

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ISI TRANSFERİ VE DİFÜZYON OLAYLARINDA  
TERS PROBLEMLER**

93774

**Emine CAN**

**F.B.E. Fizik Anabilim Dalı Programında  
Hazırlanan**

**DOKTORA TEZİ**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. İdris GÜMÜŞ (Y.T.Ü)**

**İkinci Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Afet GOLAYOĞLU (KOÜ)**

**Tez Savunma Tarihi : 21.6.2000**

**Jüri Üyeleri :**

**Prof. Dr. Ömer OĞUZ (B.Ü)**

**Prof. Dr. Şehsuvar ZEBİTAY (İ.Ü)**



**Prof. Dr. İdris GÜMÜŞ (Y.T.Ü)**



**İSTANBUL, 2000**

ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
ÇİZELGE LİSTESİ.....	v
ÖNSÖZ.....	vi
ÖZET.....	vii
ABSTRACT.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. YARI LİNEER PARABOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE BİLİNMEYEN KAYNAK FONKSİYONUNUN ELDE EDİLMESİ İÇİN BAZI SAYISAL ALGORİTMALARIN KARŞILAŞTIRILMASI .....	19
2.1 Prosedür I (Kanonik Gösterim).....	20
3. PROSEDÜR II (TTF Gösterimi).....	23
4. SAYISAL ÇÖZÜM SONUÇLARI .....	25
4.1 Test 1.....	25
4.2 Birinci Çözüm Prosedürü ile Sayısal Çözüm.....	26
4.3 Test 2.....	28
4.4 Bilgisayar Çözüm Sonuçları.....	29
5. LİNEER OLMAYAN PARABOLİK DENKLEMLERDE BİLİNMEYEN KATSAYILARIN BULUNMASI.....	40
5.1 Gözenekli Ortamın Su Kapasitesi İçin Ters Problemin Formülasyon .....	41
5.1.2 Sayısal prosedür .....	42

5.1.3	Sayısal örnekler .....	46
5.2	Gözenekli Ortamın Hidrolik Geçirgenliği İçin Ters Problemin Formülasyonu.....	46
5.2.2	Sayısal prosedür .....	47
5.2.3	Bilgisayar sonuçları .....	51
6.	SONUÇLAR ve ÖNERİLER .....	56
	KAYNAKLAR.....	58
	EKLER.....	61
EK 1	Parabolik Denklemler İçin Sonlu Fark Şemaları .....	61
EK 2	Takip Yöntemi .....	69
EK 3	Bilgisayar Programları .....	72
EK 4	Bilgisayar Programı .....	76
	ÖZGEÇMİŞ .....	83

Şekil 2.1	$\Omega_{hr}$ kafesi.....	22
Şekil 4.1a	Algoritma I'e göre hatasız çözümler.....	31
Şekil 4.1b	Algoritma I'e göre hatasız çözümler.....	31
Şekil 4.2a	Algoritma II'e göre hatasız çözümler.....	32
Şekil 4.2b	Algoritma II'e göre hatasız çözümler.....	32
Şekil 4.3a	Algoritma I'e göre sabit hatalı çözümler.....	33
Şekil 4.3b	Algoritma II'e göre sabit hatalı çözümler.....	33
Şekil 4.4a	Algoritma I'e göre hatasız çözümler.....	35
Şekil 4.4b	Algoritma I'e göre hatasız çözümler.....	35
Şekil 4.5a	Algoritma II'e göre hatasız çözümler.....	36
Şekil 4.5b	Algoritma II'e göre hatasız çözümler.....	36
Şekil 4.6a	Algoritma I'e göre sabit hatalı çözümler.....	37
Şekil 4.6b	Algoritma II'e göre sabit hatalı çözümler.....	37
Şekil 4.7a	Algoritma I'e göre random hatalı çözümler.....	38
Şekil 4.7b	Algoritma II'e göre random hatalı çözümler.....	38
Şekil 5.1	$c(u)$ ' nun gerçek ve yaklaşık hatasız çözümleri.....	52
Şekil 5.2	$c(u)$ ' nun gerçek ve yaklaşık hatasız çözümleri.....	52
Şekil 5.3	$c(u)$ 'nün gerçek ve yaklaşık hatasız çözümleri.....	53
Şekil 5.4	$c(u)$ 'nün gerçek ve yaklaşık random hatalı çözümleri.....	53
Şekil 5.5	$c(u)$ 'nün gerçek ve yaklaşık random hatalı çözümleri.....	54
Şekil 5.6	Sabit hatalı çözümler.....	55
Şekil 5.7	Random hatalı çözümler.....	55

## ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 4.1 Gerçek Çözümle Yaklaşık Çözüm Arasındaki Farkın Normu .....	34
Çizelge 4.2 Gerçek Çözümle Yaklaşık Çözüm Arasındaki Farkın Normu .....	39



## ÖNSÖZ

Parabolik kısmi türevli diferansiyel denklemlerde ek veriler kullanılarak bilinmeyen katsayıların bulunması, uygulamalı bilimlerin güncel problemlerinden biridir.

Bana bu konuda çalışma olanağı veren ve yardımlarını esirgemeyen danışmanlarım; Sayın Prof. Dr. İdris Gümüş 'e, Yrd. Doç. Dr. Afet Golayoglu' na ve desteklerini her zaman yanımda hissettiğim aileme teşekkür ederim.



## ÖZET

Bu çalışmada, bilinmeyen kaynak parametresinin bulunması ile ifade edilen ters parabolik problemin sayısal çözüm prosedürleri ele alınmıştır. Bu parametre standart sınır ve başlangıç koşulları ve çözüm bölgesinin iç noktasında çözüm üzerinde verilmiş ek koşul ile birlikte ele alınmış lineer parabolik denklemlerde zaman değişkenine bağlı katsayıdır.

Bu problemin iki farklı sayısal çözüm prosedürü ele alınmış ve onların karşılaştırmalı analizi yapılmıştır. Birinci algoritmaya göre lineer parabolik denklemlerdeki bilinmeyen kaynak parametresini içeren terim bazı dönüşümler yardımıyla ortadan kaldırılır ve sistem sonlu farklar çözümü için uygun olan kanonik formda yazılır.

Aynı problemin çözümü için diğer çözüm TTF (Trace-Type-Functional) formülasyonu kullanılarak elde edilmektedir.

Daha sonra lineer olmayan parabolik denklemler için ters katsayı problemleri ele alınmıştır. Bu problemler, gözenekli bir ortamın hidrolik geçirgenliğini ve su kapasitesini ifade eden katsayıların bulunması ile ilişkilidir. Bu katsayıların sadece bilinmeyen çözümün fonksiyonları oldukları kabul edilmiştir. Burada, bilinmeyen katsayı için çokgensel yaklaşım yapılmış ve bilinmeyen bu katsayı sınır üzerinde verilen ek koşul kullanılarak denklemlerden kaldırılmıştır. Bu şekilde ele alınan problem, katsayısı bilinmeyen çözüme ve onun türevlerine bağlı fonksiyon olan standart olmayan başlangıç sınır değer problemine dönüştürülmüştür. Daha sonra bu problem sonlu farklar yöntemiyle çözülerek bilinmeyen katsayı, elde edilen sayısal sonuçlardan belirlenmiştir.

## **ABSTRACT**

In this work, numerical procedures for the solution of the inverse problem of determining unknown source parameter in a parabolic differential equation are considered. This parameter is a coefficient depending on time of the solution in a linear parabolic equation subject to the specification of the solution at an internal point, along with the usual initial boundary conditions. Two different numerical procedures are studied and their comparison analysis is done.

According to first algorithm the term in a linear parabolic equation which contains an unknown source parameter is eliminated by introducing some transformation and system is written in the canonical form that more suitable for the finite-difference solution.

Another procedure to the solution of the same problem is obtained by using TTF(Trace-Type-Functional) formulation.

Another problem considered in this work is the inverse coefficient problems for nonlinear parabolic equations. The problems are characterised the determination of hydraulic conductivity and water capacity of porous media.

The strategy of method here used is to approximate unknown coefficient by polygon and eliminate it in the equation using overspecified data measured on the boundary. In doing so, the problem can be transformed into the standard nonlinear initial boundary value problem in which coefficient is a function depending on the values of unknown solution and their derivatives. Such problem can be solved by the finite difference method and the unknown coefficients can be determined from the numerically obtained solution.



## 1. GİRİŞ

Ters problemlerle çok sayıda bilim, teknolojik ve mühendislik problemlerinin çözümünde karşılaşmaktayız. Uzaydan gönderilen elektromanyetik dalgalarının saçılmasına dayanarak sınır ölçüm sonuçlarını kullanarak yeraltı kaynaklarının bulunması, gözenekli bir ortamın hidrolik özelliklerinin bulunması v.s. ters problemlerle ifade edilmektedir.

Pratik uygulamalar için, deneysel bulgular son derece büyük önem taşır. Bazı fiziksel parametreler (onlara  $f$  diyelim) doğrudan deneysel olarak elde edilemez, yalnız onların etkisi olan  $g$  fonksiyonu ölçülebilen bir değer olabilir.  $f$  ve  $g$  arasında fiziksel kurallara dayanan bir ilişki, genel olarak

$$Af = g \quad (1.1)$$

denklemi ile ifade edilmektedir. Burada  $A$  operatördür.

Matematiksel fiziğin basit denklemleri, ele alınan sistemin her noktasında  $f$  parametresinin kabulüyle elde edilmektedir. Örneğin, ısı transferi denklemi, ısı iletkenlik katsayısı, ısı kaynaklarının yoğunluğu, başlangıç ve sınır koşullarının bilindiği kabul edilerek yazılır. Bu denklemde bilinmeyen, zaman ve uzaya bağlı bir sıcaklık dağılım fonksiyonudur.

(1.1) formülünde verilen  $f$  ile  $Af$  nin hesabı düz problem olarak,  $g$  verildiği zaman  $f$  in belirlenmesi ise ters problem olarak isimlendirilir. (1.1) denklemi farklı fiziksel süreçleri ifade eder ve bu denklemlerin hepsini içeren genel ve ortak bir teori beklenmesi doğru değildir.

Gerçek dünyada, pek çok fiziksel süreç kısmi diferansiyel denklem için yazılı ters problemle ifade edilir. Gözenekli ortamın hidrolik özelliklerinin bulunması, ısı transferinde kaynak kontrollerinin bulunması v.s gibi problemler, parabolik tipli denklemler için ters problemlere örnektir. Bu problemler deneysel olarak ölçülebilen bir niceliği varsayarak deneysel olarak ölçülemeyen ve denklemler ile ifade edilen başka bir niceliğin bulunmasını içerir. En genel halde parabolik denklemler,

$$u_t = F(x, t, u, u_x, u_{xx}, p) \quad (1.2)$$

olarak ifade edilir.

Parabolik denklemlerle ısı transferi ve difüzyon olayları tanımlanabilmekte ve bu denklemler fiziksel korunum kanunlarından (enerjinin korunumu kanunu, kütle korunumu kanunu) elde edilmektedir.

(1.2) denklemindeki  $p$  giriş verileri, denklemin katsayıları veya bu denklemin çözümünün var ve tek olması için verilen sınır ve başlangıç koşulları olabilir. Bu katsayılarla ısı transferi denkleminde ısı geçirgenlik katsayısı, ısı kaynakları için kontrol fonksiyonu v.s. ifade edilmektedir.  $p$  verildiğinde, (1.2) denkleminin düzgün formüle edilmesi için, yeterli bir teori vardır.  $p$  bilinmiyorsa, bu fonksiyonu elde edebilmek için ek koşula ihtiyaç vardır. Ters katsayı problemlerinde ek koşullar, iç noktalarda ve sadece çözümün arandığı bölge sınırlarında olmak üzere iki türlü verilebilir. Bazı durumlarda ek koşulların iç noktalarda elde edilmesi imkansız olduğundan, sadece sınırda verilen koşullarda problem çözülmektedir.

Parabolik denklemleri ifade eden, literatürde görülen modeller ve uygulamalara örnek olarak aşağıdakiler gösterilebilir:

$$\text{Isı İletimi: } u_t - \nabla \cdot (D \nabla u) = f$$

$$\text{Kimyasal Kinetik: } u_t - D_1 u_{xx} = f_1(u, v)$$

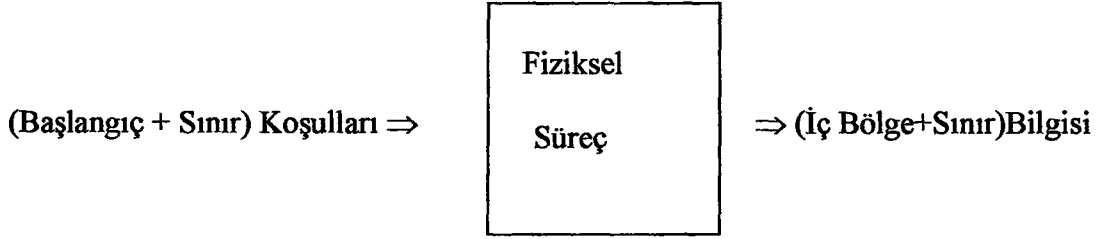
$$v_t - D_2 v_{xx} = f_2(u, v)$$

$$\text{Nüfus Dinamiği: } \frac{dP}{dt} = \alpha P$$

$$\text{veya } \frac{\partial P}{\partial t} - DP_{xx} = f(P)$$

Burada  $D$  difüzyon katsayısı ve  $f$  kaynak terimidir. Yukarıdaki hallerin hepsinde, standart başlangıç koşulları ve sınır koşulları verilir. Modeller adi ve kısmi diferansiyel denklemler biçiminde, tek denklemler veya sistemler olabilir.

Fiziksel modeller başlangıçta "KARA KUTU"lardır; çünkü temeli oluşturan sürecin ayrıntıları tam olarak anlaşılmaz:



Bu süreci belirten matematik modelin şekli hakkında korunum kanunlarından yola çıkarak bazı ön bilgiye sahip olabiliriz. Örneğin, sıklıkla aşağıdaki biçimdeki enerjinin korunumu uygulanır.

*Toplam enerjideki değişme = Sınırdan enerji kaybı + İç kaynaklardan enerji*

Isı akış modeli için,  $E$  özgül enerjiyi,  $\vec{Q}$  ısı akısını ve  $\gamma$ ,  $\Omega$  bölgesinin iç kısmında üretilen ısıyı gösterirse şuna sahip oluruz:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} E dV = \oint_{\partial\Omega} \vec{Q} \cdot \hat{n} dS + \int_{\Omega} \gamma dV = \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{Q}) dV + \int_{\Omega} \gamma dV \quad (1.3)$$

İntegral içindeki fonksiyonlar üzerinde gereken düzgünlük koşulları içerisinde, bu bağıntıdan

$$\frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{Q} + \gamma \quad (1.4)$$

elde edilir.

Özgül ısıyı  $c \equiv \frac{\partial E}{\partial u}$  ile gösterirsek  $c$ ,  $\gamma$  ve  $\vec{Q}$  bilinmeyen  $u'$  ya bağlı iseler ve ilave

olarak  $\vec{Q}$ ,  $\vec{\nabla} u'$  ya monoton olarak bağlı ise, quasi lineer parabolik denkleme

$$c(x, t, u) u_t - \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}(x, t, u, \vec{\nabla} u) = \gamma(x, t, u) \quad (1.5)$$

sahip oluruz.  $\vec{Q}$  ve  $\vec{\nabla} u$  arasında  $\vec{Q} = D \vec{\nabla} u$  şeklinde bir lineer bağıntı kabul edersek,

$$c(x, t, u) u_t - \vec{\nabla} \cdot [D(x, t, u) \vec{\nabla} u] = \gamma(x, t, u) \quad (1.6)$$

denklemini çıkar. Bu model ne kadar iyidir? Bu, dahil edilen fiziğe, dahil edilen malzemelerin doğasına ve fiziksel kanunların doğası üzerinde ön kabullenmelere bağlıdır.

Bu modelle ifade edilen *düz problem*,  $c, D, \gamma$  katsayılarını, uygun olan başlangıç ve sınır koşullarını vermek (ana veriler) ve bunları kullanarak  $u(x, t)$  bilinmeyen çözümü elde etmektir.

*Ters problem* ise ilave verileri vererek hem bilinmeyen katsayıların birini veya birden fazlasını hem de  $u$ 'yu elde etmektir. Örneğin,  $D$ 'nin değişkenlerine bağlılığını elde etmek istersek, deneyler yapmağa mecburuz. Deneylerden giriş ve çıkış verilerini bilerek  $D$ 'yi elde etme problemi ters probleme klasik bir örnektir.

Genel halde,  $D$ 'nin  $x, t, u$  ve  $\vec{\nabla}u$ 'nun karmaşık bir fonksiyonu olduğu beklenebilir. Özel durumlarda  $D$  daha basit bir bağlılığa sahip olabilir. Şayet malzeme çok düzgün ise, malzeme katsayılarının  $x$  uzaysal değişkene bağlı olacağını beklemeyiz. İlave olarak, malzeme özellikleri, bağlı değişkenler sabit tutuldukları takdirde, zamanla değişmezler, o zaman katsayıların  $t$ 'ye sıkı bağlı olmadıklarını bekleyebiliriz. Böyle durumlarda, sadece bağımsız değişkenlere ve belki gradientlere fonksiyonel bağlılık kabul edilmesi mümkündür.  $D$  bilinmeyen katsayının sadece  $t$ 'nin bir fonksiyonu olduğu durum Cannon (1963, 1964, 1984); Jones vd., (1962) ele alınmıştır. Bu bir anlamda, lineer olmayan katsayının  $x$ 'e nazaran  $t$ 'ye daha sıkı bağlı olduğu durumdur. Eğer  $u(x, t)$  uzaysal olarak yavaş değişiyorsa, o zaman  $D(u(x, t)) \approx D(t)$ 'dir.

$D$  difüzyon katsayısı  $x$ 'in bir fonksiyonu ise, genellikle iç bölge ölçmelerine ihtiyaç vardır veya birçok (belki sonsuz) sınır ölçmelerine ihtiyaç duyabiliriz.  $[\vec{\nabla} \cdot (D(x) \vec{\nabla} u) = 0]$  denkleminde  $D(x)$  katsayısını elde etme hali Pilant vd., (1988) tarafından ele alınmıştır. Eğer  $D$  tek başına  $u$ 'nun bir fonksiyonu ise, bazı hallerde bir tek sınır ölçmesinin yeterli olduğu gösterilebilir. Bu problemlerin herbirinde kullanılan yöntemler tamamen farklıdır.

Eğer  $D = D(t), D = D(x)$  veya  $D = D(u)$  bağlılığını biliyorsak, modeli bu bağlantıya göre oluşturabiliriz. Bir ilk yaklaşım için  $D$ 'ye ait bir açılımda ilk birkaç terime karşılık gelmek üzere

$$D(x,t,u) \approx D_1(x) + D_2(u) + D_3(t) \quad (1.7)$$

düşünülebilir. Eğer terimlerden biri diğerlerinden üstün ise, bir ön bağıntı elde edebiliriz, ve mümkün şekilde ana bağıllığın biçimini sabit tuttuktan sonra diğer terimleri yeniden elde edebiliriz.

Fiziksel süreci ifade eden matematiksel modeldeki değişmeyen terimler ihmal edilirler. Basitleştirilen modelin doğruluğu ancak deney yapma ile veya veriye uygun yaparak test edilebilir. Belirli parametre bölgesinde, basitleştirilen model uygun olabilir, ama geçerlilik limitleri genişletildiğinde, söz konusu sürece dönülmelidir ve model yeniden ele alınmalıdır.

Eğer büyük gradientler mevcut ise,  $\bar{Q}$ ,  $\bar{\nabla}u$  'ya doğrusal olmayan bir tarzda bağlı olabilir. Eğer süreç denge durumunda değilse, daha karmaşık bir bağıllık meydana gelebilir. Bunun bir örneği olarak, akı kanununda zamana göre değişim bağıllığı olması halini gözönüne alabiliriz; yani,  $\bar{Q}$  akısının ani olmayan şekilde  $\bar{\nabla}u$  gradientine yanıt verdiği hali. Böylece, karakteristik bir  $\varepsilon$  durulma zamanı vardır. Bir ilk yaklaşım için

$$\varepsilon \partial_t \bar{Q} + \bar{Q} = D_0 \bar{\nabla}u \quad D_0 = \text{sabit}, \quad \varepsilon \ll 1 \quad (1.8)$$

olduğunu kabul ederek,

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= D_0 \int_{-\infty}^t \exp\left[-\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)(t-\tau)\right] \bar{\nabla}u(x,\tau) d\tau \\ &= k * D_0 \bar{\nabla}u \end{aligned} \quad (1.9)$$

konvolüsyonuna sahip oluruz ve

$$u_t - k * \bar{\nabla} \cdot (D_0 \bar{\nabla}u) = \gamma \quad (1.10)$$

bir ısı iletim denklemi elde edilir.

Doğrusal olmayan bağılıkların birçok tipinden hangisinin mevcut olduğunu belirleme hassas şekilde modelleme sürecidir. Lineer veya lineer olmayan denklemlerin biçimini, modelin çıkışını gözlenmiş verilere denk yaparak tayin etme ters problemi çözmenin son hedefidir.

Genelde, katsayılar fiziksel önemi olan ölçümlenmeleri ve parametreleri (örneğin, genlikleri, frekansları) yansıtırlar. Sadece, bir (veya mümkün olabilen birkaç) parametrenin değiştiği deneylerin kurulmasına çalışılır ve sonra tekrarlanan gözlem ile bilinmeyen katsayıların bağıllık biçimini yeniden elde etmek gerekir. Maalesef (hiç olmazsa onları çözmeğe mecbur olan bu görünüm) fiziksel kanunları tasvir eden çoğu denklem gerçekte lineer olmayan denklemdir. Lineer olmamanın şeklini elde etmek zor olabilir. Nüfus dinamiğinde, aşağıdaki klasik problemi gözönüne alalım.

$\lambda$  sabit bir çoğalma hızı ise

$$\frac{du}{dt} = \lambda u \quad (1.11)$$

çoğalma kanununa götürür. Daha akla uygun bir model, kısıtlı çoğalmaya yol açan

$$\frac{du}{dt} = \lambda(u - \alpha u^2) = \lambda(1 - \alpha u)u = (\lambda - \alpha\lambda u)u$$

mantıksal denklemdir. Gerçekte, nüfus

$$\frac{du}{dt} = f(u)$$

formlu daha karmaşık bir çoğalma kanununa sahip olabilir.

Eğer bir  $t_1 < t < t_2$  zaman aralığı üzerinden bu adi diferansiyel denklemin  $u$  çözümünü kontrollü izleyebilirsek,  $f$ 'i elde edebiliriz. Örneğin  $t_1 < t < t_2$  aralığında  $u(t) = h(t)$  ise,

$$\frac{dh}{dt} = f(h(t))$$

elde ederiz ve buradan

$$f(\xi) = \frac{dh}{dt}(h^{-1}(\xi))$$

ifade edilebilir. Bu gözlem, zaman bağıllığı ek koşulun verildiği sınır yakınında uzay bağıllığından çok üstün olduğu, yani  $|u_{xx}(x_0, t)| \ll |u_t(x_0, t)|$  olduğu, parabolik halde yakınsama sonuçlarının çoğuna temel teşkil eder (Pilant vd., 1987a, 1987b, 1987c, 1988).

Bir başka doğal uygulama sınır ölçmeleri aracılığı ile kontroldür. Eğer özel bir sınır üzerinde akı kontrol altında ve yüzeyde bağlı değişkenin ani değerine bağlı ise, o zaman

$$\frac{\partial u}{\partial v} = f(u)$$

biçimindeki bir ilişkiye sahip oluruz. Sınırdaki bir  $x_0$  noktasında arzu edilen değer  $h(t) = u(x_0, t)$  verildiğine göre,  $f$  bilinmeyen kontrolün bulunması istenmektedir. Pratikte, kontrol de ters problemlerle yakından alakalıdır.

Parabolik denklemler için ters problemlerin klasik örnekleri şunlardır:

$c(u)u_t = u_{xx} + \gamma(x, t)$	$c \geq c_0 > 0$	bilinmeyen özgül ısı
$u_t = \partial_x(k(u)\partial_x u) + \gamma(x, t)$		bilinmeyen iletkenlik
$u_t = u_{xx} + f(u) + \gamma(x, t)$		bilinmeyen reaksiyon terimi
$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = F(u(0, t))$		bilinmeyen sınır koşulu

Bunlar kanonik tek katsayılı ters problemlerdir. Katsayılar  $R^1$ 'den  $R^1$ 'e fonksiyonlardır. Fonksiyonel bağıllığı elde etmek için doğru boyutlulukla ilave verileri kullanmalıyız. İlave veriler  $\Omega \times [0, T]$ 'nin bir alt kümesini  $R^1$ ' e tasvir etmelidirler. Bu problemler, bilinmeyen katsayının  $x$  veya  $t$ ' ye bağlı olduğu ama  $u$ ' ya bağlı olmadığı

$$u_t = a(t)\Delta u + \gamma(x, t)$$

$$u_t = \vec{\nabla} \cdot (a(x)\vec{\nabla} u) + \gamma(x, t)$$

$$u_t = \Delta u + f(x, t)$$

$$u_t = \Delta u + p(x)u$$

gibi diğer ters problemlerle çözüm tekniklerine göre farklı problemlerdir. Eğer problemlerde  $x \in \Omega \subset R^n$  ise, bu problemler bilinmeyen katsayının birden fazla değişkenli bir fonksiyon olduğu problemlerdir. Bu problemlerin örnekleri Cannon (1984)'de verilir.

Ele alınan fiziksel süreçte çeşitli ölçme şekilleri olabilir. Bazı durumlarda ek koşul için yapılan ölçüm şekli seçilebilir. Bu ek koşullar çoğu zaman lokal özelliğe sahiptirler. İki farklı tip vardır:

i) Dirichlet tipi,  $u(x_0, t) = h(t) \quad 0 \leq t \leq T$

ii) Neumann tipi,  $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) = h(t) \quad 0 \leq t \leq T$

Bazı durumlarda ek koşullar , spektrumun ölçümüyle, sistemin toplam enerjisinin ölçümüyle, periyodik verilerle veya zaman üzerinden integrali alınmış verilerle verilmiş ise lokal olmayan özelliğe sahiptir; bu koşullar aşağıda verilmiştir:

$$\alpha u(0, t) + \beta u(1, t) = h(t),$$

$$\int_0^1 u(x, t) dx = h(t),$$

$$\int_0^1 |u(x, t)|^p dx = h(t),$$

$$\int_0^t k(t - \tau) u(x_0, \tau) d\tau = h(t).$$

Ele alınan ters problemlerin çözüm yöntemlerini açıklamak için

$$u_t - u_{xx} = f(u) \tag{1.12}$$



$$u_x(0,t) = q_0(t) \quad u_x(1,t) = g_1(t) \quad (1.13)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (1.14)$$

ve

$$u(0,t) = h(t) \quad (1.15)$$

ek koşuluyla verilen başlangıç sınır değer problemini ele alalım. Diğer katsayı problemleri Cannon vd; (1978, 1980, 1981, 1992a) ve Pilant vd; (1986, 1987a, 1987b, 1987c, 1988, 1989) ele alınmıştır. Bu ters problemin çözümü  $h$  verildiğinde  $f$  için yazılan

$$R[f] = u(0,t;f) - h(t) = 0 \quad (1.16)$$

artık denklemin çözümüne denktir. Başka deyişle, düz problemi ifade eden  $f \mapsto h$  eşleşmesinin tersi olan  $h \mapsto f$  eşleşmesini elde etmemiz gerekir. Bu ters problemin çözümü için çoğu artık algoritmalar

$$u(x,t) = \psi(x,t) + \iint K(x,y,t-\tau) f(u(y,\tau)) dy d\tau \quad (1.17)$$

Green fonksiyonları temsiline dayandırılır. Burada (1.16) denklemini çözmek için gerek koşul

$\frac{\partial R}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial f}$ ' in tekil olmamasıdır. (1.17) denklemini  $x = x_0$  noktasında yazarsak

$$u(x_0,t) = \psi(x_0,t) + \iint K(x_0,y,t-\tau) f(u(y,\tau)) dy d\tau$$

elde ederiz. (1.16)-(1.17) denklemler sistemi I.tür lineer olmayan Volterra integral sistemidir. Bu sistem tüm (1.12)-(1.15) bilgilerini içermektedir; ama sistemi bu şekilde çözmek zordur. Kısmi diferansiyel denklem şeklinde yazıldığı zaman

$$u_t(0,t) - u_{xx}(0,t;f) = f(u(0,t)) \quad (1.18)$$

$$= h'(t) - \psi_{xx}(0, t) - \iint K(0, y, t - \tau) f(u(y, \tau)) dy d\tau$$

veya  $u(0, t) = h(t)$  olduğuna göre

$$f(h(t)) = h'(t) - u_{xx}(0, t; f)$$

elde edilir. Bu problem için Pilant vd., (1987c)'de gösterildiği gibi Lipschitz koşulunu sağlıyor ise elde edilen  $f$  ele alınan ters problemin çözümüdür.

(1.16) artık denkleminin çözümü için uygulanan ilk iki yöntem parametre belirleme tipli yöntemlerdir. Bu yöntemlerde  $f$ 'in sonlu  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  parametreler kümesiyle ifade edildiği, yani  $f = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  olduğu kabul edilmektedir. Örneğin  $f(\xi) = \sum_{i=1}^M \alpha_i \phi_i(\xi)$

burada  $\phi_i(\xi)$  temel fonksiyonlardır. Bu yöntemler aşağıda ele alınmıştır:

**a) Ağırlıklı En Küçük Kareler :** Ölçümlerin sayısı  $M$ , parametre uzayının  $N$  boyutunu aşarsa bunun sonucunda aşırı tayin edilmiş olur. Yukarıdaki şekilde  $f'$  ler için

$$\min_{\alpha_j} \left\{ \sum_{i=1}^M w_i R[t_i]^2 \right\} = \min_{\alpha_j} \left\{ \sum_{i=1}^M w_i |u(x_0, t_i, f(\alpha_j)) - h(t_i)|^2 \right\}$$

problemi çözülür. Burada  $w_i > 0$  ağırlıklardır. Fonksiyonel çok sayıda lokal minimuma sahipse bu zor bir optimizasyon problemidir. Bu da en küçük kareler tipli yöntemlerin zorluklarından biridir.

**b) Sıralama Yöntemi :** Bu yöntem temel fonksiyonları değişmez yapar ve problemi aşağıdaki lineer olmayan cebirsel sisteme indirger :

$$R[f(\alpha_j)](t_j) = u(0, t_i, f(\alpha_j)) - h(t_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

Bu yöntem sonlu sayıda sıralanmış noktalarda artığı sıfırlayarak elde edildiğine göre "sıralama yöntemi" olarak isimlendirilir.

Ele alınan problemin çözümü için kullanılan yöntemlerden diğer bir sınıf iterasyon tipli yöntemlerdir. Bu yöntemler  $u$ 'nun  $f$ 'e göre Gateaux türevi ile bağlantılıdır. Gateaux türevi lineer kısmi diferansiyel denklemleri sağlar;  $u$  fonksiyonunun  $f$  katsayısına nasıl bağlı olduğunu görmek için,  $u(x, t; f + s\phi)$  niceliği oluşturulur.

$u(x, t; f + s\phi)$  fonksiyonu aşağıdaki sınır değer problemini sağlar:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= f(u) + s\phi(u) \\ u_x(0, t) &= g_0(t), \quad u_x(1, t) = g_1(t) \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{1.19}$$

$\hat{u} \equiv \frac{\partial}{\partial s} u(x, t; f + s\phi) \Big|_{s=0} \equiv J[f]\phi$  ile Gateaux türevi tanımlanırsa,  $\hat{u}$  nın aşağıdaki denklemi

kolayca sağladığı görülür:

$$\hat{u}_t - \hat{u}_{xx} = f'(u)\hat{u} + \phi(u) \tag{1.20}$$

$$\hat{u}_x(0, t) = 0, \quad \hat{u}_x(1, t) = 0 \tag{1.21}$$

$$\hat{u}(x, 0) = 0 \tag{1.22}$$

burada  $u = u(x, t; f)$ . Gateaux türevi  $L_x = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$  şeklinde tanımlı Frechet türevine

eşdeğer olsun diye yeterince pürüzsüz olduğu kabul edilir.  $f$  ve  $\phi$  fonksiyonlarının bilinmesi (1.18) kısmi diferansiyel denklemini ve onun çözümünü belirler. Gerçekten bu durumda  $\hat{u}(x, t)$  çözümü için

$$\hat{u}(x, t) = \int_0^t \int_{\Omega} \hat{K}(x, y, t - \tau) \phi(u(y, \tau)) dy d\tau$$

elde edilir, burada  $\hat{K}$ ,  $\partial_t - \partial_{xx} - f'(u)$  operatörü için Green fonksiyonudur.

Güncel artık yöntemlerinin (1.12)-(1.15) problemine uygulaması aşağıdaki iterasyon formülü ile yapılmaktadır :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= f^{(n)} + F[R(\dots, f^{(n)})] \\ &= f^{(n)} + F[u(0, t, f^{(n)}) - h(t)] \end{aligned}$$

burada  $F$ , sadece orjinde sıfır olan bir fonksiyondur. Ancak ve ancak  $R \equiv 0$  ise bir çözüme ve yakınsaklığa sahip olunur. Ardışık iterasyon dizisi

$$f = T[f] = [I + F \circ R \circ u]f$$

eşleşmesinin sabit noktasının bulunmasına eşdeğerdir. Bu iterasyon

$$f^{(n)} \mapsto u^{(n)} \mapsto R^{(n)} \mapsto F \mapsto f^{(n+1)}$$

şeklinde bililir. Bu dizinin yakınsaklığı  $F$  dönüşümünün Frechet türevine bağlıdır. Eğer  $|I + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial f}| < 1$  sağlanırsa, o zaman yakınsaklık beklenebilir. İterasyonun yakınsaklığını garanti etmek için,  $F$  seçilebilir olmalıdır.  $F$ 'in seçimi iterasyonun yakınsaklığını sağlar ve farklı iterasyon şemasını doğurur. Bu iterasyon şemaları:

**a) Newton-Raphson** : Bu yöntemde  $R[f] = u(0, t, f) - h(t) = 0$  lineer olmayan denklemin çözümü

$$f^{(n+1)} = f^{(n)} - \left( \frac{\partial R}{\partial f} \right)^{-1} (f^{(n)}) \cdot R[f^{(n)}]$$

iterasyonu ile yapılır.  $J \equiv \frac{\partial R}{\partial f}$  olarak

$$f_{n+1} = f_n - J[f_n]^{-1} R[f_n] = f_n - J[f_n]^{-1} (u(0, t, f_n) - h(t)) \quad (1.23)$$

yazılabilir. Tekrar düzenleyerek,

$$J[f_n](f_{n+1} - f_n) = h(t) - u(0, t, f_n)$$

olur. Bu denklemden  $f_{n+1}$  elde edilebilir.  $\hat{u} \equiv J[f_n](f_{n+1} - f_n)$  alınarak,  $\hat{u}$ 'nin

$$\hat{u}_t - \hat{u}_{xx} = f'_n(u_n)\hat{u} + f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) \quad (1.24)$$

$$\hat{u}_x(0,t) = 0, \quad \hat{u}_x(1,t) = 0 \quad (1.25)$$

$$\hat{u}(x,0) = 0 \quad (1.26)$$

sistemini ve  $x = 0$ 'daki

$$\hat{u}(0,t) = h(t) - u(0,t;f_n) \quad (1.27)$$

ek koşulunu sağladığı gösterilebilir. Buradan,

$$\hat{u}(0,t;f) = \int_0^t \int_0^1 \hat{K}(0,y,t-\tau)[f_{n+1}(u_n(y,\tau))] dy d\tau$$

olduğu bellidir. Burada  $\hat{K}, \partial_t - \partial_{xx} - f'_n(u_n)I$  operatörü için Green fonksiyonudur. Bu birinci tip Volterra integral denklemdir.  $x = 0$  sınırı üzerinde (1.24) denklemi ve (1.27) sınır koşulu kullanılarak  $f_{n+1}$ 'i elde etmek için

$$h'(t) - u_t(0,t;f_n) - \hat{u}_{xx}(0,t;f^{(n+1)}) \\ f'_n(u_n(0,t))(h(t) - u_n(0,t)) + f_{n+1}(u_n(0,t)) - f_n(u_n(0,t)).$$

denklemini elde edilir. Bu,  $f_{n+1}$  için lineer olmayan denklemdir ve iterasyonla çözülür.

**b) Quasi-Newton:** Bu yöntemde  $J[f_n]^{-1}$ 'in yerine sabit  $K$  operatörü alınır ve bunun sonucunda

$$f^{(n+1)} = f^{(n)} - K.R[f^{(n)}]$$

elde edilir. Doğal Quasi-Newton yöntemi (1.24) içinde  $f'_n(u_n)$ 'nin  $f'_n(h)$  ile değiştirilmesiyle tanımlanmaktadır. Başka mümkün şema  $J[f_n]$ 'in bazı iterasyonlar için sabit tutulmasıyla elde edilmektedir.

(1.12) – (1.15) ters problemine farklı bir yaklaşım (1.18)'i  $h$  cinsinden  $f$  için çözersek elde edilir.

$$f(s) = h'(h^{-1}(s)) - u_{xx}(0, h^{-1}(s)) \quad (1.29)$$

(1.24) 'ü kullanarak (1.12)' den  $f$  'i ortadan kaldırırsak

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = h'(h^{-1}(u(x, t))) - u_{xx}(0, h^{-1}(u(x, t))) \quad (1.30)$$

Trace Type Functional (TTF) denkleminde ulaşırız. Bu denklemin düzgün tanımlı olması için ek koşul veri  $0 \leq h^{-1}(u(x, t)) \leq t$  kısıtlamasını sağlamak zorundadır. Böylece (1.30) düz problemi, (1.29)'den elde edilen  $f$  ile  $u(x, t)$  için çözülmektedir.

Bu yöntemin zorluğu elde edilen denklemin lineer olmayan denklem olmasından kaynaklanır. Bu yöntemle ilgili bazı sonuçlar zamana bağlı değişken için sonlu farklar uygulanarak Cannon (1990)'da, elde etmiştir. TTF yöntemi için son gelişmeler (Cannon vd., 1981, 1988a,; 1988b; 1988c, 1989a; 1898b)'de gösterilmiştir. Eğer (1.18) den, aşağıdaki temsili

$$u(x, t) = \psi(x, t) + \iint K(x, y, t - \tau) f(u(y, \tau)) dy d\tau$$

kullanarak  $u$  yok edilirse

$$f(h(t)) = h'(t) - \psi(0, t) - \iint K_{xx}(0, y, t - \tau) f(u(y, \tau)) dy d\tau \quad (1.31)$$

Fixed Point Projection (FPP) yöntemi elde edilir. FPP, TTF ve "sıralama" yöntemleri arasında bağlantı vardır. TTF denklemin için tam kapalı şema aşağıdaki şekilde yazılır.

$$u_t^{(n+1)} - u_{xx}^{(n+1)} = h'(h^{-1}(u^{(n+1)}(x, t))) - u_{xx}^{(n+1)}(0, h^{-1}(u^{(n+1)}(x, t))). \quad (1.32)$$

Bu ise aşağıdaki iki denklem çiftine ayrılabilir:

$$u_t^{(n+1)} - u_{xx}^{(n+1)} = f^{(n+1)}(u^{(n+1)})$$

$$f^{(n+1)}(h(t)) = h'(t) - u_{xx}^{(n+1)}(0, t)$$

$0 \leq t \leq t_j$  için bu yöntemle TTF denkleminin çözülmüş olduğunu kabul edelim. Verilerin monotonluğu ve aralık üzerinde verilen koşuldan dolayı  $f^{(n+1)}$ 'in,  $[h(t_j), h(t_{j+1})]$  aralığında değiştiği görülebilir. Bu ise (1.31) deki lineer olmayan Volterra integral denkleminin  $t > t_j$  için çözülmesi olarak yorumlanabilir:

$$f(h(t)) = h'(t) - \psi(0, t) - \int_0^{t_j} \int_0^1 K_{xx}(0, y, t_{j+1} - \tau) f(u(y, \tau)) dy d\tau \quad (1.33)$$

$$- \int_{t_j}^t \int_0^1 K_{xx}(0, y, t_{j+1} - \tau) f(u(y, \tau)) dy d\tau.$$

$0 \leq t \leq t_j$  için  $u(x, t) \in [h(t_0), h(t_j)]$  olduğundan dolayı bu denklemin sağ tarafında ilk üç terim bilinmektedir.  $\bar{f}$  için  $u_t(0, t_j, \bar{f}) = h'(t_j)$  olacak şekilde  $h'(t)$  düzenlenirse o zaman,

$$\bar{f}(\bar{u}(t_j)) = h'(t_j) - \psi(0, t_j) - \int_0^{t_j} \int_0^1 K_{xx}(0, y, t_j - \tau) \bar{f}(\bar{u}(y, \tau)) dy d\tau$$

elde edilir.

Bir boyutlu durumda ek koşul ve başlangıç verilerin etkisini görmek ve modeli ona göre yapmak mümkündür. Yüksek boyutluda, bu strateji çalışmaz. Aşağıdaki ters problemi ele alalım:

$$u_t - \Delta u = f(u) \quad \Omega \times [0, T] \quad (1.34)$$

$$u = h \quad \partial\Omega \times [0, T] \quad (1.35)$$

ek Neumann koşulu

$$\frac{\partial \psi(x_0, t)}{\partial \nu} = g_0(t) \quad (1.36)$$

verilmiştir. Ek koşul veri, bir boyutlu eğri üzerinde verilmiştir. (1.17) temsilini kullanarak,

$$u(x,t) = \psi(x,t) + \iint K(x,y,t-\tau)f(u(y,\tau))dy d\tau$$

artık denklemini elde ederiz:

$$g_0(t) = \frac{\partial u}{\partial v}(x_0,t) = \frac{\partial \psi}{\partial v}(x_0,t) + \iint \frac{\partial K(x_0,y,t-\tau)}{\partial v} f(u(y,\tau))dy d\tau$$

Bu Neumann veri-katsayı dönüşümü olup  $f(u)$  için I. tip lineer olmayan integral denklemdir. Herhangi basit yöntemle bunun ikinci tipe nasıl dönüşeceğini görmek açık değildir. Jacobi iterasyon yöntemine benzeşim ile diagonal terimleri çıkartmak ikinci tip denklemini elde etmek için mümkündür;

$$\int_0^t k(t-\tau)f(h(\tau))d\tau = \frac{\partial \psi}{\partial v} - g_0(t) + \iint \frac{\partial K}{\partial v}(f(h(\tau))) - f(u(y,\tau))dy d\tau$$

burada  $k(t) = \int_0^1 K(x_0,y,t)dy$  ile ifade edilir. Genelde bu, kesirli mertebeli çekirdeğe sahip integral denklemlerinin tersine götürür ki bunların tersi lokal diferansiyel operatör değildir. (1.12)-(1.14) denklemlerini

$$E(t) = \int_0^1 u(x,t)dx$$

ek koşul ile ele alalım.  $[0,1]$  üzerinde (1.12)'yi integre edersek

$$E'(t) = g_1(t) - g_0(t) - \int_0^1 f(u(y,t))dy \quad (1.37)$$

elde edilir. Bu  $K=1$  pürüzsüz çekirdeği ile, I. tip lineer olmayan Fredholm integral denklemdir. Bu durum iyi değildir; ama  $f_1 > f_2 \Rightarrow u_1 > u_2 \Rightarrow E_1 > E_2$  olduğu kolayca görülür ve  $E$   $f$ 'in monoton fonksiyonudur. Bu ise sıralama yöntemiyle,



$E(t_j) = \int_0^1 \bar{f}(u(x, t_j)) dx$  koşulunu sağlayan bir tek parça parça lineer  $\bar{f}$  fonksiyonu verecektir.

Eğer  $u$ , bilinmeyen katsayı  $f$ 'in artan bir fonksiyonu ve  $f_1 > f_2$  ise,  $u(x_0, t; f_1) > u(x_0, t; f_2)$ . Bu yöntemle sıralama yöntemleri oldukça kullanışlıdır. Eğer ilk değer  $f_0$  bilinirse,  $u_0 < u < u_1$  aralığında  $f(u) \approx f_0 + M_0(u - u_0)$  yazılabilir ki burada  $M$ ,  $u(0, t_1; f) = h(t_1)$  koşulunun sağlanmasından elde edilmiş olan bir eğimdir. Monotonluk yüzünden bu denklemi sağlayan birden fazla olmayan  $M_0$  değeri vardır. Bu yolla  $M_i$ 'nin ardışık değerleri bulunur.

Düz problemler lineer olmayan problem oldukları için  $f \mapsto u|x, t; f|$  dönüşümü üzerinde hesapları çok kesin almak zorundayız. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemlerinde sınır değerlendirilmesinde tekil integral denklem teorisi kullanılmalıdır. Bu zorluk yüzünden, sayısal simülasyonlar çok faydalıdır. Problemleri sonlu boyuta indirgemek zorlukları tam olarak ortadan kaldırmaz; ama gerçek datalar çoğu zaman kesikli oldukları için daha avantajlıdır.

FPP yöntemini şekil değişikliğe dayalı ters problemler, direkt çözücüye göre yenilene stratejide çok az üstünlüğe sahiptir. Bunun sebebi, her iterasyonda FPP yöntemi bir düz çözüme denktir. FPP yöntemi çok küçük sayıda iterasyonlar için yakınsaktır.

Ters problemleri ayırttığımız zaman, pürüzsüzlük bizi ilgilendirmez. Bu durum için bütün fonksiyonlar kısım kısım lineerdir veya düşük mertebeli parçalı parçalı polinomdur. Kesikli verilerle kesin dataya yaklaşmalıyız; ve bu durumda ek koşullara hatalar eklenecektir.

Bu çalışmada parabolik diferansiyel denklemlerde bilinmeyen katsayıların bulunması problemi incelenmiştir. Tezin yapısı aşağıdaki şekildedir:

2. Bölümde, yarılineseer parabolik diferansiyel denklemlerde bilinmeyen kaynak fonksiyonunun elde edilmesi için prosedür I açıklanmış ve bu algoritma için sonlu fark şeması ifade edilmiştir.

3. Bölümde problemin çözümü için uygulanan ikinci çözüm algoritması olan Trace-Type Formulation (TTF) ele alınarak bu çözüm yolunun uygulaması hakkında gerekli açıklamalara yer verilmiştir

4. Bölümde uygulanan iki farklı çözüm algoritmalarının sayısal çözüm sonuçları verilmiştir. Sayısal çözüm için test oluşturulmuş, yapılan test için birinci sayısal çözüm algoritması, ve ikinci çözüm yolu uygulanmıştır. Sayısal çözüm örnekleri üzerinde bu iki algoritmanın karşılaştırmalı analizi yapılmıştır.

5. Bölümde, lineer olmayan parabolik denklemlerde bilinmeyen katsayıların bulunması problemi ele alınmıştır. Gözenekli ortamın su kapasitesi ve hidrolik geçirgenliği için ters problemin problem gösterimi ifade edilmiş ve sayısal çözüm sonuçları ilgili grafikler çizilerek yorumlar yapılmıştır.

6. Bölümde, ele aldığımız problemlerin sonuçları hakkında açıklamalara yer verilmiş ve daha sonra yapılacak çalışmalar da ele alınacak problemler ifade edilmiştir.

## 2. YARI LİNEER PARABOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE BİLİNMEYEN KAYNAK FONKSİYONUNUN ELDE EDİLMESİ İÇİN BAZI SAYISAL ALGORİTMALARIN KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde,

$$u_t = u_{xx} + p(t)u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T = (0,1) \times (0,T) \quad (2.1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (0,1), \quad (2.2)$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad t \in (0,T), \quad (2.3)$$

$$u(1,t) = \mu_2(t), \quad t \in (0,T), \quad (2.4)$$

sistemini ve

$$u(x^*,t) = E(t), \quad 0 < x^* < 1, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.5)$$

ek koşulunu sağlayan bilinmeyen  $u = u(x,t)$  fonksiyonu ve  $p = p(t)$  kaynak parametresinin bulunması için yazılı ters problemin sayısal çözüm algoritmaları incelenmiştir. Burada  $f(x,t)$ ,  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_2(t)$  ve  $E(t)$  bilinen fonksiyonlardır ve  $x^*$ ,  $(0,1)$  içinde tanımlanan sabit bir noktadır. Bu tip problemler, Cannon vd., (1987) tarafından verilen, farklı frekanslarda belirli kimyasal modelde soğurulan ışık ve kaynak kontrolü ile kontrol problemlerinde ortaya çıkar.

Eğer  $u$  kimyasal konsantrasyonu veya sıcaklığı gösterirse o zaman  $p(t)$  kaynak kontrolü olarak yorumlanabilir. Eğer  $p(t)$  biliniyorsa, (2.1) -(2.5) direkt başlangıç sınır değer problemi  $f(t) \in C(0,T)$  ile  $u(x,t)$ 'nin tek düzgün bir çözümüne sahiptir (Ladyzhenskaya vd., 1967).

Bu ve bilinmeyen kaynak kontrol fonksiyonunu belirleyen benzer ters problemler son yıllarda bazı bilim adamları tarafından ele alınmıştır (Cannon vd., 1992, 1994). Bu çalışmada, bu tip ters problemler için iki tip sayısal çözüm algoritmasını ele alacağız. (2.1)-(2.5) probleminin çözümü için uygulanan algoritmalarından biri Cannon vd., (1994) çalışmasında önerilmiştir. Bu algoritmaya göre, (2.1) denklemindeki  $p(t)u$  terimi, bazı dönüşümlerle ortadan kaldırılır ve

(2.1)-(2.5) sistemi kanonik formda yazılır; ve sonlu fark çözümü için uygun bir şekle dönüşür (Ek 1).

Aynı problemin çözümü için diğer metot TTF(Trace-Type-Formulation) Colton vd., (1990); Cannon vd., (1991b, 1992b) kullanılarak elde edildi.

## 2.1 Prosedür I ( Kanonik Gösterim)

Bu gösterime göre,

$$v(x,t) = u(x,t) \exp\left(-\int_0^t p(s)ds\right), \quad (2.6)$$

$$r(t) = \exp\left(-\int_0^t p(s)ds\right), \quad (2.7)$$

olmak üzere  $(u, p) \rightarrow (v, r)$  dönüşümleri kullanılarak

$$u(x,t) = \frac{v(x,t)}{r(t)} \quad \text{ve} \quad p(t) = -\frac{r'(t)}{r(t)} \quad (2.8)$$

denkleminde  $p(t)u$  terimi ortadan kaldırılmakta ve bu dönüşümler sonucu, (2.1)-(2.5) sisteminin  $(v, r)$  ikilisi olarak

$$v_t = v_{xx} + r(t).f(x,t), \quad (x,t) \in Q_t \quad (2.9)$$

$$v(x,0) = \varphi(x), \quad 0 < x < 1 \quad (2.10)$$

$$v(0,t) = r(t).\mu_1(t) \quad 0 \leq t < T$$

$$v(1,t) = r(t).\mu_2(t) \quad 0 \leq t < T$$

ve

$$r(t) = \frac{v(x^*, t)}{E(t)} \quad 0 < x^* < 1, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.11)$$

ek koşulunu elde ederiz (Algoritma I). (2.11) denklemini (2.9)'da yerine yazarsak,  $v$ ' nin aşağıdaki

$$v_t = v_{xx} + v(x^*, t) \cdot F(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (2.12)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (0, 1),$$

$$v(0, t) = v(x^*, t)M_1(t), \quad t \in (0, T),$$

$$v(1, t) = v(x^*, t)M_2(t), \quad t \in (0, T),$$

lokal olmayan parabolik denklemi sağladığı görülür. Burada,

$$F(x, t) = \frac{f(x, t)}{E(t)} \quad t \in (0, T),$$

$$M_1(t) = \mu_1(t) / E(t),$$

$$M_2(t) = \mu_2(t) / E(t), \quad t \in (0, T),$$

ile ifade edilir. (2.12) sistemi sonlu farklar yöntemi uygulanarak çözülebilir.  $v(x_i, t_j)$ 'nin yaklaşımı  $v_i^j$  olarak kabul edilirse (2.12) denklemi için tam kapalı şema şekil (2.1) kafesi kullanılarak,  $i = \overline{2, N-1}$ ,  $j = \overline{1, M-1}$  ve

$$w_{h\tau} = \{ (x_i, t_j), x_i = (i-1)h, t_j = (j-1)\tau, h = 1/(N-1), \tau = T/(M-1) \}$$

olarak tanımlanarak aşağıdaki şekilde

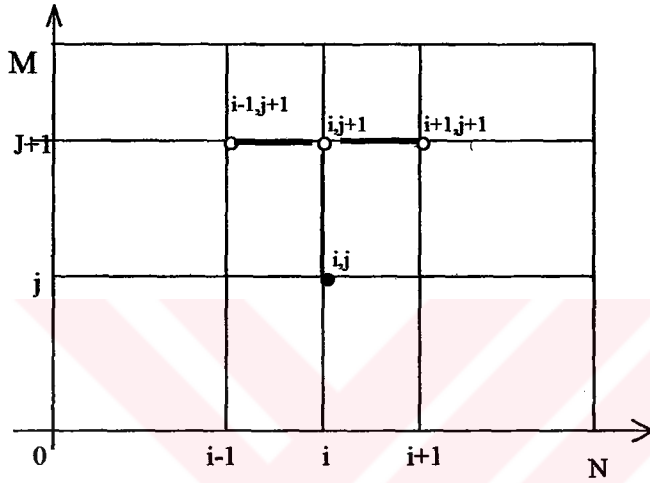
$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} = \frac{v_{i+1}^{j+1} - 2v_i^{j+1} + v_{i-1}^{j+1}}{h^2} + v_i^j \cdot F_i^{j+1} \quad i = \overline{2, N-1}, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad (2.13)$$

$$v_i^1 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{1, N} \quad (2.14)$$

$$v_i^j = M_1(t_j), \quad j = \overline{2, M} \quad (2.15)$$

$$v_N^j = M_2(t_j), \quad j = \overline{2, M}$$

yazılabilir. Bu sonlu farklar şemasının çözümü TDMA (Tree Diagonal Matrix Algorithm) ile yapılmaktadır (Ek 2).



Şekil (2.1)  $\Omega_{hr}$  kafesi.

### 3. PROSEDÜR II (TTF GÖSTERİMİ)

Eğer (u,p) fonksiyon çifti (2.1)-(2.5) ters probleminin çözümü ise o zaman,

$$E_t = u_{xx} \Big|_{x=x^*} + p(t)E(t) + f(x,t) \quad (3.1)$$

sağlanmalıdır. Buradan,

$$p(t) = \frac{E_t - u_{xx} \Big|_{x=x^*} - f(x,t)}{E(t)} \quad (3.2)$$

elde edilir ki, bu ifadeyi tekrar (2.1)'de yerine yazarsak,

$$u_t = u_{xx} + \left( \frac{E_t - u_{xx} \Big|_{x=x^*} - f(x,t)}{E_t} \right) u + f(x,t) \quad (x,t) \in Q \quad (3.3)$$

$$u(x,t) = \varphi(x) \quad x \in (0,1) \quad (3.4)$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(1,t) = \mu_2(t), \quad t \in (0,T) \quad (3.5)$$

standart başlangıç sınır değer problemini elde etmiş oluruz (Algoritma II). Bu problemi sayısal olarak çözebiliriz. Elde edilen çözümleri (3.2) denkleminin sağ tarafındaki u yerine yazarsak,  $p(t)$  için yaklaşık çözümü elde etmiş oluruz. (3.3)-(3.5) sistemini tekrar sonlu farklar yöntemi ile çözeceğiz. Sonlu fark şeması,

$$\Omega_h = \left\{ (x_i, t_j) : x_i = ih, t_n = \tau n, i = \overline{0, N}, n = \overline{0, M}, h = \frac{1}{M}, \tau = \frac{T}{M} \right\}$$

kafesi kullanılarak

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + k(u_{i+1}^j)u_i^{j+1} + f_i^{j+1}, \quad i = \overline{2, N-1}, j = \overline{2, M-1} \quad (3.6)$$

şeklinde olacaktır. Burada,

$$k(u_{i^*}^j) = \frac{\left( \frac{E_{i+1} - E_i}{\tau} - \frac{u_{i^*+1}^j - 2u_{i^*}^j + u_{i^*-1}^j}{h^2} - f_i^j \right)}{E_{j+1}}, \quad i = \overline{2, N-1}, \quad j = \overline{2, M-1} \quad (3.7)$$

başlangıç ve sınır koşullarıyla

$$u_i^1 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{1, N} \quad (3.8)$$

$$u_1^j = \mu_1(t_j), \quad i = \overline{1, N} \quad (3.9)$$

$$u_N^j = \mu_2(t_j), \quad j = \overline{2, M} \quad (3.10)$$

ifade edilmektedir. (3.6)' da aynı değişkenlerin katsayılarını toplayıp denklemleri tekrar düzenler ve (-1) ile çarparsak,

$$\frac{1}{h^2} u_{i-1}^{j+1} - \left( \frac{2}{h^2} + \frac{1}{\tau} + k(u_{i^*}^j) \right) u_i^{j+1} + \frac{1}{h^2} u_{i+1}^{j+1} = - \left( \frac{u_i^j}{\tau} + f_i^{j+1} \right) \quad (3.11)$$

elde edilir. Sınır koşullarını, TDMA yöntemine uygun bir biçimde aşağıdaki şekilde yazalım:

$$u_1^{j+1} = \chi_1^{j+1} u_2^{j+1} + \mu_1^{j+1}$$

$$u_N^{j+1} = \chi_2^{j+1} u_{N-1}^{j+1} + \mu_2^{j+1}$$

Burada,

$$\chi_1^{j+1} = 0, \quad \chi_2^{j+1} = 0$$

$$\mu_1^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}), \quad \mu_2^{j+1} = \mu_2(t_{j+1})$$

bağıntılarıyla verilmektedir.



#### 4. SAYISAL ÇÖZÜM SONUÇLARI

##### 4.1 Test 1

Problemin çözümünün doğruluğunu göstermek için test oluşturalım.

$$u_t = u_{xx} + p(t)u + f(x,t) \quad 0 < x < 1, 0 < t < T \quad (4.1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (4.2)$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad 0 < t < T \quad (4.3)$$

$$u(1,t) = \mu_2(t), \quad 0 < t < T$$

probleminde,

$$u(x,t) = t \sin x + 1$$

$$p(t) = t^2$$

olarak alınsın.

Başlangıç ve sınır koşullarını  $u(x,t)$  fonksiyonuna uygulayarak,  $\varphi(x)$ ,  $\mu_1(t)$  ve  $\mu_2(t)$

$$u(x,0) = 0 \cdot \sin x + 1 = 1 = \varphi(x)$$

$$u(0,t) = t \cdot \sin 0 + 1 = 1 = \mu_1(t) \quad (4.4)$$

$$u(1,t) = t \cdot \sin(1) + 1 = \mu_2(t)$$

değerini bulalım.

$u(x,t)$  fonksiyonunun, (4.1) için gerekli olan türevlerini alır,

$$u_t(x,t) = (t \sin x + 1)'_t = \sin x$$

$$u_x(x,t) = t \cos x$$

$$u_{xx}(x,t) = -t \sin x$$

ve bunları (4.1) denkleminde yazarsak

$$F(x,t) = \sin x(1+t-t^3) - t^2$$

olarak bulunur.

Şimdi de aynı problemde  $f(x,t) = \sin x(1+t-t^3) - t^2$  ve (4.4) sınır ve başlangıç koşullarını sağlayan ve önceden bildiğimiz  $u(x,t)$  fonksiyonunu bulalım. O zaman problem,

$$u_t = u_{xx} + p(t)u + \sin x(1+t-t^3) - t^2 \quad (4.5)$$

$$u(x,0) = 1 \quad (4.6)$$

$$u(0,t) = 1 \quad (4.7)$$

$$u(1,t) = t \sin(1) + 1 \quad (4.8)$$

ve ek koşul,

$$u(x^*,t) = t \sin(x^*) + 1 \quad (4.9)$$

şeklinde yazılır.

#### 4.2 Birinci Çözüm Prosedürü ile Sayısal Çözüm

(4.5)-(4.9) problemine, (2.6)-(2.8) dönüşümlerini uygulayalım.

$F(x,t) = \sin x(1+t-t^3) - t^2$  olarak alıp, dönüşümlere göre (4.5)' i tekrar düzenlersek

$$v_t = v_{xx} + r(t) \left[ \sin x(1+t-t^3) - t^2 \right] \quad (4.10)$$

başlangıç ve

$$u(x,0) = \frac{v(x,0)}{r(0)}$$

$$u(x,0) = 1, \quad r(0) = 1 \text{ olduğundan}$$

sınır koşullarına dönüşümleri uygularsak

$$u(0,t) = \frac{v(0,t)}{r(t)} = 1 \text{ den,}$$

$$v(0,t) = r(t) \text{ olarak,}$$

$$u(1,t) = \frac{v(1,t)}{r(t)} = t \sin(1) + 1 \text{ den ise sağ sınır koşulu}$$

$$v(1,t) = r(t) + \sin(1) + t$$

olarak bulunur. (4.9)'daki ek koşula (2.6)-(2.8)deki dönüşümleri uygularsak

$$v(x^*,t) = r(t) + \sin(x^*) + r(t)$$

olarak ek koşul ve burada

$$r(t) = \frac{v(x^*,t)}{t \sin(x^*) + 1}$$

ile verilir.

Dönüşümleri uygulayarak elde ettiğimiz başlangıç sınır ve ek koşula göre (4.5)-(4.9) sistemini tekrar düzenlersek,

$$v_t = v_{xx} + v(x^*,t)F(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad T > t > 0 \quad (4.12)$$

$$v(x,0) = 1, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (4.13)$$

$$v(0,t) = \frac{v(x^*,t)}{t \sin(x^*) + 1}, \quad 0 < t < T \quad (4.14)$$

$$v(1,t) = \frac{v(x^*,t)}{t \sin(x^*) + 1} (t \sin(1) + 1), \quad 0 < t < T \quad (4.15)$$

bulunur; burada

$$F(x,t) = \frac{\sin x(1+t-t^3)-t^2}{t \sin(x^*)+1}$$

İle ifade edilir.  $v_i^n$  olarak  $v(x_i, t_n)$ 'nin yaklaşımını kabul edersek, (4.12) denklemini için tam kapalı şema,

$$W_{hj} = \{(x_i, t_n) : x_i = (i-h), t_n = (n-1)\sigma, h = 1/(N-1), \sigma = T/(M-1), i = 2, N-1, n = 1, m-1\} \quad (4.16)$$

olarak tanımlanarak, aşağıdaki şekilde

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\sigma} = \frac{v_{i+1}^{n+1} - 2v_i^{n+1} + v_{i-1}^{n+1}}{h^2} + v_{i^*}^n \cdot \frac{\sin(x(i))(1+t_{n+1}-t_{n+1}^3)-t_{n+1}^2}{t_{n+1} \sin(x(i^*)) + 1} \quad (4.17)$$

$$v_i^1 = 1$$

$$v_1^n = 1$$

$$v = (t_n \sin(1) + 1) \frac{v_{i^*}^{n+1}}{t_n \sin(x(i^*))}$$

yazılabilir.

### 4.3 Test 2

İkinci çözüm sonuçları serisinde  $p(t)$  fonksiyonu için  $p(t) = 10te^{-t^2}$  olarak yani  $t \rightarrow \infty$  olduğunda sınırlı bir fonksiyon, çözüm bölgesinde hem artan hem de azalan bir özelliğe sahip fonksiyon olarak alınmıştır. Test 1'de yapılan dönüşümler burada da yapılmış ve çözüm sonuçları Şekil 4.4a-b, Şekil 4.5a-b, Şekil 4.6a-b, ve Şekil 4.7a-b'de verilmiştir.

#### 4.4. Bilgisayar Çözüm Sonuçları

**Örnek 1:** Önce, yapılan çözüm şemalarının yaklaşım şemaları olduğunu kontrol etmek için farklı zaman ve uzay adımları kullanılarak sayısal çözümler yapılmıştır (Ek 3).

Bu sonuçlar Şekil 4.1a-b ve Şekil 4.4a-b de gösterilmiştir. Şekillerde düz eğri ile gerçek  $p(t)$  çözümü, sembolü eğrilerle ise yaklaşık çözüm sonuçları gösterilmiştir.

Şekil 4.1a ve Şekil 4.4a'da uzay adımı sabit tutulmuş, zaman adımı değiştirilerek yapılan çözüm sonuçları verilmiştir. Şekil 4.1b ve Şekil 4.4b'de ise zaman adımı sabit tutulmuş, farklı uzay adımlarına göre çözüm sonuçları verilmiştir(Algoritma I).

Algoritmaya II göre de benzer işlemler yapılmış ve sayısal çözüm sonuçları Şekil 4.2a-b ve Şekil 4.5a-b'de verilmiştir. Şekillerden görüldüğü gibi adımların küçülmesi, yaklaşık ve gerçek çözümlerin birbirine yaklaşmasını sağlamaktadır. Bu da, yapılan şemaların yaklaşım şeması olduklarını göstermektedir.

**Örnek 2:** Bu örnekte  $p(t)$  fonksiyonun bulunması için kullanılan  $E(t)$  ölçüm sonucu üzerine hatalar (ölçüm cihazının hata payı) eklenmiş ve yapılan şemaların bu hatalara karşı duyarlılığı araştırılmıştır.

Şekil 4.3a ve Şekil 4.6a'da  $E(t) = E(t)(1 + \delta(t, a))$  alınarak,

1. Durum için sonuçlar Şekil 4.3a ve Şekil 4.6a'da verilmiştir. Şekil 4.3a ile aynı zaman ve uzay adımlarıyla yapılan Şekil 4.1a'daki \*'la gösterilmiş çözüm karşılaştırıldığında yaklaşık çözümlerde Şekil 4.3a'da az bir kötüleşme görülmüştür.

Aynı durum, II. Algoritma ile yapılan çözümler içinde söylenebilir. Bu durumda Şekil 4.3b ve Şekil 4.1b'deki ■ ile gösterilmiş çözümler karşılaştırılmıştır. Şekil 4.3b'de az bir kötüleşme görülmüştür.

2. Durum için yapılan sayısal çözüm sonuçları Şekil 4.7a'da verilmiştir. ■ ile gösterilen çözümler  $d(t, 0.02)$ , hataları ile yapılan çözümlere karşı gelmektedir. Şekilden görüldüğü gibi bu durumda elde edilen sayısal çözüm sonuçları daha kötüleşmekte ve gerçek çözüme belli bir integral normuna göre yaklaşmaktadır.

Beklendiği gibi  $d$  değerinin küçülmesi ile daha iyi yaklaşım elde edilmektedir. Benzer çözüm sonuçları Algoritma II için Şekil 4.7b'de verilmiştir.

**Örnek 3:** Bu örnekte Algoritma I. ve Algoritma II. random hatalara göre duyarlıklarını karşılaştırmak için eşit zaman ve uzay adımlarına göre bir dizi sayısal çözümler yapılmıştır. Bu sayısal çözüm sonuçları Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2'de verilmiştir.

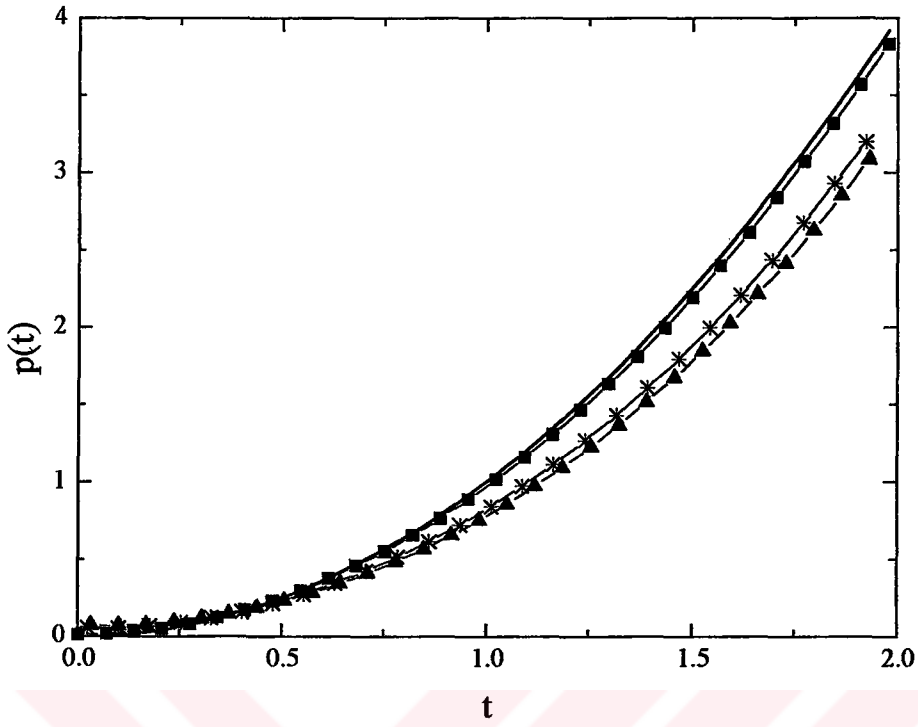
Tablodan görüldüğü gibi, çok küçük hatalara karşı Algoritma I. ve Algoritma II' nin duyarlılığı çok fark göstermezken, büyük hatalara karşı Algoritma II, Algoritma I göre daha az duyarlılık göstermiştir.

**Örnek 4:** Bu örnekte çözüm algoritmaları I ve II ile özdeş olarak sıfır başlangıç koşulu, sıfırdan farklı sınır koşulu olan bir problem çözümü yapılmıştır. Böyle bir problemi, test oluşturma bölümünde yapıldığı gibi uygun sağ taraf ve katsayılar seçildiğinde,  $u(x, t) = t \sin x$  fonksiyonu çözüm olarak sağlayabilir.

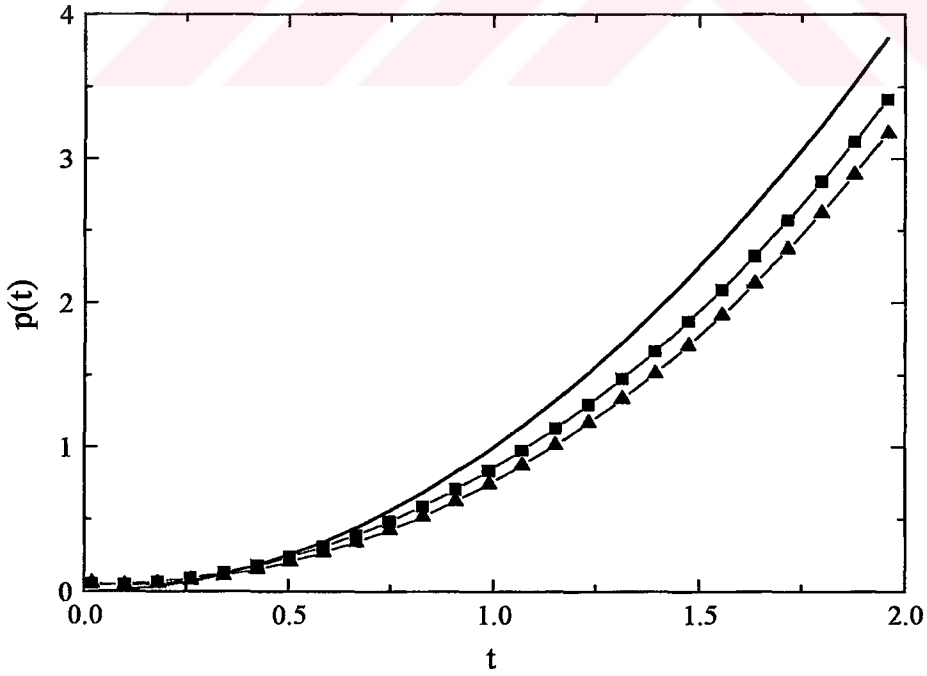
Algoritma I ile çözüm yapıldığında, bu algoritmanın şemasından (2.10) görüldüğü gibi özdeş olarak sıfır çözümü elde edilecektir. Yani şema bu şekildeki problemler üzerinde yaklaşım sağlayamayacaktır.

Aynı problem çözüm algoritması II ile çözülebilir ve gerçek çözüme istenilen yaklaşım sağlanabilir. Böylece yapılan sayısal örnekler algoritma I'in, algoritma II'ye göre  $h$  ve  $\tau$ ' nun daha büyük değerleri ile yakınsak olduğunu; algoritma II'nin ise algoritma I'e göre bazı problemlerin çözümlerinde daha iyi performans gösterdiğini, ölçüm hatalarına göre daha az duyarlı olduğunu ortaya koymuştur.

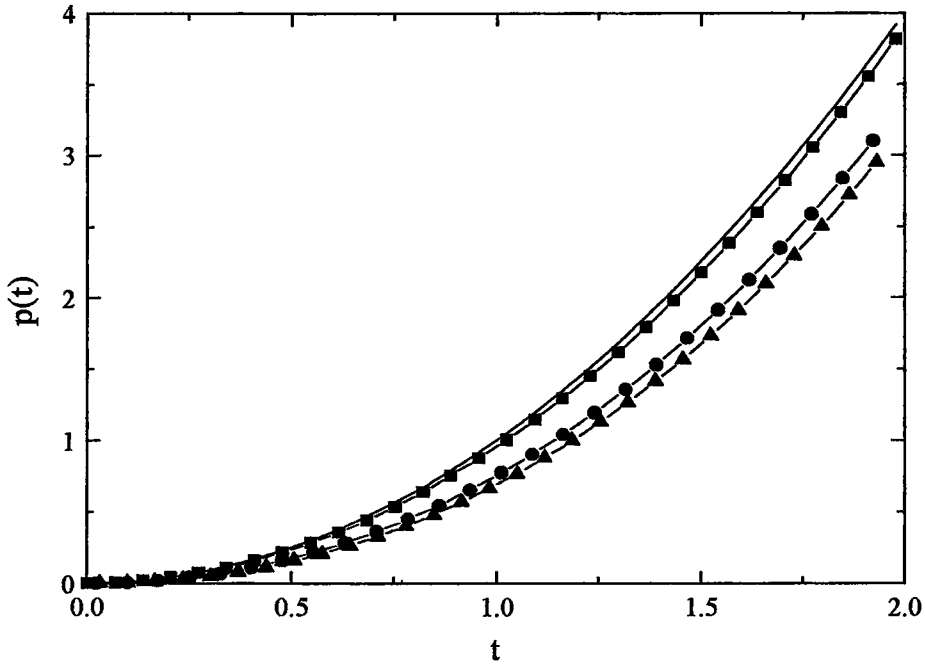
Her iki örnek için farklı zaman ve uzay adımlarında çözümler yapılarak prosedürlerin kararlılık açısından incelemesi yapılmıştır. Sonuçlar prosedür I'in kararlılık alanının prosedür II'den daha geniş olduğunu göstermiştir. Prosedür II'nin kararlılık alanının küçüklüğü bu prosedürde elde edilen yeniden formüle edilmiş problemin çözümünün kendisi ve ikinci mertebeden türevine tekrarlanır şekilde bağlantılı olması ile ilişkilidir. Bu bağlantı katsayısı çözümdeki değişimlere aşırı duyarlı yapmaktadır



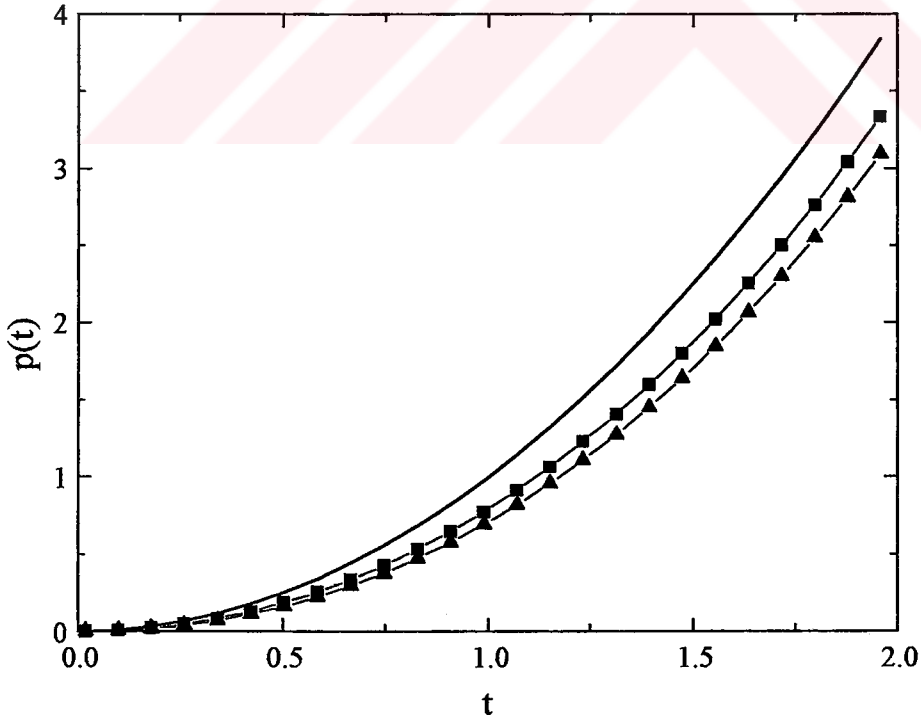
Şekil 4.1a  $p(t)$ 'nin gerçek ve yaklaşık çözümleri, — gerçek çözümü, ■  $M=500, N=100$  için, \*  $M=80, N=100$  ve ▲  $M=60, N=100$  gösterir (Algoritma I).



Şekil 4.1b  $p(t)$ 'nin gerçek ve yaklaşık çözümleri, — gerçek çözümü, ■  $M=100, N=100$  ve ▲  $M=100, N=10$  (Algoritma I) gösterir.

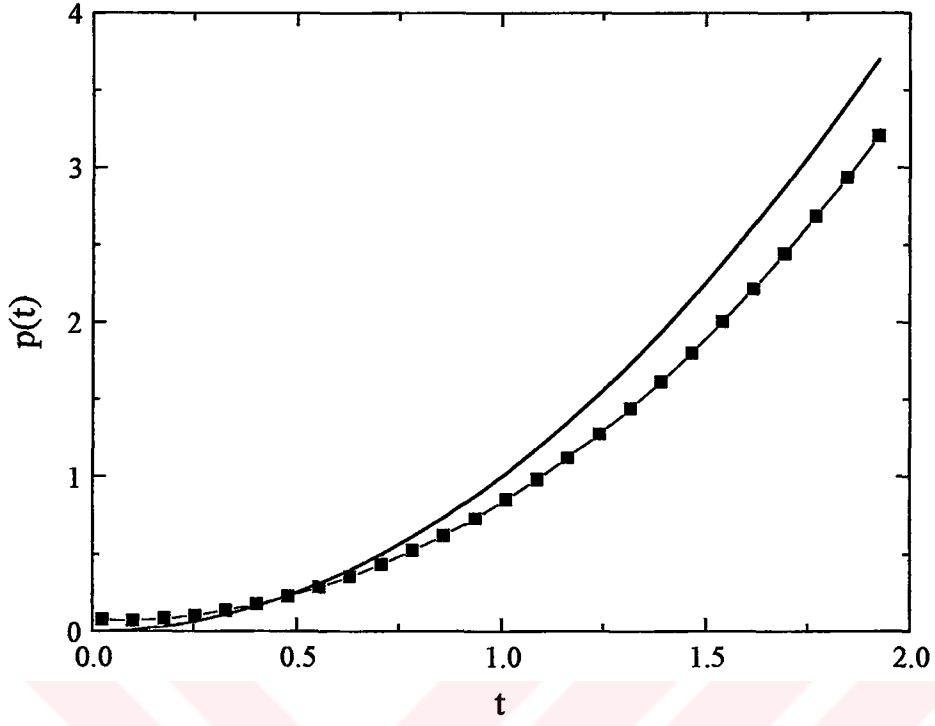


Şekil 4.2a  $p(t)$ 'nin gerçek ve yaklaşık çözümleri, — gerçek çözümü, ■  $M=500, N=100$  için  
●  $M=80, N=100$  ve ▲  $M=60, N=100$  (Algoritma II) gösterir.

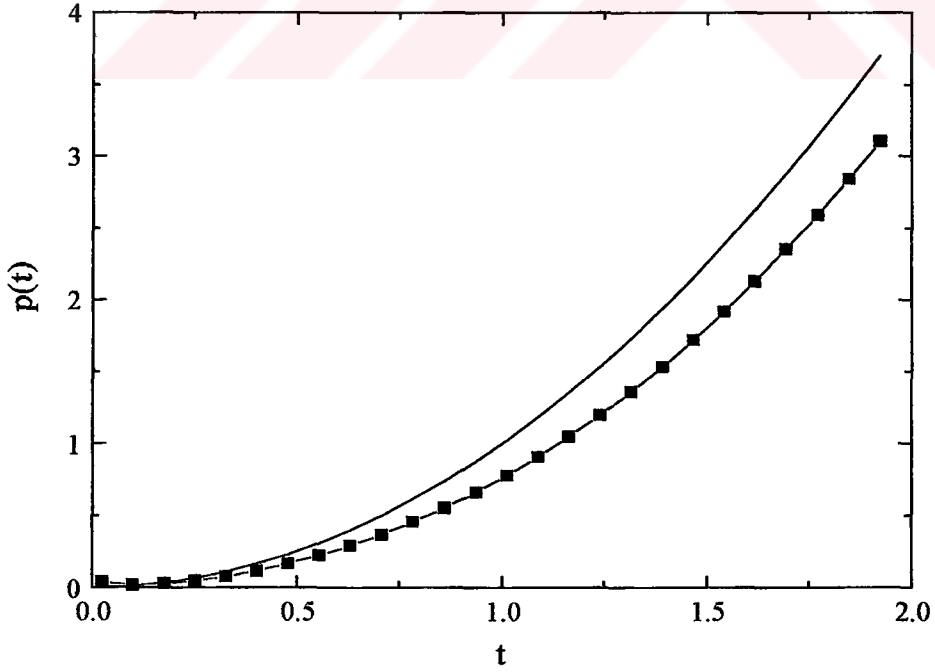


Şekil 4.2b  $p(t)$ 'nin gerçek ve yaklaşık çözümleri, — gerçek çözümü,  
■  $M=100, N=80$  ve ▲  $M=100, N=11$  (Algoritma II) gösterir.





Şekil 4.3a  $p(t)$ 'nin gerçek ve sabit hatalı çözümleri, — gerçek çözümlü, ■  $M=80$ ,  $N=100$  ve  $d=0.01$  gösterir (Algoritma I).

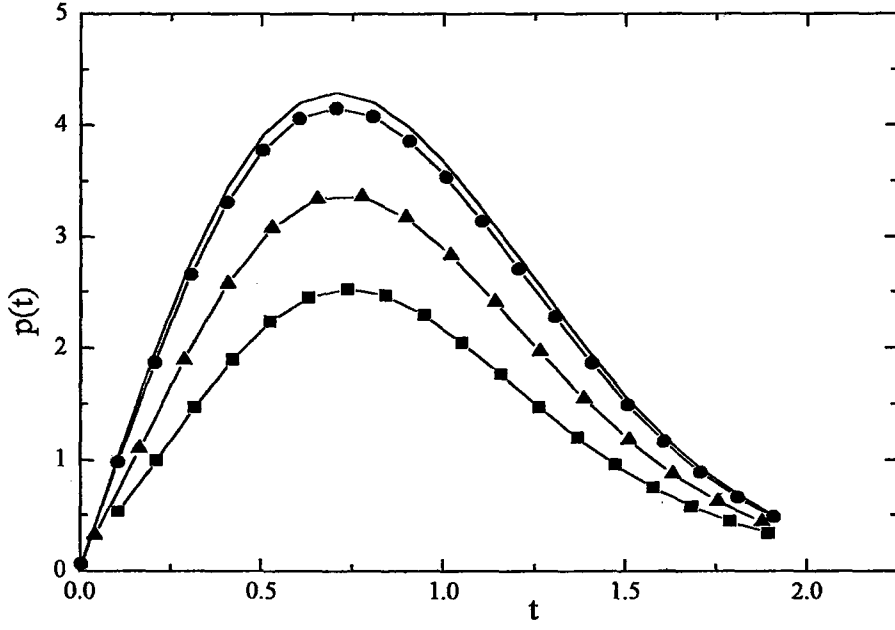


Şekil 4.3b  $p(t)$ 'nin gerçek ve sabit hatalı çözümleri, — gerçek çözümlü, ■  $M=80$ ,  $N=100$  ve  $d=0.01$  gösterir (Algoritma II).

Çizelge 4.1 Gerçek çözümle hatalı çözüm arasındaki farkın normu

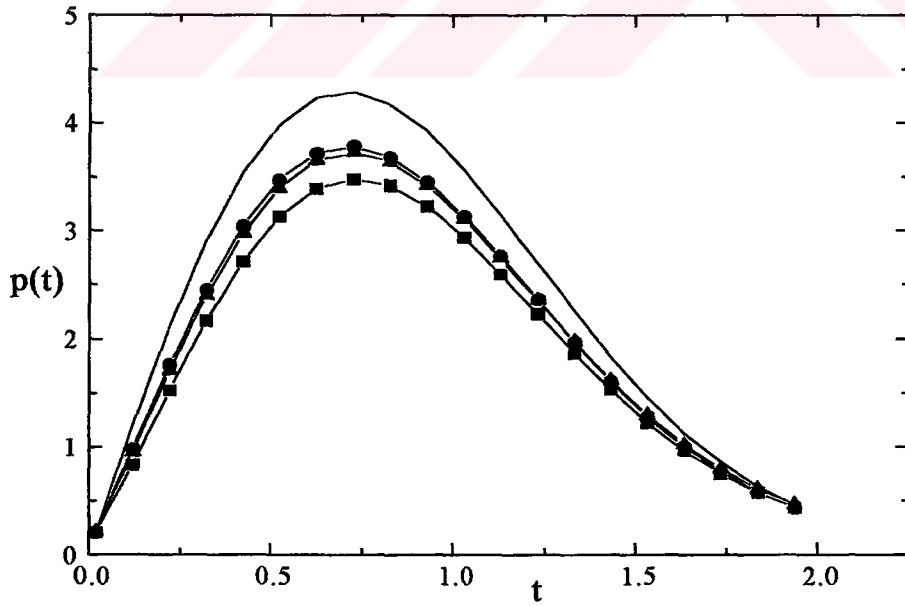
RANDOM HATA	ALGORİTMA I	ALGORİTMA II
$0.5 \times 10^{-3}$	$2.99 \times 10^{-1}$	$2.99 \times 10^{-1}$
$0.1 \times 10^{-2}$	$3.744 \times 10^{-1}$	$3.65 \times 10^{-1}$
$0.25 \times 10^{-3}$	$8.916 \times 10^{-1}$	$6.35 \times 10^{-1}$
$0.5 \times 10^{-2}$	2.722	1.630
0.1	10.09	5.454





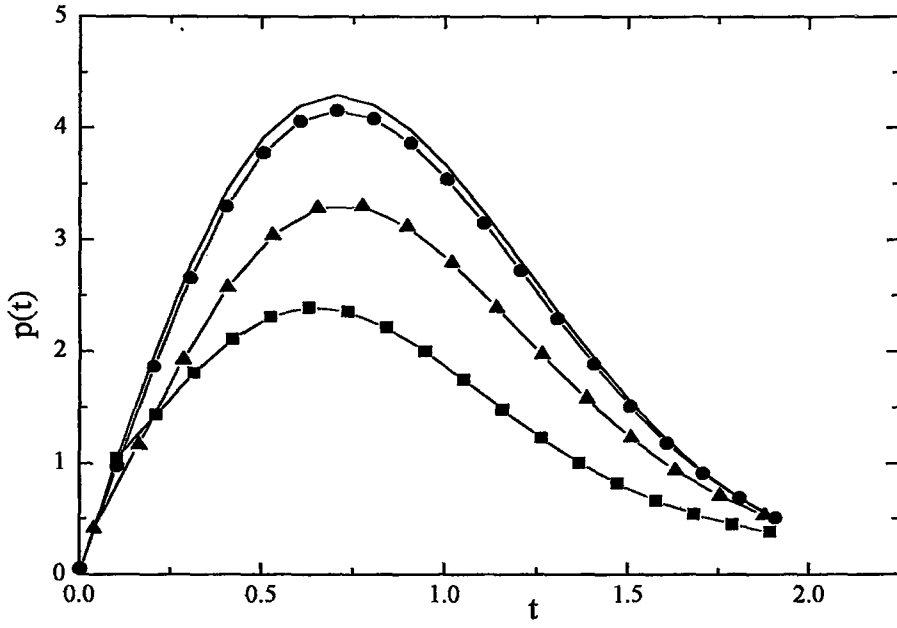
Şekil 4.4a  $p(t)$ 'nin gerçek ve yaklaşık çözümleri.

— gerçek çözümü, ■  $M=20, N=100$ , ▲  $M=50, N=100$  ve  
●  $M=400, N=100$  gösterir (Algoritma I).

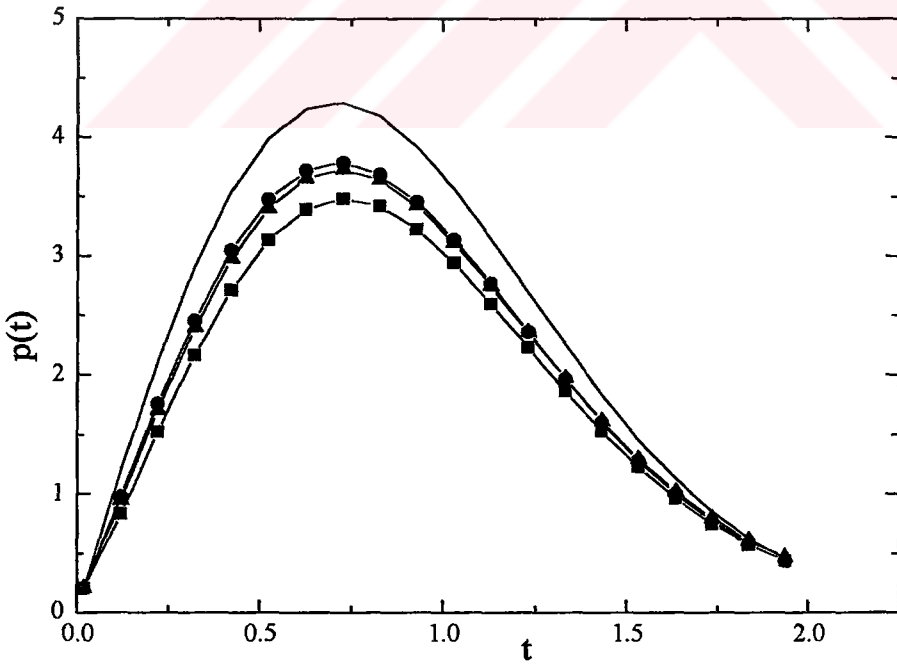


Şekil 4.4b  $p(t)$ 'nin gerçek ve yaklaşık çözümleri.

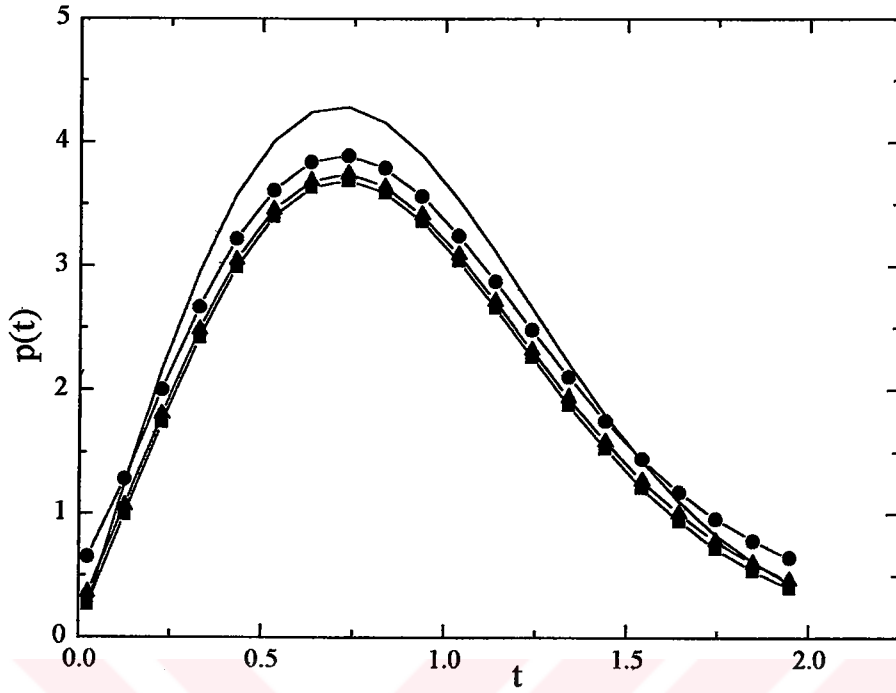
— gerçek çözümü, ■  $M=100, N=20$ , ▲  $M=100, N=50$  ve  
●  $M=100, N=300$  gösterir (Algoritma I).



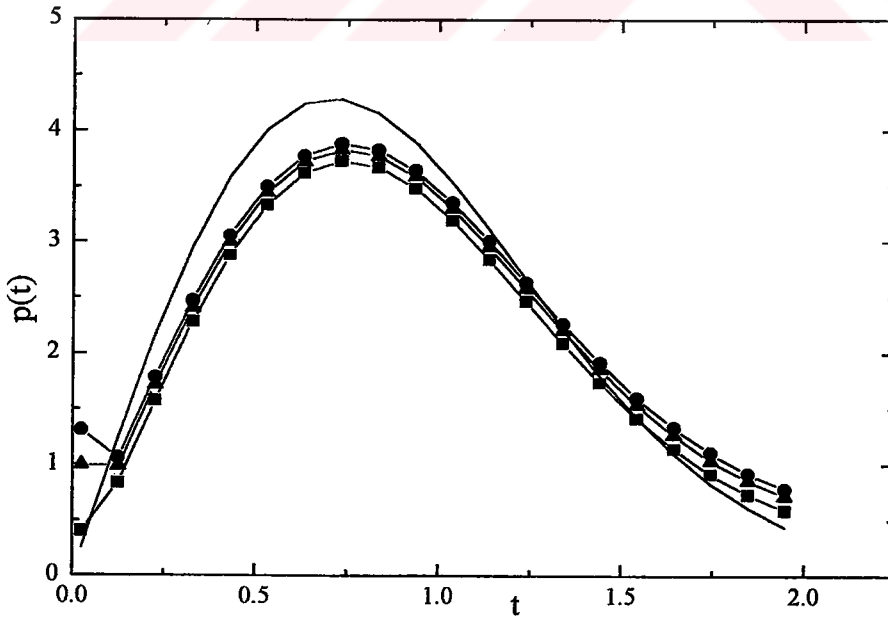
Şekil 4.5a  $p(t)$ 'nin gerçek ve yaklaşık çözümleri. — gerçek çözümleri, ■  $M=20, N=100$ , ▲  $M=50, N=100$  ve ●  $M=400, N=100$  gösterir (Algoritma II).



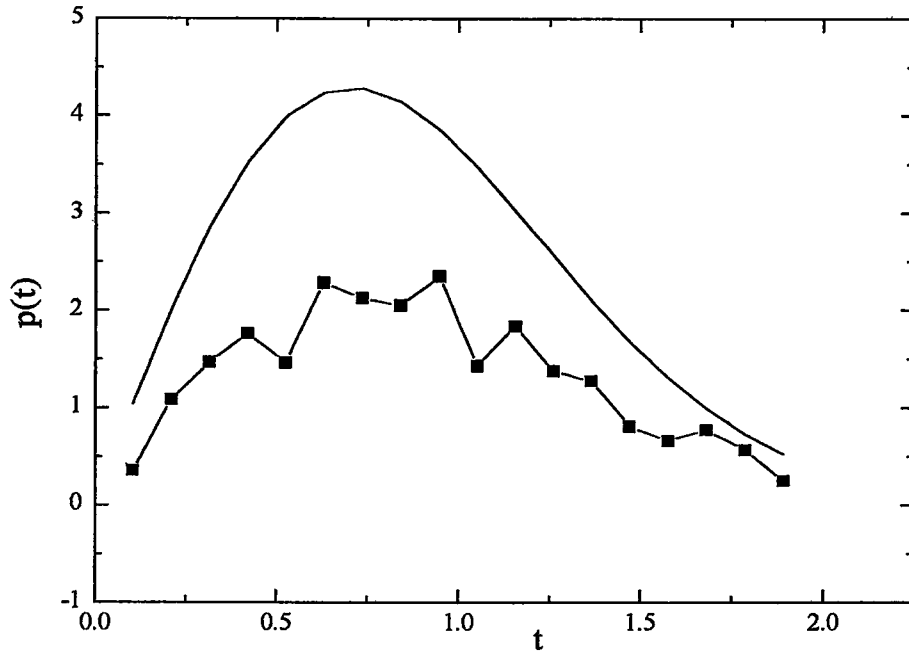
Şekil 4.5b  $p(t)$ 'nin gerçek ve yaklaşık çözümleri. — gerçek çözümleri, ■  $M=100, N=20$ , ▲  $M=100, N=50$  ve ●  $M=100, N=300$  gösterir (Algoritma II).



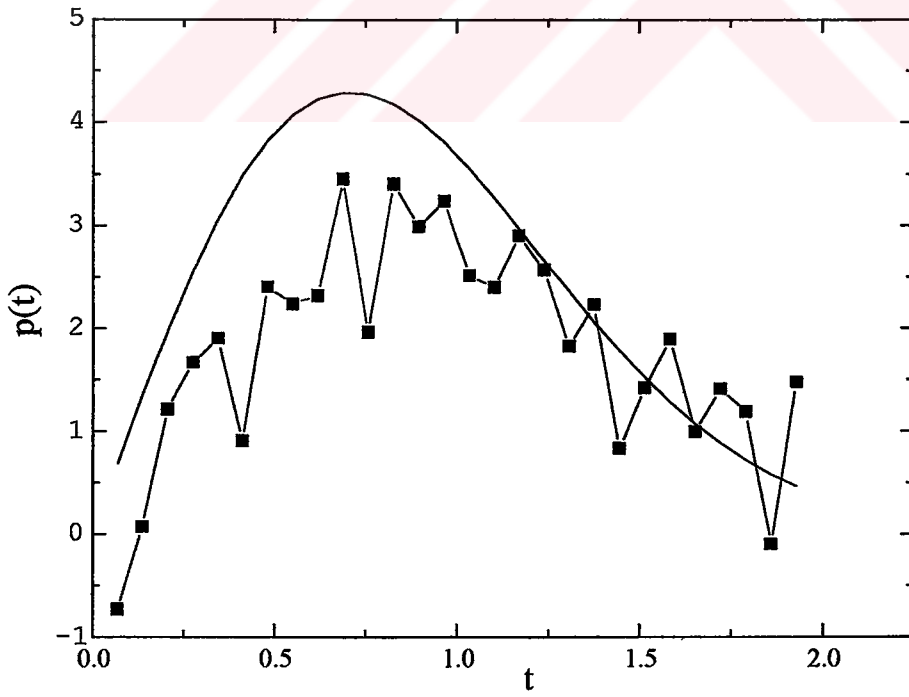
Şekil 4.6a  $p(t)$ 'nin gerçek ve sabit hata çözümleri.  
— gerçek çözümü, ■  $d=0.033$ , ▲  $d=0.025$  ve ●  $d=0.033$  gösterir (Algoritma I).



Şekil 4.6b  $p(t)$ 'nin gerçek ve sabit hata çözümleri. — gerçek çözümü,  
■  $d=0.033$ , ▲  $d=0.025$  ve ●  $d=0.01$  gösterir (Algoritma II).



Şekil 4.7a Random hatalar durumunda sonuçlar. — gerçek çözümü, ■  $d(t,0.02)$  gösterir (Algoritma I).



Şekil 4.7b Random hatalar durumunda sonuçlar . — gerçek çözümü, ■  $d(t,0.02)$  gösterir. (Algoritma II).

Çizelge 4.2 Gerçek çözümle hatalı çözüm arasındaki farkın normu

RANDOM HATA	ALGORİTMA I	ALGORİTMA II
$0.5 \times 10^{-2}$	$4.665 \times 10^{-1}$	$4.826 \times 10^{-1}$
$0.25 \times 10^{-1}$	$9.738 \times 10^{-1}$	$7.924 \times 10^{-1}$
$0.1 \times 10^{-1}$	$5.548 \times 10^{-1}$	$5.528 \times 10^{-1}$
$0.5 \times 10^{-1}$	1.800	1.378
0.1	3.523	3.291



## 5. LINEER OLMAYAN PARABOLİK DENKLEMLERDE BİLİNMEYEN KATSAYILARIN BULUNMASI

Doymamış bir gözenekli ortam içinde akışkan, lineer olmayan parabolik denklem ile tanımlanmaktadır. Denklemdaki katsayılar ortamın hidrolik özelliklerini karakterize eder. Böyle denklemlerin ele alınması, katsayıların sadece bilinmeyen çözümün fonksiyonları olduklarını kabul ederek basitleştirilir. Bu, ortamın homojen izotrop olduğunu varsaymağa eşdeğerlidir ve böyle hallerden belirli bir gözenekli ortamın karakteristikleri olan katsayılar bulunabilir (Cannon vd., 1978; Muzylev, 1986; Gilding, 1991; Duchateau, 1995; Golayoglu, 2000).

Gözenekli ortamların hidrolik özelliklerinin doğrudan deneysel ölçümü bazen uygun olmadığından, girişimler uygun bir ters problemi formüle ederek ve çözerek özellikleri dolaylı şekilde elde etmek üzere yapılmaktadır, ama bunun yanında ters problemin giriş verilerini ölçmek kolaydır ve çözüm ortamın hidrolik özelliklerini verir. Verilerin ölçülmesi için kolay olması gereksinimi şunu bildirir: Veriler kararlı halden ziyade dinamik olmalıdır ve fiziksel bölgenin sınırında ölçülmelidir (Cannon vd., 1991a; 1995).

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemi içeren ters problemleri çözmek için literatürde sık bahsedilen bir yaklaşım "En Küçük Kareler " yaklaşımıdır. Bu yöntemin avantajı, elde edilen optimizasyon problemi için çok iyi teoremin var olmasıdır. Yalnız bu yaklaşımda optimizasyon probleminin elde edilen çözümünün, ele alınan problemin çözümü olup olmadığı açık değildir. İlave olarak, bu yaklaşımda elde edilen hata fonksiyonelinin bilinmeyen katsayıları tek değerli olarak tanımlanamayan verilere dayandırılır.

Bu çalışmada bu yaklaşım kullanılmadı. Buradaki strateji, bilinmeyen katsayı için çokgensel yaklaşım yapmak ve bilinmeyen bu katsayıyı sınır üzerinde verilen ek koşulu gözönünde bulundurarak denklemde ortadan kaldırmaktır. Bu şekilde ele alınan problemin katsayısı, bilinmeyen çözüme ve onun türevlerine bağlı fonksiyon olan standart lineer olmayan başlangıç sınır değer problemine dönüşmektedir. Bu tip problemler sonlu farklar ile çözülmektedir ve bilinmeyen katsayılar sayısal elde edilen sonuçtan belirlenmektedir.



### 5.1 Gözenekli Ortamın Su Kapasitesi İçin Ters Problemin Formülasyonu

$c(u), k(u) \in C(0, \infty)$  ve her  $u > 0$  için,  $0 < C_0 \leq c(u) \leq C_1$  ve  $0 < K_0 \leq k(u) \leq K_1$  olsunlar.  $f(t) \in C(0, T]$  için ve  $f(0) = u_0$ , her  $t > 0$  için  $f'(t) > 0$  olsun. O zaman başlangıç sınır değer problemi

$$c(u(x,t)) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(u(x,t)) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right), \quad (x,t) \in Q_0 = (0,1) \times (0,T) \quad (5.1)$$

$$u(x,0) = u_0, \quad x \in (0,1), \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad t \in (0,1), \quad (5.3)$$

$$u(1,t) = f(t), \quad t \in (0,T), \quad (5.4)$$

şeklinde yazılır. (5.1)-(5.4) probleminin tek pürüzsüz çözümü vardır (Ladyzhenskaya vd., 1967). Bu problem direkt problem olarak adlandırılır.  $c(u)$  ve  $k(u)$ 'ya kabul edilebilir katsayı,  $f(t)$  ise geçerli giriş verisi olarak isimlendirilir. Bu problem, sınır üzerinde ölçülen

$$g(t) = k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} \quad (5.5)$$

ek verisinden yola çıkarak  $c(u)$  katsayısının bulunması problemi ters problem olarak adlandırılır. (5.1)-(5.5) ters problemin eğer çözümü varsa tekdir (Muzylev, 1986). İlâveten, formüle edilmiş ters problem çözülebilir ve katsayı veri eşleşmesi monotondur ve çokgen yaklaşım uzayına tersinirdir (Duchateau, 1995). Ek koşul verisi  $g(t)$  için ve  $u(x,t)$  direkt problem çözümü için özellikleri hatırlayalım (Duchateau, 1995):

Her  $0 < \theta \leq T$ , koşulunu sağlayan  $\theta$  için,  $0 < x < 1$  ve  $0 < t \leq \theta$  olduğunda  $u_0 < u(x,t) < f(\theta)$ 'dir. Ek olarak,  $t > 0$ , için  $g(t) = k(u)u_x \Big|_{x=1} = k(f(t))u_x \Big|_{x=1} > 0$  ve açık  $Q_0 = (0,1) \times (0,T)$  kümesi içinde hemen hemen her yerde negatif değildir.

### 5.1.2 Sayısal prosedür

$\tau = \Delta t > 0$  ve  $h = \Delta x > 0$  zaman ve uzay koordinatının adım uzunluğu olarak alalım. Burada,  $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T\}$  ve  $\{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1\}$ , sırasıyla  $[0, T]$  ve  $[0, 1]$  parçalarının bölümlerini gösterir. Direkt problemin çözüm özelliğine göre  $\{u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_M\}$ ,  $[u_0, f(T)]$  aralığının bölünmesi olacaktır; burada  $u_i = f(t_i)$  uygun bölmesi tanımlanır.  $(i, n)$  ile gösterilen  $(x_i, t_n)$  şebeke noktalarının bir seti ile  $Q_0$  bölgesini yerleştiririz. (5.1)-(5.5) problemini  $(i, n)$  şebeke noktalarında

$$c(u_{i,n}) \frac{\partial u_{i,n}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (k(u_{i,n}) \frac{\partial u_{i,n}}{\partial x}), \quad 1 \leq i \leq N-1, 1 \leq n \leq M, \quad (5.6)$$

$$u_{i,0} = u_0, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial u_{0,n}}{\partial x} = 0, \quad 1 \leq n \leq M, \quad (5.8)$$

$$u_{N,n} = f(t_n), \quad 1 \leq n \leq M, \quad (5.9)$$

ve

$$k(u_{N,n}) \frac{\partial u_{N,n}}{\partial x} = k(f(t_n)) \frac{\partial u_{N,n}}{\partial x} = g(t_n), \quad (5.10)$$

şekilde yazabiliriz.

$c(u)$  fonksiyonu  $[u_0, u_n]$  aralığı üzerindeki çokgensel (sürekli ve kısmi lineer) yaklaşımı bir

$P_n(u)$  aşağıdaki şekilde tanımlayalım: Her  $m = 1, 2, \dots, n$  için  $P_n(u)$   $u_{m-1} < u \leq u_m$  için

$$P_n(u) = c_{m-1} \frac{u_m - u}{u_m - u_{m-1}} + c_m \frac{u - u_{m-1}}{u_m - u_{m-1}} \quad (5.11)$$

şekilde verilmiş olsun; burada  $c_m = c(u_m)$  dir. (5.5) veya (5.10) ek koşulundan ve (5.1) denkleminde göre

$$\int_{x_{N-1}}^{x_N} c(u)u_t dx = g(t) - k(u)u_x \Big|_{x=x_{N-1}}$$

bu özdeşlikteki integral yaklaşımı için  $c(u)f_t \Big|_{x=x_N, t=t_m} h$  alınarak, her  $m = 1, 2, \dots, n$  için

$$c_m = c(u_{N,m}) = \frac{g(t_m) - k(U_{N-1,m})u_x \Big|_{x=x_{N-1}, t=t_m}}{u_t \Big|_{x=x_{N-1}, t=t_m} h}$$

bulunur. Bu ifadeyi (5.11)'de  $c_m$  ve  $c_{m-1}$  için kullanırsak  $c(u)$  için yalnız bilinmeyen  $u$  fonksiyonu ve onun türevlerine bağlı olan çokgensel yaklaşım için ifadesi elde etmiş oluruz.  $c(u)$  için bu çokgensel yaklaşımını kullanarak (5.6)-(5.10)

$$P_n(u_{i,n}) \frac{\partial u_{i,n}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (k(u_{i,n}) \frac{\partial u_{i,n}}{\partial x}), \quad 1 \leq i \leq N-1, 1 \leq n \leq M-1, \quad (5.12)$$

$$u_{i,0} = u_0, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial u_{0,n}}{\partial x} = 0, \quad 1 \leq n \leq M-1, \quad (5.14)$$

$$u_{N,n} = f(t_n), \quad 1 \leq n \leq M-1, \quad (5.15)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu sistem için kapalı sonlu farklar şeması aşağıdaki şekilde yazılmaktadır:

$$P_n(U_{i,n}) \frac{U_{i,n} - U_{i,n-1}}{\tau} = k(U_{i+0.5,n}) \frac{U_{i+1,n} - U_{i,n}}{h^2} - k(U_{i-0.5,n}) \frac{U_{i,n} - U_{i-1,n}}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq N-1, 1 \leq n \leq M, \quad (5.16)$$

$$U_{i,0} = u_0, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (5.17)$$

$$\frac{U_{1,n} - U_{0,n}}{h} = 0, \quad 1 \leq n \leq M, \quad (5.18)$$

$$U_{N,n} = f(t_n), \quad 1 \leq n \leq M, \quad (5.19)$$

ve

$$k(U_{i+0.5,n}) = \frac{1}{2}(k(U_{i+1,n}) + k(U_{i,n})) \quad (5.20)$$

burada  $U_{i,n}$ ,  $u_{i,n}$  'nin yaklaşık değeridir. (5.16)-(5.20) fark şeması iç düğüm noktalarında ikinci mertebeden yaklaşıma ve zaman değişkenine göre I.tip yaklaşıma sahiptir (Samarskiı, 1977). (5.16) -(5.20) sistemi lineer olmayan sistem olduğu için, aşağıdaki iterasyon yöntemi çözüm için kullanılacaktır. İterasyon algoritmasını aşağıdaki şekilde seçiyoruz.

$$P_n(U_{i,n}^s) \frac{U_{i,n}^{s+1} - U_{i,n-1}}{\tau} = k(U_{i+0.5,n}) \frac{U_{i+1,n}^{s+1} - U_{i,n}^{s+1}}{h^2} - k(U_{i-0.5,n}) \frac{U_{i,n}^{s+1} - U_{i-1,n}^{s+1}}{h^2}, \quad (5.21)$$

$$U_{i,n}^0 = U_{i,n-1}, \quad 1 \leq n \leq M, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (5.22)$$

$$U_{i,0}^0 = u_0, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (5.23)$$

$$\frac{U_{1,n}^{s+1} - U_{0,n}^{s+1}}{h} = 0, \quad 1 \leq n \leq M, \quad (5.24)$$

$$U_{N,n}^{s+1} = f(t_n), \quad 1 \leq n \leq M, \quad (5.25)$$

Her zaman adımında  $\max_{i,n} |(U_{i,n}^{s+1} - U_{i,n}^s) / U_{i,n}^s| \leq \varepsilon$  koşulu sağlanıncaya kadar iterasyon devam etmektedir; ve burada  $s$  iterasyon numarasını  $U^s$   $U$  fonksiyonunun  $s$ .iterasyon adımındaki değerini ve  $\varepsilon$  kesinliği ifade etmektedir.

$c(u_0, u)$  başlangıç değerinin belli olduğunu kabul edelim. Bu kabullenme genelliği bozmaz. Çünkü  $c_u$   $0 < t < t_1$  aralığında sabit olduğunu kabul edersek bu  $c_0$  değerini  $g(1)$  değerine bağlı olarak elde edebiliriz. Bu değer (5.6)-(5.10) sonlu fark şemasından ( $n=1$  olduğu durumda) sıradan alt program kullanılarak elde edilebilir.  $c(u)$  fonksiyonunun grafiğini

$[u_0, u_1], (u_1, u_2), \dots, (u_{N-1}, u_N]$  parçalar dizisi üzerinde aşağıdaki kuralla elde edeceğiz.  $c_1$  elde etmek için önce (5.16)-(5.20) sistemini  $P_1(u) = c_0 = \text{sabit}$  olarak  $[u_0, u_1]$  aralığında çözebiliriz ve her  $i = 1, 2, \dots, N$ 'ler için  $U_{i,1}$  belirleyebiliriz. Ve buradan

$$c_1 = \frac{g(t_1) - k(U_{N-1,1})U_{x,N-1,1}}{U_{t,N-1,1}h}$$

burada,

$$U_{t,N-1,1} = \frac{U_{N-1,1} - U_{N-1,0}}{\tau} \quad \text{ve} \quad U_{x,N-1,1} = \frac{U_{N-1,1} - U_{N-2,1}}{h} \quad \text{ile verilir.}$$

Bu formüllerden,

$$P_1(u) = c_0 \frac{u_1 - u}{u_1 - u_0} + c_1 \frac{u - u_{01}}{u_1 - u_0}$$

$[u_0, u_1]$  aralığında buluruz.  $c_0, c_1, \dots, c_{l-1}$  değerleri belli ise  $c_l$  elde edilebilir.

$$c_l = \frac{g(t_1) - k(U_{N-1,l})U_{x,N-1,l}}{U_{t,N-1,l}h}$$

burada  $U_{t,N-1,l} = \frac{U_{N-1,l} - U_{N-1,l-1}}{\tau}$  ve  $U_{x,N-1,l} = \frac{U_{N-1,l} - U_{N-2,l}}{h}$  ile ifade edilir.

Buradan,

$$P_l(u) = c_{m-1} \frac{u_m - u}{u_m - u_{m-1}} + c_m \frac{u - u_{m-1}}{u_m - u_{m-1}}, \quad [u_{m-1}, u_m] \text{ aralığında } m = 1, 2, \dots, l \text{ elde ederiz.}$$

$l=1$  den  $l=M$ 'e kadar bu prosedür yapılarak  $[u_0, u_1, \dots, u_M]$  aralığında  $c(u)$  için bir çokgensel yaklaşım elde edilir.

### 5.1.3 Sayısal örnekler

**Örnek 1:** Bu bölümdeki çözüm sonuçları için,  $f(t) = 3t$ ,  $k(u) = 1$ ,  $c(u) = 5 - 2/(1+u)$ ,  $u_0 = 0$  ve  $T = 2$  alınmıştır Ek(4). Bu veriler ile düz problem çözülür ve çözümden elde edilen  $g(t)$  kaydedilir.  $c(u)$  bilinmeyen katsayıyı belirlemek için, ters problem bu ek koşul veriyle çözülmüştür. Programlarda  $N \times M = 50 \times 20, 50 \times 30, 50 \times 40$  boyutlarında kafes üzerinde grafikler çizilmiştir. Şekillerde düz eğri ile gerçek  $c(u)$  çözümü, sembollü eğri ise yaklaşık çözüm sonuçlarını göstermiştir. Şekillerden görüldüğü gibi zaman adımların küçülmesi yaklaşık ve gerçek çözümlerin birbirine yaklaşmasını sağlamıştır. Bilgisayar çözüm sonuçları Şekil 5.1, Şekil 5.2 ve Şekil 5.3 'de gösterilmiştir.

**Örnek 2:** Yapay hatalar,  $g^*(t_n) = g(t_n)(1 + d(t_n, q))$ , şeklinde tanımlı fonksiyonuyla ek koşul verinin üzerine verilmiştir. Burada,  $d(t_n, q)$  ek koşul verinin  $n$ . kısmındaki bağıl hata değerini gösterir. Şekil 5.4 ve Şekil 5.5  $N \times M = 50 \times 30$  boyutlarında ve random hata değerleri  $d(t, 0.02)$  ve  $d(t, 0.04)$  alınarak çizilmiştir.

Grafiklerden görüldüğü gibi, yapay hataların küçük değerleri için, gerçek değere iyi bir yaklaşım vardır. Bu çalışma Golayoğlu vd.,(2000)'de yayımlanmıştır.

## 5.2 Gözenekli Ortamın Hidrolik Geçirgenliği İçin Ters Problemin Formülasyonu

$\lambda(u) \in C(0, \infty)$  ve her  $u > 0$  için,  $0 < \lambda_0 \leq \lambda(u) \leq \lambda_1$  olsun.  $f(t) \in C(0, T]$  için ve  $f(0) = u_0$ , her  $t > 0$  için  $f'(t) > 0$  olsun. O zaman başlangıç sınır değer problemi

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda(u(x,t)) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}), (x,t) \in Q_0 = (0,1) \times (0,T) \quad (5.26)$$

$$u(x,0) = u_0, \quad x \in (0,1), \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad t \in (0,1), \quad (5.28)$$

$$u(1,t) = f(t), \quad t \in (0,T), \quad (5.29)$$

şeklinde yazılır.  $\lambda(u)$  kabul edilebilir bir katsayı,  $f(t)$  ise geçerli giriş verisi olarak isimlendirilir. Bu problem, sınır üzerinde ölçülen

$$g(t) = \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} \quad (5.30)$$

ek verisinden yola çıkarak  $\lambda(u)$  katsayısının bulunması problemi ters problem olarak adlandırılır. (5.1) problem formülasyonundaki koşullar bu sınır değer problemi için de geçerlidir ve ek olarak,  $t > 0$ , için  $g(t) = \lambda(u) u_x \Big|_{x=1} > 0$  ve açık  $Q_0 = (0,1) \times (0,T)$  kümesi içinde hemen hemen her yerde negatif değildir

### 5.2.2 Sayısal prosedür

$\tau = \Delta t > 0$  ve  $h = \Delta x > 0$  zaman ve uzay koordinatının adım uzunluğu olarak alalım. Burada,  $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T\}$  ve  $\{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1\}$ , sırasıyla  $[0, T]$  ve  $[0, 1]$  parçalarının bölümlerini gösterir. Direkt problemin çözüm özelliğine göre  $\{u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_M\}$ ,  $[u_0, f(T)]$  aralığının bölünmesi olacaktır; burada  $u_i = f(t_i)$  uygun bölmesi tanımlanır.  $(i, n)$  ile gösterilen  $(x_i, t_n)$  şebeke noktalarının bir seti ile  $Q_0$  bölgesini yerleştiririz. (5.26)-(5.30) problemini  $(i, n)$  şebeke noktalarında

$$\frac{\partial u_{i,n}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(u_{i,n}) \frac{\partial u_{i,n}}{\partial x} \right), \quad 1 \leq i \leq N-1, 1 \leq n \leq M, \quad (5.31)$$

$$u_{i,0} = u_0, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial u_{0,n}}{\partial x} = 0, \quad 1 \leq n \leq M, \quad (5.33)$$

$$u_{N,n} = f(t_n), \quad 1 \leq n \leq M, \quad (5.34)$$

ve

$$\lambda(u_{N,n}) \frac{\partial u_{N,n}}{\partial x} = \lambda(f(t_n)) \frac{\partial u_{N,n}}{\partial x} = g(t_n), \quad (5.35)$$

şeklinde yazabiliriz.

$\lambda(u)$  fonksiyonu için  $[u_0, u_n]$  aralığı üzerindeki çokgensel (sürekli ve kısmi lineer) yaklaşım olan  $P_n^\lambda(u)$ 'yu aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

Her  $m = 1, 2, \dots, n$  için  $P_n^\lambda(u)$   $u_{m-1} < u \leq u_m$  için

$$P_n^\lambda(u) = \lambda_{m-1} \frac{u_m - u}{u_m - u_{m-1}} + \lambda_m \frac{u - u_{m-1}}{u_m - u_{m-1}} \quad (5.36)$$

şeklinde verilmiş olsun; burada  $\lambda_m = \lambda(u_m)$  dir. Her  $m = 1, 2, \dots, n$  için,  $u_m = u_{N,m} = f(t_m)$  ise, o zaman

$$\lambda(u_{N,m}) = \lambda(u_m) = \frac{g(t_m)}{\frac{\partial u_{N,m}}{\partial x}} \quad (5.37)$$

yazılır; ve

$$P_n^\lambda(u) = \frac{g(t_{m-1})}{\frac{\partial u_{N,m-1}}{\partial x}} \frac{f(t_m) - u}{f(t_m) - f(t_{m-1})} + \frac{g(t_m)}{\frac{\partial u_{N,m}}{\partial x}} \frac{u - f(t_{m-1})}{f(t_m) - f(t_{m-1})} \quad (5.38)$$

bulunur. Bu ifadeyi (5.36)'de  $\lambda_m$  ve  $\lambda_{m-1}$  için kullanırsak  $\lambda(u)$  için yalnız bilinmeyen  $u$  fonksiyonu ve onun türevlerine bağlı olan çokgensel yaklaşım için ifadesini elde etmiş oluruz.  $\lambda(u)$  için bu çokgensel yaklaşımını kullanarak (5.31)-(5.35)

$$\frac{\partial u_{i,n}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (P_n^\lambda(u_{i,n}) \frac{\partial u_{i,n}}{\partial x}), \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq n \leq M-1, \quad (5.39)$$

$$u_{i,0} = u_0, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial u_{0,n}}{\partial x} = 0, \quad 1 \leq n \leq M-1, \quad (5.41)$$



$$u_{N,n} = f(t_n), \quad 1 \leq n \leq M-1, \quad (5.42)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu sistem için kapalı sonlu farklar şeması aşağıdaki şekilde yazılmaktadır:

$$\frac{U_{i,n} - U_{i,n-1}}{\tau} = P_n^\lambda(U_{i+0.5,n}) \frac{U_{i+1,n} - U_{i,n}}{h^2} - P_n^\lambda(U_{i-0.5,n}) \frac{U_{i,n} - U_{i-1,n}}{h^2},$$

$$1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (5.43)$$

$$U_{i,0} = u_0, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (5.44)$$

$$\frac{U_{1,n} - U_{0,n}}{h} = 0, \quad 1 \leq n \leq M, \quad (5.45)$$

$$U_{N,n} = f(t_n), \quad 1 \leq n \leq M, \quad (5.46)$$

ve

$$P_n^\lambda(U_{i+0.5,n}) = \frac{1}{2} (P_n^\lambda(U_{i+1,n}) + P_n^\lambda(U_{i,n})) \quad (5.47)$$

burada  $U_{i,n}$ ,  $u_{i,n}$ ' nin yaklaşık değeridir. (5.43)-(5.47) fark şeması iç düğüm noktalarında ikinci mertebeden yaklaşıma ve zaman değişkenine göre I.tip yaklaşıma sahiptir. (5.43) - (5.47) sistemi lineer olmayan sistem olduğu için, aşağıdaki iterasyon yöntemi çözüm için kullanılacaktır. İterasyon algoritmasını aşağıdaki şekilde seçiyoruz.

$$\frac{U_{i,n}^{s+1} - U_{i,n-1}^{s+1}}{\tau} = P_n^\lambda(U_{i+0.5,n}^s) \frac{U_{i+1,n}^{s+1} - U_{i,n}^{s+1}}{h^2} - P_n^\lambda(U_{i-0.5,n}^s) \frac{U_{i,n}^{s+1} - U_{i-1,n}^{s+1}}{h^2},$$

$$1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (5.48)$$

$$U_{i,n}^0 = U_{i,n-1}, \quad 1 \leq n \leq M, \quad (5.49)$$

$$U_{i,0}^0 = u_0, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (5.50)$$

$$\frac{U_{0,n}^{s+1} - U_{1,n}^{s+1}}{h} = 0, \quad 1 \leq n \leq M, \quad (5.52)$$

$$U_{N,n}^{s+1} = f(t_n), \quad 1 \leq n \leq M, \quad (5.53)$$

Her zaman adımında  $\max_{i,n} \left| \frac{U_{i,n}^{s+1} - U_{i,n}^s}{U_{i,n}^s} \right| \leq \varepsilon$  koşulu sağlanıncaya kadar iterasyon devam etmektedir; ve burada  $s$ , iterasyon numarasını  $U^s$ ,  $U$  fonksiyonunun  $s$ .iterasyon adımındaki değerini ve  $\varepsilon$ , kesinliği ifade etmektedir.

$\lambda(u(x,0)) = L_0$  başlangıç değerinin belli olduğunu kabul edelim. Bu kabullenme genelliği bozmaz. Çünkü  $\lambda$ 'nın  $0 < t < t_1$  aralığında sabit olduğunu kabul edersek bu  $\lambda_0$  değerini  $f(t)$  ve  $g(t)$  değerlerine bağlı olarak elde edebiliriz. Bu değer (5.43)-(5.47) sonlu fark şemasından ( $n=1$  olduğu durumda) sıradan alt program kullanılarak elde edilebilir.  $\lambda(u)$  fonksiyonunun grafiğini  $[u_0, u_1], (u_1, u_2), \dots, (u_{N-1}, u_N]$  parçalar dizisi üzerinde aşağıdaki kuralla elde edeceğiz. Önce  $\lambda_k$ 'nin yaklaşık değeri olarak  $L_k$  alacağız.

$$L_2 = \frac{\frac{g(t_2)}{\partial u_{N,2}}}{\partial x}$$

İkinci adımda (5.43)-(5.47) sistemini çözmek için  $[u_0, u_1]$  aralığında ve her  $i = 1, 2, \dots, N$ 'ler için  $U_{i,1}$  belirleyebiliriz. Bu formülden,

$$P_2^\lambda(u) = L_1 \frac{u_2 - u}{u_2 - u_1} + L_2 \frac{u - u_1}{u_2 - u_1}$$

$[u_0, u_1]$  aralığında buluruz.  $L_0, L_1, \dots, L_{l-1}$  değerleri belli ise  $L_l$  elde edilebilir.  $l$ . zaman adımında  $i = 1, 2, \dots, N$  için  $U_{i,l}$  belirlenir, (5.41)-(5.43) sistemini çözeriz ve

$$L_l = \frac{\frac{g(t_l)}{\partial u_{N,l}}}{\partial x}$$

ifade edilir. Buradan,

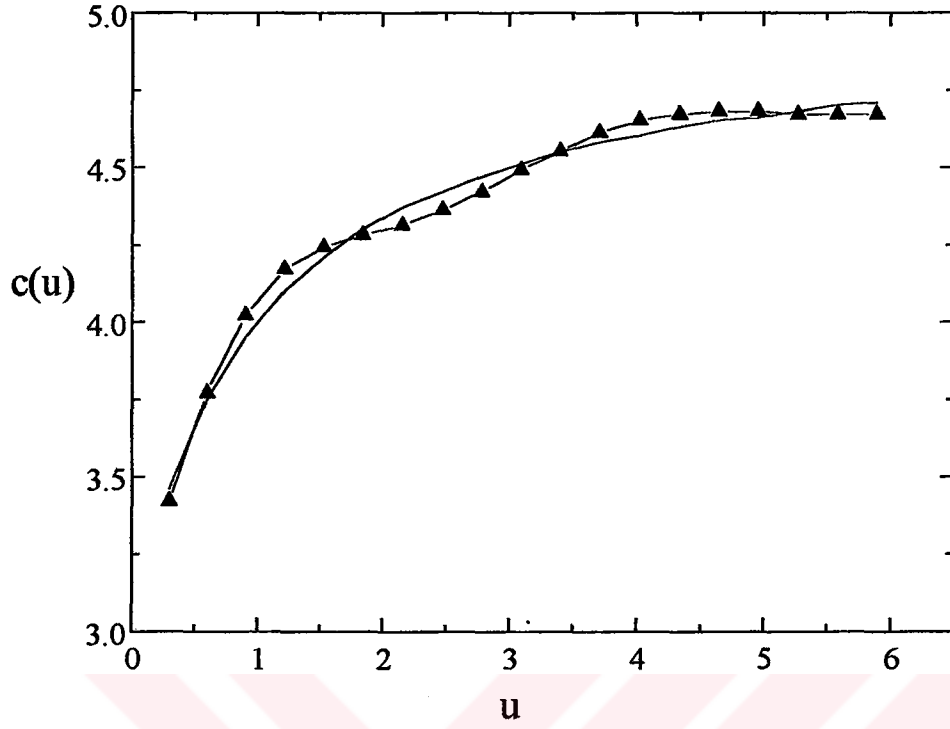
$$P_1^\lambda(u) = L_{m-1} \frac{u_m - u}{u_m - u_{m-1}} + L_m \frac{u - u_{m-1}}{u_m - u_{m-1}}, \quad [u_{m-1}, u_m] \text{ aralığında } m = 1, 2, \dots, l \text{ elde ederiz.}$$

$l=1$  den  $l=n$ 'e kadar bu prosedür yapılarak  $[u_0, u_1, \dots, u_M]$  aralığında  $\lambda(u)$  için bir çokgensel yaklaşım elde edilir.

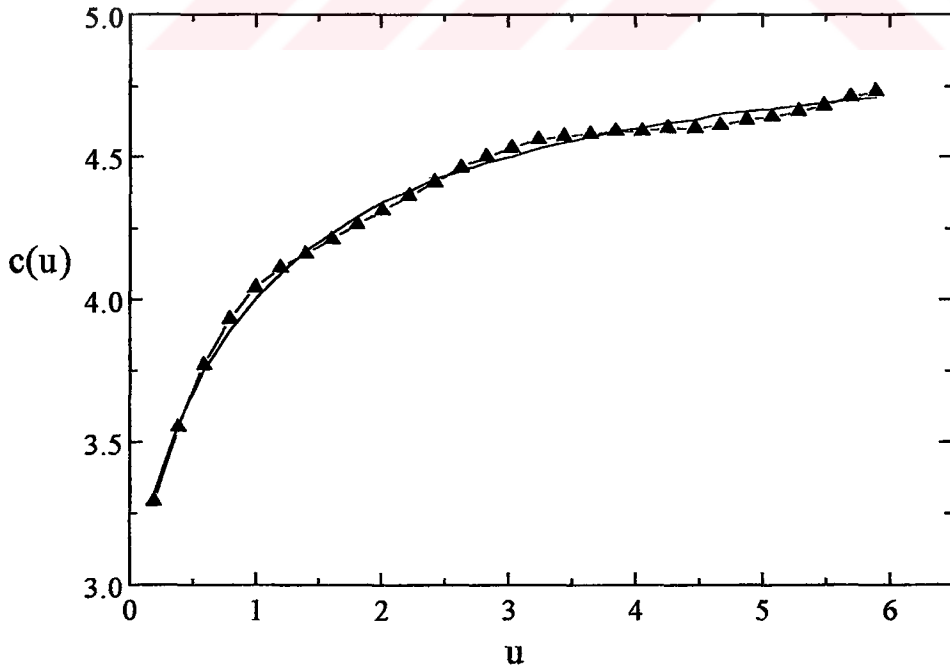
### 5.2.3 Bilgisayar Sonuçları

Bu bölümde,  $\lambda(u) = 1 + u^{1.4}$ ,  $f(t) = 3t$  ve  $u_0 = 0$  alınarak düz problem çözülerek  $g(t)$  elde edilmiştir. Bilinmeyen katsayı  $\lambda(u)$ 'yu bulmak için, bu ek koşul veri ile ters problem çözülmüştür. Hata  $g^*(t_n) = g(t_n)(1 + \delta(t_n))$  şeklinde tanımlı fonksiyonuyla ek koşul veri üzerine verilmiştir.

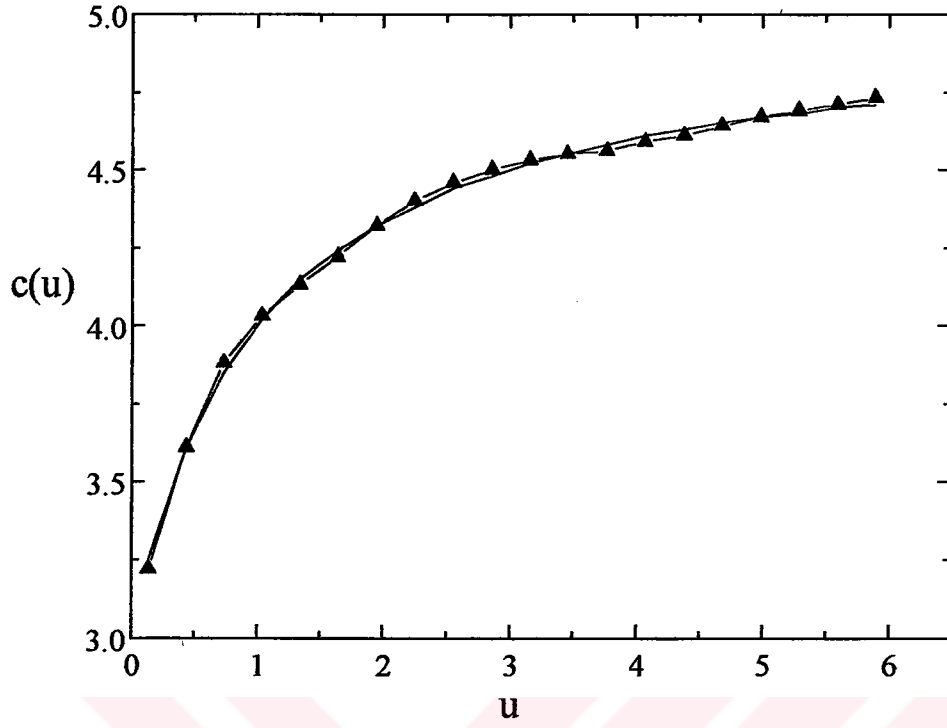
Burada,  $\delta(t_n)$  ek koşul verisinin  $n$ . kısmındaki bağıl hata değerinin seviyesini gösterir. Burada iki durum ele alınmıştır. Şekil 5.6'de  $\delta(t) = \text{sabit}$  ve Şekil 5.7' de ise  $\delta(t) = 0$  ortalamaya sahip  $t$ 'nin random fonksiyonu gözönüne alınarak çizilmiştir. Grafikler  $N \times M = 40 \times 60$  boyutlarında kafes üzerinde çizilmiştir. Şekillerden görüldüğü gibi sembollü eğri  $L(u)$ 'nun yaklaşık çözümünü, düz çizgi ise  $\lambda(u)$ 'nun gerçek çözümünü gösterir.  $\delta(t)=0.1$  ile hesaplamaların sonuçları Şekil 5.6 'de görüldüğü gibi  $L(u)$ 'nın  $\lambda(u)$ 'ya yaklaşımı çok az kötüleşmektedir. Şekil 5.7'de ise  $|\delta(t)| \leq 0.1$  sağlayan random hata durumunda, bilinen katsayı  $L(u)$ ,  $\lambda(u)$ 'ya sadece integral normunda yaklaşmıştır.



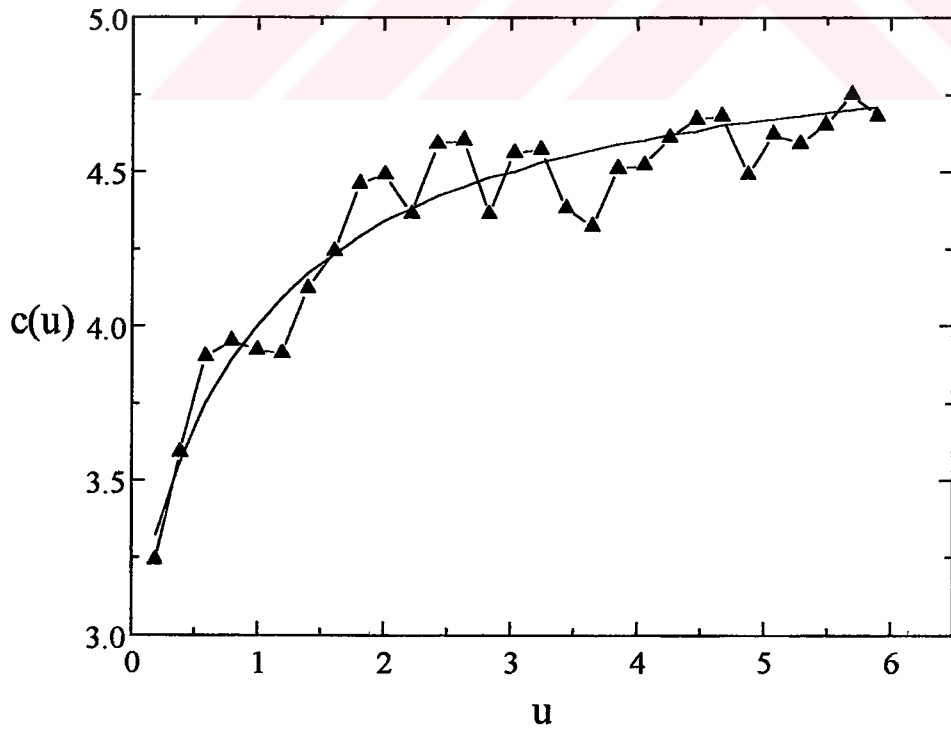
Şekil 5.1  $c(u)$ 'nin gerçek ve yaklaşık hatasız çözümleri  $M=50$ ,  $N=20$ .



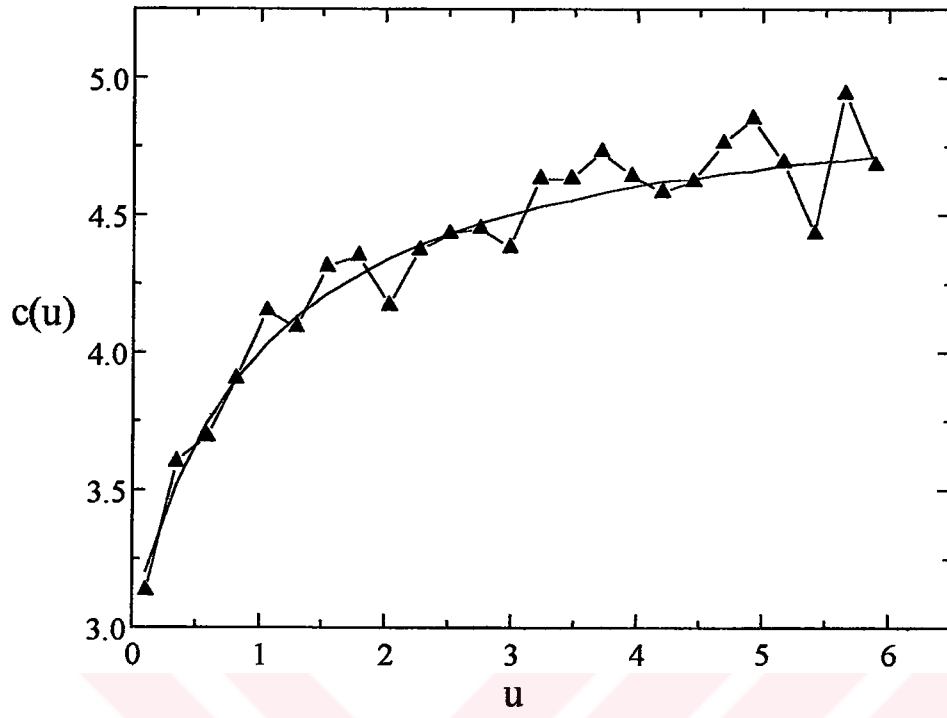
Şekil 5.2  $c(u)$ 'nin gerçek ve yaklaşık hatasız çözümleri  $M=50$ ,  $N=30$ .



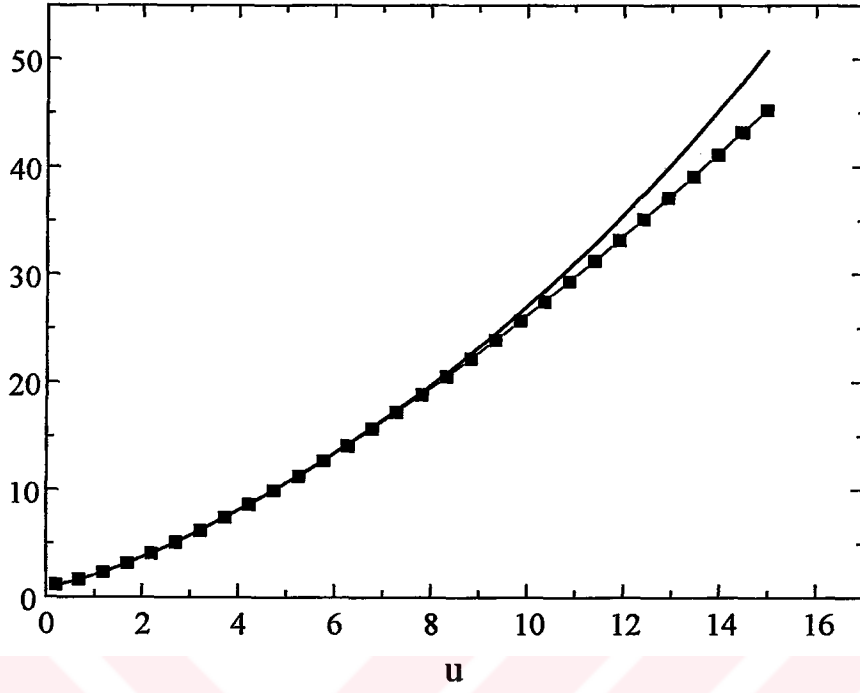
Şekil 5.3  $c(u)$ 'nin gerçek ve yaklaşık hatasız çözümleri  $M=50$ ,  $N=40$ .



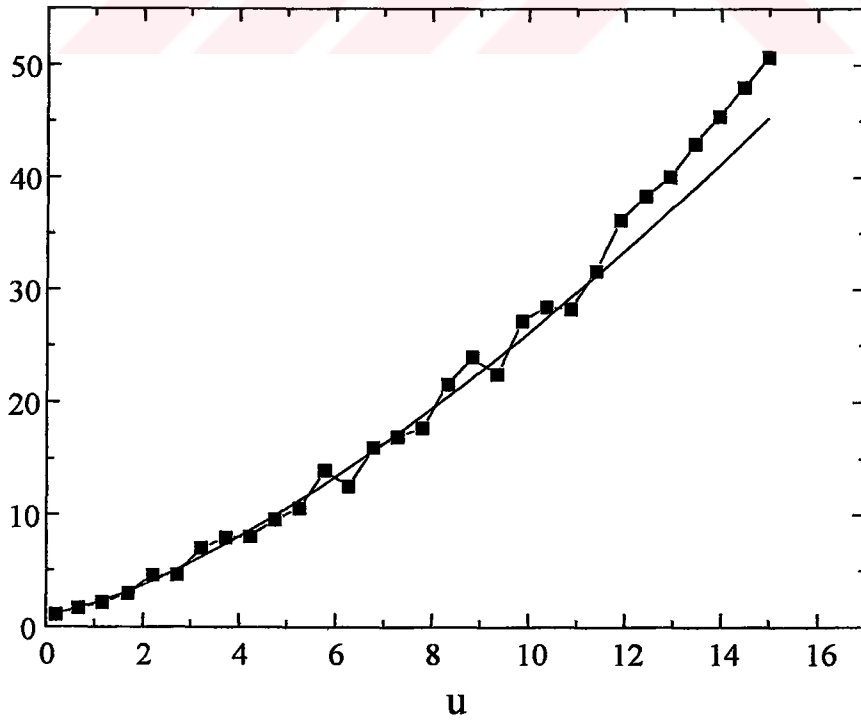
Şekil 5.4  $c(u)$ 'nin gerçek ve yaklaşık random hatalı çözümleri  $M=30$ ,  $N=50$  ve  $d(t,0.02)$ .



Şekil 5.5  $c(u)$ 'nin gerçek ve yaklaşık random hatalı çözümleri  $M=30$ ,  $N=50$  ve  $d(t,0.04)$ .



Şekil 5.6 Sabit hatalı çözümler. ■  $L(u)$   $M=60$ ,  $N=40$  ve —  $\lambda(u)$   $M=60$ ,  $N=40$  gösterir.



Şekil 5.7 Random hatalı çözümler, ■  $L(u)$   $M=60$ ,  $N=40$  ve —  $\lambda(u)$   $M=60$ ,  $N=40$  gösterir.

## 6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada, aşağıdaki iki problem ele alınmıştır.

1. Yarılineer parabolik diferansiyel denklemlerde bilinmeyen kaynak fonksiyonunun elde edilmesi için TTF (Trace-Type-Formulation) yöntemi ve Kanonik Gösterime dayalı iki farklı sayısal çözüm yöntemlerinin uygulaması yapılmış ve elde edilen sayısal sonuçlara göre bu yöntemlerin karşılaştırmalı analizi yapılmıştır.

Random hatalara göre bu algoritmaların duyarlılıklarının karşılaştırılması sonucunda, çok küçük hatalara karşın bu iki yöntem çok fark göstermezken, büyük hatalara karşılık TTF yöntemi, Kanonik Gösterime dayalı yönteme göre daha az duyarlılık göstermiştir.

Farklı zaman ve uzay adımları ile yapılan sayısal sonuçlar, kanonik gösterimin kararlılık alanının TTF yönteminden daha geniş olduğunu göstermiştir. TTF yönteminin kararlılık alanının küçüklüğü, bu yöntemde elde edilen yeniden formüle edilmiş problemin çözümünün kendisi ve ikinci mertebeden türevine tekrarlı şekilde bağlantılı olması ile ilişkilidir. Bu bağlantı katsayısı çözümdeki değişimlere aşırı duyarlı yapmaktadır.

2. Katsayısal fonksiyonların  $u$ 'ya bağlı olmaması yüzünden lineer olmayan parabolik denklemlerde bilinmeyen katsayıların bulunması ters problemleri ele alınmıştır. Gözenekli ortamın hidrolik özelliklerinin bulunması, ısı transferinde kaynak kontrollerinin bulunması gibi problemler parabolik tipli denklemler için ters problemlere örnektir.

Bu kısımda gözenekli ortamın su kapasitesi ve ortamın hidrolik geçirgenliği için ters problemler formüle edilmiştir. Bunları belirleyebilmek için, katsayıları sadece bilinmeyen çözümün fonksiyonları oldukları kabul edilmiştir.

Bu çalışmada, bilinmeyen katsayı için çokgensel yaklaşım yapılmış ve bilinmeyen bu katsayı sınır üzerinde verilen ek koşulu kullanarak denklemden kaldırılmıştır. Bu şekilde ele alınan problemin katsayısı, bilinmeyen çözüme ve onun türevlerine bağlı fonksiyon olan standart olmayan başlangıç sınır değer problemine dönüştürülür. Daha sonra bu problemi, sonlu farklar metoduyla çözerek bilinmeyen katsayı elde edilen sayısal sonuçtan belirlenir.



Ele alınan problemler için, bu çalışmada önerilen yöntem mevcut diğer yöntemlere göre en iyisidir. Bu yöntem, çok bilinmeyenli ters katsayı problemlerinin ve çok boyutlu ters katsayı problemlerinin çözümü için de genişletilebilir.



**KAYNAKLAR**

Cannon, J.R., (1963), "Determination of an unknown coefficient in a parabolic differential equation ", *Duke Math.J.*, 30: 313-323.

Cannon, J.R., (1964), "Determination of certain parameter in heat conduction problems ", *J. Math. Anal.Appl.*, 8: 188-231.

Cannon, J.R., (1984), *The one-dimensional heat equation*, Addison-Wesley.

Cannon, J.R., ve DuChateau, P.C., (1978), "Determination of unknown coefficients in parabolic operators from overspecified initial boundary data ", *J.Heat Transfer*, 100 : 503-507.

Cannon, J.R., ve DuChateau, P.C., (1980), "An inverse problem for a nonlinear diffusion equation ", *SIAM J.Appl.Math.*, 39(2): 272-289.

Cannon, J.R., ve DuChateau, P.C., (1981), "Weak solution  $u(x,t)$  to parabolic partial differential equations with coefficient that depend upon  $u(y_l, \psi_l(t, u(x,t)))$ ,  $l=1, \dots, k$  ", *J.Diff.Eq.*, 438-446..

Cannon, J.R., Estera, S.P., ve Vanderhoek, J., (1987), "A Galerkin procedure for the diffusion equation subject to the specification of mass", *Siam J.Numer.Anal.*, 24 :499-515.

Cannon, J.R., ve Lin, Y., (1988a), "Determination of a parameter  $p(t)$  in some quasilinear parabolic differential equations ", *Inverse Problems*, 4 : 35-45.

Cannon, J.R., ve Lin, Y., (1988b), "Determination of a parameter  $p(t)$  in holder class for some semilinear parabolic differential equations ", *Inverse Problems*, 4 : 596-605.

Cannon, J.R., ve Yin, H.M., (1988c), "A uniqueness theorem for a class of parabolic inverse problems", *J. Inverse Problems* 4: 411-416.

Cannon, J.R., ve Yin, H.M., (1989a), "A class of nonlinear, nonclassical parabolic equations", *J.Diff.Eq.*, 79.

Cannon, J.R., ve Yin, H.M., (1989b), "A class of multidimensional non-classical parabolic problems", *Differential Equations and Applications*.

Cannon, J.R., ve Lin, Y., (1990), "An Inverse problem of finding a parameter in a semilinear heat equation ", *J. Math. Anal. Appl.* 145 : 470-484.

Cannon, J.R., ve Rundell, W., (1991a), "Recovering a time dependent coefficient in a parabolic differential equations", *J. Math. Anal. Appl.*, 160 : 572-582.

Cannon, J.R., Duchateau, P., ve Steube, K., (1991b), "Trace type functional differential equations and the identification of hydraulic properties of porous media", *Transport Porous Media*, 6 : 745-758.

Cannon, J.R., Lin, Y., ve Wang, S., (1992a), "Determination of source parameter in parabolic equations", *Meccanica*, 27: 85-94.

Cannon, J.R., Duchateau, P.C., ve Steube, K., (1992b), *Unknown Ingredient Inverse Problems and Trace-Type Functional Differential Equation*.

Cannon, J.R., Lin, Y., ve Xu, S., (1994), "Numerical procedures for the determination of an unknown coefficient in semi-linear parabolic differential equations", *Inverse problems*, 10: 227-243.

Colton, D., Ewing, R., ve Rundell, W., (1990), *Inverse problems in partial differential equations*, SIAM Press, Philadelphia.

Duchateau, P.C., (1995), "Monocity and invertibility of coefficients-to-data mapping for parabolic inverse problems", *SIAM J. Math. Anal.* 26 : 1473-1487.

Gilding, B.H., (1991), "Qualitative mathematical analysis of the Richard equation", *Transport Porous Media*, 5: 651-666.

Golayoglu, A., (2000), "Determination of unknown coefficient in nonlinear diffusion equations", *Journal of Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Appl.*, 42: 20-25.

Golayoglu, A., ve Can, E., (2000), "Numerical procedure of identification of water capacity of porous media", *Mathematics and Computers In Simulation*, 52: 113-120.

Jones, B.F., ve Douglas J., (1962), "The determination of a coefficient in a parabolic differential equation, Part II, Numerical Approximation", *J. of Math. and Mech.* 6 : 919-926.

Ladyzhenskaya, O.A., Solonnikov, V.A., ve Uralceva, N.N., (1967), *Linear and Quasilinear Equation of Parabolic Type*, Nauka, Moscow.

Lin, Y., (1991), "An inverse problem for a class of quasilinear parabolic equations", *SIAM. J. Math. Anal.*, 22 : 146-156.

Muzylev, N.V., (1986), "Uniqueness theorems for some converse problems in heat conduction", *USSR Comput. Math. Phys.*, 20: 120-134.

Pilant, M.S., ve Rundell, W., (1986), "Undetermined coefficient problems for nonlinear elliptic and parabolic equations", *Inter. Ser. Num. Math.* 77: 139-154.

Pilant, M.S., ve Rundell, W., (1987a), "Iteration schemes for unknown coefficient problems arising in parabolic equations", *Numer. Methods in P.D.E.*, 3: 313-325.

Pilant, M.S., ve Rundell, W., (1987b), "An inverse problem for a nonlinear elliptic equation", *SIAM J. Math. Anal.* 18: 1801-1809.

Pilant, M.S., ve Rundell, W., (1987c), "Fixed point methods a nonlinear parabolic inverse problem", *Comm. In P.D.E.* 13: 469-493.

Pilant, M.S., ve Rundell, W., (1988), "A uniqueness theorem for determining conductivity from overspecified boundary data", *Journal of Math. Anal. Appl.*, 136: 20-28.

Pilant, M.S., ve Rundell, W.,(1989), "An iteration method for the determination of an unknown boundary condition in a parabolic initial-boundary value problem ", Proc. Edin. Math. Soc., 32: 59-71.

Samarskiı, A.A., (1977), Theory of Difference Schemes Nauka, Moscow.



**EK1****PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN SONLU FARK ŞEMALARI**

Isı transferi denklemi için sınır değer problemini göz önüne alalım :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(x, t) \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(x, t) \quad (3)$$

Burada  $u_0(t), \mu_1(t), \mu_2(t)$  verilen fonksiyonlardır.

**Açık Şema**

$x$  değişkeni için  $W_h$  kafesi

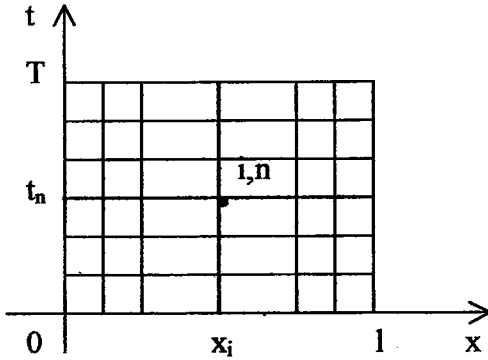
$$W_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, hN = 1\}$$

$t$  değişkeni için  $W_\tau$  kafesini

$$W_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, K, K\tau = T\}$$

şeklinde oluşturalım.

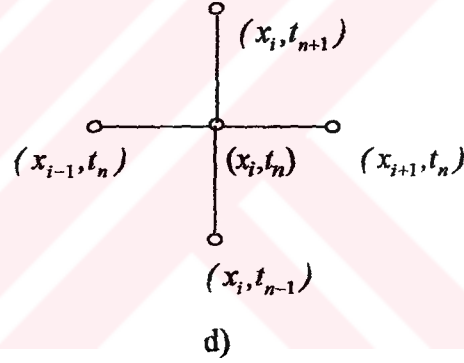
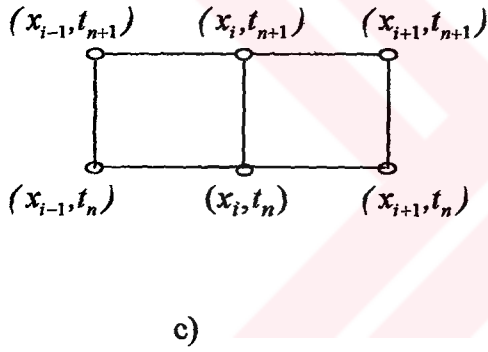
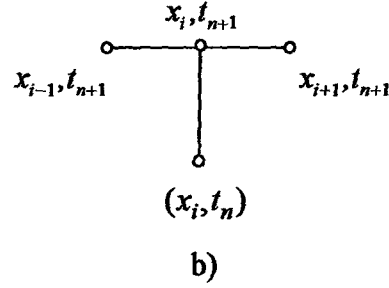
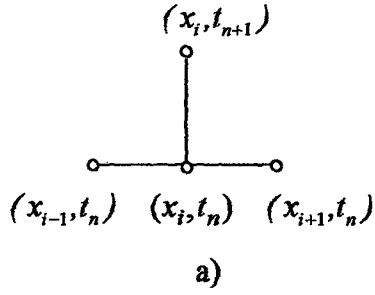
$(x_i, t_n), i = 0, 1, \dots, N, n = 0, 1, \dots, K$  noktaları  $W_{h,\tau} = W_h \times W_\tau$  şebekesinin noktaları olacaktır.



$(x_0, t_n), (x_1, t_n), \dots, (x_n, t_n)$  noktaları kümesine  $n$ . katman denir.

$$y_i^n = y(x_i, t_n) \quad , \quad y_{t,i}^n = \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} \quad , \quad y_{xx,i}^n = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} \quad (4)$$

gösterimlerini kullanarak, (1) denkleminin  $(x_i, t_n)$  noktasında yaklaşımını yapmak için aşağıdaki şablonlar kullanılır.



$\frac{\partial u}{\partial t}$  türevini  $(x_i, t_n)$  noktasında  $y_{t,i}^n$  fark ifadesi ile,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  'yi ise  $y_{xx,i}^n$  ve  $f(x, t)$ 'yi  $f(x_i, t_n)$ 'le değiştirelim. Sonuçta,

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = a^2 \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} + \varphi_i^n \quad (5)$$

alırız. Bu (a) şablonuna karşılık şemadır. Fark şeması ise,

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = a^2 \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} + \varphi_i^n \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, K$$

$$hN = l, \quad K\tau = T \quad (6)$$

$$y_0^n = \mu_1(t_n) \quad , \quad y_N^n = \mu_2(t_n) \quad , \quad n = 0,1,2,\dots,K$$

$$y_i^0 = u_o(x_i), \quad i = 0,1,\dots,N$$

Bu şemadan görüldüğü gibi eğer  $y_i^n$ ,  $i = 0,1,\dots,N$  çözümü n.katmanda belliyse , o zaman (n+1). Katmanda

$$y_i^{n+1} = y_i^n + \tau(y_{xx,i}^n + \varphi_i^n) \quad i=1,2,\dots,N \quad (7)$$

açık formülü ile bulunacaktır. Onun için de (6) şemasına açık şema denir.

(1) -(3) probleminin çözümüne (6) şemasının çözümü  $O(\tau+h^2)$  hatası ile yaklaşmaktadır.

(2) (6) şemasının dayanıklılık koşulunu inceleyelim.

$$\frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} = \tilde{\alpha} \frac{y_{j+1}^n - 2y_j^n + y_{j-1}^n}{h^2} \quad (\tilde{\alpha} = \alpha^2) \quad (8)$$

uygun homojen denklemine bakalım. (9)'un

$$y_j^n(\varphi) = q^n e^{ijh\varphi} \quad (9)$$

şeklinde özel çözümleri aranır. (9)'u (8)' de yazarsak ve  $e^{ijh\varphi}$  'ya bölersek

$$\frac{q-1}{\tau} = \tilde{\alpha} \frac{e^{ih\varphi} - 2 + e^{-ih\varphi}}{h^2} \quad \text{ve buradan}$$

$$q = 1 - 4\gamma \sin^2 \frac{h\varphi}{2} \quad , \quad \gamma = \frac{\tau \tilde{\alpha}}{h^2} \quad (10)$$

bulunur. Eğer tüm  $\varphi$  'ler için  $|q| \leq 1$  sağlanırsa o zaman (9) şekilli tüm çözümler sınırlıdır ve (8) fark denklemi dayanıklıdır;

$$|q| \leq 1 \Rightarrow \left| 1 - 4\gamma \sin^2 \frac{h\phi}{2} \right| \leq 1 \quad \left| 4\gamma \sin^2 \frac{h\phi}{2} \right| \leq 2 \Rightarrow \gamma \leq 0.5 \Rightarrow \tau \leq 0.5 \frac{h^2}{\tilde{\alpha}}$$

yani , (8) fark şeması , zaman adımı  $\tau$  ve uzay adımı  $h$  olmak üzere belli bir sınırlamalar içinde dayanıklıdır. Onun içinde (8) şemasına koşullu dayanıklı şema denir.

### Kapalı şemalar

(b) şablonuna karşılık

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \tilde{\alpha} \frac{y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \phi_i^n$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1 \quad n = 0, 1, \dots, K-1 \quad (11)$$

$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}) \quad , \quad y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}) \quad , \quad n = 0, 1, \dots, K-1$$

$$y_0^{n+1} = u_0(x_i) \quad , \quad i = 0, 1, \dots, N$$

Bu şemanın hatası  $O(\tau+h^2)$ 'dir. Bilinen  $y_i^n$  'ler için  $y_i^{n+1}$  'lerin bulunması

$$\gamma y_{i+1}^{n+1} - (1+2\gamma)y_i^{n+1} + \gamma y_{i-1}^{n+1} = -F_i^n \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1})$$

$$y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1})$$

ile ifade edilir.

$$\text{Burada } \gamma = \tilde{\alpha}\tau/h^2, \quad F_i^n = y_i^n + \tau\phi_i^n$$

Bu sistem takip yöntemi ile çözülür (Takip yönteminin dayanıklılık koşulu sağlanmaktadır).

Benzer şekilde,

$$\frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} = \tilde{\alpha} \frac{y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}}{h^2}$$

şemasının dayanıklılık koşulunu ararsak,



$$q = (1 + 4\gamma \sin^2 \frac{h\varphi}{2})^{-1}, \quad \gamma = \frac{\alpha\tau}{h^2}$$

bulunur. Ve görüldüğü gibi tüm  $\varphi$ ,  $\tau$  ve  $h$  ' lar için  $|q| \leq 1$ .

Dayanıklılığı araştırmak için birkaç tane yöntem vardır. Bunlardan biri olan Harmonikler yöntemi ile bu şemanın dayanıklılığını inceleyelim. (Bu dayanıklılık zorunlu koşulunu verecektir.)

Homojen denkleme bakalım :

$$\frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} = \frac{y_j^n - 2y_j^n + y_j^n}{h^2}$$

$$y_j^n(\varphi) = q^n e^{ijh\varphi} \quad i, \varphi \text{ herhangi bir sayı}$$

$q$  tanımlanacak sayıdır.

Denkleme yazarak ve  $e^{ijh\varphi}$  'ye bölerek

$$\frac{q-1}{\tau} = \frac{e^{ih\varphi} - 2 + e^{-ih\varphi}}{h^2} \quad \text{ve buradan}$$

$$q = 1 - 4\gamma \sin^2 \frac{h\varphi}{2}, \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2}$$

elde edilir.

Eğer herhangi bir  $\varphi$  için  $|q| > 1$  olursa  $n \rightarrow \infty$  olduğunda  $y_j^n(\varphi)$  sonsuz artacaktır. Bu halde fark şemasına dayanıksız fark şeması denir. Eğer tüm  $\varphi$  'ler için  $|q| < 1$  ise dayanıklı denir.

$$|q| \leq 1 \Rightarrow \left| 1 - 4\gamma \sin^2 \frac{h\varphi}{2} \right| < 1 \Rightarrow \gamma \leq 0.5 \text{ yani } \tau \leq 0.5h^2 \text{ koşulu içinde dayanıklıdır.}$$

Kapalı şemalar :

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \phi_i^n$$

$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}) \quad , \quad y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}) \quad , \quad n = 0, 1, \dots, K-1$$

$$y_i^0 = u_0(x_i) \quad , \quad i = 0, 1, \dots, K-1$$

$$\gamma y_{i+1}^{n+1} - (1 + 2\gamma)y_i^{n+1} + \gamma y_{i-1}^{n+1} = -F_i^n \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$\gamma = \tau/h^2 \quad , \quad F_i^n = y_i^n + \tau \phi_i^n$$

Takip yöntemi ile çözülür.

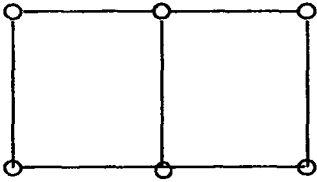
Yine benzer şekilde harmonikler yöntemini uygularsak

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{y_{j+1}^{n+1} - 2y_j^{n+1} + y_{j-1}^{n+1}}{h^2}$$

$$q = (i + 4\gamma \sin^2 \frac{h\phi}{2})^{-1} \quad , \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2} \quad , \quad |q| \leq 1$$

$\forall h, \tau$  'lar için mutlak dayanıklıdır.  $\tau$  istenildiği kadar büyük seçilebilir.

$$x_{i-1}, t_{u+1} \quad x_i, t_{n+1} \quad x_{i+1}, t_{u+1}$$



$$x_{i-1}, t_n \quad x_i, t_u \quad x_{i+1}, t_u$$

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{1}{2}(y_{xx,i}^{n+1} + y_{xx,i}^n) + \phi_i^n$$

Altı noktalı simetrik şema. Bu şema,  $h$  ve  $\tau$  'ya göre 2.mertebeden yaklaşımı vardır. (Eğer  $\varphi_i^n = f(x_i, t_n + 0.5\tau) + O(\tau^2 + h^2)$  ise, mutlak dayanıklıdır ve takip yöntemi ile çözülür). Baktığımız bu üç şemayı genel olarak çeki parametrelili şemalar ailesi olarak yazılır:

$$\begin{aligned} \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} &= \delta y_{xx}^{n+1} + (1-\delta)y_{xx}^n + \varphi_i^n \\ i &= 1, 2, \dots, N-1, n = 0, 1, \dots, K-1 \\ y_0^{n+1} &= \mu_1(t_{n+1}), y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}), n = 0, 1, \dots, K-1 \\ y_i^0 &= u_0(x_i), i = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (12)$$

Eğer,  $\delta=0$  ise açık şema,  $\delta=1$  kapalı şema ve  $\delta=0.5$  simetrik şema olarak isimlendirilir. Aynı zamanda,

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_* = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}, \\ \varphi_i^n &= f(x_i, t_{n+1/2}) + \frac{h^2}{12} f''(x_i, t_{n+1/2}) + O(\tau^2 + h^4) \end{aligned}$$

ise (12) şeması  $\tau$  'ya göre 2. ,  $h$  'a göre 4. mertebeden yaklaşım ifadesidir ve mutlak dayanıklıdır. Genellikle  $\delta \geq 0.5$  koşullu tüm şemalar mutlak dayanıklıdır.

### Değişken Katsayılı Denklemler , Lineer Olmayan Denklemler

$$\begin{aligned} \rho(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t), \quad 0 < C_1 \leq K(x, t) \leq C_2, \quad \rho(x, t) \geq C_3 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Lu &= \frac{\partial}{\partial x} \left( K(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \Lambda(t) y_i &= \left( a(x, t_i) y_{\bar{x}} \right)_{x,i} = \frac{1}{2} \left[ a(x_{i-1}, t) \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a(x_i, t) \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] \\ a(x_{i+1}, t) + a(x_i, t) &= 2K(x_i, t) + O(h^2) \end{aligned}$$

Bezer şekilde çeki parametrelili sonuçlar yazılır.

Eğer  $t=t_n+0.5\tau$ ,  $\delta=0.5$  o zaman şema  $\tau$  ve  $h'$  a göre 2. mertebeden yaklaşmaktadır.

Dayanıklılığın öğrenilmesi için dondurulmuş katsayılar yöntemi kullanılır.

Şimdi lineer olmayan ısı transferi için 1. sınır değer problemini inceleyelim:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u)$$

Kapalı şema (lineer)

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{1}{h} \left( a_{i+1} \frac{y_{i+1}^{n+1} - y_i^{n+1}}{h} - a_i \right) + f(y_i^n)$$

$$a_i = 0.5 \left( K(y_i^n) + K(y_{i-1}^n) \right)$$

1.tertip  $\tau$ , 2.tertip  $h$  olmak üzere mutlak dayanıklıdır. Çözüm takip yöntemi ile bulunur.

Kapalı lineer olmayan şema:

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{1}{h} \left( a(y_{i+1}^{n+1}) \frac{y_{i+1}^{n+1} - y_i^{n+1}}{h} - a(y_i^{n+1}) \frac{y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}}{h} \right) + f(y_i^{n+1})$$

$$a(y_i^{n+1}) = \frac{K(y_i^{n+1}) + K(y_{i-1}^{n+1})}{2}$$

Bu, lineer olmayan denklemin çözümü için basit iterasyon veya Newton yöntemleri kullanılır.

Predikton-Kornekton algoritması da

$$\frac{y_i^{n+1/2} - y_i^n}{0.5\tau} = \left( a(y_i^n) y_{\bar{x}}^{n+1/2} \right)_{x,i} + f(y_i^n) \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$y_0^{n+1/2} = \mu_1(t_n + 0.5\tau) \quad y_N^{n+1/2} = \mu_2(t_n + 0.5\tau)$$

ve

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{1}{2} \left( \left( a(y_i^{n+1/2}) y_{\bar{x}}^{n+1} \right)_{x,i} + \left( a(y_i^{n+1/2}) y_{\bar{x}}^n \right)_{x,i} \right) + f(y_i^{n+1/2}) \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}) \quad , \quad y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1})$$

ile verilmektedir.



$$y_{j-1} = \alpha_j(\alpha_{j+1}y_{j+1} + \beta_{j+1}) + \beta_j = \alpha_j\alpha_{j+1}y_{j+1} + \alpha_j\beta_{j+1} + \beta_j \quad j = \overline{1, N-1} \quad (5)$$

ifadesini bulmuş oluruz. Bütün bunları (2)'de yazdığımızda

$$\left[ \alpha_{j+1}(a_j\alpha_j - c_j) + b_j \right] y_{j+1} + \left[ \beta_{j+1}(a_j\alpha_j - c_j) + a_j\beta_j + f_j \right] = 0 \quad j = \overline{1, N-1}$$

denkleminin sonucu sağlaması için  $\alpha_{j+1}$  ve  $\beta_{j+1}$  katsayıları öyle seçilmelidir ki parantezler içi sifıra eşit olsun; o zaman

$$\alpha_{j+1} = \frac{b_j}{c_j - a_j\alpha_j}, \quad \beta_{j+1} = \frac{a_j\beta_j + f_j}{c_j - a_j\alpha_j}, \quad j = \overline{1, N-1} \quad (6)$$

olmalıdır ve  $\alpha_j$  ve  $\beta_j$  ( $j > 1$ )' lerin bulunması için başlangıç  $\alpha_1$  ve  $\beta_1$  değerlerinin verilmesi gerekiyor. (3) denkleminde  $j=0$  olduğunda,

$$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1, y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1, \quad (7)$$

bulunur ki; bu durumda  $\alpha_1 = \chi_1$ ,  $\beta_1 = \mu_1$  elde ederiz. Dolayısıyla (6) ve (7) ifadeleri ile  $\alpha_{j+1}$  ve  $\beta_{j+1}$  katsayılarını buluruz ve buna Takip yönteminin (TDMA) Düz Gidişi denir. Eğer tersine takip yöntemini kullanacaksak önce  $y_N$ ' yi bilmemiz gerekir. (7) denkleminde  $N \rightarrow N-1$  yazarsak

$$y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N$$

bulunur ve buradan,

$$y_N = \frac{\chi_2 \beta_N + \mu_2}{1 - \chi_2 \alpha_N} \quad (8)$$

elde edilir.  $y_N$  bilindikten sonra (7) formülü ile tüm  $y_j$ ' lerin bulunmasına ters takip denir. Takip(TDMA) yönteminin kullanılabilmesi için,

$$a_j \neq 0, b_j \neq 0, |c_j| \geq |a_j| + |b_j| \quad j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (9)$$

ve

$$|x_1| \leq 1, \quad |x_2| \leq 2 \quad (10)$$

koşullarının sağlanması gerekir.



**EK 3**

A) Algoritma I'e göre hatasız olarak yapılan  $h=1/99$  değeri sabit tutuldu. a1.dat(m=400,n=100),a12.dat(m=50,n=100) ve a13.dat(m=20,n=100) değerlerinde yapılan programlarda datalar elde edilmiştir. Bu programda  $p(t)=10t*\exp(-t**2)$  alınmıştır.( $u=tsinx+1$  alınmıştır.) aynı zamanda bu programda m değeri sabit tutularak değişen n değerleri için(m=100,n=300 a1n.dat,m=100,n=50 a2n.dat ve m=100,n=20 a3n.dat oluşturuldu.)

**ALGORİTMA I İLE HATASIZ ÇÖZÜMLER**

```

dimension fi(500), q(500), p(500), a(500), b(500),c(500), f(500), al(500),
be(500),r(500),Gp(500),u(500,500), t(500), fm1(500), fm2(500),x(500)
open(unit=1,file='a3n.dat')
tm=2.
xm=1.
read(*,*) m,n
ta=tm/(m-1)
h=xm/(n-1)
do 10 i=1,n
x(i)=(i-1)*h
fi(i)=1.
u(i,1)=fi(i)
10 continue
ny=0.2/h
AGp=0
do 20 j=2,m
q(j-1)=0
p(j-1)=(j-2)*ta
t(j)=(j-1)*ta
Gp(j)=10*t(j)*exp(-t(j)**2)
if (Gp(j).gt.AGp) AGp=Gp(j)
fm1(j)=u(ny,j-1)/(1.+t(j)*sin(x(ny)))
fm2(j)=(1.+t(j)*sin(1.))*u(ny,j-1)/(1.+t(j)*sin(x(ny)))
cap1=0

```



```

cap2=0
do 25 i=2,n-1
a(i)=-q(j-1)/(2.*h)+1./h**2

c(i)=1./ta+2./h**2
b(i)=1./h**2+q(i-1)/(2*h)
ff=u(ny,j-1)*(-Gp(j)+sin(x(i))*(1.+t(j)-t(j)*Gp(j)))/
* (t(j)*sin(x(ny))+1.)
f(i)=(u(i,j-1)/ta+ff)
25 continue
al(2)=cap1
be(2)=fm1(j)
do 30 k=2,n-1
al(k+1)=b(k)/(c(k)-al(k)*a(k))
be(k+1)=(a(k)*be(k)+f(k))/(c(k)-al(k)*a(k))
30 continue
u(n,j)=(cap2*be(n)+fm2(j))/(1-cap2*al(n))
do 40 k=1,n-1
u(n-k,j)=al(n-k+1)*u(n-k+1,j)+be(n-k+1)
40 continue
20 continue
do 100 j=1,m
r(j)=u(ny,j)/(1.+t(j)*sin(x(ny)))
100 continue
do 110 j=2,m-1
p(j)=-(r(j)-r(j-1))/ta/r(j)
write(*,*) t(j),Gp(j),p(j)
write(1,*) t(j),Gp(j),p(j)
110 continue
stop
end

```

B) Bu program Algoritma II'ye göre hatasız sonuçları verir. m=400,n=100(aa21.dat) m=50,n=100(aa22.dat), m=20,n=100(aa23.dat) Aynı zamanda (m=100, n=300 aa2n.dat m=100, n=50 aa22n.dat ve m=100 n=20 aa23n.dat)

**Algoritma II İle Hatasız Çözümler**

```

dimension fi(500), q(500), p(500), a(500), b(500),c(500), f(500), al
*(500), be(500),r(500),Gp(500), u(500,500),t(500), fm1(500), fm2(500),x(500),e(500)
open(unit=1,file='aa23n.dat')
tm=2.
xm=1.
read(*,*)m,n
h=xm/(n-1)
ta=tm/(m-1)
do 10 i=1,n
x(i)=(i-1)*h
fi(i)=1.
u(i,1)=fi(i)
10 continue
ny=0.2/h
t(1)=0
e(1)=t(1)*sin(x(ny))+1
AGp=0
do 20 j=2,m
q(j-1)=0
p(j-1)=(j-2)*ta
t(j)=(j-1)*ta
Gp(j)=10*t(j)*exp(-t(j)**2)
if(Gp(j).gt.AGp) AGp=Gp(j)
fm1(j)=1.
fm2(j)=t(j)*sin(1.)+1.
cap1=0
cap2=0
e(j)=t(j)*sin(x(ny))+1.
akk=(e(j)-e(j-1))/ta
ffin=sin(x(ny))*(1.+t(j-1)-Gp(j-1)*t(j-1))-Gp(j-1)
akk=(akk-(u(ny+1,j-1)-2.*u(ny,j-1)+u(ny-1,j-1))/h**2- ffin)/
* u(ny,j-1)

```

```

do 25 i=2,n-1
a(i)=-q(j-1)/(2.*h)+1./h**2
c(i)=1./ta+2./h**2-akk

b(i)=1./h**2+q(i-1)/2*h
f(i)=u(i,j-1)/ta+sin(x(i))*(1.+t(j)-Gp(j)*t(j))-Gp(j)
25  continue
al(2)=cap1
be(2)=fm1(j)
do 30 k=2,n-1
al(k+1)=b(k)/(c(k)-al(k)*a(k))
be(k+1)=(a(k)*be(k)+f(k))/(c(k)-al(k)*a(k))
30  continue
u(n,j)=(cap2*be(n)+fm2(j))/(1-cap2*al(n))
do 40 k=1,n-1
u(n-k,j)=al(n-k+1)*u(n-k+1,j)+be(n-k+1)
40  continue
20  continue
do 100 j=1,m
r(j)=u(ny,j)/(1.+t(j)*sin(x(ny)))
100  continue
do 110 j=2,m-1
akk=(e(j)-e(j-1))/ta
ffin=sin(x(ny))*(1.+t(j-1)-Gp(j)*t(j-1))-Gp(j)
ffin=sin(x(ny))*(1.+t(j-1)-t(j-1)**3)-t(j-1)**2
akk=(akk-(u(ny+1,j-1)-2.*u(ny,j-1)+u(ny-1,j-1))/h**2- ffin)/
* u(ny,j-1)
p(j)=akk
write(*,*)t(j),Gp(j),p(j)
write(1,*)t(j),Gp(j),p(j)
110  continue
stop
end

```

**EK 4**

A) Bu program gözenekli ortamın su kapasitesi  $c(u)$  katsayısının bulunması programıdır.

```

dimension x(99), t(99), u(99, 99), ug(99, 99), w(99), d(99,99), v(99), f(99),alf(99),g(99)
dimension z(99), q(99), ak(99,99), ac(99,99), al(99), be(99), a(99), b(99),
*c(99),um(99),fk(3,99),fc(3,99),un(100)
dimension aj(99), ff(99, 99), us(99, 99),mik1(99),gg(3),dd(3)
open(unit=1, file='yen.dat')
open(unit=2, file='far.dat')
open(unit=3, file='ek.dat')
data gg/0.004,0.02,0.06/
data dd/0.004,0.02,0.02/
write(*,*) gg(1),gg(2)
do 893 i=1,10
call random(gr)
tm = 2.
read(*,*) n,m
do 777 kk=1,1
ki = 40
kind=2
ta = tm / (m - 1)
h = 1. / (n - 1)
fl2 = 1.
fp = 1.
fl = 1.
cc=3.
nsig=2
cap0=0.5
write(*,*) tan(3.14159364)
pi = 3.14159263
alf0 = 0.
half = (pi/2.) / ki
do 5 ik = 1, ki
5   alf(ik) = alf0 + half * ik

```

```

DO 155 i = 1 , n

x(i) = (i - 1) * h
DO 15 j = 1 , m
t(j) = (j - 1) * ta
ug(i, j) = 0.0000001
u(i, j) = ug(i, j)
15 CONTINUE
155 continue
do 10 i = 1, n
q(i) = 0
z(i) = ug(i, 1)
u(i, 1) = z(i)
10 continue
v(1) = 0.
w(1) = 0.
DO 16 j = 1 , m - 1
write(*, *) j
w(j + 1) = 3. * t(j + 1)
ks = 0
DO 22 i = 1 , n
ff(i, j + 1) = 0.
if(j .gt. 1) u(i, j + 1) = u(i, j)
22 CONTINUE
80 continue
ks = ks + 1
akc = alf(20)
acc = alf(10)
DO 20 i = 2 , n
uu = (u(i, j + 1) + u(i - 1, j + 1)) / 2.
ak(i, j + 1) = 7.5 + 10. * exp(-0.5 * uu)
ak(i, j + 1) = 12 - 4. * atan(2.5 * uu - 10.)
ak(i, j + 1) = 1.
ac(i, j + 1) = 5. - 2. / (1. + uu)
20 CONTINUE

```

DO 30 i = 2 , n-1

a(i) = ta \* ak(i,j+1)

c(i) = h \*\*2 \* ac(i,j+1) + ta \* (ak(i+1,j+1)+ak(i,j+1))-  
\* ta\*h\*\*2 \* q(i)

b(i) = ta \* ak(i + 1,j+1)

f(i) = ff(i, j + 1) \* ta \* h\*\*2 + ac(i,j+1) \* h\*\*2 \* u(i, j)

30 CONTINUE

al(2) = 1.

be(2) = 0.

cal(2)=0.

be(2)=v(j+1)

DO 40 k = 2 , n - 1

al(k + 1) = b(k) / (c(k) - al(k) \* a(k))

be(k + 1) = (a(k) \* be(k) + f(k)) / (c(k) - al(k) \* a(k))

40 CONTINUE

cap2 = 0.

fm2 = w(j + 1)

u(n, j + 1) = (cap2 \* be(n) + fm2) / (1 - cap2 \* al(n))

DO 60 k = 1 , n - 1

u(n - k, j + 1) = al(n - k + 1) \* u(n - k + 1, j + 1) +  
\* be(n - k + 1)

60 CONTINUE

g(j+1)=ak(n,j+1)\*(u(n,j+1)-u(n-2,j+1))/(2.\*h)

g(j+1)=ak(n,j+1)\*(u(n,j+1)-u(n-1,j+1))/h

write(\*,\*) g(j+1)

IF (ks.lt.kind) GO TO 80

do 101 i=1,n

d(i,j+1)=u(i,j+1)

101 continue

g(j+1)=ak(n,j+1)\*(u(n,j+1)-u(n-2,j+1))/(2.\*h)

g(j+1)=ak(n,j+1)\*(u(n,j+1)-u(n-1,j+1))/h

call random(rr)

ggk=gg(kk)\*(2.\*rr-1.)

write(\*,\*) 'ggk=',ggk

$$g(j+1)=g(j+1)+ggk*g(j+1)$$

```
call random(rr)
```

```
ddk=dd(kk)*(2.*rr-1.)
```

```
d(1,j+1)=d(1,j+1)+ddk*d(1,j+1)
```

```
100 CONTINUE
```

```
16 continue
```

```
write(*,*) (u(i,m),i=1,n)
```

```
um(1)=(u(1,1)+u(2,1))/2.
```

```
DO 111 i = 2 , n
```

```
IF (u(i,1) .gt. um(1)) GO TO 111
```

```
um(1) = (u(i,1)+u(i-1,1))/2.
```

```
111 CONTINUE
```

```
fk(kk,1)=1.
```

```
fc(kk,1)=3.
```

```
lfl=0
```

```
DO 116 j = 1 , m - 1
```

```
write(*,*) j
```

```
v(j+1)=t(j+1)
```

```
w(j+1)=3.*t(j+1)
```

```
ik = 1
```

```
181 ks = 0
```

```
DO 122 i = 1 , n
```

```
ff(i, j + 1) = 0
```

```
if(j.gt.1) u(i, j + 1) = u(i, j)
```

```
122 CONTINUE
```

```
180 continue
```

```
ks = ks + 1
```

```
if(ks.eq.1) go to 654
```

```
DO 120 i = 2 , n
```

```
uu=(u(i, j + 1) + u(i - 1, j + 1))/2.
```

```
uq=(u(n, j + 1) + u(n - 1, j + 1))/2.
```

```
uqq= (u(n-1, j + 1) + u(n - 2, j + 1))/2.
```

```
fk(kk,j+1) = g(j+1)*2.*h/(u(n,j+1)-u(n-2,j+1))
```

```
fk(kk,j+1) = g(j+1)*h/(u(n,j+1)-u(n-1,j+1))
```

fk(kk,j+1)=1.

alflam=fk(kk,j+1)-(u(n,j+1)-u(n-2,j+1))/2.\*

\*(fk(kk,j+1)-fk(kk,j))/(uq-um(j))

ux=(u(n-1,j+1)-u(n-2,j+1))/h

f1t=(w(j+1)-w(j))/ta

f1t=(u(n-1,j+1)-u(n-1,j))/ta

sk=u(1,j+1)-d(1,j+1)

fc(kk,j+1)=(g(j+1)-ux+0.0\*sk)/(f1t\*h)

uq=(u(n,j+1)+u(n-1,j+1))/2.

ak(i,j+1)=fk(kk,j)+(fk(kk,j+1)-fk(kk,j))/(uq-um(j))\*(uu-um(j))

ak(i,j+1)=1.

ac(i,j+1)=fc(kk,j)+(fc(kk,j+1)-fc(kk,j))/(uq-um(j))\*(uu-um(j))

do 127 jj=2,j

if( (uu.gt.um(jj-1) ).and. (uu.le.um(jj)) ) ak(i,j+1) = fk(kk,jj-1)+(fk(kk,jj)-fk(kk,jj-1))/(um(jj)-um(jj-1))\*(uu-um(jj-1))

127 continue

do 1271 jj=2,j

if( (uu.gt.um(jj-1) ).and. (uu.le.um(jj)) ) ac(i,j+1) = fc(kk,jj-1)+(fc(kk,jj)-fc(kk,jj-1))/(um(jj)-um(jj-1))\*(uu-um(jj-1))

1271 continue

120 CONTINUE

654 continue

DO 130 i = 2 , n-1

a(i) = ta \* ak(i,j+1)

c(i) = h \*\*2 \* ac(i,j+1) + ta \* (ak(i+1,j+1)+ak(i,j+1))-ta\*h\*\* 2 \* q(i)

b(i) = ta \* ak(i + 1,j+1)

ff(i) = ff(i, j + 1) \* ta \* h\*\*2 + ac(i,j+1) \* h\*\*2 \* u(i, j)

130 CONTINUE

al(2) = 1.

call random(rr)

ddk=dd(kk)\*(2.\*rr-1.)

be(2)=0.

al(2)=1

be(2)=0.



5647 continue

cl(2)=1

be(2)=0

DO 140 k = 2 , n - 1

al(k + 1) = b(k) / (c(k) - al(k) \* a(k))

be(k + 1) = (a(k) \* be(k) + f(k)) / (c(k) - al(k) \* a(k))

140 CONTINUE

cap2 = 0.

fm2 = w(j + 1)

u(n, j + 1) = (cap2 \* be(n) + fm2) / (1 - cap2 \* al(n))

DO 160 k = 1 , n - 1

u(n - k, j + 1) = al(n - k + 1) \* u(n - k + 1, j + 1) + be(n - k + 1)

160 CONTINUE

m(j+1)=(u(n,j+1)+u(n-1,j+1))/2.

IF (ks.lt.kind) GO TO 180

1110 continue

1100 CONTINUE

uul1=1.+um(j+1)\*\*0.5

uul1=5.-2./(1.+um(j+1))

1122 uul= 12-4.\*atan(2.5\*um(j+1)-10.)

uul=1.

1871 format(2x, 9F8.2)

write(\*,1871) um(j+1),fc(kk,j+1),uul1,fk(kk,j+1),uul

write(1,1871) um(j+1),fc(kk,j+1),uul1

1111 continue

116 CONTINUE

746 continue

777 continue

uul1=3.

uul=12-4.\*atan(-10.)

uul=1.

do 569 j=1,m-1

uul1=5.-2./(1.+um(j+1))

uul=12-4.\*atan(2.5\*um(j+1)-10.)

uul=1.

write(2,\*) u(1,j+1),d(1,j+1)

569 continue

hu=um(m)/99

do 470 i=1,100

un(i)=(i-1)\*hu

uul=12.-4.\*atan(2.5\*un(i)-10.)

uul=1.

uul1=5.-2./(1.+un(i))

write(3,\*) un(i),uul,uul1

470 continue

STOP

END



**ÖZGEÇMİŞ**

Doğum Tarihi	04.01.1970	
Doğum Yeri	İstanbul	
Lise	1981-1987	Mehmed Bayazıd Lisesi
Lisans	1987-1991	Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fak. Fizik Bölümü
Yüksek Lisans	1991-1994	Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fak. Fizik Bölümü
Doktora	1994- 2000	Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fak. Fizik Bölümü

**Çalıştığı Kurum**

1993 – Devam ediyor Kocaeli Üniversitesi Fizik Bölümünde Araştırma Görevlisi

