T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GAMMA MODÜLLERİN BULANIK ALT MODÜLLERİ

FERDİ ÇELİKER

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. BAYRAM ALİ ERSOY

İSTANBUL, 2014

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GAMMA MODÜLLERİN BULANIK ALT MODÜLLERİ

Ferdi ÇELİKER tarafından hazırlanan tez çalışması ……………. tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı' nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. B. Ali ERSOY

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. B. Ali ERSOY

Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

Prof. Dr. A. Göksel AĞARGÜN

Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

Doç. Dr. Ünsal TEKİR

Marmara Üniversitesi ______________________

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY' a ve çalışmalarım sırasında beni maddi açıdan destekleyen TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı' na teşekkür ederim. Ayrıca manevi desteklerini eksik etmeyip her zaman yanımda olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Ocak, 2014

Ferdi ÇELİKER

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ v

ÖZET………… vii

ABSTRACT viii

BÖLÜM 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 2
1.3 Hipotez 2

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER 4

BÖLÜM 3

BULANIK ALT MODÜLLER 9

3.1 Bulanık Kümeler 9
3.2 Bulanık Alt Grup, Bulanık Alt Halka ve Bulanık İdealler 11
3.3 Bulanık Alt Modüller 14
3.4 Bölüm Modüllerin Bulanık Alt Modülleri, Rezidüel Bölümler ve Asal Alt Modüller 21

BÖLÜM 4

GAMMA MODÜLLER 27

BÖLÜM 5

GAMMA MODÜLLERİN BULANIK ALT MODÜLLERİNE AİT YAPILAR 30

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER 44

KAYNAKLAR 45

ÖZGEÇMİŞ 47

SİMGE LİSTESİ

$\wedge$	Minimum veya infimum
$\vee$	Maksimum veya supremum
μ	Bulanık (fuzzy) alt küme
$[0,1]^X$	X' in bulanık kuvvet kümesi
$\mu(X)$	μ ' nün görüntüsü
$\mathrm{Im}(\mu)$	μ ' nün görüntüsü
μ^*	μ ' nün destekleyicisi
$a_Y(x)$	$[0,1]-$singleton
y_a	$[0,1]-$singleton
$1_Y(x)$	Karakteristik fonksiyon
$\chi_Y(x)$	Karakteristik fonksiyon
μ_a	μ ' nün seviye alt kümesi
$f(\mu)$	μ ' nün f altındaki görüntüsü
$f^{-1}(\nu)$	ν ' nün f altındaki ters görüntüsü
$\mu\circ\nu$	μ ve ν ' nün nokta çarpımı
μ^{-1}	μ ' nün tersi
$L(G)$	G grubunun tüm bulanık alt gruplarının kümesi
μ_*	$\mu_* = \{x \in G \ : \ \mu(x) = \mu(0)\}$
$LI(R)$	R halkasının tüm bulanık ideallerinin kümesi
P_ξ	R halkasının tüm asal bulanık ideallerinin kümesi
$\sqrt{\xi}$	ξ idealinin radikali
$L(M)$	M ' nin tüm bulanık alt modüllerinin kümesi
0_M	M ' nin sıfır elemanı
M/A	Bölüm modülü
$[x]$	$x+A$ koseti
ν/μ	ν ' nün μ ' ye göre bölüm modülü
$\nu\big\|_{\nu^*}$	ν ' nün ν^* ' a kısıtlanışı
$\mu:\nu$	Rezidüel bölüm

$L(\Gamma M)$	Gamma modüllerin tüm bulanık alt modülleri
$\mu \times \sigma(x,y)$	μ ve σ nın kartezyen çarpımı
$\sim$	Zayıf homomorfik
$\simeq$	Zayıf izomorfik
$\approx$	Homomorfik
$\cong$	İzomorfik
G_μ	$G_\mu = \{g \in G : \quad \mu(g) = \mu(0)\}$

ÖZET

GAMMA MODÜLLERİN BULANIK ALT MODÜLLERİ

Ferdi ÇELİKER

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY

Bu çalışmada bulanık cebirde geçerli olan bazı teoremlerin, bulanık gamma modüller için de var olduğu gösterilmiştir. Öncelikle klasik cebir ve bulanık cebire ait temel tanım ve teoremler verilmiştir. Ardından özellikle tezimize kaynaklık edecek bulanık alt modül ve gamma modül kavramları açıklanmıştır. Hipotezlerimizi içeren son bölümde ise gamma modüllerin (normal) bulanık alt modüllerine ait yapılar incelenmiştir. Bu doğrultuda, gamma modülün (normal) bulanık alt modül olma şartı araştırılmış, gamma modülün (normal) bulanık alt modülünün görüntüsünün ve ters görüntüsünün de gamma modülün (normal) bulanık alt modülleri olduğu gösterilmiştir. Sonrasında klasik cebirdeki izomorfizma teoremlerinin, gamma modüllerinin (normal) bulanık alt modüllerinde de benzer şekilde olduğu ifade edilmiştir. Son olarak bulanık asal alt modül ile gamma modüllerin bulanık asal alt modülleri arasındaki ilişki analiz edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık alt modül, gamma modül, gamma modülün (normal) bulanık alt modülü, bulanık asal alt modül, gamma modülün bulanık asal alt modülü

ABSTRACT

FUZZY SUBMODULES OF GAMMA MODULES

Ferdi ÇELİKER

Department of Mathematics

Ph. D. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY

In this thesis, some theorems valid in fuzzy algebra are shown to be existing in fuzzy gamma modules. Initially, basic definitions and theorems related to classical algebra and fuzzy algebra are given. Afterwards, fuzzy submodule and gamma module definitions which will act as a source to our thesis are defined. In the final section, structures that belong to (normal) fuzzy submodule of gamma modules which contain our hypothesis are investigated. Moving from this point, the conditions when gamma modules belong to fuzzy submodules are studied, the image and inverse image of (normal) fuzzy submodules of gamma modules are also shown to be (normal) fuzzy submodules of gamma modules. After that, isomorphism theorems in classical algebra are pointed to be smilar in (normal) fuzzy submodules of gamma modules. Finally, the relation between fuzzy prime submodule and fuzzy prime submodules of gamma modules is analysed.

Keywords: Fuzzy submodule, gamma module, (normal) fuzzy submodule of gamma module, fuzzy prime submodule, fuzzy prime submodule of gamma module

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Boş olmayan bir X kümesinden I=[0,1] aralığına tanımlı bir μ fonksiyonunu, bulanık alt küme kavramı olarak ilk tanımlayan Zadeh [1] oldu. Bulanık Mantık' ın ilk kez 1965 yılında Zadeh tarafından ortaya konulmasından kısa bir süre sonra, bu mantığa olan gereksinim, ona karşı olan ilginin hızla artmasıyla kendiliğinden kanıtlanmıştır. Özellikle 1980' li yılların ortalarından itibaren, gerek bilimde ve gerekse teknolojide kullanılmaya başlanılması ile bu iki alanda da farklı düzeylerde inanılmaz gelişmelerin yaşanmasına neden olmuştur.

Zadeh' in öğrencisi Chang' in 1968 yılında yayınladığı "Bulanık Topolojik Uzaylar" adlı makalesinden sonra bir cebirci olan Rosenfeld [2], "Eğer Chang bunu topolojik uzaylar için yapabiliyorsa, ben de bunu cebirsel yapılar için yapabilirim" diyerek yola koyuldu ve 1971 yılında "Bulanık Gruplar" adlı makalesini yayınladı. Bu bulanık cebir alanında yayınlanan ilk eserdi. Daha sonra birçok bilim adamı tarafından cebirin hemen hemen bütün yapılarında kullanılarak geliştirilmiştir. Malik ve Mordesen [3],[4] halkalardaki bulanık ilişkileri inceledi. Bulanık alt halka kavramından sonra bir halkanın bulanık idealinin tanımlanması gerekliliği doğdu. Bulanık ideal kavramını ilk ortaya atan Liu [5],[6] oldu. Bulanık alt modül ise ilk olarak Negoita ve Ralescu [7] tarafından tanımlandı. Pan [8] ve Sidky [9] sonlu üretilen bulanık modülleri ve bulanık bölüm modüllerini ortaya koymuştur. Daha da ötesinde, Makambra ve Muralı [10], Bhambri ve Kumar [11] bulanık asal alt modülleri ve radikallerini incelemiştir.

Gamma halka kavramını ilk olarak ortaya atan Barnes [12] ve Booth [13],[14], devamında gamma halkanın ideali ve gamma halkanın asal modülleri ile ilgili çalışmalar yaptılar. Gamma halkaların radikalleri ise Coppage ve Luh [15] tarafından geliştirildi.

Γ halkaların bulanık idealleri Jun ve Lee [16] tarafından tanımlandı. Hong ve Jun [17], normalleştirilmiş bulanık ideal ve maksimal ideal tanımlarını yaptılar. Dutta ve Chanda [18] ise Γ halkaların bulanık ideallerine ait yapıların geliştirilmesine yardımcı oldu. Modüllerin çeşitli karakteristikleri ise Dauns [19] tarafından analiz edildi.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı gamma modüllerinin alt modüllerine karşılık bir bulanık gamma modülünün varlığı ve bulanık gamma modüller için bulanık cebirde geçerli olan bazı temel teoremlerin varlığını göstermektir. Bu bağlamda izomorfizma teoremlerinin gamma modülerin (normal) bulanık alt modülleri için de geçerli olduğunu ispatlamaktır. Ayrıca gamma modüllerin bulanık asal alt modüllerini tanımlayıp bulanık asal alt modüller de gördüğümüz teoremleri benzer biçimde gamma modüller için de göstermektir.

1.3 Hipotez

μ nün G ΓM modülün (normal) bulanık alt modülü olması için gerek ve yeter koşul $\forall t \in [0,1]$ için μ_t nin gamma modülün bir (normal) alt modülü olmasıdır. Ayrıca μ ve σ, G ΓM modülün iki alt modülü olmak üzere $\mu \otimes \sigma$ işlemi de, G ΓM modülün bulanık alt modülü olur. $f : G_1 \to G_2$ değişmez fonksiyonu G_1 den G_2 ΓM modüle tanımlı ve μ, G_1 in (normal) bulanık alt modülü olsun. Bu durumda $f(\mu)$, G_2 ΓM modülün (normal) bulanık alt modülü olur. Buna ek olarak $f : G_1 \to G_2$ değişmez fonksiyonu G_1 den G_2 ΓM modüle tanımlı ve μ, G_2 nin (normal) bulanık alt modülü olsun. Bu durumda $f^{-1}(\mu)$, G_1 ΓM modülün (normal) bulanık alt modülü olur. Klasik cebirdeki izomorfizma teoremlerine paralel olarak, $f : G \to G'$ gamma modüllerin bir epimorfizması ve $Çekf \subset G_\mu$ olmak üzere, μ G nin (normal) bulanık alt modülü olsun. Bu durumda $G/\mu \cong G'/f(\mu)$ olur. İkinci izomorfizma teoremi benzeri, $\mu(0) = v(0)$ olmak üzere μ ve v gamma modülün (normal) bulanık alt modülleri ise,

$G_\mu \big/ \mu \cap \nu \cong G_\mu + G_\nu \big/ \nu$ olur. Nihayetinde $\mu(0) = \nu(0)$ ve $\nu \subset \mu$ olmak üzere μ ve ν gamma modülün (normal) bulanık alt modülleri ise $\left. G/\nu \middle/ G_\mu/\nu \right. \cong G/\mu$ olur ve üçüncü izomorfizma teoremi gerçeklenir. Son olarak $M = G$ değişmeli ve birimli bir halka olmak üzere, $\mu \in [0,1]^M$ gamma halkasının bulanık asal ideali ise, $\mu \in [0,1]^M$ G ΓM modülün bulanık asal alt modülü olur.

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamızın içinde yer alan temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 2.1 G boş olmayan bir küme, $*$ da G üzerinde tanımlı bir ikili işlem olmak üzere, aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(G,*)$ cebirsel yapısına grup denir.

(G1) Her $a,b \in G$ için $a*b \in G$ dir. (kapalılık özelliği)

(G2) Her $a,b,c \in G$ için $a*(b*c)=(a*b)*c$ dir. (birleşme özelliği)

(G3) Her $a \in G$ için $a*e=a=e*a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır. (birim elemanın varlığı)

(G4) Her $a \in G$ için $a*b=e=b*a$ olacak şekilde bir $b \in G$ vardır. (ters elemanın varlığı)

Tanım 2.2 $(G,*)$ bir grup ve her $a,b \in G$ için $a*b=b*a$ (değişme özelliği) ise bu gruba değişmeli veya Abelyen grup denir.

Tanım 2.3 $(G,*)$ bir grup ve H de G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H kümesi G de tanımlanan $*$ işlemine göre bir grup oluyorsa H ye G nin bir alt grubu denir.

Tanım 2.4 Boş kümeden farklı bir R kümesinde (+) ve (.) sembolleri ile gösterilen iki işlem tanımlanmış olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(R,+,\cdot)$ iki işlemli cebirsel yapıya bir halka denir.

(R1) Her $a,b,c \in R$ için $a+(b+c)=(a+b)+c$ dir.

(R2) Her $a,b \in R$ için $a+b=b+a$ dir.

(R3) Her $a \in R$ için $a+0=a$ şartını sağlayan R nin bir 0 elemanı olmalıdır.

(R4) Her $a \in R$ için $a+(-a)=0$ şartını sağlayan bir $-a \in R$ olmalıdır.

(R5) Her $a,b,c \in R$ için $a.(b.c)=(a.b).c$ dir.

(R6) Her $a,b,c \in R$ için $a.(b+c)=(a.b)+(a.c)$ dir.

(R7) Her $a,b,c \in R$ için $(b+c).a=(b.a)+(c.a)$ dir.

Tanım 2.5 Her $a,b \in R$ için $a.b=b.a$ ise R ye değişimli halka denir.

Tanım 2.6 Her $a \in R$ için $a.e=a=e.a$ olacak şekilde bir $e \in R$ var ise e ye birim eleman, R ye de birim elemanlı halka denir.

Tanım 2.7 R bir halka ve I , R nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun.

(i) Her $a,b \in I$ ve her $r \in R$ için $a-b \in I$, $ra \in I$ ise I ya R nin bir sol ideali denir.

(ii) Her $a,b \in I$ ve her $r \in R$ için $a-b \in I$, $ar \in I$ ise I ya R nin bir sağ ideali denir.

(iii) I , R nin hem sağ hem de sol ideali ise I ya kısaca R nin bir idealidir denir.

Örnek 2.8 $(Z,+,\cdot)$ halkasında her $n \in Z$ için $I=nZ$ alt halkası bir idealdir.

Teorem 2.9 R bir halka ve I , R nin bir ideali olsun. Her $r \in R$ için $r+I=\{r+a \mid a \in I\}$ şeklindeki tüm kosetlerin kümesi R/I ile gösterilirse, $\forall r_1+I, r_2+I \in R/I$ için;

$$(r_1+I)+(r_2+I)=(r_1+r_2)+I ,$$

$$(r_1+I)(r_2+I)=r_1r_2+I$$

şeklinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre R/I bir halkadır.

Tanım 2.10 R bir halka ve I , R nin bir ideali olsun. $(R/I,+,.)$ halkasına R nin I idealine göre bölüm halkası denir.

Örnek 2.11 $R=Z$ halkasında $I=4Z$ ideali için $R/I=\{I+0, I+1, I+2, I+3\}$ bölüm halkası elde edilir.

Tanım 2.12 $(R,+,\cdot)$ ve $(R,+',\cdot')$ iki halka ve $f: R \to R'$ bir fonksiyon olsun. Her $\mathrm{a,b} \in \mathrm{R}$ için;

$$f(a+b)=f(a)+' f(b) ,$$

$f(a.b) = f(a) \cdot' f(b)$

koşulları sağlanıyorsa f ye R den R' ye bir homomorfizma denir.

R halkasından R' halkasına bir f homomorfizması

(i) f bire-bir ise bir monomorfizma,

(ii) f örten ise bir epimorfizma,

(iii) f bire-bir ve örten ise izomorfizma,

olarak adlandırılır.

R halkasından R' halkasına f bir izomorfizma ise f^{-1} de R' halkasından R halkasına bir izomorfizmadır. R halkasından R halkasına bir izomorfizmaya da otomorfizma denir.

Tanım 2.13 f, R halkasından R' halkasına bir homomorfizma olsun. $0'$, R' halkasının toplamsal birimini belirtmek üzere;

$Çekf = \{a \in R \mid f(a) = 0'\}$

kümesine f nin çekirdeği denir.

Örnek 2.14 n pozitif tamsayısı ile üretilen $\langle n \rangle = \{qn \mid q \in Z\}$ idealini ele alalım. $a \in Z$ olmak üzere, $\langle n \rangle$ nin Z kümesindeki kosetleri, $a + \langle n \rangle = \{a + qn \mid q \in Z\}$ ve $Z/\langle n \rangle$ bölüm halkası, $Z/\langle n \rangle = \{a + \langle n \rangle \mid a \in Z\}$ şeklindedir. $(Z_n, +_n)$ halkasından $(Z/\langle n \rangle, +)$ halkasına $f : Z_n \to Z/\langle n \rangle$, $f([a]) = a + \langle n \rangle$ dönüşümü bir izomorfizmadır.

$$f([a] +_n [b]) = f([a+b]) = (a+b) + \langle n \rangle = (a + \langle n \rangle) + (b + \langle n \rangle) = f([a]) + f([b])$$

$$f([a] \cdot_n [b]) = f([ab]) = (ab) + \langle n \rangle = (a + \langle n \rangle)(b + \langle n \rangle) = f([a]).f([b])$$

eşitliklerinden f nin Z_n den $Z/\langle n \rangle$ üzerine bir izomorfizma olduğu görülür.

Teorem 2.15 (1. izomorfizma teoremi) f, R halkasından R' halkasına bir izomorfizma olsun. Bu durumda $f(R)$, R' halkasının bir idealidir ve $R/Çekf \cong f(R)$ dir.

Teorem 2.16 (2. izomorfizma teoremi) I ve J bir R halkasının iki ideali olsun. $I/(I\cap J)\cong(I+J)/J$ dir.

Teorem 2.17 (3. izomorfizma teoremi) I_1 ve I_2 bir R halkasının iki ideali ve $I_1\subseteq I_2$ olsun. $(R/I_1)/(I_2/I_1)\cong(R/I_2)$ dir.

Tanım 2.18 P, R nin bir ideali ve R nin A ve B idealleri için $AB\subset P$ olduğunda $A\subset P$ veya $B\subset P$ oluyorsa P idealine asal ideal denir.

Teorem 2.19 R nin bir P idealinin asal olması için gerek ve yeter koşul $a,b\in R$ için $ab\in P\Rightarrow a\in P$ veya $b\in P$ olmasıdır.

Örnek 2.20 Z tamsayılar halkasında $P=\{3k\mid k\in Z\}$ ideali bir asal idealdir.

Tanım 2.21 R değişmeli bir halka ve Q, R nin bir ideali olsun. Her $a,b\in R$, $ab\in Q$ ve $a\notin Q$ için, $b^n\in Q$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa Q idealine bir asallanabilir ideal denir.

Tanım 2.22 R değişmeli bir halka ve I, R nin bir ideali olsun. I idealinin radikali, $\sqrt{I}=\{a\in R\mid a^n\in I, n\in Z^+\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.23 R bir halka olsun. Her $r,s\in R$ ve $m,m'\in M$ için $R\times M\to M$ dönüşümü,

(i) $r.(m+m')=r.m+r.m'$,

(ii) $r.(s.m)=(r.s).m$,

(iii) $(r+s).m=r.m+s.m$

koşullarını sağlıyorsa, $(M,+)$ değişmeli grubuna bir sol $R-$modül veya R üzerinde bir sol modüldür denir. R birimli bir halka ve her $m\in M$ için $1.m=m$ ise M grubuna birimli veya birimsel bir sol $R-$modüldür denir. Sağ $R-$modül de benzer şekilde tanımlanabilir.

Tanım 2.24 M bir $R-$modül ve N M nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. N M nin bir alt grubu ve her $r\in R$, $a\in N$ için $ra\in N$ oluyorsa N ye M nin bir alt modülü denir.

Tanım 2.25 X, M nin bir alt kümesi ve $\langle X \rangle$, M nin X tarafından üretilen alt modülü olsun. Herhangi bir $x \in M$ için $\langle x \rangle$, M nin $\{x\}$ tarafından üretilen alt modülüdür. M nin herhangi bir N alt modülü için,

$N:M = \{ r \mid r \in R,\ rM \subseteq N \}$ ve $\sqrt{N:M} = \{ r \mid r \in R,\ \exists m \in N \, \textit{öyle ki } r^m M \subseteq N \}$

eşitliklerine sahibiz.

Tanım 2.26 M bir $R-$modül ve K M nin bir alt modülü olsun. $K \neq M$ olmak üzere, $r \in R$, $m \in M$ ve $rm \in K$ olduğunda $m \in K$ veya $r \in (K:M)$ oluyorsa K alt modülüne asal alt modül denir.

BÖLÜM 3

BULANIK ALT MODÜLLER

3.1 Bulanık Kümeler

Tanım 3.1.1 X herhangi bir küme olmak üzere, $\mu: X \to [0,1]$ şeklinde tanımlanan μ fonksiyonuna X in bulanık (fuzzy) alt kümesi denir. X in bütün bulanık alt kümelerinin oluşturduğu kümeye X in bulanık kuvvet kümesi denir ve $[0,1]^X$ şeklinde gösterilir [1].

Tanım 3.1.2 $\mu \in [0,1]^X$ olmak üzere $\{\mu(x): x \in X\}$ ile tanımlanan kümeye μ nün görüntü kümesi denir ve $\mu(X)$ ya da $\mathrm{Im}(\mu)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.3 $\mu \in [0,1]^S$ olmak üzere,

$$\mu^* = \{ x: \mu(x) > 0, x \in S \} \tag{3.1}$$

kümesine μ nün destekleyicisi denir. Eğer μ^* sonlu bir küme ise μ ye sonlu bulanık alt küme, μ^* sonsuz bir küme ise μ ye de sonsuz bulanık alt küme denir. Ayrıca $1 \in \mu(X)$ ise μ ye X in birimli bulanık alt kümesi denir.

Tanım 3.1.4 $Y \subseteq X$ ve $a \in [0,1]$ olmak üzere $a_Y \in [0,1]^X$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$a_Y(x) = \begin{cases} a; & x \in Y \\ 0; & x \notin Y \end{cases} \tag{3.2}$$

Özel olarak; eğer $Y = \{y\}$ ise a_Y kümesi $a_{\{y\}}$ veya y_a şeklinde ifade edilir, $[0,1]-$nokta (point) veya $[0,1]-$singleton ile adlandırılır.

Eğer $a=1$ ise,

$$1_Y(x)=\chi_Y(x)=\begin{cases} 1 \;; & x\in Y \\ 0 \;; & x\in X\backslash \mathrm{Y} \end{cases} \tag{3.3}$$

fonksiyonuna karakteristik fonksiyon denir.

Tanım 3.1.5 $\mu,\nu\in[0,1]^X$ olmak üzere $\forall x\in X$ için $\mu(x)\le\nu(x)$ ise ν bulanık alt kümesi, μ bulanık alt kümesini kapsar denir ve $\mu\subseteq\nu$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.6 $\mu,\nu\in[0,1]^X$ olmak üzere $\mu\cap\nu$, $\mu\cup\nu\in[0,1]^X$ kümeleri şu şekilde tanımlanır: $\forall x\in X$ için,

$$(\mu\cap\nu)(x)=\mu(x)\wedge\nu(x) \tag{3.4}$$

$$(\mu\cup\nu)(x)=\mu(x)\vee\nu(x) \tag{3.5}$$

Tanım 3.1.7 $\mu\in[0,1]^X$ olmak üzere $a\in[0,1]$ için,

$$\mu_a=\{\, x:\; x\in X,\; \mu(x)\ge a \,\} \tag{3.6}$$

kümesine μ nün seviye alt kümesi denir.

Teorem 3.1.8 $\mu,\nu\in[0,1]^X$ olmak üzere, aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) $\mu\subseteq\nu,\; a\in[0,1]\Rightarrow\mu_a\subseteq\nu_a$

ii) $a\le b\;,\; a,b\in[0,1]\Rightarrow\mu_b\subseteq\mu_a$

iii) $\mu=\nu\Leftrightarrow\mu_a=\nu_a\;,\;\forall a\in[0,1]$

Tanım 3.1.9 X , Y herhangi iki küme ve $\mu\in[0,1]^X$, $\nu\in[0,1]^Y$ ayrıca $f:\,X\to Y$ bir dönüşüm olsun. $f(\mu)\in[0,1]^Y$ ve $f^{-1}(\nu)\in[0,1]^X$ bulanık alt kümeler olmak üzere $\forall y\in Y$ için,

$$f(\mu)(y)=\begin{cases} \vee\,\{\,\mu(x):\; x\in X\,,\; f(x)=y\,\}\;; & f^{-1}(y)\ne\varnothing \\ 0 & ;\quad f^{-1}(y)=\varnothing \end{cases} \tag{3.7}$$

$\forall x \in X$ için,

$$f^{-1}(\nu)(x) = \nu[f(x)] \tag{3.8}$$

şeklindeki fonksiyonlara sırasıyla f nin μ altındaki görüntüsü ve f nin ν altındaki ters görüntüsü denir [3].

3.2 Bulanık Alt Grup, Bulanık Alt Halka ve Bulanık İdealler

Bu bölümde G daima birimi e olan ve çarpımsal ikili işleme sahip keyfi bir grubu, R ise değişmeli bir halkayı temsil edecek. Grup ve halkanın bulanık alt kümelerinde bazı işlemler tanımlayıp ardından sırasıyla bulanık alt grup, bulanık alt halka ve bulanık ideal tanımlarını vereceğiz. Daha sonra ise bulanık asal ideal, bulanık idealin radikali ve bulanık asallanabilir ideal kavramları verilecek.

Tanım 3.2.1 G bir grup ve $\forall\ \mu, \nu \in [0,1]^G$ bulanık kümeleri olmak üzere, $\forall x \in G$ için

$$(\mu \circ \nu)(x) = \vee\{\mu(y) \wedge \nu(z)\ :\ y, z \in G,\ yz = x\}, \tag{3.9}$$

$$\mu^{-1}(x) = \mu(x^{-1}). \tag{3.10}$$

$\mu \circ \nu$ işlemine μ ve ν nün nokta çarpımı, μ^{-1} ifadesine μ bulanık alt kümesinin tersi denir.

Tanım 3.2.2 G bir grup ve $\mu \in [0,1]^G$ olsun. Eğer μ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa μ ye G nin bulanık (fuzzy) alt grubu denir [2].

(G1) $\forall x, y \in G$ için, $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$,

(G2) $\forall x \in G$ için, $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$

G nin tüm bulanık alt gruplarının kümesini $L(G)$ ile gösterelim.

Tanım 3.2.3 $\mu \in L(G)$ olmak üzere,

$$\mu_* = \{x \in G\ :\ \mu(x) = \mu(e)\} \tag{3.11}$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca $n \in N$ olmak üzere $\forall x \in G$ için (G1) koşulundan $\mu(x^n) \geq \mu(x)$ elde edilir.

Teorem 3.2.4 $\mu \in L(G)$ olmak üzere, $\forall x \in G$ için;

(1) $\mu(e) \geq \mu(x)$

(2) $\mu(x) = \mu(x^{-1})$

olur.

Teorem 3.2.5 H bir grup ve $v \in L(H)$ olsun. $f: G \to H$ dönüşümü bir homomorfizma ise $f^{-1}(v) \in L(G)$ olur.

R değişmeli halkasının bulanık alt kümelerinde bazı işlemler tanımlayalım.

Tanım 3.2.6 R bir halka, μ ve ν R halkasının bulanık alt kümeleri olsun. $\mu+\nu$, $-\mu$, $\mu-\nu$, $\mu \circ \nu$ bulanık alt kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır. $\forall x \in R$ için,

$$(\mu+\nu)(x) = \vee\left\{\mu(y) \wedge \nu(z) \middle| y, z \in R, y+z = x\right\}, \tag{3.12}$$

$$(-\mu)(x) = \mu(-x), \tag{3.13}$$

$$(\mu-\nu)(x) = \vee\left\{\mu(y) \wedge \nu(z) \middle| y, z \in R, y-z = x\right\}, \tag{3.14}$$

$$(\mu \circ \nu)(x) = \vee\left\{\mu(y) \wedge \nu(z) \middle| y, z \in R, yz = x\right\}. \tag{3.15}$$

$\mu+\nu$, $\mu-\nu$ ve $\mu \circ \nu$ sırasıyla μ ve ν nün toplamı, farkı ve nokta çarpımı olarak adlandırılır. $-\mu$, μ nün negatifi olarak tanımlanır. Tanımdan $\mu+\nu = \nu+\mu$ ve $\mu-\nu = \mu+(-\nu)$ olur. R halkası değişmeli olduğundan $\forall \mu, \nu \in [0,1]^R$ için $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$ dür.

Tanım 3.2.7 $\mu, \nu \in [0,1]^R$ olsun. $\forall x \in R$ için $\mu\nu \in [0,1]^R$,

$$(\mu\nu)(x) = \vee\{\bigwedge_{i=1}^{n}(\mu(y_i) \wedge \nu(z_i)) \mid y_i, z_i \in R, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N} \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = x\}$$

(3.16)

şeklinde tanımlanır. R değişmeli olduğundan $\forall \mu, \nu \in [0,1]^R$ için $\mu\nu = \nu\mu$ olur.

Tanım 3.2.8 R bir halka ve μ, R halkasının bulanık alt kümesi olsun. Bu durumda eğer,

(R1) $\mu(x-y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)\ \forall x, y \in R$

(R2) $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)\ \forall x, y \in R$

şartları sağlanırsa μ ye R halkasının bulanık alt halkası denir.

R nin tüm bulanık alt halkalarının kümesini $L(R)$ ile gösterelim.

Tanım 3.2.9 μ, (R1) şartını sağlasın. Eğer μ,

(R3) $\mu(xy) \geq \mu(x) \vee \mu(y)\ \forall x, y \in R$

şartını da sağlıyorsa R halkasının bulanık ideali olarak adlandırılır [5]. R nin tüm bulanık ideallerinin kümesini $LI(R)$ ile göstereceğiz. R bir halka, μ, R nin bulanık ideali ise, bu durumda,

$$\mu_* = \{x \in R \mid \mu(x) = \mu(0)\} \tag{3.17}$$

şeklinde alabiliriz.

$\mu \in [0,1]^R$ olsun. R halkası değişmeli olduğundan μ nün (R3) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul,

$$\mu(xy) \geq \mu(x)\ \forall x, y \in R \tag{3.18}$$

olmasıdır.

Teorem 3.2.10 $\mu, \nu \in LI(R)$ olsun. Bu durumda;

(1) $\mu(0) \geq \mu(x)\ \ \forall x \in R$

(2) R halkası birimli ise, $\mu(1) \leq \mu(x)\ \ \forall x \in R$

(3) $x, y \in R$ olsun. $\mu(x-y) = \mu(0)$ ise $\mu(x) = \mu(y)$ olur.

(4) μ_* R nin bir idealidir.

(5) μ^* R nin bir idealidir.

(6) $\mu_* \cap \nu_* \subseteq (\mu \cap \nu)_*$

Tanım 3.2.11 $\xi, \mu, \nu \in LI(R)$ olsun. ξ sabit olmamak üzere, $\mu \circ \nu \subseteq \xi$ iken $\mu \subseteq \xi$ veya $\nu \subseteq \xi$ oluyorsa ξ idealine R nin bulanık asal ideali denir.

Teorem 3.2.12 $\xi, \mu, \nu \in LI(R)$ olsun. ξ sabit olmamak üzere, ξ idealinin R nin bulanık asal ideali olması için gerek ve yeter koşul $\mu\nu \subseteq \xi$ iken $\mu \subseteq \xi$ veya $\nu \subseteq \xi$ olmasıdır.

Tanım 3.2.13 $c \in [0,1]$ ve $1 \neq c$ olsun. $\forall a, b \in [0,1]$ için $a \wedge b \leq c$ iken $a \leq c$ veya $b \leq c$ oluyorsa c elemanına $[0,1]$ in bir asal elemanıdır denir.

$\xi \in LI(R)$, $\xi \subseteq \mu$ ve $\xi_* \subseteq \mu_*$ olacak şekilde R nin tüm bulanık asal μ ideallerinin kümesini P_ξ ile göstereceğiz.

Tanım 3.2.14 $\xi \in LI(R)$ olmak üzere,

$$\sqrt{\xi} = \begin{cases} \cap \left\{ \mu : \ \mu \in P_\xi \right\}; & P_\xi \neq \varnothing \\ 1_R & ; \ P_\xi = \varnothing \end{cases} \tag{3.19}$$

şeklinde tanımlanan $\sqrt{\xi}$ ifadesine bulanık ξ idealinin radikali denir.

Teorem 3.2.15 ξ, R nin sabit bir bulanık ideali olsun. Bu durumda $\sqrt{\xi} = 1_R$ olur.

Tanım 3.2.16 $\xi, \mu, \nu \in LI(R)$ olsun. ξ sabit olmamak üzere, $\mu \circ \nu \subseteq \xi$ iken $\mu \subseteq \xi$ veya $\nu \subseteq \sqrt{\xi}$ oluyorsa ξ idealine R nin bulanık asallanabilir ideali denir.

3.3 Bulanık Alt Modüller

Bu bölümde ilk olarak bir modülün bulanık alt kümelerinde toplama ve skalerle çarpma ile ilgili birkaç işlemi ele alacağız, ardından bulanık alt modül tanımını vereceğiz. Bu bölümde aksi belirtilmedikçe R birimi 1 olan değişmeli bir halka, M bir R modül ve 0_M, M nin sıfır elemanı olarak alınacaktır. I kümesi de boş kümeden farklı bir indeks kümesi olsun.

Tanım 3.3.1 $\mu, \nu \in [0,1]^M$ olsun. $\mu + \nu$, $-\mu \in [0,1]^M$ bulanık alt kümelerini $\forall x \in M$ için,

$(\mu + \nu)(x) = \vee \left\{ \ \mu(y) \wedge \nu(z) \ \middle| \ y, z \in M, \ y + z = x \right\}$,

$\left(-\mu\right)(x)=\mu(-x)$.

şeklinde tanımlamıştık.

$\mu+\nu$, μ ve ν nin toplamı, $-\mu$ de μ nün negatifi olarak adlandırıldı.

$\mu_i \in [0,1]^M$, $1 \le i \le n$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. "+" işleminde birleşme ve değişme özelliği olduğundan, $\mu_1+\mu_2+...+\mu_n$ toplamını düşünebiliriz ve bu toplamı $\sum_{i=1}^{n}\mu_i$ olarak yazarız.

$|\, I \,| > 1$ olmak üzere, her $i \in I$ için $\mu_i \in [0,1]^M$ olsun. O zaman $\sum_{i\in I}\mu_i \in [0,1]^M$ toplamı her $x \in M$ için,

$$\left(\sum_{i\in I}\mu_i\right)(x)=\vee\left\{\wedge_{i\in I}\,\mu_i(x_i)\;\middle|\; x_i \in M,\, i\in I\;,\quad \sum x_i = x\right\} \tag{3.20}$$

şeklinde tanımlansın öyle ki $\sum x_i = \sum_{i\in I} x_i$ ve en fazla sonlu tane x_i, 0_M e eşit olmasın. $\sum_{i\in I}\mu_i$, μ_i lerin zayıf toplamı olarak adlandırılır.

Açıktır ki, $I=\{\,1,2,...,n\,\}$ ve $n \ge 2$ için $\sum_{i\in I}\mu_i = \sum_{i=1}^{n}\mu_i$ dir.

Tanım 3.3.2 $r \in R$ ve $\mu \in [0,1]^M$ olsun. $r\mu \in [0,1]^M$ şu şekilde tanımlansın. $\forall\, x \in M$ için,

$$\left(r\mu\right)(x)=\vee\left\{\,\mu(y)\;\middle|\; y \in M\,,\, ry=x\,\right\}. \tag{3.21}$$

$r\mu$, r ile μ nün çarpımı olarak adlandırılır.

Teorem 3.3.3 $r, s \in R$ ve $\mu,\nu,\xi,\mu_i \in [0,1]^M$, $i \in I$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(1) $1\mu=\mu$, $(-1)\mu=-\mu$

(2) $r1_{\{0_M\}}=1_{\{0_M\}}$

(3) $\mu\subseteq\nu \Rightarrow r\mu\subseteq r\nu$

(4) $r\left(s\mu\right)=\left(rs\right)\mu$

(5) $r\left(\mu+\nu\right)=r\mu+r\nu$

(6) $r\left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right)=\bigcup_{i\in I}r\mu_i$

(7) $\left(r\mu\right)\left(rx\right)\geq\mu(x)\ \forall x\in M$

(8) $\xi\left(rx\right)\geq\mu(x)\ \forall x\in M\Leftrightarrow r\mu\subseteq\xi$

(9) $\left(r\mu+s\nu\right)\left(rx+sy\right)\geq\mu(x)\wedge\nu(y)\ \forall x,y\in M$

(10) $\xi\left(rx+sy\right)\geq\mu(x)\wedge\nu(y)\ \forall x,y\in M\Leftrightarrow r\mu+s\nu\subseteq\xi$

İspat (1) den (6) ya kadar aşikârdır.

(7) $\left(r\mu\right)\left(rx\right)=\vee\left\{\ \mu(y)\middle|\ y\in M\ ,\ ry=rx\ \right\}\geq\mu(x)\ \forall x\in M$

(8) Eğer $\xi\left(rx\right)\geq\mu(x)\ \forall x\in M$ ise,

$\left(r\mu\right)(x)=\vee\left\{\ \mu(y)\ \middle|\ y\in M\ ,\ ry=x\right\}\leq\vee\left\{\ \xi\left(ry\right)\middle|\ y\in M, ry=x\right\}=\xi(x)\ \forall x\in M$,

$r\mu\subseteq\xi$ dir.

Eğer $r\mu\subseteq\xi$ ise, (7) den $\xi\left(rx\right)\geq r\mu\left(rx\right)\geq\mu(x)\ \ \forall x\in M$ olur.

(9) (7) ve '+' işleminin tanımından,

$\left(r\mu+s\nu\right)\left(rx+sy\right)\geq\left(r\mu\right)\left(rx\right)\wedge\left(s\nu\right)\left(sy\right)\geq\mu(x)\wedge\nu(y)\ \ \forall x,y\in M$ olur.

(10) Farz edelim ki, $\xi\left(rx+sy\right)\geq\mu(x)\wedge\nu(y)\ \forall x,y\in M$ olsun. O zaman $\forall z\in M$ için,

$$
\begin{aligned}
\left(r\mu+s\nu\right)(z)&=\vee\left\{\ \left(r\mu\right)(u)\wedge\left(s\nu\right)(v)\middle|u,v\in M,\ u+v=z\right\}\\
&=\vee\left\{\left(\vee\left\{\ \mu(x)\ \middle|\ x\in M,\ rx=u\right\}\right)\wedge\left(\vee\left\{\ \nu(y)\middle|y\in M,\ sy=v\right\}\right)\middle|u,v\in M,u+v=z\ \right\}\\
&=\vee\left\{\ \mu(x)\wedge\nu(y)\ \middle|\ x,y\in M,\ rx+sy=z\ \right\}\\
&\leq\xi(z)
\end{aligned}
$$

olur. Buradan $r\mu+s\nu\subseteq\xi$ elde edilir.

Tersine $r\mu+s\nu\subseteq\xi$ olduğunu varsayalım. O zaman $\forall x,y\in M$ için,

$$\xi(rx+sy) \geq (r\mu+s\nu)(rx+sy)$$

$$\geq (r\mu)(rx) \wedge (s\nu)(sy)$$

$$\geq \mu(x) \wedge \nu(y) \quad \text{((7)'den)}$$

olur.

Teorem 3.3.4 $r,s \in R$ ve $\mu \in [0,1]^M$ olsun. Bu durumda,

(1) $r\mu \subseteq \mu \Leftrightarrow \mu(rx) \geq \mu(x) \ \ \forall x \in M$,

(2) $r\mu + s\mu \subseteq \mu \Leftrightarrow \mu(rx+sy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \ \ \forall x, y \in M$.

İspat Bir önceki teoremin (8), (9) ve (10). maddelerinden elde edilir.

Teorem 3.3.5 Varsayalım ki, N bir $R-$modül ve f , $f: M \to N$ şeklinde tanımlı bir homomorfizma olsun. $r,s \in R$ ve $\mu,\nu \in [0,1]^M$ için,

(1) $f(\mu+\nu) = f(\mu) + f(\nu)$,

(2) $f(r\mu) = r\, f(\mu)$,

(3) $f(r\mu+s\nu) = r\, f(\mu) + s\, f(\nu)$.

İspat (1) Kolaylıkla gösterilebilir.

(2) $\forall\ y \in N$ için,

$$f(r\mu)(y) = \vee\left\{ (r\mu)(x) \mid x \in M,\ f(x) = y \right\}$$

$$= \vee\left\{ \vee\left\{ \mu(u) \mid u \in M,\ ru = x \right\} \mid x \in M,\ f(x) = y \right\}$$

$$= \vee\left\{ \mu(u) \mid u \in M,\ f(ru) = y \right\}$$

$$= \vee\left\{ \mu(u) \mid u \in M,\ r(f(u)) = y \right\}$$

$$= r\, f(\mu)(y).$$

Buradan da $f(r\mu) = r\, f(\mu)$ elde edilir.

(3) Bu ifade (1) ve (2) nin sonucu olarak hemen çıkar.

Tanım 3.3.6 $\zeta \in [0,1]^R$ ve $\mu \in [0,1]^M$ olsun. $\zeta \cdot \mu$, $\zeta \odot \mu \in [0,1]^M$ işlemlerini $\forall\ x \in M$ için aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$(\zeta \cdot \mu)(x) = \vee \left\{ \zeta(r) \wedge \mu(y) \mid r \in R,\ y \in M,\ ry = x \right\}, \tag{3.22}$$

$$(\zeta \odot \mu)(x) = \vee \left\{ \wedge_{i=1}^{n} \left(\zeta(r_i) \wedge \mu(x_i) \right) \,\middle|\, r_i \in R,\ x_i \in M,\ 1 \le i \le n, n \in \mathbb{N} \sum\nolimits_{i=1}^{n} r_i x_i = x \right\}. \tag{3.23}$$

Teorem 3.3.7 $\mu \in [0,1]^M$ olsun. O zaman

(1) Tüm $r \in R$ için, $1_{\{r\}} \cdot \mu = r\mu$,

(2) Tüm $r \in R$ ve $x \in M$ için,

$$\left(1_{\{r\}} \odot \mu\right)(x) = \vee \left\{ \wedge_{i=1}^{n} \mu(x_i) \,\middle|\, x_i \in M,\ 1 \le i \le n,\ n \in \mathbb{N}\ r \sum_{i=1}^{n} x_i = x \right\}.$$

Tanım 3.3.8 $\mu \in [0,1]^M$ için;

(M1) $\mu(0_M) = 1$,

(M2) $\mu(rx) \ge \mu(x)\ \forall r \in R$ ve $x \in M$,

(M3) $\mu(x+y) \ge \mu(x) \wedge \mu(y)\quad \forall\ x, y \in M$

koşullarını sağlayan μ ye M nin bir bulanık alt modülü denir [7].

M nin tüm bulanık alt modüllerinin kümesini $L(M)$ ile göstereceğiz.

R kendi üzerinde bir modül olduğundan, bir önceki tanımdan μ nün R modülünün bir bulanık alt modülü olması için gerek ve yeter koşul μ nün R halkasının bir bulanık ideali olmasıdır.

$\forall\ x \in M$ için $-1x = -x$ olduğundan (M2) koşulu $\forall\ x \in M$ için $\mu(-x) \ge \mu(x)$ i sağlar. Buradan da $\mu \in L(M)$ olması için gerek ve yeter koşul μ nün M toplamsal grubunun bir bulanık alt grubu ve (M2) şartını sağlamasıdır.

Teorem 3.3.9 $\mu \in [0,1]^M$ olsun. O zaman $\mu \in L(M)$ olması için gerek ve yeter koşul μ nün (M1) ve aşağıdaki şartı sağlamasıdır:

(M4) $\mu(rx+sy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \;\; \forall \; r,s \in R \;\; ve \;\; x,y \in M$.

İspat Farzedelim $\mu \in L(M)$ olsun. Tanımdan dolayı μ (M1) koşulunu sağlar. μ aynı zamanda (M2) ve (M3) şartlarını da sağlar. Buradan da $\forall \; r,s \in R$ ve $x,y \in M$ için,

$\mu(rx+sy) \geq \mu(rx) \wedge \mu(sy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ olur.

Böylece μ (M4) koşulunu da sağlamış olur.

Tersine, μ (M1) ve (M4) şartlarını sağlasın. Bu durumda $\forall \; r \in R$ ve $x \in M$ için,

$\mu(rx) = \mu(rx + r0_M) \geq \mu(x) \wedge \mu(0_M) = \mu(x)$ ve $\forall \; x,y \in M$ için,

$\mu(x+y) = \mu(1x+1y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ olur.

Böylece μ (M2) ve (M3) koşullarını sağlar. Buradan da $\mu \in L(M)$ elde edilir.

Teorem 3.3.10 $\mu \in [0,1]^M$ olsun. $\mu \in L(M)$ olması için gerek ve yeter koşul μ nün M toplamsal grubunun bir bulanık alt grubu ve aşağıdaki şartı sağlamasıdır:

$(\text{M2})'$ $r\mu \subseteq \mu \quad \forall \; r \in R$.

Teorem 3.3.11 $\mu \in [0,1]^M$ olsun. $\mu \in L(M)$ olması için gerek ve yeter koşul μ nün aşağıdaki şartları sağlamasıdır:

$(\text{M1})'$ $1_{\{0_M\}} \subseteq \mu$,

$(\text{M2})'$ $r\mu \subseteq \mu \; \forall \; r \in R$,

$(\text{M3})'$ $\mu + \mu \subseteq \mu$.

Teorem 3.3.12 $\mu \in [0,1]^M$ olsun. $\mu \in L(M)$ olması için gerek ve yeter koşul μ nün aşağıdaki şartları sağlamasıdır:

$(\text{M1})'$ $1_{\{0_M\}} \subseteq \mu$,

$(\text{M4})'$ $r\mu + s\mu \subseteq \mu \quad \forall \; r,s \in R$.

Örnek 3.3.13 $R=\mathbb{Z}$ ve $M=\mathbb{Z}_6$ olmak üzere,

$$\mu(x)=\begin{cases} 1 & x=0 \quad ise, \\ \dfrac{1}{3} & x=2,4 \quad ise, \\ \dfrac{1}{4} & x=1,3,5 \quad ise, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan μ, M nin bir bulanık alt modülüdür.

Biz şimdi bulanık alt modüller ile ilgili bazı temel özelliklerden bahsedeceğiz. Eğer $\mu,\nu\in[0,1]^M$ ise, $\mu+\nu$, $\forall\ x\in M$ için $(\mu+\nu)(x)=\vee\{\ \mu(y)\wedge\nu(z)\ \mid\ y,z\in M,\ x=y+z\ \}$ şeklinde tanımlanmıştı.

Teorem 3.3.14 $\mu,\nu\in[0,1]^M$ olsun. O zaman $\mu+\nu\in L(M)$ dir.

İspat $\forall\ r\in R$ için Teorem 3.3.3(5) ve Teorem 3.3.10 dan $r(\mu+\nu)=r\mu+r\nu\subseteq\mu+\nu$ olur. Buradan $\mu+\nu\in L(M)$ elde edilir.

Teorem 3.3.15 $\zeta\in LI(R)$ ve $\mu\in L(M)$ olsun. Bu durumda $\zeta\odot\mu\in L(M)$ olur.

İspat $(\zeta\odot\mu)(0_M)=1$ olduğu açıktır. $\forall\ r\in R,\ x\in M$ için,

$$\begin{aligned}(\zeta\odot\mu)(rx)&=\vee\left\{\wedge_{i=1}^{n}\left(\zeta(s_i)\wedge\mu(z_i)\right)\ \middle|\ s_i\in R,\ z_i\in M,\ 1\le i\le n,\ n\in\mathbb{N}\ \textstyle\sum_{i=1}^{n}s_iz_i=rx\right\}\\
&\ge\vee\left\{\wedge_{i=1}^{n}\left(\zeta(rr_i)\wedge\mu(x_i)\right)\ \middle|\ r_i\in R,\ x_i\in M,\ 1\le i\le n,\ n\in\mathbb{N}\ \textstyle\sum_{i=1}^{n}(rr_i)x_i=rx\right\}\\
&\ge\vee\left\{\wedge_{i=1}^{n}\left(\zeta(r_i)\wedge\mu(x_i)\right)\ \middle|\ r_i\in R,\ x_i\in M,\ 1\le i\le n,\ n\in\mathbb{N}\ \textstyle\sum_{i=1}^{n}r_ix_i=rx\right\}\\
&=(\zeta\odot\mu)(x)\end{aligned}$$

olur.

$\wedge$ işleminin $\vee$ işlemi üzerine dağılma özelliğinden, $\forall\ x,y\in M$ için,

$(\zeta\odot\mu)(x+y)\ge(\zeta\odot\mu)(x)\wedge(\zeta\odot\mu)(y)$ olur. Buradan da $\zeta\odot\mu\in L(M)$ bulunur.

$M=R$ alınırsa bir önceki teoremden, eğer $\zeta,\mu\in LI(R)$ ise $\zeta\odot\mu\in LI(R)$ olur.

Teorem 3.3.16 $\zeta \in LI(R)$ ve $\mu \in L(M)$ olsun. Eğer $\zeta(0_R) = 1$ ise $\zeta.\mu \in L(M)$ olur.

Örnek 3.3.17 $R = \mathbb{Z}$ ve $M = \mathbb{Z}_6$ olmak üzere, μ nün M nin bir bulanık alt modülü olduğunu Örnek 3.3.13 de söylemiştik. $2_{\frac{1}{2}} \in LI(R)$ ve $\mu \in L(M)$ için,

$$(2_{\frac{1}{2}}.\mu)(0) = \vee\{2_{\frac{1}{2}}(2) \wedge \mu(3), 2_{\frac{1}{2}}(3) \wedge \mu(4), ...\}$$

$$= \vee\{\frac{1}{2} \wedge \frac{1}{4}, 0 \wedge \frac{1}{3}, ...\}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$(2_{\frac{1}{2}}.\mu)(1) = (2_{\frac{1}{2}}.\mu)(3) = (2_{\frac{1}{2}}.\mu)(5) = 0$$

$$(2_{\frac{1}{2}}.\mu)(2) = \vee\{2_{\frac{1}{2}}(1) \wedge \mu(2), 2_{\frac{1}{2}}(2) \wedge \mu(4), 2_{\frac{1}{2}}(4) \wedge \mu(5)............\}$$

$$= \vee\{0 \wedge \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \wedge \frac{1}{3}, 0 \wedge \frac{1}{4}, ...\}$$

$$= \frac{1}{3} = (2_{\frac{1}{2}}.\mu)(4)$$

$$(2_{\frac{1}{2}}.\mu)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 0 \quad ise, \\ \frac{1}{3} & x = 2,4 \quad ise, \\ 0 & x = 1,3,5 \quad ise, \end{cases}$$

elde edilir. Sonuç olarak $(2_{\frac{1}{2}}.\mu)(0) \neq 1$ olduğundan $2_{\frac{1}{2}}.\mu \notin L(M)$ olur.

3.4 Bölüm Modüllerinin Bulanık Alt Modülleri, Rezidüel Bölümler ve Asal Alt Modüller

Bu bölümde öncelikle bir bölüm modülünün bulanık alt modüllerinin yapısının oluşumundan ve modül homomorfizmalarından bahsedilecektir. Sonrasında rezidüel bölümler kavramı ve asal bulanık alt modül tanımı verilecektir.

Teorem 3.4.1 A, M nin bir alt modülü ve $\nu \in L(M)$ olsun. $\forall\ x \in M$ için, $\xi \in [0,1]^{M/A}$ yı aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\xi([x]) = \vee\{\nu(u) \mid u \in [x]\} \tag{3.24}$$

Burada M/A, M nin bölüm modülünü, $[x]$ ise $x + A$ kosetini ifade etmektedir. Bu durumda $\xi \in L(M/A)$ olur.

İspat ξ, M/A bölüm modülünün toplamsal grubunun bir bulanık alt grubudur. Şimdi $\forall\ r \in R$ ve $x \in M$ için,

$$\begin{aligned}
\xi(r[x]) &= \xi([rx]) \\
&= \vee\{\nu(a) \mid a \in [rx]\} \\
&= \vee\{\nu(rx+y) \mid y \in A\} \\
&= \vee\{\nu(rx+rz) \mid z \in A\} \\
&= \vee\{\nu(r(x+z)) \mid z \in A\} \\
&\geq \vee\{\nu(x+z) \mid z \in A\} \\
&= \vee\{\nu(u) \mid u \in [x]\} \\
&= \xi([x])
\end{aligned}$$

olur. Buradan da $\xi \in L(M/A)$ elde edilir.

Şimdi Teorem 3.4.1 in özel bir durumunu ele alalım. $\nu \in L(M)$, $a \in [0,1]$ ve $A = \nu_a$ olsun. Bu durumda A, M nin bir alt modülüdür. Böylece Teorem 3.4.1 den (3.24) eşitliği ile tanımlanan ξ, $\xi \in L(M/A)$ olur. $x \in M$ olsun ve $\xi([x])$ i göz önüne alalım. Eğer $[x] = A$ ise, $\xi([x]) = 1$ dir. Eğer $[x] \neq A$ ise, o zaman $x \notin A$ ve buradan $\nu(x) < a$ olur. Böylece herhangi bir $y \in [x]$ için $z \in A$ vardır öyle ki $y = x + z$ dir. Buradan,

$$\nu(y) = \nu(x+z) \geq \nu(x) \wedge \nu(z) = \nu(x)$$

olur. Benzer biçimde $\nu(x)=\nu(y+(-z))\geq\nu(y)\wedge\nu(-z)=\nu(y)$ dir. Sonuç olarak $\nu(x)=\nu(y)$ elde edilir. O halde $\forall\ x\in M$ için $\xi([x])$,

$$\xi([x])=\begin{cases}1 & \nu(x)\geq a\\ \nu(x) & diğer\ durumlarda\end{cases}$$

şeklinde verilebilir. $A=\nu_{[a]}$ olması durumu benzer şekilde elde edilebilir.

Biz şimdi Teorem 3.4.1 de tanımlanan ξ bulanık alt modülünün özelliklerini inceleyelim.

$\mu\subseteq\nu$ olacak şekilde $\mu,\nu\in L(M)$ alalım. μ^* ve ν^* ın her ikisinin de M nin alt modülü olduğu biliniyor. $\mu^*\subseteq\nu^*$ olduğu açıktır. Böylece μ^*, ν^* ın bir alt modülüdür. Dahası açıktır ki $\nu\big|_{\nu^*}\in L(\nu^*)$ dir. Buradan Teorem 3.4.1 den eğer, $\xi\in[0,1]^{\nu^*/\mu^*}$ ı $\forall\ x\in\nu^*$ için,

$$\xi([x])=\vee\{\nu(z)\ \mid\ z\in[x]\}$$

şeklinde tanımlarsak $[x]$, koset $x+\nu^*$ ı ifade eder ve bu durumda $\xi\in L(\nu^*/\mu^*)$ olur. Bulanık alt modül ξ, ν nün μ ye göre bölüm modülü olarak adlandırılır. ν/μ ile gösterilir.

$\mu\in L(M)$, N bir $R-$modül ve $f:M\to N$ bir homomorfizma alırsak $f(\mu)\in L(N)$ olur.

Tanım 3.4.2 M, N bir $R-$modül, $\mu\in L(M)$ ve $\nu\in L(N)$ olsun.

(1) Bir $f:M\to N$ homomorfizması; eğer $f(\mu)\subseteq\nu$ ise μ den ν ye zayıf homomorfizma olarak adlandırılır. μ den ν ye f homomorfizması zayıf homomorfizma ise μ, ν ye zayıfça homomorfiktir denir ve $\mu\overset{f}{\sim}\nu$ ya da basitçe $\mu\sim\nu$ şeklinde yazılır.

(2) Bir $f : M \to N$ izomorfizması; eğer $f(\mu) \subseteq \nu$ ise μ den ν ye zayıf izomorfizma olarak adlandırılır. μ den ν ye f izomorfizması zayıf izomorfizma ise o zaman μ, ν ye zayıfça izomorfiktir denir ve $\mu \overset{f}{\simeq} \nu$ ya da basitçe $\mu \simeq \nu$ şeklinde yazılır.

(3) Bir $f : M \to N$ homomorfizması; eğer $f(\mu) = \nu$ ise μ den ν ye bir homomorfizma olarak adlandırılır. Eğer f, μ den ν ye bir homomorfizma ise o zaman μ, ν ye homomorfiktir denir ve $\mu \overset{f}{\approx} \nu$ ya da basitçe $\mu \approx \nu$ şeklinde yazılır.

(4) Bir $f : M \to N$ izomorfizması; eğer $f(\mu) = \nu$ ise μ den ν ye bir izomorfizma olarak adlandırılır. Eğer f, μ den ν ye bir izomorfizma ise o zaman μ, ν ye izomorfiktir denir ve $\mu \overset{f}{\cong} \nu$ ya da basitçe $\mu \cong \nu$ şeklinde yazılır.

Teorem 3.4.3 $\mu \subseteq \nu$ olmak üzere $\mu, \nu \in L(M)$ olsun. Bu durumda $\nu\big|_{\nu^*} \approx \nu/\mu$ olur.

Teorem 3.4.4 $\nu \in L(M)$ olsun. N bir $R-$modül ve $\xi \in L(N)$ olmak üzere $\nu \approx \xi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\mu \in L(M)$ vardır öyle ki $\mu \subseteq \nu$ ve $\nu\big/\mu \cong \xi\big|_{\xi^*}$ olur.

Teorem 3.4.5 $\mu, \nu \in L(M)$ olsun. Bu durumda $\nu/(\mu \cap \nu) \simeq (\mu + \nu)/\mu$ olur.

Teorem 3.4.6 $\mu \subseteq \nu \subseteq \xi$ olmak üzere $\mu, \nu, \xi \in L(M)$ olsun. Bu durumda $(\xi/\mu)/(\nu/\mu) \cong \xi/\nu$ olur.

Tanım 3.4.7 $\mu, \nu \in [0,1]^M$ ve $\zeta \in [0,1]^R$ için rezidüel bölümler $\mu : \nu \in [0,1]^R$ ve $\mu : \zeta \in [0,1]^M$ için aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mu : \nu = \cup \left\{ \eta \mid \eta \in [0,1]^R,\ \eta \cdot \nu \subseteq \mu \right\}$$

$$\mu : \zeta = \cup \left\{ \xi \mid \xi \in [0,1]^M,\ \zeta \cdot \xi \subseteq \mu \right\} \tag{3.25}$$

Teorem 3.4.8 $\mu, \nu \in [0,1]^M$ ve $\zeta \in [0,1]^R$ olsun. Bu durumda,

(1) $\mu : \nu = \cup \left\{ r_a \mid r \in R,\ a \in [0,1],\ r_a \cdot \nu \subseteq \mu \right\}$

(2) $\mu : \zeta = \cup \left\{ x_a \mid x \in M,\ a \in [0,1],\ \zeta \cdot x_a \subseteq \mu \right\}$

olur.

İspat (1) Tanım 3.4.7 den,

$$\cup\{ r_a \mid r\in R,\ a\in[0,1],\ r_a\cdot\nu\subseteq\mu \}\subseteq\mu:\nu$$

olduğu açıktır. $\eta\in[0,1]^R$, $\eta\cdot\nu\subseteq\mu$, $r\in R$ ve $\eta(r)=a$ olsun. Bu durumda $\forall\ x\in M$ için,

$$\begin{aligned}(r_a\cdot\nu)(x)&=\vee\{ r_a(s)\wedge\nu(y) \mid s\in R,\ y\in M,\ sy=x\}\\ &\leq\vee\{ \eta(r)\wedge(y) \mid y\in M,\ ry=x\}\\ &=(\eta\cdot\nu)(x)\\ &\leq\mu(x)\end{aligned}$$

Böylece $r_a\cdot\nu\subseteq\mu$ ve bundan dolayı,

$$\mu:\nu\subseteq\cup\{ r_a \mid r\in R,\ a\in L,\ r_a\cdot\nu\subseteq\mu \}$$

olur. Sonuçta,

$$\mu:\nu=\cup\{ r_a \mid r\in R,\ a\in L,\ r_a\cdot\nu\subseteq\mu \}$$

elde edilir.

(2) (1) e benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.4.9 $\mu,\nu\in[0,1]^M$ ve $\zeta\in[0,1]^R$ olsun. Bu durumda,

(1) $(\mu:\nu)\cdot\nu\subseteq\mu$,

(2) $\zeta\cdot(\mu:\zeta)\subseteq\mu$,

(3) $\zeta\cdot\nu\subseteq\mu\Leftrightarrow\zeta\subseteq\mu:\nu\Leftrightarrow\nu\subseteq\mu:\zeta$

olur.

Teorem 3.4.10 $\mu,\nu\in[0,1]^M$ ve $\zeta\in[0,1]^R$ olsun.

(1) Eğer $\mu\in L(M)$ ise, $\mu:\nu=\bigcup\{ \eta \mid \eta\in LI(R),\ \eta\cdot\nu\subseteq\mu \}$ olur.

(2) Eğer $\zeta \in LI(R)$ ise, $\mu : \zeta = \bigcup \left\{ \xi \mid \xi \in L(M),\, \zeta \cdot \xi \subseteq \mu \right\}$ olur.

Teorem 3.4.11 $\mu \in L(M)$, $\nu \in [0,1]^M$ ve $\zeta \in LI(R)$ olsun. Bu durumda $\mu : \nu \in LI(R)$ ve $\mu : \zeta \in L(M)$ olur.

$\mu, \nu \in L(M)$ ve $\xi \in LI(R)$ olsun. $\mu : \xi$, μ ve ξ nin rezidüel bölüm bulanık alt modülü, $\mu : \nu$ de μ ve ν nün rezidüel bölüm bulanık ideali olarak adlandırılır.

Tanım 3.4.12 $\mu, \nu \in L(M)$ ve ν, μ nün bulanık alt modülü olsun. $r_t \in [0,1]^R$ ve $x_s \in [0,1]^M$ olmak üzere, $r_t x_s \subseteq \nu$ iken $x_s \subseteq \nu$ veya $r_t \mu \subseteq \nu$ oluyorsa, ν ye μ nün bir bulanık asal alt modülü denir [10].

Eğer özellikle $\mu = \chi_M$ aldığımızda, $r_t x_s \subseteq \nu$ iken $x_s \subseteq \nu$ veya $r_t \chi_M \subseteq \nu$ oluyorsa, ν ye M nin bir bulanık asal alt modülü denir.

Teorem 3.4.13 Eğer $M = R$ alırsak, $\nu \in [0,1]^R$ nün M nin bir bulanık asal alt modülü olması için gerek ve yeter koşul, ν nün M nin bir bulanık asal ideali olmasıdır.

Teorem 3.4.14 $\mu, \nu \in L(M)$ ve ν, μ nün bulanık alt modülü olsun. Eğer $\nu_t \neq \mu_t$ ise, ν_t, μ_t nin bir asal alt modülü olur.

Teorem 3.4.15 ν, M nin bir bulanık asal alt modülü olsun. Bu durumda,

$\nu_* = \{x \in M \mid \nu(x) = \nu(0_M)\}$ M nin bir asal alt modülü olur.

BÖLÜM 4

GAMMA MODÜLLER

Bu bölümde öncelikle gamma halka ve gamma ideal tanımlarını vereceğiz ve ardından tezimizin temel unsurlarından biri olan gamma modül kavramından bahsedeceğiz.

Tanım 4.1 M ve Γ toplamsal değişmeli gruplar $\forall a,b,c \in M$, $\alpha,\beta,\gamma \in \Gamma$ ve $M \times \Gamma \times M \to M$ şeklinde bir dönüşüm verilsin.

(i) $a\alpha b \in M$,

(ii) $(a+b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c$

$a(\alpha+\beta)c = a\alpha c + a\beta c$

$a\alpha(b+c) = a\alpha b + a\alpha c$,

(iii) $a\alpha(b\beta c) = (a\alpha b)\beta c$.

şartlarını sağlayan M ye $\Gamma-$halka denir [12].

Örnek 4.2 $(R,\cdot)$ ve $(S,\circ)$ $\Gamma-$halkaları için,

$$((r_1,s_1),\gamma,(r_2,s_2)) \mapsto (r_1\cdot\gamma\cdot r_2, s_1\circ\gamma\circ s_2)$$

dönüşümü ile tanımlanan $R\times S$ çarpımı bir $\Gamma-$halka olur.

Tanım 4.3 M bir $\Gamma-$halka, A M nin bir alt kümesi ve $A\Gamma A = \{a\alpha a \mid a \in A, \alpha \in \Gamma\}$ kümesi için A M nin bir toplamsal alt grubu ve $A\Gamma A \subseteq A$ oluyorsa A ya M nin bir alt halkasıdır denir.

Tanım 4.4 M bir $\Gamma-$halka, I, M nin bir alt kümesi ve $I\Gamma M = \{a\alpha m \mid a \in I, \alpha \in \Gamma, m \in M\}$ kümesi için I M nin bir toplamsal alt grubu ve $I\Gamma M \subseteq I$ oluyorsa I ya M nin bir sağ ideali denir [13].

M nin bir sol ideali de benzer şekilde tanımlanabilir.

Tanım 4.5 M bir $\Gamma-$halka, S ve T M nin idealleri olmak üzere $S\Gamma T\subseteq P$ iken $S\subseteq P$ veya $T\subseteq P$ oluyorsa M nin P idealine asal ideal denir.

Tanım 4.6 G toplamsal değişmeli grup ve M $\Gamma-$halka olsun. $\forall g,g'\in G$, $\alpha,\beta\in\Gamma$, $\forall x,y\in M$ ve $G\times\Gamma\times M\to G$ dönüşümü verilsin.

i) $g\alpha x\in G$,

ii) $g\alpha(x\beta y)=(g\alpha x)\beta y$,

iii) $(g+g')\alpha x=g\alpha x+g'\alpha x$

$g\alpha(x+y)=g\alpha x+g\alpha y$.

şartlarını sağlayan G ye bir sol ΓM modül denir [14].

Örnek 4.7 I, M $\Gamma-$halka nın bir ideali olsun.

$M\times\Gamma\times M/I\to M/I$, $(m,\gamma,m'+I)\mapsto(m\gamma m')+I$

dönüşümü ile tanımlanan M/I bir ΓM modüldür.

Tanım 4.8 N, toplamsal değişmeli G grubunun bir alt grubu olmak üzere; $\forall g\in N$, $\alpha\in\Gamma$, $\forall x\in M$ için $g\alpha x\in N$ oluyorsa N ΓM modülüne, G ΓM modülün bir alt modülü denir.

Tanım 4.9 N, toplamsal değişmeli G grubunun bir alt grubu olmak üzere; $\forall g\in N$, $\alpha\in\Gamma$, $\forall x\in M$ için $g\alpha x\in N$ olduğunda $x\in N$ veya $g\Gamma x\subset N$ oluyorsa N ΓM modülüne, G ΓM modülün bir asal alt modülü denir.

Tanım 4.10 G ve G', ΓM modüller olsun. $\forall x,y\in G$, $\forall\gamma\in\Gamma$ için,

(i) $f(x+y)=f(x)+f(y)$,

(ii) $f(x\gamma y)=f(x)\gamma f(y)$

koşullarını sağlayan $f:G\to G'$ fonksiyonuna ΓM modül homomorfizması denir.

f 1-1 ise monomorfizma, örten ise epimorfizma, hem 1-1 hem de örten ise izomorfizmadır.

Teorem 4.11 $f: M \to N$ fonksiyonu bir ΓR homomorfizması ise $Çekf = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$ ve $\operatorname{Im} f = \{y \in N \mid \exists x \in M; y = f(x)\}$, M nin ΓR alt modülleridir.

Teorem 4.12 B ve C, M nin ΓR alt modülleri olsun. $B/(B \cap C) \cong (B+C)/C$ olur.

BÖLÜM 5

GAMMA MODÜLLERİN BULANIK ALT MODÜLLERİNE AİT YAPILAR

Bu bölümde tezimizin diğer bir temel unsuru olan gamma modüllerin (normal) bulanık alt modüllerini araştıracağız ve bulanık gamma modüllerin bazı özelliklerini vereceğiz. Klasik cebirdeki izomorfizma teoremlerinin, gamma modüllerin (normal) bulanık alt modüllerinde de geçerli olduğunu gösterdik. Sonrasında ise gamma modülün bulanık asal alt modülünü tanımladık ve aradaki ilişkileri analiz ettik.

Tanım 5.1 $\mu \in [0,1]^M$ ve M bir $\Gamma -$halka olmak üzere, $\forall x, y \in M$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

(i) $\mu(x-y) \geq \wedge\{\mu(x), \mu(y)\}$,

(ii) $\mu(x\gamma y) \geq \mu(y)$ ($\mu(x\gamma y) \geq \mu(x)$),

şartlarını sağlayan μ ye M $\Gamma -$halkanın bir bulanık sol(sağ) ideali denir [17].

Tanım 5.2 ξ, M $\Gamma -$halkanın bir bulanık ideali ve M nin herhangi iki μ ve ν idealleri için, $\mu\Gamma\nu \subseteq \xi$ iken $\mu \subseteq \xi$ veya $\nu \subseteq \xi$ oluyorsa ξ ye M $\Gamma -$halkanın bir bulanık asal ideali denir [18].

Tanım 5.3 $\mu, \sigma \in [0,1]^G$ olsun. O halde toplam,

$$\mu \oplus \sigma(x) = \begin{cases} \vee(\wedge(\mu(u_i), \sigma(v_i))) & 1 \leq i \leq n,\ x = u_i + v_i, u_i, v_i \in G \\ 0 & \textit{diğer} \end{cases} \tag{5.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 5.4 $\mu \in [0,1]^G$ ve $\sigma \in [0,1]^M$ olsun. O halde çarpım,

$$\mu \otimes \sigma(x) = \begin{cases} \vee(\wedge(\mu(u_i), \sigma(v_i))) & 1 \le i \le n,\ x = \sum_i^n u_i \gamma_i v_i, u_i \in G, v_i \in M, \gamma_i \in \Gamma \\ 0 & di\breve{g}er \end{cases} \quad (5.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 5.5 $\mu, \sigma \in [0,1]^M$ olsun. O halde μ ve σ nin çarpımları,

$$(\mu \Gamma \sigma)(x) = \begin{cases} \underset{x=u\gamma v}{\vee} (\wedge[\mu(u), \sigma(v)]) & u, v \in M \ ve\ \gamma \in \Gamma \\ 0 & di\breve{g}er \end{cases} \quad (5.3)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 5.6 f, G_1 ΓM modülünden G_2 ΓM modül üzerine tanımlı bir fonksiyon ve $\mu \in L(M)$ olsun. Eğer $\forall x, y \in G_1$ ΓM modül için $f(x) = f(y)$ olduğunda $\mu(x) = \mu(y)$ oluyorsa, μ ye $f-$değişmez denir.

Şimdi, modüllerin bulanık alt modülleri hakkındaki benzer argümanı kullanarak G, ΓM modülün bulanık alt modülünü tanımlayalım.

Tanım 5.7 G toplamsal değişmeli grup, $\mu \in [0,1]^G$ ve M $\Gamma-$halka olsun. $\forall g, g' \in G$, $\alpha, \beta \in \Gamma$, $\forall m, m' \in M$ ve $G \times \Gamma \times M \to G$ dönüşümü;

i) $\mu(0_G) = 1$,

ii) $\mu(g\alpha m) \ge \mu(g)$,

iii) $\mu(g\alpha m + g'\beta m') \ge \mu(g) \wedge \mu(g')$

şartlarını sağlıyorsa μ, G ΓM modülün bulanık alt modülü şeklinde adlandırılır. Bundan sonra gamma modüllerin tüm bulanık alt modüllerinin kümesini $L(\Gamma M)$ ile gösterelim. A, G nin bir alt grubu olmak üzere $\forall x, y \in A$ için $x\alpha y\beta x \in A$ oluyor ise A ya G nin bir normal gamma alt modülü denir.

Tanım 5.8 μ, G ΓM modülün bulanık alt modülü olmak üzere $\forall x, y \in G$ için $\mu(x\alpha y\beta x) \ge \mu(y)$ ise μ, G ΓM modülün normal bulanık alt modülü şeklinde adlandırılır.

Örnek 5.9 μ , G nin bulanık alt kümesi $G=\{[a \quad 0] | a\in 2Z\}$, $\Gamma=\left\{\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix} | x,y\in Z\right\}$ ve $M=\{[c \quad 0] | c\in 2Z\}$ olmak üzere,

$$\mu(x)=\begin{cases} 1 & x=0=[0 \quad 0] \\ 1/2 & x\in G-\{[0 \quad 0]\} \\ 0 & x\notin G \end{cases}$$

nün $G \quad \Gamma M$ modülün bulanık alt modülü olduğu kolayca görülebilir.

Bir sonraki teorem de gamma modüllerin (normal) bulanık alt modülleri ile gamma modüllerin (normal) alt modülleri arasında doğrudan bir ilişki olduğu kolayca görülebilir. O halde bulanık modül yapılarıyla ilgili temel teoremleri ispatlayabiliriz.

Teorem 5.10 μ nün $G \quad \Gamma M$ modülün bulanık alt modülü olması için gerek ve yeter koşul $\forall t\in[0,1]$ için μ_t nin gamma modülün bir alt modülü olmasıdır.

İspat $\Rightarrow$ Her $g\in\mu_t$, $x,y\in M$ ve $\alpha,\beta\in\Gamma$ olduğunda $\mu(g)\geq t$ ve μ, $G \quad \Gamma M$ modülün bulanık alt modülü olduğundan $\mu(g\alpha x)\geq\mu(g)\geq t$ eşitsizliğinden $g\alpha x\in\mu_t$ elde edilir. Bundan dolayı μ_t, gamma modülün bir alt modülüdür. Benzer şekilde $g\alpha(x\beta y)=(g\alpha x)\beta y$, $(g+g')\alpha x=g\alpha x+g'\alpha x$ ve $g\alpha(x+y)=g\alpha x+g\alpha y$ şartları da sağlanmış olur.

$\Leftarrow$ μ_t gamma modülün bir alt modülü olduğundan $0_G\in\mu_t$ ve $\mu(0_G)=1$ olur.

$\mu(g)=t$ aldığımızda $g\in\mu_t$ olur ve $\forall x,y\in M$ için $g\alpha x\in\mu_t$ olduğundan $\mu(g\alpha x)\geq t=\mu(g)$ sağlanır. $\mu(g)=t_1$, $\mu(g')=t_2$ ve $t_1\leq t_2$ olsun. Bu durumda $\mu_{t_2}\subseteq\mu_{t_1}$ elde edilir. μ_t gamma modülün bir alt modülü olduğundan $g\alpha x+g'\beta y\in\mu_{t_1}$ olur. Bu ise $\mu(g\alpha x+g'\beta y)\geq t_1=t_1\wedge t_2=\mu(g)\wedge\mu(g')$ ifadesini gerçekler. Böylece μ nün $G \quad \Gamma M$ modülün bulanık alt modülü olduğu görülür, bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 5.11 μ nün $G \quad \Gamma M$ modülün normal bulanık alt modülü olması için gerek ve yeter koşul $\forall t\in[0,1]$ için μ_t nin gamma modülün bir normal alt modülü olmasıdır.

İspat $\Rightarrow$ $x, y \in \mu_t$ olsun. Buradan $\mu(y) \geq t$ ve $\mu(x\alpha y\beta x) \geq \mu(y) \geq t$ olduğundan $x\alpha y\beta x \in \mu_t$ dir. Şu halde μ_t gamma modülün bir normal alt modülüdür.

$\Leftarrow \mu_t$ gamma modülün bir normal alt modülü, $x, y \in G$ için $\mu(x) = t_1$, $\mu(y) = t_2$ ve $t_2 \leq t_1$ olsun. Buradan $x\alpha y\beta x \in \mu_{t_2}$, $\mu(x\alpha y\beta x) \geq t_2 = \mu(y)$ ifadesini gerçekler. Böylece μ nün G ΓM modülün normal bulanık alt modülü olduğu görülür, bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 5.12 μ, G ΓM modülün bulanık alt modülü ise μ_* ve μ^* da gamma modülün birer alt modülüdür.

İspat $\mu_* = \{g \in G: \ \mu(g) = \mu(0)\}$, her $g_1 \in \mu_*$, $\alpha \in \Gamma$ ve $m \in M$ için μ, G ΓM modülün bulanık alt modülü olduğundan $\mu(g_1 \alpha m) \geq \mu(g_1) = \mu(0)$ ifadesinden $g_1 \alpha m \in \mu_*$ olur. Benzer şekilde, $\mu^* = \{g \in G: \ \mu(g) > 0\}$, her $g \in \mu^*$, $\alpha \in \Gamma$ ve $m \in M$ için μ, G ΓM modülün bulanık alt modülü olduğundan, $\mu(g\alpha m) \geq \mu(g) > 0$ ifadesinden $g\alpha m \in \mu^*$ olur. Sonuç olarak, μ_* ve μ^* da gamma modülün birer alt modülüdür.

Teorem 5.13 μ, G ΓM modülün normal bulanık alt modülü ise μ_* ve μ^* da gamma modülün birer normal alt modülüdür.

İspat $\mu_* = \{g \in G: \ \mu(g) = \mu(0)\}$, her $x, y \in \mu_*$ için μ, G ΓM modülün normal bulanık alt modülü olduğundan, $\mu(x\alpha y\beta x) \geq \mu(y) = \mu(0)$ ifadesinden $x\alpha y\beta x \in \mu_*$ olur. Benzer şekilde $\mu^* = \{g \in G: \ \mu(g) > 0\}$, her $x, y \in \mu^*$ için μ, G ΓM modülün normal bulanık alt modülü olduğundan, $\mu(x\alpha y\beta x) \geq \mu(y) > 0$ ifadesinden $x\alpha y\beta x \in \mu^*$ olur. Sonuç olarak, μ_* ve μ^* da gamma modülün birer normal alt modülüdür.

Teorem 5.14 μ_i ler, G ΓM modülün bulanık alt modülleri olsun. Bu durumda $\bigcap_i \mu_i$ de G ΓM modülün bulanık alt modülüdür.

İspat Her $g, g' \in G$, $m, m' \in M$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ için

i) $\bigcap_i \mu_i(0) = \mu_1(0) \wedge \mu_2(0) \wedge ...$

$$=1\wedge 1\wedge ...$$

$$=1$$

ii) $\bigcap_i \mu_i(g\alpha m)=\mu_1(g\alpha m)\wedge \mu_2(g\alpha m)\wedge ...$

$$\geq \mu_1(g)\wedge \mu_2(g)\wedge ...$$

$$=\bigcap_i \mu_i(g).$$

iii) $\bigcap_i \mu_i(g\alpha m+g'\beta m')=\mu_1(g\alpha m+g'\beta m')\wedge \mu_2(g\alpha m+g'\beta m')\wedge ...$

$$\geq \mu_1(g)\wedge \mu_1(g')\wedge \mu_2(g)\wedge \mu_2(g')\wedge ...$$

$$=\mu_1(g)\wedge \mu_2(g)\wedge ...\wedge \mu_1(g')\wedge \mu_2(g')\wedge ...$$

$$=\bigcap_i \mu_i(g)\wedge \bigcap_i \mu_i(g').$$

Böylece $\bigcap_i \mu_i$, G ΓM modülün bulanık alt modülüdür.

Teorem 5.15 μ_i ler, G ΓM modülün normal bulanık alt modülleri olsun. Bu durumda $\bigcap_i \mu_i$ de G ΓM modülün normal bulanık alt modülüdür.

İspat Her $x, y\in G$ için,

$$\bigcap_i \mu_i(x\alpha y\beta x)=\mu_1(x\alpha y\beta x)\wedge \mu_2(x\alpha y\beta x)\wedge ...$$

$$\geq \mu_1(y)\wedge \mu_2(y)\wedge ...$$

$$=\bigcap_i \mu_i(y).$$

Böylece $\bigcap_i \mu_i$ G , ΓM modülün normal bulanık alt modülüdür.

Teorem 5.16 μ_i ler, G ΓM modülün (normal) bulanık alt modülleri olsun. Bu durumda $\bigcup_i \mu_i$ nin, G ΓM modülün (normal) bulanık alt modülü olması için gerek ve yeter koşul $\mu_1 \subseteq \mu_2 \subseteq ...$olmasıdır.

Teorem 5.17 μ ve σ, G ΓM modülün bulanık iki alt modülü olsun. Bu durumda $\mu \oplus \sigma$ toplamı da G ΓM modülün bulanık alt modülüdür.

İspat

$$\mu \oplus \sigma(x) = \{\vee(\wedge(\mu(u), \sigma(v))) : x = u + v,\ \ x, u, v \in G\}$$

$$\mu \oplus \sigma(0) = \{\vee(\wedge(\mu(0), \sigma(0))) : x = u + v,\ \ x, u, v \in G\} = 1.$$

$$\begin{aligned}\mu \oplus \sigma(g\alpha m) &= \{\vee(\wedge(\mu(g_1\alpha_1 m_1), \sigma(g_2\alpha_2 m_2))) : g\alpha m = g_1\alpha_1 m_1 + g_2\alpha_2 m_2, g_1, g_2 \in G, \alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma, m_1, m_1 \in M\} \\ &\geq \{\vee(\wedge(\mu(g_1), \sigma(g_2))) : g = g_1 + g_2, \quad g_1, g_2 \in G\} \\ &= \mu \oplus \sigma(g).\end{aligned}$$

Benzer şekilde $\mu \oplus \sigma(g\alpha m + g'\beta m') \geq \mu(g) \wedge \sigma(g')$ olur. Böylece $\mu \oplus \sigma$ toplamı G, ΓM modülün bulanık alt modülü olur.

Teorem 5.18 μ ve σ, G ΓM modülün bulanık iki alt modülü olsun. Bu durumda $\mu \otimes \sigma$, G ΓM modülün bulanık alt modülüdür.

İspat

$$\mu \otimes \sigma(x) = \left\{\begin{matrix} \vee(\wedge(\mu(u_i), \sigma(v_i))) & 1 \leq i \leq n,\ x = \sum_i^n u_i \gamma_i v_i, u_i \in G, v_i \in M, \gamma_i \in \Gamma \\ 0 & diğer \end{matrix}\right\}$$

$$\mu \otimes \sigma(0) = \left\{\begin{matrix} \vee(\wedge(\mu(u_i), \sigma(v_i))) & 1 \leq i \leq n,\ 0 = \sum_i^n u_i \gamma_i v_i, u_i \in G, v_i \in M, \gamma_i \in \Gamma \\ 0 & diğer \end{matrix}\right\} = 1.$$

$$\mu \otimes \sigma(g\alpha m) = \left\{\begin{matrix} \vee(\wedge(\mu(g_1\alpha_1 m_1), \sigma(g_2\alpha_2 m_2))) : 1 \leq i \leq n, \\ g\alpha m = \sum_i^n g_1\alpha_1 m_1 + g_2\alpha_2 m_2 : g_1, g_2 \in G, \alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma, m_1, m_1 \in M \end{matrix}\right\}$$

$$\geq \left\{\vee(\wedge(\mu(g_1), \sigma(g_2)) :\ g = \sum_i^n g_i + g_j, \quad g_i, g_j \in G\right\}$$

$= \mu \otimes \sigma(g)$.

Benzer şekilde $\mu \otimes \sigma(g\alpha m + g'\beta m') \geq \mu(g) \wedge \sigma(g')$ olduğu da gösterilebilir. Böylece $\mu \otimes \sigma$, $G \;\; \Gamma M$ modülün bulanık alt modülü olur.

Tanım 5.19 μ ve σ , G nin birer bulanık alt kümesi olsun. $\forall x, y \in G$ için μ ve σ nin kartezyen çarpımı,

$$\mu \times \sigma(x, y) = \wedge(\mu(x), \sigma(y)) \tag{5.4}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 5.20 μ ve σ , $G \;\; \Gamma M$ modülün bulanık alt modülleri ise $\mu \times \sigma$ kartezyen çarpımı da $G \times G$ nin bir bulanık alt modülüdür.

İspat $\forall g, g_1, g', g_1' \in G$, $m, m_1, m', m_1' \in M$ ve $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1 \in \Gamma$ olmak üzere,

$\mu(0) = 1 = \sigma(0)$ eşitliğinden,

$$\mu \times \sigma(0,0) = \wedge(\mu(0), \sigma(0)) = 1$$

$$\begin{aligned}
\mu \times \sigma(g\alpha m, g'\beta m') &= \wedge(\mu(g\alpha m), \sigma(g'\beta m')) \\
&\geq \wedge(\mu(g), \sigma(g')) \\
&= \mu \times \sigma(g, g').
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu \times \sigma((g\alpha m, g'\beta m') + (g_1\alpha_1 m_1, g_1'\beta_1 m_1')) &= \mu \times \sigma(g\alpha m + g_1\alpha_1 m_1, g'\beta m' + g_1'\beta_1 m_1') \\
&= \wedge(\mu(g\alpha m + g_1\alpha_1 m_1), \sigma(g'\beta m' + g_1'\beta_1 m_1')) \\
&\geq (\wedge(\mu(g), \mu(g_1)), \wedge(\sigma(g'), \sigma(g_1'))) \\
&= (\wedge(\mu(g), \sigma(g')), \wedge(\mu(g_1), \sigma(g_1'))) \\
&= \wedge(\mu \times \sigma(g, g'), \mu \times \sigma(g_1, g_1')).
\end{aligned}$$

Böylece $\mu \times \sigma$, $G \times G$ nin bulanık alt modülüdür.

Bu teoremin tersi her zaman doğru değildir. Benzer teoremlerin geçerliliğini değişmeli cebirde de görebiliriz.

Tezimizin bu kısmında [20] de ki çalışmalara benzer olarak normal bulanık alt modüller için izomorfizma teoremleri incelenecektir.

Teorem 5.21 $f:G_1 \to G_2$ değişmez fonksiyonu G_1 den G_2 ΓM modüle tanımlı ve μ, G_1 in normal bulanık alt modülü olsun. Bu durumda $f(\mu)$, G_2 ΓM modülün normal bulanık alt modülü olur.

İspat $\forall g_1, g_1', x, y \in G_1$, $g_2, g_2', x', y' \in G_2$, $m_1, m_1', m_2, m_2' \in M$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ olmak üzere,

μ, G_1 in bulanık alt modülü olduğundan,

$$\begin{aligned} f(\mu)(0_{G_2}) &= \vee\left\{\mu(0_{G_1}) : \ f(x) = f(0_{G_1}) = 0_{G_2}\right\} \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\mu)(g_2\alpha m_2) &= \vee\{\mu(g_1\alpha m_1) : f(g_1\alpha m_1) = g_2\alpha m_2\} \\ &\geq \vee\left\{\mu(g_1) : \ f(g_1) = g_2\right\} \\ &= f(\mu)(g_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\mu)(g_2\alpha m_2 + g_2'\beta m_2') &= \vee\{\mu(g_1\alpha m_1 + g_1'\beta m_1') : f(g_1\alpha m_1 + g_1'\beta m_1') = g_2\alpha m_2 + g_2'\alpha m_2'\} \\ &\geq \vee\{\mu(g_1) \wedge \mu(g_1') : f(g_1) = g_2, f(g_1') = g_2'\} \\ &= (\vee\{\mu(g_1) : f(g_1) = g_2\}) \wedge (\vee\{\mu(g_1') : f(g_1') = g_2'\}) \\ &= f(\mu)(g_2) \wedge f(\mu)(g_2'). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\mu)(x'\alpha y'\beta x') &= \vee\{\mu(x\alpha y\beta x) : f(x\alpha y\beta x) = x'\alpha y'\beta x'\} \\ &\geq \vee\left\{\mu(y) : \ f(y) = y'\right\} \\ &= f(\mu)(y') \end{aligned}$$

Böylece $f(\mu)$, G_2 ΓM modülün normal bulanık alt modülü olur.

Teorem 5.22 $f:G_1 \to G_2$ değişmez fonksiyonu G_1 den G_2 ΓM modüle tanımlı ve μ, G_2 nin normal bulanık alt modülü olsun. Bu durumda $f^{-1}(\mu)$, G_1 ΓM modülün normal bulanık alt modülü olur.

İspat $\forall g_1, g_1', x, y \in G_1$, $m_1, m_1' \in M$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ olmak üzere,

μ, G_2 nin bulanık alt modülü olduğundan,

$$f^{-1}(\mu)(0_{G_1}) = \mu(f(0_{G_1}))$$
$$= \mu(0_{G_2})$$
$$= 1.$$

$$f^{-1}(\mu)(g_1\alpha m_1) = \mu(f(g_1\alpha m_1))$$
$$= \mu(f(g_1)\alpha f(m_1))$$
$$\geq \mu(f(g_1)$$
$$= f^{-1}(\mu)(g_1)$$

$$f^{-1}(\mu)(g_1\alpha m_1 + g_1'\beta m_1') = \mu(f(g_1\alpha m_1 + g_1'\beta m_1'))$$
$$= \mu(f(g_1\alpha m_1) + f(g_1'\beta m_1'))$$
$$= \mu(f(g_1)\alpha f(m_1) + f(g_1')\beta f(m_1'))$$
$$\geq \mu(f(g_1)) \wedge \mu(f(g_1'))$$
$$= f^{-1}(\mu)(g_1) \wedge f^{-1}(\mu)(g_1').$$

$$f^{-1}(\mu)(x\alpha y\beta x) = \mu(f(x\alpha y\beta x))$$
$$= \mu(f(x)\alpha f(y)\beta f(x))$$
$$\geq \mu(f(y))$$
$$= f^{-1}(\mu)(y)$$

Böylece $f^{-1}(\mu)$, G_1 ΓM modülün normal bulanık alt modülü olur.

Bundan sonraki kısımda bulanık değişmeli cebirin bulanık halka izomorfizmalarındaki benzer teoremlerin gamma modüllerindeki varlığını inceleyeceğiz. Bunun için benzer çalışmalarda yapılan bir denklik bağıntısı ve sonrasında denklik sınıfı tanımlaması yapılacaktır.

Tanım 5.23 μ, G nin bir bulanık alt modülü olsun. G kümesi üzerinde $x \equiv y(\text{mod}\,\mu) \Leftrightarrow \mu(x-y)=\mu(0)$ şeklinde bir bağıntı tanımlayalım. Bu bağıntıyı $x\mu^* y$ şeklinde ifade edelim.

Teorem 5.24 μ^* bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Sonuç 5.25 $x\mu^* y$ olduğunda $\mu(x)=\mu(y)$ olur.

$\mu^*[x]$, x elemanını içeren denklik sınıfı, $G/\mu = \{\mu^*[x] \mid x \in G\}$ kümesi de tüm denklik sınıflarının kümesi olsun. $\exists \alpha \in \Gamma$ ve $r \in G$ için $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerini,

$\mu^*[x] \oplus \mu^*[y] = \{\mu^*[z] \mid z \in \mu^*[x] + \mu^*[y]\}$ ve

$r \odot \mu^*[x] = \mu^*[r\alpha x]$

şeklinde tanımlayalım.

Bu işlemlerin ardından takip eden teoremi verebiliriz.

Sonuç 5.26 $(G/\mu, \oplus, \odot)$ bir gamma modüldür.

Teorem 5.27 $f : G \to G'$ gamma modüllerin bir epimorfizması, μ ve v sırasıyla G ve G' modüllerinin bulanık alt modülleri olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) f bir epimorfizma ise, $f(f^{-1}(v)) = v$ olur.

(ii) μ *Çekf* üzerinde sabit ise, $f^{-1}(f(\mu)) = \mu$ olur.

Yukarıdaki teoremlerin yardımıyla, gamma modüllerin bulanık alt modülleri için izomorfizma teoremlerini oluşturabiliriz. Bundan sonra $G_\mu = \{g \in G : \ \mu(g) = \mu(0)\}$ olsun.

Teorem 5.28 (1. İzomorfizma teoremi) $f : G \to G'$ gamma modüllerin bir epimorfizması ve *Çekf* $\subset G_\mu$ olmak üzere, μ G nin normal bulanık alt modülü olsun. Bu durumda $G/\mu \cong G'/f(\mu)$ olur.

İspat Öncelikle $G/_{\mu}$ ve $G'/_{f(\mu)}$ gamma modüllerdir. Her $x \in G$ için $h: G/_{\mu} \to G'/_{f(\mu)}$, $h(\mu^*[x]) = f(\mu)^*[f(x)]$ olsun.

h iyi tanımlıdır;

$\mu^*[x] = \mu^*[y]$ eşitliğinden $\mu(x-y) = \mu(0)$ elde edilir. Dolayısıyla $\mu(x) = \mu(y)$ olur. *Çekf* $\subset G_{\mu}$ ve μ, *Çekf* üzerinde sabit olduğundan $f(x-y) = 0 \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f(\mu)(f(x)) = f(\mu)(f(y))$ elde edilir. Sonuçta $f(\mu)^*(f(x)) = f(\mu)^*(f(y))$ sonucuna varırız.

h bir homomorfizmadır;

$$h(\mu^*[x] \oplus \mu^*[y]) = h(\mu^*[z] \,|\, z \in \mu^*[x] + \mu^*[y])$$

$$= \left\{ f(\mu)^*(f(z\alpha a)) \,\middle|\, z \in \mu^*[x] + \mu^*[y] \right\}$$

$$= \left\{ f(\mu)^*(f((x+y)\alpha a)) \,\middle|\, z \in \mu^*[x] + \mu^*[y] \right\}$$

$$= \left\{ f(\mu)^*(f(x\alpha a) + f(y\alpha a)) \,\middle|\, x \in \mu^*[x], y \in \mu^*[y] \right\}$$

$$= \left\{ f(\mu)^*(f(x\alpha a)) + f(\mu)^* f(y\alpha a)) \,\middle|\, x \in \mu^*[x], y \in \mu^*[y] \right\}$$

$$= h(\mu^*[x]) \oplus h(\mu^*[y]).$$

$$h(g\mu^*[x]) = h(\mu^*[gx])$$

$$= f(\mu)^*[f(gx\alpha a)]$$

$$= f(\mu)^*[gf(x\alpha a)]$$

$$= gf(\mu)^*[f(x\alpha a)]$$

$$= g \odot h(\mu^*[x])$$

Böylece h gamma homomorfizmasıdır. Ayrıca açıktır ki h örtendir. f 1-1 olduğundan $f(\mu)^*(f(x)) = f(\mu)^*(f(y))$ aldığımızda, $\mu^*[x] = \mu^*[y]$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.29 $f: G \to G'$ gamma modüllerin bir epimorfizması ve $Çekf \subset G_\mu$ olmak üzere, ν G' nün normal bulanık alt modülü olsun. Bu durumda $G/_{f^{-1}(\nu)} \cong G'/_{\nu}$ olur.

İspat Bir önceki teoreme benzer şekilde kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 5.30 (2. İzomorfizma teoremi) $\mu(0) = \nu(0)$ olmak üzere μ ve ν gamma modülün normal bulanık alt modülleri ise, $G_\mu/_{\mu \cap \nu} \cong G_\mu + G_\nu/_{\nu}$ olur.

İspat $\mu \cap \nu$ ve ν sırasıyla G_μ ve $G_\mu + G_\nu$ nün normal bulanık alt modülleri, ayrıca $G_\mu/_{\mu \cap \nu}$ ve $G_\mu + G_\nu/_{\nu}$ gamma modüllerdir. Her $x \in G_\mu$ için $h: G_\mu \to G_\mu + G_\nu/_{\nu}$, $h(x) = \nu^*([x])$ olsun. $h(x+y) = \nu^*([x+y]) = \nu^*([x]) + \nu^*([y])$ ve $h(gx) = \nu^*([gx]) = g\nu^*([x])$ olduğundan h homomorfizmadır ve açıktır ki h örtendir.

$$Çekh = \{x \in G_\mu \mid h(x) = \nu^*[0]\}$$

$$= \{x \in G_\mu \mid \nu^*[x] = \nu^*[0]\}$$

$$= \{x \in G_\mu \mid \nu(x\alpha a) = \nu(0) = \mu(0) = \mu(x\alpha b)\}$$

$$= \{x \in G_\mu \mid x \in G_\nu\}$$

$$= G_\mu \cap G_\nu$$

Sonuçta $G_\mu/_{\mu \cap \nu} \cong G_\mu + G_\nu/_{\nu}$ olur.

Teorem 5.31 (3. İzomorfizma teoremi) $\mu(0) = \nu(0)$ ve $\nu \subset \mu$ olmak üzere μ ve ν gamma modülün normal bulanık alt modülleri ise $\dfrac{G/_{\nu}}{G_\mu/_{\nu}} \cong G/_{\mu}$ olur.

İspat $G_\mu/_{\nu}$ nün $G/_{\nu}$ nün gamma alt modülü olduğu kolayca görülebilir. $h: G/_{\nu} \to G/_{\mu}$ $h(\nu^*[x]) = \mu^*[x]$ dönüşümünü tanımlayalım. $\nu^*[x] = \nu^*[y]$ eşitliğinden $\mu(x\alpha y) \geq \nu(x\alpha y) = \nu(0) = \mu(0) \Rightarrow \mu^*[x] = \mu^*[y]$ olur. Dolayısıyla h iyi tanımlıdır. Ayrıca,

$$h(v^*[x] \oplus v^*[y]) = h(v^*[z] \mid z \in v^*[x] + v^*[y])$$

$$= \{\mu^*[z] \mid z \in v^*[x] + v^*[y]\}$$

$$= \mu^*\left[v^*[x]\right] \oplus \mu^*\left[v^*[y]\right]$$

$$= \mu^*[x] \oplus \mu^*[y]$$

$$= h(v^*[x]) \oplus h(v^*[y])$$

$$h(gv^*[x]) = h(v^*[gx]) = \mu^*[gx] = g\mu^*[x] = gh(v^*[x])$$

h örten olduğundan ayrıca epimorfizmadır.

$$Çekh = \left\{v^*[x] \in G/_{v} \,\middle|\, h(v^*[x]) = \mu^*[0]\right\}$$

$$= \left\{v^*[x] \in G/_{v} \,\middle|\, \mu^*[x] = \mu^*[0]\right\}$$

$$= \left\{v^*[x] \in G/_{v} \,\middle|\, \mu(x\alpha y) = \mu(0)\right\}$$

$$= \left\{v^*[x] \in G/_{v} \,\middle|\, x \in \mu^*\right\}$$

$$= G_\mu/_{v}$$

Sonuçta $\dfrac{G/_{v}}{G_\mu/_{v}} \cong G/_{\mu}$ olur.

Bu bölümde gamma modüllerin bulanık asal alt modüllerini tanımlayacağız. Bulanık asal alt modüller de gördüğümüz teoremleri benzer biçimde, Acar [21] in de yardımı ile gamma modüller için de göstereceğiz.

Tanım 5.32 μ ve v G, ΓM modülün bulanık alt modülleri olsun. Eğer $\mu \subseteq v$ ise μ ye v nün bulanık alt modülü denir.

Tanım 5.33 μ, v nün bulanık alt modülü olsun. Eğer $g_t \in [0,1]^G$, $x_s \in [0,1]^M$ ve $\gamma \in \Gamma$

için, $g_t \Gamma x_s \subset \mu$ iken $x_s \subset \mu$ veya $g_t \Gamma \nu \subset \mu$ oluyorsa μ, ν nün bulanık asal alt modülüdür denir. Eğer burada $\nu = \chi_M$ alırsak μ ye G ΓM modülün bulanık asal alt modülü denir.

Teorem 5.34 $M = G$ değişmeli ve birimli bir halka olmak üzere, $\mu \in [0,1]^M$ gamma halkasının bulanık asal ideali ise, $\mu \in [0,1]^M$ G ΓM modülün bulanık asal alt modülü olur.

İspat μ M gamma halkasının bulanık asal ideali olsun. Bu durumda $\mu \subset \chi_M$ ve μ G, ΓM modülün bulanık alt modülü olur. $g_t, x_s \in [0,1]^G$ için $g_t \Gamma x_s \subset \mu$ olsun. Eğer $x_s \subset \mu$ ise μ, G ΓM modülün bulanık asal alt modülü olur. Diğer durumda, μ gamma halkasının bulanık asal ideali olduğu için $g_t \subset \mu$ ifadesinden $g_t(g) = g_t \Gamma \chi_M (g\gamma m) \leq \mu(g) \leq \mu(g\gamma m)$ elde edilir. Böylece μ, G ΓM modülün bulanık asal alt modülü olur.

Şimdi bulanık asal alt modüllerle gamma modüllerin asal alt modülleri arasındaki ilişkiyi araştıralım.

Teorem 5.35 μ, ν nün bulanık asal alt modülü olsun. $t \in [0,1]$ için $\mu_t \neq \nu_t$ ise μ_t, ν_t nin bir asal alt modülüdür.

İspat $\exists g \in G, m \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $\mu_t \neq \nu_t$ ve $g\gamma m \in \mu_t$ olsun. Buradan $\mu(g\gamma m) \geq t$ için $(g\gamma m)_t = g_t \gamma m_t \subset \mu$ elde edilir. μ, ν nün bulanık asal alt modülü olduğundan $m_t \subset \mu$ veya $g_t \gamma \nu \subset \mu$ olur. $m_t \subset \mu$ ise $\mu(m) \geq t$ den $m \in \mu_t$ bulunur. Diğer durumda $g_t \gamma \nu \subset \mu$ olsun. Her $w \in g\gamma \nu_t$ için $m \in \nu_t$ olacak şekilde $w = g\gamma m$ alabiliriz. Bu durumda $\nu(m) \geq t$ elde edilir. $t = t \wedge \nu(m) \leq \sup_{w=g\gamma x} \{t \wedge \nu(x)\} = g_t \gamma \nu(w) \subset \mu(w)$ eşitliğinden $w \in \mu_t$ ve dolayısıyla $g\gamma \nu_t \subset \mu_t$ olur. Sonuç olarak μ_t, ν_t nin bir asal alt modülüdür.

Teorem 5.36 μ, G ΓM modülün bulanık asal alt modülü olsun. Bu durumda $\mu_* = \{ g \in G \mid \mu(g) = \mu(0_G) \}$ ve $\mu^* = \{ g \in G \mid \mu(g) > 0 \}$ sırasıyla gamma modülün asal alt modülleridir.

İspat Teorem 5.35 e benzer şekilde gösterilir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada bulanık cebirde geçerli olan bazı teoremlerin, bulanık gamma modüller için de geçerli olduğu gösterilmiştir. Gamma modüllerin (normal) bulanık alt modüllerine ait yapılar incelenmiştir. Gamma modülün (normal) bulanık alt modül olma koşulu araştırılmış, gamma modülün (normal) bulanık alt modülünün görüntüsünün ve ters görüntüsünün de gamma modülün (normal) bulanık alt modülleri olduğu gösterilmiştir. Klasik cebirdeki izomorfizma teoremlerinin, gamma modüllerinin (normal) bulanık alt modüllerinde de var olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bulanık asal alt modül ile gamma modüllerin bulanık asal alt modülleri arasındaki ilişki analiz edilmiştir. Gamma modüllerin bulanık alt modüllerine ait bir topolojik yapının da kurulabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Zadeh, L. A., (1965). “Fuzzy sets”, Inform. Control, 8:353-383.

[2] Rosenfeld, A., (1971). Fuzzy groups, J. Math. Anal. Appl., 35:512-517.

[3] Malik, D.S. ve Morderson, J., (1998). “Fuzzy Commutative Algebra”, World Scientific Co. Pte. Ltd, Singapore.

[4] Malik, D.S. ve Mordeson, J. N., (1991). “Fuzzy relations on rings and groups”, Fuzzy sets and systems, 43:117-123.

[5] Liu, W., (1982). “Fuzzy Invariant subgroups and fuzzy ideals”, Fuzzy sets and systems, 8:133-139.

[6] Liu, W., (1983). “Operations on fuzzy ideals”, Fuzzy sets and systems, 11: 31-41.

[7] Negoita, C.V. ve Ralescu, D.A., (1975). “Application of fuzzy systems analysis”, Birkhauser, Basel.

[8] Pan, F.Z., (1987). “Fuzzy finitely generated modules”, Fuzzy Sets and Systems, 21:105-113.

[9] Sidky, F.I., (2001). “On radical of fuzzy submodules and primary fuzzy submodules”, Fuzzy Sets and Systems, 119:419-425.

[10] Makambra, B.B. ve Muralı, V., (2000). On Fuzzy Prime Submodules and radicals, J. Fuzzy math., 8(4):831-843.

[11] Bhambri, S.K., ve Kumar, R., (1995). Fuzzy Prime Submodules and radical of a fuzzy submodule, Bull. Cal. Math. Soc., 87:163-168.

[12] Barnes, W. E., (1966). On the Γ -rings of Nobusawa, Pacific J. Math., 18: 411–422.

[13] Booth, G. L. ve Groenewald, N. J., (1992). On prime one-sided ideals, bi-ideals and quasi-ideals of a gamma ring, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 53(1):55–63.

[14] Booth, G. L. ve Groenewald, N. J., (1992). Prime modules of a gamma ring, Periodica Mathematica Hungarica, 24(1): 55–62.

[15] Coppage, W. E. ve Luh, J., (1971). Radicals of gamma rings, J. Math. Soc. Japan 23:40–52.

[16] Jun, B. ve Lee, C. Y., (1992). Fuzzy Γ -rings, Pusan Kyongnam Math. J. 8(2): 163–170.

[17] Hong, S. M. ve Jun, Y. B., (1995). A note on fuzzy ideals in gamma-rings, Bull. Homam Math. Soc., 12:39–48.

[18] Dutta, T. K. ve Chanda, T., (2005). Structures of fuzzy ideals of Γ-ring, Bull. Malays. Math. Sci. Soc.(2), 28(1):9–18.

[19] Dauns, J., (1978). Prime modules, J. Rein Angew. Math., 298:156-181.

[20] Ersoy, B.A., (2011). Isomorphism theorems for fuzzy submodules of gamma modules, International Journal of the Physical Sciences, (4):6,1834-1840.

[21] Acar, U., (2005). On L-Fuzzy Prime Submodules, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, (34):17-25.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Ferdi ÇELİKER
Doğum Tarihi ve Yeri	: 23.10.1979 Bolu
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: yilfermat@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Matematik	YTÜ	2007
Lisans	Matematik	YTÜ	2001
Lise	Fen - Matematik	Bolu İzzet Baysal Anadolu Lisesi	1997

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2001-Devam ediyor	Milli Eğitim Bakanlığı	Matematik Öğretmeni

YAYINLARI

Bildiri

1. ICAAMM2013 International Conference on Applied Analysis and mathematical modelling, 2-5 june 2013 page 94.