

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

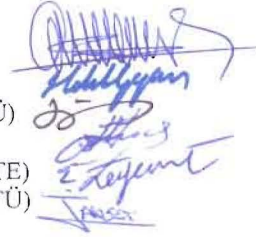
**DOĞRUDAN LYAPUNOV YAKLAŞIMI İLE BİR
KISIM İKİ SERBESTLİKLİ YETERSİZ EYLEYİCİLİ
MEKANİK SİSTEMİN KARARLI KILINMASI**

Elektrik Yük. Müh. Türker TÜRKER

**F.B.E Elektrik Müh. Anabilim Dalı Kontrol ve Otomasyon Programında
Hazırlanan**

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 20 Eylül 2010
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Galip CANSEVER (YTÜ)
İkinci Tez Danışmanı : Doç. Dr. Haluk GÖRGÜN (YTÜ)
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Leyla GÖREN SÜMER (İTÜ)
: Prof. Dr. Cingiz HACIYEV (İTÜ)
: Doç. Dr. Erkan ZERGEROĞLU (GYTE)
: Yrd. Doç. Dr. Janset DAŞDEMİR (YTÜ)



İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
KISALTMA LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
ÖNSÖZ	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ	1
2. MEKANİK SİSTEMLER	7
2.1 Mekanik Sistemlerin Euler-Lagrange Dinamik Denklemleri	7
2.2 Tam Eyleyicili Mekanik Sistemler	8
2.3 Yetersiz Eyleyicili Mekanik Sistemler	8
2.4 İki Serbestlikli Yetersiz Eyleyicili Mekanik Sistem Örnekleri	8
2.4.1 Atalet Diskli Sarkaç Sistemi	9
2.4.2 Ters Sarkaç Sistemi	10
2.4.3 Döner Sarkaç Sistemi	12
2.4.4 Top Çubuk Sistemi	13
2.4.5 TORA Sistemi	14
3. DOĞRUDAN LYAPUNOV YAKLAŞIMI ile BİR KISIM YETERSİZ EYLEYİCİLİ MEKANİK SİSTEMİN KARARLI KILINMASI	16
3.1 Giriş	16
3.2 Problem Formülasyonu	16
3.2.1 Geri Besleme ile Kısmi Doğrusallaştırma	17
3.2.2 Koordinat Dönüşümleri	18
3.3 Doğrudan Lyapunov Yaklaşımı	20
3.4 Örnekler	23
3.4.1 Atalet Diskli Sarkaç	23
3.4.2 Ters Sarkaç	29
3.4.3 Döner Sarkaç	35
3.4.4 Top-Çubuk	42
3.4.5 TORA	46
4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	51
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	56

SİMGE LİSTESİ

$C(\cdot)$	Merkezcil ve Coriolis kuvvetleri matrisi
$d_{ij}(\cdot)$	Merkezcil ve Coriolis kuvvetleri matrisi bileşenleri
$f_i(\cdot)$	Denetim girişi bileşenleri
$F(\cdot)$	Giriş matrisi
g	Yerçekimi ivmesi
$g_i(\cdot)$	Yerçekimi etkileri vektörü bileşenleri
$G(\cdot)$	Yerçekimi etkileri vektörü
I_i	Atalet
$k_i(\cdot)$	Kazanç matrisi bileşenleri
$K(\cdot)$	Simetrik, pozitif tanımlı kazanç matrisi
$\mathcal{K}(\cdot)$	Kinetik enerji fonksiyonu
L_i, l_i	Uzunluk
$\mathcal{L}(\cdot)$	Lagrangian
m_i	Kütle
$m_{ij}(\cdot)$	Atalet matrisi bileşenleri
$M(\cdot)$	Atalet matrisi
n	Sistemdeki serbestlik sayısı
p	Dönüşüm sonrası oluşan vektör
q	Genelleştirilmiş koordinatlar vektörü
\dot{q}	Genelleştirilmiş koordinatların hız vektörü
\ddot{q}	Genelleştirilmiş koordinatların ivme vektörü
\bar{q}	Dönüşüm sonrası oluşan koordinatlar vektörü
$\dot{\bar{q}}$	Dönüşüm sonrası oluşan koordinatların hız vektörü
$u(\cdot)$	Denetim girişi
$\mathcal{V}(\cdot)$	Potansiyel enerji fonksiyonu
$W(\cdot)$	Tasarım için tanımlanmış matris
$Z(\cdot)$	Tasarım için tanımlanmış vektör
β	Yay sabiti
$\psi_i(\cdot)$	Dönüşüm matrisi bileşenleri
$\Psi(\cdot)$	Dönüşüm matrisi
$\rho_i(\cdot)$	P vektörünün bileşenleri
$P(\cdot)$	Dönüşüm sonrası oluşan sisteme ait bir vektör
$\phi(\cdot)$	Potansiyel enerji benzeri tasarım fonksiyonu

τ	Harici kuvvetler vektörü
θ_i	Sistem parametrelerini barındıran pozitif sabitler
∇	Gradyen operatörü

KISALTMA LİSTESİ

YEMS	Yetersiz Eyleyicili Mekanik Sistemler
IDAPBC	Interconnection and Damping Assignment Passivity Based Control
CL	Controlled Lagrangian
TORA	Translational Oscillator with Rotational Actuator
UAMS	Underactuated Mechanical Systems

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Atalet diskli sarkaç sistemi.....	9
Şekil 2.2 Ters sarkaç sistemi	10
Şekil 2.3 Döner sarkaç sistemi	13
Şekil 2.4 Top-Çubuk sistemi	14
Şekil 2.5 TORA sistemi.....	15
Şekil 3.1 Sarkaç ve disk açılarının zamana göre değişimi	28
Şekil 3.2 Denetim girişinin zamana göre değişimi.....	28
Şekil 3.3 Sarkaç açısı ve araç konumunun zamana göre değişimi	34
Şekil 3.4 Ters sarkaç sistemi için denetim girişinin zamana göre değişimi	34
Şekil 3.5 Sarkaç açısı ve kol açısının zamana göre değişimi	41
Şekil 3.6 Döner sarkaç sistemi için denetim girişinin zamana göre değişimi	41
Şekil 3.7 Top konumu ve çubuk açısının zamana göre değişimi	45
Şekil 3.8 Top-çubuk sistemi için denetim girişinin zamana göre değişimi.....	45
Şekil 3.9 Araç konumu ve sarkaç açısının zamana göre değişimi.....	50
Şekil 3.10 TORA sistemi için denetim girişinin zamana göre değişimi	50

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması sırasında yapılan araştırmalara yaptığı öneri, katkı ve diğer yardımlarından dolayı tez danışmanım, değerli hocam Prof. Dr. Galip Cansever ve ikinci danışmanım Doç. Dr. Haluk Görgün'e; bununla beraber, zaman zaman yaptığımız teorik tartışmalar ile bana büyük faydalar sağlayan Doç. Dr. İbrahim Beklan Küçükdemiral'a ve yardım ve katkılarından ötürü tüm çalışma arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Tüm hayatım boyunca varlıklarını bana bir an bile unutturmayan, her zaman yanımda olan ve güçlü kalmamı sağlayan aileme sonsuz saygılarımı sunarım. Son olarak, bu tezin oluşumu sırasında göstermiş olduğu sabır ve anlayışlarından dolayı sevgili eşim, hayat arkadaşım Esra Türker'e sonsuz teşekkürler.

ÖZET

Mekanik sistemlerin denetimi, uzun zamandır aktif bir araştırma konusu olması ile beraber, günümüzde halen popüler bir çalışma alanı olarak karşımıza çıkmaktadır. Bununla beraber mekanik sistemlerin özel bir alt sınıfı oluşturan YEMS'in genel anlamda kararlı kılınması üzerine yapılan çalışmalar son birkaç senedir hızlı bir biçimde devam etmektedir. YEMS, sistemdeki serbestlik sayısının bağımsız denetim girişi sayısından fazla olan sistemler olarak tanımlanmaktadır. Uygulamada çok farklı biçimlerde karşımıza çıkan YEMS'in kararlı kılınması problemi, bu tip sistemlerin fazlaca doğrusal olmayan dinamikler içermesi ve alt sistemleri arasındaki karmaşık ara bağlantı yapıları sebebi ile oldukça zor bir denetim problemidir.

Bu doktora çalışmasında, iki serbestlikli bir kısım yetersiz eyleyicili mekanik sistemin, doğrusal olmayan denetleyici tasarımı yapılarak asimptotik kararlı kılınması sağlanmıştır. Sistem geri besleme ile kısmi doğrusallaştırıldıktan sonra yapıyı daha da sadeleştiren koordinat dönüşümleri uygulanmış ve kararlı kılan denetleyici doğrudan Lyapunov yaklaşımı ile oluşturulmuştur. Asimptotik kararlılık La Salle değişmez küme teorisi yardımıyla verilen örnekler için ayrı ayrı elde edilmiştir. Önerilen yöntemin etkinliği örnek sistemler için benzetim çalışmaları yapılarak desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yetersiz eyleyicili mekanik sistemler, doğrusal olmayan denetim, Lyapunov temelli denetim.

ABSTRACT

STABILIZATION OF A CLASS OF 2-DOF UNDERACTUATED MECHANICAL SYSTEMS VIA DIRECT LYAPUNOV APPROACH

Control of mechanical systems, which has been attracting the attention of many researchers for a few decades, is still a popular research area. On the other hand, ongoing studies on the general stabilization of UAMS, that constitute a particular class of mechanical systems, have become an active research area since the beginning of 1990s. UAMS are defined as the systems having less independent actuators than the degree of freedom of the system. The stabilization of UAMS arising in many different practical applications areas is quite hard control problem since such systems have high degree nonlinear terms and complicated interconnection structure in their dynamics.

This dissertation proposes a novel nonlinear control design for a class of two degree of freedom underactuated mechanical systems. After partial feedback linearization procedure, the structure of the system has been simplified with a set of coordinate transformations. Following, the control structure has been designed via Lyapunov's direct method. Asymptotic stability has been proved for the given examples by means of La Salle invariance principle. In order to illustrate the effectiveness of the proposed method, simulation studies have been performed for each example.

Keywords: Underactuated mechanical systems, nonlinear control, Lyapunov based control.

1. GİRİŞ

Uzun zamandır üzerine çalışmalar yapılıyor olması ile beraber, mekanik sistemlerin kararlı kılınması ve denetimi günümüzde halen açık problemler barındıran oldukça aktif bir konu olarak karşımıza çıkmaktadır. Teknolojik gelişmelerle birlikte, mekanik sistemlerin ve özellikle mekanik sistemlerin önemli bir alt sınıfını oluşturan robotların, sanayi, araştırma ve bunlarla beraber pek çok alanda geniş kullanım sahası elde etmiş olması; ayrıca, bir alt sınıf olarak robotların genel mekanik sistemler için önemli bir uygulama alanı olması birçok araştırmacıyı robotların denetimi konusunda çalışmalar yapmaya itmiştir. Yapısal özelliklerinden dolayı robotların doğrusal olmayan dinamikleri ve çalışma bölgelerinin geniş olması, robotların denetimi konusu uygulamalı doğrusal olmayan kontrol teorisi için etkin bir uygulama alanı olmuş ve yapılan araştırmalarla beraber robotların doğrusal olmayan denetimi iyi bilinen bir konu haline gelmiştir. Özellikle sistem belirsizlikleri ile baş etme ve çalışma koşullarına uyum sağlama konularında uyarlamalı kontrol, dayanıklı kontrol, pasiflik temelli kontrol gibi yöntemler genel olarak doğrusal olmayan kontrol konusunda geliştirilmiş, başarı ile robotlar üzerinde uygulanmış ve bu konularda çok fazla sayıda çalışma literatüre kazandırılmıştır.

Bununla beraber, mekanik sistemlerinin özel bir alt sınıfı sayılabilecek yetersiz eyleyicili mekanik sistemler (YEMS) üzerine yapılan çalışmalar son yıllarda büyük bir artış göstermiş olup halen birçok araştırmacının ilgi alanını oluşturmaktadır. Yetersiz eyleyicili mekanik sistemler, bağımsız kontrol eyleyicilerinin sayısının, kontrol edilen serbestlik sayısından az olan sistemler olarak tanımlanabilir. YEMS'in denetimi konusundaki ilgi özellikle gemiler, su altı araçları, hava araçları, uzay araçları, gezgin robotlar gibi sistemlerin kontrol edilmesi amacıyla kaynaklanmaktadır. YEMS, ağırlık ve fiyat dezavantajları olan bazı eyleyicilerin kullanılmak istenilmemesi gibi sebeplerle yetersiz eyleyicili olabilecekleri gibi, tasarımı açısından doğrudan veya bir sistemdeki eyleyici arızası ile de yetersiz eyleyicili olabilirler.

YEMS'e bir örnek olarak, çalışan bir manipülatörün eyleyicilerinden bir veya birkaçının arızalanması ile oluşan sistem gösterilebilir. Bununla beraber, çeşitli alanlarda kullanılan gezgin robotlar bazı durumlarda üzerlerinde belirli bir amaca yönelik kullanılan bir manipülatöre sahiptirler. Bu manipülatörler kullanılırken genellikle gezgin robot durdurulur ve böylece manipülatör hareket ettikçe boşta hareket eden bir serbestlik oluşur. Bu durumda oluşan sistem bütünü YEMS için güzel bir örnek olarak karşımıza çıkmaktadır. Ayrıca günümüzde popüler bir hava aracı olan, dikey olarak iniş kalkış yapabilme kabiliyetine sahip dört pervaneli helikopter sistemi, altı serbestlik ile bir yetersiz eyleyicili mekanik sistemdir.

Görüldüğü üzere, YEMS genellikle tasarım açısından oldukça maliyetli sistemler olup, üzerlerinde geliştirilen bir teorinin doğrudan uygulanması oldukça risklidir. Ayrıca bu tip sistemlerin eğitimde uygulamalı olarak kullanılması da pek mümkün olmamaktadır. Bu sebeplerle araştırma ve eğitimde kullanılmak amacı ile matematiksel modeli kullanımda olan YEMS ile çok yakın, tasarımı basit ve maliyeti düşük olan YEMS tasarlanmıştır. Bunlardan en çok bilinen bazıları ise atalet diskli sarkaç sistemi (inertia wheel pendulum), ters sarkaç sistemi (pendulum on a cart), top-çubuk sistemi (ball and beam), döner sarkaç sistemi (rotary pendulum), pendubot ve acrobot olarak gösterilebilir.

YEMS'in kararlı kılınması problemi genellikle sistemin kararsız denge noktası etrafında kararlı kılınması olarak karşımıza çıkmaktadır. Örnek olarak ters sarkaç sistemini ele alalım. Bu sistem yatay olarak tek yönde hareket eden bir araç ve bu aracın hareket yönüne dik olacak şekilde araca akuple edilmiş ve serbest şekilde hareket edebilen bir sarkaçtan oluşmaktadır. Sarkacın üzerinde doğrudan etki eden bir giriş bulunmayıp, sarkaç ancak aracın ivmelenmesi ile hareket edebilmektedir. Sistemin denge noktaları sarkacın yere dikey doğrultuda olduğu iki farklı konum, sarkacın yere doğru durduğu (kararlı) ve sarkacın yere ters doğrultuda durduğu (kararsız), olarak gösterilebilir, araç ise herhangi bir konumda bulunabilir. Bu durumda ters sarkaç sisteminin kararlı kılınması problemi şu şekilde özetlenebilir. Araç üzerine kuvvet uygulanarak aracın hareket etmesi sağlanır ve bu sarkaç üzerinde bir kuvvet oluşturur. Bu kuvvet ayarlanarak sarkaç yere dik olacak şekilde ters biçimde durdurulmaya çalışılır ve bununla birlikte araç önceden belirlenmiş bir konuma götürülebilmelidir. Ayrıca, bu sistemde sarkacın ters olmayacak şekilde kararlı denge noktası etrafındaki denetimi de karşımıza vinç problemini çıkarmaktadır. Fakat ters sarkaç problemi vinç problemine göre çok daha zor bir problemdir. Bunun sebebi ise sistemin doğası gereği vinç probleminde denge noktasının kararlı olmasıdır.

Yoğun bir biçimde devam eden araştırmalar doğrusal olmayan sistemlerin denetimi konusundaki ilerlemeleri hızlandırmaktadır. Günümüzde mekanik sistemlerin denetimi için yapılan çalışmaların birçoğu genel yapıda denetleyiciler bulmaya yönelik olup, elde edilen yöntemlerin çoğu mekanik sistemlerin çok özel bir alt sınıfını oluşturan YEMS'in denetimi için kullanılamamaktadır. Bunun en temel sebepleri ise YEMS'in kontrol girişindeki yetersizliklerden dolayı sistemin derecesinin artması ve sistemin serbestlikleri arasındaki bağlantı yapısının karmaşıklığı olarak gösterilebilir. YEMS geri besleme ile doğrusallaştırılmaz, dolayısı ile doğrusal olmayan denetimin en temel tasarımı olarak karşımıza çıkan geri besleme ile doğrusallaştırma (feedback linearization) temelli yöntemler

YEMS üzerinde kullanılabilir değildirler. Bununla beraber denetleyici tasarımını kolaylaştırmak üzere YEMS için geri besleme ile kısmi doğrusallaştırma (partial feedback linearization) bir yöntem olarak sunulmuştur (Spong, 1996). Bu yöntem ile doğrusal olmayan sistem dinamikleri tamamen yok edilemese de geri besleme sayesinde bir kısmı yok edilebilir ve sonuçta oluşan sistem yapı olarak daha basit bir hal alır. Başka bir deyişle, denetleyici tasarımı yapılan sistem sadeleştirilmiş olur.

YEMS sınıfından özel bazı sistemler ayrı ele alınarak kararlı kılma çalışmaları literatürde oldukça fazla sayıda mevcuttur. Bununla birlikte YEMS için genel denetleyici geliştirme çalışmaları son zamanlarda popüler bir konu haline gelmiştir. Özellikle YEMS için geliştirilen denetleyicilerin tamamının genel olarak mekanik sistemlerin denetimini sağlayabilmesi konuyu fazlasıyla çarpıcı bir hale getirmektedir. Fakat YEMS'in denetimi önemli bir çalışma sahası olmasına ve bu konuda pek çok çalışmalar yapılmış olmasına rağmen halen bu sistemlerin kararlı kılınması konusu fazlaca açık problem barındırmaktadır. Günümüzde gelinen noktada dahi genel çözümlerin tamamında sistem modelinin tam olarak bilindiği kabulü yapılmaktadır.

YEMS için geliştirilmiş genel denetim yöntemlerinin çıkış noktası sistemin enerji fonksiyonu üzerinde değişimler yaparak, geri besleme yolu ile sistemi istenilen noktaya taşımaktır. Sistemin potansiyel enerji fonksiyonunun değiştirilmesi ile doğrudan ilintili olan pasiflik temelli denetim YEMS denetimi için yetersiz kalmaktadır ve YEMS'in denetimi için kinetik enerji fonksiyonu üzerinde değişimler yapılması şarttır (Gomez-Estern vd., 2001). YEMS'in kararlı kılınması amacı ile kinetik enerji biçimlendirme fikri ilk olarak Bloch vd. (1997,2000) tarafından ortaya atılmış ve oluşturulan yöntemle denetlenen Lagrangian (Controlled Lagrangians, CL) adı verilmiştir. Bu yöntemin ana fikri sistemin Lagrangian'ı ile birlikte Euler-Lagrange denklemleri göz önüne alınarak, geri besleme sonucunda yine Euler-Lagrange denklemleri ile ifade edilebilen bir sistem oluşturmaktır. Bu, kapalı çevrim sistem için olası Lagrangian fonksiyonları arasından hangilerinin açık çevrim sistem için uygun bir geri besleme seçilerek elde edilebileceğini hesaplayarak sağlanır. Bu şekilde bir geri besleme elde edilebilmesi için gerekli şartlara eşleşme koşulları (matching conditions) adı verilir ve olası bir başarı durumunda Euler-Lagrange sistem eşleşti denir. Genellikle, eşleşme koşulları birkaç doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklem ile ifade edilir. Ayrıca, önerilen bu yöntemle ek olarak potansiyel enerji fonksiyonunun da değiştirilmesi Bloch vd. (2001) tarafından sağlanmıştır. Bazı özel durumlarda, özel bir sınıf olası kapalı çevrim basitleştirilmiş CL fonksiyonları için basitleştirilmiş eşleşme koşulları olarak adlandırılan kısmi diferansiyel

denklemler genelleştirilerek çözülebilir (Bloch vd., 2000).

Özel yapıdaki bazı sistemler için bu şekilde çözüm elde edilebilmesine rağmen daha karmaşık yapıda olan YEMS için eşleşme koşullarının çözümü çok daha zordur. Eşleşme koşulları vasıtası ile elde edilen doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü için Auckly vd. (2000) bir basitleştirme prosedürü tanıtmışlardır. λ yöntemi olarak adlandırılan bu prosedür sayesinde eşleşme koşulları birkaç doğrusal kısmi diferansiyel denklem haline dönüştürülmüşlerdir. Bununla beraber, Auckly vd. (2000), Auckly ve Kapitanski (2003) tarafından önerilen yöntem içerisinde CL fonksiyonlarının değiştirilmesinde sadece kinetik enerji değil, potansiyel enerji fonksiyonu da dönüştürülerek tüm sistem serbestliklerinin asimptotik kararlı kılınması sağlanmıştır.

CL yöntemini temel alan diğer bir yaklaşım Li (2009) tarafından iki serbestlikli YEMS için önerilmiştir. Bu yaklaşımda jiroskopik kuvvetlerden bağımsız olan bir kinetik enerji fonksiyonu bulunmuş ve kinetik enerji fonksiyonunu, potansiyel enerji fonksiyonunu ve kati jiroskopik kuvvetleri içerisine alan gerekli ve yeterli eşleşme koşulları oluşturularak çözüme ulaşılmıştır. Sonrasında, Li ve Hou (2009) önerilen bu yöntemi birinci dereceden yetersiz eyleyicili mekanik sistemlere uyarlamıştır.

Diğer taraftan Ortega vd. (2002a, 2002b) YEMS'in kararlı kılınması için sistemin Hamiltonian'ını (toplam enerji fonksiyonu) değiştirerek ve sistemin pasiflik özelliklerinden faydalanarak çözüme ulaşılan IDAPBC yöntemini geliştirmişlerdir. Bu yöntemde sistem için ulaşılmak istenilen bir Hamiltonian fonksiyonu önerilerek sistemin orijinal Hamiltonian'ı ile eşleştirilmek sureti ile eşleşme koşullarına denk olan birkaç doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklem elde edilir. Bu diferansiyel denklemlerin çözümü geri besleme ile birlikte sistemin Hamiltonian fonksiyonunu istenilen yapıya kavuşturur. Ayrıca, geri besleme yolu ile sönüm atanarak sistemin istenilen noktada asimptotik kararlı kılınması sağlanır. IDAPBC yöntemi ile sadece (yetersiz eyleyicili) mekanik sistemlerin değil bunun yanı sıra kimyasal süreçlerin (Ramirez vd., 2009), elektro-mekanik sistemlerin (Battle vd., 2009), elektronik devrelerin (Jayawardhana vd., 2007) ve anahtarlamalı güç elektroniği devrelerine (Perez vd., 2004) denetimi için başarı ile uygulanmıştır. Bu yöntem ile oluşturulan eşleşme koşullarının bir kısım YEMS için genel anlamda çözülmesini sağlayan bir yaklaşım Acosta vd. (2005) tarafından önerilmiştir. Önerilen bu yöntem ile eşleşme koşullarının kati olarak çözüldüğü gösterilmiştir. Buna benzer bir çalışma olarak, Viola vd. (2007) koordinat dönüşümleri ile eşleşme koşullarının basitleştirilerek çözüme gidilebileceğini öne sürmüştür.

Yapılan bu çalışmalara alternatif olarak White vd. (2006, 2007, 2008, 2009) doğrudan Lyapunov yöntemi ile YEMS'in kararlı kılınması yaklaşımını ortaya atmıştır. Bu yöntemde sistemin kararlı kılınması yapısı belirlenmiş olan bir Lyapunov fonksiyonu seçilerek bu fonksiyonun türevinin negatif yarı tanımlı olması sağlanarak elde edilmiştir. Bu amaçla çözüm esnasında ortaya çıkan ve eşleşme koşulları ile denk olan birkaç lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem çözülmüştür. La Salle değişmez küme teorisi (bkz. Khalil, (1998)) yardımıyla asimptotik kararlılığın gösterilebildiği bu yöntemde oluşturulan geri besleme sinyalinin dinamik olması yöntemin zayıflığını ortaya çıkarmaktadır. Ibanez (2009) doğrudan Lyapunov yaklaşımını ek bir dönüşüm vasıtası ile geliştirerek, sonuçta, statik bir geri besleme ile top-çubuk sisteminin asimptotik kararlı kılınmasını sağlamıştır. Belirtildiği üzere bu yöntem sadece atalet matrisi diyagonal olan top-çubuk sistemi için çözülebilmüş, başka bir sisteme uyarlanamamıştır.

Literatüre aktarılan bu çalışmalar ışığında, bu doktora tezinde, doğrudan Lyapunov yaklaşımı genelleştirilerek geri besleme ile kısmi doğrusallaştırma ve ek olarak koordinat dönüşümleri sayesinde bir kısım iki serbestlikli YEMS'in kararlı kılınmasına uygun hale getirilmiştir. Bu süreç aşağıdaki gibi listelenebilir;

1. Geri besleme ile kısmi doğrusallaştırma: Spong (1996) tarafından YEMS için önerilen bu yöntem sayesinde sistemin dinamik yapısı geri besleme yoluyla basitleştirilir.
2. Koordinat dönüşümleri: Sistemin yetersiz eyleyicili olmasından kaynaklanan zorlukların önüne geçmek amacı ile atalet matrisini diyagonal hale getiren bir dönüşüm yapılmıştır. Bununla birlikte sistemin iki adet ikinci derece diferansiyel denklemle ifade etmek yerine dört adet birinci derece diferansiyel denklemle ifade edilmesini sağlayan ve aynı zamanda IDAPBC yöntemindeki kinetik enerji biçimlendirmeye benzer bir yapıya sahip ek bir dönüşüm daha yapılmıştır. Böylece oluşan dinamik yapı oldukça basit hale getirilmiş, ve sistemi asimptotik kararlı kılan geri beslemenin daha kolay biçimde elde edilmesi sağlanmıştır.
3. Doğrudan Lyapunov yaklaşımı: Sistem için oluşturulan dinamik denklemleri asimptotik kararlı kılmak amacı ile yapısı belirli olan bir Lyapunov fonksiyonu seçilerek, geri besleme vasıtasıyla bu fonksiyonun türevinin negatif yarı tanımlı olması sağlanmıştır ve böylece sistem kararlı kılınmıştır. Bunu elde etmek üzere eşleşme koşullarına benzer birkaç doğrusal olmayan diferansiyel denklem geri beslemenin sağladığı serbestliklerden faydalanılarak çözülmüştür. Diferansiyel

denklemin çözümünde, Lyapunov fonksiyonu için verilmiş olan kısıtlar ve La Salle değişmez küme teorisi sayesinde sistemlerin asimptotik kararlı kılındığı gösterilmiştir.

Yapılan bu tez çalışmasında, diğer yöntemlerde elde edilen denetleyici yapısının geliştirilerek daha basit bir halde elde edilmesinin sağlanması karşımıza bir avantaj olarak çıkmaktadır. Altı çizilmesi gereken bir diğer geliştirilen nokta ise bazı sistemler için (örn. döner sarkaç) diğer yöntemlerle elde edilen çekim bölgesinin genişletilmesi olmuştur. Bununla beraber doğrudan Lyapunov yaklaşımı ile elde edilmiş olan dinamik geri besleme yapısı önerilen yöntem ile statik geri besleme haline dönüştürülmüştür.

Bu tezin geri kalan kısmı şu şekilde oluşmaktadır: Bölüm 2’de mekanik sistemlerin dinamik denklemlerinin genel yapısı ile birlikte, YEMS için bu yapının oluşumu ve ayrıca dinamik modelleri ile birlikte örnek YEMS verilmiştir. Bölüm 3, yukarıda anlatılan kararlı kılma sürecini, Bölüm 2’de verilen örneklerin asimptotik kararlı kılınmasını ve her bir örnek benzetim çalışmalarını içerir. Bölüm 4’te ise, bu tezi sonuçlandırılarak gelecekte yapılabilecek çalışmalar için öneriler getirilmiştir.

2. MEKANİK SİSTEMLER

Bu bölümde genel olarak mekanik sistemlerin dinamik modellerinin elde edilmesi ve bu modellerin özellikleri ile birlikte YEMS'in dinamik yapıları üzerinde durulacaktır. Bunun devamında iki serbestlikli bir kısım YEMS için örnekler dinamik denklemleri ile birlikte verilecektir.

2.1 Mekanik Sistemlerin Euler-Lagrange Dinamik Denklemleri

Mekanik sistemlerin dinamik modellerinin elde edilmesi için sıklıkla kullanılan yöntemlerden bir tanesi de sistemlerin enerjisi üzerinden hareket ile modellerinin elde edildiği Euler-Lagrange denklemleridir. Euler-Lagrange denklemleri, Newton'un ikinci yasası kullanılarak elde edilen dinamik hareket denklemlerine eşit olan daha basit bir düzenleme sağlar. Mekanik sistemlerin modellerinin elde edilmesi için öncelikle tüm olası konuşlanımları (configurations) içeren çok katlı (manifold) tanımlanır. Sonrasında ise konuşlanım çok katlısında genelleştirilmiş koordinatlar olarak adlandırılan yerel koordinatlar ($q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$) belirlenir. Burada ' n ' sistemdeki serbestlik sayısını göstermektedir. Bu durumda sistemin kinetik enerjisi ile potansiyel enerjisi arasındaki fark olarak tanımlanan Lagrangian,

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{V}(q) \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada q ve \dot{q} sırası ile genelleştirilmiş koordinatları ve zamana göre türevlerini, $\mathcal{K}(q, \dot{q})$ sistemin toplam kinetik enerjisini ve $\mathcal{V}(q)$ sistemin toplam potansiyel enerjisini göstermektedir. Bu durumda mekanik sistem modeli Euler-Lagrange denklemi ile

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.2)$$

olarak verilebilir. Burada $\tau \in \mathbb{R}^n$ harici kuvvetleri (denetim girişleri) göstermektedir ve genelleştirilmiş kuvvet vektörü olarak adlandırılır. Ayrıca elde edilen bu model matris formunda aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = F\tau \quad (2.3)$$

Burada, $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ atalet matrisini, $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ merkezci ve coriolis kuvvetlerini, $G(q) \in \mathbb{R}^n$ yerçekimi etkilerini barındıran vektörü ifade eder. Ayrıca $\tau \in \mathbb{R}^m$ denetim girişleri, $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ($m \leq n$) giriş matrisi, m ise denetim girişlerinin boyutu olarak tanımlanmaktadır.

Mekanik sistemlerin (2.3) eşitliği ile verilen dinamik denklemleri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- $M(q) > 0, \quad \forall q \in \mathbb{R}^n,$
- $M(q) = M^T(q),$
- $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ matrisi ters-simetriktir,
- Sistemin atalet matrisi, $\lambda_1(q)$ ve $\lambda_2(q)$ sırası ile atalet matrisinin en küçük ve en büyük öz değerlerini ve $I_{n \times n}$ $n \times n$ boyutlu birim matrisi göstermek üzere, $\lambda_1(q)I_{n \times n} \leq M(q) \leq \lambda_2(q)I_{n \times n}$ şartı her $q \in \mathbb{R}^n$ için sağlanır.

2.2 Tam Eyleyicili Mekanik Sistemler

Eşitlik (2.3) ile verilen mekanik sistemlerin dinamik denklemleri göz önüne alındığında, giriş matrisi $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$ olarak tanımlanmaktadır. Eğer bir mekanik sistem için F matrisi tersi alınabilir bir matris ise, bu sisteme tam eyleyicili mekanik sistem denir. Başka bir deyişle, sistemdeki her serbestliğe karşılık gelen bir kontrol girişi mevcut ise sistem tam eyleyicilidir. TEMS geri-besleme yolu ile doğrusallaştırılabilirler, bu özellik denetim açısından büyük kolaylıklar getirmektedir. Bununla beraber TEMS’de dayanıklı kılma koşulunu da sağlayan uyarlamalı denetim, dayanıklı denetim yöntemleri gibi birçok yöntem başarı ile uygulanmıştır.

2.3 Yetersiz Eyleyicili Mekanik Sistemler

YEMS, sistemin serbestlik derecesinden daha az sayıda bağımsız denetim girişine sahip olan sistemler olarak tanımlanır. YEMS’de sistemin serbestlik derecesi (n), sistemin kontrol girişlerinin boyutundan (m) büyüktür. YEMS’in denetimi, denetim girişlerinin az sayıda olması sebebi ile TEMS’e göre oldukça zordur. YEMS, mekanik sistemlerin özel bir alt sınıfını oluşturmasında rağmen, TEMS için geliştirilen denetim yapıları YEMS’e uygulanabilir değildirler. YEMS geri-besleme yolu ile doğrusallaştırılmaz ve geleneksel doğrusal olmayan denetim yöntemleri YEMS’in kararlı kılınması için yeterli olmamaktadır.

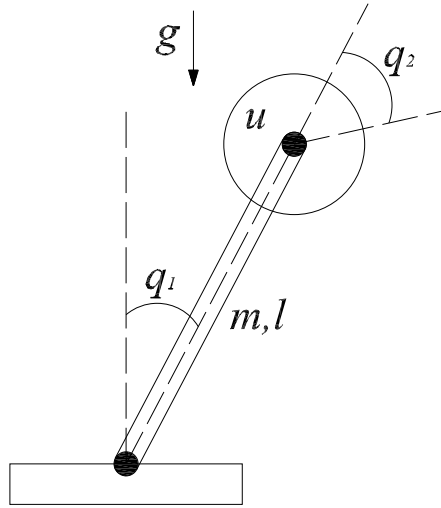
2.4 İki Serbestlikli Yetersiz Eyleyicili Mekanik Sistem Örnekleri

YEMS için örnekler; hava araçları, gemiler, uydular, su altı araçları, insansız robotlar gibi birçok alanda karşımıza çıkmaktadır. Fakat bu tür örneklerin laboratuvar ortamında deneysel amaçlı kullanılmaları oldukça zordur ya da mümkün değildir. Bu sebepten dolayı, birçoğu iki serbestlikli olmak üzere, gerek deneysel gerekse eğitim amaçlı kullanılmak üzere birçok YEMS oluşturulmuştur. Oluşturulan bu sistemlerin dinamik modelleri gerçekte kullanımda olan sistemlerin dinamik modellerine çok yakındır, dolayısı bu sistemler ile geliştirilen

teorilerin deneysel anlamda gerçekleştirilmesi açısından elverişlidirler. Alt bölümlerde YEMS için örnekler matematiksel modelleri ile birlikte verilecektir.

2.4.1 Atalet Diskli Sarkaç Sistemi

Atalet diskli sarkaç sistemi, bir ucundan sabit bir noktaya serbestçe dönebilecek şekilde tutturulmuş diğer ucuna ise bir moment uygulanarak döndürülebilen disk bağlanmış bir sarkaçtan oluşmaktadır (Şekil 2.1). Bu sistem ilk olarak Spong vd. (2001) tarafından tanıtılmıştır. Dinamik yapısı, diğer iki serbestlikli YEMS ile karşılaştırıldığında, atalet matrisinin sabit olmasından ötürü oldukça basittir. Atalet diskli sarkaç sistemi, sarkacın üzerinde doğrudan bir denetim girişi olmadığı için yetersiz eyleyicili bir sistemdir.



Şekil 2.1 Atalet diskli sarkaç sistemi

Atalet diskli sarkaç sistemi tüm durum uzayı için denetlenebilir. Spong vd. (2001) enerji temelli bir denetim yapısıyla atalet diskli sarkaç sisteminin küresel asimptotik kararlı olduğunu teorik ve pratik anlamda göstermişlerdir. Srinivas ve Behara (2008) IDAPBC yöntemi ve sarkaç osilasyonlarını temel alan bir diğer denetim yapısı ile sistemin küresel asimptotik kararlılığını deneysel anlamda sonuçlandırmışlardır. Yakın zamanda yapılan bir çalışmada Bobtsov vd. (2009) sistemi uyarlamalı denetim yapısı ile kararlı kılmışlardır.

Atalet diskli sarkaç sisteminin Lagrangian'ı aşağıdaki gibi verilebilir,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} ((I_1 + I_2)\dot{q}_1^2 + 2I_2\dot{q}_1\dot{q}_2 + I_2\dot{q}_2^2) + mgl \cos(q_1). \quad (2.4)$$

Burada, q_1 ve q_2 sırası ile sarkaç açısını ve disk açısını, \dot{q}_1 ve \dot{q}_2 , sarkacın ve diskin açısal

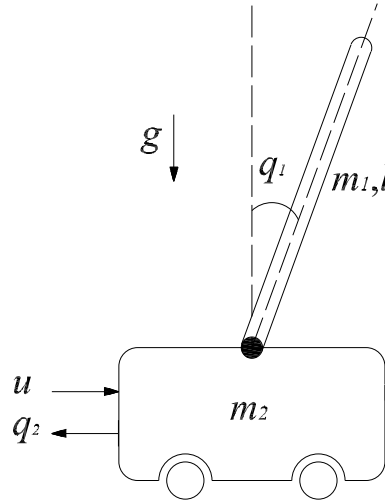
hızlarını, m ve l sarkaç ile diskin eşdeğer kütesini ve ağırlık merkezinin bağlantı noktasına olan mesafesini, I_1 ve I_2 sarkacın ve diskin atalet momentlerini, u denetim girişini ve g ise yerçekimi ivmesini göstermektedir. Buradan hareket ile atalet diskli sarkaç sistemine ait dinamik denklemler, Euler-Lagrange denklemleri uygulanarak aşağıdaki gibi elde edilebilir,

$$(I_1 + I_2)\ddot{q}_1 + I_2\ddot{q}_2 - mgl \sin(q_1) = 0 \quad (2.5)$$

$$I_2\ddot{q}_1 + I_2\ddot{q}_2 = u. \quad (2.6)$$

2.4.2 Ters Sarkaç Sistemi

Ters sarkaç sistemi geliştirilen denetim tekniklerinin çalışırılığının test edilmesi amacı ile kullanılan laboratuvar sistemlerinden bir tanesi olup denetleyici tasarımı ile uğraşan bir çok mühendis ve bilim insanı tarafından iyi bilinmektedir. Sistem, üzerine uygulanan kuvvet ile çizgisel olarak hareket edebilen bir araç ve bu araca monte edilmiş serbestçe dönebilen bir sarkaçtan oluşmaktadır (Şekil 2.2). Sadece araç üzerine bir kuvvet uygulandığı ve sistem iki serbestlikli olduğu için, ters sarkaç sistemi yetersiz eyleyicili bir mekanik sistemdir.



Şekil 2.2 Ters sarkaç sistemi

Ters sarkaç sisteminin denetim problemi iki ayrı ana başlıkta incelenebilir. Bunlardan ilki küresel bir çözüm olan sarkacın kararlı denge noktasından kararsız denge noktası civarına getirmek; ikincisi ise yerel bir çözüm olan sarkacı kararsız denge noktasında asimptotik kararlı kılmaktır. Bununla beraber sarkaç yere yatay konumda iken sistemin denetlenebilirlik özelliği kaybolmaktadır. Bu tespitle ilintili olarak, Shiriaev ve Fradkov (2001) sarkacı, sıfır araç konumu değişimi ile, en alt noktasından en üst noktasına sarkaç açısına göre periyodik

olan küresel, sürekli, statik bir geri besleme ile getirmenin mümkün olmadığını belirtmişlerdir.

Sistemin küresel anlamda denetimi için yapılan çalışmalar genellikle enerji temelli çalışmalardır. Bu çalışmalarda sisteme gerekli enerji verilerek sarkaç kararsız denge noktasına götürülmeye çalışılmaktadır. Astrom ve Furuta (2000), enerji temelli çalışmaların özelliklerini vererek sarkacı en alt noktadan en üst noktaya götürmek olan birkaç farklı denetleyiciyi karşılaştırmışlardır. Lozano vd. (2000), ters sarkaç sistemi için pasiflik temelli sürekli bir denetleyici yapısı geliştirmişler ve sarkacı en alt noktasından en üst noktası civarına getirmeyi sağlamışlardır. Yakın zamanda, Gordillo ve Aracil (2008), denetim yapısı anahtarlama barındırmasına rağmen, küresel kararlı kılma problemi için geri besleme ile kısmi doğrusallaştırılmış sistem için bir çözüm önermişlerdir.

Diğer taraftan, YEMS için geliştirilmiş olan genel denetleyici yapıları sistemi yerel asimptotik kararlı kılmaktadır. Ortega vd. (2002) ve Viola vd. (2007), IDAPBC ve IDAPBC için geliştirilen çözüm tekniklerinin çalışırılığını sınamak amacı ile ters sarkaç örnekleri üzerinde durmuşlardır. Bloch vd. (2000), CL tekniğinin tanıtıldığı yayınında ters sarkaç sistemini örnek olarak seçmişlerdir. White vd. (2006) doğrudan Lyapunov yaklaşımını ters sarkaç üzerinde uygulamıştır, fakat yapılan bu çalışmada denetleyici dinamiktir. Bu genel çözüm yöntemleri ile birlikte Olfati-Saber (1999) ters sarkaç sistemi için sabit nokta ters adımlama yöntemini uygulamış ve başarılı sonuçlar elde etmiştir. Denetleyici yapısının Lyapunov temelli olduğu bir diğer çalışma Ibanez vd. (2005) ile verilmiştir. Bu çalışmaların tümünde yerel denetleyici, ancak sarkacın başlangıç durumu üst yarı düzleminde ise çalışmaktadır.

Ters sarkaç sisteminin Lagrangian'ı aşağıdaki gibi elde edilebilir,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{q}_1^2 - m_1 l \cos(q_1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (m_1 + m_2) \dot{q}_2^2 \right) - \frac{1}{2} m_1 g l \cos(q_1). \quad (2.7)$$

Burada, q_1 ve q_2 sırası ile sarkaç açısını ve araç konumunu, \dot{q}_1 ve \dot{q}_2 , sarkacın açısal hızı ve aracın doğrusal hızını, m_1 ve l sarkacın kütlesi ve uzunluğunu, m_2 aracın kütlesini, u denetim girişini ve g ise yerçekimi ivmesini göstermektedir. Buradan hareket ile ters sarkaç sistemine ait dinamik denklemler, Euler-Lagrange denklemleri uygulanarak aşağıdaki gibi elde edilebilir,

$$\frac{1}{2} m_1 l^2 \ddot{q}_1 - \frac{1}{2} m_1 l \cos(q_1) \ddot{q}_2 - \frac{1}{2} m_1 g l \sin(q_1) = 0 \quad (2.8)$$

$$-\frac{1}{2}m_1l \cos(q_1)\ddot{q}_1 + (m_1 + m_2)\ddot{q}_2 + \frac{1}{2}m_1l \sin(q_1)\dot{q}_1^2 = u. \quad (2.9)$$

2.4.3 Döner Sarkaç Sistemi

İlk olarak Furuta vd. (1991) tarafından tanıtılmış olan döner sarkaç sistemi (ayrıca Furuta sarkacı olarak bilinmektedir), üzerine uygulanan moment ile dairesel hareket edebilen bir kol ve bu kolun ucuna monte edilmiş serbestçe dönebilen bir sarkaçtan oluşmaktadır (Şekil 2.3). Döner sarkaç sistemi, sarkacın üzerinde doğrudan bir denetim girişi olmadığı için yetersiz eyleyicili bir sistemdir. Bu özel ters sarkaç sistemi denetleyici tasarımı çalışmaları için harika bir örnek oluşturmakta olup, iki serbestlikli YEMS arasında matematiksel yapısı en karmaşık olandır (Acosta, 2010).

Döner sarkaç sisteminde de sarkaç yere yatay konumda iken sistemin denetlenebilirlik özelliği kayıp olmasından dolayı denetim problemi ters sarkaçta olduğu gibi iki ayrı ana başlıkta incelenebilir. Bunlardan ilki küresel bir çözüm olan sarkacın kararlı denge noktasından kararsız denge noktası civarına getirmek; ikincisi ise yerel bir çözüm olan sarkacı kararsız denge noktasında asimptotik kararlı kılmaktır.

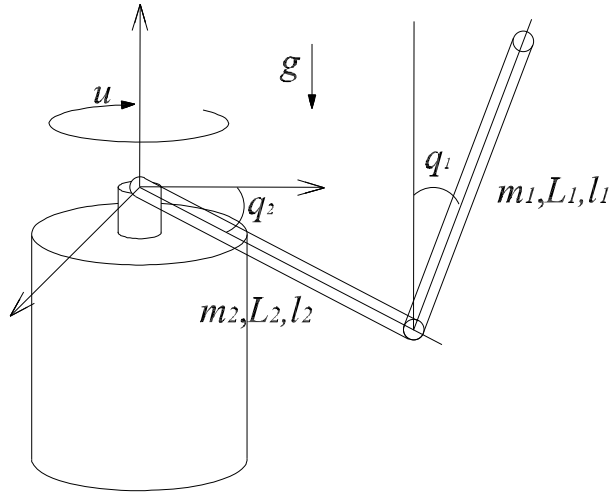
Furuta vd. (1991) tüm durum uzayının izdüşümü olan bir alt uzay kullanarak sarkacın en alt konumundan en üst konumu civarına getirilmesini sağlamışlardır ve yöntemin dayanıklılığını deneysel anlamda göstermişlerdir. Astrom ve Furuta (2000), enerji temelli çalışmaların özelliklerini vermişler ve amaçları sarkacı en alt noktadan en üst noktaya götürmek olan birkaç farklı denetleyiciyi karşılaştırmışlardır. Diğer bir küresel çözüm getirme yöntemi (speed-gradient) Gordillo vd. (2003) tarafından verilmiştir, ve bu çalışma benzetim ve deneysel çalışmalarla desteklenmiştir. Fantoni vd. (2002) sistemi özel bir yörüngeye sokan küresel bir denetleyici tasarlamışlardır.

Öte yandan, Viola vd. (2007) IDAPBC yöntemi için koordinat dönüşümü yolu ile sadeleştirmeler yapmış, döner sarkaç sistemine uygulamış, ve çekim bölgesi sistem dinamiklerine bağlı olan yerel bir çözüm elde etmişlerdir. Tasarımın Lyapunov temelli yapıldığı bir diğer çalışmada çekim bölgesi yine sistem dinamiklerine bağlıdır (Ibanez ve Azuela, 2007). Olfati-Saber (2002) YEMS için normal form elde etmek üzere bir yöntem önermiş ve sabit nokta geri adımlama yöntemi ile döner sarkaç sistemi için bir çözüm elde etmiştir. White vd. (2006) doğrudan Lyapunov yaklaşımını döner sarkaç problemine uygulamıştır, fakat bu çalışmada elde edilen denetleyici dinamiktir.

Döner sarkaç sisteminin Lagrangian'ı aşağıdaki gibi elde edilebilir,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\theta_1 \dot{q}_1^2 + 2\theta_2 \cos(q_1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (\theta_5 + \theta_3 \sin^2(q_1)) \dot{q}_2^2) - \theta_4 g \cos(q_1). \quad (2.10)$$

Burada, $\theta_1 = I_1 + m_1 l_1^2$, $\theta_2 = m_1 l_1 L_2$, $\theta_3 = m_1 l_1^2$, $\theta_4 = m_1 l_1$, $\theta_5 = I_2 + m_2 l_2^2 + m_1 L_2^2$ olup; ayrıca, q_1 ve q_2 sırası ile çubuğun konumuna göre sarkaç açısını ve çubuk açısını, \dot{q}_1 ve \dot{q}_2 , sarkacın ve çubuğun açısal hızını, L_1 , l_1 ve m_1 sarkacın uzunluğu, ağırlık merkezinin mesafesi ve kütleini, L_2 , l_2 ve m_2 çubuğun uzunluğu, ağırlık merkezinin mesafesi



Şekil 2.3 Döner sarkaç sistemi

ve kütleini, I_1 ve I_2 sarkacın ve çubuğun atalet momentlerini, u denetim girişini ve g ise yerçekimi ivmesini göstermektedir. Buradan hareket ile döner sarkaç sistemine ait dinamik denklemler, Euler-Lagrange denklemleri uygulanarak aşağıdaki gibi elde edilebilir,

$$\theta_1 \ddot{q}_1 + \theta_2 \cos(q_1) \ddot{q}_2 - \theta_3 \sin(q_1) \cos(q_1) \dot{q}_2^2 - \theta_4 g \sin(q_1) = 0 \quad (2.11)$$

$$\theta_2 \cos(q_1) \ddot{q}_1 + (\theta_5 + \theta_3 \sin^2(q_1)) \ddot{q}_2 - \theta_2 \sin(q_1) \dot{q}_1^2 + 2\theta_3 \sin(q_1) \cos(q_1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 = u. \quad (2.12)$$

2.4.4 Top Çubuk Sistemi

Bir eyleyici sayesinde döndürülebilen bir çubuk ve çubuk üzerinde serbestçe hareket edebilen bir toptan oluşan top-çubuk sisteminin denetiminde amaç topu çubuk üzerinde istenilen bir noktaya götürmektir. Sistemde top üzerinde doğrudan bir kuvvet uygulanmadığı için top-çubuk sistemi yetersiz eyleyicidir.

Bu bölümde top-çubuk sisteminin asimptotik kararlı kılınmasını sağlayan denetleyici tasarımı Ibanez (2009) yayınından alınmıştır. Bununla beraber yakın zamanda top-çubuk sistemi ile

İlgili yapılan çalışmalardan bir tanesi olarak, Muralidharan vd. (2010) ile verilen çalışmada IDAPBC yaklaşımı ile sistemi asimptotik kararlı kılınmış ve elde edilen denetleyici deneysel çalışmalarla desteklenmiştir. Aoustin ve Formalskii (2009) iki farklı top-çubuk sistemini denge noktası etrafında doğrusallaştırarak sistemin doğrusal denetim yöntemleri ile kararlı kılınmasını sağlamışlardır. Bir başka çalışmada Li vd. (2009) sistemin toplam enerjisinden yola çıkarak pasiflik temelli denetim yapısı ile sistemin orijinde asimptotik kararlı olması sonucunu elde etmişlerdir.

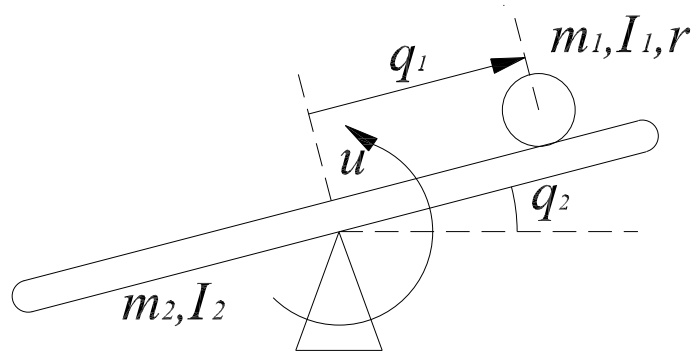
Top-Çubuk sisteminin Lagrangian'ı aşağıdaki gibi elde edilebilir,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left((m_1 + \frac{I_1}{r^2}) \dot{q}_1^2 + (I_2 + m_1 q_1^2) \dot{q}_2^2 \right) - m_1 g q_1 \sin(q_2). \quad (2.13)$$

Burada q_1 ve q_2 sırası ile topun konumunu ve çubuğun açısını, \dot{q}_1 ve \dot{q}_2 , topun doğrusal ve çubuğun açısal hızını, r , m_1 ve I_1 topun yarıçapı, kütlesi ve atalet momentini, m_2 ve I_2 çubuğun kütlesi ve atalet momentini, g ise yerçekimi ivmesini göstermektedir. Top-çubuk sistemine ait dinamik denklemler, Euler-Lagrange denklemleri uygulanarak aşağıdaki gibi elde edilebilir,

$$(m_1 + \frac{I_1}{r^2}) \ddot{q}_1 - m_1 q_1 \dot{q}_2^2 + m_1 g \sin(q_2) = 0 \quad (2.14)$$

$$(I_2 + m_1 q_1^2) \ddot{q}_2 + 2m_1 q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_1 g q_1 \cos(q_2) = u. \quad (2.15)$$



Şekil 2.4 Top-Çubuk sistemi

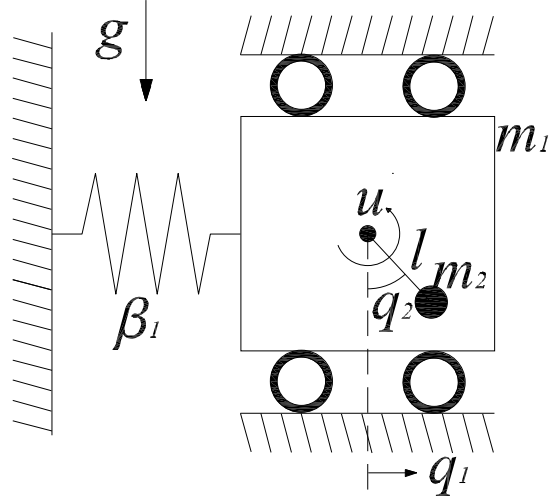
2.4.5 TORA Sistemi

TORA (Translational Oscillator with Rotational Actuator) sistemi (Şekil 2.5) yan tarafından bir yay vasıtasıyla sabit bir zemine bağlanmış, çizgisel olarak hareket edebilen araç ve aracın içerisinde bulunan bir motor tarafından döndürülebilen bir sarkaçtan oluşmaktadır. İlk olarak

Wan vd. (1996) tarafından tanıtılan bu sistemde amaç sarkaca verilen hareket ile aracın konumu istenilen bir noktaya ayarlamaktır.

TORA sisteminin Lagrangian'ı aşağıdaki gibi elde edilebilir,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\theta_1 \dot{q}_1^2 + 2\theta_2 \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \theta_3 \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} \beta_1 q_1^2 + m_2 l g \cos(q_2). \quad (2.16)$$



Şekil 2.5 TORA sistemi

Burada, $\theta_1 = m_1 + m_2$, $\theta_2 = m_2 l$, $\theta_3 = m_2 l^2 + I_2$ olup; ayrıca, q_1 ve q_2 sırası ile araç konumu ve sarkaç açısını, \dot{q}_1 ve \dot{q}_2 , aracın doğrusal hızı ve çubuğun açısal hızını, I_2 , l ve m_2 sarkacın atalet momentini, sarkacın uzunluğunu, sarkacın uç noktasında bulunan kütle, m_1 aracın kütesini, β_1 yay sabitini, g ise yerçekimi ivmesini göstermektedir. Buradan hareket ile TORA sistemine ait dinamik denklemler, Euler-Lagrange denklemleri uygulanarak aşağıdaki gibi elde edilebilir,

$$\theta_1 \ddot{q}_1 + \theta_2 \cos(q_2) \ddot{q}_2 - \theta_2 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + \beta_1 q_1 = 0 \quad (2.17)$$

$$\theta_2 \cos(q_2) \ddot{q}_1 + \theta_3 \ddot{q}_2 + \theta_2 g \sin(q_2) = u. \quad (2.18)$$

3. DOĞRUDAN LYAPUNOV YAKLAŞIMI ile BİR KISIM YETERSİZ EYLEYİCİLİ MEKANİK SİSTEMİN KARARLI KILINMASI

3.1 Giriş

Doğrusal olmayan sistemlerin kararlılıklarının gösterilmesinde en çok kullanılan yöntem Lyapunov kararlılık analizi olarak karşımıza çıkmaktadır. Bununla birlikte Lyapunov teorisi kararlı kılan denetleyici tasarımında da doğrudan kullanılabilir. Bu şekilde yapılan bir tasarımda, sistemi (asimptotik) kararlı kılmak amacıyla; aday bir Lyapunov fonksiyonu seçilerek başlanır ve Lyapunov fonksiyonunun türevi, uygun bir denetleyici yapısı oluşturularak negatif (yarı) tanımlı yapılmaya çalışılır.

Bu bölümde YEMS için geri besleme ile kısmi doğrusallaştırma yöntemi ve sistem yapısının daha da sadeleştirilmesine imkân tanıyan birkaç koordinat dönüşümüne yer verilecektir. Geri besleme ile kısmi doğrusallaştırılan ve koordinat dönüşümleri ile oluşturulan sistem doğrudan Lyapunov yaklaşımı ile kararlı kılınacak ve önerilen bu denetim yapısı bir kısım iki serbestlikli yetersiz eyleyicili mekanik sistemlere uygulanacaktır.

Tasarım aşamasına geçmeden önce bir iki serbestlikli bir kısım YEMS için genel çözüm elde edebilmek üzere gerekli olan aşağıdaki varsayımları tanımlamak yerinde olacaktır;

Varsayım 3.1

Söz konusu sistemlerin atalet matrisleri eyleyicisi bulunmayan koordinata bağlıdır. Ortega vd. (2002a) yayınında belirtildiği üzere bir çok YEMS, yapısı gereği bu özelliği taşımaktadır.

Varsayım 3.2

Serbestliklerden sadece bir tanesinin potansiyel enerjisi değişken olmalıdır. Yine birçok YEMS bu özelliği taşımaktadır.

3.2 Problem Formülasyonu

İki serbestlik derecesine sahip YEMS'in dinamik hareket denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$m_{11}(q)\ddot{q}_1 + m_{12}(q)\ddot{q}_2 + d_{11}(q, \dot{q})\dot{q}_1 + d_{12}(q, \dot{q})\dot{q}_2 + g_1(q) = 0 \quad (3.1)$$

$$m_{12}(q)\ddot{q}_1 + m_{22}(q)\ddot{q}_2 + d_{21}(q, \dot{q})\dot{q}_1 + d_{22}(q, \dot{q})\dot{q}_2 + g_2(q) = u. \quad (3.2)$$

Burada, $q = [q_1 \ q_2]^T$ genelleştirilmiş koordinatları, q_1 ve q_2 sırası ile eylenmemiş ve eylemiş koordinatları, $m_{ij}(q)$ ($i, j = 1, 2$) atalet matrisi bileşenlerini, $d_{ij}(q)$ ($i, j = 1, 2$) merkezci ve coriolis kuvvetlerinin oluşturduğu matrisin bileşenlerini, $g_i(q)$ ($i = 1, 2$) yerçekimi etkilerini ve u denetim girişini göstermektedir.

Sistem dinamikleri (3.1) ve (3.2) eşitliklerindeki gibi oluşturulduktan sonra, bu denklemler, daha basit yapıda olan bir sistem elde etmek üzere geri besleme ile kısmi doğrusallaştırma ve koordinat dönüşümleri sayesinde sadeleştirileceklerdir. Burada amaç, sistem koordinatlarını Isidori(1995) ile tanımlanan normal yapıya dönüştürmektir.

3.2.1 Geri Besleme ile Kısmi Doğrusallaştırma

Yetersiz eyleyicili mekanik sistemler için geri besleme ile kısmi doğrusallaştırma ilk olarak Spong(1996) tarafından tanımlanmıştır. Bu yöntem sayesinde sistem daha basit bir yapıya getirilip denetim tasarımı görece kolay bir hal almaktadır. Geri-besleme ile kısmi doğrusallaştırma prosedürünü uygulamak üzere, \ddot{q}_2 , (3.1) eşitliği kullanılarak

$$\ddot{q}_2 = \frac{1}{m_{12}}(-m_{11}\ddot{q}_1 - d_{11}(q, \dot{q})\dot{q}_1 - d_{12}(q, \dot{q})\dot{q}_2 - g_1(q)) \quad (3.3)$$

olarak elde edilebilir. Bu sonuç (3.2) eşitliğinde kullanılarak \ddot{q}_2 (3.2)'den elemine edilebilir. Bununla birlikte (3.1)'in her iki tarafı m_{12} ile bölünüp, (3.1) ve (3.2)'nin düzenlenip tekrar yazılması ile

$$\frac{m_{11}}{m_{12}}\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + h_1(q, \dot{q}) = 0 \quad (3.4)$$

$$(m_{12} - \frac{m_{11}m_{22}}{m_{12}})\ddot{q}_1 + h_2(q, \dot{q}) = u \quad (3.5)$$

eşitlikleri oluşturulabilir. Burada $h_1(q, \dot{q})$ ve $h_2(q, \dot{q})$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır,

$$h_1(q, \dot{q}) \triangleq \frac{1}{m_{12}}(d_{11}(q, \dot{q})\dot{q}_1 + d_{12}(q, \dot{q})\dot{q}_2 + g_1(q)), \quad (3.6)$$

$$h_2(q, \dot{q}) \triangleq d_{21}(q, \dot{q})\dot{q}_1 + d_{22}(q, \dot{q})\dot{q}_2 + g_2(q) - \frac{m_{22}}{m_{12}}(d_{11}(q, \dot{q})\dot{q}_1 + d_{12}(q, \dot{q})\dot{q}_2 + g_1(q)). \quad (3.7)$$

Bu noktada geri besleme ile kısmi doğrusallaştırma işlemini gerçekleştirmek üzere denetim girişi

$$u = (m_{12} - \frac{m_{11}m_{22}}{m_{12}})f_1 + h_2(q, \dot{q}) \quad (3.8)$$

olarak seçilerek (3.4) ve (3.5) eşitlikleri aşağıdaki gibi düzenlenebilir,

$$\frac{m_{11}}{m_{12}}\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + h_1(q, \dot{q}) = 0 \quad (3.9)$$

$$\ddot{q}_1 = f_1. \quad (3.10)$$

Burada f_1 yeni denetim girişini göstermektedir.

Açıklama 3.1

Eşitlik (3.3)'te olduğu gibi, \ddot{q}_2 terimini elde edebilmek için $m_{12} \neq 0$ şartının sağlanması gerektiği gözden kaçırılmaması gereken bir noktadır. Bu kısıt bir zayıflık gibi görülebilir, fakat, bir çok iki serbestlikli yetersiz eyleyicili mekanik sistemde, $m_{12} = 0$ olduğu noktalarda sistemin kontrol edilebilme özelliği kaybolmaktadır. Bununla birlikte, $m_{12} = 0$ eşitliği her q için sağlanabilir ki bunun anlamı (3.1)'de \ddot{q}_2 teriminin, (3.2)'de ise \ddot{q}_1 teriminin bulunmamasıdır ve Top-Çubuk sistemi bu özelliği barındıran sistemlere örnek teşkil edebilir. Bu durumda sistemin atalet matrisi köşegendir ve (3.2)'den \ddot{q}_2 terimini elemine etmeye lüzum yoktur.

3.2.2 Koordinat Dönüşümleri

Sistemi denetim tasarımı açısından daha da basitleştirmek üzere bir dizi koordinat dönüşümünün yapılması gerekmektedir. İlk olarak, q_r yeni koordinat ve $\gamma(q_1)$, $\gamma(0) = 0$ özelliğini sağlayan, çekim bölgesinde sınırlı ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki dönüşüm tanımlanabilir (Olfati,2001),

$$q_r = \gamma(q_1) + q_2. \quad (3.11)$$

Bu ifadenin birinci ve ikinci zaman türevleri, $\dot{\gamma}'(q_1) = \partial\gamma(q_1)/\partial q_1$ olmak üzere, aşağıdaki gibi hesaplanabilir,

$$\dot{q}_r = \dot{\gamma}'(q_1)\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \quad (3.12)$$

$$\ddot{q}_r = \dot{\gamma}'(q_1)\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \frac{d}{dt}(\dot{\gamma}'(q_1))\dot{q}_1. \quad (3.13)$$

$$q_s = q_1, \bar{q} = [q_r \quad q_s]^T \text{ ve}$$

$$\gamma(q_1) \triangleq \int_0^{q_1} \frac{m_{11}(\theta)}{m_{12}(\theta)} d\theta \quad (3.14)$$

tanımlamaları yapılarak ve *Varsayım 3.1* göz önünde bulundurularak, (3.9) ve (3.10) eşitlikleri aşağıdaki gibi düzenlenebilir,

$$\ddot{q}_r - \frac{d}{dt}(\gamma'(q_s))\dot{q}_s + h_1(\bar{q}, \dot{q}) = 0 \quad (3.15)$$

$$\ddot{q}_s = f_1. \quad (3.16)$$

Bu dönüşüm prosedürü ile birlikte \ddot{q}_2 terimi (3.9) eşitliğinde de yok edilmiştir. Bununla beraber, $\gamma(0) = 0$ sağlandığı için eğer $q_r = 0$ ve $q_s = 0$ sağlanırsa $q_2 = 0$ olacaktır. Başka bir deyişle, başlangıçta ele aldığımız sistem modelinde orijinin ($q = 0$) asimptotik kararlı kılınması ile dönüşüm sonucunda elde edilen sistemde orijinin ($\bar{q} = 0$) asimptotik kararlı kılınması eşdeğerdir.

Daha sonraki analizi basitleştirmek üzere bir koordinat dönüşümü daha aşağıdaki gibi tanımlanabilir,

$$p = \Psi(\bar{q})\dot{\bar{q}}. \quad (3.17)$$

Burada, $p = [p_r \ p_s]^T$, $\Psi(\bar{q}) = \text{diag}[\psi_r(\bar{q}); \psi_s(\bar{q})]$ olarak tanımlanmıştır ve ψ_r ile ψ_s sıfır olmayan fonksiyonlar olup daha sonra tanımlanacaklardır. (3.17) eşitliğinde her iki tarafın zamana göre türevi alınıp ifade düzenlenirse,

$$\ddot{\bar{q}} = \psi^{-1}(\bar{q}) \left(\dot{p} - \dot{\psi}(\bar{q})\dot{\bar{q}} \right) \quad (3.18)$$

elde edilebilir. (3.18) eşitliği (3.15) ve (3.16) eşitliklerinde kullanılıp, c_3 , c_4 , ρ_2 ve f_2 yeni denetim girişleri olmak üzere

$$f_1 = \frac{1}{\psi_s} \left(c_3 p_r + \left(c_4 - \frac{\dot{\psi}_s}{\psi_s} \right) p_s + \rho_2 + f_2 \right) \quad (3.19)$$

(3.16) eşitliğinde yerine yazılırsa, oluşan yeni sistemin dinamikleri aşağıdaki gibi elde edilebilir,

$$\dot{\bar{q}} = \Psi^{-1}(\bar{q})p \quad (3.20)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_r \\ \dot{p}_s \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} p_r \\ p_s \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix}}_P + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_F f_2. \quad (3.21)$$

Burada,

$$c_1 = \frac{\dot{\psi}_r(\bar{q})}{\psi_r(\bar{q})} - \frac{d_{12}(\bar{q}, p)}{m_{12}(q_s)} \quad (3.22)$$

$$c_2 = \left(\frac{d(\gamma'(q_s))}{dt} - \frac{d_{11}(\bar{q}, p) - d_{12}(\bar{q}, p)\gamma'(q_s)}{m_{12}(q_s)} \right) \frac{\psi_r(\bar{q})}{\psi_s(\bar{q})} \quad (3.23)$$

$$\rho_1 = -\frac{g_1(\bar{q})\psi_r(\bar{q})}{m_{12}(q_s)} \quad (3.24)$$

olarak tanımlanabilir.

Genel dinamik denklemleri (3.1) ve (3.2) eşitlikleri ile verilen iki serbestlik dereceli YEMS için yukarıdaki alt bölümlerde verilen geri besleme ile kısmi doğrusallaştırma ve koordinat dönüşümü prosedürleri sonucu oluşan sistem (3.20) ve (3.21) eşitlikleri ile verilmiştir. Bu noktadan sonra sistemi kararlı kılmak için denetleyici tasarımı yapılacaktır.

3.3 Doğrudan Lyapunov Yaklaşımı

Sistemi kararlı kılacak olan denetleyici yapısını oluşturmak üzere aşağıda verilen bir aday Lyapunov fonksiyonu seçelim,

$$V(\bar{q}, p) = \frac{1}{2}p^T K(\bar{q})p + \phi(\bar{q}). \quad (3.25)$$

Burada $K(\bar{q}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ (en azından çekim bölgesinde) pozitif tanımlı ve simetrik bir matris, ϕ ise (en azından çekim bölgesinde) pozitif tanımlı, sürekli ve sistemin kararlı kılınacağı noktada (yerel) minimuma sahip skaler bir fonksiyondur. Bu aday Lyapunov fonksiyonunun zamana göre türevi alınarak

$$\dot{V} = p^T K(\bar{q})\dot{p} + \frac{1}{2}p^T \dot{K}(\bar{q})p + \dot{\phi}(\bar{q}) \quad (3.26)$$

ifadesi elde edilebilir. $\frac{1}{2}p^T \dot{K}(\bar{q})p = \frac{1}{2}\dot{\bar{q}}^T \nabla_{\bar{q}} (K(\bar{q})p)^T p$ ve $\dot{\phi}(\bar{q}) = \dot{\bar{q}}^T \nabla_{\bar{q}}(\phi(\bar{q}))$ eşitliklerinden faydalanarak (3.26) düzenlenip tekrar yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilebilir,

$$\dot{V} = p^T K(\bar{q})\dot{p} + \frac{1}{2}p^T \Psi^{-1}(\bar{q}) \nabla_{\bar{q}} (K(\bar{q})p)^T p + p^T \Psi^{-1}(\bar{q}) \nabla_{\bar{q}}(\phi(\bar{q})). \quad (3.27)$$

Burada ∇ gradyan operatörü olarak kullanılmaktadır. (3.21) eşitliği (3.27)'da yerine konularak, aday Lyapunov fonksiyonunun türevinin son ifadesi şu şekilde elde edilir,

$$\dot{V} = p^T \underbrace{\left(KC + \frac{1}{2} \Psi^{-1} \nabla_{\bar{q}} (Kp)^T \right)}_W p + p^T \underbrace{\left(KP + \Psi^{-1} \nabla_{\bar{q}} (\phi) \right)}_Z + p^T KF f_2. \quad (3.28)$$

Elde edilen bu ifadede denetim girişleri, W ters simetrik bir matris ve $Z = 0$ olacak şekilde tasarlanırsa aday Lyapunov fonksiyonunun türevi

$$\dot{V} = p^T KF f_2 \quad (3.29)$$

olarak elde edilir ki uygun bir denetim girişi f_2 seçilerek bu ifade kolayca negatif yarı tanımlı yapılabilir ve bu durumda sistem en azından kararlı kılınmış olur. Bu noktadan sonra ki öncelikli amaç W matrisinin ters simetrik ve $Z = 0$ olmasını sağlamak olarak özetlenebilir.

K matrisi,

$$K = \begin{bmatrix} k_1(q_s) & k_2(q_s) \\ k_2(q_s) & k_3(q_s) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

olarak tanımlanırsa W matrisi,

$$W = \begin{bmatrix} k_1 c_1 + k_2 c_3 + \frac{k'_1 p_r}{2\psi_r} + \frac{k'_2 p_s}{2\psi_r} & k_1 c_2 + k_2 c_4 + \frac{k'_2 p_r}{2\psi_r} + \frac{k'_3 p_s}{2\psi_r} \\ k_2 c_1 + k_3 c_3 & k_2 c_2 + k_3 c_4 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

şeklinde oluşturulabilir. Burada c_3 ve c_4 , (3.19) eşitliği ile verilen geri besleme sinyalinin bileşenleridir, dolayısı ile bu ifadelerin uygun bir biçimde oluşturulmasıyla (3.31) eşitliği ile verilen W matrisinin ters simetrik olması sağlanabilir. Bu amaçla W matrisinin köşegen elemanları ($[W]_{ii}, i = 1, 2$) ayrı ayrı sıfıra eşitlenerek c_3 ve c_4 aşağıdaki gibi elde edilebilir,

$$c_3 = -\frac{k_1}{k_2} c_1 - \frac{k'_1 p_r}{2k_2 \psi_r} - \frac{k'_2 p_s}{2k_2 \psi_r} \quad (3.32)$$

$$c_4 = -\frac{k_2}{k_3} c_2. \quad (3.33)$$

Bu eşitliklerde (3.22) ve (3.23) ile verilen c_1 ve c_2 yerlerine yazılarak

$$c_3 = -\frac{k_1}{k_2} \left(\frac{\dot{\psi}_r(\bar{q})}{\psi_r(\bar{q})} - \frac{d_{12}(\bar{q}, p)}{m_{12}(q_s)} \right) - \frac{k'_1 p_r}{2k_2 \psi_r} - \frac{k'_2 p_s}{2k_2 \psi_r} \quad (3.34)$$

$$c_4 = -\frac{k_2}{k_3} \left(\frac{d(\gamma'(q_s))}{dt} - \frac{d_{11}(\bar{q}, p) - d_{12}(\bar{q}, p) \gamma'(q_s)}{m_{12}(q_s)} \right) \frac{\psi_r(\bar{q})}{\psi_s(\bar{q})} \quad (3.35)$$

olarak hesaplanabilir. W matrisinin ters simetrik olabilmesi için, ayrıca, ters köşegen

bileşenlerinin toplamlarının sıfıra eşit olması gerekmektedir. Bu ifade elde edilip, (3.32) ve (3.33) yardımı ile aşağıdaki eşitlik oluşturulabilir,

$$(k_1 k_3 - k_2^2) \left(\frac{c_2}{k_3} - \frac{c_1}{k_2} \right) + \frac{k_2' k_2 - k_1' k_3}{2k_2 \psi_r} p_r + \frac{k_3' k_2 - k_2' k_3}{2k_2 \psi_r} p_s = 0. \quad (3.36)$$

Hesaplanan bu son eşitlik bir diferansiyel denklem takımı olup her p_r ve p_s için sağlanmalıdır. Ayrıca bu diferansiyel denklemler içerisinde tasarım fonksiyonları olan K ve Ψ matrislerinin bileşenleri ile birlikte sistemin fiziksel yapısı ile alakalı terimler bulunmaktadır. Bu diferansiyel denklemler sağlandığında (3.28) eşitliği ile verilen aday Lyapunov fonksiyonunun türevi ifadesinin sağ tarafındaki ilk terim yok edilmiş olur.

Tasarımın diğer aşamasında aynı ifadenin ikinci terimi (Z vektörü) yok edilmelidir. Bu vektör (3.28) eşitliğinden aşağıdaki gibi hesaplanabilir,

$$Z = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\psi_r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\psi_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial q_r} \\ \frac{\partial \phi}{\partial q_s} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Z vektörünü sıfıra eşitlemek üzere, bir tasarım fonksiyonu olan ρ_2

$$\rho_2 = -\frac{1}{k_2} \left(\rho_1 k_1 + \frac{1}{\psi_r} \frac{\partial \phi}{\partial q_r} \right) \quad (3.38)$$

olarak (3.37) eşitliğinin ilk satırından hesaplanabilir. Bu ifade (3.37) eşitliğinin ikinci satırında kullanılarak,

$$-\frac{k_1 k_3 - k_2^2}{k_2} \rho_1 - \frac{k_3}{k_2 \psi_r} \frac{\partial \phi}{\partial q_r} + \frac{1}{\psi_s} \frac{\partial \phi}{\partial q_s} = 0 \quad (3.39)$$

kısmi diferansiyel denklemi elde edilebilir. Bu kısmi diferansiyel denklemin çözümü (3.28) eşitliği ile verilen aday Lyapunov fonksiyonunun türevi ifadesinin sağ tarafındaki ikinci terimi sıfıra götürür. Bununla birlikte, bu kısmi diferansiyel denklemin çözümü aday Lyapunov fonksiyonu (3.25) ifadesinin ikinci terimini oluşturmaktadır. Bu nedenle, çözümün sistemin götürülmek istendiği noktada (yerel) minimuma sahip olması gerekmektedir. (3.36) ve (3.39) eşitlikleri ile verilen diferansiyel denklemlerinin çözümleri $\psi_r(\bar{q}), \psi_s(\bar{q}) \neq 0$, $K(\bar{q}) > 0$ ve istenilen denge noktasında (yerel) minimuma sahip $\phi(\bar{q}) > 0$ kısıtları altında elde edildikten sonra, denetim girişi (3.8) ve (3.19) eşitliklerinden hesaplanabilir.

Teorem 3.1

$k_1(q_s)$, $k_2(q_s)$, $k_3(q_s)$, $\psi_r(\bar{q})$, $\psi_s(\bar{q})$ ve $\phi(\bar{q})$, (3.36) ve (3.39) ile verilen diferansiyel

denklemleri sağlaması durumunda; (3.8) ve (3.19) eşitlikleri ile verilen kontrol girişleri, dinamik denklemleri (3.1) ve (3.2) ile verilmiş olan YEMS'in sıfırda bulunan denge noktasının kararlılığını garantiler. Tahmini çekim bölgesi $\Omega_{\bar{c}}$ ise $\bar{c} = \sup\{V(\bar{q}, p) < c \mid -\beta < \Omega_c < \beta, \beta > 0\}$ ve $r = \{q_s \mid m_{12}(q_s) \neq 0\}$ olmak üzere $\Omega_c = \{(q, p) \in (r \times \mathbb{R}^3 \mid V(\bar{q}, p) < c)\}$ ifadesi ile tanımlanabilir.

İspat

Çekim bölgesinde, $K(q_s) > 0$ ve $\phi(\bar{q}) > 0$ şartları altında (3.25) eşitliği ile verilen Lyapunov fonksiyonunun pozitif tanımlı olacağı açıktır. $k > 0$ bir sabit olmak üzere, denetim girişi,

$$f_2 = -kF^T Kp \quad (3.40)$$

olarak seçilirse, (3.29) eşitliği ile verilen Lyapunov fonksiyonunun türevi ifadesi

$$\dot{V} = -kp^T K F F^T Kp \quad (3.41)$$

şeklinde elde edilebilir ki bu ifade negatif yarı tanımlıdır. Dolayısı ile $V(\bar{q}, p)$ artmayan bir fonksiyondur ve bu çekim bölgesinde \bar{q} ve p 'nin sınırlı olduklarını gösterir. Ayrıca q_r ve $\gamma(q_1)$ sınırlı olduklarından q ile verilen ifadede sınırlıdır.

3.4 Örnekler

3.4.1 Atalet Diskli Sarkaç

Atalet diskli sarkaç sisteminin dinamik denklemleri (2.5) ve (2.6) eşitliklerinde aşağıdaki gibi verilmişti,

$$(I_1 + I_2)\ddot{q}_1 + I_2\ddot{q}_2 - mgl \sin(q_1) = 0 \quad (3.42)$$

$$I_2\ddot{q}_1 + I_2\ddot{q}_2 = u. \quad (3.43)$$

Bu denklemler üzerinden yola çıkılacak olursa, (3.1) ve (3.2) eşitlikleri ile verilen genel sistem yapısına göre,

$$m_{11} = I_1 + I_2 \quad (3.44)$$

$$m_{12} = m_{21} = m_{22} = I_2 \quad (3.45)$$

$$d_{11} = d_{12} = d_{21} = d_{22} = 0 \quad (3.46)$$

$$g_1 = -mgl \sin(q_1) \quad (3.47)$$

$$g_2 = 0 \quad (3.48)$$

ifadeleri kolaylıkla elde edilebilir. Ayrıca ilk olarak (3.12) eşitliği ile tanımlanmış olan $\gamma'(q_1)$

$$\gamma'(q_1) = \frac{I_1 + I_2}{I_2} \quad (3.49)$$

ve (3.14) eşitliğinden de

$$\gamma(q_1) = \frac{I_1 + I_2}{I_2} q_1 \quad (3.50)$$

şeklinde hesaplanabilir. Bu durumda (3.22) ve (3.23) ile verilmiş olan c_1 ve c_2 ifadeleri

$$c_1 = \frac{\dot{\psi}_r(\bar{q})}{\psi_r(\bar{q})} \quad (3.51)$$

$$c_2 = 0 \quad (3.52)$$

olarak elde edilir. K matrisi sabit olmak üzere, (3.36) eşitliğinde verilen diferansiyel denklem ise sadeleştirilip,

$$\frac{\dot{\psi}_r(\bar{q})}{k_2 \psi_r(\bar{q})} = 0 \quad (3.53)$$

haline getirilebilir. Burada açıkça görülmektedir ki bu diferansiyel denklemin sağlanabilmesi için $\psi_r(\bar{q})$ sabit bir değer olmalıdır. Bu noktada önemli bir çıktı da $\psi_s(\bar{q})$ tasarım parametresinin henüz kullanılmamış olmasıdır ki, gerekli görüldüğünde bu ifade, aşağıda düzenlenmiş hali verilen, (3.39) eşitliğindeki kısmi diferansiyel denklemin çözümü için serbestçe kullanılacaktır. Öncelikle (3.24) ve (3.47) eşitliklerinden

$$\rho_1 = \frac{mgl \sin(q_s) \psi_r}{I_2} \quad (3.54)$$

şeklinde hesaplanabilir. Bu eşitlik (3.39) ile verilen kısmi diferansiyel denklemde kullanılarak,

$$-\frac{mgl(k_1 k_3 - k_2^2) \sin(q_s) \psi_r}{k_2 I_2} - \frac{k_3}{k_2 \psi_r} \frac{\partial \phi}{\partial q_r} + \frac{1}{\psi_s} \frac{\partial \phi}{\partial q_s} = 0 \quad (3.55)$$

kısmi diferansiyel denklemi oluşturulabilir ki, $\psi_r = \psi_s = 1$ ve K matrisinin kazançları sabit seçilerek bu diferansiyel denklemin bir çözümü

$$\phi(\bar{q}) = d_1 - \frac{mgl(k_1k_3 - k_2^2) \cos(q_s)}{k_2I_2} + d_2\left(\frac{k_2}{k_3}(q_r - q_r^*) + q_s\right)^2 \quad (3.56)$$

olarak hesaplanabilir. Burada q_r^* diskin açısız olarak konumlandırılmak istendiği noktayı göstermektedir ve d_1 ile d_2 integrasyon sabitleri olup,

$$d_1 = \frac{mgl(k_1k_3 - k_2^2)}{k_2I_2} \quad (3.57)$$

şeklinde seçilirse (3.56) eşitliğinde verilmiş olan sonuç aşağıdaki gibi düzenlenebilir,

$$\phi(\bar{q}) = \frac{mgl(k_1k_3 - k_2^2)}{k_2I_2}(1 - \cos(q_s)) + d_2\left(\frac{k_2}{k_3}(q_r - q_r^*) + q_s\right)^2. \quad (3.58)$$

Elde edilen bu ifade, $d_2 > 0$ ve $k_2 > 0$ olmak üzere, \bar{q} vektörüne göre pozitif tanımlı olup $q = [0, q_r^*]^T$ denge noktasında küresel bir minimuma sahiptir. Sonuç olarak elde edilen denetim girişi ise (3.8) ve (3.19) eşitlikleri kullanılarak

$$u = -I_1f_2 + \left(\frac{I_1k_1}{I_2k_2} + 1\right) mgl \sin(q_1) + \frac{2d_2I_1}{k_3} \left(\frac{k_2}{k_3}(q_r - q_r^*) + q_1\right) \quad (3.59)$$

olarak hesaplanabilir.

Teorem 3.2

(3.42) ve (3.43) eşitlikleri ile verilmiş olan atalet diskli sarkaç sistemi için tasarlanmış olan ve (3.59) ile verilen denetim girişi, çekim bölgesi q_2 'nin bazı başlangıç değerleri haricinde tüm durum uzayı için $q = [0, q_r^*]^T$ denge noktasında sistemi asimptotik kararlı kılar.

İspat 3.2

Denetim girişlerinden olan f_2 , k pozitif bir sabit olmak üzere,

$$f_2 = -kF^TKp = -k(k_2\dot{q}_r + k_3\dot{q}_s) \quad (3.60)$$

şeklinde seçilsin. Eşitlik (3.12)'ye göre $\dot{q}_r = \frac{I_1+I_2}{I_2}\dot{q}_1 + \dot{q}_2$ eşitliği göz önünde bulundurularak (3.41) ile verilen Lyapunov fonksiyonunun türevi tekrar hesaplanırsa

$$\dot{V} = -k\left(\frac{k_2(I_1 + I_2)}{I_2} + k_3\right)\dot{q}_1 + k_2\dot{q}_2^2 \quad (3.61)$$

elde edilir ki, Lyapunov fonksiyonunun türevi negatif yarı tanımlı olur. Bu da Lyapunov fonksiyonunun artmayan bir fonksiyon olduğunu, \bar{q} ile p vektörlerinin ve sonucunda da q

vektörünün bileşenlerinin sınırlı olduğunu garanti eder. $\Omega_{\bar{c}} \in (\mathbb{R}^4)$ kümesini aşağıdaki gibi tanımlayalım,

$$\bar{c} = \sup\{c > 0 : V(q, p) < c \mid -\beta < \Omega_c < \beta, \beta > 0\} \quad (3.62)$$

olmak üzere

$$\Omega_c = \{(q, p) \in (\mathbb{R}^4 \mid V(q, p) < c)\}. \quad (3.63)$$

Asimptotik kararlılığı göstermek üzere, bu küme içerisindeki en büyük değişmez kümenin $q = [0, q_r^*]^T$ olduğu gösterilmelidir.

Tekrar (3.61) eşitliğine dönecek olursak; bu fonksiyon ancak $\dot{q}_2 = -\frac{1}{k_2} \left(\frac{k_2(I_1 + I_2)}{I_2} + k_3 \right) \dot{q}_1$ sağlandığı zaman sifıra eşit olur.

Bu durumda, $\frac{1}{k_2} \left(\frac{k_2(I_1 + I_2)}{I_2} + k_3 \right) > 0$ olduğu unutulmadan,

$$\dot{q}_2 = -\frac{1}{k_2} \left(\frac{k_2(I_1 + I_2)}{I_2} + k_3 \right) \dot{q}_1 \quad (3.64)$$

sağlandığını varsayalım. Bu durumda, χ sabit bir sayı olmak üzere,

$$\ddot{q}_2 = -\frac{1}{k_2} \left(\frac{k_2(I_1 + I_2)}{I_2} + k_3 \right) \ddot{q}_1 \quad (3.65)$$

ve

$$q_2 + \chi = -\frac{1}{k_2} \left(\frac{k_2(I_1 + I_2)}{I_2} + k_3 \right) q_1 \quad (3.66)$$

eşitlikleri doğrudur. (3.65) eşitliğinden faydalanarak (3.42) ve (3.43) eşitlikleri ile verilen sistem dinamikleri tekrar yazılırsa,

$$\frac{k_3}{k_2} \ddot{q}_1 + mgl \sin(q_1) = 0 \quad (3.67)$$

$$\left(I_1 + \frac{I_2 k_3}{k_2} \right) \ddot{q}_1 + u = 0 \quad (3.68)$$

elde edilir. İlk eşitlikten \ddot{q}_1 ifadesi çekilip ikinci eşitlikte yerine konur ve (3.59) ile verilen denetim girişi de yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, (3.64) eşitliğinin sağlanması durumunda

$$\left(\frac{I_1 k_2 + I_2 k_3}{k_3} + \frac{I_1 k_1 + I_2 k_2}{I_2 k_2} \right) mgl \sin(q_1) + \chi = 0 \quad (3.69)$$

eşitliği sağlanmalıdır. Bu ifadenin ilk temrindeki parantez içerisinde verilen ifade her zaman pozitif olacağından eşitliğin sağlanabilmesi için $\sin(q_1)$ ifadesinin sabit olması gerektiği görülmektedir. Buda (3.64) eşitliğinin yalnız $\dot{q}_1 = 0$ olması durumunda sağlanabileceğini göstermektedir ki bu sonuç $\dot{q}_2 = 0$ olması gerektiğini göstermektedir. Başka bir deyişle sistem denge noktasındadır.

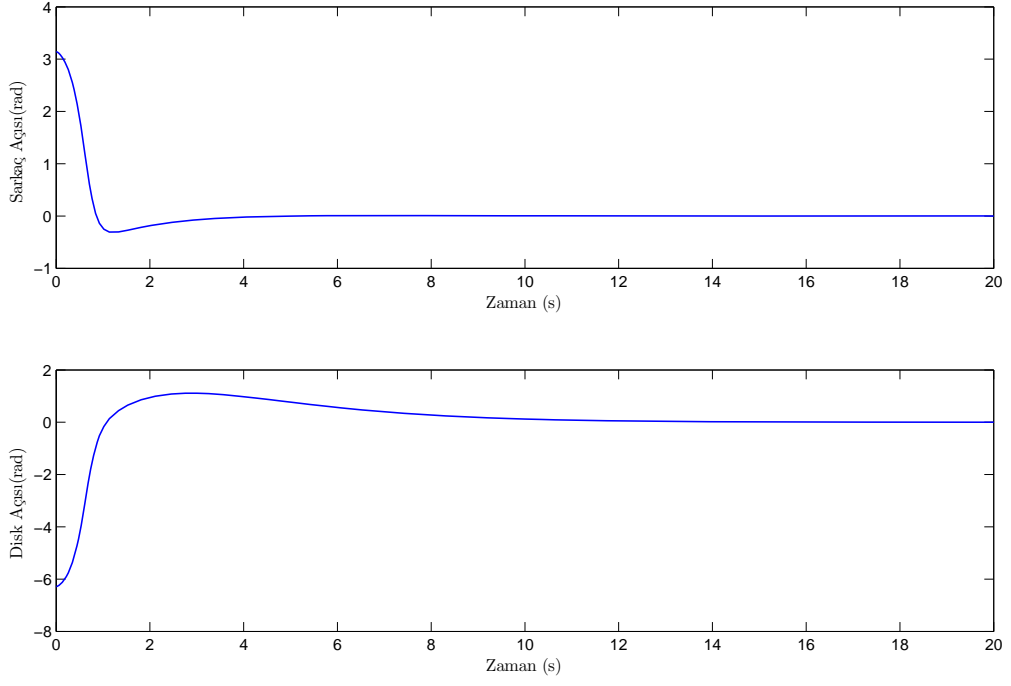
Atalet diskli sarkaç sistemi $q = [0 \quad *]^T$ ve $q = [\pi \quad *]^T$ olduğunda dengededir. Asimptotik kararlılığı göstermek üzere $q = [0 \quad *]^T$ durumunun kapalı çevrim sisteminin tek denge noktası olduğu gösterilmelidir. $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ ve $q_1 = \pi$ olduğunda sistem dinamikleri (3.42), (3.43), ve denetim girişinden (3.59),

$$q_2 = -\frac{k_3}{k_2} \left(\frac{k_2(I_1 + I_2) + k_3 I_2}{k_3 I_2} \right) \pi + q_r^* \quad (3.70)$$

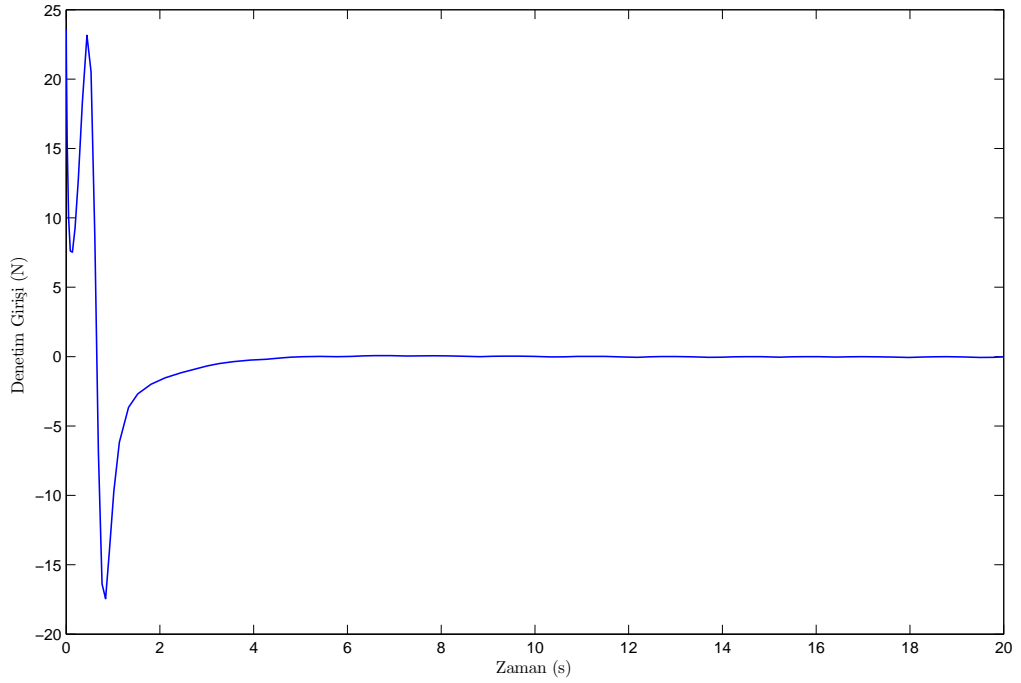
şartının sağlanması gerektiği görülebilir. Bu gerçek doğrultusunda, sistemin durağan olduğu koşullardan bahsettiğimiz için, herhangi bir $q_2(0) \in \mathbb{R}$ için (yukarıdaki eşitliği sağlayan bazı değerler dışında), $q_1 = \pi$ tasarlanan kapalı çevrim sistem için bir denge noktası olamaz. Dolayısıyla sistemin tek denge noktası $q = [0 \quad *]^T$ olarak karşımıza çıkmaktadır ve sistem bu noktaya asimptotik olarak yakınsar.

Benzetim Çalışmaları

Tasarlanan denetleyicinin çalışırılığını test etmek üzere, kapalı çevrim atalet diskli sarkaç sistemi üzerinde benzetim çalışmaları yapılmıştır. Sistem dinamiğindeki değişkenler $I_1 = 1$ ve $I_2 = 2$ olarak alınmıştır. Tasarım parametreleri $k = d_2 = 10$ olarak seçilmiş ve pozitif tanımlı ve sabit K matrisinin bileşenleri $k_1 = 10$, $k_2 = 1$ ve $k_3 = 2$ olarak ayarlanmıştır. $q_r^* = 0$ olarak seçilmiş ve başlangıçta sistem $(q, \dot{q})(0) = [\pi \quad -2\pi \quad 0 \quad 0]^T$ noktasından başlatılmıştır. Sarkaç açısı ve disk açısının zamana göre değişimleri Şekil 3.1'de, denetim girişinin zamana göre değişimi ise Şekil 3.2'de verilmiştir. Görüldüğü üzere, kararlı denge noktasından başlatılan sistem oldukça kısa bir sürede kararsız denge noktasına disk için amaçlanan açı ile birlikte ulaşmıştır.



Şekil 3.1 Sarkaç ve disk açılarının zamana göre değişimi



Şekil 3.2 Denetim girişinin zamana göre değişimi

3.4.2 Ters Sarkaç

Ters sarkaç sisteminin dinamik denklemleri (2.8) ve (2.9) eşitliklerinde aşağıdaki gibi verilmişti,

$$\frac{1}{2}m_1l^2\ddot{q}_1 - \frac{1}{2}m_1l \cos(q_1)\ddot{q}_2 - \frac{1}{2}m_1lg \sin(q_1) = 0 \quad (3.71)$$

$$-\frac{1}{2}m_1l \cos(q_1)\ddot{q}_1 + (m_1 + m_2)\ddot{q}_2 + \frac{1}{2}m_1l \sin(q_1)\dot{q}_1^2 = u. \quad (3.72)$$

Bu denklemler üzerinden yola çıkılacak olursa, (3.1) ve (3.2) eşitlikleri ile verilen genel

sistem yapısına göre $a = \frac{1}{2}m_1l^2$, $b = \frac{1}{2}m_1l$ ve $c = m_1 + m_2$ pozitif sabitler olmak üzere,

$$m_{11} = a, \quad (3.73)$$

$$m_{12} = m_{21} = -b \cos(q_1), \quad (3.74)$$

$$m_{22} = c, \quad (3.75)$$

$$d_{11} = d_{12} = d_{22} = 0, \quad (3.76)$$

$$d_{21} = b \sin(q_1)\dot{q}_1, \quad (3.77)$$

$$g_1 = -bg \sin(q_1), \quad (3.78)$$

$$g_2 = 0 \quad (3.79)$$

ifadeleri kolaylıkla elde edilebilir. Ayrıca ilk olarak (3.12) eşitliği ile tanımlanmış olan $\gamma'(q_1)$

$$\gamma'(q_1) = -\frac{a}{b \cos(q_1)} \quad (3.80)$$

ve (3.14) eşitliğinden de

$$\gamma(q_1) = -\frac{2a \operatorname{arctanh}(\tan(\frac{q_1}{2}))}{b} \quad (3.81)$$

şeklinde hesaplanabilir. Bu durumda (3.22) ve (3.23) ile verilmiş olan c_1 ve c_2 ifadeleri

$$c_1 = \frac{\dot{\psi}_r(\bar{q})}{\psi_r(\bar{q})} \quad (3.82)$$

$$c_2 = \frac{a \sin(q_s)\psi_r\dot{q}_s}{b \cos^2(q_s)\psi_s}. \quad (3.83)$$

olarak elde edilir. K matrisi sabit olmak üzere, (3.36) eşitliğinde verilen diferansiyel denklem ise sadeleştirilip,

$$(k_1 k_3 - k_2^2) \left(\frac{a \sin(q_1) \psi_r \dot{q}_s}{b k_3 \cos^2(q_s) \psi_s} - \frac{\dot{\psi}_r(\bar{q})}{k_2 \psi_r(\bar{q})} \right) = 0 \quad (3.84)$$

haline getirilebilir. Bu diferansiyel denklem ψ_r ve ψ_s olmak üzere iki tasarım fonksiyonu içermektedir ve bu fonksiyonlardan bir tanesi serbestçe seçilerek diğeri diferansiyel denklemin çözümünden elde edilebilir.

$$\psi_s = \frac{1}{\cos^2(q_s)} \quad (3.85)$$

olarak seçilirse (3.84) eşitliği ile verilen diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilebilir,

$$\frac{\dot{\psi}_r}{k_2 \psi_r} + \frac{a \sin(q_s) \psi_r \dot{q}_s}{b k_3} = 0. \quad (3.86)$$

Bu diferansiyel denklemin bir çözümü,

$$\psi_r = -\frac{b k_3}{a k_2 \cos(q_s)} \quad (3.87)$$

olarak elde edilebilir. Bu ifade (3.85) ile birlikte W matrisinin ters simetrik olacağını garanti eder.

(3.39) ile verilen kısmi diferansiyel denklemi oluşturmak üzere öncelikle (3.24) ve (3.78) eşitliklerinden

$$\rho_1 = -\frac{g \sin(q_s) \psi_r}{\cos(q_s)} \quad (3.88)$$

şeklinde hesaplanabilir. Bu eşitlik (3.39) ile verilen kısmi diferansiyel denklemde kullanılarak,

$$\frac{g(k_1 k_3 - k_2^2) \sin(q_s) \psi_r}{k_2 \cos(q_s)} - \frac{k_3}{k_2 \psi_r} \frac{\partial \phi}{\partial q_r} + \frac{1}{\psi_s} \frac{\partial \phi}{\partial q_s} = 0 \quad (3.89)$$

kısmi diferansiyel denklemi oluşturulabilir ki, bu diferansiyel denklemin bir çözümü

$$\phi(\bar{q}) = d_1 + \frac{b g (k_1 k_3 - k_2^2)}{3 a k_3 \cos^3(q_s)} + d_2 \left(q_r - q_r^* - \frac{2 a k_3^2 \operatorname{arctanh}(\tan(\frac{q_s}{2}))}{b} \right)^2 \quad (3.90)$$

olarak hesaplanabilir. Burada q_r^* aracın konumlandırılmak istendiği noktayı göstermektedir ve d_1 ile d_2 integrasyon sabitleri olup,

$$d_1 = -\frac{bgk_3(k_1k_3 - k_2^2)}{3ak_2^2} \quad (3.91)$$

şeklinde seçilirse (3.90) eşitliğinde verilmiş olan sonuç aşağıdaki gibi düzenlenebilir,

$$\phi(\bar{q}) = \frac{bgk_3(k_1k_3 - k_2^2)}{3ak_2^2} \left(\frac{1}{\cos^3(q_s)} - 1 \right) + d_2 \left(q_r - q_r^* - \frac{2a \operatorname{arctanh}(\tan(\frac{q_s}{2}))}{b} \right)^2. \quad (3.92)$$

Elde edilen bu ifade, $d_2 > 0$ olmak üzere, \bar{q} vektörüne göre çekim bölgesinde pozitif tanımlı olup $q = [0, q_r^*]^T$ denge noktasında yerel bir minimuma sahiptir. Sonuç olarak elde edilen denetim girişi ise

$$c_3 = -\frac{k_1}{k_2} \tan(q_s) \dot{q}_s \quad (3.93)$$

$$c_4 = -\tan(q_s) \dot{q}_s \quad (3.94)$$

$$g_2 = -\frac{k_1k_3bg \sin(q_s)}{ak_2^2 \cos^2(q_s)} + \frac{2d_2a \cos(q_s)}{bk_3} \left(q_r - q_r^* - \frac{2a \operatorname{arctanh}(\tan(\frac{q_s}{2}))}{b} \right) \quad (3.95)$$

olmak üzere, (3.8) ve (3.19) eşitlikleri kullanılarak

$$u = b \sin(q_s) \dot{q}_s^2 - \frac{cg \sin(q_s)}{\cos(q_s)} + \left(-b \cos(q_s) + \frac{a}{\cos(q_s)} \right) \left(\cos^2(q_s) \left(-\frac{2 \sin(q_s)}{\cos^3(q_s)} \dot{q}_s^2 + c_3 p_r + c_4 p_s + g_2 + u_2 \right) \right) \quad (3.96)$$

olarak hesaplanabilir.

Teorem 3.3

(3.71) ve (3.72) eşitlikleri ile verilmiş olan ters sarkaç sistemi için tasarlanmış olan ve (3.96) ile verilen denetim girişi, çekim bölgesi $(q, p) \in ((-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R}^3)$ kümesini içerecek biçimde, $q = [0, q_r^*]^T$ denge noktasında sistemi asimptotik kararlı kılar.

İspat 3.3

Denetim girişlerinden olan f_2, k pozitif bir sabit olmak üzere,

$$f_2 = -kF^TKp = -k \left(-\frac{bk_3}{a \cos(q_s)} \dot{q}_r + \frac{k_3}{\cos^2(q_s)} \dot{q}_s \right) \quad (3.97)$$

şeklinde seçilsin. Eşitlik (3.12)'ye göre $\dot{q}_r = -\frac{a}{b \cos(q_1)} \dot{q}_1 + \dot{q}_2$ eşitliği göz önünde bulundurularak (3.41) ile verilen Lyapunov fonksiyonunun türevi tekrar hesaplanırsa

$$\dot{V} = -k \left(\frac{2k_3}{\cos^2(q_1)} \dot{q}_1 - \frac{bk_3}{a \cos(q_1)} \dot{q}_2 \right)^2 \quad (3.98)$$

elde edilir ki, Lyapunov fonksiyonunun türevi negatif yarı tanımlı olur. Bu da Lyapunov fonksiyonunun artmayan bir fonksiyon olduğunu, \bar{q} ile p vektörlerinin ve sonucunda da q vektörünün bileşenlerinin sınırlı olduğunu garanti eder. $\Omega_{\bar{c}} \in ((-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R}^3)$ kümesini aşağıdaki gibi tanımlayalım,

$$\bar{c} = \sup\{c > 0 : V(q, p) < c \mid -\beta < \Omega_c < \beta, \beta > 0\} \quad (3.99)$$

olmak üzere

$$\Omega_c = \{(q, p) \in ((-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R}^3 \mid V(q, p) < c)\}. \quad (3.100)$$

Asimptotik kararlılığı göstermek üzere, bu küme içerisindeki en büyük değişmez kümenin $q = [0, q_r^*]^T$ olduğu gösterilmelidir.

Tekrar (3.98) eşitliğine dönecek olursak; bu fonksiyon ancak $\dot{q}_2 = \frac{2a}{b \cos(q_1)} \dot{q}_1$ sağlandığı zaman sıfıra eşit olur.

$$\dot{q}_2 = \frac{2a}{b \cos(q_1)} \dot{q}_1 \quad (3.101)$$

ifadesinin sağlandığını varsayalım. Bu durumda, χ sabit bir sayı olmak üzere,

$$\ddot{q}_2 = \frac{2a}{b \cos(q_1)} \ddot{q}_1 + \frac{2a \sin(q_1)}{b \cos^2(q_1)} \dot{q}_1^2 \quad (3.102)$$

ve

$$q_2 + \chi = \frac{4a \operatorname{arctanh}(\tan(\frac{q_1}{2}))}{b} \quad (3.103)$$

eşitlikleri doğrudur. (3.102) eşitliğinden faydalanarak (3.71) ve (3.72) eşitlikleri ile verilen kapalı çevrim sistem dinamikleri tekrar yazılırsa,

$$a\ddot{q}_1 + 2a \tan(q_1) \dot{q}_1^2 + bg \sin(q_1) = 0 \quad (3.104)$$

$$\frac{2ac - b^2 \cos^2(q_1)}{b \cos(q_1)} \ddot{q}_1 + \left(\frac{2ac}{b \cos^2(q_1)} + b \right) \sin(q_1) \dot{q}_1^2 = u \quad (3.105)$$

elde edilir. İlk eşitlikten \ddot{q}_1 ifadesi çekilip ikinci eşitlikte yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, (3.101) eşitliğinin sağlanması durumunda

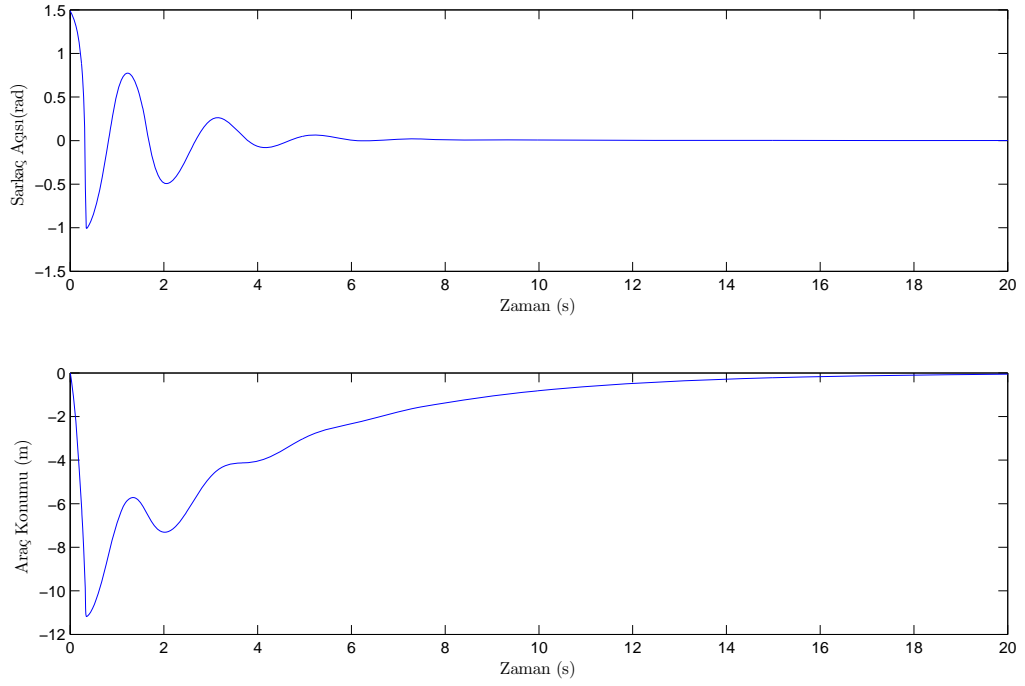
$$\frac{2ac - b^2 \cos^2(q_1)}{b \cos(q_1)} (-2a \tan(q_1) \dot{q}_1^2 - bg \sin(q_1)) + \left(\frac{2ac}{b \cos^2(q_1)} + b \right) \sin(q_1) \dot{q}_1^2 = u \quad (3.106)$$

eşitliğinin sağlanması gerektiği görülebilir. (3.96) ile verilen denetim girişi de yerine yazıldığında, atalet diskli sarkaç sistemi için yapılan analize benzer olarak, trigonometrik ifadelerin sabit olması gerektiği görülebilir. Buda (3.101) eşitliğinin yalnız $\dot{q}_1 = 0$ olması durumunda sağlanabileceğini göstermektedir ki bu sonuç $\dot{q}_2 = 0$ olması gerektiğini göstermektedir. Başka bir deyişle sistem denge noktasındadır.

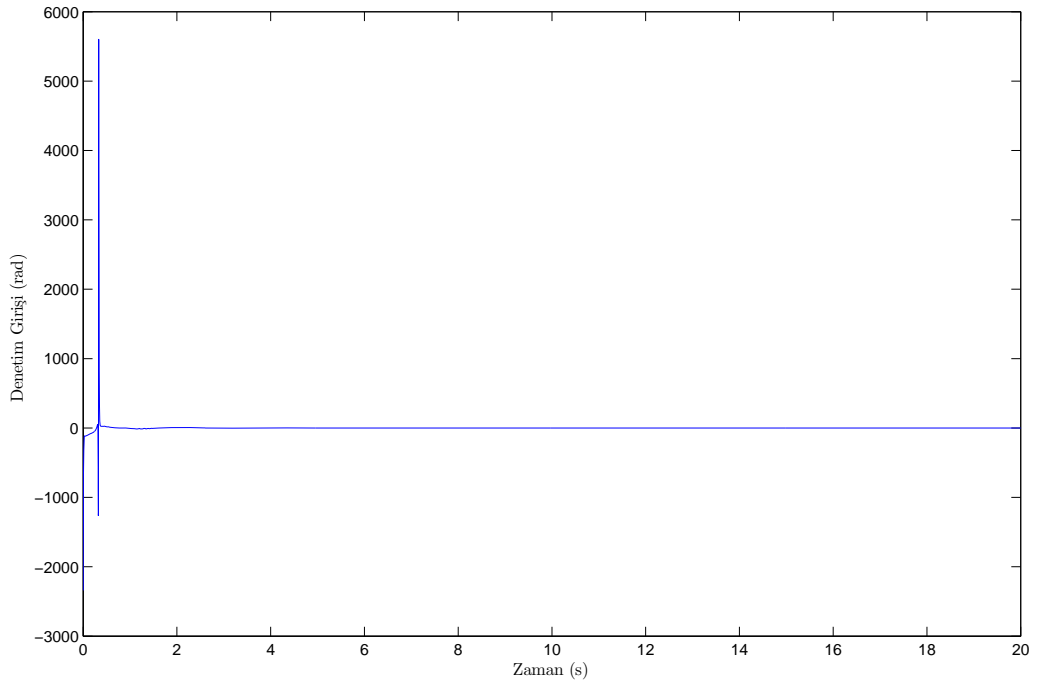
Ters sarkaç sisteminin $q_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ aralığındaki tek denge noktası $q = [0 \quad q_r^*]^T$ noktasıdır. Dolayısı ile sistem bu noktaya asimptotik olarak yakınsar.

Benzetim Çalışmaları

Tasarlanan denetleyicinin çalışırılığını test etmek üzere, kapalı çevrim ters sarkaç sistemi üzerinde benzetim çalışmaları yapılmıştır. Basitlik açısından sistem dinamiğindeki değişkenler $a = b = c = 1$ olarak alınmıştır. Tasarım parametreleri $k = d_2 = 100$ olarak seçilmiş ve pozitif tanımlı ve sabit K matrisinin bileşenleri $k_1 = 10$, $k_2 = 1$ ve $k_3 = 2$ olarak ayarlanmıştır. $q_r^* = 0$ olarak seçilmiş ve başlangıçta sistem sarkacın yataya çok yakın bir noktadan olmak üzere $(q, \dot{q})(0) = [\pi/2 - \pi/36 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ noktasından başlatılmıştır. Sarkaç açısı ve araç konumunun zamana göre değişimleri Şekil 3.3'de, denetim girişinin zamana göre değişimi ise Şekil 3.4'de verilmiştir. Gerçekleştirilen benzetim çalışması sonucu, başlangıçta sarkacın neredeyse yatay konumda olduğu da hesaba katıldığında, uygulanan denetim sinyalinin sistemi istenilen araç konumu ile beraber kararsız denge noktasına hızlıca ulaştırdığı söylenebilir. Bununla birlikte, denetim girişi başlangıçta çok büyük değerler almıştır. Bunun sebebi ise benzetim çalışmaları için kullanılan sisteme ait parametrelerin normalize edilmiş olmasıdır.



Şekil 3.3 Sarkaç açısı ve araç konumunun zamana göre değişimi



Şekil 3.4 Ters sarkaç sistemi için denetim girişinin zamana göre değişimi

3.4.3 Döner Sarkaç

Döner sarkaç sisteminin dinamik denklemleri (2.11) ve (2.12) eşitliklerinde aşağıdaki gibi verilmiştir,

$$\theta_1 \ddot{q}_1 + \theta_2 \cos(q_1) \ddot{q}_2 - \theta_3 \sin(q_1) \cos(q_1) \dot{q}_2^2 - \theta_4 g \sin(q_1) = 0 \quad (3.107)$$

$$\theta_2 \cos(q_1) \ddot{q}_1 + (\theta_5 + \theta_3 \sin^2(q_1)) \ddot{q}_2 - \theta_2 \sin(q_1) \dot{q}_1^2 + 2\theta_3 \sin(q_1) \cos(q_1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 = u. \quad (3.108)$$

Bu denklemler üzerinden yola çıkılacak olursa, (3.1) ve (3.2) eşitlikleri ile verilen genel sistem yapısına göre,

$$m_{11} = \theta_1, \quad (3.109)$$

$$m_{12} = m_{21} = \theta_2 \cos(q_1), \quad (3.110)$$

$$m_{22} = \theta_5 + \theta_3 \sin^2(q_1), \quad (3.111)$$

$$d_{11} = 0, \quad (3.112)$$

$$d_{12} = -\theta_3 \sin(q_1) \cos(q_1) \dot{q}_2, \quad (3.113)$$

$$d_{21} = -\theta_2 \sin(q_1) \dot{q}_1 + \theta_3 \sin(q_1) \cos(q_1) \dot{q}_2, \quad (3.114)$$

$$d_{22} = \theta_3 \sin(q_1) \cos(q_1) \dot{q}_1, \quad (3.115)$$

$$g_1 = -\theta_4 g \sin(q_1), \quad (3.116)$$

$$g_2 = 0 \quad (3.117)$$

ifadeleri kolaylıkla elde edilebilir. Ayrıca ilk olarak (3.12) eşitliği ile tanımlanmış olan $\gamma'(q_1)$

$$\gamma'(q_1) = \frac{\theta_1}{\theta_2 \cos(q_1)} \quad (3.118)$$

ve (3.14) eşitliğinden de

$$\gamma(q_1) = \frac{2\theta_1 \operatorname{arctanh}(\tan(\frac{q_1}{2}))}{\theta_2} \quad (3.119)$$

şeklinde hesaplanabilir. Bu durumda (3.22) ve (3.23) ile verilmiş olan c_1 ve c_2 ifadeleri

$$c_1 = \frac{\theta_3 \sin(q_s)}{\theta_2 \psi_r} p_r - \frac{\theta_1 \theta_3 \sin(q_s)}{\theta_2^2 \cos(q_s) \psi_s} p_s + \frac{\psi_r'}{2\psi_r \psi_s} p_s \quad (3.120)$$

$$c_2 = -\frac{\theta_1 \theta_3 \sin(q_s)}{\theta_2^2 \cos(q_s) \psi_s} p_r + \frac{\theta_1^2 \theta_3 \sin(q_s) \psi_r}{\theta_2^3 \cos^2(q_s) \psi_s^2} p_s + \frac{\theta_1 \sin(q_s) \psi_r}{\theta_2 \cos^2(q_s) \psi_s^2} p_s + \frac{\psi_r'}{2 \psi_r \psi_s} p_r \quad (3.121)$$

olarak elde edilir. (3.36) eşitliğinde verilen diferansiyel denklem ise sadeleştirilip,

$$\begin{aligned} & \left[(k_1 k_3 - k_2^2) \left(-\frac{\theta_3 \sin(q_s)}{\theta_2 k_2 \psi_r} - \frac{\theta_1 \theta_3 \sin(q_s)}{\theta_2^2 k_3 \cos(q_s) \psi_s} + \frac{\psi_r'}{2 k_3 \psi_r \psi_s} \right) + \frac{k_2' k_2 - k_1' k_3}{2 k_2 \psi_r} \right] p_r \\ & + \left[(k_1 k_3 - k_2^2) \left(\frac{\theta_1 \theta_3 \sin(q_s)}{\theta_2^2 k_2 \cos(q_s) \psi_s} + \frac{\theta_1 \sin(q_s) \psi_r}{\theta_2 k_3 \cos^2(q_s) \psi_s^2} + \frac{\theta_1^2 \theta_3 \sin(q_s) \psi_r}{\theta_2^3 k_3 \cos^2(q_s) \psi_s^2} - \frac{\psi_r'}{2 k_2 \psi_r \psi_s} \right) \right. \\ & \left. + \frac{k_3' k_2 - k_2' k_3}{2 k_2 \psi_r} \right] p_s = 0 \end{aligned} \quad (3.122)$$

haline getirilebilir. Bu diferansiyel denklem her p_r ve p_s değeri için sağlanmalıdır. Bunun anlamı (3.122) eşitliğinde, köşeli parantezler içerisindeki her iki teriminde sıfıra eşit olması gerektiğidir. Dolayısıyla, k_1 , k_2 , k_3 , ψ_r ve ψ_s serbest seçilebilecek fonksiyonlar olan iki farklı diferansiyel denklem çözümlidir. $z_1 \neq 0$ ve $a > 0$ olmak üzere; $\psi_s = \frac{z_1 \psi_r}{\cos(q_s)}$, $k_1 = a + \cos^2(q_s)$ ve $k_2 = k_3 = \cos^2(q_s)$ olacak şekilde seçimler yapılırsa bu iki diferansiyel denklem aşağıdaki hali alır,

$$\alpha_1 \sin(q_s) - \frac{\cos(q_s) \psi_r'}{2 z_1 \psi_r} = 0 \quad (3.123)$$

$$\alpha_2 \sin(q_s) + \frac{\cos(q_s) \psi_r'}{2 z_1 \psi_r} = 0. \quad (3.124)$$

Burada,

$$\alpha_1 = \frac{\theta_1 \theta_3}{z_1 \theta_2^2} + \frac{\theta_1}{z_1^2 \theta_2} + \frac{\theta_1^2 \theta_3}{z_1^2 \theta_2^3}, \quad (3.125)$$

$$\alpha_2 = -\frac{\theta_3}{\theta_2} - \frac{\theta_1 \theta_3}{z_1 \theta_2^2} \quad (3.126)$$

şeklinde tanımlanabilir. Eşitlik (3.123) ve (3.124) ile verilen denklemler taraf tarafa toplanıp sadeleştirilirse,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \quad (3.127)$$

eşitliği elde edilir. (3.125) ve (3.126) eşitliklerinde faydalanılarak, (3.127) eşitliğinin sağlanabilmesi için,

$$z_1 = \sqrt{\frac{\theta_1 \theta_2^2 + \theta_1^2 \theta_3}{\theta_2^2 \theta_3}} \quad (3.128)$$

olarak oluşturulabilir. Bu noktada $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 < 0$ ve $z_1 > 0$ olacağı gözden kaçırılmamalıdır.

Elde edilen tüm bu sonuçlar (3.123) eşitliğinde yerine yazılarak aşağıdaki diferansiyel denklem oluşturulabilir.

$$2z_1 \alpha_1 \sin(q_s) - \frac{\cos(q_s) \psi_r'}{\psi_r} = 0. \quad (3.129)$$

Bu diferansiyel denklemin bir çözümü,

$$\psi_r = d_1 [\cos(q_s)]^{-2z_1 \alpha_1} \quad (3.130)$$

olarak elde edilebilir. Burada d_1 integrasyon sabitini göstermektedir. Bu ifade daha önceki seçimler ile birlikte W matrisinin ters simetrik olacağını garanti eder.

(3.39) ile verilen kısmi diferansiyel denklemi oluşturmak üzere öncelikle (3.24) ve (3.116) eşitliklerinden

$$\rho_1 = \frac{\theta_4 g \sin(q_s) \psi_r}{\theta_2 \cos(q_s)} \quad (3.131)$$

şeklinde hesaplanabilir. Bu eşitlik (3.39) ile verilen kısmi diferansiyel denklemde kullanılarak,

$$-\frac{k_1 k_3 - k_2^2 \psi_r \theta_4 g \sin(q_s)}{k_2 \theta_2 \cos(q_s)} - \frac{1}{\psi_r} \frac{\partial \phi}{\partial q_r} + \frac{1}{\psi_s} \frac{\partial \phi}{\partial q_s} = 0 \quad (3.132)$$

kısmi diferansiyel denklemi oluşturulabilir ki, bu diferansiyel denklemin bir çözümü

$$\phi = d_2 - \frac{ad_1^2 z_1 \theta_4 g}{\theta_2 (4z_1 \alpha_1 + 4)} [\cos(q_s)]^{-4z_1 \alpha_1 - 3} + d_3 \left(\frac{1}{z_1} (q_r - q_r^*) + 2 \operatorname{arctanh} \left(\tan \left(\frac{q_s}{2} \right) \right) \right)^2 \quad (3.133)$$

olarak hesaplanabilir. Burada q_r^* kol açısı için istenilen noktayı göstermektedir ve d_2 ile d_3 integrasyon sabitleri olup,

$$d_2 = -\frac{ad_1^2 z_1 \theta_4 g}{\theta_2 (4z_1 \alpha_1 + 4)} \quad (3.134)$$

şeklinde seçilirse (3.133) eşitliğinde verilmiş olan sonuç aşağıdaki gibi düzenlenebilir,

$$\phi(\bar{q}) = \frac{ad_1^2 z_1 \theta_4 g}{\theta_2 (4z_1 \alpha_1 + 4)} \left([\cos(q_s)]^{-4z_1 \alpha_1 - 3} - 1 \right)$$

$$+d_3 \left(\frac{1}{z_1} (q_r - q_r^*) + 2 \operatorname{arctanh} \left(\tan \left(\frac{q_s}{2} \right) \right) \right)^2. \quad (3.135)$$

Elde edilen bu ifade, $d_3 > 0$ olmak üzere, \bar{q} vektörüne göre çekim bölgesinde pozitif tanımlı olup $q = [0, q_r^*]^T$ denge noktasında yerel bir minimuma sahiptir. Sonuç olarak elde edilen denetim girişi ise

$$c_3 = -\frac{k_1}{k_2} \left(\frac{\theta_3 \sin(q_s)}{\theta_2 \psi_r} p_r - \frac{\theta_1 \theta_3 \sin(q_s)}{\theta_2^2 \cos(q_s) \psi_s} p_s + \frac{\psi_r'}{2 \psi_r \psi_s} p_s \right) - \frac{k_1' p_r}{2 k_2 \psi_r} - \frac{k_2' p_s}{2 k_2 \psi_r} \quad (3.136)$$

$$c_4 = -\frac{k_2}{k_3} \left(-\frac{\theta_1 \theta_3 \sin(q_s)}{\theta_2^2 \cos(q_s) \psi_s} p_r + \frac{\theta_1^2 \theta_3 \sin(q_s) \psi_r}{\theta_2^3 \cos^2(q_s) \psi_s^2} p_s + \frac{\theta_1 \sin(q_s) \psi_r}{\theta_2 \cos^2(q_s) \psi_s^2} p_s + \frac{\psi_r'}{2 \psi_r \psi_s} p_r \right) \quad (3.137)$$

$$g_2 = -\frac{k_1 \psi_r \theta_4 g \sin(q_s)}{k_2 \theta_2 \cos(q_s)} - \frac{1}{k_2 \psi_r} \frac{\partial \phi}{\partial q_r} \quad (3.138)$$

olmak üzere, (3.8) ve (3.19) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} u = & -\theta_2 \sin(q_1) \dot{q}_1^2 + 2\theta_3 \sin(q_1) \cos(q_1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & + \frac{\theta_3(\theta_5 + \theta_3 \sin^2(q_1)) \sin(q_1)}{\theta_2} \dot{q}_2^2 + \frac{\theta_4(\theta_5 + \theta_3 \sin^2(q_1)) g \sin(q_1)}{\theta_2 \cos(q_1)} \\ & + \frac{1}{\psi_s} \left(\theta_2 \cos(q_1) + \frac{\theta_1(\theta_5 + \theta_3 \sin^2(q_1))}{\theta_2 \cos(q_1)} \right) \left(-\frac{\psi_s'}{\psi_s^2} p_s^2 + c_3 p_r + c_4 p_s + g_2 + f_2 \right) \end{aligned} \quad (3.139)$$

olarak hesaplanabilir.

Teorem 3.3

(3.107) ve (3.108) eşitlikleri ile verilmiş olan döner sarkaç sistemi için tasarlanmış olan ve (3.139) ile verilen denetim girişi, çekim bölgesi $(q, p) \in ((-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R}^3)$ kümesini içerecek biçimde, $q = [0, q_r^*]^T$ denge noktasında sistemi asimptotik kararlı kılar.

İspat 3.3

Denetim girişlerinden olan f_2, k pozitif bir sabit olmak üzere,

$$f_2 = -k F^T K p = -k(k_2 p_r + k_3 p_s) \quad (3.140)$$

şeklinde seçilsin. Eşitlik (3.12)'ye göre $\dot{q}_r = \frac{\theta_1}{\theta_2 \cos(q_1)} \dot{q}_1 + \dot{q}_2$ eşitliği göz önünde bulundurularak (3.41) ile verilen Lyapunov fonksiyonunun türevi tekrar hesaplanırsa

$$\dot{V} = -k \left(d_1 \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} + z_1 \right) [\cos(q_1)]^{-2z_1\alpha_1+1} \dot{q}_1 + d_1 [\cos(q_1)]^{-2z_1\alpha_1+2} \dot{q}_2 \right)^2 \quad (3.141)$$

elde edilir ki, Lyapunov fonksiyonunun türevi negatif yarı tanımlı olur. Bu da Lyapunov fonksiyonunun artmayan bir fonksiyon olduğunu, \bar{q} ile p vektörlerinin ve sonucunda da q vektörünün bileşenlerinin sınırlı olduğunu garanti eder. $\Omega_{\bar{c}} \in ((-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R}^3)$ kümesini aşağıdaki gibi tanımlayalım,

$$\bar{c} = \sup\{c > 0 : V(q, p) < c \mid -\beta < \Omega_c < \beta, \beta > 0\} \quad (3.142)$$

olmak üzere

$$\Omega_c = \{(q, p) \in ((-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R}^3 \mid V(q, p) < c)\}. \quad (3.143)$$

Asimptotik kararlılığı göstermek üzere, bu küme içerisindeki en büyük değişmez kümenin $q = [0, q_r^*]^T$ olduğu gösterilmelidir.

Tekrar (3.141) eşitliğine dönecek olursak; bu fonksiyon ancak $\dot{q}_2 = -\frac{\theta_1 + z_1\theta_2}{\theta_2 \cos(q_1)} \dot{q}_1$ sağlandığı zaman sifıra eşit olur.

$$\dot{q}_2 = -\frac{\theta_1 + z_1\theta_2}{\theta_2 \cos(q_1)} \dot{q}_1 \quad (3.144)$$

ifadesinin sağlandığını varsayalım. Bu durumda, χ sabit bir sayı olmak üzere,

$$\ddot{q}_2 = -\frac{\theta_1 + z_1\theta_2}{\theta_2 \cos(q_1)} \ddot{q}_1 - \frac{(\theta_1 + z_1\theta_2) \sin(q_1)}{\theta_2 \cos^2(q_1)} \dot{q}_1^2 \quad (3.145)$$

ve

$$q_2 + \chi = -\frac{2(\theta_1 + z_1\theta_2)}{\theta_2} \operatorname{arctanh}\left(\tan\left(\frac{q_1}{2}\right)\right) \quad (3.146)$$

eşitlikleri doğrudur. (3.145) eşitliğinden faydalanarak (3.107) ve (3.108) eşitlikleri ile verilen kapalı çevrim sistem dinamikleri tekrar yazılırsa,

$$z_1\theta_2\ddot{q}_1 + (\theta_1 + z_1\theta_2) \tan(q_1)\dot{q}_1^2 + \theta_3 \sin(q_1) \cos(q_1)\dot{q}_2^2 + \theta_4 g \sin(q_1) = 0 \quad (3.147)$$

$$\left(\theta_2 \cos(q_1) - \frac{(\theta_1 + z_1\theta_2)(\theta_5 + \theta_3 \sin^2(q_1))}{\theta_2 \cos(q_1)} \right) \ddot{q}_1 - \left(\frac{(\theta_1 + z_1\theta_2)(\theta_5 + \theta_3 \sin^2(q_1))}{\theta_2 \cos^2(q_1)} + \theta_2 \right) \sin(q_1)\dot{q}_1^2 + 2\theta_3 \sin(q_1) \cos(q_1)\dot{q}_1\dot{q}_2 = u \quad (3.148)$$

elde edilir. İlk eşitlikten \ddot{q}_1 ifadesi çekilip ikinci eşitlikte yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, (3.144) eşitliğinin sağlanması durumunda

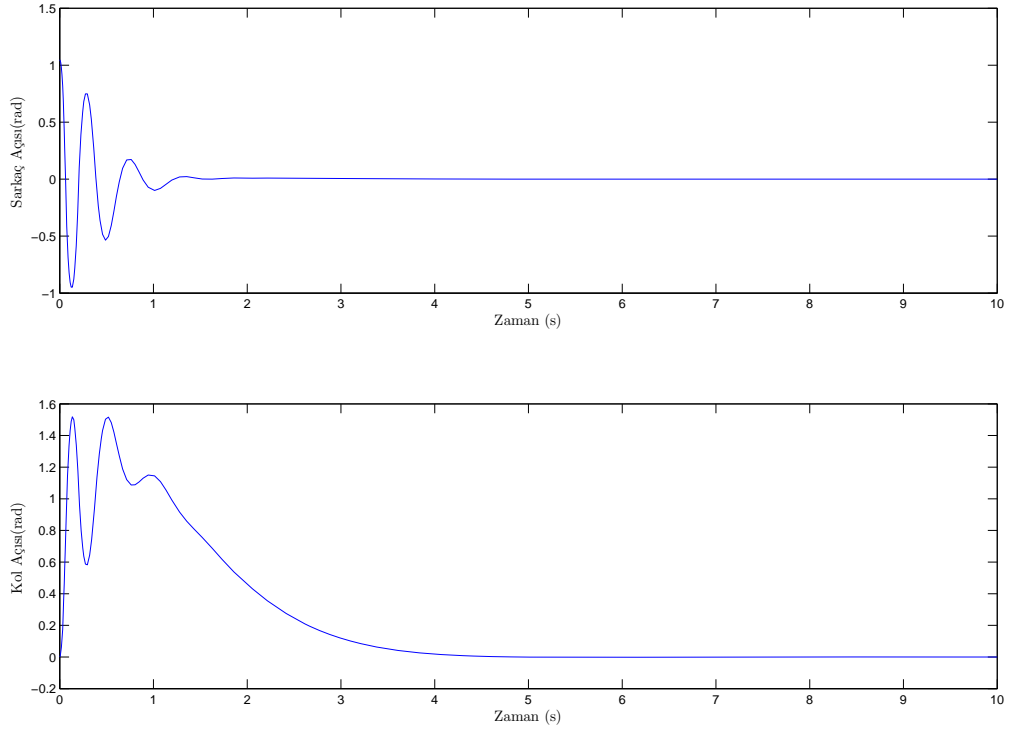
$$\begin{aligned} & \left(\theta_2 \cos(q_1) - \frac{(\theta_1 + z_1 \theta_2)(\theta_5 + \theta_3 \sin^2(q_1))}{\theta_2 \cos(q_1)} \right) \\ & \left(-\frac{\theta_1 + z_1 \theta_2}{z_1 \theta_2} \tan(q_1) \dot{q}_1^2 - \frac{\theta_3}{z_1 \theta_2} \sin(q_1) \cos(q_1) \dot{q}_2^2 - \frac{\theta_4 g}{z_1 \theta_2} \sin(q_1) \right) \\ & - \left(\frac{(\theta_1 + z_1 \theta_2)(\theta_5 + \theta_3 \sin^2(q_1))}{\theta_2 \cos^2(q_1)} + \theta_2 \right) \sin(q_1) \dot{q}_1^2 + 2\theta_3 \sin(q_1) \cos(q_1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 = u \end{aligned} \quad (3.149)$$

eşitliğinin sağlanması gerektiği görülebilir. (3.139) ile verilen denetim girişi de yerine yazıldığında, atalet diskli sarkaç sistemi için yapılan analize benzer olarak, trigonometrik ifadelerin sabit olması gerektiği görülebilir. Buda (3.144) eşitliğinin yalnız $\dot{q}_1 = 0$ olması durumunda sağlanabileceğini göstermektedir ki bu sonuç $\dot{q}_2 = 0$ olması gerektiğini göstermektedir. Başka bir deyişle sistem denge noktasındadır.

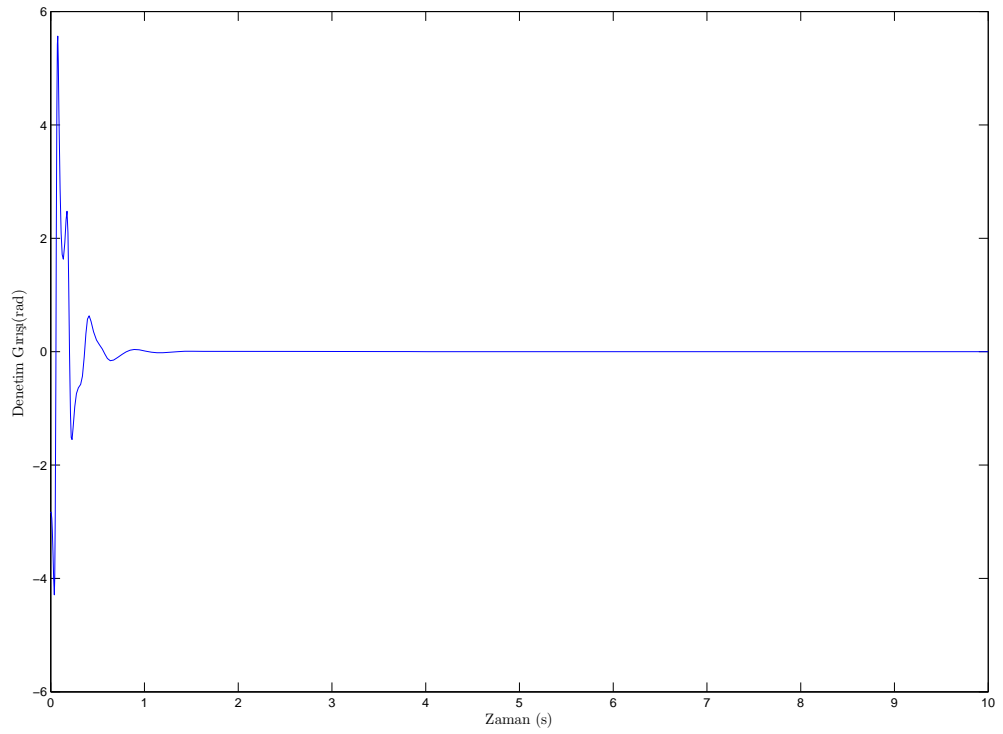
Döner sarkaç sisteminin $q_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ aralığındaki tek denge noktası $q = [0 \quad q_r^*]^T$ noktasıdır. Dolayısı ile sistem bu noktaya asimptotik olarak yakınsar.

Benzetim Çalışmaları

Tasarlanan denetleyicinin çalışırılığını test etmek üzere, kapalı çevrim döner sarkaç sistemi üzerinde benzetim çalışmaları yapılmıştır. Test edilen sistem dinamiğine ait sabitler Acosta vd.(2010) içerisinde kullanılan ile aynıdır. Tasarım parametreleri $k = 10$, $d_1 = 1$, $d_3 = 5$, ve $a = 3$ olarak seçilmiştir. $q_r^* = 0$ olarak seçilmiş ve başlangıçta sistem sarkacın denge noktasına oldukça uzak bir noktadan olmak üzere $(q, \dot{q})(0) = [\pi/3 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ noktasından başlatılmıştır. Sarkaç açısı ve kol açısının zamana göre değişimleri Şekil 3.5’de, denetim girişinin zamana göre değişimi ise Şekil 3.6’de verilmiştir. Gerçekleştirilen benzetim çalışması sonucu, tasarlanan denetim sinyalinin sistemi oldukça hızlı bir biçimde kararsız denge noktasına taşıdığı ortaya çıkmaktadır. Ayrıca, denetim sinyalinin uygulama açısından kabul edilebilir bir aralıkta kaldığı söylenebilir.



Şekil 3.5 Sarkaç açısı ve kol açısının zamana göre değişimi



Şekil 3.6 Döner sarkaç sistemi için denetim girişinin zamana göre değişimi

3.4.4 Top-Çubuk

Bu bölümde top-çubuk sistemi için yapılacak çözüm Ibanez (2009) ile verilen çözümün aynısıdır. Top-çubuk sisteminin dinamik denklemleri (2.14) ve (2.15) eşitliklerinde aşağıdaki gibi verilmişti,

$$(m_1 + \frac{I_1}{r^2})\ddot{q}_1 - m_1 q_1 \dot{q}_2^2 + m_1 g \sin(q_2) = 0 \quad (3.150)$$

$$(I_2 + m_1 q_1^2)\ddot{q}_2 + 2m_1 q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_1 g q_1 \cos(q_2) = u. \quad (3.151)$$

Görüldüğü üzere $m_{12} = m_{21} = 0$ olduğu için geri besleme ile kısmi doğrusallaştırma prosedürü Bölüm 3.2.1'de anlatıldığı şekilde gerçekleştirilememektedir. Bunun yerine $I_1 = \frac{2}{5}m_1 r^2$ olduğu göz önüne alınıp

$$u = (I_2 + m_1 q_1^2)f_1 + 2m_1 q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_1 g q_1 \cos(q_2) \quad (3.152)$$

olarak seçilip $q_1 = q_r$ ve $q_2 = q_s$ dönüşümleri yapıldıktan sonra dinamik denklemler tekrar yazılırsa,

$$\ddot{q}_r = m_1 q_r \dot{q}_s^2 - m_1 g \sin(q_s) \quad (3.153)$$

$$\ddot{q}_s = f_1 \quad (3.154)$$

denklemleri elde edilir. Bu noktada

$$f_1 = \frac{1}{\psi_s} \left(c_3 p_r + \left(c_4 - \frac{\dot{\psi}_s}{\psi_s} \right) p_s + \rho_2 + f_2 \right) \quad (3.155)$$

olarak belirlenip, $p = \Psi \dot{q}$ dönüşümü ile sistem denklemleri

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_r \\ \dot{p}_s \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\dot{\psi}_r}{\psi_r} & \frac{5\dot{\psi}_r}{7\dot{\psi}_s^2} q_r p_s \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}}_{C'} \begin{bmatrix} p_r \\ p_s \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{5g\dot{\psi}_r}{7} \sin(q_s) \\ \rho_2 \end{bmatrix}}_{P'} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_F f_2 \quad (3.156)$$

haline getirilebilir. Genel çözümde oluşturulan Lyapunov fonksiyonu (3.25) ve türevi (3.28) bu sistem için de değiştirilmeksizin kullanılabilir. Bu durumda W ve Z matrisleri aşağıdaki gibi oluşur

$$W = \begin{bmatrix} k_1 \frac{\dot{\psi}_r}{\psi_r} + k_2 c_3 + \frac{k'_1 p_r}{2\dot{\psi}_r} + \frac{k'_2 p_s}{2\dot{\psi}_r} & k_1 \frac{5\dot{\psi}_r}{7\dot{\psi}_s^2} q_r p_s + k_2 c_4 + \frac{k'_2 p_r}{2\dot{\psi}_r} + \frac{k'_3 p_s}{2\dot{\psi}_r} \\ k_2 \frac{\dot{\psi}_r}{\psi_r} + k_3 c_3 & k_2 \frac{5\dot{\psi}_r}{7\dot{\psi}_s^2} q_r p_s + k_3 c_4 \end{bmatrix}, \quad (3.157)$$

$$Z = \begin{bmatrix} -\frac{5g}{7}k_1 \sin(q_s) + k_2\rho_2 + \frac{1}{\psi_r} \frac{\partial\phi}{\partial q_r} \\ -\frac{5g}{7}k_2 \sin(q_s) + k_3\rho_2 + \frac{1}{\psi_s} \frac{\partial\phi}{\partial q_s} \end{bmatrix}. \quad (3.158)$$

W matrisini ters simetrik ve Z vektörünü sıfır kılmak üzere tasarım fonksiyonlarını aşağıdaki gibi seçebiliriz,

$$c_3 = -\frac{k_1 \dot{\psi}_r}{k_2 \psi_r} - \frac{k'_1 p_r}{2\psi_r} - \frac{k'_2 p_s}{2\psi_r} \quad (3.159)$$

$$c_4 = \frac{5k_2 \psi_r}{7k_3 \psi_s^2} q_r p_s \quad (3.160)$$

$$\rho_2 = \frac{5gk_1}{7k_2} \sin(q_s) - \frac{1}{\psi_r k_2} \frac{\partial\phi}{\partial q_r}. \quad (3.161)$$

Bu durumda, (3.36) ve (3.39) ile verilmiş olan kısmi diferansiyel denklemler top-çubuk sistemi için bazı sadeleştirmeler yapılarak uyarlandığında,

$$k'_2 k_2 - k'_1 k_3 = 0 \quad (3.162)$$

$$\frac{k'_3 k_2 - k'_2 k_3}{2k_2 \psi_r} + \frac{5(k_1 k_3 - k_2^2) \psi_r}{7k_3 \psi_s^2} q_1 = 0 \quad (3.163)$$

$$\frac{k_1 k_3 - k_2^2}{k_2} \frac{5g}{7} \sin(q_s) - \frac{k_3}{k_2 \psi_r} \frac{\partial\phi}{\partial q_r} + \frac{1}{\psi_s} \frac{\partial\phi}{\partial q_s} = 0 \quad (3.164)$$

diferansiyel denklemleri elde edilebilir. Bu diferansiyel denklemlerin çözümleri ise aşağıdaki gibi hesaplanabilir,

$$k_1 = \sqrt{q_1^2 + 2d_1} \quad (3.165)$$

$$k_2 = -\sqrt{q_1^2 + d_1} \quad (3.166)$$

$$k_3 = \sqrt{q_1^2 + 2d_1} \quad (3.167)$$

$$\psi_r = 1 \quad (3.168)$$

$$\psi_s = \sqrt{\frac{10}{7} (q_1^2 + d_1)} \quad (3.169)$$

$$\phi(\bar{q}) = d_1 \sqrt{2} (1 - \cos(q_s)) + d_2 \left(q_s - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{q_r}{\sqrt{2d_1}}\right) \right)^2. \quad (3.170)$$

Burada d_i , ($i = 1, 2$) integrasyon sabitleri olup $K > 0$ ve $V > 0$ sağlanması için pozitif seçilmelidirler.

Sonuç olarak, elde edilen tüm veriler ışığında (3.152) ve (3.155) eşitlikleri ile verilen denetim girişi, $k > 0$ ve

$$c_3 = -\frac{q_1}{2\sqrt{q_1^2 + 2d_1}}\dot{q}_1 + \sqrt{\frac{10}{7}}\frac{q_1}{2}\dot{q}_2, \quad (3.171)$$

$$c_4 = -\sqrt{\frac{10}{7}}\frac{1}{2\sqrt{q_1^2 + 2d_1}}q_1\dot{q}_2, \quad (3.172)$$

$$\rho_2 = -\frac{5g}{7}\sqrt{\frac{q_1^2 + 2d_1}{q_1^2 + d_1}}\sin(q_2) - \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + d_1}}\frac{d_2\sqrt{2}}{\sqrt{q_1^2 + 2d_1}}\left(q_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{q_1}{\sqrt{2d_1}}\right)\right), \quad (3.173)$$

$$f_2 = -k(-\sqrt{q_1^2 + d_1}\dot{q}_1 + \sqrt{q_1^2 + 2d_1}\sqrt{q_1^2 + d_1}\sqrt{\frac{10}{7}}\dot{q}_2) \quad (3.174)$$

olmak üzere, aşağıdaki gibi verilebilir,

$$u = (I_2 + m_1q_1^2)\left(\sqrt{\frac{7}{10(q_1^2 + d_1)}}\left(c_3\dot{q}_1 + \left(c_4 - \frac{q_1}{q_1^2 + d_1}\dot{q}_1\right)\sqrt{\frac{10}{7}}\frac{1}{2\sqrt{q_1^2 + 2d_1}}q_1\dot{q}_2^2 + \rho_2 + f_2\right)\right) \\ + 2m_1q_1\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_1gq_1\cos(q_2) \quad (3.175)$$

Teorem 3.4 (Ibanez, 2009)

(3.150) ve (3.151) eşitlikleri ile verilmiş olan top-çubuk sistemi için tasarlanmış olan ve (3.175) ile verilen denetim girişi, çekim bölgesi $(q, p) \in ((\mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R}^2)$ kümesini içerecek biçimde, $q = [0, 0]^T$ denge noktasında sistemi asimptotik kararlılığı kılar.

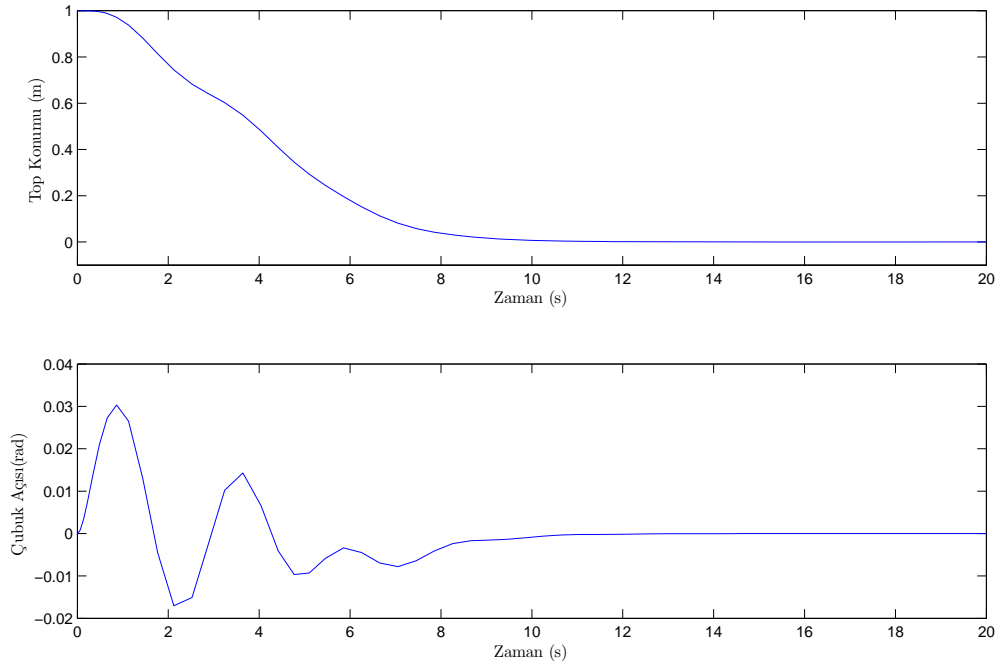
İspat 3.4

Teoremin ispatına Ibanez (2009) ile verilen yayından ulaşılabilir.

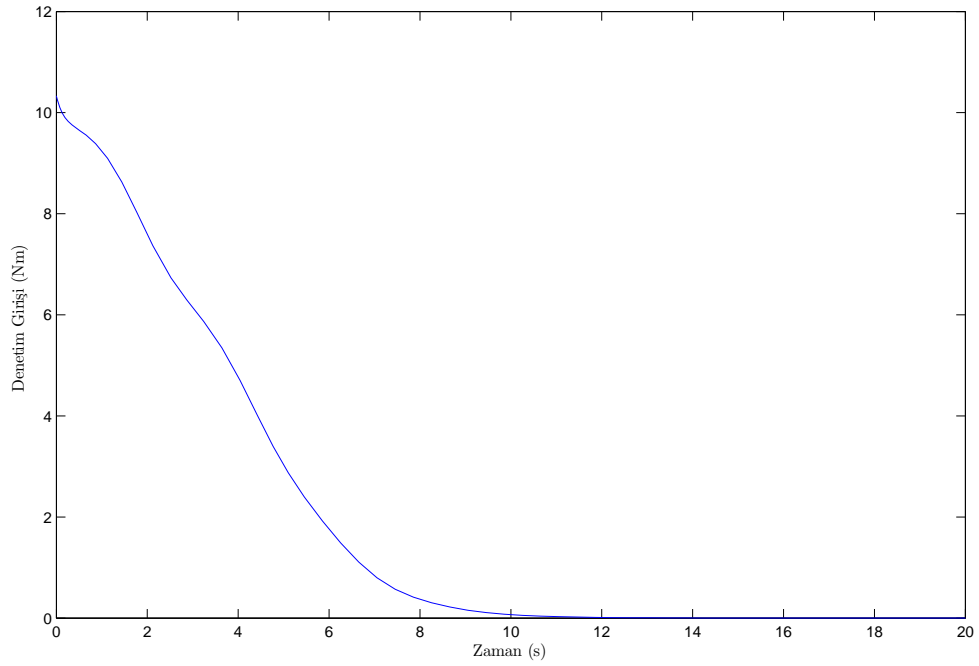
Benzetim Çalışmaları

Top-çubuk için tasarlanmış denetleyiciyi test etmek üzere yapılan benzetim çalışmalarında fiziksel sistem yapısındaki sabitler $m_1 = 1$, $l = 2$, $r = 0.01$, $I_2 = 1/12$ olarak alınmıştır. Tasarım parametreleri $k = 5$, $d_1 = 0.5$ ve $d_2 = 2$ olarak seçilmiştir. Sistemin başlangıç koşulları ise $(q, \dot{q})(0) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ noktasına ayarlanmıştır. Top konumu ve çubuk açısının zamana göre değişimleri Şekil 3.7'de, denetim girişinin zamana göre değişimi ise

Şekil 3.8’de verilmiştir. Verilen sonuçlarda görülebileceği üzere, sistem oldukça hızlı bir biçimde denge noktasın yakınsamıştır.



Şekil 3.7 Top konumu ve çubuk açısının zamana göre değişimi



Şekil 3.8 Top-çubuk sistemi için denetim girişinin zamana göre değişimi

3.4.5 TORA

TORA sisteminin dinamik denklemleri (2.17) ve (2.18) eşitliklerinde aşağıdaki gibi verilmiştir,

$$\theta_1 \ddot{q}_1 + \theta_2 \cos(q_2) \ddot{q}_2 - \theta_2 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + \beta_1 q_1 = 0 \quad (3.176)$$

$$\theta_2 \cos(q_2) \ddot{q}_1 + \theta_3 \ddot{q}_2 + m_2 l g \sin(q_2) = u. \quad (3.177)$$

TORA sisteminin atalet matrisi eyleyicili koordinata bağlı olduğundan Varsayım 3.1 bu sistem için geçerli değildir. Dolayısı ile elde edilen genel çözüm TORA'ya doğrudan uygulanamaz. Fakat, aynı prosedür uygulanarak genel yapıya uymayan bu sistem için kararlı kılan denetleyici tasarımı yapılacaktır. Bu amaçla \ddot{q}_1 , (3.176) eşitliğinden elde edilip (3.177) eşitliğinde yerine konur, ve (3.176) eşitliğinin her iki tarafı θ_1 ile bölünürse sistemin dinamik denklemleri aşağıdaki hali alır,

$$\ddot{q}_1 + \frac{\theta_2 \cos(q_2)}{\theta_1} \ddot{q}_2 - \frac{\theta_2 \sin(q_2)}{\theta_1} \dot{q}_2^2 + \frac{\beta_1 q_1}{\theta_1} = 0 \quad (3.178)$$

$$\left(-\frac{\theta_2^2}{\theta_1} \cos^2(q_2) + \theta_3 \right) \ddot{q}_2 + \frac{\theta_2^2 \sin(q_2) \cos(q_2)}{\theta_1} \dot{q}_2^2 - \frac{\beta_1 \theta_2 q_1}{\theta_1} \cos(q_2) + \theta_2 g \sin(q_2) = u. \quad (3.179)$$

Bu noktada koordinat dönüşümü

$$q_r = q_1 + \gamma(q_2) \quad (3.180)$$

yapılıp birinci ve ikinci zaman türevleri alınırsa

$$\dot{q}_r = \dot{q}_1 + \gamma' \dot{q}_2 \quad (3.181)$$

$$\ddot{q}_r = \ddot{q}_1 + \gamma' \ddot{q}_2 + \frac{d\gamma'}{dt} \dot{q}_2 \quad (3.182)$$

denklemleri hesaplanabilir.

$$\gamma' = \frac{\theta_2 \cos(q_2)}{\theta_1} \quad (3.183)$$

olarak belirlenip, kısmi doğrusallaştırma geri besleme

$$u = \left(-\frac{\theta_2^2}{\theta_1} \cos^2(q_2) + \theta_3 \right) f_1 + \frac{\theta_2^2 \sin(q_2) \cos(q_2)}{\theta_1} \dot{q}_2^2 - \frac{\beta_1 \theta_2 q_1}{\theta_1} \cos(q_2) + \theta_2 g \sin(q_2) \quad (3.184)$$

olarak seçildikten sonra $q_1 = q_r$ ve $q_2 = q_s$ dönüşümleri yapılarak dinamik denklemler tekrar

yazılırsa,

$$\ddot{q}_r = -\frac{\beta_1}{\theta_1} q_r + \frac{\beta_1 \theta_2}{\theta_1^2} \sin(q_s) \quad (3.185)$$

$$\ddot{q}_s = f_1 \quad (3.186)$$

denklemleri elde edilir. Bu noktada

$$f_1 = \frac{1}{\psi_s} (\rho_2 + f_2) \quad (3.187)$$

olarak belirlenip, Ψ bu örnek için sabit bir matris olmak üzere, $p = \Psi \dot{q}$ dönüşümü ile sistem denklemleri

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_r \\ \dot{p}_s \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\beta_1 \psi_r}{\theta_1} q_r + \frac{\beta_1 \psi_r \theta_2}{\theta_1^2} \sin(q_s) \\ \rho_2 \end{bmatrix}}_{P'} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_F f_2 \quad (3.188)$$

haline getirilebilir. Genel çözümde oluşturulan ve Lyapunov fonksiyonu (3.25) ve türevi (3.28) bu sistem için de aynı şekilde kullanılabilir. Fakat (3.188) eşitliğinden fark edilebileceği üzere C' matrisi sadeleşerek sıfır olmuştur. Dolayısıyla W matriside sıfır olacak ve Lyapunov fonksiyonu içerisinde kullanılan K matrisinin de sabit seçilmesi uygun olacaktır. Bu durumda Z matrisi aşağıdaki gibi oluşur

$$Z = \begin{bmatrix} k_1 \psi_r \left(-\frac{\beta_1}{\theta_1} q_r + \frac{\beta_1 \theta_2}{\theta_1^2} \sin(q_s) \right) + k_2 \rho_2 + \frac{1}{\psi_r} \frac{\partial \phi}{\partial q_r} \\ k_2 \psi_r \left(-\frac{\beta_1}{\theta_1} q_r + \frac{\beta_1 \theta_2}{\theta_1^2} \sin(q_s) \right) + k_3 \rho_2 + \frac{1}{\psi_s} \frac{\partial \phi}{\partial q_s} \end{bmatrix} \quad (3.189)$$

Z vektörünün ilk bileşenini sıfır kılmak üzere ρ_2 aşağıdaki gibi hesaplanabilir,

$$\rho_2 = -\frac{k_1 \psi_r}{k_2} \left(-\frac{\beta_1}{\theta_1} q_r + \frac{\beta_1 \theta_2}{\theta_1^2} \sin(q_s) \right) - \frac{1}{\psi_r k_2} \frac{\partial \phi}{\partial q_r}. \quad (3.190)$$

Bu sonuç Z vektörünün ikinci satırında kullanıldığında,

$$-\frac{(k_1 k_3 - k_2^2) \psi_r}{k_2} \left(-\frac{\beta_1}{\theta_1} q_r + \frac{\beta_1 \theta_2}{\theta_1^2} \sin(q_s) \right) - \frac{k_3}{k_2 \psi_r} \frac{\partial \phi}{\partial q_r} + \frac{1}{\psi_s} \frac{\partial \phi}{\partial q_s} = 0 \quad (3.191)$$

kısmi diferansiyel denklemi elde edilebilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü ise aşağıdaki gibi hesaplanabilir,

$$\phi(\bar{q}) = \frac{(k_1 k_3 - k_2^2) \psi_r^2 \beta_1}{2 k_3 \theta_1} q_r^2 + d_1 - \frac{(k_1 k_3 - k_2^2) \psi_r \beta_1 \theta_2}{k_2 \theta_1^2 \psi_s} \cos(q_s). \quad (3.192)$$

Burada d_1 integrasyon sabiti olup $\phi(\bar{q})$ fonksiyonunun minimumu sistemin kararlı kılınmak istendiği noktada olacak şekilde seçilmelidir.

Sonuç olarak, elde edilen tüm veriler ışığında (3.152) ve (3.155) eşitlikleri ile verilen denetim girişi, $k > 0$ ve

$$\rho_2 = -\frac{k_1\psi_r}{k_2} \left(-\frac{\beta_1}{\theta_1} \left(q_1 + \frac{\theta_2 \sin(q_2)}{\theta_1} \right) + \frac{\beta_1\theta_2}{\theta_1^2} \sin(q_2) \right) - \frac{(k_1k_3 - k_2^2)\psi_r\beta_1}{k_2k_3\theta_1} q_r, \quad (3.193)$$

$$f_2 = -k \left(k_2\psi_r \left(\dot{q}_1 + \frac{\theta_2 \cos(q_2)}{\theta_1} \dot{q}_2 \right) + k_3\psi_s\dot{q}_2 \right) \quad (3.194)$$

olmak üzere, aşağıdaki gibi verilebilir,

$$u = \left(-\frac{\theta_2^2}{\theta_1} \cos^2(q_2) + \theta_3 \right) \left(\frac{1}{\psi_s} (\rho_2 + f_2) \right) + \frac{\theta_2^2 \sin(q_2) \cos(q_2)}{\theta_1} \dot{q}_2^2 - \frac{\beta_1\theta_2q_1}{\theta_1} \cos(q_2) + \theta_2g \sin(q_2) \quad (3.195)$$

Teorem 3.5

Dinamik denklemleri (3.176) ve (3.177) eşitlikleri ile verilmiş olan TORA sistemi için tasarlanmış olan ve (3.195) ile verilen geri besleme sinyali, çekim bölgesi tüm durum uzayını içerecek biçimde, $q = [0, 0]^T$ denge noktasında sistemi asimptotik kararlılığı kılar.

İspat 3.4

Denetim girişlerinden olan f_2 (3.194) eşitliğinde verildiği gibi olmak üzere, eşitlik (3.181)'e göre $\dot{q}_r = \frac{I_1+I_2}{I_2} \dot{q}_1 + \dot{q}_2$ eşitliği de göz önünde bulundurularak (3.41) ile verilen Lyapunov fonksiyonunun türevi tekrar hesaplanırsa

$$\dot{V} = -k \left(k_2\psi_r \left(\dot{q}_1 + \frac{\theta_2 \cos(q_2)}{\theta_1} \dot{q}_2 \right) + k_3\psi_s\dot{q}_2 \right)^2 \quad (3.196)$$

elde edilir ki, Lyapunov fonksiyonunun türevi negatif yarı tanımlı olur. Bu da Lyapunov fonksiyonunun artmayan bir fonksiyon olduğunu, \bar{q} ile p vektörlerinin ve sonucunda da q vektörünün bileşenlerinin sınırlı olduğunu garanti eder. $\Omega_{\bar{c}} \in (\mathbb{R}^4)$ kümesini aşağıdaki gibi tanımlayalım,

$$\bar{c} = \sup\{c > 0 : V(q, p) < c \mid -\beta < \Omega_c < \beta, \beta > 0\} \quad (3.197)$$

olmak üzere

$$\Omega_c = \{(q, p) \in (\mathbb{R}^4) \mid V(q, p) < c\}. \quad (3.198)$$

Asimptotik kararlılığı göstermek üzere, bu küme içerisindeki en büyük değişmez kümenin $q = [0, q_r^*]^T$ olduğu gösterilmelidir.

Tekrar (3.196) eşitliğine dönecek olursak; bu fonksiyon ancak

$$k_2\psi_r\dot{q}_1 + \left(\frac{k_2\psi_r\theta_2 \cos(q_2)}{\theta_1} + k_3\psi_s \right) \dot{q}_2 = 0 \quad (3.199)$$

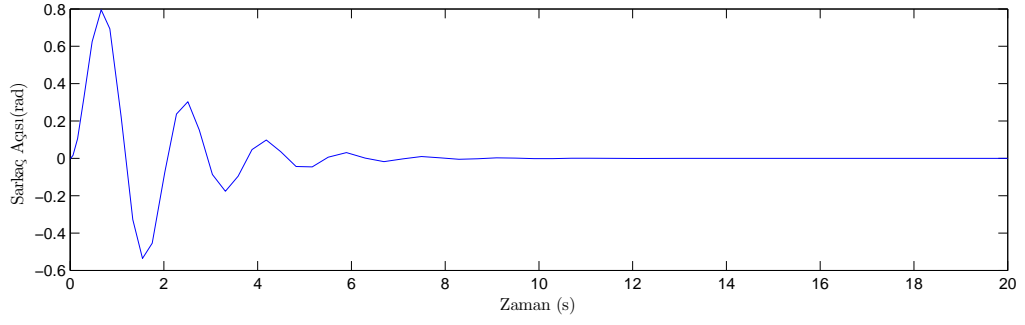
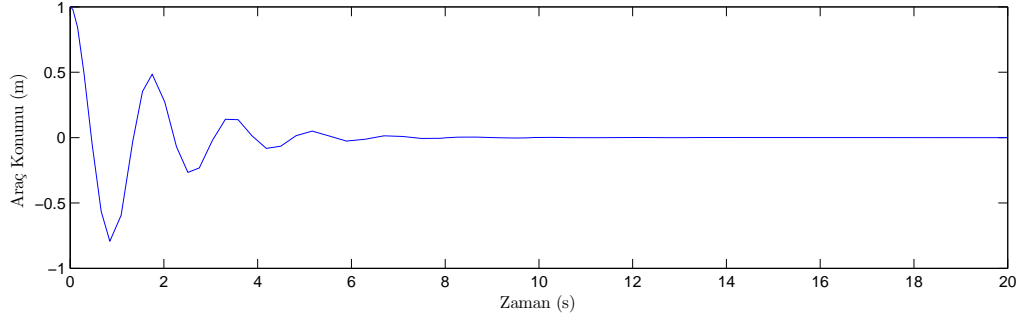
ifadesi sağlandığı zaman sifıra eşit olur.

Bu durumun, atalet diskli sarkaç sistemindekine benzer olarak yalnız $\dot{q}_1 = 0$ olması durumunda sağlanabileceğini gösterilebilir ki bu sonuç $\dot{q}_2 = 0$ olması gerektiğini göstermektedir. Başka bir deyişle sistem denge noktasındadır.

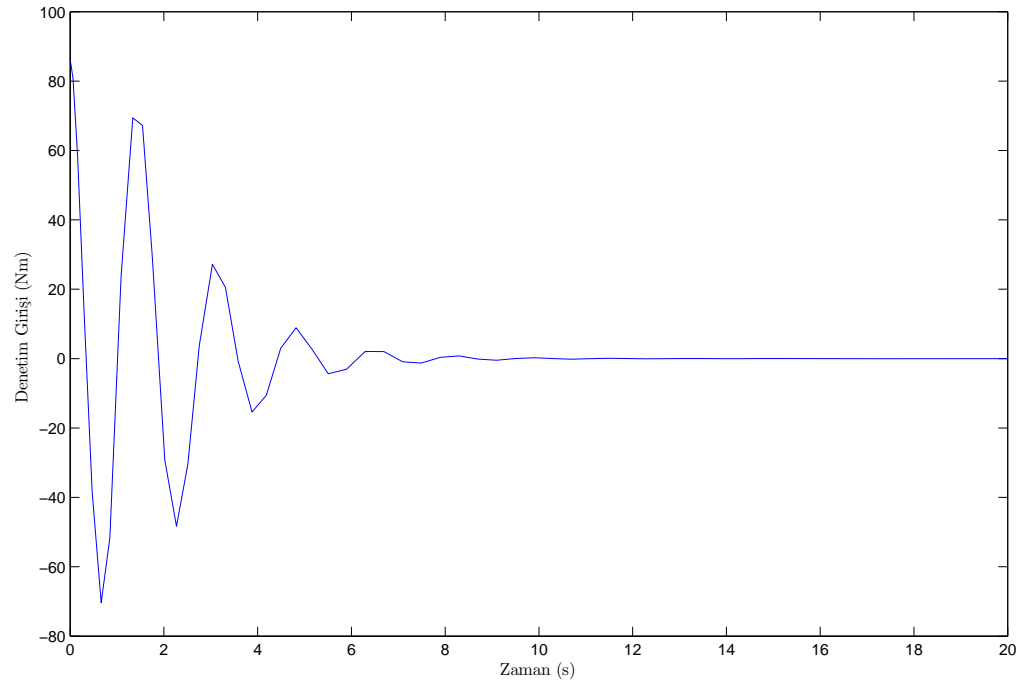
Tora sistemi $q = [0 \quad *]^T$ olduğunda dengededir. Asimptotik kararlılığı göstermek üzere $q = [0 \quad 0]^T$ durumunun kapalı çevrim sisteminin tek denge noktası olduğu gösterilmelidir. $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ ve $q_1 = 0$ olduğunda sistem dinamikleri ve denetleyici girişine bakıldığında denge noktası $q = [0 \quad *]^T$ olarak karşımıza çıkmaktadır ve sistem bu noktaya asimptotik olarak yakınsar.

Benzetim Çalışmaları

TORA sistemi için tasarlanmış denetleyiciyi test etmek üzere yapılan benzetim çalışmalarında fiziksel sistem yapısındaki sabitler $m_1 = 10$, $m_2 = 1$, $l = 5$, $\beta_1 = 100$ olarak alınmıştır. Tasarım parametreleri $k = 5$, $k_1 = 5$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $\psi_r = 1$ ve $\psi_s = 1$ olarak seçilmiştir. Sistemin başlangıç koşulları ise $(q, \dot{q})(0) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ noktasına ayarlanmıştır. Araç konumu ve sarkaç açısının zamana göre değişimleri Şekil 3.9'da, denetim girişinin zamana göre değişimi ise Şekil 3.10'da verilmiştir. Gerçekleştirilen benzetim çalışmaları sonucu, uygulanan denetim sinyalinin sistemi hızlıca denge noktasına getirdiği çıkarımı yapılabilir. Denetim sinyalinin yüksek değerler almış olması ise benzetim çalışmalarında kullanılan sistem parametrelerinin normalize edilmiş olmasıdır.



Şekil 3.9 Araç konumu ve sarkaç açısının zamana göre değişimi



Şekil 3.10 TORA sistemi için denetim girişinin zamana göre değişimi

4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Yetersiz eyleyicili mekanik sistemlerin kararlı kılınması amacı ile geliştirilen genel denetim yapıları olan CL (Bloch vd., 2000) ve IDAPBC (Ortega vd., 2002) yöntemlerine ek olarak yakın zamanda ortaya atılıp halen geliştirilmekte olan YEMS'in kararlı kılınması için doğrudan Lyapunov yaklaşımı (White vd., 2006) konuya iyi bir alternatif olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu yöntemde denetleyici, yapısı önceden belirlenmiş bir Lyapunov fonksiyonunun türevinin negatif yarı tanımlı olmasını sağlayacak biçimde oluşturulur. Fakat günümüze dek bu yaklaşımla ancak dinamik geri besleme yapısı üretilebilmiştir. Bu tez çalışmasında doğrudan Lyapunov yaklaşımı ile birlikte sistem sadeleştirilip dinamiklerinin basitleştirilmesi amacıyla geri besleme ile kısmi doğrusallaştırma ve koordinat dönüşümleri kullanılmış olup; bunun sonucunda, bir kısım iki serbestlikli YEMS'in asimptotik kararlı kılınması için denetleyici yapısı oluşturulmuştur. Çekim bölgesi tanımlamaları ve kararlılık analizleri ile birlikte, oluşturulan geri besleme sinyali benzetim çalışmaları ile desteklenmiştir.

Doğrudan Lyapunov yaklaşımı konusunda daha önce yapılmış genel kararlı kılan denetleyicilere göre bu tez çalışması sonucunda elde edilen geri besleme sinyalinin statik olması önemli bir avantaj olarak karşımıza çıkmaktadır. Böylece uygulamalı bir sistemde geri besleme sinyalinin daha basit donanım ve yapılarla elde edilebileceği aşikârdır.

Bununla birlikte oluşturulan kararlı kılma prosedürünün diğer yöntemlerle karşılaştırıldığında daha basit olduğunun ortaya çıkması önerilen yöntemin bir diğer avantajıdır. Özellikle örnek olması açısından ters sarkaç sisteminin kararlı kılınması için çözülen diferansiyel denklemler, bu konudaki diğer Bloch vd. (2000), Acosta vd. (2005) ve White vd. (2006) çalışmalar ile karşılaştırıldığında bu fark açıkça görülmektedir. Bu avantaj da önerilen teorik çalışmanın uygulamasının daha kolaylıkla yapılabileceğini göstermektedir.

Ayrıca, örnekler ile verilen bazı sistemler için elde edilen çekim bölgesinin diğer eşdeğer çalışmalara nazaran daha geniş olması, önerilen denetleyici yapısının iyi yönde başka bir özelliğini ortaya koymaktadır. Örneğin; döner sarkaç sistemi için Viola vd. (2007) ve Ibanez ve Azuela, (2007) çalışmalarında elde edilen sonuçlarda çekim bölgesi en fazla $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığında olmak üzere sistemin fiziksel parametrelerine bağlı olarak değişmekte iken, bu çalışmada çekim bölgesi sistemin fiziksel parametrelerine bağlı kalmaksızın $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığında elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuç, bu iyileştirmenin başka sistemler için de geçerliliğinin mümkün olabileceğini göstermektedir ve önerilen denetleyici yapısının diğerlerine göre üstünlüğünü ortaya koymaktadır.

Önerilen iki serbestlikli bir kısım YEMS'in asimptotik kararlı kılınması yönteminin, bu tez çalışmasında yer almamasına rağmen sınıfın dışında kalan diğer iki serbestlikli yetersiz eyleycili sistemlere de uygulanabileceği öngörülmektedir. Bununla beraber tasarımın geliştirilmesi ile önerilen yöntemin daha fazla serbestliğe sahip YEMS'e uygulanabilir hale getirilmesi önemli gelecek çalışmalardan bir tanesi olabilir. Bunun sağlanması ancak koordinat dönüşümlerinin daha fazla serbestlikli sistemler için geliştirilmesi ile yapılabilir.

Bununla birlikte, günümüze dek YEMS için yapılmış genel denetleyici yapılarını doğrudan elde etmek için kullanılan doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemleri, doğrusal adi diferansiyel denklemlere dönüştürme yöntemleri, bu tez çalışmasında önerilen yönteme ilave edilerek çalışma geliştirilebilir.

Son olarak hiçbir genel yöntemde bulunmayan geri besleme sinyalinin belirsizliklere karşı baş edebilmesi bir diğer önemli geliştirme olarak karşımıza çıkmaktadır. Önerilen bu yöntem sayesinde uyarlamalı denetim, dayanıklı denetim gibi iyi bilinen yöntemlerin en azından bir kısım YEMS için uygulanabilir olduğunu düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Acosta, A.J., Ortega, R., Astolfi, A. ve Mahindrakar, A.D., (2000), "Interconnection and damping assignment passivity-based control of mechanical systems with underactuation degree one", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(12):1936-1955.

Acosta, J. A., (2010), "Furuta's Pendulum: A Conservative Nonlinear Model for Theory and Practise", *Mathematical Problems in Engineering*, Article no. 742894.

Aoustin, Y., ve Formal'skii, A., (2009), "Ball on a beam: stabilization under saturated input control with large basin of attraction ", *Multibody System Dynamics*, 21:71–89.

Astrom, K.J. ve Furuta, K., (2000), "Swinging up a pendulum by energy control", *Automatica*, 36(2):287-295.

Auckly, D., Kapitanski, L. ve White, W., (2000), "Control of nonlinear underactuated systems", *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 53(3):354-369.

Auckly, D. ve Kapitanski, L., (2003), "On the lambda-equations for matching control laws", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 41(5):1322-1388.

Battle, C., Doria-Cerezo, A., Espinosa-Perez, G. Ve Ortega, R. (2009) "Simultaneous interconnection and damping assignment passivity-based control: the induction machine case study", *International Journal of Control*, 82:2:241-255.

Bloch, A.M., Leonard, N.E. ve Marsden, J.E., (1997), "Stabilization of mechanical systems using controlled Lagrangians", *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, 2356-2361, 1997.

Bloch, A.M., Leonard, N.E. ve Marsden, J.E., (2000), "Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems I: The first matching theorem", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(12):2253-2270.

Bloch, A.M., Chang, D.E., Leonard, N.E. ve Marsden, J.E., (2001), "Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems II: Potential shaping", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(10):1556-1571.

Bobtsov, A.A., Pyrkin, A.A. ve Kolyubin, S.A., (2009), "Adaptive Stabilization of a Reaction Wheel Pendulum on Moving LEGO Platform ", *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*, 1218-1223.

Estern, F.G, Ortega, R., Rubio, F.R. ve Aracil, J., (2001), "Stabilization of a Class of Underactuated Mechanical Systems Via Total Energy Shaping", *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 1137-1143.

Fantoni, I., Lozano, R., Spong, M.W., (2002), "Stabilization of the Furuta Pendulum Around Its Homoclinic Orbit", *International Journal of Control*, 75(6):390-398.

Furuta, K., Yamakita, M. ve Kobayashi, S., (1991), "Swing-up Control of Inverted Pendulum", *Proceedings of the International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation (IECON'91)*, 2193-2198, 1991.

Gomez-Estern, F., Ortega, R., Rubio, F.R., Aracil, J., (2001), "Stabilization of a Class of Mechanical Systems via Total Energy Shaping", *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, 1137-1143.

- Gordillo, F., Acosta J. A., ve Aracil, J., (2003), "A New Swing-up Law for the Furuta Pendulum", *International Journal of Control*, 76(8):836-844.
- Gordillo, F. ve Aracil, J., (2008), "A New Controller for the Inverted Pendulum on a Cart", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18:1607-1621.
- Ibanez, C.A., Frias, O.G. ve Castanon, S., (2005), "Lyapunov Based Controller for the Inverted Pendulum Cart System", *Nonlinear Dynamics*, 40:367-374.
- Ibanez, C.A. ve Azuela, J.H.S., (2007), "Stabilization of the Furuta Pendulum Based on a Lyapunov Function" *Nonlinear Dynamics*, 49(1-2):1-8.
- Ibanez, C.A., (2009), "The Lyapunov direct method for the stabilisation of the ball on the actuated beam", *International Journal of Control*, 82(12):2169-2178.
- Isidori, A., (1995), *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, Londra.
- Jayawardhana, B., Ortega, R., Garcia-Canseco, E. ve Castanos, F., (2007), "Passivity of nonlinear incremental systems: Application to PI stabilization of Nonlinear RLC circuits", *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, 3808-3812, 2007.
- Khalil, H., (1998), *Nonlinear systems*, Prentice-Hall, New Jersey.
- Li, M., (2009), "Controller design for 2-DOF underactuated mechanical systems based on Controlled Lagrangians and application to Acrobot control", *Front. Electr. Electron. Eng. China*, 4(4):417-439.
- Li, M. Ve Huo, W., (2009), "Controller design for mechanical systems with underactuation degree one based on controlled Lagrangians method", *International Journal of Control*, 82(9):1747-1761.
- Li, N., Liang, Z.Z., Hou, Z.G. ve Tan, M., (2009), "Energy-based balance control approach to the ball and beam system", *International Journal of Control*, 82(6):981-992.
- Lozano, R., Fantoni, I. ve Block, D. J., (2000), "Stabilization of the inverted pendulum around its homoclinic orbit", *System & Control Letters*, 47(3):194-204.
- Muralidharan, V., Anantharaman, S. ve Mahindrakar, A.D, (2010), "Asymptotic stabilisation of the ball and beam system: design of energy-based control law and experimental results", *International Journal of Control*, 83(6):1193-1198.
- Olfati-Saber, R., (1999), "Fixed Point Controllers and Stabilization of the Cart-Pole System and the Rotating Pendulum", *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, 1174-1181.
- Olfati-Saber, R., (2001), "Nonlinear Control of Underactuated Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles", Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Department of Electrical and Computer Science, Massachusetts.
- Olfati-Saber, R., (2002), "Normal Forms for Underactuated Mechanical Systems with Symmetry", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(2):305-308.
- Ortega, R., Spong, M., Gomez, F. ve Blankenstein, G., (2002a), "Stabilization of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(8):1218-1233.
- Ortega, R., van der Schaft, A., Maschke, B. ve Escobar, G., (2002b), "Interconnection and

damping assignment passivity-based control of port-controlled hamiltonian systems”, *Automatica*, 38(4):1137-1143.

Perez, M., Ortega, R. ve Espinoza, J.R., (2004), “Passivity-based PI control of switched power converters ”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 12(6):881-890.

Ramirez, H., Sbarbaro, D. ve Ortega, R., (2009), “On the control of non-linear processes: An IDA-PBC approach” , *Journal of Process Control*, 19(3):405-414.

Shiriaev, A. S. ve Fradkow, A. L., (2001), "Stabilization of Invariant Sets of Nonlinear Systems with Applications to Control of Oscillations", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 11:215-240.

Spong, M. W., (1996), “Energy Based Control of a Class of Underactuated Mechanical Systems”, *IFAC World Congress*, 431-435.

Spong, M.W., Corke, P. ve Lozano, R., (2001), “Nonlinear control of the Reaction Wheel Pendulum ”, *Automatica*, 37(11):1845-1851.

Srinivas, K.N. ve Behera, L., (2008), “Swing-up control strategies for a reaction wheel pendulum ”, *International Journal of System Science*, 39(12):1165-1177.

Viola, G., Ortega, R., Banavar, R., Acosta, J.A. ve Astolfi, A., (2007), “Total energy shaping control of mechanical systems: Simplifying the matching equations via coordinate changes”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(6):1093-1099.

Wan, C.J., Bernstein, D. S. ve Coppola, V. T., (1996), “Global Stabilization of the Oscillating Eccentric Rotor”, *Nonlinear Dynamics*, 10:49-62.

White, W.N., Foss, M. ve Xin, G., (2006), “A Direct Lyapunov Approach for a Class of Underactuated Mechanical Systems”, *Proceedings of the American Control Conference*, 14-16.

White, W.N., Foss, M. ve Xin, G., (2007), “A Direct Lyapunov Approach for Stabilization of Underactuated Mechanical Systems”, *Proceedings of the American Control Conference*, 4817-4822.

White, W.N., Foss, M., Patenaude, J., Guo, X. ve Garcia, D., (2008), “Improvements in direct Lyapunov stabilization of underactuated, mechanical systems”, *Proceedings of the American Control Conference*, 2927-2932.

White, W.N., Patenaude, J., Foss, M. ve Garcia, D., (2009), “Direct Lyapunov Approach for Tracking Control of Underactuated Mechanical Systems”, *Proceedings of the American Control Conference*, 1341-1346.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 16.03.1981

Doğum yeri Saray

Lise 1994-1997 Selimiye Veteriner Sağlık Meslek Lisesi

Lisans 1997-2002 Yıldız Teknik Üniversitesi Elektrik-Elektronik Fak.
Elektrik Mühendisliği Bölümü

Yüksek Lisans 2002-2005 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektrik Müh. Anabilim Dalı, Kontrol ve Otomasyon

Çalıştığı kurum

2002- YTÜ Elektrik Elektronik Fakültesi Araştırma Görevlisi