



YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

79261

OPTİMUM DİZAYNLI VOLANLARIN ENİNE TİTREŞİMLERİ ÜZERİNE

Mak.Yük.Müh. Ahmet ÇELİK

F.B.E. Makina Mühendisliği Anabilim Dalı Konstrüksiyon Programında
Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 17 Nisan 1998

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Uğur GÜVEN (YTÜ)

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Cemil ERKMAN (İTÜ)

: Prof. Dr. Yılmaz ÖZTÜRK (İTÜ)

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

İSTANBUL, 1998



İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SEMBOL LİSTESİ	IV
ŞEKİL LİSTESİ	VI
TABLO LİSTESİ	VII
TÜRKÇE ÖZET	IX
SUMMARY	XI

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1

BÖLÜM 2

TEMEL DENKLEMLER VE VARSAYIMLAR

2.	Temel Denklemler ve Varsayımlar	4
2.1	Dairesel Ortotrop Plaklara Ait Temel Bağlıntılar	4
2.2	Enerji İfadeleri	6
2.2.1	Eğilmeden Doğan Potansiyel Enerji	6
2.2.2	Radyal Gerilmeden Doğan Potansiyel Enerji	7
2.2.3	Teğetsel Gerilmeden Doğan Enerji	8
2.2.4	Kinetik Enerji İfadesi	9
2.3	Rayleigh-Ritz Yöntemi	9
2.4	Düzlemde Kompozit Malzeme Özellikleri	12
2.4.1	Simetrik Kompozit Plakların Düzlem Katılığı	12
2.4.2	Kompozit Plağa ait Gerilme - Düzlem Şekil Değiştirme Bağlıntıları	13
2.4.3	Quasi-İzotrop Kompozit Plaklar	18
2.5	Plaklara Ait Mod Şekilleri	21



BÖLÜM 3

OPTİMUM DİZAYNLI VOLANLAR VE TİTREŞİMLER

3.1	Kalınlığı Üstel Değişen Optimum Dizaynli Volanlar	22
3.1.1	Gerilme İfadeleri	22
3.1.2	Diskün Birim Kütlesinin Kinetik Enerjisi	26
3.1.3	Optimum Dizaynli, Dönen, İzotrop Davranan Diske Ait Titreşim Değerleri	28
3.2	Değişken Kalınlık ve Yoğunluklu Optimum Dizaynli Volanlar	35
3.2.1	Teorik Davranış	35
3.2.2	Alüminyum-Magnezyumlu Volan	39
3.3	Doğal Frekanslar	40

BÖLÜM 4

OPTİMUM DİZAYNLI VOLANLARDA ANİZOTROPİNİN TİTREŞİMLER ÜZERİNE ETKİSİ

4.1	Anizotrop Özellik Gösteren Optimum Dizaynli Volanlar	42
4.1.1	Dış Kısmı Sabit Kesitli Olan Volana Ait Denklemler	42
4.1.2	Özel Çözüm	44
4.2	Dış Kısmın Değişken Kesitli Olması Hali	45
4.2.1	Özel Çözüm	47
4.3	Doğal Frekanslar	48

BÖLÜM 5

OPTİMUM DİZAYNLI KOMPOZİT VOLANLARDA HACİM ORANININ TİTREŞİMLER ÜZERİNE ETKİSİ

5.	Gelişigüzel Fiber Dağılımlı, izotrop Özellik Gösteren Kompozit Malzemeden Optimum Dizaynli Volanlar	52
5.1	Kompozitin Yoğunluğu	52
5.2	Kompozitin Elastiklik Modülü	54
5.3	Doğal Frekanslar	54



BÖLÜM 6

ANİZOTROP, DEĞİŞKEN KESİTLİ VE RİJİT KAPLAMALI VOLANLARDAKİ TİTREŞİMLER

6.	Farklı Sınır Şartlarına Sahip, Optimum Dizaynlı Olmayan Volanlar	63
6.1	Gerilme ve Radyal Yerdeğiştirme İfadeleri	63
6.2	İç ve Dış Kenarlarından Rijit Bağlı Volan	64
6.3	İç Kenarından Serbest, Dış Kenarından Rijit Bağlı Volan	64
6.3.1	Özel Çözümler	65
6.4	Doğal Frekanslar	66

BÖLÜM 7

OPTİMUM DİZAYNLI OLMAYAN DEĞİŞKEN KALINLIKLI VOLANLARIN TİTREŞİMLERİ

7.	Farklı Kalınlık Değişim Fonksiyonlarına Sahip, Optimum Dizaynlı Olmayan Volanlar	71
7.1	Kalınlığı Üstel Bir Fonksiyon Şeklinde Değişen Volan	72
7.1.1	Gerilme İfadeleri	72
7.1.2	Kalınlığı Doğrusal Olarak Değişen Volan	74
7.2	Doğal Frekanslar	77

BÖLÜM 8

SONUÇLAR

KAYNAKLAR



SEMBOL LİSTESİ

a	: Sabit gerilmeli volanın iç yarıçapı
A_{ij}	: Çok yönlü kompozit plağın düzlem katılığı
b	: Sabit gerilmeli volanın dış yarıçapı
r, θ	: Silindirik Koordinatlar
β	: Kalınlık değişim parametresi
c	: Fiber hacim oranı
D_r	: Anizotrop plağın çap doğrultusundaki eğilme rijitliği
D_θ	: Anizotrop plağın θ yönündeki eğilme rijitliği
$D_{r\theta}$	: Anizotrop plağın kayma rijitliği
ϵ_i^0	: Sabit, düzlem şekil değiştirme bileşenleri ($i = 0, 1, 2$)
ϵ_r	: Radyal şekil değiştirme bileşeni
ϵ_θ	: Teğetsel şekil değiştirme bileşeni
$\gamma_{r\theta}$	: Anizotrop plağın kayma açısı
$G_{r\theta}$	: Anizotrop plağın kayma modülü
h	: Plağın kalınlığı
J	: Kütle atalet momenti
M	: Kompozit plağın toplam kütlesi
n	: nodal çap sayısı
s	: nodal daire sayısı
N_i	: Gerilme bileşeni
ν_r	: Radyal yöndeki Poisson oranı
ν_θ	: θ yönündeki Poisson oranı
$\bar{\Omega}$	: Boyutsuz dönme hızı
$\bar{\omega}_n$	: Boyutsuz doğal frekans
R_i	: Değişken malzemeli volanın iç yarıçapı



- R_0 : Değişken malzemeli volanın dış yarıçapı
- ρ : Volanın yoğunluğu
- $\bar{\sigma}_i$: Kompozit plağın herbir tabakasına ait i yönündeki ortalama gerilme
- σ : Eş gerilmeli volanın sabit gerilmesi
- σ_r, σ_θ : Radyal ve teğetsel gerilme
- t : zaman
- τ_r, τ_θ : Kompozit plağa ait kayma gerilmeleri
- u : Radyal yerdeğiştirme
- v_i : θ_i doğrultusundaki fiber hacim oranı ($i = 1, 2, 3, \dots$)
- V_f : Fiber hacmi
- V_i : Geometrik faktör ($i = 1, 2, 3, 4$)
- V_m : Matris hacmi
- w : Enine yerdeğiştirme
- $W(x)$: Kabul edilen yerdeğiştirme fonksiyonu



ŞEKİL LİSTESİ

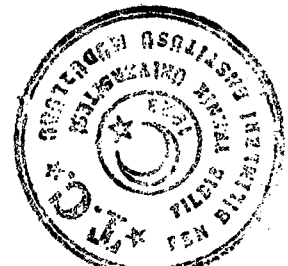
Şekil 1. Ortotropik plak üzerindeki gerilmeler

Şekil 2. Dönmeden dolayı plakta oluşan gerilmeler

Şekil 3. Uç ve göbek kısmı farklı, izotrop yapı gibi davranan kompozit malzemelerden yapılmış uç kısmı sabit kesitli olan sabit gerilmeli volan

Şekil 4. Değişken malzemeli diskin genel görünümü

Şekil 5. Hacim elemanının şematik görünüşü



TABLO LİSTESİ

- Tablo -1 Sabit Gerilmeli Volanın Boyutsuz Doğal Frekansları ($E_a=29\text{GPa}$, $E_b=85\text{ GPa}$, $\bar{\Omega} = 5$)
- Tablo -2 Sabit Gerilmeli Volanın Boyutsuz Doğal Frekansları($E_a=29\text{GPa}$, $E_b=85\text{ GPa}$, $\bar{\Omega} = 10$)
- Tablo -3 Sabit Gerilmeli Volanın Boyutsuz Doğal Frekansları ($E_a=29\text{GPa}$, $E_b=55\text{ GPa}$, $\bar{\Omega} = 5$)
- Tablo -4 Sabit Gerilmeli Volanın Boyutsuz Doğal Frekansları ($E_a=29\text{GPa}$, $E_b=55\text{GPa}$, $\bar{\Omega} = 10$)
- Tablo -5 Sabit Gerilmeli Volanın Değişik $\ln(h_0 / h_a)$ Değerleri İçin Boyutsuz Doğal Frekansları
($E_a=55\text{GPa}$, $E_b=85\text{ GPa}$, $\bar{\Omega} = 5$)
- Tablo -6 Sabit Gerilmeli Volanın Değişik $\ln(h_0 / h_a)$ Değerleri İçin Boyutsuz Doğal Frekansları
($E_a=65\text{GPa}$, $E_b=85\text{GPa}$, $\bar{\Omega} = 5$)
- Tablo -7 Sabit Gerilmeli Volanın Değişik $\ln(h_0 / h_a)$ Değerleri İçin Boyutsuz Doğal Frekansları
($E_a=29\text{GPa}$, $E_b=85\text{ GPa}$, $\bar{\Omega} = 5$)
- Tablo -8 Sabit Gerilmeli Volanın a/b Oranı Cinsinden Nodal Dairelerine Ait Yarıçapları
($E_a=65\text{GPa}$, $E_b=85\text{ GPa}$, $\bar{\Omega} = 5$)
- Tablo -9 Sabit Gerilmeli Diske Ait Şekil Faktörü ve Birim Kütle Başına Kinetik Enerji Değerleri
- Tablo-10 Al-Mg(%10 Mg) Alaşımından Sabit Gerilmeli Volanın Boyutsuz Doğal Frekansları
- Tablo-11 Merkezinde %10 Mg Olacak Şekilde Değişken Malzemeye Sahip Eş Gerilmeli
Volana Ait Boyutsuz Doğal Frekanslar
- Tablo-12 Dış Kısmı Anizotrop ve Sabit Kesitli, Sabit Gerilmeli Volanın Boyutsuz Doğal
Frekansları, ($\ln h_0/h_a=1$, $\beta = 0$)
- Tablo-13 Dış Kısmı Değişken Kesitli ve Anizotrop, Sabit Gerilmeli Volanın Doğal Frekansları
($\ln h_0/h_a=1$, $\beta = 0.9$)
- Tablo-14 Dış Kısmı Değişken Kesitli ve Anizotrop, Sabit Gerilmeli Volanın Boyutsuz Doğal
Frekansları ($\ln h_0/h_a=2$, $\beta = 0.9$)
- Tablo-15 Dış Kısmı Değişken Kesitli ve Anizotrop, Sabit Gerilmeli Volanın Boyutsuz Doğal
Frekansları ($\ln h_0/h_a=2$, $\beta = 0$)
- Tablo-16 Dış Kısmı Değişken Hacim Oranında, İç Kısmı Sabit Hacimde, İzotrop Davranan,
Sabit Gerilmeli Volana Ait Boyutsuz Frekanslar ($\ln h_0/h_a=0.5$, $c_1=0.5$, $v_a= v_b=0.5$)
- Tablo-17 Dış Kısmı Değişken Hacim Oranında, İç Kısmı Sabit Hacimde, İzotrop Davranan,
Sabit Gerilmeli Volana Ait Boyutsuz Frekanslar ($\ln h_0/h_a=1$, $c_1=0.5$, $v_a= v_b=0.5$)



- Tablo-18 Dış Kısmı Değişken Hacim Oranında, İç Kısmı Sabit Hacimde, İzotrop Davranan,
Sabit Gerilmeli Volana Ait Boyutsuz Frekanslar ($\ln h_o/h_a=1.5$, $c_1=0.5$, $v_a = v_b = 0.5$)
- Tablo-19 Dış Kısmı Değişken Hacim Oranında, İç Kısmı Sabit Hacimde, İzotrop Davranan,
Sabit Gerilmeli Volana Ait Boyutsuz Frekanslar ($\ln h_o/h_a=2$, $c_1=0.5$, $v_a = v_b = 0.5$)
- Tablo-20 Dış Kısmı Değişken Hacim Oranında, İç Kısmı Sabit Hacimde, İzotrop Davranan,
Sabit Gerilmeli Volana Ait Boyutsuz Frekanslar ($\ln h_o/h_a=0.5$, $c_1=0.5$, $v_a = v_b = 0.25$)
- Tablo-21 Dış Kısmı Değişken Hacim Oranında, İç Kısmı Sabit Hacimde, İzotrop Davranan,
Sabit Gerilmeli Volana Ait Boyutsuz Frekanslar ($\ln h_o/h_a=1$, $c_1=0.5$, $v_a = v_b = 0.25$)
- Tablo-22 Dış Kısmı Değişken Hacim Oranında, İç Kısmı Sabit Hacimde, İzotrop Davranan,
Sabit Gerilmeli Volana Ait Boyutsuz Frekanslar ($\ln h_o/h_a=1.5$, $c_1=0.5$, $v_a = v_b = 0.25$)
- Tablo-23 Dış Kısmı Değişken Hacim Oranında, İç Kısmı Sabit Hacimde, İzotrop Davranan,
Sabit Gerilmeli Volana Ait Boyutsuz Frekanslar ($\ln h_o/h_a=2$, $c_1=0.5$, $v_a = v_b = 0.25$)
- Tablo-24 İç ve Dış Kenarlarından Rijit Bağlı Anizotrop, Sabit Kesitli Dönen Diskin Boyutsuz
Doğal Frekansları ($a/b=0.5$, $\beta = 0$, $v_\theta = 0.3$, $\bar{\Omega} = 5$)
- Tablo-25 İç ve Dış Kenarlarından Rijit Bağlı Anizotrop, Değişken Kesitli Dönen Diskin
Boyutsuz Doğal Frekansları ($a/b=0.5$, $\beta = 0.5$, $v_\theta = 0.3$, $\bar{\Omega} = 5$)
- Tablo-26 İç Kenarından Serbest, Dış Kenarından Rijit Bağlı Anizotrop, Sabit Kesitli Dönen
Diskin Boyutsuz Doğal Frekansları ($a/b=0.5$, $\beta = 0$, $v_\theta = 0.3$, $\bar{\Omega} = 5$),
- Tablo-27 İç Kenarından Serbest, Dış Kenarından Rijit Bağlı Anizotrop, Değişken Kesitli
Dönen Diskin Boyutsuz Doğal Frekansları ($a/b=0.5$, $\beta = 0.5$, $v_\theta = 0.3$, $\bar{\Omega} = 5$)
- Tablo-28 Optimum Dizaynı Olmayan Değişken Kalınlıklı Diskin Boyutsuz Doğal Frekansları
($E_a=55\text{GPa}$, $\bar{\Omega} = 5$, $s_1=1$)
- Tablo-29 Optimum Dizaynı Olmayan Değişken Kalınlıklı Diskin Boyutsuz Doğal Frekansları
($E_a=29\text{GPa}$, $\bar{\Omega} = 5$, $s_1=1$)
- Tablo-30 Optimum Dizaynı Olmayan Değişken Kalınlıklı Diskin Boyutsuz Doğal Frekansları
($E_a=55\text{GPa}$, $\bar{\Omega} = 5$, $s_1=2$)
- Tablo-31 Optimum Dizaynı Olmayan Değişken Kalınlıklı Diskin Boyutsuz Doğal Frekansları
($E_a=29\text{GPa}$, $\bar{\Omega} = 5$, $s_1=2$)
- Tablo-32 Optimum Dizaynı Olmayan, Merkezinden Rijit Bağlı, Kalınlığı Doğrusal Olarak
Değişen, İzotrop Dönen Disk



TÜRKÇE ÖZET

Bu tezde optimum dizaynly volanlar ele alınarak, bu volanların enine titreşimleri incelenmiştir. Enine titreşimler Rayleigh-Ritz yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Optimum dizaynly volanlar ile diğerlerinin titreşimleri kıyaslanmıştır. Optimum dizaynly volanlarda çeşitli geometrik boyutların titreşimler üzerindeki etkileri belirlenerek, enerji yönünden optimum dizaynly yapılmış volanların titreşim yönünden iyileştirilmesine çalışılmıştır.

İkinci bölümün giriş kısmında şimdiye kadar yapılan benzer konu ile ilgili önemli çalışmalar özet olarak sunulmuştur. Özellikle dairesel ortotrop plaklara ait temel bağıntılar verilmiştir. Ayrıca Rayleigh-Ritz yöntemi kısaca aktararak, kompozit malzemeler için tez konusu ile ilgili özet bir bölüm sunulmuştur.

Üçüncü bölümde iki ayrı optimum dizaynly volan hali ele alınmıştır. İlk olarak [18]'de verilen dizayn üzerinde kısaca durularak, bu dizayn halindeki enine titreşimler çeşitli modlar ve değişik geometrik parametrelere bağlı olarak sunulmuştur. İkinci olarak [16]'da verilen dizayn ele alınmış, bu dizayn kısaca tanıtılarak değişik malzemeler için ayrı ayrı bulunan enine titreşimler tablolar ile sunulmuştur.

Dördüncü bölümde [18]'de verilen dizayn için malzemenin anizotropik etkisi hesaba dahil edilmiştir. Bu durumda özellikle anizotropluk etkisinin optimum dizaynly volanın enine titreşimleri üzerindeki etkisi bulunmaya çalışılmıştır. Değişik geometrik parametreler için çeşitli mod. değerlerindeki frekanslar tablolar ile verilmiştir.

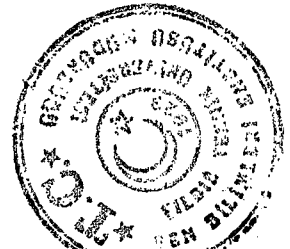
Beşinci bölümde [18]'deki optimum dizaynly kompozit volanın hacim oranının enine titreşimler üzerindeki etkisi üzerinde durulmuş ve çeşitli modlardaki frekanslar tablolarda gösterilmiştir.

Altıncı bölümde volanlardaki titreşimler üzerine rijit sınır koşullarının etkilerinin nasıl olacağı üzerinde durulmuştur. Bu bölümde dönen anizotrop ve değişken kalınlıklı volanın dıştan, içten ve dıştan rijit bağlantılı olması halindeki enine titreşim frekansları değişik parametreler gözönüne alınarak bulunmuş ve sonuçlar tablolar ile sunulmuştur.



Yedinci bölümde [18]’de alınan optimum dizaynly volan ile optimumluk koşulunu sağlamayan fakat bu dizayna benzeyen değişken kalınlıklı volanların titreşimleri kıyaslanmıştır. Sonuçlar tablolar ile verilmiştir.

Sekizinci bölümde sonuçlara ayrılmıştır. Optimum dizaynly volanlardaki titreşimler üzerine değişik parametrelerin etkileri ve optimum dizayna yönelik olarak boyutlandırılmış volanlardaki titreşimler ile ilgili önemli sonuçlar vurgulanmıştır.



SUMMARY

In this thesis, an optimum flywheel has been taken into account in order to investigate their trasverse vibration using Rayleigh - Ritz method. Vibrations of the optimum flywheel were compared with those of other flywheels. The effects of optimum flywheel dimensions on the vibration were investigated and some improvements for vibration were carried out for the flywheel designed from point view of energy.

In chapter 2, a review of literature survey for flywheel has been summurised briefly. Especially governing equations for circular orthotrop plates were given. In addition to this, Rayleigh - Ritz method were given and some information on composite materials related to this work were briefly presented.

In chapter 3, two different type of optimum flywheel were investigated. The first type given by [18] was taken into account to present trasverse vibration in variation of different mode and geometrics. The second type of flywheel [16] with variable materials was introduced to show trasverse vibration.

In chapter 4, the anisotropic effect of materials on transverse vibration of optimum flywheel was taken into account. Frequencies at different mode were introduced to different geometric parameters.

In chapter 5, effects of fiber / ratio on transverse vibration were investigated and results which belong to different mode frequencies were shown.

In chapter 6, the effect of rijid boundary conditions on flywheel vibration was investigated. Vibrations of two type which have different boundary conditions were investigated. First type has bpth rijid the other one has only outside rijid.



In chapter 7, [18] optimum and non - optimum flywheel were compared in terms of vibration and results were shown.

In chapter 8, a general conclusions were presented. Some important remarks on flywheel vibration were given in terms of some parameters.



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Volan tasarımı, endüstriye dönük değişik uygulamalarda büyük ölçüde rastlanan ve uzun zamandan beri üzerinde çalışmaları sürmekte olan çekici bir konudur. Stasyonær güç birimleri , transport araçları ile uzay araçları gibi sistemlerde enerjiyi depolayan sistemin bir parçası olarak volanların kullanımı etkin bir hale gelmiştir. Optimal enerjiyi koruyan sistem, gerçekte bu sistemi oluşturan tüm elemanların optimal tasarımını gerektirir. Volanların, diğær enerji depolama yöntemlerine göre gösterdiği üstünlükler Biggs[1] ve Robenhorst[2] tarafından açıklanmıştır. Volanlar verimlilik ve ekonomik yönlerden yüksek verimli, orta verimli[1 – 4], düşük fiyatlı / düşük verimli olmak üzere sınıflandırılmaktadır.

İzotrop malzemelerle yapılan tasarımlarda optimal şekil iyi bilinmektedir. Bilinen optimal şekil, radyal yönde kalınlığı üstel olarak değışen bir kesittir. Optimizasyon kriteri istenilen ağırlık ve hacim ile yakından ilgilidir. Maksimum enerjinin, malzemenin kırılma başlangıcına kadar depolanması nedeniyle, optimum dizaynda, malzemeye ait kırılma kriteri geçerlidir. Ayrıca maksimum enerjinin depolanması, ortamın tüm noktalarının aynı kırılma düzeyine gelmesiyle sağlanması sebebiyle, izotrop malzemelerde dizayn kriteri olarak, disk boyunca üniform gerilme hali alınır. Bu gerilme halinde radyal ve teğetsel gerilmelerin disk boyunca birbirine eşit ve sabit olması gerekir. Bu da iyi bilindiği gibi ancak dolu disk hali için sağlanabilmektedir. Bu nedenle bu dizayn şekli daha çok sabit gerilmeli volan olarak tanımlanır. Diğær yandan anizotrop volanların optimal dizaynı ile ilgili çalışmalar fiber teknolojisi alanındaki çalışmalardan çok daha önce başlamıştır. Carrier[5] 1943' te üniform kalınlıklı anizotrop dönen disklerin gerilme halini incelemiştir. Sen Gupta[6] ise değışken kalınlıklı anizotrop dönen diskleri gözönüne almıştır. Teorik olarak çok önceden başlayan bu çalışmaların hiçbirini uygulamaya dönük uygun kriterleri içeren bir optimum dizayn konusunu ele almamıştır.

2

Bazı araştırmalar, volanın malzemesi ile şekli üzerinde olmuştur. Metwalli[7], birim kütle başına maksimum atalet momentine sahip bir disk elde etmiştir. Bu diskin geometrisine ait bazı



parametrelerin değiştirilmesi halinde, çok verimli gerilme dağılımlarının elde edilebileceğini göstermiştir. Metwalli[8], aynı zamanda disk şeklindeki volanlara ait optimum şekilleri açıklamıştır.

Gerstle ve Biggs[9], anizotrop, değişken kalınlıklı bir disk için, hiperbolik ve hiperbolikle lineer şeklin karışımı olan, iki kalınlık fonksiyonu tanımlamışlardır. De Silva[10], Pontryago'nun maksimum prensibini kullanarak, dönen diske minimum ağırlık kazandıran şekle ait analitik bir çözüm sunmuştur. Robenhorst[11], yüksek flamanter malzemelerinden yapılmış üç çeşit volan önermiştir. Donfeld, Heurs ve Chou[12], ince kauçuk tabakaları arasına Kevlar 49/ Epoxy kompozit malze koyarak elde ettiği çok diskli bir volanı incelemiştir. Fhemy ve West[13], radyal gerilme dağılımının, yarıçap doğrultusunda kompozit malzeme özelliklerinin yavaş yavaş değiştirilerek yapıldığı, bir başka diski incelemiştir. Robenhorst[14], süper volan olarak tanımlanan volan şekillerinden birini tasarlamıştır. Ikegami ve Shiratori[15], iç ve dış kısımlarında farklı kompozitlerin kullanıldığı kompozit bir volan önermiştir. Buradaki amaçları dönme hızı ile atalet momentini artırmak suretiyle yüksek enerji yoğunluğuna sahip bir volan elde etmektir. Metwalli, Shawki ve Sharobeam[16], yarıçapa göre malzeme ve dayanımı değişen metal kullanarak, volana ait optimum bir şekil araştırmışlardır. Bununla beraber, bu yazarların çalışmalarında kullandıkları temel eşitliklerinde, elastisitenin uygunluk denklemlerini göz önüne almadıklarından çözüm her yerde sağlanamamıştır. Christiense ve Wu[17], anizotrop volanlar için optimum bir dizayn geliştirmiştir. Bu yazarların çalışması, sabit gerilmeli bir volan elde etme amacı taşımadığından sınır şartlarını sağlayan herhangi bir yöntem belirtmemişlerdir. Volan çevresinde sınır şartı olarak radyal gerilmenin sıfır olması gerekir. Ayrıca bu yazarlar, ortotropik bir kompozit kullanarak elde edilmesi düşünülen bir volan tasarımında izotropik eşitliklerin kullanılabileceğini göstermişlerdir.

Georgian[18] ise, sınır şartlarını da sağlayan sabit gerilmeli bir volan tasarlamıştır. Bu volanın merkez kısmı sabit gerilmeli, malzemesi düşük yoğunluklu yüksek dayanımlı bir kompozit, dış



kısmı sabit kalınlıklı, malzemesi yüksek yoğunluklu bir kompozit olarak düşünülmüştür. Böylece , volana maksimum enerjiyi depolayabilme kabiliyeti kazandırılmıştır.

Dönen disklerde, merkezkaç kuvveti sonucunda genel olarak enine titreşimler meydana gelir. Deneyler bu titreşimlerin belli hızlarda çok belirgin olduğunu ortaya koymuştur. Bu titreşimler, malzemenin yorulmasına ve diskteki çatlakların yavaş yavaş gelişmesine neden olarak, ilave eğilme gerilmeleri meydana getirir. Camphell[19], yaptığı deneylerde disk üzerinde ileri ve geri hareket eden iki tür dalganın olduğunu göstermiştir. Geriye doğru hareket eden dalgalar, rezonans şartları altında diskin ileri hızı ile çakıştığından, daha belirgin olarak görülmüştür. Deneyler diskteki kırılmalara bu titreşim türünün sebep olduğunu göstermiştir. Bu nedenle kritik frekans değerlerinin çeşitli modlar için belirlenmesi büyük önem taşımaktadır.

Mote[20], Eversman ve Dedson[21], Barasch ve Chen[22], Ghosh[23], üniform kalınlıklı dönen izotrop disklerin titreşimlerini, diskin eğilme rijitliğini ihmal ederek incelemişlerdir. Reddy ve Srinath[24], değişken kalınlıklı, değişken yoğunluklu, anizotrop dönen disklerin gerilme ve yer değiştirmelerine ait kapalı formda çözümler elde etmişlerdir. Pandalai ve Patel[25], Parathap ve Varadan[26], Avalos ve Hack[27], Laura[28], polar ortotropik dairesel plakların titreşimlerini çeşitli yöntemlerle hesaplamışlardır. Rajguru ve Sundararagon[29], dönen ortotropik dairesel plakların titreşimlerini Rayleigh-Ritz tekniği ile incelemiştir.

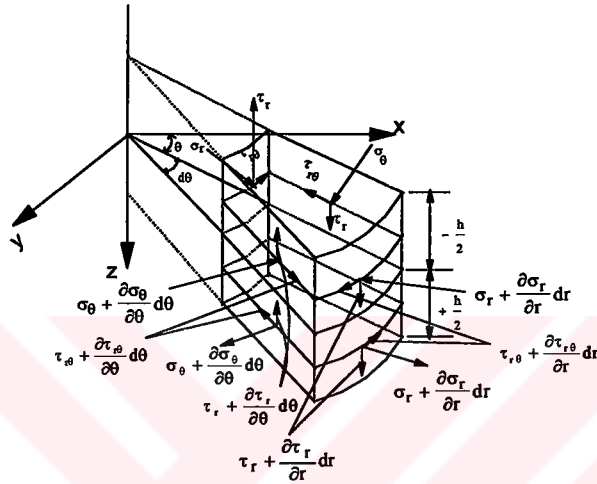
Ulaşılabildiği kadarıyla şimdiye kadar yapılan benzer çalışmalarda optimum dizayn şartlarını gözönüne alan kapsamlı bir incelemeye rastlanmamıştır. Burada kompozit malzemeden, sabit gerilmeli, dolu kesitli, kesit yönünden değişik özelliklere sahip volanın kritik frekansları Rayleigh-Ritz yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Bu çalışmanın ana gayesi optimum dizaynlı volanlara ait değişik parametrelerin, kritik frekanslar üzerindeki etkisini araştırmaktır.



BÖLÜM 2

TEMEL DENKLEMLER VE VARSAYIMLAR

2.1 Dairesel Ortotrop Plaklara Ait Temel Bağıntılar



Şekil.1 Ortotropik plak üzerindeki gerilmeler

Bu koordinat sisteminde şekil değiştirmeler ile gerilmeler arasındaki bağıntılar gerilmeler cinsinden aşağıdaki gibidir.

$$\epsilon_r = \frac{1}{E_r} (\sigma_r - \nu_r \sigma_\theta)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E_\theta} (\sigma_\theta - \nu_\theta \sigma_r)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_{r\theta}} \tau_{r\theta}$$

(2.1)



$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_{r\theta}} \tau_{r\theta}$$

Bu bağıntılar, silindirik anizotrop halde ve $\tau_{\theta r}$, $\tau_{\theta z}$, σ_z ' in yerdeğiştirme üzerindeki etkileri ihmal edildiğinde geçerlidir. Burada E_r , E_θ radyal ve teğetsel doğrultudaki elastiklik modülleri, ν_r , ν_θ ; radyal ve teğetsel Poisson oranlarıdır. $G_{r\theta}$, kayma modülüdür.

(2.1) bağıntıları birim şekil değiştirmeler cinsinden aşağıdaki gibi yazılırlar;

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E_r}{1 - \nu_r \nu_\theta} (\varepsilon_r + \nu_\theta \varepsilon_\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{E_\theta}{1 - \nu_r \nu_\theta} (\varepsilon_\theta + \nu_r \varepsilon_r) \\ \tau_{r\theta} &= G_{r\theta} \gamma_{r\theta} \end{aligned} \quad (2.2)$$

u_r ve v_θ 'yer değiştirmeleri $w(r,\theta)$ enine yerdeğiştirmeleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılır.

$$u_r = -z \frac{\partial w}{\partial r}, \quad v_\theta = -\frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (2.3)$$

Şekil değiştirme ve yerdeğiştirmeler arasındaki bağıntılar ,

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{z}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad (2.4)$$



$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -2z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

olarak ifade edilirler. (2.2) ve (2.4) ifadelerini kullanılarak, gerilmeler enine yerdeğiştirmeler cinsinden;

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{Ez}{(1-\nu_r\nu_\theta)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ \sigma_\theta &= -\frac{Ez}{(1-\nu_r\nu_\theta)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\tau_{r\theta} = -2G_{r\theta} z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right]$$

olarak bulunurlar.

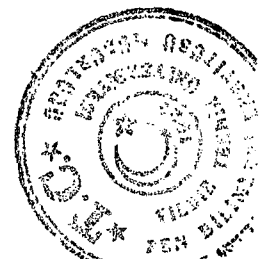
2.2 Enerji İfadeleri

2.2.1 Eğilmeden Doğan Potansiyel Enerji

Yalnız eğilme etkisi gözönüne alındığında potansiyel enerji ,

$$V_e = \iiint (\epsilon_r \sigma_r + \epsilon_\theta \sigma_\theta + \gamma_{r\theta} \tau_{r\theta}) r d\theta dr dz \quad (2.6)$$

integral ile hesaplanır. Önceki kısımdaki bağıntılar kullanılarak bu ifade aşağıdaki şekilde yazılır.



$$V_e = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \frac{E_r z}{(1 - \nu_r \nu_\theta)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] + \left[\frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{z}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \frac{E_\theta z}{(1 - \nu_r \nu_\theta)} \right. \\ \left. \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] + 2 \cdot z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \cdot 2 \cdot G_{r\theta} \cdot z \cdot \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \right\} r d\theta dr dz \quad (2.7)$$

Harmonik titreşimler için;

$$w = W(r) \cdot \cos(n\theta) \cdot \cos(\omega_n t) \quad (2.8)$$

yazılabilir [29]. Enerji ifadesinin maksimum değeri (2.7) ve (2.8) kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

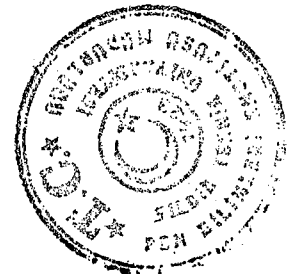
$$V_{e \max} = \frac{\pi}{2} \int_a^b \left[D_r \left(\frac{d^2 W}{dr^2} \right)^2 + \frac{2D_1}{r} \frac{d^2 W}{dr^2} \left(\frac{dW}{dr} - \frac{n^2}{r} W \right) + \frac{D_\theta}{r^2} \left(\frac{dW}{dr} - \frac{n^2}{r} W \right)^2 + \frac{4D_{r\theta} n^2}{r^2} \left(\frac{dW}{dr} - \frac{W}{r} \right)^2 \right] r dr$$

Burada ,

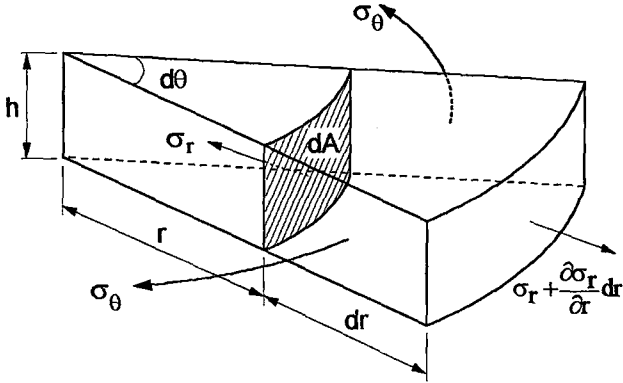
$$D_r = \frac{E_r h^3}{12(1 - \nu_r \nu_\theta)} \quad ; \quad D_\theta = \frac{E_\theta h^3}{12(1 - \nu_r \nu_\theta)} \quad ;$$

$$D_1 = \frac{\nu_\theta E_\theta h^3}{12(1 - \nu_r \nu_\theta)} = \frac{\nu_\theta E_r h^3}{12(1 - \nu_r \nu_\theta)} \quad ; \quad D_{r\theta} = \frac{G_{r\theta} h^3}{12}$$

olarak verilir.



2.2.2 Radyal Gerilmeden Doğan Potansiyel Enerji



Şekil.2 Dönmeden dolayı plakta oluşan gerilmeler

Yalnız radyal gerilme düşünüldüğünde potansiyel enerji ifadesi aşağıdaki gibidir,

$$V_{\sigma_r} = \frac{1}{2} \int_a^b \int_0^{2\pi} h \cdot \sigma_r \cdot \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 r \cdot d\theta dr \quad (2.9)$$

Burada \$h\$ kalınlık fonksiyonudur. Harmonik titreşimler gözönüne alındığında (2.8) kullanılarak (2.9) aşağıdaki şekle girer.

$$V_{\sigma_r} = \frac{\pi}{2} \int_a^b h \cdot \sigma_r \cdot \left(\frac{dW}{dr} \right)^2 \cos^2(\omega_n t) r \cdot dr$$

Burada radyal gerilmeye ait maksimum potansiyel enerji,

$$V_{\sigma_r} = \frac{\pi}{2} \int_a^b h \cdot \sigma_r \cdot \left(\frac{dW}{dr} \right)^2 r \cdot dr$$

şeklindedir.



2.2.3 Teğetsel Gerilmeden Doğan Potansiyel Enerji

Yalnız teğetsel gerilme düşünülerek potansiyel enerji aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$V_{\sigma\theta} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b h \cdot \sigma_{\theta} \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 r \cdot dr d\theta \quad (2.10)$$

(2.8) kullanılarak bu ifade aşağıdaki şekle dönüşür.

$$\int V_{\sigma\theta} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b h \cdot \sigma_{\theta} n^2 \cdot \left(\frac{W}{r} \right)^2 \sin^2(n\theta) \cos^2(\omega_n t) r \cdot dr d\theta$$

Burada maksimum potansiyel enerji ifadesi,

$$V_{\sigma\theta} = \frac{\pi}{2} \int_a^b h \cdot \sigma_{\theta} n^2 \cdot \left(\frac{W}{r} \right)^2 r \cdot dr$$

olur.

2.2.4 Kinetik Enerji İfadesi

Genel halde kinetik enerji ,

$$dT = \frac{1}{2} V^2 dm$$

ifadesi ile verilir. Burada ,

$$V = \frac{dw}{dt} , \quad \frac{dw}{dt} = -\omega_n W \cdot \cos(n\theta) \sin(\omega_n t) \quad dm = h \rho r dr d\theta$$

Bu eşitlikler yukarda yazılarak ,



$$T = \frac{\pi}{2} \rho \omega_n^2 h \int_a^b W^2 r dr \quad (2.11)$$

elde edilir.

2.3 Rayleigh - Ritz Yöntemi

Rayleigh enerji yöntemi genellikle bir öz değer problemin çözümünün kolayca bulunamadığı sürekli sistemlerde temel frekansın çok hassas olmasa bile hızlı olarak bulunmasının istendiği hallerde kullanılan klasik bir yöntemdir. Yöntem esas olarak Rayleigh oranının doğal modlar civarında ekstremumlara sahip olmasına dayanmaktadır. Rayleigh oranı daima birinci özdeğerden daha büyük bir değer verir. [30]

Rayleigh - Ritz yönteminin temelinde yatan düşünce, temel moda mümkün mertebe yakın $\phi(x)$ deneme fonksiyonları seçmek suretiyle, birinci özdeğer için elde edilecek değerleri minimize etmektir. $\phi(x)$, özdeğer problemin bütün sınır şartlarını sağlayan bir mukayese fonksiyonudur. Seçilen $\phi(x)$ mukayese fonksiyonu, birinci özfonksiyona yaklaştıkça, Rayleigh oranının vereceği yaklaşık değer de birinci özdeğere yaklaşacaktır. Bu yaklaşım değeri gerçek değerden daha büyük olacaktır. Bununla beraber, yöntem yalnız birinci özdeğer için değil, diğerleri için de yaklaşık değerler verir.

Yöntemin esası şudur: Herhangi bir sisteme ilişkin özdeğer problemin yaklaşık olarak çözümü için,

$$W_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i \phi_i(x) \quad (2.12)$$

şeklinde bir çözüm kabulü yapılır. ϕ_i ' ler bilinen ve lineer bağımsız olan mukayese fonksiyonları, a_i ' ler de tayin edilecek katsayılardır. a_i bilinmeyen katsayıları, $W_n(x)$ tahmini fonksiyonu, sistemin doğal modlarını, mümkün mertebe iyi temsil edecek şekilde tespit



edilmeye çalışılır. Matematiksel olarak bunun anlamı; a_i 'lerin, Rayleigh oranını ekstremum kılacak şekilde tayin edilmesi demektir.

Problemin çözümü, n tane $\phi(x)$ bilinen fonksiyonun lineer kombinasyonu şeklinde kabul etmekle aslında, n serbestlik derecesine sahip bir sistem alınmış ve böylece,

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = 0$$

kısıtlamaları getirilmiş olmaktadır. Diğer yandan bağların sistemi rijitleştirici yönde etkisinden dolayı doğal frekanslar için elde edilecek değerler, gerçeklerinden daha büyük olacaktır.

$\phi_i(x)$ mukayese fonksiyonlarının sayısı arttıkça, sisteme uygulanan kısıtlamalar azalacağından, öz frekanslar için genellikle daha yaklaşık değerler elde edilir. diğer bir deyişle gerçek frekanslara üstten daha çok yaklaşmış olur.

Rayleigh oranı ifadesinde $W_n(x)$ çözüm kabulü yapılsın,

$$Q(W_n) = \frac{V(W_n)}{T(W_n)}$$

Rayleigh oranının extrem olabilmesi için gerçek şartlar,

$$\frac{\partial Q(W_n)}{\partial a_j} = 0 \quad j=0,1,2, \dots, k$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_j} = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial a_j}\right)T - \left(\frac{\partial T}{\partial a_j}\right)V}{T^2} = \frac{1}{T} \left[\frac{\partial V}{\partial a_j} - \frac{V}{T} \frac{\partial T}{\partial a_j} \right] = 0$$

$$\bar{\omega}_n^2 = \min \left(\frac{V}{T} \right)$$

dir. Buradan,



$$\frac{\partial V}{\partial a_j} - \bar{\omega}_n^2 \frac{\partial T}{\partial a_j} = 0$$

elde edilir.

Sonuçta a_j bilinmeyenleri için n tane homojen cebirsel denklemden oluşan bir takıma gelinir.

Bu denklemlere Galerkin denklemleri denilir .

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial a_0} = \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial V}{\partial a_1} = \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial V}{\partial a_j} = \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial a_0} = \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial T}{\partial a_1} = \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial T}{\partial a_j} = \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = 0$$

ve sonuçta matris formunda

$$([A] - \bar{\omega}_n^2 [I]) \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{Bmatrix} = 0$$

şeklinde yazılabilir.

Özdeğer problemin çözülmesi sonucunda n tane özdeğer ve bunlara karşılık gelen yine n tane öz vektör elde edilir. $\bar{\omega}_n$ öz değerlerin küçükten büyüğe doğru sıralanmış oldukları kabul edilsin. Sürekli sistemlerin gerçek özdeğerleri ise $\bar{\omega}_n^*$ olsun. Aralarında,

$$\bar{\omega}_{n_r} \geq \bar{\omega}_{n_r}^* \quad r = 1, 2, \dots, n$$

eşitsizliklerinin mevcut olduğu gösterilebilir.



$\bar{\omega}_n (r = 1, 2, \dots, n)$ özdeğerlerine karşı gelen $\{a^{(r)}\}$ öz vektörlerini

$$W_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i \phi_i(x)$$

eşitliğinde yazınca sürekli sistemin gerçek öz fonksiyonlarının yaklaşık ifadeleri elde edilir.

2.4 Düzlemde Kompozit Malzeme Özellikleri

2.4.1 Simetrik Kompozit Plakların Düzlem Katılığı

Çok yönlü tabakalara sahip kompozitlerin, orta yüzeyinde yer alan düzlemine göre simetrik olan tabakaları, homojen anizotrop plaklar gibi davranış gösterir. Bu çok yönlü kompozitler, tabaka veya tabaka gruplarından oluşmuştur. Kompozitin katılık modülü, kısaca herbir tabakanın katılığının aritmetik ortalamasıdır. İki yönlü kompozitin katılık özellikleri, temelde bilinen klasik malzemelerden farklı olup önemli ölçüde değişiklikler gösterir. Tabaka halindeki kompozitler, tek yönlü kompozitler gibi, üç elastik sabit grubu ile tanımlanabilir. Katılık bileşenlerinden oluşmuş grup, tabaka ile içindeki fiberler arasındaki basit özellik bağıntılarını içermesi sebebiyle kullanım yönünden kolaylıklar sağlamaktadır. (Tsai, et al, 1980)

2.4.2 Kompozit Plaga Ait Gerilme-Düzlem Şekil Değiştirme Bağıntıları

Aşağıdaki basitleştirilmiş kabuller yapılır;

a) Kompozit tabaka simetriktir,

$$\theta(z) = \theta(-z) \quad (2.13)$$

ve

$$\theta_{ij}(z) = \theta_{ij}(-z) \quad (2.14)$$

tir. Böylece, tabakaların diziliş doğrultuları ile malzemenin modülleri kompozitin ortasındaki düzlemine göre simetrik olur.



b) Şekil değiştirme, kompozit plağın kalınlığı boyunca sabittir. Sabit olduğu kabul edilen düzlem şekil değiştirme bileşenlerini belirtmek amacıyla 'o' indisi kullanılır.

$$\varepsilon_1(z) = \varepsilon_1^o \quad \varepsilon_2(z) = \varepsilon_2^o \quad \varepsilon_6(z) = \varepsilon_6^o \quad (2.15)$$

Burada z değişkeni kompozit plağın kalınlığı boyunca kullanılmamıştır. Bu kabul, tabakanın kalınlığının, boyuna göre küçük olduğu hallerde uygundur.

Çok yönlü kompozitlerde gerilme dağılımının, tabakadan tabakaya katılığın değişmesi sebebiyle, sabit olmaması yüzünden kompozit plağın gerçek gerilmesi yerine, ortalama bir gerilme elde etmek çok daha kolaydır. Bu ortalama gerilme, plağın gerilme -şekil değiştirme bağıntılarından bulunabilir. Bu durumda gerilme, ortalama gerilme, (2.15) eşitliğindeki şekil değiştirme değerleri de ortalama şekil değiştirme değerleri olacaktır. Düzlem şekil değiştirme değerlerinden , kompozit plağın herhangi bir tabakasındaki gerilme hesaplanabilir. Plak için elde edilen gerilme-şekil değiştirme bağıntıları daha sonra gösterilecektir. Ortalama gerilme aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 dz \quad \bar{\sigma}_2 = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2 dz \quad \bar{\sigma}_6 = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_6 dz \quad (2.16)$$

Herhangi bir doğrultudaki tabaka için, gerilme- şekil değiştirme bağıntılarını (2.16) eşitliğinde yerine yazarak ,

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{1}{h} \int (Q_{11}\varepsilon_1 + Q_{12}\varepsilon_2 + Q_{16}\varepsilon_6) dz \quad (2.17)$$

elde edilir. (2.15) eşitliğinde sabit olduğu kabul edilen şekil değiştirme bileşenlerini yerine koyarak,



$$\bar{\sigma}_1 = \frac{1}{h} \int (Q_{11}\epsilon_1^\circ + Q_{12}\epsilon_2^\circ + Q_{16}\epsilon_6^\circ) dz \quad (2.18)$$

elde edilir.

Burada,

$$Q_{11} = \frac{m}{8} \left[(3 + 2\nu_y)E_x + 3E_y + \frac{4}{m}G_{xy} \right] + \frac{m}{2}(E_x - E_y)\cos 2\theta + \frac{m}{8} \left[(1 - 2\nu_y)E_x + E_y - \frac{4}{m}G_{xy} \right] \cos 4\theta$$

$$= U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta$$

$$Q_{12} = \frac{m}{8} \left[(1 + 6\nu_y)E_x + E_y - \frac{4}{m}G_{xy} \right] - \frac{m}{8} \left[(1 - 2\nu_y)E_x + E_y - \frac{4}{m}G_{xy} \right] \cos 4\theta$$

$$= U_4 - U_3 \cos 4\theta$$

$$Q_{16} = \frac{m}{4}(E_x - E_y)\sin 2\theta + \frac{m}{8} \left[(1 - 2\nu_y)E_x + E_y - \frac{4}{m}G_{xy} \right] \sin 4\theta$$

$$= \frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta$$

dir.

Düzlem katılık bileşenlerinin z den bağımsız olması nedeniyle, bu terimler integral dışına çıkartılabilir. Sadece katılık bileşenleri integralin sol tarafındadır. Çünkü katılık, tabakaların doğrultusuna bağlı olarak tabakadan tabakaya değiştiğinden integralin sol tarafında yer alır.



$$\bar{\sigma}_1 = \frac{1}{h}(A_{11}\epsilon_1^o + A_{12}\epsilon_2^o + A_{16}\epsilon_6^o) \quad (2.19)$$

$$\bar{\sigma}_2 = \frac{1}{h}(A_{12}\epsilon_1^o + A_{22}\epsilon_2^o + A_{26}\epsilon_6^o) \quad (2.20)$$

$$\bar{\sigma}_6 = \frac{1}{h}(A_{61}\epsilon_1^o + A_{62}\epsilon_2^o + A_{66}\epsilon_6^o) \quad (2.21)$$

Burada,

$$A_{11} = \int Q_{11} dz = \int [U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta] dz$$

$$= U_1 \int dz + U_2 \int \cos 2\theta dz + U_3 \int \cos 4\theta dz$$

$$A_{11} = U_1 h + U_2 V_1 + U_3 V_2$$

$$A_{22} = \int Q_{22} dz = U_1 h - U_2 V_1 + U_3 V_2$$

$$A_{12} = \int Q_{12} dz = \int [U_4 - U_3 \cos 4\theta] dz$$

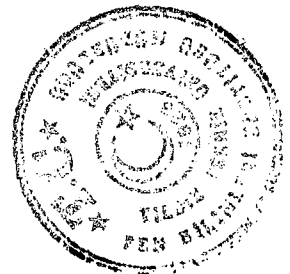
(2.22)

$$= U_4 h - U_3 \int \cos 4\theta dz = U_4 h - U_3 V_2$$

$$A_{66} = \int Q_{66} dz = U_5 h - U_3 V_2$$

$$A_{16} = \int Q_{16} dz = \int \left[\frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta \right] dz$$

$$= \frac{1}{2} U_2 V_3 + U_3 V_4$$



$$A_{26} = \int Q_{26} dz = \frac{1}{2} U_2 V_3 - U_3 V_4$$

$$A_{12} = A_{21} \quad A_{16} = A_{61}$$

Burada V_i ' ler kısaca ,

$$V_{[1,2,3,4]} = \int [\cos 2\theta, \cos 4\theta, \sin 2\theta, \sin 4\theta] dz$$

şeklinde gösterilir. V_i ' lere geometrik faktörler denir. Bu faktörler temsil ettiği tabakanın kalınlığına bölünerek boyutsuz hale getirilir. Bu şekilde V_i^* ile tanımlanan değerler elde edilir. Boyutsuz hal, tüm birim sistemleri için kullanım kolaylığı getirir.

Bir kompozit malzeme simetrik tabaka gruplarından oluşmuşsa, her bir tabakanın içindeki fiberler aynı doğrultu ve malzemeye sahipse, bu kompozit için tabakadan tabakaya olan geometrik faktörler genel olarak,

$$\begin{aligned} V_1^* &= \sum_{i=1}^{m/2} \cos 2\theta_i v_i \\ &= v_1 \cos 2\theta_1 + v_2 \cos 2\theta_2 + v_3 \cos 2\theta_3 + \dots \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada v_i ; θ_i doğrultusundaki fiberlerin hacim oranı, h_i ; i. tabakanın kalınlığı, h ; kompozit plağın toplam kalınlığıdır. Aynı zamanda,

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots = 1$$

1

V_1^* , karışımlar kuralı eşitliğidir. Değişim aralığı,



$$-1 \leq V_1^* \leq 1$$

dir. Diğer faktörler için de,

$$V_2^* = v_1 \cos 4\theta_1 + v_2 \cos 4\theta_2 + v_3 \cos 4\theta_3 + \dots$$

$$V_3^* = v_1 \sin 2\theta_1 + v_2 \sin 2\theta_2 + v_3 \sin 2\theta_3 + \dots$$

$$V_4^* = v_1 \sin 4\theta_1 + v_2 \sin 4\theta_2 + v_3 \sin 4\theta_3 + \dots$$

yazılabilir. A_{ij} , çok yönlü kompozit plağın eşdeğer modülüdür. Bu modül kısaca her bir tabakaya ait ortalama katılıktır. Q_{ij} ile A_{ij} nin fiziksel boyutunda bir uzunluk farkı vardır. Q_{ij} Pa veya Nm^{-2} ; A_{ij} Pa m veya Nm^{-1} dir.

2.4.3 Quasi - İzotrop Kompozit Plaklar

Kompozit plağın düzlemdeki modülü için aşağıdaki şartlar sağlanırsa, bu plak quasi-izotrop olur.

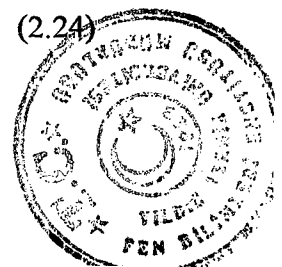
$$A_{11} = A_{22} \quad A_{16} = A_{26} = 0 \quad A_{66} = \frac{1}{2}(A_{11} - A_{12}) \quad (2.23)$$

Verilen bir malzeme dışında quasi - izotrop bir plak elde edilecekse, bunun düzlemdeki normalize edilmiş özelliklerinin tanımlanması gerekir.

Eğer fiber doğrultuları gelişigüze, bu kompozitin izotrop olması beklenir. Bu kompozitlerde doğrultuya bağıllık ortadan kalkar. Örneğin; kısa fiberli kompozitler quasi - izotropdur. Eğer V' leri tanımlayan eşitliğe bakılırsa, geometrik faktörlerin sıfır olması beklenir. Herhangi bir yönde yönelmiş fiberlerin eşit olması olasılığı varsa V' leri tanımlayan geometrik terimler sıfır olur.

Düzlem modülleri ,

$$A_{11} / h = A_{22} / h = U_1 \quad A_{12} / h = U_4 \quad A_{66} / h = U_5 \quad (2.24)$$



şeklindedir.

Burada U_5 aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$U_5 = \frac{m}{8} \left[(1 - 2\nu_y) E_x + E_y + \frac{4}{m} G_{xy} \right]$$

(2.23) eşitliğindeki şartlar sağlandığında quasi-izotrop bir malzeme elde edilir.

Bunun izotrop bir malzeme olması nedeniyle, quasi - izotrop malzemeye ait mühendislik sabitleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\nu_y = \nu_x = \nu = \frac{A_{12}}{A_{11}} = \frac{U_4}{U_1}$$

$$G_{xy} = G = A_{66} / h = U_5 \quad (2.25)$$

$$E = 2(1 + \nu)G = 2 \left[1 + \frac{U_4}{U_1} \right] U_5$$

Gelişigüzel fiber dağılımına sahip kompozitlerle quasi - izotrop tabakalar elde edilir. Bir örnek olmak üzere iki hal ele alınsın,

$$[0/60/-60]_s \quad \text{ve} \quad [0/90/45/-45]_s$$

İlk hal için normalize edilmiş değerler olan V^* eşitliklerinden,

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \frac{1}{3}$$



$$V_1^* = \frac{1}{3} [\cos 0 + \cos 120 + \cos(-120)] = 0$$

$$V_2^* = \frac{1}{3} [\cos 0 + \cos 240 + \cos(-240)] = 0$$

$$V_3^* = \frac{1}{3} [\sin 0 + \sin 120 + \sin(-120)] = 0$$

$$V_4^* = \frac{1}{3} [\sin 0 + \sin 240 + \sin(-240)] = 0$$

elde edilir. İkinci hal için,

$$v_1 = v_2 = v_3 = \frac{1}{4}$$

$$V_1^* = \frac{1}{4} [\cos 0 + \cos 180 + \cos 90 + \cos(-90)] = 0$$

$$V_2^* = \frac{1}{4} [\cos 0 + \cos 360 + \cos 180 + \cos(-180)] = 0$$

$$V_3^* = \frac{1}{4} [\sin 0 + \sin 180 + \sin 90 + \sin(-90)] = 0$$

$$V_4^* = \frac{1}{4} [\sin 0 + \sin 360 + \sin 180 + \sin(-180)] = 0$$

şeklinde elde edilir. Tüm V^* lerin sıfır olması nedeniyle bu kompozitler quasi - izotrop olarak adlandırılırlar. Gerçekte π/m radyan doğrultusunda yerleştirilmiş, m fiber grubuna sahip herhangi bir kompozit plağı quasi - izotrop olarak genelleştirmek mümkündür. İlk olarak $m=3$, ikinci olarak $m=4$ alınsın. Bundan başka, simetrik kompozit plaklarda, quasi - izotrop plağa sahip fiber gruplarının sayısı iki katıdır. Buna göre minimum fiber grubunun sayısı sırasıyla 6 ve 8 dir. İlk tabaka $\pi/3$ ve ikinci tabaka $\pi/4$ olarak adlandırılır. Quasi-izotrop plak halinde, üst



üste sıralamanın ve aynı zamanda toplam katılığın sabit olması nedeniyle bu konuda serbest hareket edilemez.

Quasi - izotrop plakların izotrop bir davranış göstermesi yanında, bunlara ait bir çok pratik sonuç elde edilmiştir. Böyle bir yapı şekli, kompozit bir plaktan beklenen minimum verimi gösterir. Eğer yöne bağlı olarak değişen özelliklerden dolayı rahatsız isek, bu durumda her zaman quasi -izotrop kompozit malzeme kullanılabilir.

Quasi - izotrop kompozitler, fiber doğrultusuna ait optimizasyon işleminin, başlangıç noktası olarak kullanılabilir. Eğer minimum ağırlık bir kriterse, quasi - izotrop malzeme ağırlığın en üst sınırında olmalıdır. Yöne bağlı tüm özellikleri üzerinde bulunduran bir malzeme, quasi - izotrop yapı şeklinden daha düşük bir ağırlığa sahip olmalıdır.

2.5 Plaklara Ait Mod Şekilleri

Dairesel bir plağa benzeyen, dönen bir disk şeklindeki volan, iki kısma ayrılabilen birbirinden farklı titreşim modlarına sahiptir;

- a) Eş merkezli, merkeze göre simetrik ve düğüm noktaları dairesel çizgiler halindeki titreşim modu. Bu titreşim haline ait modların sayısı $s = 0, 1, \dots, k$ şeklinde gösterilebilir.
- b) Düğüm noktaları dairesel plağın çapı şeklinde düz çizgiler olan, simetrik olmayan titreşim modu. Deneyler bu titreşim modunda nadiren simetrik durumların ortaya çıktığını göstermiştir. Bu titreşim haline ait modların sayısı da $n = 0, 1, \dots, k$ şeklinde gösterilebilir.



BÖLÜM 3

OPTİMUM DİZAYNLI VOLANLAR VE TİTREŞİMLERİ

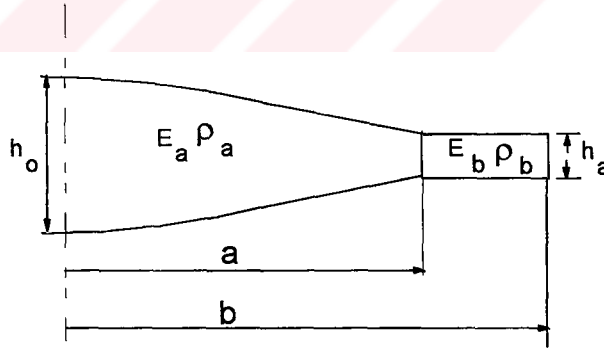
3.1. Kalınlığı Üstel Değişen Optimum Dizaynlı Volanlar

3.1.1 Gerilme İfadeleri

Dönen bir diske ait hareket denklemi ile uygunluk denklemi iyi bilinmektedir [18]. Bunlar,

$$\sigma_{\theta} - \sigma_r - \frac{r}{h} \frac{d(h\sigma_r)}{dr} = \rho_a \Omega^2 r^2 \quad (3.1)$$

$$(\sigma_{\theta} - \sigma_r)(1 + \nu) + r \left[\frac{d\sigma_{\theta}}{dr} - \nu \frac{d\sigma_r}{dr} \right] = 0 \quad (3.2)$$



Şekil.3. Uç ve göbek kısmı farklı, izotrop yapı gibi davranan kompozit malzemelerden yapılmış uç kısmı sabit kesitli olan sabit gerilmeli volan.

Şekil 3' de a dan b ye kadar olan kısmı sabit kalınlıklı, merkezden a ya kadar olan kısmı sabit gerilmeli bir disk görülmektedir. Sabit gerilmeli kısımda $\sigma_r = \sigma_{\theta} = \sigma$ dır. Bu (3.2) uygunluk denklemini sağlar.



(3.1) eşitliğinden,

$$-\frac{\sigma}{h} \frac{dh}{dr} = \rho_a \Omega^2 r \quad (3.3)$$

bulunacaktır. (3.3) eşitliği integre edilerek ve sınır şartları dikkate alınarak, sabit gerilmeli diskin kalınlık değişimine ait ,

$$h = h_a \exp \left\{ \frac{\rho_a \Omega^2 a^2}{2\sigma} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.4)$$

ifadesi elde edilir.

$r = a$ da, sabit gerilmeli kısmın sınırında, disk son buluyorsa, yani $r = a$ diskin dış çevresi oluyorsa, $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma$ sabit gerilme şartı sağlanamayacaktır. Bu nedenle çevre kısmına, yani a dan b ye kadar olan kısma, h_a sabit kalınlığında bir ek dış disk eklenmesi düşünülür [18]. İki diskin sınırı olan $r = a$ da, her iki diskin radyal gerilmeleri ile teğetsel şekil değiştirme değerleri birbirine eşittir. Sabit gerilmeli kısmın teğetsel şekil değiştirme değeri,

$$\epsilon_{\theta a} = \frac{v_a}{a} = \frac{\sigma}{E_a} (1 - v_a) \quad (3.5)$$

ve sabit kalınlıklı kısmın teğetsel şekil değiştirme değeri,

$$\epsilon_{\theta b} = \frac{v_b}{a} = \frac{1}{E_b} (\sigma_{\theta b} - v_b \sigma_{rb}) \quad (3.6)$$

dir.

(3.5) ve (3.6) denklemleri birbirine eşitlenerek, sabit kalınlıklı diskteki teğetsel gerilme,



$$\sigma_{\theta b} = \left[\frac{E_b}{E_a} (1 - \nu_a) + \nu_b \right] \sigma \quad (3.7)$$

bulunur. Sabit kalınlıklı diske ait radyal ve teğetsel gerilmeler [18] de,

$$\sigma_{\theta b} = \frac{3 + \nu_b}{8} \rho_b \Omega^2 b^2 \left[K_1 - \frac{1 + 3\nu_b}{3 + \nu_b} \left(\frac{r}{b} \right)^2 + \frac{K_2}{(r/b)^2} \right] \quad (3.8)$$

$$\sigma_{rb} = \frac{3 + \nu_b}{8} \rho_b \Omega^2 b^2 \left[K_1 - \left(\frac{r}{b} \right)^2 - \frac{K_2}{(r/b)^2} \right] \quad (3.9)$$

şeklinde gösterilmiştir. K_1 ve K_2 sabitleri sınır şartlarına bağlıdır, $r = b$ de $\sigma_{rb} = 0$ olduğundan, (3.9) eşitliğinden,

$$K_1 = K_2 + 1 \quad (3.10)$$

bulunur. (3.8) ve (3.9) dan K_1 yok edilerek,

$$\sigma_{\theta b} - \sigma_{rb} = \frac{3 + \nu_b}{4} \rho_b \Omega^2 b^2 \left[\frac{1 - \nu_b}{3 + \nu_b} \left(\frac{r}{b} \right)^2 + \frac{K_2}{(r/b)^2} \right]$$

elde edilir. $r = a$ da,

$$\sigma_{\theta b} - \sigma_{rb} = \left[\frac{E_b}{E_a} (1 - \nu_a) + \nu_b - 1 \right] \sigma$$

Aynı zamanda (3.4) eşitliğinden ,



$$\sigma = \frac{\rho_a \Omega^2 a^2}{2 \ln \frac{h_o}{h_a}} \quad (3.11)$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitliklerde (3.11) eşitliği $r = a$ için yerine yazılırsa ,

$$K_2 = K'_2 \left(\frac{a}{b} \right)^4 \quad (3.12)$$

bulunur. Burada,

$$K'_2 = \frac{1}{3 + v_b} \left\{ \frac{2 \frac{\rho_a}{\rho_b}}{\ln \frac{h_o}{h_a}} \left[\frac{E_b}{E_a} (1 - v_a) - 1 + v_b \right] - 1 + v_b \right\}$$

şeklindedir. Son olarak $r = a$ daki, $\sigma_{rb} = \sigma$ sınır şartı kullanılır. (3.10),(3.11) ve (3.12),(3.9) da yazıldığında $r = a$ için, birkaç cebrik işlemden sonra aşağıdaki dördüncü dereceden polinom elde edilir.

$$\left(\frac{a}{b} \right)^4 - \left\{ 1 + \frac{1 + \frac{\rho_a}{\rho_b} \frac{4}{(3 + v_b) \ln \frac{h_o}{h_a}}}{K'_2} \right\} \left(\frac{a}{b} \right)^2 + \frac{1}{K'_2} = 0 \quad (3.13)$$

Eğer, diskin tamamı aynı malzemeden yapılırsa, $v_a = v_b = v$, $E_a = E_b = E$, $\rho_a = \rho_b = \rho$ olacaktır ve a/b oranlarını verecek olan dördüncü dereceden polinom,



$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 + \left[\frac{4}{(1-\nu)\ln\frac{h_o}{h_a}} + \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \right] \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{3+\nu}{1-\nu} = 0 \quad (3.14)$$

haline gelir.

3.1.2 Diskin Birim Kütlesinin Kinetik Enerjisi

Dönen bir disk kinetik enerjisi,

$$T = \frac{1}{2} J \Omega^2 \quad (3.15)$$

dir. J , disk kinetik atalet momenti olup,

$$J = \int r^2 dm \quad dm = 2\pi\rho h r dr \quad (3.16)$$

şeklinde tanımlanabilir. Sabit gerilmeli disk kinetik kalınlık değişim fonksiyonu (3.16) da yerine yazıldığında,

$$J = 2\pi\rho_b h_a b^4 \left[\frac{\rho_a}{\rho_b} \int_0^t x^3 \exp\left[\ln(h_o/h_a)(1-(x/t)^2) \right] dx + \int_t^1 x^3 dx \right] \quad (3.17)$$

bulunur. Kütleye ait ifade için de,

$$m = 2\pi\rho_b h_a b^2 \left[\frac{\rho_a}{\rho_b} \int_0^t x \exp\left[\ln(h_o/h_a)(1-(x/t)^2) \right] dx + \int_t^1 x dx \right] \quad (3.18)$$

elde edilir. Burada $t = a/b$ dir. Diskin birim kütlesinin enerji yoğunluğu aşağıdaki yazılabilir.



$$\frac{T}{m} = \frac{J\Omega^2}{2m} \quad (3.19)$$

Buna göre (3.17) ve (3.18) eşitlikleri (3.19)' da yerine yazılırsa,

$$\frac{T}{m} = \frac{\sigma}{\rho_a} K \quad (3.20)$$

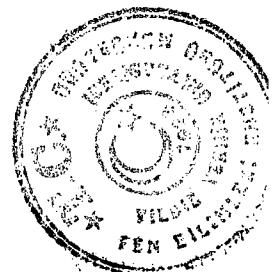
ifadesi bulunur. Burada K,

$$K = \frac{\frac{\rho_a}{\rho_b} \int_0^1 t^3 \exp(\ln(h_0 / h_a)(1 - (x/t)^2)) dt \int_0^1 t^3 dt}{\frac{\rho_a}{\rho_b} \int_0^1 t \exp(\ln(h_0 / h_a)(1 - (x/t)^2)) dt + \int_0^1 t dt} \quad (3.21)$$

şeklinde bulunur. K şekil faktörü, volan şekillerinin karşılaştırılmasında kullanılan bir parametredir [1,3,13,14].

Kompozit bir volanın enerji yoğunluğu; emniyetli gerilmenin sabit gerilmeli kısmın yoğunluğuna bölümünün, K şekil faktörü ile çarpımına eşittir. K; ρ_a / ρ_b , $\ln(h_0 / h_a)$ ve a/b nin bir fonksiyonudur. a/b oranı (3.13) veya (3.14) eşitliğinden bulunur. Bu eşitliklerin karmaşık olması nedeniyle, kompozitlere ait gerçek değerlerin yerine yazılması gerekir. Çeşitli kompozitlerin, yoğunluk, çekme dayanımı ve elastiklik modülleri tablolar halinde [5] ve [6] da verilmiştir. Bu değerler ortotropik olan $[0^\circ / \pm 45^\circ / 90^\circ]$ kompozitlerine aittir.

(3.13) ve (3.20) eşitliklerinden, kompozit bir volana ait mümkün olan birçok çözümün elde edilebileceği görülür. Maksimum enerji yoğunluğu $\ln(h_0 / h_a)$ ' nın büyük değerleri için elde edilebilir. Bununla birlikte. $\ln(h_0 / h_a)$ ' nın büyük değerlerinde diskin merkezi kabalaşır ve



merkez çevre yükünü daha fazla taşıyamaz. Stadola' ya göre $\ln(h_0 / h_a)$ ' nın maksimum değeri, (x/t) nin yarısından fazla olamaz. Buna göre $\ln(h_0 / h_a)$ ' nın maksimum değeri 2 dir.

3.1.3 Optimum Dizaynı, Dönen, İzotrop Davranan Diske Ait Titreşim Değerleri

Doğal frekanslar boyutsuz dönme hızının,

$$\bar{\Omega} = \sqrt{\frac{\rho_a \Omega^2 h_a b^4}{8D_{ra}}}$$

farklı değerleri için bulunmuştur. Boyutsuz frekans için,

$$\bar{\omega}_n = \sqrt{\frac{\omega_n^2 \rho_a h_a b^4}{D_{ra}}}$$

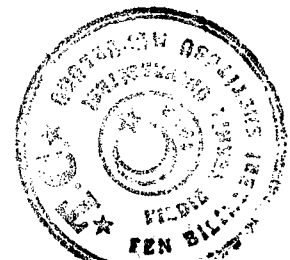
alınmıştır.

$$D_{ra} = \frac{E_a h_a^3}{12(1 - \nu_a^2)}$$

Enerji ifadelerinde enine yer değiştirme için kabul edilen fonksiyon,

$$W(r) = a_0 \left(\frac{r}{b} \right)^2 + a_1 \left(\frac{r}{b} \right)^3 + \dots$$

olarak alınmıştır. Bu fonksiyonun ilk altı terimi yazılarak frekanslar hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 1-7 arasında gösterilmiştir. Tablo 8' de sabit gerilmeli volana ait iki hal için nodal daire yarıçapları verilmiştir. Ayrıca volana ait şekil faktörü ve birim kütle başına enerji değerleri Tablo 9' da gösterilmiştir.



Tablo -1 Sabit Gerilmeli Volanın Boyutsuz Doğal Frekansları ($\bar{\Omega} = 5$)

$E_a = 29 \text{ GPa}$ $\rho_a = 1330 \text{ kg/m}^3$ $\nu_a = 0.33$ $E_b = 85 \text{ GPa}$ $\rho_b = 2000 \text{ kg/m}^3$ $\nu_b = 0.335$							
n	a/b	s = 0	s = 1	s = 2	s = 3	s = 4	s = 5
0	0.5	9.9334	41.0167	97.9825	179.2703	331.8507	1683.2
	0.6	11.1477	43.3967	103.4271	197.2696	344.0957	1676.2
	0.7	13.6976	48.1232	118.0564	231.3605	395.7578	1637.9
	0.8	21.6616	65.1232	161.9247	319.9253	639.4988	1613.7
1	0.5	14.4896	45.9586	102.7449	186.3030	337.4597	1685.1
	0.6	14.7319	46.7015	107.4065	203.9652	351.1254	1678.1
	0.7	15.4891	48.6767	121.3870	237.0032	406.7141	1640.6
	0.8	19.6838	59.8096	160.9329	327.8866	656.9561	1620.5
2	0.5	23.9248	65.3346	130.6910	245.3805	408.8052	1696.6
	0.6	24.0177	65.4553	136.0806	261.5660	464.4562	1694.3
	0.7	24.2891	67.6948	153.7794	288.2334	608.9695	1672.2
	0.8	24.6407	81.9124	200.1435	406.9716	1018.8	1779.6

Tablo-2 Sabit Gerilmeli Volanın Boyutsuz Doğal Frekansları ($\bar{\Omega} = 10$)

$E_a = 29 \text{ GPa}$ $\rho_a = 1330 \text{ kg/m}^3$ $\nu_a = 0.33$ $E_b = 85 \text{ GPa}$ $\rho_b = 2000 \text{ kg/m}^3$ $\nu_b = 0.335$							
n	a/b	s = 0	s = 1	s = 2	s = 3	s = 4	s = 5
0	0.5	16.4941	65.1540	128.5902	215.9325	361.8988	1690.9
	0.6	18.2292	66.6541	131.6784	229.8003	372.6483	1683.8
	0.7	21.4821	69.4866	143.2024	256.5569	420.7908	1645.5
	0.8	30.0514	81.9331	180.4677	336.8845	652.2183	1621.2
1	0.5	28.5180	74.9289	138.8531	227.9772	370.8231	1693.1
	0.6	28.6701	74.7367	140.2781	240.6550	383.0611	1686.2
	0.7	29.1449	74.5328	149.7114	265.0572	434.9523	1648.5
	0.8	31.9207	80.2969	181.6502	346.0668	671.7236	1628.4
2	0.5	46.2416	100.0694	172.3151	284.9335	453.6037	1706.0
	0.6	46.2767	98.9899	173.5341	295.9722	503.6896	1703.6
	0.7	45.8727	98.3997	184.4151	317.6314	637.2247	1681.4
	0.8	46.7410	105.3747	222.0740	425.3026	1031.300	1788.9

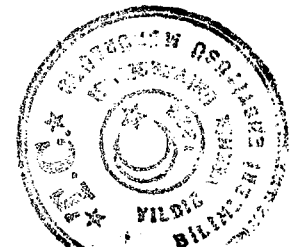


Tablo-3 Sabit Gerilmeli Volanın Boyutsuz Doğal Frekansları ($\bar{\Omega} = 5$)

$E_a = 29 \text{ GPa}$ $\rho_a = 1330 \text{ kg/m}^3$ $\nu_a = 0.33$ $E_b = 55 \text{ GPa}$ $\rho_b = 1550 \text{ kg/m}^3$ $\nu_b = 0.331$							
n	a/b	s = 0	s = 1	s = 2	s = 3	s = 4	s = 5
0	0.5	10.8686	40.9002	94.0198	174.3221	305.7125	1495.7
	0.6	12.3403	43.4466	101.5089	193.5786	327.8011	1477.5
	0.7	15.6587	49.6439	120.8223	230.4307	412.5672	1439.2
	0.8	27.7439	74.0338	176.6046	372.6957	775.4043	1458.5
1	0.5	14.5969	44.8646	98.3456	180.9097	311.8877	1497.5
	0.6	14.9555	45.6870	105.0770	199.3851	336.0049	1479.6
	0.7	16.1958	48.7901	123.0666	235.7604	424.9054	1442.4
	0.8	23.9984	66.0950	171.1557	381.9654	791.5936	1472.2
2	0.5	23.2691	62.4844	124.1886	232.9342	400.2394	1510.7
	0.6	23.3819	62.9836	132.3454	247.1970	475.2225	1499.9
	0.7	24.1437	66.9028	153.8429	284.8958	663.2399	1490.7
	0.8	31.2876	87.5304	215.5576	481.3081	1085.7	1891.2

Tablo-4 Sabit Gerilmeli Volanın Boyutsuz Doğal Frekansları ($\bar{\Omega} = 10$)

$E_a = 29 \text{ GPa}$ $\rho_a = 1330 \text{ kg/m}^3$ $\nu_a = 0.33$ $E_b = 55 \text{ GPa}$ $\rho_b = 1550 \text{ kg/m}^3$ $\nu_b = 0.31$							
n	a/b	s = 0	s = 1	s = 2	s = 3	s = 4	s = 5
0	0.5	18.0715	65.2533	125.9747	211.4502	339.0847	1504.5
	0.6	20.0364	66.6015	130.5879	225.0757	358.3210	1486.3
	0.7	23.9831	70.4678	145.0097	255.1984	435.0669	1447.9
	0.8	36.4666	89.6060	193.5278	386.0853	784.7768	1466.5
1	0.5	28.5890	74.0816	135.1238	222.5968	348.9240	1506.8
	0.6	28.8143	73.4850	138.0338	234.4937	370.1065	1488.8
	0.7	29.5995	73.7529	149.9925	262.6939	450.5229	1451.5
	0.8	35.1496	84.7266	190.2519	396.2799	802.3645	1480.7
2	0.5	44.9850	97.4343	166.1219	272.4487	446.5068	1521.4
	0.6	44.8283	96.2090	169.0118	282.2418	512.5618	1510.5
	0.7	44.6563	96.1823	182.8347	313.3426	686.8304	1501.3
	0.8	48.3948	108.6940	234.8935	495.3167	1095.5	1900.0

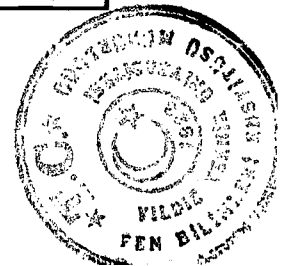


Tablo-5 Sabit Gerilmeli Volanın Değişik $\ln(h_0/h_a)$ Değerleri İçin Boyutsuz Doğal Frekansları

$E_a = 55 \text{ GPa}$		$\rho_a = 1550 \text{ kg/m}^3$		$\nu_a = 0.31$		$\bar{\Omega} = 5$	
$E_b = 85 \text{ GPa}$		$\rho_b = 2000 \text{ kg/m}^3$		$\nu_b = 0.335$			
n	$\ln \frac{h_0}{h_a}$	s = 0	s = 1	s = 2	s = 3	s = 4	s = 5
0	0.5	11.4535	41.6138	93.3805	174.8523	291.9215	1313.9
	1	15.2187	48.9304	114.9713	217.9512	392.9236	1278.2
	1.5	21.6600	62.2991	146.7399	293.8862	595.3277	1281.9
	2	32.6072	83.4119	197.3825	433.5393	862.2137	1438.4
1	0.5	14.6825	44.7132	97.4929	180.9473	299.6531	1315.8
	1	15.9254	48.5076	117.2377	223.3215	405.4566	1281.4
	1.5	19.4897	57.8229	145.0251	301.8753	611.1828	1290.0
	2	27.6975	73.9963	188.4215	443.3020	874.9792	1464.1
2	0.5	22.8091	60.5030	122.6960	223.3895	416.2345	1332.5
	1	23.5619	65.6557	145.9646	270.7070	630.8252	1332.3
	1.5	26.9212	77.0820	180.7688	377.5229	900.7082	1506.1
	2	35.1923	95.9023	242.2528	554.3957	1066.6	2183.5

Tablo-6 Sabit Gerilmeli Volanın Değişik $\ln(h_0/h_a)$ Değerleri İçin Boyutsuz Doğal Frekansları

$E_a = 65 \text{ GPa}$		$\rho_a = 1550 \text{ kg/m}^3$		$\nu_a = 0.26$		$\bar{\Omega} = 5$	
$E_b = 85 \text{ GPa}$		$\rho_b = 2000 \text{ kg/m}^3$		$\nu_b = 0.335$			
n	$\ln \frac{h_0}{h_a}$	s = 0	s = 1	s = 2	s = 3	s = 4	s = 5
0	0.5	11.5059	41.3602	91.5332	170.9764	282.7601	1229.5
	1	15.1851	48.6787	112.7018	212.9158	388.7246	1198.5
	1.5	21.4778	61.7535	143.9165	290.2162	589.2411	1211.3
	2	32.2395	82.4661	195.0196	428.4695	838.8879	1395.3
1	0.5	14.6833	44.3198	95.6086	176.8248	290.8876	1231.4
	1	15.9229	48.2817	114.7652	218.5543	401.2921	1201.8
	1.5	19.4615	57.5433	142.0158	298.2611	604.5646	1220.1
	2	27.6079	73.6243	186.0942	437.8395	850.6203	1422.5
2	0.5	22.6357	59.4758	120.2074	215.8929	411.6053	1249.0
	1	23.5240	65.0941	142.6122	265.8120	624.3221	1257.7
	1.5	27.1401	76.6379	177.7212	373.8946	872.1287	1461.0
	2	35.7155	96.0332	240.3329	545.9283	1023.8	2167.0



Tablo-7 Sabit Gerilmeli Volanın Değişik $\ln(h_0/h_a)$ Değerleri İçin Boyutsuz Doğal Frekansları

$E_a = 29 \text{ GPa}$		$\rho_a = 1330 \text{ kg/m}^3$		$\nu_a = 0.33$		$\bar{\Omega} = 5$	
$E_b = 85 \text{ GPa}$		$\rho_b = 2000 \text{ kg/m}^3$		$\nu_b = 0.335$			
n	$\ln \frac{h_0}{h_a}$	s = 0	s = 1	s = 2	s = 3	s = 4	s = 5
0	0.5	10.5896	42.3264	100.8132	188.5814	337.4065	1678.3
	1	14.3555	49.4212	122.2344	238.8301	413.3480	1631.5
	1.5	20.7714	63.2285	157.8176	309.4286	611.4711	1614.2
	2	31.6865	85.2190	206.4160	447.6746	929.6776	1672.5
1	0.5	14.6118	46.3323	105.0424	195.5226	343.7024	1680.2
	1	15.7396	49.3535	125.3487	244.3996	425.1694	1634.4
	1.5	19.1143	58.4361	157.4058	317.0132	628.5161	1620.3
	2	27.1041	75.0338	198.4893	458.6704	947.4358	1691.4
2	0.5	23.9900	65.2733	133.1029	254.7189	437.5470	1693.9
	1	24.4299	68.6198	158.5031	295.8928	647.8863	1671.1
	1.5	27.1260	80.2803	195.6817	392.0132	982.4388	1756.0
	2	34.7342	99.2031	252.9838	578.7021	1255.0	2266.7



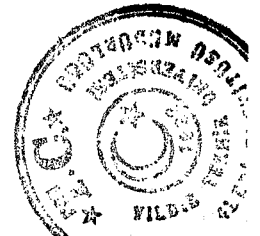
Tablo-8 Sabit gerilmeli volanın, a/b oranı cinsinden, nodal dairelerine ait yarıçapları.

$$E_b = 85 \text{ Gpa} \quad E_a = 65 \text{ Gpa} \quad \ln \frac{h_0}{h_a} = 0.5 \quad \bar{\Omega} = 5$$

n	ϖ_n	s\i.n.d.s	1	2	3	4	5
0	41.3602	1	0.7978				
	91.5332	2	0.5408	0.8865			
	170.9764	3	0.3799	0.6861	0.9227		
	282.7601	4	0.2948	0.5355	0.7622	0.9416	
	1229.5000	5	0.2513	0.4572	0.6692	0.8480	0.9689
1	44.3198	1	0.8050				
	95.6086	2	0.5443	0.8888			
	176.8248	3	0.3834	0.6899	0.9238		
	290.8876	4	0.2958	0.5387	0.7639	0.9422	
	1231.4000	5	0.2514	0.4574	0.6693	0.8480	0.9689
2	59.4758	1	0.8381				
	120.2074	2	0.5939	0.9014			
	215.8929	3	0.4416	0.7215	0.9320		
	411.6053	4	0.3259	0.5673	0.7817	0.9483	
	1249.0000	5	0.2560	0.4610	0.6712	0.8489	0.9691

$$E_b = 85 \text{ GPa} \quad E_a = 65 \text{ Gpa} \quad \ln \frac{h_0}{h_a} = 2 \quad \bar{\Omega} = 5$$

n	ϖ_n	s\i.n.d.s	1	2	3	4	5
0	82.4661	1	0.8570				
	195.0196	2	0.6137	0.9234			
	428.4695	3	0.4491	0.7328	0.9641		
	838.8879	4	0.3353	0.5806	0.8087	0.9617	
	1395.3000	5	0.2649	0.4712	0.6699	0.8543	0.9703
1	73.6243	1	0.8317				
	186.0942	2	0.5997	0.9217			
	437.8395	3	0.4439	0.7326	0.9464		
	850.6203	4	0.3336	0.5824	0.8095	0.9619	
	1422.5000	5	0.2636	0.4731	0.6717	0.8553	0.9705
2	96.0332	1	0.8694				
	240.3329	2	0.6381	0.9291			
	545.9283	3	0.4807	0.7562	0.9517		
	1023.8000	4	0.3855	0.6184	0.8288	0.9655	
	2167.0000	5	0.2874	0.4948	0.6916	0.8690	0.9337



Tablo-9 Sabit Gerilmeli Diske Ait Şekil Faktörü ve Birim Kütle Başına Kinetik Enerji Değerleri

$E_b=85$ GPa

$E_a=55$ GPa

$\frac{a}{b}$	$\ln \frac{h_0}{h_a}$	K	$\frac{T}{M} \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]$
0.5798	0.5	0.7357	75.9406
0.7211	1	0.8454	87.2637
0.7926	1.5	0.9095	93.8802
0.8354	2	0.9465	97.7230

$E_b=85$ GPa

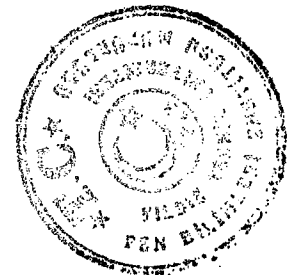
$E_a=65$ GPa

$\frac{a}{b}$	$\ln \frac{h_0}{h_a}$	K	$\frac{T}{M} \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]$
0.5859	0.5	0.7202	44.9139
0.7252	1	0.8350	52.0761
0.7953	1.5	0.9027	56.2990
0.8374	2	0.9424	58.7733

$E_b=85$ GPa

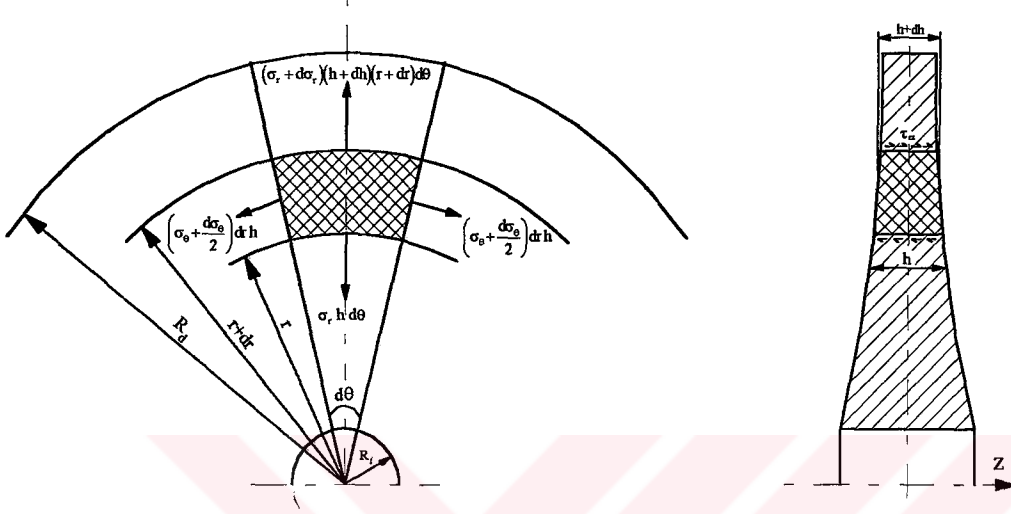
$E_a=29$ GPa

$\frac{a}{b}$	$\ln \frac{h_0}{h_a}$	K	$\frac{T}{M} \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]$
0.5619	0.5	0.8105	23.3613
0.7156	1	0.8994	25.9223
0.7941	1.5	0.9460	27.2657
0.8403	2	0.9703	27.9670



3.2 Değişken Kalınlık ve Yoğunluklu Optimum Dizaynlı Volanlar

3.2.1 Teorik davranış



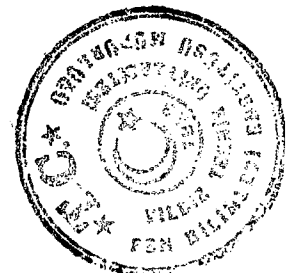
Şekil 4. Değişken malzemeli diskin genel görünümü.

$\rho(r)$ değişken yoğunluğunda, $h(r)$ değişken kalınlığına sahip genel bir diskin, (r, θ) düzleminde her bir noktasının gerilme bileşeni (r, z) nin bir fonksiyonu olur. Bu nedenle ifade edilen değerlerin z' ye göre integrasyonu r' nin bir fonksiyonu olur. Eksenel simetriden dolayı $\tau_{r\theta} = 0$ dır [15]. Gerilme ve ataletten doğan kuvvetler [1,15] altında dengede olan bir diferansiyel eleman için elde edilen ifadede ikinci ve üçüncü mertebeden terimler ihmal edilirse,

$$\sigma_r dhr + \sigma_r hdr + hrd\sigma_r - \sigma_\theta drh = \rho(r)\Omega^2 hr^2 dr \quad (3.21)$$

elde edilir. Radyal ve teğetsel gerilmelerin eşit olmasını sağlayacak bir kalınlık fonksiyonu arandığından,

$$\sigma_r(r) = \sigma_\theta(r) = \sigma(r) \quad (3.22)$$



(3.21) eşitliği bundan dolayı ,

$$\sigma(r)dhr + hrd\sigma(r) = \rho(r)\Omega^2 hr^2 dr \quad (3.23)$$

olur. (3.23) eşitliğinin her iki tarafı $\sigma(r)rh$ 'a bölünürse,

$$\frac{dh}{h} + \frac{d\sigma(r)}{\sigma(r)} = \frac{\rho(r)}{\sigma(r)} \Omega^2 r dr \quad (3.24)$$

bulunur. Bu integre edilerek ,

$$h\sigma(r) = C_1 \exp\left(-\Omega^2 \int \frac{\rho(r)}{\sigma(r)} r dr\right) \quad (3.25)$$

bulunur. Burada C_1 integral sabitidir. Sınır şartları,

$$\begin{aligned} r = R_i & \quad \text{de} & \quad h(r) = h_i \\ r = R_i & \quad \text{de} & \quad \sigma(r) = \sigma_i \end{aligned}$$

kullanıldığında,

$$C_1 = h_i \sigma_i \exp\left(-\left[-\Omega^2 \int \frac{\rho(r)}{\sigma(r)} r dr\right]_{r=R_i}\right) \quad (3.26)$$

bulunur. (3.26) eşitliği. (3.25) de yazılırsa,

$$h(r) = h_i \frac{\sigma_i}{\sigma(r)} \exp\left(\left[-\Omega^2 \int_0^r \frac{\rho(r)}{\sigma(r)} r dr\right]_{r=r} - \left[-\Omega^2 \int \frac{\rho(r)}{\sigma(r)} r dr\right]_{r=R_i}\right)$$

elde edilir.

$$h(r) = h_i \frac{\sigma_i}{\sigma(r)} \exp\left(-\Omega^2 \int_{R_i}^r \frac{\rho(r)}{\sigma(r)} r dr\right) \quad (3.27)$$



sonucu çıkar.

Değişken malzemedan yapılmış dolu bir disk için. kalınlık fonksiyonu ,

$$h(r) = h_i \frac{\sigma_i}{\sigma(r)} \exp\left(-\Omega^2 \int_0^r \frac{\rho(r)}{\sigma(r)} r dr\right) \quad (3.28)$$

ile verilir[16].

(3.28) eşitliği ile kalınlık fonksiyonu verilen genel bir diskin, birim kütlesinin ataleti,

$$\frac{I}{M} = \frac{\left[r^2 \exp\left(-\frac{\Omega^2}{2} \int_0^r \frac{\rho(r)}{\sigma(r)} dr^2\right) \right]_0^{R_0} - \int_0^{R_0} \exp\left(-\frac{\Omega^2}{2} \int_0^r \frac{\rho(r)}{\sigma(r)} dr^2\right) dr^2}{\left[\exp\left(-\frac{\Omega^2}{2} \int_0^r \frac{\rho(r)}{\sigma(r)} dr^2\right) \right]_0^{R_0}} \quad (3.29)$$

şeklinde kabul edilir [32].

(3.29) eşitliğinin, tüm disk üzerindeki kalınlık değişimine göre, gerilme ve yoğunlukla ilgili olması nedeniyle, birim kütlenin ataleti de gerilme ve yoğunlukla ilgili olacaktır. Böylece birim kütlesi yüksek atalete sahip bir volan şekli elde edilir.

(3.29) eşitliğinde $r^2 = x$, $r_0^2 = x_0$ koyulur ve $\rho(r)/\sigma(r)$, x' in bir fonksiyonu şeklinde $(\rho/\sigma)(x)$ olarak yazılırsa,

$$\frac{I}{M} = \frac{\left[x \exp\left(-\frac{\Omega^2}{2} \int_0^x \frac{\rho}{\sigma}(x) dx\right) \right]_0^{x_0} - \int_0^{x_0} \exp\left(-\frac{\Omega^2}{2} \int_0^x \frac{\rho}{\sigma}(x) dx\right) dx}{\left[\exp\left(-\frac{\Omega^2}{2} \int_0^x \frac{\rho}{\sigma}(x) dx\right) \right]_0^{x_0}} \quad (3.30)$$

bulunur. Eğer,



$$F(x) = \exp\left(-\frac{\Omega^2}{2} \int_0^x \frac{\rho}{\sigma}(x) dx\right) \quad (3.31)$$

olarak tanımlarsak, o zaman (3.30) eşitliği,

$$\frac{I}{M} = \frac{\left[xF(x)\right]_0^{x_0} - \int_0^{x_0} F(x) dx}{\left[F(x)\right]_0^{x_0}} \quad (3.32)$$

şekline gelir. (3.32) eşitliğindeki I/M ' in daha çok yeni fonksiyon olan $F(x)$ ' e bağlı olduğu görülür. $F(x)$ fonksiyonunun özellikleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

1) $F(x)$. x 'in sınırlandırılmış aralığındaki herhangi bir değeri için pozitif tanımlı sürekli bir fonksiyondur.

$$\begin{array}{lll} x = 0 & \text{için} & F(x) = 1 \\ 0 < x < \infty & \text{için} & 1 > F(x) > 0 \end{array}$$

2) $F'(x)/F(x) = (-\Omega^2/2)\rho/\sigma(x)$ olduğundan, $F(x)$; ρ ile σ nın pozitif değerleri için daima negatiftir. Bundan dolayı lineer bir $F(x)$ fonksiyonu için,

$$F(x) = Ax + B \quad . \quad F'(x) = A \quad (3.33)$$

$F(x)$ sınır şartları ile özelliklerinden,

$$A = a_i \quad B=1 \quad x_0 = \frac{a_0 - a_i}{a_0 a_i} \quad (3.34)$$

bulunur. Burada;



$$a_0 = \frac{\rho_0}{\sigma_0} \frac{\Omega^2}{2}, \quad a_i = \frac{\rho_i}{\sigma_i} \frac{\Omega^2}{2}$$

Aynı zamanda,

$$\frac{I}{M} = \frac{\int_0^{x_0} (1 - a_i x) dx - x_0 (1 - a_i x_0)}{a_i x_0} = \frac{x_0}{2} \quad (3.35)$$

3.2.2 Alüminyum - Magnezyumlu Volan

Alaşımında magnezyum azalır, akma dayanımı değeri azalır, yoğunluk artar. Bu yüzden yüksek magnezyumlu alaşım volanın iç tarafına konulur. Lineer F(x) fonksiyonu ile 500 dev/dak (523.8 rd/s) hızda, (3.34) eşitliğinden ,

$$a_i = 2.0969 \text{m}^{-2} \quad \text{ve} \quad a_0 = 4.585 \text{m}^{-2}$$

elde edilir.

(3.31) ve (3.33) eşitliklerinden , $x = r^2$ olduğu dikkate de alınarak,

$$\frac{\rho}{\sigma}(x) = \frac{2}{\Omega^2} \frac{a_i}{1 - a_i x} \quad \text{veya} \quad r = \sqrt{\frac{1 - \frac{a_i}{\rho/\sigma_{AK}}}{a_i}}$$

bulunur. Bu (3.35) de yerine yazılırsa $r = 0.443 \text{m}$ (% 6 Mg'lu alaşım için) bulunur. R_0 dış yarıçapı (3.34) eşitliği kullanılarak bulunur.

Magnezyumun dağılımı için,

$$\% \text{Mg} = 1 + d_1 x + d_2 x^2 \quad d_1 = -7.064 \cdot 10^{-8} \quad d_2 = -6.55 \cdot 10^{-5}$$



Gerilme dağılımı için,

$$\frac{\sigma(x)}{\sigma_i} = 1 + d_3 x + d_4 x^2 \quad d_4 = -3.3085.10^{-10} \quad d_3 = 2.032.10^{-4}$$

ayrıca dolu disk şekli için,

$$h = h_i \frac{1 - a_i r^2}{1 + d_3 r^2 + d_4 r^4}$$

verilir [31].

3.3 Doğal Frekanslar

Tablo 10' da %10 Mg alaşımlı sabit gerilmeli volana ait boyutsuz doğal frekanslar verilmiştir. Tablo 11' de merkezinde %10 Mg olacak şekilde kabul edilen %Mg dağılımına uygun değişken yoğunluğa sahip eş gerilmeli volana ait boyutsuz doğal frekanslar verilmiştir.

Tablo-10 Al-Mg (%10 Mg) alaşımından sabit gerilmeli volanın boyutsuz doğal frekansları

$$\omega = 523.8 \text{ rd / s} \quad \bar{\Omega} = 2,9268 \quad h_i = 0.01 \text{ m} \quad E = 71 \text{ Gpa} \quad \sigma_i = \sigma = 170,1 \text{ Mpa} \quad \rho_i = 2550 \text{ kg/m}^3$$

$$\nu = 0,33 \quad R_o = 0.505 \text{ m}$$

n\s	0	1	2	3	4	5
0	11.1081	45.5997	87.6961	142.7101	221.2186	754.6472
1	16.3828	49.8558	92.5233	148.6642	226.5333	755.9949
2	26.5865	64.0744	111.2978	179.8371	288.4208	766.9124



Tablo-11 Merkezinde %10 Mg olacak şekilde değişken malzemeye sahip eş gerilmeli volana ait boyutsuz doğal frekanslar.

$$\omega = 523.8 \text{ rd / s} \quad \bar{\Omega} = 2,9268 \quad h_i = 0.01\text{m} \quad E = 71 \text{ Gpa} \quad \sigma_i = \sigma = 170,1 \text{ Mpa} \quad \rho_i = 2550 \text{ kg/m}^3$$

$$v = 0,33 \quad \frac{h}{h_i} = 0.4653$$

n\s	0	1	2	3	4	5
0	9.4592	39.6663	76.0891	122.8498	183.8914	488.0558
1	13.6483	43.3294	80.0795	127.5691	190.6075	489.5818
2	21.4620	54.9469	95.7345	148.7967	260.0191	505.8805



BÖLÜM 4

OPTİMUM DİZAYNLI VOLANLARDA ANİZOTROPİNİN TİTREŞİMLER ÜZERİNE ETKİSİ

4.1 Anizotrop Özellik Gösteren Optimum Dizaynli Volanlar

Burada sabit gerilmeli, iç kısmı izotrop, dış kısmı ise anizotrop malzemeden olan bir volan incelenmiştir. Dış kısımdaki anizotropiye ait farklı değerlerin titreşim üzerine nasıl bir tesir yapacağı araştırılmıştır. Ayrıca dış kısmın sabit veya değişken kesitli olması halinde anizotropinin titreşimler üzerine nasıl bir etki yapacağı incelenmiştir.

4.1.1 Dış Kısmı Sabit Kesitli Olan Volana Ait Denklemler

Kesit kalınlığı dış kısımda h_a dir. Hareket denklemi ,

$$\frac{d}{dr}(hr\sigma_r) - h\sigma_\theta + h\rho_b\Omega^2r^2 = 0 \quad (4.1)$$

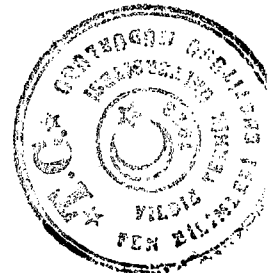
dir. Buradan teğetsel gerilme için,

$$\sigma_\theta = \sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} + \rho_b\Omega^2r^2 \quad (4.2)$$

ifadesi bulunur. Diğer taraftan uygunluk denklemi,

$$r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0 \quad (4.3)$$

dir. (2.1) ve (4.2) eşitlikleri, (4.3)' te yerine yazıldığında,



$$r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} + (1 - \lambda^2) \sigma_r = -(3 + \nu_\theta) \rho_b \Omega^2 r^2 \quad (4.4)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklem çözüldüğünde,

$$\sigma_r = \frac{(3 + \nu_\theta) \rho_b \Omega^2 b^2}{9 - \lambda^2} \left[A \left(\frac{r}{b} \right)^{q_1} + B \left(\frac{r}{b} \right)^{q_2} - \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right] \quad (4.5)$$

bulunur. (4.5) eşitliği (4.2) de yerine yazıldığında, teğetsel gerilme için,

$$\sigma_\theta = \frac{(3 + \nu_\theta) \rho_b \Omega^2 b^2}{9 - \lambda^2} \left[(1 + q_1) A \left(\frac{r}{b} \right)^{q_1} + (1 + q_2) B \left(\frac{r}{b} \right)^{q_2} - \frac{\lambda^2 + 3\nu_\theta}{3 + \nu_\theta} \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right] \quad (4.6)$$

bulunur. Burada,

$$q_1 = -1 + \lambda \quad q_2 = -1 - \lambda$$

Bölüm 3.1 deki optimal dizayna sahip volana ait sınır şartlarından,

$$B = \frac{\phi t^2 - q_1 t^{q_1} - \eta t^2}{q_2 t^{q_2} - q_1 t^{q_1}} \quad A = 1 - B$$

bulunur. $t = a / b$ oranlarını veren denklem için de ,

$$(1 + \psi) t^2 - B(t^{q_2} - t^{q_1}) - t^{q_1} = 0$$

bulunur.

Burada,



$$\xi = \frac{E_\theta}{E_a} (1 - \nu_a) + \nu_\theta - 1$$

$$\eta = 1 - \frac{\lambda^2 + 3\nu_\theta}{3 + \nu_\theta}$$

$$\phi = \xi \frac{\rho_a}{\rho_b} \frac{9 - \lambda^2}{2(3 + \nu_\theta) \ln \frac{h_o}{h_a}}$$

dır.

4.1.2 Özel Çözüm

(4.5) eşitliğinde $\lambda^2 = 9$ olduğunda gerilme sonsuz olmaktadır. Bu nedenle λ^2 'nin bu değeri için bir çözüm elde etmek gerekir. (4.4) denkleminde $\lambda^2 = 9$ yazılıp çözüm yapılırsa radyal ve teğetsel gerilmeler için,

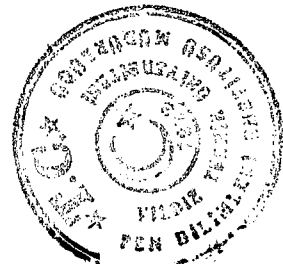
$$\sigma_{r\theta} = \frac{(3 + \nu_\theta) \rho_b \Omega^2 b^2}{6} \left[A \left(\frac{r}{b} \right)^{q_1} + B \left(\frac{r}{b} \right)^{q_2} - \left(\frac{r}{b} \right)^2 \ln \frac{r}{b} \right] \quad (4.7)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(3 + \nu_\theta) \rho_b \Omega^2 b^2}{6} \left[\phi_1 A \left(\frac{r}{b} \right)^{q_1} + \phi_2 B \left(\frac{r}{b} \right)^{q_2} - 3 \left(\frac{r}{b} \right)^2 \ln \frac{r}{b} - D_0 \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right] \quad (4.8)$$

elde edilir. Burada,

$$\phi_1 = 1 + q_1 \quad \phi_2 = 1 + q_2 \quad D_0 = \frac{\nu_\theta - 3}{3 + \nu_\theta}$$

dır. Daha önce kullanılan sınır şartlarından ,



$$B = \frac{\left[\xi \frac{\rho_a}{\rho_b} \frac{3}{(3 + \nu_\theta) \ln \frac{h_0}{h_a}} + D_0 + 2 \ln \frac{a}{b} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]}{q_2 \left(\frac{a}{b} \right)^{q_2} - q_1 \left(\frac{a}{b} \right)^{q_1}} \quad A = 1 - B$$

bulunur. a/b oranlarını veren denklem için de,

$$\left[\frac{\rho_a}{\rho_b} \frac{3}{(3 + \nu_\theta) \ln \frac{h_0}{h_a}} + \ln \frac{a}{b} \left(\frac{a}{b} \right)^2 - B \left[\left(\frac{a}{b} \right)^{q_2} - \left(\frac{a}{b} \right)^{q_1} \right] \right] = 0$$

elde edilir.

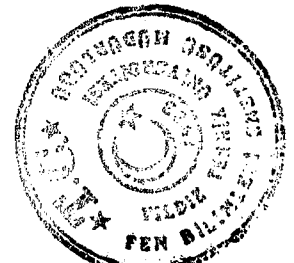
4.2 Dış Kısımın Değişken Kesitli Olması Hali

(4.1) hareket denkleminde volanın dış kısmına ait kalınlık fonksiyonunun yerine,

$$h = h_a \left(\frac{a}{b} \right)^\beta \left(\frac{r}{b} \right)^{-\beta}$$

alınırsa ve elde edilen denklemler çözülürse, sınır şartları da dikkate alınarak aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$\sigma_r = k \left[A \left(\frac{r}{b} \right)^{q_1} + B \left(\frac{r}{b} \right)^{q_2} - \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right] \quad (4.9)$$



$$\sigma_{\theta} = k \left[\phi_1 A \left(\frac{r}{b} \right)^{q_1} \phi_2 B \left(\frac{r}{b} \right)^{q_2} - \phi_3 \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right] \quad (4.10)$$

Burada,

$$k_1 = 1 - (1 + \nu_{\theta})\beta - \lambda^2$$

$$q_{1,2} = \frac{-(2 - \beta) \pm \sqrt{(2 - \beta)^2 - 4k_1}}{2}$$

$$\phi_1 = 1 + q_1 - \beta$$

$$\phi_2 = 1 + q_2 - \beta$$

$$\phi_3 = \frac{\lambda^2 + 3\nu_{\theta}}{3 + \nu_{\theta}}$$

$$\phi_4 = \xi \frac{\rho_a}{\rho_b} \frac{9 - \lambda^2 - (3 + \nu_{\theta})\beta}{2(3 + \nu_{\theta}) \ln \frac{h_0}{h_a}}$$

$$k = \frac{(3 + \nu_{\theta})\rho_b \Omega^2 b^2}{9 - \lambda^2 - (3 + \nu_{\theta})\beta}$$

$$B = \frac{(\phi_4 + \phi_3 - 1) \left(\frac{a}{b} \right)^2 - (\phi_1 - 1) \left(\frac{a}{b} \right)^{q_2}}{(\phi_2 - 1) \left(\frac{a}{b} \right)^{q_2} - (\phi_1 - 1) \left(\frac{a}{b} \right)^{q_1}}$$

$$A = 1 - B$$



a/b oranlarını veren denklem de,

$$\left[1 + \frac{\phi_4}{\xi}\right] \left(\frac{a}{b}\right)^2 - B \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{q_2} - \left(\frac{a}{b}\right)^{q_1} \right] - \left(\frac{a}{b}\right)^{q_1} = 0 \quad (4.11)$$

şeklinde bulunur.

4.2.1 Özel Çözüm

(4.9) denklemlerinde gerilmeleri sonsuz yapan λ^2 ve β 'nın özel değerleri için, hareketin diferansiyel denklemi çözülürse,

$$\sigma_{r0} = \frac{(3 + \nu_\theta) \rho_b \cdot \Omega^2 b^2}{6 - \beta} \left[A \left(\frac{r}{b}\right)^{q_1} + B \left(\frac{r}{b}\right)^{q_2} - \left(\frac{r}{b}\right)^2 \ln \frac{r}{b} \right]$$

bulunur. a/b değerlerini veren denklem,

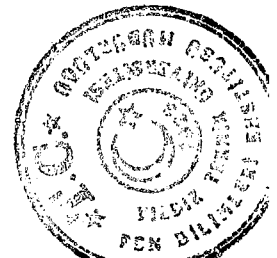
$$\left[\kappa + \ln \frac{a}{b} \right] \left(\frac{a}{b}\right)^2 - B \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{q_2} - \left(\frac{a}{b}\right)^{q_1} \right] = 0$$

olarak elde edilir.

$$B = \frac{\left[\xi \kappa + E_0 + (2 - \beta) \ln \frac{a}{b} \right] \left(\frac{a}{b}\right)^2}{(\phi_2 - 1) \left(\frac{a}{b}\right)^{q_2} - (\phi_1 - 1) \left(\frac{a}{b}\right)^{q_1}}$$

Burada,

$$\kappa = \frac{\rho_a}{\rho_b} \frac{6 - \beta}{2(3 + \nu_\theta) \ln \frac{h_0}{h_a}}$$



4.3 Doğal Frekanslar

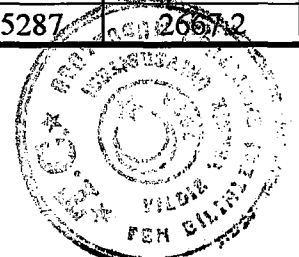
Bu bölümde dış kısmı farklı anizotropik şartlara sahip sabit gerilmeli volana ait boyutsuz doğal frekanslar hesaplanmıştır. Elde edilen değerler Tablo 12-15 arasında verilmiştir.

Tablo-12 Dış kısmı anizotrop ve sabit kesitli, sabit gerilmeli volanın boyutsuz doğal frekansları

$$E_a = E_0 = 29 \text{ Gpa} \quad \rho_a = \rho_b = 1330 \text{ kg/m}^3 \quad \nu_a = \nu_0 = 0.33$$

$$\ln \frac{h_o}{h_a} = 1 \quad \beta = 0 \quad \bar{\Omega} = 5$$

λ^2	n/s	0	1	2	3	4	5
0,75	0	16.1266	48.9294	116.7333	220.0082	396.5740	1325.6
	1	15.6552	47.3107	118.1743	224.7910	407.9689	1328.8
	2	22.7006	63.5023	146.4754	271.0461	636.2195	1378.5
	3	31.4410	87.4717	185.6163	360.5217	1026.3	1734.4
	4	41.3611	114.1076	227.1834	507.0064	1177.5	2740.2
1	0	16.0807	48.0046	110.7460	207.9646	386.1943	1134.7
	1	15.6553	46.2746	111.6112	212.8224	397.5103	1138.1
	2	22.7094	61.2780	137.3478	258.3736	619.6200	1200.9
	3	31.2665	83.2216	172.9824	350.0860	922.6440	1652.0
	4	40.8406	107.1819	213.1981	493.6385	1032.5	2711.3
1,5	0	15.9896	46.6594	102.88	195.44	374.70	925.24
	1	15.6596	44.8713	103.0172	200.4232	385.5973	929.2939
	2	22.7872	58.3400	126.3259	245.7837	588.2397	1019.0
	3	31.2125	77.7390	159.2987	337.9923	783.9481	1588.8
	4	40.4694	98.5669	158.8668	471.4108	874.9247	2187.3
2	0	15.8948	45.6267	97.8420	188.69	366.95	808.8
	1	15.6650	43.8416	97.5365	193.7129	377.3259	813.5205
	2	22.8960	56.3217	119.7880	238.8304	557.7590	930.1566
	3	31.3166	74.1778	151.7750	329.5116	698.2345	1563.6
	4	40.4651	93.2809	191.0430	451.0773	792.2854	2677.1
4	0	15.4786	42.6567	87.5401	175.43	343.11	610.36
	1	15.6942	40.9424	86.3370	180.1768	351.1782	617.6097
	2	23.4247	51.5246	107.1052	223.1171	462.1607	814.8882
	3	32.1953	66.7033	137.4684	302.9446	543.2134	1532.9
	4	41.5416	83.1336	174.9484	384.3529	672.0781	2665.4
9	0	14.0648	37.4573	75.4650	154.9693	295.0550	486.5054
	1	15.7485	35.7920	73.1345	158.5023	299.2873	496.7960
	2	24.8448	45.5943	91.3413	194.9659	356.1793	764.2707
	3	34.8857	59.5912	118.1427	251.4936	440.2428	1519.6
	4	45.4971	74.8435	150.1978	297.1602	607.5287	2667.2



Tablo-13 Dış Kısmı Değişken Kesitli ve Anizotrop, Sabit Gerilmeli Volanın Boyutsuz Doğal Frekansları

$$E_a = E_0 = 29 \text{ Gpa}$$

$$\rho_a = \rho_b = 1330 \text{ kg/m}^3$$

$$\nu_a = \nu_0 = 0.33$$

$$\ln \frac{h_0}{h_a} = 1$$

$$\beta = 0.9$$

$$\bar{\Omega} = 5$$

λ^2	n/s	0	1	2	3	4	5
0,75	0	16.7936	48.0798	108.6192	200.1104	380.1174	908.9647
	1	16.0352	46.1085	108.7765	204.8169	390.5719	913.1498
	2	22.8267	60.5595	132.2570	249.7667	591.4078	1009.5
	3	30.8458	81.3487	165.0149	341.5110	775.1792	1605.5
	4	39.3421	103.1760	203.7239	473.9637	866.100	2727.4
1	0	16.7409	46.7560	102.1252	191.3954	370.3410	785.4362
	1	16.0380	44.7500	101.7785	196.1636	380.2004	790.3917
	2	22.8385	57.9198	123.7951	240.8624	554.5500	918.9415
	3	30.6763	76.6877	155.1796	331.0357	682.3653	1581.0
	4	38.8390	96.2371	193.5288	449.5640	779.6331	2717.3
1,5	0	16.6384	44.9006	94.4685	181.9914	355.1697	654.3756
	1	16.0486	42.9236	93.5162	186.6982	363.7168	660.9110
	2	22.9253	54.5369	114.3578	230.3845	492.0652	842.8644
	3	30.6383	71.0248	144.6624	314.4547	579.5593	1560.9
	4	38.5165	88.2260	182.2481	406.8978	699.8016	2709.3
2	0	16.5339	43.5550	89.9426	176.2266	341.5284	585.9326
	1	16.0619	41.6250	88.6193	180.7551	348.8031	593.9521
	2	23.0457	52.3280	108.9217	222.9998	446.1946	812.2825
	3	30.7649	67.5863	138.5614	299.7329	524.8370	1552.7
	4	38.5734	83.6088	175.0931	373.0452	664.7545	2706.8
4	0	16.0642	40.0116	80.6888	160.8860	294.4372	486.0853
	1	16.1241	38.1826	78.5769	164.3601	298.8431	497.5011
	2	23.6250	47.4587	97.3593	199.7640	352.4425	775.5536
	3	31.7472	60.8792	124.3521	251.8808	442.8481	1544.0
	4	39.9068	75.1191	155.7507	295.5375	618.5918	2709.5
9	0	15.4793	37.5331	74.7058	148.0327	260.9481	455.8599
	1	16.1857	35.7067	72.1258	150.3260	264.8368	467.8031
	2	24.2382	44.7474	89.2381	179.7179	311.7530	764.4683
	3	32.9090	57.6838	113.5146	219.0931	414.6495	1544.4
	4	41.6668	71.2720	140.2643	257.1720	601.1124	2718.4



Tablo-14 Dış Kısmı Değişken Kesitli ve Anizotrop, Sabit Gerilmeli Volanın Boyutsuz Doğal Frekansları

$$E_a = E_\theta = 29 \text{ Gpa}$$

$$\rho_a = \rho_b = 1330 \text{ kg/m}^3$$

$$\nu_a = \nu_\theta = 0.33$$

$$\ln \frac{h_o}{h_a} = 2$$

$$\beta = 0,9$$

$$\bar{\Omega} = 5$$

λ^2	n/s	0	1	2	3	4	5
0,75	0	34.4226	82.4421	192.3211	422.67	801.33	1346.3
	1	29.0198	71.8421	181.5533	429.7655	810.5088	1374.8
	2	35.4902	91.4175	232.2626	529.0668	957.0961	2178.2
	3	44.0430	123.2506	307.4349	674.7850	1212.5	4382.9
	4	52.4236	155.5689	394.5175	792.2593	1711.6	7716.2
1	0	34.1635	80.5658	186.5187	407.7985	740.8457	1292.6
	1	28.8647	70.2873	175.3519	413.0486	750.0273	1323.1
	2	35.2213	88.5868	224.8605	500.4215	883.6434	2159.0
	3	43.3404	118.9080	296.5003	618.6207	1166.4	4375.9
	4	51.1891	149.6217	375.2273	725.3260	1688.3	7713.1
1,5	0	33.8042	78.2767	179.3621	382.8565	670.5674	1249.7
	1	28.6713	68.3260	167.9637	384.9976	681.4607	1281.4
	2	34.8903	85.2540	214.7925	456.2714	816.1758	2142.5
	3	42.5276	113.7806	279.6435	551.5214	1128.0	4370.1
	4	49.8179	142.3346	345.1568	658.5770	1668.1	7711.5
2	0	33.5470	76.8080	174.4503	362.7275	633.7137	1231.8
	1	28.5487	67.0246	163.1025	362.6318	646.1797	1638
	2	34.6845	83.1727	207.2708	425.6502	786.1113	2135.2
	3	42.0561	110.4979	266.3501	514.3623	111.4	4367.8
	4	49.0593	137.4403	323.1145	626.4942	1658.8	7711.6
4	0	32.7685	73.2150	161.2404	313.7317	580.1217	1208.5
	1	28.2469	63.6748	150.6120	309.1617	595.3132	1240.5
	2	34.1930	78.2412	186.3628	365.5857	745.7988	2125.5
	3	41.0982	102.4538	231.9024	455.5342	1088.2	4367.1
	4	47.7018	124.9965	275.0272	580.4930	1645.0	7717.2
9	0	32.0624	70.7481	152.0965	289.4275	562.5910	1201.1
	1	28.0055	61.2736	142.1178	282.7472	578.4804	1232.8
	2	33.8407	74.9899	172.7005	340.6583	732.3511	2122.8
	3	40.5779	97.1714	212.7029	434.4363	1079.7	4369.8
	4	47.1584	116.9950	252.5392	564.1324	1639.3	7725.3



Tablo- 15 Dış Kısmı Sabit Kesitli ve Anizotrop, Sabit Gerilmeli Volanın Boyutsuz Doğal Frekansları

$$E_a = E_0 = 29 \text{ Gpa}$$

$$\rho_a = \rho_b = 1330 \text{ kg/m}^3$$

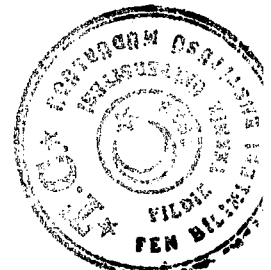
$$\nu_a = \nu_0 = 0.33$$

$$\ln \frac{h_o}{h_a} = 2$$

$$\beta = 0$$

$$\bar{\Omega} = 5$$

λ^2	n/s	0	1	2	3	4	5
0,75	0	33.9560	83.1922	196.5072	435.1539	874.7456	1462.0
	1	28.4602	72.6993	186.4025	444.2355	886.7499	1486.4
	2	35.1380	93.2526	238.8882	556.1297	1085.3	2208.0
	3	44.2381	126.5920	317.8037	744.4772	1308.8	4366.4
	4	53.4264	160.8706	413.4841	899.4294	1756.3	7665.2
1	0	33.7819	81.4907	190.9227	423.8650	818.0225	1366.0
	1	28.3221	71.2861	180.3170	431.7123	827.9765	1393.9
	2	34.8871	90.5159	232.0001	534.6857	984.2038	2174.6
	3	43.5439	122.2796	308.5475	690.7648	1230.0	4355.0
	4	52.1661	154.9359	398.2257	815.6289	1716.1	7659.8
1,5	0	33.4420	79.4667	184.4254	405.2226	738.1377	1287.6
	1	28.1555	69.5689	173.4243	410.6579	747.6780	1318.5
	2	34.5992	87.3904	223.3138	498.0874	881.9571	2146.7
	3	42.7764	117.3951	295.0077	616.4414	11637.0	4344.9
	4	50.8054	148.0638	373.5625	724.2011	1682.5	7655.3
2	0	33.2324	78.1898	180.1884	389.20	689.17	1255.5
	1	28.0498	68.4464	169.0912	392.5446	699.7042	1287.5
	2	34.4224	85.4854	217.0892	468.8522	833.1536	2134.5
	3	42.3368	114.3864	284.1872	570.1076	1135.5	4340.6
	4	50.0591	143.6534	353.7452	676.9405	1667.7	7653.9
4	0	32.6243	75.1896	169.2881	343.25	609.26	1215.6
	1	27.8026	65.6695	158.5037	341.5603	623.1531	1248.3
	2	34.0372	81.1915	199.6872	401.0509	767.3347	2118.2
	3	41.5145	107.3895	253.3205	489.3721	1098.5	4335.8
	4	48.8055	132.8328	303.9965	607.2966	1646.8	76655.1
9	0	31.2021	70.6091	152.5669	292.4593	563.9791	1195.8
	1	27.3141	61.1459	142.7293	286.2902	579.8559	1227.8
	2	33.4146	74.0674	173.9798	344.3220	732.5048	2109.9
	3	40.6765	97.5410	214.8533	437.6468	1076.7	4338.5
	4	48.0592	117.8066	255.4830	566.4742	1632.2	7667.5



BÖLÜM 5

OPTİMUM DİZAYNLI VOLANLARDA HACİM ORANININ TİTREŞİMLER ÜZERİNE ETKİSİ

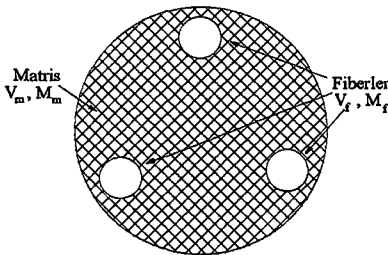
5. Gelişigüzel Fiber Dağılımlı, İzotrop Özellik Gösteren Kompozit Malzemeden Optimum Dizaynlı Volanlar

Anizotrop gibi davranan kompozit malzemelerde de fiberler, matris içerisine yerleştirilmiştir. Fiberler matrise göre daha sert ve dayanımı yüksek, matris malzemesi ise fibere göre daha yumuşak ve dayanımı düşüktür. Kompozitin yapısal bütünlüğü üzerinde matrisin önemli bir yeri vardır. Matris, fiberleri çevrenin zararlı etkilerinden korur.

Kompozit özelliklerini tanımlamak için mikroskopik yapı özelliklerini gösteren küçük bir hacim elemanını tanımlamak gerekir. Basit bir hacim elemanı bir matris bloğu içerisine yerleştirilmiş fiberlerden oluşur.

Kompozitin fiber hacminin matrise göre değişiklik göstermesi, kompozitin yoğunluk ve elastiklik modülü değerlerinin değişmesine sebep olacaktır. Bu da titreşim değerlerinin değişmesine sebep olur.

5.1 Kompozitin Yoğunluğu



Şekil 5. Hacim elemanının şematik gösterimi.



Kompozit fiber ve matrsten oluştuğundan, M kütlesi; M_f fiber kütlesi ile M_m matris kütlesinin toplamından oluşur.

$$M = M_f + M_m \quad (5.1)$$

Boşlukların hacim elemanı içindeki oranının %1 den az olması nedeniyle boşluklar ihmal edilebilir. Bu durumda boşluksuz bir hal için hacim elemanının hacmi,

$$V = V_f + V_m \quad (5.2)$$

dir. (5.1) ve (5.2) eşitlikleri sırasıyla M ve V ’ ye bölündüğünde kütle ve hacim oranları bulunur.

$$m_f + m_m = 1 \quad (5.3)$$

$$v_f + v_m = 1 \quad (5.4)$$

(5.1) ve (5.2) den kompozitin yoğunluğu için,

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\rho_f V_f + \rho_m V_m}{V} = \rho_f v_f + \rho_m v_m \quad (5.5)$$

elde edilir. $v_f = c$ yazılırsa fiber hacim oranı cinsinden yoğunluk,

$$\rho = \rho_f c + \rho_m (1 - c) \quad (5.6)$$

olur.



5.2 Kompozitin Elastiklik Modülü

Buradaki çalışmada kullanılan malzeme [31]de özellikleri incelenen Kevlar / Epoxy malzemesidir. Bunlardan biri diğerine göre daha sert fiber yapısına sahip olup Poisson oranı $\nu_f = \nu_m = 0.5$ ve elastiklik modülü,

$$E = E_m \left\{ \frac{1}{3} \frac{cE_f}{E_m} + \frac{(1-c)}{3} + \frac{19}{27} \left[\frac{E_f(1+c) + E_m(1-c)}{E_f(1-c) + E_m(1+c)} \right] \right\} \quad (5.7)$$

diğeri ise daha yumuşak fiber yapısına sahip olup Poisson oranı $\nu_f = \nu_m = 0.25$ ve elastiklik modülü,

$$E = E_m \left\{ \frac{1}{3} \frac{cE_f}{E_m} + \left[\frac{272 - 41c + 90c^2}{270(1-c)} \right] \right\} \quad (5.8)$$

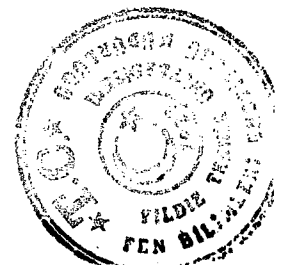
olarak verilmiştir [31].

5.3 Doğal Frekanslar

(5.6), (5.7) ve (5.8) ifadelerine bakıldığında, yoğunluk ile elastiklik modüllerinin aynı zamanda hacim oranlarına bağlı olduğu görülür. Dolayısıyla farklı hacim oranları için yoğunluk ve elastiklik modülleri değişeceğinden, doğal frekanslar da bunlardan etkilenecektir.

Kullanılan kompozit malzeme gelişigüzel fiber dağılımına sahip olduğundan izotrop bir malzeme gibi davranacaktır. Bu nedenle doğal frekansların hesaplanmasında kullanılan gerilme ifadeleri bölüm 3.1.1' deki gibidir. Elde edilen sonuçlar Tablo 16 -19 arasında verilmiştir.

Tablolardaki tüm değerler $\bar{\Omega} = 5$ için hesaplanmıştır.



Tablo- 16 Dış kısmı değişken hacim oranında, iç kısmı sabit hacimde, izotrop davranan, sabit gerilmeli volana ait boyutsuz frekanslar

$$c_1=0.5 \quad v_a = v_b = 0.5$$

$\ln h_0/h_a$	c	n/s	0	1	2	3	4	5
0.5	0.5	0	12.4744	41.7140	91.3592	168.5727	279.0316	1171.8
		1	14.5315	43.3373	94.3310	173.31	286.64	1173.4
		2	21.5065	57.1464	116.6316	209.5695	410.5822	1191.5
		3	29.2100	75.6896	148.8690	258.1876	725.1033	1293.1
		4	38.0478	96.5084	182.1909	339.6601	962.4227	1714.0
	0.6	0	12.5104	42.3840	94.3783	175.1837	292.5668	1298.9
		1	14.7055	44.1980	97.5015	180.2830	299.7311	1300.5
		2	22.0076	59.0701	120.8012	221.4671	418.0976	1317.0
		3	30.2767	79.3328	155.4369	270.0677	743.5028	1402.9
		4	39.9676	102.1881	192.3221	348.7263	1033.9	1767.8
	0.7	0	12.5301	43.0706	97.5821	181.6042	308.7425	1437.1
		1	14.8765	45.0905	100.8390	187.0858	315.4580	1438.7
		2	22.5383	61.1178	125.1381	234.3492	426.8210	1453.8
		3	31.4365	83.2765	161.9893	284.0442	758.6006	1527.7
		4	42.0721	108.3561	202.9243	359.4488	1100.4	1838.3
	0.8	0	12.5158	43.8489	101.38	188.57	330.07	1605.0
		1	15.0458	46.1158	104.7618	194.4528	336.3203	1606.5
		2	23.1417	63.3576	130.2279	249.5735	438.4840	1620.5
		3	32.8141	88.661	169.2615	302.2632	772.7701	1684.1
		4	44.6110	115.9006	215.0601	373.8396	1165.5	1940.1

c_1 = İç kısmın sabit fiber hacim oranı



Tablo- 17 Dış kısmı değişken hacim oranında, iç kısmı sabit hacimde, izotrop davranan, sabit gerilmeli volana ait boyutsuz frekanslar

$$c_1=0.5$$

$$v_a = v_b = 0.5$$

$\ln h_0/h_a$	c	n/s	0	1	2	3	4	5
1	0.5	0	16.5898	48.9910	112.2789	209.9416	388.3105	1140.3
		1	156623	46.9620	113.0758	214.8383	399.9264	1143.5
		2	21.8807	60.9887	138.2852	260.0955	621.8733	1205.3
		3	29.6791	81.8528	173.2010	351.3270	925.0570	1654.0
		4	38.2871	104.8258	212.7410	494.3117	1033.8	2711.7
	0.6	0	16.6723	49.5582	116.1431	217.1762	394.6448	1258.8
		1	15.8269	47.5463	117.2970	221.9858	406.2846	1261.7
		2	22.3355	62.3962	144.0364	267.4807	633.1805	1314.7
		3	30.6750	84.5475	180.9211	357.5162	992.1326	1703.3
		4	40.1261	109.4554	221.0758	502.9222	1123.7	2731.7
	0.7	0	16.7386	50.1065	119.9093	225.2206	401.8753	1387.9
		1	15.9912	48.1268	121.4066	229.9705	413.4489	1390.7
		2	22.8205	63.6095	149.8634	276.1024	642.8727	1436.9
		3	31.7615	87.2202	189.2942	364.3787	1055.0	1768.0
		4	42.1470	114.0826	230.5353	510.7929	1220.8	2756.4
	0.8	0	16.7717	50.7001	123.9517	234.98	411.45	1545.3
		1	16.1589	48.7721	125.7928	239.7218	422.8271	1548.0
		2	23.3795	65.0663	156.2748	287.3647	652.5501	1588.1
		3	33.0622	90.2114	199.2023	373.1622	1117.1	1861.8
		4	44.6011	119.2384	242.4034	519.1704	1336.3	2791.3

$c_1=$ İç kısmın sabit fiber hacim oranı



Tablo- 18 Dış kısmı değişken hacim oranında, iç kısmı sabit hacimde, izotrop davranan, sabit gerilmeli volana ait boyutsuz frekanslar

$$c_1=0.5 \quad v_a = v_b = 0.5$$

$\ln h_0/h_a$	c	n/s	0	1	2	3	4	5
1.5	0.5	0	23.6993	62.4451	142.6879	289.9529	590.0314	1154.2
		1	19.6260	56.3504	139.2919	297.2027	604.0906	1163.6
		2	24.6976	71.014	171.95	370.64	847.63	1437.4
		3	32.7573	94.644	320.6314	516.2943	1009.3	2615.2
		4	41.0743	119.7323	282.0389	685.6063	1193.6	4532.0
	0.6	0	23.8658	64.3432	147.2183	295.4124	599.8103	1255.5
		1	19.7947	57.1082	144.2178	302.6970	614.7179	1263.8
		2	25.0850	72.6322	177.49	376.69	893.88	1497.7
		3	33.6376	97.5853	226.7392	527.0355	1087.6	2633.7
		4	42.7410	124.1944	288.5531	716.0391	1255.3	4543.8
	0.7	0	24.0118	64.1874	151.9833	301.4035	608.3048	1368.7
		1	19.9614	57.8090	149.4049	308.6474	623.8523	1376.0
		2	25.4898	74.2124	183.4845	382.8469	934.7600	1570.0
		3	34.5793	100.5785	233.4403	536.3308	1173.6	2656.5
		4	44.5476	128.8815	295.4413	742.1963	1329.7	4557.6
	0.8	0	24.1214	65.0295	157.5061	308.8296	616.7794	1509.3
		1	20.1307	58.4740	155.4256	315.9366	632.8155	1515.7
		2	25.9433	75.8758	190.6687	390.0081	973.0587	1679.8
		3	35.6794	103.9224	241.6851	545.4014	1277.2	2688.7
		4	46.7075	134.3361	303.6945	766.3133	1428.0	4575.5

c_1 = İç kısmın sabit fiber hacim oranı



Tablo- 19 Dış kısmı değişken hacim oranında, iç kısmı sabit hacimde, izotrop davranan, sabit gerilmeli volana ait boyutsuz frekanslar

$$c_1=0.5$$

$$\nu_a = \nu_b = 0.5$$

$\ln h_0/h_a$	c	n/s	0	1	2	3	4	5
2	0.5	0	35.2991	84.1453	194.3948	429.1048	823.7939	1372.2
		1	28.6358	72.3883	183.2366	436.8174	834.1245	1401.0
		2	32.3420	87.6954	232.4508	538.0380	989.1597	2180.9
		3	40.3281	116.8362	306.1458	691.9437	1233.1	4358.6
		4	47.9092	147.5469	393.5363	814.7778	1711.3	7660.7
	0.6	0	35.6557	85.3250	197.9680	436.8576	860.9112	1428.7
		1	28.8854	73.4153	187.0839	445.4185	872.4748	1455.2
		2	32.7426	89.4251	236.9214	552.6444	1050.8	2201.6
		3	41.1989	119.4226	312.2919	726.8608	1279.7	4368.4
		4	49.4914	151.0949	403.7122	866.6064	1741.6	7669.4
	0.7	0	35.9853	86.5275	201.7289	443.7853	894.3937	1499.4
		1	29.1305	74.4259	191.1658	452.9932	907.6333	1523.4
		2	33.1446	91.2109	241.4510	565.0780	1119.0	2227.7
		3	42.1026	122.1436	318.1023	758.9144	1337.2	4379.9
		4	51.1791	154.8170	412.7097	921.5200	1772.1	7679.3
	0.8	0	36.2712	87.8557	206.1988	450.7577	926.3679	1596.7
		1	29.3791	75.4574	196.0405	460.4659	941.6723	1617.8
		2	33.5634	93.2127	246.6246	576.6921	1200.9	2265.2
		3	43.1035	125.3225	324.2730	790.1301	1415.6	4395.3
		4	53.1385	159.1980	421.4888	984.4519	1815.5	7692.2

c_1 = İç kısmın sabit fiber hacim oranı



Tablo- 20 Dış kısmı değişken hacim oranında, iç kısmı sabit hacimde, izotrop davranan, sabit gerilmeli volana ait boyutsuz frekanslar

$$c_1=0.5 \quad v_a = v_b = 0.25$$

$\ln h_0/h_a$	c	n/s	0	1	2	3	4	5
0.5	0.5	0	12.0677	40.5082	89.5769	166.4462	276.6071	1163.0
		1	14.5440	42.3988	92.5450	171.13	284.08	1165.0
		2	22.3135	56.9700	115.2702	207.7922	408.1879	1184.4
		3	31.1525	76.4197	148.4135	256.6936	722.9956	1288.4
		4	41.4297	98.1457	182.8882	338.2206	960.8220	1712.0
	0.6	0	12.0376	41.0763	92.4252	173.0306	290.0496	1291.4
		1	14.7207	43.2072	95.5181	178.0493	297.0826	1293.4
		2	22.9285	58.9893	119.29	219.82	415.49	1311.2
		3	32.4865	80.2718	155.0471	268.6642	741.6068	1399.4
		4	43.7914	104.1057	193.4781	347.1089	1033.35	1766.5
	0.7	0	11.9831	41.7031	95.5449	179.66	306.65	1434.4
		1	14.8933	44.1092	98.7400	185.0295	313.2177	1436.5
		2	23.5805	61.2718	123.6085	233.2879	424.2439	1453.0
		3	33.9385	84.6377	161.8628	283.2893	757.1112	1529.0
		4	46.3898	110.8407	204.9351	358.0810	1102.6	1839.9
	0.8	0	11.8707	42.5172	99.5464	187.53	330.24	1620.4
		1	15.0636	45.2952	102.8320	193.2689	336.3476	1622.5
		2	24.3458	64.3230	129.14	250.38	437.01	1637.9
		3	35.7297	90.4629	170.0971	303.9262	772.4487	1703.0
		4	49.6625	119.8267	219.1126	374.2253	1173.8	1954.9

c_1 = İç kısmın sabit fiber hacim oranı



Tablo- 21 Dış kısmı değişken hacim oranında, iç kısmı sabit hacimde, izotrop davranan, sabit gerilmeli volana ait boyutsuz frekanslar

$$c_1=0.5 \quad v_a = v_b = 0.25$$

$\ln h_0/h_a$	c	n/s	0	1	2	3	4	5
1	0.5	0	15.8312	47.5152	109.9850	206.9843	385.1012	1131.9
		1	15.6499	45.9389	110.8830	211.8230	396.2698	1135.4
		2	23.0797	61.4109	136.8745	257.5088	618.4201	1198.6
		3	31.9603	83.7470	172.8536	349.4328	921.3201	1650.8
		4	41.9214	108.2467	213.3880	493.9233	1031.7	2710.7
	0.6	0	15.8998	47.9549	113.7098	214.0473	391.3537	1251.4
		1	15.8224	46.4215	114.9487	218.7756	402.5095	1254.7
		2	23.6385	62.7558	142.4668	264.7319	629.8251	1309.1
		3	33.2022	86.7140	180.4718	355.4261	989.4861	1700.7
		4	44.1757	113.1667	221.6553	501.6118	1123.0	2731.4
	0.7	0	15.8389	48.4024	117.4375	222.1264	398.7873	1385.2
		1	15.9958	46.9385	118.9988	226.7624	409.8304	1388.4
		2	24.2443	64.1760	148.2481	273.5072	639.7968	1435.8
		3	34.5741	89.7126	188.9552	362.3250	1054.8	1768.1
		4	46.6826	118.2963	231.3573	509.4057	1224.8	2757.9
	0.8	0	15.7576	48.9663	121.7288	232.64	409.66	1559.8
		1	16.1758	47.6240	123.60	237.21	420.42	1562.9
		2	24.9804	66.0037	154.9669	286.0373	650.3738	1604.0
		3	36.3043	93.4834	199.6487	372.0556	1122.9	1874.1
		4	49.8937	124.5903	244.5195	518.2556	1352.9	2798.4

c_1 = İç kısmın sabit fiber hacim oranı



Tablo- 22 Dış kısmı değişken hacim oranında, iç kısmı sabit hacimde, izotrop davranan, sabit gerilmeli volana ait boyutsuz frekanslar,

$$c_1=0.5 \quad v_a = v_b = 0.25$$

$\ln h_0/h_a$	c	n/s	0	1	2	3	4	5
1.5	0.5	0	22.2571	60.1583	139.4438	285.1311	584.7792	1146.2
		1	19.4815	55.0726	136.3532	292.3434	598.0583	1155.6
		2	26.9201	72.6581	170.5926	366.8250	842.0916	1430.9
		3	36.0550	98.7695	221.2654	514.1819	1005.0	2611.4
		4	45.7377	125.8131	284.5528	685.4042	1191.2	4530.1
	0.6	0	22.3466	60.0058	143.8807	290.3059	594.4892	1248.8
		1	19.6540	55.6667	141.1849	297.5127	608.5218	1257.2
		2	27.3879	74.2660	175.9703	372.4768	888.9671	1492.0
		3	37.1397	101.8924	227.0853	524.5984	1084.8	2630.4
		4	47.7687	130.5957	290.6436	715.9581	1254.0	4543.0
	0.7	0	22.4033	61.6057	148.7226	296.1233	603.0015	1366.7
		1	19.8262	56.2013	146.7226	303.2344	617.5747	1374.2
		2	27.8819	75.8889	182.01	378.28	931.24	1571.8
		3	38.3112	105.2039	233.7030	533.5959	1174.7	2654.7
		4	49.9913	135.8404	297.2407	742.4791	1132.3	4558.5
	0.8	0	22.3815	62.3104	154.7928	303.8531	611.8665	1524.3
		1	20.0038	56.6864	153.0791	310.7236	626.7902	1530.9
		2	28.4580	77.7366	189.8671	385.3848	972.7737	1691.7
		3	39.7457	109.2361	242.5465	542.5657	1291.0	2691.8
		4	52.7852	142.5022	305.7314	767.7083	1444.0	4580.3



Tablo- 23 Dış kısmı değişken hacim oranında, iç kısmı sabit hacimde, izotrop davranan, sabit gerilmeli volana ait boyutsuz frekanslar

$$c_1=0.5 \quad v_a = v_b = 0.25$$

$\ln h_0/h_a$	c	n/s	0	1	2	3	4	5
2	0.5	0	32.9745	80.2291	189.2789	421.3736	815.2210	1362.8
		1	28.1700	70.8028	178.9576	429.2930	825.0068	1390.4
		2	35.8818	91.8819	231.8458	533.1144	981.7809	2171.2
		3	44.8573	124.7764	309.7396	690.2074	1228.4	4352.5
		4	53.9494	158.2930	400.4743	816.0340	1715.4	7658.0
	0.6	0	33.2046	81.2659	192.6780	428.7889	852.5430	1420.0
		1	28.4087	71.6439	182.6046	437.5083	863.3684	1445.5
		2	36.3695	93.5471	236.0153	547.3511	1044.1	2292.4
		3	45.9311	127.4329	315.5495	725.2155	1275.4	4363.4
		4	55.8894	161.9886	410.4222	868.2890	1739.6	7668.7
	0.7	0	33.397	82.3420	196.3913	435.4493	886.8283	1493.9
		1	28.6452	72.4610	186.6296	444.7605	899.1347	1516.9
		2	36.8552	95.3374	240.3468	559.5018	1114.8	2220.0
		3	47.0519	130.3528	321.0704	757.8590	1335.3	4376.6
		4	57.9796	166.0220	419.1828	925.0891	1771.2	7681.6
	0.8	0	33.49.22	83.6042	201.2383	442.3913	921.0814	1604.0
		1	28.8873	73.2920	191.9221	452.1215	935.2903	1624.0
		2	37.3597	97.5574	245.7026	571.1004	1205.7	2263.2
		3	48.3378	134.1425	327.2159	790.9380	1423.7	4395.7
		4	60.5240	171.2665	427.8991	994.3403	1820.2	7699.8



BÖLÜM 6

ANİZOTROP, DEĞİŞKEN KESİTLİ VE RİJİT KAPLAMALI VOLANLARDAKİ TİTREŞİMLER

6. Farklı Sınır Şartlarına Sahip, Optimum Dizaynı Olmayan Volanlar

Burada genel olarak rijit sınır koşulları ele alınmıştır. İki farklı sınır koşulu incelenmiştir. İlk olarak içten ve dıştan rijit bağlı volan, ikinci olarak içten serbest, dıştan rijit bağlı volan gözönüne alınmıştır.

6.1 Gerilme ve Radyal Yerdeğiştirme İfadeleri

Kalınlık değişimi ,

$$h = h_a \left(\frac{r}{b} \right)^{-\beta}$$

olan anizotrop bir volan için elde edilecek denklemler (4.9) ve (4.10) eşitlikleri ile aynıdır. Farklı olan A ve B sabitleridir. Radyal yerdeğiştirme (2.1), (2.3), (4.9) ve (4.10) eşitliklerinden

$$u = \frac{(3 + \nu_\theta) \rho \Omega^2 b^3}{[9 - \lambda^2 - (3 + \nu_\theta) \beta] E_\theta} \left[\psi_1 A \left(\frac{r}{b} \right)^{1+q_1} + \psi_2 B \left(\frac{r}{b} \right)^{1+q_2} - \psi_3 \left(\frac{r}{b} \right)^3 \right] \quad (6.1)$$

bulunur. Burada,

$$\psi_1 = \phi_1 - \nu_\theta \quad \psi_2 = \phi_2 - \nu_\theta \quad \psi_3 = \phi_3 - \nu_\theta$$

dır.



6.2 İç ve Dış Kenarlarından Rijit Bağlı Volan

Bu volan türünde sınır şartları , $r = a$ da $u = 0$ ve $r = b$ de $u = 0$ dir. Buna göre,

$$A = \frac{\psi_3 \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 - \left(\frac{a}{b} \right)^{q_2} \right]}{\psi_1 \left[\left(\frac{a}{b} \right)^{q_1} - \left(\frac{a}{b} \right)^{q_2} \right]}$$

$$B = \frac{\psi_3 - \psi_1 A}{\psi_2}$$

6.3 İç Kenarından Serbest , Dış Kenarından Rijit Bağlı Volan

Sınır şartları ,

$$r = a \text{ da } \sigma_r = 0$$

$$r = b \text{ de } u = 0$$

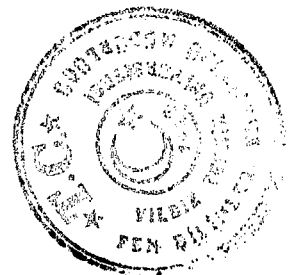
dir. Buna göre,

$$A = \frac{\psi_3 \left(\frac{a}{b} \right)^{q_2} - \psi_2 \left(\frac{a}{b} \right)^2}{\psi_1 \left(\frac{a}{b} \right)^{q_2} - \psi_2 \left(\frac{a}{b} \right)^{q_2}}$$

ve

$$B = \frac{\psi_3 - \psi_1 A}{\psi_2}$$

bulunur.



6.3.1 Özel Çözümler

(4.9) ve (4.10) denklemlerinde λ^2 ve β 'nın bazı değerleri için gerilmeler sonsuz olmaktadır. Gerilmeleri sonsuz yapan bu hal için elde edilecek olan diferansiyel denklem çözüldüğünde (4.2.1)'deki radyal ve teğetsel gerilmeler bulunur.

Bu gerilmeler (2.1) ile uygunluk denkleminde yerine yazıldığında radyal yer değiştirme için ,

$$u = \frac{(3 + \nu_0)\rho\Omega^2 b^3}{E_0(6 - \beta)} \left[\psi_1 A \left(\frac{r}{b}\right)^{1+q_1} + \psi_2 B \left(\frac{r}{b}\right)^{1+q_2} - \psi_4 \left(\frac{r}{b}\right)^3 \ln \frac{r}{b} - \psi_3 \left(\frac{r}{b}\right)^2 \right] \quad (6.2)$$

burada

$$\psi_4 = 3 - \beta - \nu_0$$

A ve B sabitleri aşağıdaki sınır şartlarından bulunur. İç ve dış kenarlarından rijit bağlı durum için,

$$r = a \text{ da } u = 0 \quad \text{ve} \quad r = b \text{ de } u = 0$$

olduğundan,

$$A = \frac{\psi_3 \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^{q_2} \right] + (3 - \beta - \nu_0) \left(\frac{a}{b}\right)^2 \ln \frac{a}{b}}{\psi_1 \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{q_1} - \left(\frac{a}{b}\right)^{q_2} \right]}$$

$$B = \frac{\psi_3 - \psi_1 A}{\psi_2}$$

elde edilir.



İç kenarından serbest, dış kenarından rijit bağlı hal için,

$$r = b \text{ de } u = 0 \quad \text{ve} \quad r = a \text{ da } \sigma_r = 0$$

sınır şartlarında,

$$A = \frac{\psi_2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \ln \frac{a}{b} - \psi_3 \left(\frac{a}{b} \right)^{q_2}}{\psi_2 \left(\frac{a}{b} \right)^{q_1} - \psi_1 \left(\frac{a}{b} \right)^{q_2}}$$

$$B = \frac{\left(\frac{a}{b} \right)^2 \ln \frac{a}{b} - A \left(\frac{a}{b} \right)^{q_1}}{\left(\frac{a}{b} \right)^{q_2}}$$

6.4 Doğal Frekanslar

İç ve dış kenarlarından rijit bağlı hal için kabul edilen enine yer değiştirme fonksiyonu,

$$W = a_0 \left(\frac{r}{b} - 1 \right)^2 \left(\frac{r}{b} - \frac{a}{b} \right)^2 + a_1 \left(\frac{r}{b} - 1 \right)^2 \left(\frac{r}{b} - \frac{a}{b} \right)^3 + a_2 \left(\frac{r}{b} - 1 \right)^2 \left(\frac{r}{b} - \frac{a}{b} \right)^4 + \dots$$

İç kenarından serbest dış kenarından rijit bağlı hal için kabul edilen enine yer değiştirme fonksiyonu,

$$W = a_0 \left(\frac{r}{b} - 1 \right)^2 + a_1 \left(\frac{r}{b} - 1 \right)^3 + a_2 \left(\frac{r}{b} - 1 \right)^4 + \dots$$

dur. Bu fonksiyonların ilk altı terimi gözönüne alınarak boyutsuz doğal frekanslar hesaplanmıştır.



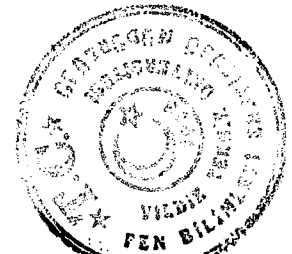
Tablo-24 İç ve dış kenarından rijit bağlı, anizotrop, sabit kesitli dönen diskin boyutsuz doğal frekansları.

$$a/b = 0.5 \quad \beta = 0 \quad \nu_0 = 0.3 \quad \bar{\Omega} = 5$$

λ^2	$n \setminus s$	0	1	2	3	4	5
1	0	89.2105	246.3916	484.0542	804.3813	1395.100	2137.5
	1	90.1990	247.7914	485.6192	806.0111	1396.700	2138.8
	2	93.3156	252.0334	490.3337	810.9146	1401.500	2142.7
	3	98.9606	259.2400	498.2500	819.1300	1409.500	2149.3
	4	107.6400	269.5900	509.4700	830.7300	1420.800	2158.6
2	0	61.9079	170.6021	334.7203	555.8089	963.6900	1475.6
	1	62.5909	171.5655	335.7982	556.9333	964.7901	1476.5
	2	64.8964	174.5500	339.0800	560.3400	968.1100	1479.3
	3	69.4965	179.8270	344.7143	566.1195	973.7304	1483.9
	4	77.2035	187.7939	352.9216	574.4293	981.7508	1490.4
4	0	43.7224	119.9747	234.7799	389.2915	674.5362	1031.7
	1	44.2231	120.6517	235.5337	390.0785	675.3036	1032.3
	2	46.1079	122.8400	237.8800	392.4900	677.6500	1034.3
	3	50.3539	126.9813	242.0657	396.6943	681.6781	1037.6
	4	58.0223	133.7256	248.4750	402.9381	687.5897	1042.3

Özel çözüm

λ^2	$n \setminus s$	0	1	2	3	4	5
9	0	29.6929	80.6794	156.8900	259.2500	448.3500	684.1200
	1	30.1224	81.1549	157.4000	259.7800	448.8600	684.5400
	2	31.9672	82.8299	159.0717	261.4573	450.4566	685.8490
	3	36.5453	86.4014	162.3010	264.5333	453.3211	688.1466
	4	44.9554	92.8558	167.7100	269.4300	457.7600	691.6200



Tablo- 25 İç ve dış kenarından rijit bağlı, anizotrop, değişken kesitli volanın boyutsuz doğal frekansları

$$\frac{a}{b} = 0.5 \quad \beta = 0.5 \quad \nu_0 = 0.3 \quad \bar{\Omega} = 5$$

λ^2	n/s	0	1	2	3	4	5
1	0	104.7716	287.8683	564.3982	942.5586	1634.8	2554.9
	1	105.8400	289.4527	566.1898	944.5647	1636.4	2557.0
	2	109.2204	294.2603	571.5907	950.6025	1641.2	2563.4
	3	115.3790	302.4455	580.6763	960.7288	1649.2	2574.1
	4	124.9120	314.2390	593.5648	975.0355	1660.6	2589.2
2	0	72.6886	199.2490	390.1600	651.3290	1128.7	1764.4
	1	73.3988	200.3209	391.3871	652.7076	1129.8	1765.9
	2	75.8246	203.6723	395.1317	656.8878	1133.1	1770.3
	3	80.7462	209.6297	401.5770	664.0006	1138.7	1777.8
	4	89.1159	218.6859	411.0093	674.2572	1146.8	1788.4
4	0	51.3188	140.0202	273.5215	456.2486	789.3122	1234.4
	1	51.7962	140.7583	274.3690	457.2053	790.0764	1235.4
	2	53.6702	143.1647	277.0185	460.1498	792.4100	1238.5
	3	58.0877	147.7832	281.7801	465.3015	796.4350	1243.9
	4	66.3211	155.4097	289.1374	473.0144	802.3491	1251.7

Özel çözüm

$$\frac{a}{b} = 0.5 \quad \beta = 0.5 \quad \nu_0 = 0.3 \quad \bar{\Omega} = 5 \quad \lambda^2 = 9 - (3 + \nu_0)\beta$$

λ^2	n/s	0	1	2	3	4	5
7.35	0	38.2900	103.7057	201.7674	336.0784	579.8525	907.3597
	1	38.6484	104.2394	202.3823	336.7750	580.4094	908.1033
	2	40.3210	106.1140	204.3814	338.9725	582.1393	910.4012
	3	44.8052	110.1003	208.2136	342.9886	585.2167	914.4546
	4	53.5159	117.3065	214.5764	349.3360	589.9250	920.5971



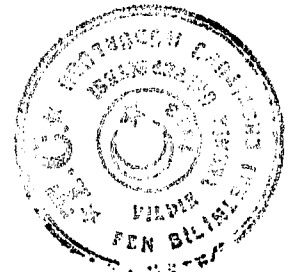
Tablo-26 İç kenarından serbest, dış kenarından rijit bağlı, anizotrop, sabit kesitli dönen disklin boyutsuz doğal frekansları.

$$a/b = 0.5 \quad \beta = 0 \quad \nu_0 = 0.3 \quad \bar{\Omega} = 5$$

λ^2	$n \setminus s$	0	1	2	3	4	5
1	0	16.1892	92.6808	251.3572	518.5686	903.0902	3720.7
	1	20.9870	96.2715	254.2329	521.4676	905.6259	3724.3
	2	31.7318	106.5200	262.7800	530.1100	913.2800	3735.0
	3	45.8310	122.3300	276.7400	544.3100	926.1800	3752.8
	4	63.2487	142.5500	295.7600	563.7800	944.5400	3777.8
2	0	11.5417	64.6986	173.9259	358.4084	623.5815	2569.9
	1	15.6856	67.3927	176.0010	360.4664	625.3748	2572.4
	2	25.0623	75.3260	182.2500	366.6400	630.8100	2580.0
	3	37.7428	88.1160	192.7400	376.9300	640.0600	2592.6
	4	53.5914	105.4500	207.5400	391.3100	653.4100	2610.3
4	0	8.9511	46.6738	122.6421	251.5849	436.5927	1798.7
	1	12.8401	48.8760	124.2287	253.1079	437.9095	1800.5
	2	21.4787	55.6333	129.1232	257.7363	441.9373	1806.0
	3	33.0706	67.1773	137.7000	265.6300	448.9100	1815.3
	4	47.3220	83.5968	150.4900	277.0400	459.2200	1828.4

Özel çözüm

λ^2	$n \setminus s$	0	1	2	3	4	5
9	0	7.4059	33.6898	83.6599	169.0366	291.1351	1195.8
	1	11.1403	35.6572	84.9481	170.1912	292.1184	1197.2
	2	19.0627	41.9759	89.1012	173.7900	295.1800	1201.2
	3	29.3461	53.1837	96.9239	180.2300	300.6900	1208.1
	4	41.8268	69.0148	109.5500	190.0800	309.2600	1218.0



Tablo-27 İç kenarından serbest, dış kenarından rijit bağlı, anizotrop, değişken kesitli diskin boyutsuz doğal frekansları.

$$\frac{a}{b} = 0.5 \quad \beta = 0.5 \quad \nu_0 = 0.3 \quad \bar{\Omega} = 5$$

λ^2	n/s	0	1	2	3	4	5
1	0	16.0977	101.5642	285.9491	593.9984	1066.4	5350.4
	1	22.9405	106.6715	289.7812	597.3877	1070.8	5355.4
	2	36.5827	120.9557	301.1416	607.4666	1084.1	5370.4
	3	53.5711	142.0600	319.6100	623.9700	1106.6	5395.3
	4	74.3665	168.1500	344.5400	646.4900	1138.3	5430.3
2	0	11.9241	71.4129	198.2165	410.5921	737.2864	3695.6
	1	17.4611	75.2052	200.9816	412.9958	740.4227	3699.1
	2	28.9837	86.1609	209.3056	420.1995	749.9210	3709.7
	3	44.0674	103.2500	223.2400	432.1800	766.0400	3727.3
	4	62.6898	125.7300	242.8500	448.8900	789.1700	3752.1
4	0	9.5917	52.0796	140.1605	288.2271	517.3890	2586.5
	1	14.3656	55.1044	142.2683	290.0006	519.6992	2589.0
	2	24.5270	64.2638	148.7900	295.3900	526.7600	2596.7
	3	37.9658	79.4912	160.2700	304.6100	538.9500	2609.7
	4	54.2811	100.4800	177.4900	317.9500	556.9000	2628.0

$$\frac{a}{b} = 0.5 \quad \beta = 0.5 \quad \nu_0 = 0.3 \quad \bar{\Omega} = 5 \quad \lambda^2 = 9 - (3 + \nu_0)\beta$$

λ^2	n/s	0	1	2	3	4	5
7.35	0	8.3527	40.9664	105.1982	213.4339	382.5907	1902.6
	1	12.6787	43.6314	106.9647	214.8533	384.4346	1904.6
	2	21.8525	51.9700	112.6400	219.26	390.15	1910.6
	3	33.8572	66.3732	123.25	227.10	400.27	1920.8
	4	48.3392	86.1199	140.26	239.09	415.71	1935.4



BÖLÜM 7

OPTİMUM DİZAYNLI OLMAYAN DEĞİŞKEN KALINLIKLI VOLANLARIN TİTREŞİMLERİ

7. Farklı Kalınlık Değişim Fonksiyonlarına Sahip, Optimum Dizaynı Olmayan Volanlar

7.1 Kalınlığı Üstel Bir Fonksiyon Şeklinde Değişen Volan

Burada daha önce optimum dizayna uygun olarak alınan kalınlık değişimi yerine farklı bir kalınlık değişim fonksiyonu seçilmiştir. Radyal gerilme cinsinden elde edilen ikinci derece denklemin seri çözümü yapılmıştır. Buna göre gerilme ifadeleri bulunmuştur.

7.1.1 Gerilme İfadeleri

Kalınlık değişim fonksiyonu için,

$$h = h_0 \exp(kx^s) \quad (7.1)$$

alınarak dolu disk için seri çözüm yapıldığında radyal gerilme ifadesi,

$$\sigma_r = p[AP(x) + R(x)]\exp(-t) \quad (7.2)$$

teğetsel gerilme ifadesi ,

$$\sigma_\theta = \sigma_r + px^2 + p \left[A \frac{dP}{dx} + \frac{dR}{dx} \right] x \exp(-t) \quad (7.3)$$



bulunur. Burada,

$$x = \frac{r}{a} \quad (7.4)$$

$$t = kx^{s_1} \quad (7.5)$$

$$p = \rho \Omega^2 a^2 \quad (7.6)$$

$$\gamma = 1 + \frac{2}{s_1} \quad (7.7)$$

$$P(t) = 1 + \frac{\alpha}{1.\gamma} t + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} t^2 + \dots \quad (7.8)$$

$$\alpha = \frac{1-\nu}{s_1} \quad (7.9)$$

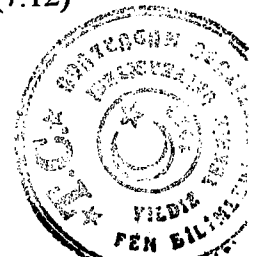
$$s = 2 \text{ için} \quad R(t) = -\frac{(\gamma-1)t^{\gamma-2}}{2k^{\gamma-1}} \exp(t) \quad (7.10)$$

$$s = 1 \text{ için} \quad R(t) = -\frac{(\gamma-1)t^{\gamma-2}}{2k^{\gamma-1}} \left[1 + \frac{(2-\gamma)(3-2\gamma)}{(3-2\gamma+\alpha)t} \right] \exp(t) \quad (7.11)$$

şeklindedir. Radyal ve teğetsel gerilme ifadeleri $s_1 = 2$ için (2.1) şekil değiştirme eşitliklerinde yazıldığında,

t

$$\varepsilon_{\theta a} = \frac{\rho \Omega^2 a^2}{E_a} [A\eta_1(x) + \eta_2(x)] \quad (7.12)$$



elde edilir. Burada,

$$\eta_1(x) = \left[(1 - v_a)P(x) + x \frac{dP(x)}{dx} \right] \exp(-kx^2) \quad (7.13)$$

$$\eta_2(x) = \left[(1 - v_a)R(x) + x \frac{dR(x)}{dx} \right] \exp(-kx^2) + x^2$$

Uç kısma ait denklemler (3.8) ve (3.9) denklemleriyle aynıdır. Sınır şartlarından

$$A = \frac{\eta_8 + \eta_7 K_2}{\eta_6} \quad (7.14)$$

bulunur. Burada,

$$k_a = \frac{E_a}{E_b}$$

$$z = \frac{\rho_b}{\rho_a} \frac{(3 + v_b)}{8a^2}$$

$$\phi = k_a z$$

$$\eta_3(a) = 1 + \frac{1}{a^2} - v_b + \frac{v_b}{a^2}$$

$$\eta_5(a) = 1 - v_4 a^2 - v_b + v_b a^2$$

$$\eta_6 = P(a) \exp(-k)$$

$$\eta_7 = z \left(1 - \frac{1}{a^2} \right)$$



$$\eta_8 = z(1 - a^2) - R(a) \exp(-k)$$

$$K_2 = \frac{\zeta_0}{\zeta_1} \quad (7.15)$$

$$\zeta_0 = \eta_6 [\phi \eta_5(a) - \eta_2(a)] - \eta_1(a) \eta_8$$

$$\zeta_1 = \eta_1(a) \eta_7 - \phi \eta_6 \eta_3(a) \quad (7.16)$$

şeklindedir.

7.1.2 Kalınlığı Doğrusal Olarak Değişen Volan

Burada da kalınlık değişimi için,

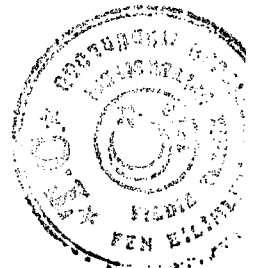
$$h = h_0(1 - kx) \quad (7.17)$$

şeklinde bir fonksiyon kabul edilerek seri çözüm yapılmıştır. Bunun sonucunda radyal yerdeğiştirme ifadesi için,

$$u = CxP(x) + \frac{A}{11 + \nu} (x^3 - \xi_0 x^2 - \xi_1 x) \quad (7.18)$$

elde edilir. Burada A ve C sınır şartlarına göre bulunacak sabitlerdir. Düzlem gerilme halinde şekil değiştirmelerle gerilmeler arasında,

*



$$\varepsilon_r = \frac{du}{dx} = \frac{1}{E}(\sigma_r - v\sigma_\theta) \quad (7.19)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{x} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - v\sigma_r)$$

bağıntılarının olduğu bilinmektedir. u ile u' nun x 'e göre türevi bu bağıntılarda yerine yazılırsa ve $r = a$ da $\sigma_r = 0$, $r = 0$ da $u = 0$ olduğu dikkate alınır, radyal ve teğetsel gerilmeler için

$$\sigma_r = \frac{\rho\Omega^2 a^2}{11+v} \left[\frac{\eta_2(a)}{\eta_1(a)} \eta_1(x) - \eta_2(x) \right] \quad (7.20)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\rho\Omega^2 a^2}{11+v} \left\{ \frac{\eta_2(a)}{\eta_1(a)} \left[(1-v^2)P(x) + v\eta_1(x) \right] - (1-v^2)\eta_3(x) - v\eta_2(x) \right\} \quad (7.21)$$

elde edilir. Burada,

$$A = -\frac{\rho\Omega^2 a^2 (1-v^2)}{E} \quad (7.22)$$

$$C = -\frac{A}{11+v} \frac{\eta_2(a)}{\eta_1(a)} \quad (7.23)$$

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5-4v}) \quad (7.24)$$



$$\beta_1 = 1 + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5 - 4\nu})$$

$$\gamma = 3$$

$$k = 1 - e^{-f}$$

$$h_0 = h_a e^f$$

$$\xi_0 = \frac{1}{k} \frac{3(3 + \nu)}{(1 + \nu)(5 + \nu)} \quad (7.25)$$

$$g_1 = \frac{\alpha \beta_1}{1. \gamma} k \quad (7.26)$$

$$g_2 = \frac{\alpha(\alpha + 1)\beta_1(\beta_1 + 1)}{1.2. \beta \gamma(\gamma + 1)} k^2 \quad (7.27)$$

$$\eta_1(a) = (1 + \nu)(1 + g_1 + g_2 + \dots) + g_1 + 2g_2 + \dots \quad (7.28)$$

$$\eta_2(a) = 3 + \nu - (2 + \nu)\xi_0 - (1 + \nu)\xi_1 \quad (7.29)$$

$$x = \frac{r}{a} \quad (7.30)$$

$$P(x) = 1 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots \quad (7.31)$$

$$^t \eta_1(x) = (1 + \nu)P(x) + g_1 x + 2g_2 x^2 + \dots \quad (7.32)$$



$$\eta_2(x) = (3 + \nu)x^2 - (2 + \nu)\xi_0 x - (1 + \nu)\xi_1 \quad (7.33)$$

$$\eta_3(x) = x^2 - \xi_0 x - \xi_1 \quad (7.34)$$

7.2 Doğal frekanslar

Doğal frekansların hesabında, serilerin ilk yedi terimi, yerdeğiştirme fonksiyonlarının ilk altı terimi dikkate alınmıştır. Bu bölümde incelenen volanlara ait boyutsuz doğal frekanslar Tablo 28-32' de verilmiştir. Kalınlığı üstel bir fonksiyon şeklinde değişen volan için titreşim değerleri $s_1 = 1$ ve $s_1 = 2$ hali için hesaplanmıştır. Kalınlığı doğrusal olarak değişen volan için titreşim değerleri kalınlık değişim parametresinin farklı değerlerine göre bulunmuştur.

Tablo -28 Optimum dizaynli olmayan değişken kalınlıklı diskin boyutsuz doğal frekansları

$$E_a = 55 \text{ Gpa} \quad \rho_a = 1550 \text{ kg / m}^3 \quad \nu_a = 0.31 \quad \bar{\Omega} = 5 \quad s_1 = 1$$

n	k/s	0	1	2	3	4	5
0	-0.5	11.8645	41.7233	94.0784	173.4900	285.6000	1161.5
	-0.6	12.3620	43.0891	97.6964	181.0000	298.3700	1156.5
	-0.7	12.8982	44.5969	101.6070	188.8200	313.3600	1152.0
	-0.8	13.4778	46.2533	105.8169	196.9646	330.8214	1148.1
	-0.9	14.1056	48.0651	110.3314	205.4507	351.0070	1144.9
1	-0.5	14.7146	44.9901	98.5154	179.2242	292.9078	1163.4
	-0.6	14.8503	45.9206	101.7415	186.2535	305.8077	1158.5
	-0.7	15.0167	46.9706	105.2387	193.6298	320.7583	1154.1
	-0.8	15.2198	48.1475	109.0092	201.3700	337.9700	1150.3
	-0.9	15.4664	49.4589	113.0527	209.5225	357.6398	1147.2
2	-0.5	22.5082	60.8432	123.8606	219.1827	406.0589	1181.5
	-0.6	22.6061	62.0124	127.7538	226.1443	434.8307	1180.2
	-0.7	22.7314	63.3050	131.9177	233.6851	466.7882	1180.4
	-0.8	22.8888	64.7274	136.3452	241.9275	501.9491	1182.5
	-0.9	23.0833	66.2857	141.0281	251.0015	540.2245	1187.2



Tablo-29 Optimum dizaynli olmayan değişken kalınlıklı diskin boyutsuz doğal frekansları.

$$E_a = 29 \text{ Gpa} \quad \rho_a = 1330 \text{ kg / m}^3 \quad \nu_a = 0.33 \quad \bar{\Omega} = 5 \quad s_1 = 1$$

n	k/s	0	1	2	3	4	5
0	-0.5	11.8954	41.8301	94.2149	173.6500	285.7800	1162.3
	-0.6	12.3959	43.1993	97.8371	181.1600	298.5500	1157.3
	-0.7	12.9359	44.7114	101.7114	188.9900	313.5500	1152.8
	-0.8	13.5198	46.3732	105.9707	197.1438	331.5500	1148.8
	-0.9	14.1527	48.1914	110.4941	205.6408	351.2431	1145.8
1	-0.5	14.7153	45.0792	98.6416	179.3722	293.0748	1164.1
	-0.6	14.8513	46.0102	101.8691	186.4045	305.9798	1159.2
	-0.7	15.0180	47.0613	105.3690	193.7900	320.9400	1154.8
	-0.8	15.2215	48.2397	109.1431	201.5300	338.1600	1151.0
	-0.9	15.4688	49.5330	113.1912	209.6905	357.8509	1147.9
2	-0.5	22.4397	60.8849	123.9488	219.2940	406.1850	1182.1
	-0.6	22.5347	62.0507	127.8381	226.2533	434.9524	1180.8
	-0.7	22.6566	63.3394	131.9981	233.7923	466.9071	1181.0
	-0.8	22.8097	64.7570	136.4216	242.0328	502.0665	1183.1
	-0.9	22.9990	66.3097	141.1002	251.1049	540.3423	1187.8

Tablo -30 Optimum dizaynli olmayan değişken kalınlıklı diskin boyutsuz doğal frekansları.

$$E_a = 55 \text{ Gpa} \quad \rho_a = 1550 \text{ kg / m}^3 \quad \nu_a = 0.31 \quad \bar{\Omega} = 5 \quad s_1 = 2$$

n	k/s	0	1	2	3	4	5
0	-0.5	12.1086	43.3950	99.9398	184.5555	302.6333	1159.8
	-0.6	12.7091	45.3894	105.3074	195.2188	320.1042	1155.3
	-0.7	13.3797	47.6523	111.1850	206.6474	340.2651	1151.6
	-0.8	14.1327	50.2012	117.5878	218.9085	363.3763	1149.1
	-0.9	14.9824	53.0531	124.5306	232.1065	389.6731	1147.8
1	-0.5	14.7401	46.8925	105.0930	191.6136	311.6993	1161.2
	-0.6	14.8925	48.4947	110.2625	202.2092	330.1411	1156.8
	-0.7	15.0784	50.3355	115.9274	213.6200	353.4000	1153.4
	-0.8	15.3128	52.4307	122.0949	225.9400	375.5300	1151.2
	-0.9	15.6044	54.7959	128.7717	239.2700	402.9400	1150.3
2	-0.5	22.7781	64.1202	132.9200	234.2200	427.7200	1180.8
	-0.6	22.9888	66.3432	139.4200	245.7400	462.7100	1180.9
	-0.7	23.2581	68.8445	146.4700	258.5000	501.5100	1183.2
	-0.8	23.5976	71.6381	154.0861	272.6976	544.0839	1188.5
	-0.9	24.0207	74.7375	162.2700	288.5300	590.1800	1197.9



Tablo-31 Optimum dizaynli olmayan değişken kalınlıklı diskın boyutsuz doğal frekansları.

$$E_a = 29 \text{ Gpa} \quad \rho_a = 1330 \text{ kg / m}^3 \quad \nu_a = 0.33 \quad \bar{\Omega} = 5 \quad s_1 = 2$$

n	k\s	0	1	2	3	4	5
0	-0.5	12.1338	43.4738	100.0100	184.5900	302.6000	1159.7
	-0.6	12.7376	45.4704	105.2800	195.2400	320.0600	1155.1
	-0.7	13.4124	47.7363	111.2500	206.6700	340.2100	1151.4
	-0.8	14.1708	50.2889	117.6600	218.9300	363.3100	1148.8
	-0.9	15.0270	53.1453	124.6028	232.1204	389.5999	1147.4
1	-0.5	14.7406	46.9872	105.2204	191.7560	311.8533	1161.9
	-0.6	14.8912	48.5925	110.3934	202.3550	330.2960	1157.5
	-0.7	15.0793	50.4373	116.0600	213.7700	351.5000	1154.1
	-0.8	15.3140	52.5374	122.2384	226.1000	375.7000	1151.8
	-0.9	15.6060	54.9084	128.9239	239.4400	403.1200	1151.0
2	-0.5	22.7027	64.1717	133.0200	234.3400	427.8600	1181.4
	-0.6	22.9077	66.3952	139.5200	245.8600	462.8500	1181.4
	-0.7	23.1699	68.8970	146.5800	258.6300	501.6600	1183.8
	-0.8	23.5006	71.6910	154.1951	272.8223	544.2473	1189.1
	-0.9	23.9129	74.7904	162.3900	288.6800	590.3600	1198.4

Tablo- 32 Optimum dizaynli olmayan, merkezinden rijit bağlı, kalınlığı doğrusal olarak değişen, izotrop dönen disk.

$$\nu = 0.33 \quad \bar{\Omega} = 5$$

n	f\s	0	1	2	3	4	5
0	0.5	11.9598	42.2757	95.6901	176.3400	289.9000	1162.1
	0.6	12.4825	43.8577	100.0600	185.2400	304.7000	1157.4
	0.7	13.0494	45.6536	104.9500	194.8900	322.1900	1153.5
	0.8	13.6707	47.6995	110.4011	205.4000	342.6600	1150.6
	0.9	14.3596	50.0364	116.4781	216.8915	366.3711	1149.1
1	0.5	14.7533	45.6040	100.3055	182.4078	297.6301	1164.0
	0.6	14.7781	46.7781	104.3702	191.0028	312.8567	1159.4
	0.7	15.0236	48.1461	108.9436	200.4100	330.7400	1155.7
	0.8	15.1970	49.7446	114.0757	210.7500	351.5600	1153.1
	0.9	15.4116	51.6151	119.8206	222.1700	375.5600	1151.8
2	0.5	22.5536	61.7574	126.2199	223.0363	411.0828	1182.3
	0.6	22.6664	63.3484	131.2562	231.9891	442.2451	1181.5
	0.7	22.8019	65.1882	136.8836	242.1222	477.1602	1182.7
	0.8	22.9736	67.3195	143.1566	253.6614	515.8768	1186.5
	0.9	23.1990	69.7902	150.1379	266.8432	558.3162	1193.8



BÖLÜM 8

SONUÇLAR

Bölüm 3’de incelenen sabit gerilmeli volanın dış kısmı sabit kesitli olup, malzemesi iç kısma göre daha büyük elastiklik modülüne sahiptir. Dış kısmın malzemesi değiştirilmeden iç kısmın malzemesi dış kısmın malzemesine göre daha yumuşak olması kaydıyla, değiştirilerek frekans araştırılması yapıldığında, malzemenin sertleştirilmesiyle doğal frekanslarda artış olmaktadır. $\ln(h_0/h_a)$ oranının artmasıyla veya a/b oranının artmasıyla tüm modlarda önemli ölçüde artışlar olmaktadır. Bunun yanında boyutsuz açısal hızın artmasıyla frekanslarda, nodal çapların yükselen değerlerinde artış görülmektedir.

Sabit gerilmeli diskin birim kütle başına kinetik enerjisi, $\ln h_0/h_a$ nın artmasıyla, şekil faktörüyle (K) beraber yükseliş göstermektedir. İç kısmın malzemesinin giderek daha yüksek elastiklik modülüne sahip bir malzemeden seçilmesi durumunda şekil faktörünün azalmasına karşılık enerji miktarında artış olmaktadır. İç kısımda dış kısım ile aynı yoğunlukta fakat dış kısma göre daha düşük elastiklik modülüne sahip malzeme kullanıldığında ve a/b oranının artmasıyla da enerjide artış görülmektedir.

Bölüm 3’ün ikinci kısmında Al-Mn (% 10 Mn) alaşımından sabit gerilmeli volan ile merkezinde % 10 Mn olan ve Mn içeriği eş gerilme şartını sağlayacak şekilde giderek azalan eş gerilmeli değişken malzemeden volan incelenmiştir. İncelenen her iki volan aynı yarıçapa ve açısal hızı sahiptir. Analitik davranışa bakıldığında, optimum özellikteki değişken malzemeden eş gerilmeli volanın, Al-Mn alaşımından sabit gerilmeli volandan % 23.1 daha fazla birim kütle başına ataletle sahip olduğu görülür. Al-Mn alaşımından sabit gerilmeli volanın boyutsuz doğal frekansları, değişken malzemeden eşgerilmeli volaninkinden daha büyük olduğu görülür. Mn içeriğinin dışa doğru azaltılması yoğunluğun da azaltılması anlamına gelir. Buna göre yoğunluğun merkezden dışa doğru azaltılması frekansları da azaltıcı yönde etkilemektedir.

Bölüm 4’de incelenen volanın sabit gerilmeli iç kısmı izotrop davranan kompozit malzemeden, dış kısmı ise değişken kesitli anizotrop malzemedendir. Dış kısmın kesit değişim parametresi



olan β' 'nın pozitif değerleri için, anizotropluk sayının artırılmasıyla, boyutsuz doğal frekanslarda azalma görülmüştür. $s = 0$ modlarına ait frekans değerlerinde β' 'nın değişen değerlerinde küçük artışlar olmakta bunun yanında daha yüksek s modlarında önemli ölçüde azalma görülmektedir.

Bölüm 5'de incelenen volanın sabit gerilmeli kısmı sabit fiber hacim oranında, dış kısmı değişken fiber hacim oranında izotrop davranan bir kompozit malzemedir. Frekanslar dış kısmın malzemesindeki fiberin iki ayrı katılığı için hesaplanmıştır. Fiber hacim oranının artırılmasıyla frekanslar artmaktadır. İn h_0/h_a oranının artırılmasıyla yine frekanslar artmaktadır. Dış kısımda daha yumuşak özellikte fiber kullanılması $s = 0$ ve $s = 5$ dışındaki tüm modlardaki frekansları azaltıcı yönde etkilemektedir.

Bölüm 6' da iç ve dış kısımdan rijit bağlı anizotrop, değişken kesitli volan ile iç kısımdan serbest dış kısımdan rijit bağlı, anizotrop, değişken kesitli volan incelenmiştir. Anizotropluk katsayısının artırılmasıyla frekanslarda bir düşüş, kalınlık değişim parametresinin pozitif değerlerinde bir artış olmaktadır.

Bölüm 7'de optimum dizaynı olmayan volanların kalınlıkları, üstel bir fonksiyon şeklinde ve doğrusal olarak dışa doğru azalacak şekilde ele alınmıştır. Üstel olarak kalınlığı değişen volanların $s_1 = 1$ ve $s_1 = 2$ hali için frekansları hesaplanmıştır. s_1 parametresinin artmasıyla frekanslar bir artış göstermektedir. Bunun yanında genel olarak tüm modlarda k 'nın mutlak değerce artan değerlerinde frekanslar büyüme göstermektedir. Bu büyüme s modunun düşük değerlerinde daha az, yüksek değerlerinde daha belirgin farklar göstermektedir.

Kalınlığı doğrusal olarak değişen volanda da kalınlık değişim parametresinin (f) artan değerlerinde $s = 5$ modu dışındaki frekanslar da artış göstermektedir. Frekanslardaki artış yine s' in yüksek değerlerinde daha belirgin bir şekilde kendini göstermektedir.

Yapılan hesaplamalarda kullanılan gerilme ifadeleri, hareket denklemlerinin seri çözümü yapılarak elde edilmiştir. Tüm volanlarda $a/b = 1$ alınarak sonuçlar elde edilmiştir. Yani sabit gerilmeli volandaki sabit kalınlıklı kısım bu volanlarda bulunmamaktadır. Volanlar arasında bir



karşılaştırma yapmak amacıyla , volanların yarıçapları, iç ve dış kısmındaki kalınlıkları ile dönme hızları aynı alınmıştır. Hacim bakımından bir sıralama yapıldığında en fazla hacime $s_1 = 2$ halindeki volan, en düşük hacime de $s_1 = 1$ halindeki volan sahiptir. Dolayısıyla frekans değerlerine bakıldığında bu volanlar içerisinde $s_1 = 2$ halindeki volan en büyük değerlere $s_1 = 1$ halindeki volan en küçük değerlere sahiptir. Doğrusal olarak kalınlığı değişen volanın frekans değerleri de bu volanların sahip olduğu frekans değerlerinin arasında kalan büyüklüklere sahiptir.

Kalınlığı üstel olarak değişen volanlar içerisinde $s_1 = 2$ halindeki volanın kalınlık değişimi, sabit gerilmeli volanın eş gerilme bölgesindeki kalınlık değişimi ile aynı olmaktadır. $s_1 = 2$ halindeki frekanslar, sabit gerilmeli volanın frekansları ile karşılaştırıldığında $s = 5$ modu hariç $s_1 = 2$ halindeki değerler daha büyük olmaktadır. Frekanslar arasındaki fark yine s' in yüksek değerlerinde daha da büyümektedir.

Sabit gerilmeli volanların frekansları ile değişken kalınlıklı volanların frekansları birbiriyle karşılaştırıldığında , optimum dizaynı olmayan değişken kalınlıklı volanların genel olarak frekanslarının daha yüksek olduğu söylenebilir.



KAYNAKLAR

- 1- Biggs, F., "Flywheel Energy Systems, " Sandia Laboratories, Albuquerque, NM, Report No: SAND 74-0113, Contract AT(29-1)-789, Nov. 1974, 46 pp.
- 2- Robenhorst, Davit W., "Potential Application for Superflywheels, " 6th Intersociety Energy Conversion Engineering Conf., Boston, Mass., Paper No: 719148, Aug 3-5, 1971, Proc. pp.118-125, Soc. Auto Eng, Newyork
- 3- Erdman, A.C., and Hagen, D.L., "Flywheels for Energy Storage : A preview with Bibliography" ASME paper No: 76-DET-96, 1976.
- 4- Robert, C. Clark, " The Utilization of Flywheel Energy " Trans. SAE, Vol.72, 1964, pp.508-543
- 5- Carrier G.F. Trans. ASME Vol.65, (1943) A-117
- 6- Sen Gupta, A.M., Bull "Calcutta Math. Soc. Vol.41, 1949, pp129
- 7- Metwalli, S.M., " Optimum Design of Uniformly Rotating Disks," Bulletin of the Faculty of Engineering, Cairo Univ., 1975-1976 Paper 12
- 8- Metwalli, S.M., " Optimum Design of Disk Type Flywheels" Bulletin of the Faculty of Engineering, Cairo Univ., 1975-1976 Paper 13
- 9- Gerstle, F.P., Jr., and Biggs, F., " On Optimum Shapes for Anisotropic Rotating Disks," Proc. of the 12th Annual Meeting Soc. Eng. Sci., University of Texas, Austin, Texas, Oct. 20-22, 1975
- 10- De Silva, B.M.E., "Application of Pontryagin's Principle to a Minimum Weight Design Problem," ASME Journal of Basic Engineering, 1970, pp. 245-250.



- 11- Robenhorst, D.W., "Low Cost Flywheel Demonstration," Presented at the 1st Annual Energy Storage Contractor Conference at Lurary, Va., October 24-26, 1978, Published by Lawrence Livermore Lab.
- 12- Danfeld, E.L., Hewes, S.A. Chou, T., "Optimization of Composite Flywheel Design," Flywheel Int. J. Mech. Sci., Vol.19.No.2, Feb.1977. pp 69-78
- 13- Faheny, A.A., and West, H., "Application of Fibre-Reinforced Composites to the Design Flywheels, First Cairo Univ. Conf. On Mechanical Design and Production, Cairo, Dec. 26-29 1979, Paper No: MDP. N11, and in G.S.A Shauki, Cairo, Dec. 26-29, 1979, Paper No. MDP. N11, and in G.S.A. Shauki and S.M. Metwalli, eds., Current Advances in Mechanical Design and Production, Pergamen Press, 1981, Pp. 49-57
- 14- Robenhorst, M.G.W., "Polymer Engineering Composites," Hopkins Univ. Applied Physics Lab., Report No: API/JHU-TG-1240 for Office of Naval Research August 1974, Arlington, NTIS, No. AD/A-001-081
- 15- Ikegami, K., J. Iganashi and E. Shiratori. "Composite Flywheels with Rim and Hup1," Int.J.Mech. Sci. 25(1):59-69 1983
- 16- Metwalli, S.M., G.S.A. Shawki and M.H.Sharobeam "Optimum Design of Variable Material Flywheels," J.Mech. Trans.and Autom. in Design 105(2) : 249-253, June 1983.
- 17- Christensen, R.M. and Wu, E.M., "Optimal Dizayn of Anistropic (Fiber-Reinforced) Flywheels", J.Composite Materials, Vol.11(Oct. 1977), p.395-404
- 18- Georgian J.C. "Optimum Dizayn of Variable Composite Flywheel", Journal of Composite Materials Vol.23.January 1989
- 19- Çampbell, W., "Protection of Steam Turbine Disk Wheels From Axial Vibration, TRANS ASME, Vol. 46,1924, pp.31-160



- 20- Mote, C.D., Jr., "Free Vibration of Initially Stressed Circular Disks" ASME Journal of Engineering for Industry, Vol.87, 1965, pp.258-264
- 21- Eversman, V., and Dodson, R.O., Jr., "Free Vibration of a Centrally Clamped Spinning Circular Disk", AIAA Journal, Vol.7 No 10, 1969, pp. 2010-2012.
- 22- Barasch, S., and Chen, Y., "On the Vibration of a Rotating Disk," ASME Journal of Applied Mechanics Vol.39, Dec.1972. pp.1143-1144.
- 23- Ghosh, N.C., "The Vibration of Rotating Anisotropic Elastic Disk" Indian Journal of Physics, Vol.45, 1971, pp.262-267.
- 24- Reddy, T.Y., and Srinath, H., "Elastic Stresses in a Rotating Anisotropic Annular Disk of Variable Thickness and Variable Density." International Journal of Mechanical Sciences, Vol .16, 1974, pp 85-89
- 25- Pandalai, K.A.V. and S.A.Patel 1965 American Inst. of Aeronautics and Astronautics Journal 3, 780-781. Natural Frequencies of Orthotropic Circular Plates
- 26- Prathap G. and Varadan T.K., " Axisymmetric Vibrations of Polar Orthotropic Circular Plates ," AIAA Journal, Vol.14, No:11, Nov.1976, pp.1639-1640
- 27- Avalos, D. and Hack, H., "Galerkin Method and Axisymmetric Vibrations of Polar-Orthotropic Circular Plates," AIAA Journal, Vol.20, No:11, Nov.1982, pp.1626-1628
- 28- Laura, P.A.A., Pardo, G.C., Louison, L.E., and Avalos, D., " Transvers Vibrations of Axisymmetric Polar Orthotropic Circular Plates Elastically Restrained Against Rotation Along the Edges," Fibre Science and Technology, Vol. 15, 1981, pp.65-1977
- 29- Rajguru, A. and Sundararajan, V., "Vibration of a Rotating Orthotropic Disk," Transactions of the ASME, Vol .49, September 1982, pp.654-656
- 30- Gürgüze M. "Analitik Metodlarla Titreşim Etüdü", 1984.



- 31- Christen,R.M., "Asymptotic Modulus Results for Composites Containing Rondonly Oriented Fibers, *Int.J.Solids Structures*, 1976, Vol.12, pp.537-444.



THE UNIVERSITY OF
TAMPA



ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi	20.07.1965	
Doğum Yeri	Bakırköy	
Lise	1979 - 1983	Trabzon Teknik lisesi
Lisans	1983 - 1987	Yıldız Üniversitesi, Kocaeli Mühendislik Fak. Makina Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	1987 - 1989	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makina Müh. Anabilim Dalı, Konstrüksiyon Programı
Doktora	1989 - 1998	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makina Müh. Anabilim Dalı, Konstrüksiyon Programı
Çalıştığı kurum	1988 - Devam ediyor	Y.T.Ü. Makine Mühendisliği Bölümü, Mekanik Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi

İş Adresi : Y.T.Ü Makine Mühendisliği Bölümü, Beşiktaş / İSTANBUL

Adayın Yayınları:

1 - GÜVEN, U., ÇELİK, A., On Tranverse Vibration of a Composite Flywheel with Optimum Design, ZAMM Z. angew, Math. Mech. 75 (1995) 11, 879-880.

2- GÜVEN, U., PARMAKSIZOĞLU, C., ÇELİK, A., On Tranverse Vibration of a Variable Composite Flywheel with Optimum Design, ZAMM Z. angew, Math. Mech. 75 (1996) 9, 537-538.

Y. T. Ü. MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
BEŞİKTAŞ / İSTANBUL

