bu amaç ölçütlerini birlikte belirtilen ağırlık oranlarında gerçekleştirecek durum geri besleme kazancı ise

$$\begin{aligned} K_k &= M_k W_k^{-1} \\ K_g(\alpha) &= \sum_{k \in \mathcal{K}(g)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_N^{k_N} K_k, \quad k = k_1 k_2 \dots k_N \end{aligned} \quad (6.27)$$

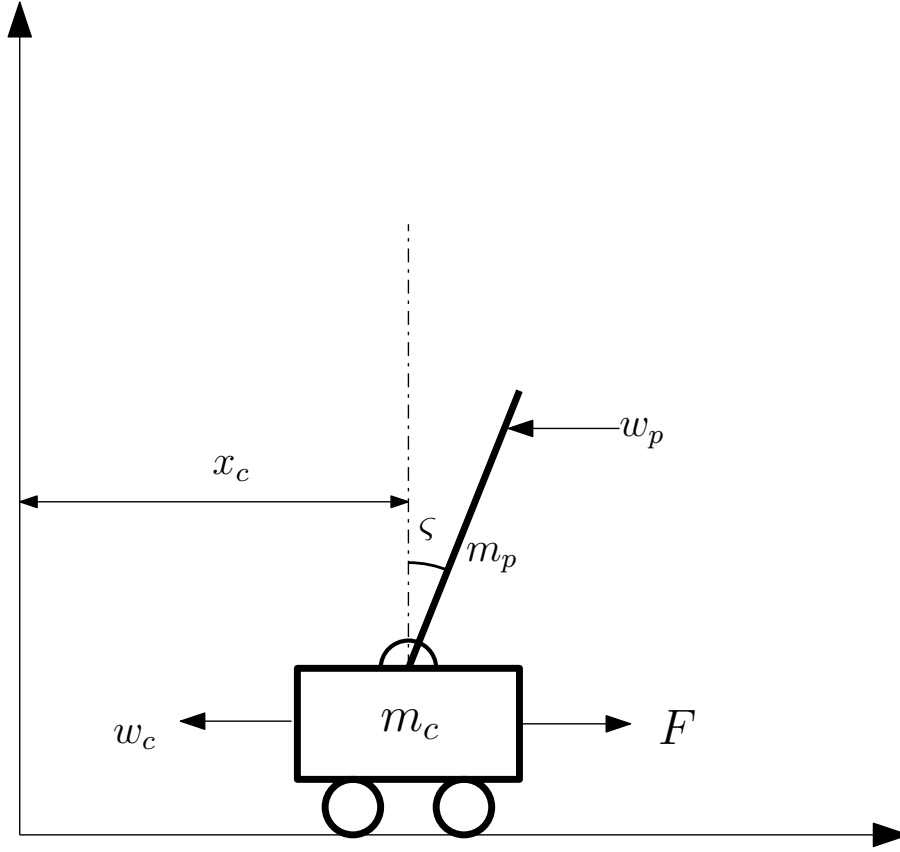
şeklinde belirlenir.  $g$  (Homojen çokterimli matrisin derecesi) ve  $d$  (Pólya gevşetme seviyesi) parametreleri keyfi belirlenebilir. Ancak, tasarlanan kontrolcünün tutuculuğu bu parametrelerin seçimi ile doğrudan ilişkilidir. Uygulamalarda, parametrelerin değerinin artırılması durumunda, kontrol kuralına ait tutuculuğun azaldığı gözlenmektedir.

## 6.7 Sayısal Örnek

Önerilen kontrolcünün faydasını gösterebilmek için, doğrusal olmayan ters sarkacın sözde-DPD modeli kullanılarak oluşturulmuş bir test sistemi üzerinden sayısal bir örnek verilecektir.

### 6.7.1 Ters Sarkacın Sözde DPD Modeli

Modelini çıkaracağımız Şekil 6.1deki ters sarkaç sistemi DC servo motor ile sürülen tekerlekli bir araba üzerine monte edilmiş bir alüminyum çubuktan oluşmaktadır. Araba,



Şekil 6.1: Ters Sarkaç

sadece doğrusal olarak, yatay ekseninde, bir ray üzerinde, servo motor yardımıyla hareket etmektedir. Sistemin kontrol amacı, bozucu etkileri altında, alüminyum çubuk dik pozisyonda tutulurken, aracın da başlangıç noktasında kalmasını sağlamaktır. Ters sarkaç sistemleri çoğunlukla yürüyen robotlar için denge algoritmaları geliştirilmesinde yada yüksek binaların rüzgar ve deprem dayanıklılıklarının arttırılması için kullanılmaktadır. Şekil 6.1deki  $\zeta$  sarkacın düşey eksenle yapmış olduğu açığı,  $x_c$  arabanın pozisyonunu,  $m_c$  arabanın kütesini,  $m_p$  sarkacın kütesini,  $w_p$  ve  $w_c$  sistemin bozucu girişlerini ve  $F$ de sistemin kontrol girişini göstermektedir. Çizelge 6.1 de sistem parametrelerinin fiziksel değerleri belirtilmiştir.

Çalışmamızda ters sarkac sisteminin matematiksel modeli Euler - Lagrange denklemleri kullanılarak elde edilmiştir. Sistemimize ait Euler - Lagrange denkleminde bakıldığında

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L}{\partial q} = Q_q \quad (6.28)$$

$L := T - V$  Lagrange operatörünü,  $q = [x_c \ \zeta]^T$  sistemin genelleştirilmiş koordinatlarını,  $T$  sistemin kinetik enerjisini,  $V$  sistemin potansiyel enerjisini,  $Q_q$  sisteme etki eden genelleştirilmiş kuvveti sembolize ettiği görülmektedir.

Çizelge 6.1: Ters sarkaç sisteminin parametre değerleri.

Parametre	Açıklama	Değer
$m_c$	Arabanın kütlesi	0.7031kg
$m_p$	Sarkacın kütlesi	0.23kg
$L_p$	Sarkacın uzunluğu	0.6413m
$I_p$	Sarkacın atalet momenti	0.0078838kgm <sup>2</sup> /sn <sup>2</sup>
$K_m$	Motorun ters EMK sabiti	0.0077V.s/rad
$K_t$	Motorun tork sabiti	0.0077V.s/rad
$K_g$	Dişli takımı oranı	3.71
$R_a$	Araba motorun armatür direnci	2.6Ω
$r$	Arabanın tekerlek yarıçapı	0.0063m
$B_{eq}$	Motorun eşdeğer viskoz sönüm sabiti	4.3
$B_p$	Sarkacın eşdeğer viskoz sönüm sabiti	0.0024

Lagrange operatörünü elde etmek amacıyla, öncelikle sistemin kinetik enerjisi

$$T = \frac{1}{2}m_c\dot{x}_c^2(t) + \frac{1}{2}m_p(\dot{x}_c^2(t) - 2\dot{x}_c(t)l_p\dot{\zeta}(t)\cos(\zeta(t)) + l_p^2\dot{\zeta}^2(t)) + \frac{1}{2}I_p\dot{\zeta}^2(t) \quad (6.29)$$

şeklinde elde edilir. Kinetik enerji ifadesi içersindeki  $l_p$ , sarkacın ağırlık merkezinin, sarkac dik konumda iken araba ile olan uzaklığını ( $l_p := L_p/2$ ) sembolize etmektedir. Diğer taraftan, sistemin potansiyel enerjisi ise

$$P = m_pgl_p\cos(\zeta(t)) \quad (6.30)$$

şeklinde ifade edilebilir. Elde edilen bu enerji ifadeleri (6.28) nolu denklemde yerine yazıldığında; öncelikle  $x_c$  koordinatı için,

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c(t)} \right] - \frac{\partial L}{\partial x_c(t)} = F - w_c - B_{eq}\dot{x}_c(t) \\ l_p m_p \sin(\zeta(t))\dot{\zeta}^2(t) + (m_p + m_c)\ddot{x}_c(t) - l_p m_p \cos(\zeta(t))\ddot{\zeta}(t) = F - w_c - B_{eq}\dot{x}_c(t) \quad (6.31)$$

eşitliği elde edilir.  $\zeta$  koordinatı için ise

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}(t)} \right] - \frac{\partial L}{\partial \zeta(t)} = w_p - B_p\dot{\zeta}(t) \\ -gl_p m_p \sin(\zeta(t)) - l_p m_p \cos(\zeta(t))\ddot{x}_c(t) + (I_p + l_p^2 m_p)\ddot{\zeta}(t) = w_p - B_p\dot{\zeta}(t) \quad (6.32)$$

eşitliği elde edilir. (6.31) ve (6.32) eşitlikleri kullanılarak  $\ddot{x}_c(t)$  ve  $\ddot{\zeta}(t)$  ifadeleri

$$\ddot{x}_c = \frac{gl_p^2 m_p^2 \cos(\zeta(t)) \sin(\zeta(t)) + (I_p + l_p^2 m_p)(F - w_c - B_{eq}\dot{x}_c(t)) - l_p m_p (I_p + l_p^2 m_p) \sin(\zeta(t))\dot{\zeta}^2(t) + l_p m_p \cos(\zeta(t))(w_p - B_p\dot{\zeta}(t))}{(I_p + l_p^2 m_p)(m_p + m_c) - l_p^2 m_p^2 \cos(\zeta(t))^2} \quad (6.33)$$



$$\ddot{\zeta} = \frac{(m_p + m_c)(w_p + gl_p m_p \sin(\zeta(t)) - B_p \dot{\zeta}(t)) - l_p m_p \cos(\zeta(t)) \times (-F + w_c + B_{eq} \dot{x}_c(t) + l_p m_p \sin(\zeta(t)) \dot{\zeta}^2(t))}{-(I_p + l_p^2 m_p)(m_p + m_c) - l_p^2 m_p^2 \cos(\zeta(t))^2} \quad (6.34)$$

şeklinde elde edilir ve sonuç olarak doğrusal olmayan sistem modeli ortaya çıkar. Sözde-DPD modeli elde etmek için ise sistemimizdeki doğrusallığı bozan ifadeler incelenir. DPD sistemimizdeki gerçek-zamanlı olarak ölçülüp ve hesaplanan, zamanla değişen parametreleri

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{\cos(\zeta(t)) \sin(\zeta(t))}{(I_p + l_p^2 m_p)(m_p + m_c) - l_p^2 m_p^2 \cos(\zeta(t))^2} \zeta(t) \\ \chi_2 &= \frac{1}{(I_p + l_p^2 m_p)(m_p + m_c) - l_p^2 m_p^2 \cos(\zeta(t))^2} \\ \chi_3 &= \frac{\cos(\zeta(t))}{(I_p + l_p^2 m_p)(m_p + m_c) - l_p^2 m_p^2 \cos(\zeta(t))^2} \\ \chi_4 &= \frac{\sin(\zeta(t)) \dot{\zeta}(t)}{(I_p + l_p^2 m_p)(m_p + m_c) - l_p^2 m_p^2 \cos(\zeta(t))^2} \\ \chi_5 &= \frac{\sin(\zeta(t))}{(I_p + l_p^2 m_p)(m_p + m_c) - l_p^2 m_p^2 \cos(\zeta(t))^2} \zeta(t) \\ \chi_6 &= \frac{\cos(\zeta(t)) \sin \zeta(t) \dot{\zeta}(t)}{(I_p + l_p^2 m_p)(m_p + m_c) - l_p^2 m_p^2 \cos(\zeta(t))^2} \end{aligned} \quad (6.35)$$

şeklinde belirlendiğinde, sözde-DPD sistemimizi

$$\dot{x} = A(\chi)x + B_w(\chi)w + B_u(\chi)u, \quad (6.36)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & gl_p^2 m_p^2 \chi_1 & (-B_{eq} I_p - B_{eq} l_p^2 m_p) \chi_2 & -B_p l_p m_p \chi_3 - (I_p l_p m_p + l_p^3 m_p^2) \chi_4 \\ 0 & (gl_p m_p^2 + gl_p m_p m_c) \chi_5 & -B_{eq} l_p m_p \chi_3 & (-B_p m_p - B_p m_c) \chi_2 - l_p^2 m_p^2 \chi_6 \end{bmatrix}}_{A(\chi)},$$

$$\begin{aligned} B_w(\chi) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (-I_p - l_p^2 m_p) \chi_2 & l_p m_p \chi_3 \\ -l_p m_p \chi_3 & (m_p + m_c) \chi_2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_c \\ \zeta \\ \dot{x}_c \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_c \\ w_p \end{bmatrix}, \\ B_u(\chi) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (I_p + l_p^2 m_p) \chi_2 \\ l_p m_p \chi_3 \end{bmatrix}, \quad u = F \end{aligned} \quad (6.37)$$

şeklinde kurabiliriz. Ancak, ters sarkaç düzeneğinde arabayı hareketlendirmek için gerekli kuvveti servo motordan sağladığımız için

$$F = \frac{K_m K_g}{R_a r} V - \frac{K_m^2 K_g^2}{R_a r^2} \dot{x}_c \quad (6.38)$$

eşitliğinin de sistem denklemleri içerisinde ifade edilmesi gerekmektedir. Burada, kuvvet-gerilim eşitliğindeki  $V$  sembolü, motor armatür uçlarına uygulanan gerilimi göstermektedir. Sistemin eyleyicisi olan bu motorun, doyum sınırları  $-13V$  ile  $+13V$  şeklindedir. Kuvvet-gerilim dönüşüm ifadesi ve parametrelerin fiziksel değerleri yerine yazıldığında sözde - DPD sistem matrislerimiz

$$A(\chi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.0565821\chi_1 & -0.396995\chi_2 & -0.00018227\chi_3 - 0.00250327\chi_4 \\ 0 & 0.69521\chi_5 & -0.914718\chi_3 & -0.00223951\chi_2 - 0.00576779\chi_6 \end{bmatrix}, \quad (6.39)$$

$$B_w(\chi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.0329612\chi_2 & 0.075946\chi_3 \\ -0.075946\chi_3 & 0.93313\chi_2 \end{bmatrix}, \quad B_u(\chi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0569063\chi_2 \\ 0.131118\chi_3 \end{bmatrix}, \quad (6.40)$$

halini alır.

### 6.7.1.1 Sözde-DPD Modelin Köşe Noktaları

Bu çalışmada, Ters sarkaç modelimiz üzerinde elde ettiğimiz 6 adet ölçülüp hesaplanabilir parametreden, işlem kolaylığının sağlanması ve önerilen kontrolcünün faydalarının daha kolay anlaşılabilmesi için, sadece  $\chi_2$  parametresi ölçülüp hesaplanan parametre olarak kabul edilecek; diğer parametrelerin ise nominal değerlerinde sabit olduğu varsayılacaktır. Bununla birlikte  $B_u(\chi)$  matrisinin de sabit olduğu kabul edilecektir.

Sarkacımızın  $-30^\circ$  ile  $+30^\circ$  aralığında hareket ettiği düşünüldüğünde, oluşan politopik sisteme ait köşe noktaları

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -15.148 & 0 \\ 0 & 25 & -33 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -16.6640 & 0 \\ 0 & 25 & -33 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

$$B_{u_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5 \\ 5.2 \end{bmatrix} \quad B_{u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5 \\ 5.2 \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

$$B_{w_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.249 \\ -2 \end{bmatrix} \quad B_{w_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.3748 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca, sistemimizin performans çıkışı

$$z = Cx, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

gösterildiği gibi belirleyebiliriz.

### 6.7.2 Doyumlu Eyleycilere Sahip DPD Sistemler için $\mathcal{L}_2$ , $\mathcal{H}_2$ Karışık Kontrol

Amacımız doyumlu eyleycilere sahip DPD sistemlerin kapalı çevrim kararlılığını sağlarken, aynı zamanda sistemin  $\mathcal{H}_2$  normunu ve  $\mathcal{L}_2$  kazancını da minimize eden bir durum geribesleme kontrolcüsü tasarlamaktır. Bu amaç doğrultusunda Teorem 6.1 ve Teorem 6.2 de verilen eşitsizlikleri sağlayan, parametrelerine bağımlı homojen çokterimli  $W_g$  matrisi, optimizasyon problemi de göz önünde tutularak bulunmalıdır.

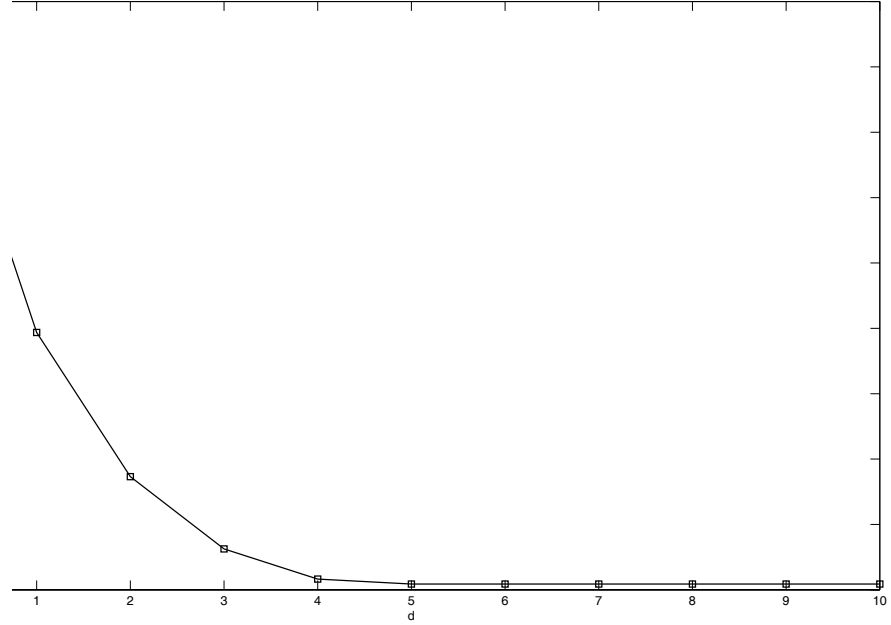
Sayısal örneğimizde,  $r = 0.8$  ve  $\delta = 0.1$  olarak alınmıştır. Elbette,  $r$  ve  $\delta$  parametrelerinin seçimi tutuculuğu doğrudan etkilemektedir. Ancak bu parametrelerin de amaç ölçütleri arasına alınarak optimizasyon yapılması, oluşacak olan içbükey yapıdan dolayı, mümkün değildir.

Öncelikle, önerilen kontrolcü tasarımıdaki Pólya seviyesini gösteren  $d$  parametresinin sonuca olan etkisi incelenmek üzere, optimizasyon problemindeki ağırlıklar  $\sigma_1 = 0.02$ ,  $\sigma_2 = 30$  ve  $\sigma_3 = 3$  olacak şekilde seçilmiş, çokterimlilerin derecesi  $g = 2$  değerinde sabitlenirken,  $d$  ifadesine sıfırdan sonsuza doğru artan değerler verilmiştir. Şekil 6.2de çoklu amaç ölçütünün  $-\sigma_1\eta + \sigma_2\frac{1}{\beta} + \sigma_3\gamma$ , Pólya gevşetme seviyesine ait  $d$  parametresine göre değişimi görülmektedir. Şekil 6.2den de açıkça görülmektedir ki; gevşetmenin seviyesini arttırmak, tutuculuğu azaltmakta ve tasarım sonucunu tutuculuk yönünden iyileştirmektedir. Aslında bu sonuç, Littlewood vd. (1952)'un eşitsizlikler kitabında öngörülmektedir. Ayrıca, Şekil 6.2 bize 6.3. kısımda belirttiğimiz tutuculuğun Pólya gevşetmesiyle asimtotik olarak giderildiğini de göstermektedir.

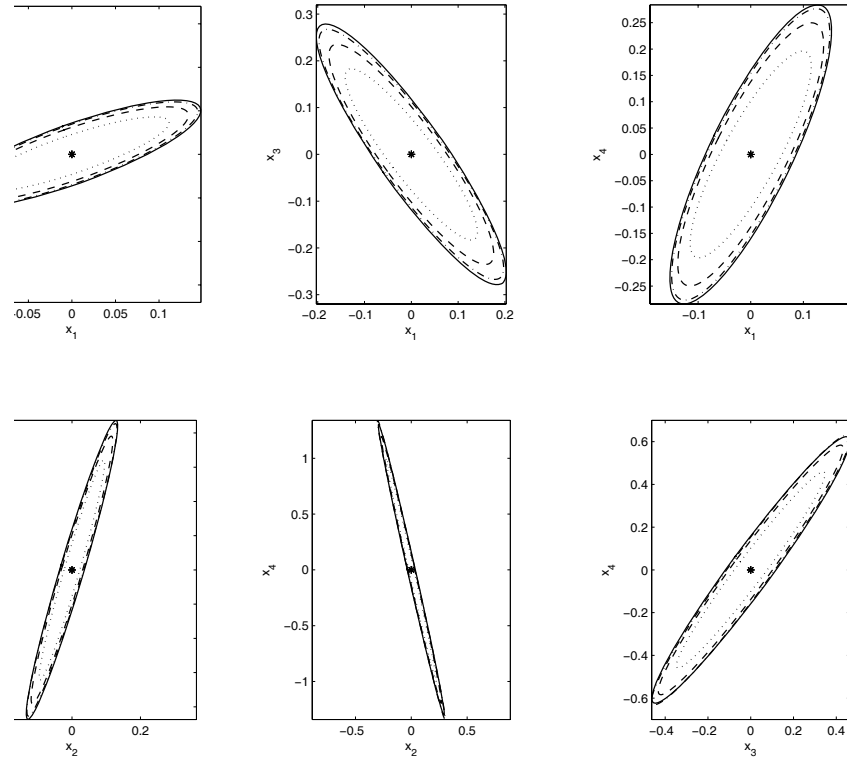
ikinci aşamada çok terimlerinin  $g$  derecesinin kararlılık bölgesi üzerindeki etki incelenmiştir. Burada,  $\eta = 20$ ,  $\gamma = 4$  seçilmiş; optimizasyon ağırlıkları ise  $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$  ve  $\sigma_2 = 1$  şeklinde belirlenmiştir. Şekil 6.3de (6.14), (6.15), (6.16), (6.17), (6.18), (6.22), (6.23), (6.26) eşitsizliklerini sağlayan ortak  $W_g(\alpha)$  matrisi için  $\mathcal{S}_0 = \mathcal{E}(P(\alpha), \beta) = x \in \mathbb{R}^n : x^T W(\alpha)^{-1} x \leq \beta$  elipsoidinin mümkün olan tüm projeksiyonları çizilmiştir. Bu çizimlerde  $\alpha_1 = 0.5$  ve  $\alpha_2 = 0.5$  olarak alınmıştır. Örneğin  $g = 4$  ve  $N = 2$  değeri için  $W_4(\alpha)$

$$W_g(\alpha) = \alpha_1^4 W_{40} + \alpha_1^3 \alpha_2 W_{31} + \alpha_1^2 \alpha_2^2 W_{22} + \alpha_1 \alpha_2^3 W_{13} + \alpha_2^4 W_{04} \quad (6.45)$$

şeklinde belirlenir. Şekil 6.3den görüldüğü gibi  $g$  değerinin arttırılması sistemin kararlılık sınırları içerisindeki başlangıç durumlarının oluşturduğu kümeyi genişletmektedir. Bundan dolayı PBHÇM derecesinin ( $g$ ) arttırılmasının, tutuculuğu azaltacağını söylenebilir.



Şekil 6.2:  $g = 2$  iken  $-\sigma_1\eta + \sigma_2\frac{1}{\beta} + \sigma_3\gamma$ 'nin değişim eğrisi.



Şekil 6.3: Farklı  $g$  değerleri için  $\mathcal{S}_0$  elipsoidinin mümkün olan tüm projeksiyonları:  $g = 1$ (noktalı çizgi),  $g = 2$ (kesik çizgi),  $g = 4$ (kesik-noktalı çizgi),  $g = 10$ (düz çizgi).

Çizelge 6.2:  $g$  ve  $d$ 'nin farklı değerleri için oluşan  $1/\beta$  değeri.

g	d					
	0	1	2	3	4	5
1	Çözümsüz					
2	Çözümsüz					398.78
3	Çözümsüz				390.51	373.46
4	Çözümsüz			389.64	373.06	364.90
5	Çözümsüz		389.19	372.96	364.88	360.66
6	Çözümsüz	389.14	372.94	364.85	360.65	358.77
7	389.11	372.91	364.84	360.64	358.77	358.40
8	372.90	364.84	360.64	358.76	358.40	358.40

Sayısal örneğimizin son bölümünde Pölya gevşetme seviyesinin ( $d$ ) ve homojen çokterimli Lyapunov matrisinin derecesinin ( $g$ ), aynı anda tutuculuğa olan etkisini göstermek üzere;  $\gamma = 1$  ve  $\eta = 30$  değerleri belirlenerek, farklı kombinasyonlarda  $g$  ve  $d$  değerleri için,  $1/\beta$  minimizasyon problemi ele alınmıştır. Çizelge 6.2de bu farklı kombinasyonlar için elde edilen  $1/\beta$  değerleri görülmektedir. Görüldüğü gibi,  $g$  ve  $d$  ifadelerinin küçük bazı değerleri için olası bir çözüm elde edilemezken, değerler arttırıldığında çözüm elde edilebilmiş ve amaç ölçütünün minimize edildiği görülmüştür.

## 7. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu bölümde tez içersinde elde edilen sonuçlardan, çalışmanın kısım kısım kapsadığı temel konulardan ve ilereye dönük yapılabilecek çalışmalardan bahsedilecektir.

Ana mantık çerçevesinde, bu tezde Doğrusal Parametreleri Değişen sistemler için kontrol problemlerine değinilmiştir. Kontrol problemlerinin çözümü için, durum geri-besleme mantığında çalışan, kazanç planlamalı kontrol platformu baz alınmıştır. Tasarımın en önemli aracı dışbükey optimizasyon temelindeki Doğrusal Matris Eşitsizlikleri olmuştur.

Tezin ilk kısmında belirsizlikler veya parametreleri belli bir dışbükey küme içersinde değişen yapılarda optimizasyon mantığı anlatılmıştır. Yine optimizasyon için gerekli araç olarak matris eşitliklikleri seçilmiş ve matris eşitsizliklerinin kullanım alanları kısaca özetlenmiştir. DMEler kullanılarak oluşturulan optmizasyon problemlerinde çözüm için kullanılan temel iki tekniğe bu kısımda yer verilmiştir. Bunlar elipsoid ve iç nokta yöntemi olarak yüzeysel olarak anlatılmıştır. DME aracının popülerlik kazanmasında en önemli etkinin iç nokta algoritmasının geliştirilmesi olduğu da bu bölümde vurgulanmıştır.

İkinci kısımda kazanç planlamalı kontrol tekniğinin nasıl uygulanacağına dair bir yol çizilmiş ve tasarım adım adım dilsel bir algoritmaya dökülmeye çalışılmıştır. Bölümün ilerleyen kısımlarında, tasarımda kullanılacak matematiksel model olan doğrusal parametreleri değişen sistemlerin oluşturulmasına yönelik iki metotdan bahsedilmiştir. Bunlar; denge veya çalışma noktaları etrafında doğrusallaştırma prensibine dayalı Jacobian doğrusallaştırması tekniği ve sözde-DPD modelleme tekniğidir. Doğrusallaştırma yaklaşımıyla oluşabilecek kayıpları ortadan kaldırabilme ve doğrusal kontrol tekniklerinin doğrusal olmayan yapılara uygulanabilme kolaylığı bakımından, sözde-DPD modelleme tercih edilmiştir.

Sistemin belirsizlikleri ve doğrusal olmayan kısımlarına ilişkin yapılan bu yaklaşım, sistemlerin en az kabullenme ile modellenmesini sağlamaktadır. Ancak; fiziksel, gerçek sistemlerin istenilen amaç ölçütlerine yöneltmesinde başka engellerle de karşılaşmaktadır. Bunların en önemlilerinden birisi de, fiziksel sistemlere ait eyleyicilerin doyumlu olmasıdır. Elbette, tasarım yapılırken bu kısıtlamanın da matematiksel olarak probleme dahil edilmesi gerekmektedir. Tez içersinde bu konu ile ilgili günümüzde yapılan popüler çalışmalara değinilmiş ve bir çok farklı yöntem içersinden, kullanılacak araç olan DME tabanına en uygun ve en az tutucu olan modifiye edilmiş sektör durumları

kullanılmıştır. Literatürde hali hazırda mevcut bulunan bu yaklaşım, sistemin enerjisi sınırlı bozucu girişlerine karşılık kontrollü performans çıkışları arasındaki  $\mathcal{L}_2$  kazancını minimize edecek şekilde geliştirilmiştir.

Çoklu amaç ölçütleri dikkate alınarak, sistemim  $\mathcal{H}_2$  normu literatürde hali hazırda bulunan daha az tutucu bir teknik ile minimize edilmiştir.

Çalışmanın literatüre yapmış olduğu en büyük katkı; Pólya teoreminin bir kolu olan DME gevşetmesi yardımıyla, tasarımda Parametrelerine Bağımlı Homojen Çokterimli Lyapunov Fonksiyon tabanını kullanmasıdır. Bu yaklaşım ile sistematik bir şekilde çokterimli matris eşitsizliklerinin ortaya çıkarılması anlatılmıştır. Önerilen tasarım tekniğinin en önemli katkısı, tutuculuk kriterini belirleyen optimum değer ile, elde edilen değer arasındaki boşluğu asimtotik olarak azaltabilmesidir. Çalışmada ele alınan sayısal örnekler, literatürde yer alan diğer DME gevşetmelerinin, önerilen yaklaşıma göre oldukça sıkı olduğunu göstermektedir. Literatürde benzer sistematik gösterimlerle karşılaşılabilmektedir. Ancak;  $\mathcal{L}_2$  karallığı,  $\mathcal{H}_2$  norm minimizasyonu, kararlı kılınan başlangıç durum kümesinin genişletilmesi ve doyumlu eyleyici barındırma problemleri gibi kıstasları aynı anda içine alan çoklu bir optimizasyon probleminin çözümü ilk kez bu çalışmada sunulmuş ve doğrusal parametrelerine bağımlı sistemler için genelleştirilmiştir.

Tez içersinde önerilen tasarım yöntemini bir çok sisteme uygulamak mümkündür. Ancak ilgili tasarımın faydaları daha ziyade; kazanç planlamalı kontrol tekniğinin en etkili olduğu uçak, füze, araç yol tutuşu gibi bir çok belirsizlik ve bir çok çalışma noktası barındıran sistemlerin denetim problemlerinin çözümünde ortaya çıkacaktır.

Yapılan bu çalışmada sistem parametrelerinin değişiminin sınırı bilinmemesinden veya ölçümü bazı durumlarda mümkün olmamasından dolayı oluşturulan Lyapunov fonksiyonundaki değişime ait ifade sıfır olarak kabul edilmiştir. Ancak sınırların bilindiği sistemlerle de, ender de olsa karşılaşılabilmektedir. İşte bu türden sistemler için, sistematik bir çözüm üretmek veya doyumlu eyleyicilerde ölü bölge ve doyum bölgesi kullanılarak yapılan modifiye edilmiş sektör durumlarından farklı, daha az tutuculu bir yöntem geliştirmek, ileriye dönük çalışmalar olabilir.

**KAYNAKLAR**

- Astrom, K.J. ve Rundqwist, L. (1989), “Integrator windup and how to avoid it”, Proc. American Control Conference:1693–1698.
- Barbu, C., Reginatto, R., Teel, A.R. ve Zaccarian, L. (2000), “Anti-windup for exponentially unstable linear systems with inputs limited in magnitude and rate: theory and application”, Technical Report CCEC-00-0718, Center for Control Engineering and Computation. University of California at Santa Barbara.
- Bliman, P.A., Oliveira, R.C.L.F., Montagner, V.F. ve Peres, P.L.D. (2006), “Existence of homogeneous polynomial solutions for parameterdependent linear matrix inequalities with parameters in the simplex”, Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control:1486–1491.
- Boyd, S. (1998), “Determinant maximization with linear matrix inequality constraints”, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 19:499–533.
- Castelan, E.B., Tarbouriech, S., da Silva Jr, J.M.G. ve Queinnec, I. (2006), “ $\mathcal{L}_2$ -Stabilization of continuous-time linear systems with saturating actuators”, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 16(18):935–944.
- Chesi, G., Garulli, A., Tesi, A. ve Vicino, A. (2007), “Robust stability of time-varying polytopic systems via parameter-dependent homogenous Lyapunov functions”, Automatica, 43:309–316.
- Delibasi, A., Kucukdemiral, I.B. ve Cansever, G. (2008), “L2, H2 guaranteed-cost control of LPV systems with saturating actuators”, 16th Mediterranean Conference on Control and Automation:152–157.
- Eun, Y., Gökçek, C., Kabamba, P.T. ve Meerkov, S.M. (2001), “Selecting the level of actuator saturation for small performance degradation of linear designs”, Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, 2:1769–1774.



- Feron, E., Apkarian, P. ve Gahinet, P. (1996), “Analysis and sythesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions”, 41(7):1041–1046.
- Gahinet, P., Apkarian, P. ve Chilali, M. (1996), “Affine parameter dependent Lyapunov functions and real parametric uncertanity”, 41(3):436–442.
- Gahinet, P. ve Nemirovski, A. (1997), “The projective method for solving linear matrix inequalities”, *Mathematical Programming*, 77(2):163–190.
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A.J. ve Chilali, M. (1995), *LMI control toolbox user’s guide*, The Math Works Inc., Natick, MA.
- Hsia, T. (1967), “On the optimal control of plants with saturation nonlinearity”, *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 12(3):331–332.
- Hu, T., Pitsillides, A.N. ve Lin, Z. (2000a), “Null controllability and stabilization of linear systems subject to asymmetric actuator saturation”, *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, 4:3254–3259.
- Hu, T., Saberi, A., Lin, Z. ve Sannuti, P. (1998), “Simultaneous external and internal stabilization for continuous and discrete-time critically unstable linear systems with saturating actuators”, *Automatica*, 12:1547–1557.
- Hu, T., Saberi, A., Lin, Z. ve Sannuti, P. (2000b), “On simultaneous global external and global internal stabilization of critically unstable linear systems with saturating actuators”, 45(6):1042–1052.
- Hu, T., Teel, A.R. ve Zaccarian, L. (2006), “Stability and Performance for Saturated Systems via Quadratic and Nonquadratic Lyapunov Functions”, *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 51(11):1770–1786.
- Iwasaki, T. ve Fu, M. (2002), “Regional  $\mathcal{H}_2$  Performance Sysnthesis”, in V. Kapila ve K.M. Grigoriadis, editors, “Actuator Saturation Control 4. Bölüm”, Marcel Dekker, Inc.
- Jabbari, F. (2001), “Disturbance attenuation of LPV systems with bounded inputs”, *Dyn. Control*, 11(2):133–150.
- Kapasouris, P., Athans, M. ve Stein, G. (1988), “Design of feedback control systems for stable plants with saturating actuators”, *Decision and Control, 1988.*, *Proceedings of the 27th IEEE Conference on*, 1:469–479.

- Labit, Y., Peaucelle, D. ve Henrion, D. (2002), “SEDUMI INTERFACE 1.02: a tool for solving LMI problems with SEDUMI”, Computer Aided Control Systems Design, 2002 IEEE International Symposium on:272–277.
- Leith, D.J. ve Leihead, W.E. (2000), “Survey of gain-scheduling analysis and design”, Int. J. Control, 73(11):1001–1025.
- Lin, Z. (1997), “ $H_\infty$  almost disturbance decoupling with internal stability for linear systems subject to input saturation”, 42(7):992–995.
- Littlewood, J.E., Hardy, G.H. ve Pólya., G. (1952), Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Liu, W., Chitour, Y. ve Sontag, E. (1996), “On finite-gain stabilizability of linear systems subject to input saturation”, SIAM Journal on Control and Optimization, 4:1190–1219.
- Lofberg, J. (2004), “YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB”, Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on:284–289.
- Montagner, V.F., Oliveira, R.C.L.F., Peres, P.L.D., Tarbouriech, S. ve Queinnec, I. (2007), “Gain-Scheduled Controllers for Linear Parameter-Varying Systems with Saturating Actuators: LMI-based Design”, Proc. American Control Conference (ACC’2007):6067–6072.
- Montagner, V.F., Oliviera, R.C.L.F. ve Peres, P.L.D. (2006), “Design of  $H_\infty$  Gain-Scheduled Controllers for Linear Time-Varying Systems by means of Polynomial Lyapunov Functions”, in “Proc. IEEE Conference on Decision & Control”, San Diego, CA, USA, 5839–5844.
- Montagner, V.F. ve Peres, P.L.D. (2004), “State feedback gain scheduling for linear systems with time-varying parameters”, in “Proc. American Control Conference (ACC’2004)”, Boston, Massachusetts, 2004–2009.
- Nesterov, Y. ve Nemirovskii, A. (1994), Interior Point Polynomial Algorithms in Convex Programming, Siam Studies in Applied Mathematics.

- de Oliveira, M.C., Geromel, J.C. ve Bernussou, J. (2002), “Extended  $H_2$  and  $H_\infty$  characterization and controller parametrizations for discrete-time systems”, *International Journal Of Control*, 75(9):666–679.
- de Oliveira, P.J., Oliveira, R.C.L.F., Leite, V.J.S., Montagner, V.F. ve Peres, P.L.D. (2004a), “ $H_2$  guaranteed cost computation by means of parameter dependent Lyapunov functions”, *International Journal Of System Science*, 35(5):305–315.
- de Oliveira, P.J., Oliveira, R.C.L.F., Leite, V.J.S., Montagner, V.F. ve Peres, P.L.D. (2004b), “ $H_\infty$  guaranteed cost computation by means of parameter dependent Lyapunov functions”, *Automatica*, 40(6):1053–1061.
- Oliveira, R.C.L.F. ve Peres, P.D. (2007), “A convex optimization procedure to compute  $H_2$  and  $H_\infty$  norms for uncertain linear systems in polytopic domains”, *Optimal Control Applications and Methods*.
- Oliveira, R.C.L.F. ve Peres, P.L.D. (2005), “Stability of polytopes of matrices via affine parameter-dependent Lyapunov functions: Asymptotically exact LMI conditions”, *Lin. Alg. Appl.*, 405:209–228.
- Oliviera, R.C.L.F., de Oliveira, M.C. ve Peres, P.L.D. (2006), “LMI relaxations for robust  $H_2$  performance analysis of polytopic linear systems”, in “Proc. IEEE Conference on Decision & Control”, San Diego, CA, USA, 2907–2912.
- Pan, H. ve Kapila, V. (2001), “LMI-based control of discrete-time systems with actuator amplitude and rate nonlinearities”, *American Control Conference, 2001. Proceedings of the 2001*, 5:4140–4145 vol.5.
- Pare, T., Hindi, H., How, J. ve Banjerdpongchai, D. (1999), “Local control design for systems with saturating actuators using the Popov criteria”, *American Control Conference, 1999. Proceedings of the 1999*, 5:3211–3215 vol.5.
- Pólya, G. (1928), ““Uber positive Darstellung von Polynomen Vierteljschr”, *Naturforsch. Ges. Z“urich*, 73(Collected Papers 2 (1974), MIT Press, 309-313):141–145.
- Rugh, W.J. ve Shamma, J.S. (2000), “Research on gain scheduling”, *Automatica*, 36:1401–1425.

- Sato, M. (2005), “Robust performance analysis of linear time-invariant parameter-dependent systems using higher-order Lyapunov functions”, American Control Conference, 2005. Proceedings of the 2005:615–620.
- Scherer, C.W. (2005), “Relaxations for robust linear matrix inequality problems with verifications for exactness”, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 27(2):365–395.
- Scherer, C.W. (2006), “LMI Relaxations in Robust Control”, European Journal of Control, 12(1):3–29.
- Scherer, C. ve Weiland, S. (2004), Linear Matrix Inequalities in Control.
- da Silva Jr, J.M.G. ve Tarbouriech, S. (2005), “Antiwindup design with guaranteed regions of stability: an LMI-based approach”, Automatic Control, IEEE Transactions on, 50(1):106–111.
- de Souza, C.E., Trofino, A. ve de Oliveira, J. (2000), “Robust  $H_\infty$  Control of Uncertain Linear Systems via Parameter-Dependent Lyapunov Functions”, in “Proc. IEEE Conference on Decision and Control (CDC’2000)”, Sydney, Australia, 3194–3199.
- Sturm, J.F. (1999), “Using SeDuMi 1.02 a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones”, Optimization Methods and Software, 11(12):625–653.
- Tarbouriech, S. ve Garcia, G. (2002), “Output Feedback Compensators for Linear Systems with Position and Rate Bounded Actuators”, in V. Kapila ve K.M. Grigoriadis, editors, “Actuator Saturation Control 10. Bölüm”, Marcel Dekker, Inc.
- Toh, K.C., Todd, M.J. ve Tutuncu, R.H. (1999), “SDPT3 a MATLAB software package for semidefinite programming”, Optimization Methods and Software, 11:545–581.
- Wu, F., K.M., G. ve A., P. (1998), “Anti-windup controller synthesis via linear parameter-varying control design methods”, American Control Conference, 1998. Proceedings of the 1998, 1:343–347 vol.1.
- Xie, W. (2005), “H2 gain scheduled state feedback for LPV system with new LMI formulation”, IEE Proc.-Control Theory Appl., 152(6):693–697.

**Ek 1. ÖNERİLEN YÖNTEMİN m. DOSYASI**

```

1 function [Q, W, Y, S, L, beta, gergam, eta, kuc] = HPPD(gama, beta_t, ...
  et_a, ag1, ag2, ag3, gg, dd)
  % delibasi, kucukdemiral, cansever
  %20.03.2008
  %clear all
6 %% Sistem modeli
  upr2=41.66;
  apr2=37.87;
  npr2=40.5;
  %Dalt=-6;
11 %Dust=6;
  An=[0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 2 -0.4*npr2 0; 0 25 -33 0];
  Bu=[0; 0; 2.5; 5.2];
  A1=[0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 2 -0.4*apr2 0; 0 25 -33 0];
  A2=[0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 2 -0.4*upr2 0; 0 25 -33 0];
16 A={A1; A2};
  Bw1=[0; 0; -0.033*apr2; -2];
  Bw2=[0; 0; -0.033*upr2; -2];
  Bw={Bw1; Bw2};
  C=[1 0 0 0
21     0 1 0 0
     1 1 0 0];
  gam = gama;
  kuc=sdpvar(1,1);
  eta=et_a;
26 delta=0.1;
  beta_ters=beta_t;
  ro=13;
  r = 0.8;

31 %% HPPD matrislerinin boyut taini
  [k,l]=size(An);
  [m,n]=size(Bu);
  [o,p]=size(Bw1);
  [s,t]=size(C);
36 g=gg;
  d=dd;
  N=2;
  %% \matcal K icersindeki ihtimallerin oluşturulması
  jd=(factorial(N+d-1))/(factorial(d)*factorial(N-1));
41 jgd=(factorial(N+g+d-1))/(factorial(g+d)*factorial(N-1));
  jgd1=(factorial(N+g+d))/(factorial(g+d+1)*factorial(N-1));
  jg=(factorial(N+g-1))/(factorial(g)*factorial(N-1));
  jg_1=(factorial(N+g-2))/(factorial(g-1)*factorial(N-1));
  for i=1:jgd
46     Kumgd(i,1)=g+d+1-i;
  end
  for i=1:jgd
     Kumgd(i,2)=i-1;
  end
51 for i=1:jgd1
     Kumgd1(i,1)=g+d+2-i;
  end
  for i=1:jgd1
     Kumgd1(i,2)=i-1;
56 end
  for i=1:jd

```

```

        Kumd(i,1)=d+1-i;
    end
    for i=1:jd
61      Kumd(i,2)=i-1;
    end
    for i=1:jg
        Kumg(i,1)=g+1-i;
    end
66    for i=1:jg
        Kumg(i,2)=i-1;
    end
    E=[1 0;0 1];
    %% HPPD matrislerinin oluşturulması
71    for i=1:jg
        M{i} = sdpvar(n,m);
        L{i} = sdpvar(s,s);
        Y{i} = sdpvar(n,m);
        S{i} = sdpvar(n,n);
76    W{i} = sdpvar(k,k,'symmetric');
        Q{i} = sdpvar(o,k);
    end
    OO = sdpvar(1,1);
    %% LMI ların oluşturulması K kumesi g+d olanlar
81    F=set(OO > 0);
    LM1a=0;
    LM1b=0;
    LM1c=0;
    LM1d=0;
86    LM1e=0;
    out=0;
        for i=1:jgd
            for f=1:jd
                %k > k' k' ifadeleri icin
91                carp= (factorial(d));
                    zeta= factorial(g);
                    for h=1:N %matrisin genel carpanin hesabi
                        carp= carp* 1/(factorial(Kumd(f,h)));
                        if (Kumgd(i,h)-Kumd(f,h)>=0)
96                            zeta= zeta* 1/(factorial(Kumgd(i,h)-Kumd(f,h)));
                        else
                            zeta=factorial(g);
                        end
                    end
                end
101            if ((Kumgd(i,:) -Kumd(f,:)) >=0)
                    jj=1;
                    while ((Kumgd(i,:) -Kumd(f,:)) ~ =Kumg(jj,:))
                        jj=jj+1;
                    end
106                LMa=carp*W{jj};
                    LMb=carp*(L{jj}-zeta*gam);
                    LMc=carp*[W{jj} M{jj}' -Y{jj}' M{jj}' -Y{jj}'
                        M{jj}-Y{jj} zeta*beta_ters*ro^2 zeros(n,n)
                        M{jj}-Y{jj} zeros(n,n) zeta*eta*delta*ro^2]
111                LMd=carp*Q{jj};
                    LMe=carp*[zeta*beta_ters*eye(k) zeta*eye(k)
                        zeta*eye(k) W{jj}];
                    LM1a=LM1a+LMa;
                    LM1b=LM1b+LMb;
                    LM1c=LM1c+LMc;
116                LM1d=LM1d+LMd;
                    LM1e=LM1e+LMe;

```



```

    end
    F=F+set (LM1a<0);
    F=F+set (LM1b>0);
181  F=F+set (LM1c<0);
    LM1a=0;
    LM1b=0;
    LM1c=0;
    ad=0;
186  end

F = F+set (ag1*gam+ag2*beta_ ters-ag3*eta-r-kuc<=0);

sol = solvesdp(F,kuc,sdpsettings('solver','sedumi'))
191  beta_ ters=double(beta_ ters);
    for i=1:jg
        Q{i}=double(Q{i});
        W{i}=double(W{i});
        M{i}=double(M{i});
196  L{i}=double(L{i});
        Y{i}=double(Y{i});
        S{i}=double(S{i});
    end
    gam=double(gam);
201  beta=1/beta_ ters;
    eta=double(eta);
    gergam=sqrt(gam);
    kuc=double(kuc);

```



**ÖZGEÇMİŞ**

Doğum tarihi	24/11/1979	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1993 - 1997	Hasan Polatkan Süper Lisesi
Lisans	1997 - 2001	Yıldız Teknik Üniversitesi Elektrik - Elektronik Fakültesi Elektrik Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	2001 - 2004	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik Mühendisliği Anabilim Dalı Kontrol ve Otomasyon Programı
Doktora	2004 - 2008	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik Mühendisliği Anabilim Dalı Kontrol ve Otomasyon Programı
Çalıştığı kurum(lar)	2001 - Devam ediyor	YTU Elektrik Mühendisliği Bölümü Araştırma Görevlisi