T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

f-CEBİRLERİNİN İKİNCİ SIRALI DUALİ VE BANACH A-MODÜLLERİ ÜZERİNDEKİ A-LİNEER OPERATÖRLER

ESRA ULUOCAK

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
PROF. DR. ÖMER GÖK

İSTANBUL, 2014

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

f-CEBİRLERİNİN İKİNCİ SIRALI DUALİ VE BANACH A-MODÜLLERİ ÜZERİNDEKİ A-LİNEER OPERATÖRLER

Esra ULUOCAK tarafından hazırlanan tez çalışması ……………………… tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Ömer GÖK

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Ömer GÖK

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Prof. Dr. Yasemin KAHRAMANER

İstanbul Ticaret Üniversitesi ________________________

Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Doç. Dr. Erdal GÜL

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Doç. Dr. Bülent KÖKLÜCE

Fatih Üniversitesi ________________________

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Ömer GÖK'e ve çalışmalarım sırasında manevi desteğini eksik etmeyip her zaman yanımda olan eşime ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Eylül, 2014

Esra ULUOCAK

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ

E'	E uzayının topolojik duali
E''	E uzayının topolojik ikinci duali
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\wedge$	İnfimum
$\vee$	Supremum
E^{+}	E kümesinin pozitif konisi
$\lvert x \rvert$	x elemanının mutlak değeri
$\lVert T \rVert$	T operatörünün normu
$\xrightarrow{0}$	Sıralı yakınsama
$\sum$	Toplam
A^{d}	A kümesinin ayrık tümleyeni
$Orth(L)$	L deki bütün ortomorfizmaların kümesi
$L_b(L)$	L deki tüm sıralı sınırlı operatörlerin kümesi
$C(X)$	X üzerindeki tüm sürekli fonksiyoların kümesi
$L^{\wedge}$	L nin Dedekind tamlaması
$\{u\}^{dd}$	u kümesinin ikinci ayrık tümleyeni
$>$	Büyüktür
$\geq$	Büyüktür veya eşittir

$<$	Küçüktür
$\leq$	Küçüktür veya eşittir
x^{+}	x elemanının pozitif kısmı
x^{-}	x elemanının negatif kısmı
$\cap$	Kesişim
$\cup$	Birleşim
$\forall$	Her

ÖZET

f-CEBİRLERİNİN İKİNCİ SIRALI DUALİ VE BANACH A-MODÜLLERİ ÜZERİNDEKİ A-LİNEER OPERATÖRLER

Esra ULUOCAK

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ömer GÖK

Bu çalışmada, A $f-cebirlerinin$ ikinci sıralı dualleri ve Banach $A-$ modülleri üzerindeki lineer operatörler incelenmiştir. X bir Archimedean $f-cebiri$ olmak üzere, X in ikinci duali X'' de tanımlı Arens çarpımları verilmiştir. Bu çarpımlardan faydalanarak, $T \in Orth(X)''$, $x' \in X'$ için $\alpha : Orth(X)'' \to Orth(X)'$, $\alpha(T)x' = Tx'$ dönüşümü ve $F \in X$, $f \in Orth(X)'$ için $\phi : X'' \to Orth(X)''$, $\phi(F)(f) = F(f_X)$ olmak üzere $\beta = \alpha \circ \phi$ dönüşümünün bir cebir homomorfizması olduğu gösterilmiştir.

A, Banach $f-cebiri$ olmak üzere Banach $f-$modül üzerindeki $A-lineer$ operatör tanımı verilmiştir. X ve Y Banach $A-$modül olduğunda X' ve X'' nin birer Banach $A''-$modül olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, lineer $T : X \to Y$ operatörü $A-lineer$ ise onun sürekli adjoint operatörü $T' : Y' \to X'$ nin de $A''-lineer$ operatör olduğu gösterilmiştir. Son olarak, $T \in Orth_A(X)$ ise $T' \in Orth_{A''}(X')$ olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Arens çarpımları, $f-cebiri$, ortomorfizma, sıralı dual, Banach $A-$ modülleri, ayrıklığı koruyan operatör.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

ORDER BIDUAL OF f-ALGEBRAS AND A-LINEAR OPERATORS ON BANACH A-MODULES

Esra ULUOCAK

Department of Mathematics
Ph.D. Thesis

Adviser: Prof. Dr. Ömer GÖK

In this thesis, order bidual of $f-$algebra A and $A-$linear operators on Banach $A-$ modules are investigated. Let X be an Archimedean $f-$ algebra. The Arens multiplication in the order bidual X'' is given. With this multiplication it is shown that the mapping $\alpha : Orth(X)'' \to Orth(X)'$, $\alpha(T)x' = Tx'$ for $T \in Orth(X)''$, $x' \in X'$ and the mapping $\beta = \alpha o \phi$ are algebra homomorphism, where $\phi : X'' \to Orth(X)''$, $\phi(F)f = F(f_X)$. Let A be a Banach $f-$ algebra. The definition of $A-$ linear operator on Banach $f-$modul is given. Let X and Y be a Banach $A-$ modul. It is shown that X' and X'' are Banach $A''-$ modul. Also, it is shown that if a linear operatör $T : X \to Y$ is an $A-$ linear, then its continuous adjoint operator $T' : Y' \to X'$ is an $A''-$ linear operator. And also, it is shown that if $T \in Orth_A(X)$, then $T' \in Orth_{A''}(X')$.

Keywords: Arens multiplication, f-algebra, orthomorphism, order dual, Banach $A-$ modules, disjointness preserving operator .

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Pozitif operatörlerin başlangıcı 19. yüzyılın başlarına dayanır. Başlarda pozitif operatörler, integral operatörlerle (çalışmaları fonksiyonel analizi başlatan) bağlantı kurularak çalışılmıştır. Ancak çok sonraları pozitif operatörler sistematik bir biçimde araştırılmıştır. Özellikle pozitif operatörlerin gelişimi, Riesz uzaylarının gelişmesiyle hız kazanmıştır.

$f-$halka teori ve $f-$cebir teori, bir çok yazar tarafından çalışılmıştır. Örneğin [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9] bazı yazarlar [3] bir f-halkayı, $u \wedge v = 0,\ w \geq 0$ ise $(uw) \wedge v = (wu) \wedge v = 0$ özelliğiyle birlikte bir latis sıralı halkası olarak tanımlar. Diğerleri (9.11 [2] A. Bigard, K. Keimel ve S. Wolfenstein ve Bölüm IX, [4] L. Fuchs) bir $f-$halkayı, tamamıyla sıralı halkaların bir altdirekt izomorfik olan bir latis sıralı halkası olarak tanımlar. Bu iki tanım eşdeğer olarak da görülebilir. Ancak, herhangi bilinen eşdeğer kanıt Zorn Önermesi' ndeki iddialara dayanır. Eğer ikinci tanım kullanılırsa, ' her tamamıyla sıralı halkada sağlanan bir özdeşlik, her $f-$halkada sağlanır' matematiksel yorumu aracılığıyla $f-$halkalar üzerindeki belli sayıdaki standart teoremleri kanıtlamak mümkündür.

1928 yılında F. Riesz, 'Doğrusal Fonksiyonların Ayrışması Üzerine' [10] (pozitif ve negatif kısımlar) konulu çalışmayı, Riesz uzayları ve pozitif operatörlerin başlangıcını, Bologna'da Uluslararası Matematikçiler Konferansı'nda sunmuştur. 1930 ların ortalarında, Riesz uzaylarının teorisi H. Freudenthal ve L.V. Kantorovic tarafından aksiyomatik olarak geliştirilmiştir. Ayrıca, pozitif operatörler 1930 ların ortalarında yine L. Kantorovich tarafından sunulmuş ve çalışılmıştır. Yaptıkları çalışmayı ilk olarak G. Birkhoff'un Latis Teorisi [11] kitabının baskısıyla ders kitabı olarak sunmuşlarıdır.

Şüphesiz ki, pozitif operatörlerin en kapsamlı çalışması 1930 larda F. Riesz, L. V. Kantorovich, ve G. Birkhoff tarafından yapılmıştır.

1940 larda ve 1950 lerin başlarında pozitif operatörler üzerine çok az çalışma yapılmıştır. Bu periyotta önemli katkılar Sovyet okulundan (L. V. Kantorovich, M. G. Krein, A. G. Pinsker, M. A. Rutman, B. Z. Vulik) ve Japon okulundan (H. Nakano, K. Yosida, T. Ogasuwara ve öğrencileri) gelmiştir. 1954 yılında, Kısmi Sıralı Uzaylarda

Fonksiyonel Analiz kitabı [12] L. V. Kantorovich, B. Z. Vulikh ve A. G. Pinsker tarafından Sovyet Literatürüne girmiştir. Bu kitap pozitif operatörler ve onların uygulamalarının mükemmel işlemlerini içerir.

1950 lerin ortalarından beri pozitif operatörlerin araştırılması kaydadeğer bir ivme kazanmıştır. 1955 ten 1970 yılına kadar önemli katkılar T. Ando, C. Goffman, S. Kaplan, S. Karlin, P. P. Korovkin, M. A. Krasnoseskii, P. P. Zabreiko, E. I. Pustylnik ve P. E. Sobolevskii, U. Krengel, G. Y. Lozanorskii, W.A, J. Luxemburg ve A. C. Zaanen, H. Nakano, L. Namiska, A. Pressini, H. H. Shaefer ve B. Z. Vulikh' ten gelmiştir. Böylece 1960 ların sonuna kadar pozitif operatörlerin ' alt yapısı ' iyi kurulmuştur.

1970 li yıllar, pozitif operatörler teorisi için ' olgunluk periyodu ' olarak ifade edilebilir.

1974 yılında, ilk monografi tamamen, literatürde çıkan konuya adanmıştır. Bu pozitif operatörlerin gelişmesinde büyük etkisi olan H. H. Schaefer in 'Banach Lattices and Positive Operators' [13] kitabıdır. Bu dönemde, bu alanda çalışan matematikçi sayısı artmıştır ve araştırmalar daha sistematik şekilde yürütülmüştür. Konunun gelişimi çok hızlanmıştır; ve buna ek olarak diğer disiplinlere olan uygulamaları gelişmeye başlamıştır. 1970 lerin kilometre taşı P. G. Dodds ve D. H. Fremlin' in pozitif kompakt operatörlerle ilgili makalesidir [14]. 1970 lerde pozitif operatör teorisiyle ilgili çalışanların listesi Ju. A. A Abromovich, C.D. Aliprantis, S. J. Bernau, A.V. Buhvalov, O. Burkinshaw, D. I. Cartwright, P. G. Dodds, M. Dohoux, P. Van Elik, J. J. Grobler, D. H. Fremlin, H.P. Lotz, W. A. J. Luxemburg, M. Meyer, P. Meyer-Nieberg, R.J. Nagel, U. Schlotterback, H. H. Schaefer, A. R. Schep, C. T. Tucker, A.I. Veksler, A. W. Wickstead, M. Wolff ve A. C. Zaanen' i içerir.

1980 ler pozitif operatörler teorisi için çok iyi başladı. Pozitif kompakt operatörler üzerine önemli makalelerin bir serisi C. D. Aliprantis ve O. Burkinshaw tarafından yazılmıştır [15] ,[16] ,[17] ,[18]. Pozitif operatörler üzerine bir diğer seçkin kitap, pozitif operatörler literatürüne eklenmiştir. Bu A. C. Zaanen' in Riesz Uzayları II [19] kitabıdır. Banach uzayları teorisini çalışan pek çok matematikçi pozitif operatörleri çalışmaktadır; ve bu durum konuya ekstra bir destek vermiştir. Buna ek olarak, pozitif operatörler teorisi, matematiksel fizikten ekonomiye kadar pek çok disiplinde bazı önemli uygulama alanları bulmuştur.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı, X bir Archimedean $f-$cebiri ve X', X in duali olduğunda $Orth(X)''$ *den* $Orth(X)'$ e tanımladığımız $\alpha(T)x' = Tx'$ dönüşümünün ve X'' *den* $Orth(X)''$ e tanımlanan $\phi : X'' \to Orth(X)''$ olmak üzere $\beta = \alpha \, o \, \phi$ dönüşümünün lineer, birebir bir cebir homorfizması olduklarını göstermektir. Diğer bölümde Banach $A-$modül tanımını verip, X' ve X'' nün birer Banach $A''-$modül olduğunu ispatlamaktır. Ayrıca, X *ve* Y Banach $A-$modülü olduğunda, lineer $T : X \to Y$ operatörü $A-$lineer ise onun sürekli adjoint operatörü $T' : Y' \to X'$ nün de $A''-$lineer operatör olduğunu ispatlamaktır.

1.3 Hipotez

X Archimedean $f-$cebiri ve X in duali de X' olduğunda $T\in Orth(X)''$, $x'\in X'$ *için*, $\alpha{:}Orth(X)''\to Orth(X)'$, $\alpha(T)x'=Tx'$ dönüşümü lineer, birebir bir cebir homomorfizmadır. $x\in X$ *ve* $f\in X'$ alındığında $\pi\in Orth(X)$ için, $f.x{:}\,Orth(X)\to R$, $(f.x)(\pi)=(fo\pi)x$ dönüşümü ile $fox\in Orth(X)'$ olur.

Ayrıca *her* $F\in X$, $f\in Orth(X)'$ için $\phi{:}\,X''\to Orth(X)''$, $\phi(F)f=F(f_X)$ dönüşümünü aldığımızda $\alpha{:}\,Orth(X)''\to Orth(X)'$ olmak üzere, $\beta=\alpha\,o\,\phi$ bir cebir homomorfizmadır. $\varepsilon(f)=\left\{g\in Orth(X)' : \quad 0\le g \quad ve \quad g_x=f\right\}$ olmak üzere X in sıralı duali X' den $\varepsilon(f)\neq 0$ olacak şekilde bir f elemanı alındığında $x\in X^{+}$ için, $f.x=0$ olduğunda $f(x)=0$ olur.

X, bir Banach $A-$modül olduğunda her $a\in A$ için $m^{*}: A''\to L(X')$, $m^{*}(a)f=a.f$ tanımlandığında $m^{*}(a)=(m(a))^{*}$ olur. Ayrıca , X' ve X'' birer Banach $A''-$ modüllerdir.

$w^{*}ot$ zayıf * operatör topoloji olmak üzere her $a\in A''$ *için* $m^{*}(a)$, $A''[\sigma(A'',A')]$ den $L(X')[w^{*}ot]$ ye süreklidir. Ve, X *ve* Y Banach $A-$ modülü olduğunda, lineer $T{:}\,X\to Y$ operatörü $A-$lineer ise onun sürekli adjoint operatörü $T'{:}\,Y'\to X'$ de $A''-$lineer operatördür.

X, bir Banach $A-$modül ve $T: X\to X$ operatörü bir $A-$lineer operatör olduğunda, $T'{:}\,X'\to X'$ operatörü T operatörünün adjointi olmak üzere her $x\in X$, $x'\in X'$, için $Tx.x'=x.T'x'$ olur. Ayrıca Eğer, $T\in Orth_A(X)$, ise o zaman $T'\in Orth_{A''}(X')$ olur.

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamızın içinde yer alan temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 2.1 E boş olmayan bir küme ve K cismi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olsun.

$$+ : E \times E \to E \;, (x, y) \to x + y$$
$$. : K \times E \to E \;, (a, x) \to a.x \;,$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım.

Aşağıdaki koşullar sağlansın.

a) Her $x, y, z \in E$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ (toplamada birleşme özelliği)

b) Her $x, y \in E$ için $x + y = y + x$ (toplamada değişme özelliği)

c) Her $x \in E$ için $x + 0 = x$ eşitliğini sağlayan E içinde bir tek 0 (sıfır) elemanı vardır. (Burada 0 elemanı, etkisiz elemandır.)

d) Her $x \in E$ için $x + (-x) = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in E$ vardır. ($-x$ toplamada ters elemandır.)

e) Her $x \in E$ için $1.x = x$ (1 çarpmada birim ya da etkisiz elemandır.)

f) Her $x \in E$ ve $a, b \in K$ için $(ab)x = a(bx)$.

g) Her $x \in E$ ve $a, b \in K$ için $a(x + y) = ax + ay$.

h) Her $x \in E$ ve $a, b \in K$ için $(a + b)x = ax + bx$.

Bu durumda E ye K üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) ve elemanlarına da vektör denir. $K = \mathbb{R}$ alınırsa E ye bir reel vektör uzayı , $K = \mathbb{C}$ alınırsa E ye bir kompleks vektör uzayı adı verilir [22].

Örnekler 2.2

1) Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ve kompleks sayılar kümesi $\mathbb{C}$ bildiğimiz çarpma ve toplama işlemlerine göre birer vektör uzayıdır.

2) $E = \mathbb{R}^n$, $K = \mathbb{R}$ olsun.

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in E$ için toplama işlemini şu şekilde tanımlayalım:

$$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n).$$

Bir $a \in R$ sayısı ile $x = (x_1, ..., x_n) \in E$ vektörünün çarpımını da şu şekilde tanımlayalım:

$$a.x = (ax_1, ...ax_n) \ .$$

Bu çarpma ve toplama tanımları ile $\mathbb{R}^n$ bir vektör uzayıdır.

3) K, $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ ve X boş olmayan bir küme olsun. X kümesinden K kümesine tanımlı tüm fonksiyonların kümesi E olsun. Yani ;

$$E = \{ f \mid f : X \to K \} .$$

$f, g \in E$ için $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in X$ olarak toplam tanımlansın.

Bir $a \in K$ ve $f \in E$ için çarpımı $(af)(x) = af(x)$ olarak tanımlansın. Bu çarpma ve toplama işlemlerinin tanımları ile E bir vektör uzayıdır. Çünkü,

$a)$ Her $f, g \in E$ için,

$[f + (g + h)](x) = f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = [f(x) + g(x)] + h(x), \forall x \in X.$

O halde $f + (g + h) = (f + g) + h$ sağlanır.

$b)$ Her $f, g \in E$ için,

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x), \forall x \in X$. O halde $f + g = g + f$ sağlanır.

$c)$ $0(x) = 0, \forall x \in X$. O halde sıfır fonksiyonu 0 , E nin sıfırıdır.

$d)$ $\forall f \in E$ için $-f \in E$ fonksiyonu $(-f)(x) = -f(x)$ eşitliğini sağlar.

$e)$ Her $f \in E$ için $(1.f)(x) = 1f(x) = f(x)$, $x \in X$ olduğundan $1.f = f$ özelliği sağlanır.

$f)$ $a, b \in K$ ve $f \in E$, $x \in X$ için,

$[(ab)f](x) = (ab)f(x) = a(bf(x)) = a(bf)(x)$ olduğundan $(ab)f = a(bf)$ sağlanır.

$g)$ $f, g \in E$, $a \in K$ ve $x \in X$ için,

$[a(f + g)](x) = a(f + g)(x) = a(f(x) + g(x)) = af(x) + ag(x) = (af + ag)(x)$ olduğundan

$a(f+g)=af+ag$ sağlanır.

$h)\quad a,b\in K, f\in E \; ve \; x\in X$ için

$[(a+b)f](x)=(a+b)f(x)=af(x)+bf(x)=(af+bf)(x)$ olduğundan

$(a+b)f=af+bf$ sağlanır.

O halde E bir vektör uzayıdır [22].

Tanım 2.3 Boştan farklı bir küme üzerinde yansıma, ters simetri ve geçişme özellikleri varsa β bağıntısına bu küme üzerinde sıralama bağıntısı denir. Boştan farklı E kümesi üzerindeki $\leq$ sıralama bağıntısı şu özellikleri sağlar :

i) Her $x\in E$ için $x\leq x$ olur. (yansıma)

ii) Her $x,y\in E$ için $x\leq y$ ve $y\leq x$ sağlanıyorsa $x=y$ olur. (ters simetri)

iii) Her $x,y\in E$ için $x\leq y$ ve $y\leq z$ sağlanıyorsa $x\leq z$ olur. (geçişme)

Herhangi bir küme sıralama bağıntısı özelliklerini sağlıyor ise bu kümeye kısmi sıralı küme denir. Üzerinde sıralama tanımlanmış reel vektör uzayına da kısmi sıralı reel vektör uzayı denir [20].

Tanım 2.4 E, bir reel vektör uzayı ve $\leq$ E üzerinde bir sıralama bağıntısı olsun. Her

$x,y,z\in E \quad ve \quad a\geq 0$ reel sayısı için,

$i)\; x\leq y \;\Rightarrow\; x+z\leq y+z$

$ii)\; x\leq y \;\Rightarrow\; ax\leq ay$

aksiyomları sağlanıyorsa E ye sıralı vektör uzayı denir [20].

Tanım 2.5 E bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$\|.\|:E\to R$, $x\to\|x\|$, tanımlı dönüşümüne aşağıdaki koşulları sağlarsa E üzerinde bir norm adı verilir.

(i) Her $x\in E$ için $\|x\|\geq 0$

(ii) Her $x\in E$ için $\|x\|=0$ ise $x=0$.

(iii) Her $x\in E \; ve \; a\in K \; için \; \|ax\|=|a|\|x\|$

(iv) Her $x,y\in E \; için \; \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

Bu durumda $(E,\|.\|)$ çiftine bir normlu vektör uzayı denir. Üzerinde norm tanımlanmış bir uzaya normlu bir uzay adı verilir [22].

Örnek 2.6

1) $E = \mathbb{R}$ olsun. $x \in R$ *için* $\|x\| = |x|$ tanımı ile $\|.\|$ $E = \mathbb{R}$ üzerinde bir norm belirtir.

2) $E = \mathbb{C}$ olsun. $x \in C$ *için* $\|x\| = |x|$ tanımı ile $\|.\|$ $\mathbb{C}$ üzerinde bir norm belirtir.

3) $E = \mathbb{R}$ olsun. $x = (x_1, \ldots.., x_n) \in E$ için,

$$\|x\| = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

tanımı ile $\|.\|$ E üzerinde bir normdur.

4) $1 \leq p < \infty$ için $E = l_p$ olsun. $x = (x_n) \in l_p$ için

$$\|x\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_n|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

tanımı ile $\|.\|$ l_p üzerinde bir normdur.

5) X boş olmayan bir küme ve $B(X)$, X üzerinde tanımlı sınırlı reel değerli fonksiyonların vektör uzayı olsun.

$f \in B(X)$ için $\|f\| = \sup_{t \in X} |f(t)|$ tanımı ile $\|.\|$ $B(X)$ üzerinde bir normdur.

İspat:

Reel sayıların özelliğinden üstten sınırlı bir kümenin en küçük üst sınırı olduğundan norm iyi tanımlıdır. Şimdi sıra ile norm aksiyomlarını sağladığını görelim:

i) Mutlak değerin tanımından dolayı her $f \in B(X)$ için $\|f\| \geq 0$.

ii) $f \in B(X)$ için $0 = \|f\| \geq |f(t)|$ olduğundan her $t \in X$ için $f(t) = 0$ dır. O halde $f = 0$ (sıfır) fonksiyonudur.

iii) $f \in B(X), a \in K$ için

$$\|af\| = \sup_{t \in X} \|af(t)\| = |a| \|f\|.$$

iv) $f, g \in B(X)$ için

$|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$ olduğundan dolayı

$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ üçgen eşitsizliği elde edilir [22].

Tanım 2.7 $(E,\|.\|)$ normlu bir uzay ve (x_n) E içinde bir dizi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için bir n_0 bulunduğunda her $n,m \geq n_0$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ oluyorsa (x_n) dizisine E içinde bir Cauchy dizisi denir. Eğer E içindeki her Cauchy dizisi E deki norma göre yakınsak ise E uzayına bir Banach uzayı (veya Tam uzay) adı verilir. O halde bir normlu E uzayının Banach uzayı olması için gerek ve yeter koşul $x_n \in E$ ve verilen her $\varepsilon > 0$ için bir n_0 sayısı bulunabilir ki her $n,m \geq n_0$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlandığında bir $x \in E$ ve bir n_1 sayısı bulunabilir ki her $n \geq n_1$ için $\|x_n - x\| < \varepsilon$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır [22].

Örnek 2.8

1) $1 \leq p < \infty$ için l_p uzayı bir Banach uzayıdır.

İspat:

(x_n) , l_p içinde bir Cauchy dizisi olsun, yani $(x_n) = (y_{jn})_{j\geq 1}, (n = 1,2...)$. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda n_0 sayısı bulunabilir ki $n,m \geq n_0$ için,

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

sağlanır. O halde $n,m \geq n_0$ için

$$\sum_{j=1}^{\infty} |y_{jm} - y_{jn}|^p < \varepsilon^p$$

olur. Dolayısıyla her $k > 0$ için

$$|y_{km} - y_{kn}|^p \leq \sum_j |y_{jm} - y_{jn}|^p < \varepsilon^p$$

olur. $(y_{kn})_n$ reel sayılarda bir Cauchy dizisi olduğundan yakınsar, yani, $\lim_n y_{kn} = y_k \in R,\ (k = 1,2.......)$ olsun. Serinin kısmi toplamlar dizisini düşünelim. Bunun için keyfi bir $0 < K$ sayısı için,

$$\sum_{j=1}^{K} |y_{jm} - y_{jn}|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} |y_{jm} - y_{jn}|^p < \varepsilon^p$$

yazalım. Her $n \geq n_0$ için

$$\sum_{j=1}^{K} |y_{jm} - y_{jn}|^p = \sum_{j}^{K} |y_{jm} - y_{jn}|^p \leq \varepsilon^p$$

olur. $0 < K$ keyfi olduğundan her $n \geq n_0$ için $\sum_j |y_j - y_{jn}|^p$ serisi yakınsar. O halde her $n \geq n_0$ için

$$\sum_{j}^{\infty} |y_j - y_{jn}|^p \leq \varepsilon^p$$

olduğundan $(y_j - y_{jn_0}) \in l_p$, $(j=1,2.....)$ elde edilir. Aynı zamanda $(y_{jn_0}) \in l_p$, $(j=1,2.....)$ ve l_p bir vektör uzayı olduğundan $(y_j) = (y_j - y_{jn_0}) + (y_{jn_0}) \in l_p$ olur. $x = (y_j)$ olsun. O zaman $n \geq n_0$ için

$$\|x_n - x\| = \left[\sum_j |y_{jn} - y_j|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \in$$

olduğundan $\lim_n x_n = x$ elde edilir. O halde l_p uzayı bir Banach uzayıdır.

2) Sınırlı dizilerin uzayı l_∞ üzerindeki supremum normuna göre bir Banach uzayıdır, yani, $x = (x_n) \in l_\infty$ için,

$$\|x\| = \sup_n |x_n| .$$

3) Yakınsak dizilerin uzayı c üzerinde tanımlanan supremum normuna göre bir Banach uzayıdır, yani, $x = (x_n) \in c$ için,

$$\|x\| = \sup_n |x_n| .$$

Tanım 2.9 $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ ve A sıralı bir vektör uzayı olsun. Her $x \in A$ için $x \leq y$ olacak şekilde bir $y \in \mathbb{R}$ varsa $y \in \mathbb{R}$ ye A için bir üst sınır denir. A kümesine de üstten sınırlı küme denir. Her $x \in A$ için $x \leq z$, $z \in R$ olduğunda $y \leq z$ ise y ye A nın en küçük üst sınırı (supremumu) denir ve $\sup A$ ile gösterilir [22].

Tanım 2.10 $\emptyset \neq B \subset \mathbb{R}$ ve B sıralı bir vektör uzayı olsun. Her $x \in B$ için $y \leq x$ olacak şekilde bir $y \in \mathbb{R}$ varsa $y \in \mathbb{R}$ ye B için bir alt sınır denir. B kümesine de alttan sınırlı küme denir. Her $x \in B$ için $z \leq x$, $z \in R$ olduğunda $z \leq y$ oluyorsa y ye B kümesinin en büyük alt sınırı (infimumu) denir ve $\inf B$ ile gösterilir [22].

Tanım 2.11 E , toplamsal özelliklere sahip bir sıralı vektör uzayı olsun. Her $x, y \in E$ çifti için $\{x, y\}$ kümesinin supremumu ve infimumu yine E nin elemanı ise E ye bir Riesz uzayı (vektör latis) denir.

$$x \vee y := \sup\{x, y\}$$

$x \wedge y := \inf\{x, y\}$ şeklinde gösterilir [21].

Tanım 2.12 E, bir sıralı vektör uzayı ise; $E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ kümesine, E nin pozitif konisi denir. Her $x \in E$ için x in pozitif kısmı , x in negatif kısmı ve mutlak değeri şu şekildedir:

$$x^+ = x \vee 0$$

$$x^- = (-x) \vee 0$$

$|x| = x \vee (-x)$ [21].

Tanım 2.13 E, bir Riesz uzayı olsun. $\{\, nx : n \in N \,\}$ kümesi üstten sınırlı olduğunda $x \leq 0$ oluyorsa, E ye Archimedean Riesz uzayı denir [21] .

Tanım 2.14 E bir Riesz uzayı olsun. G, E nin bir vektör alt uzayı olsun. Eğer G, E deki latis işlemleri altında kapalı (yani her $x, y \in G$ için $x \vee y \in G$ *ve* $x \wedge y \in G$) ise G ye E nin bir Riesz alt uzayı denir [21].

Tanım 2.15 E bir Riesz uzayı olsun. $x, y \in E$ alalım. Eğer, $|x| \wedge |y| = 0$ *ise* x, y ye diktir denir ve $x \perp y$ şeklinde gösterilir [21].

Tanım 2.16 E bir Riesz uzayı olsun. E nin boştan farklı bir alt kümesi A olsun. A nın ayrık tümleyeni A^d ile gösterilir ve $A^d = \{x \in E : \textit{her } y \in A \textit{ için } x \perp y\}$ şeklinde tanımlanır [20].

Tanım 2.17 E bir Riesz uzayı ve $x, y \in E$ olsun. E nin boştan farklı bir alt kümesi A olsun. $|x| \leq |y|$ ve $y \in A$ iken $x \in A$ oluyorsa A ya solid (katı) denir [20].

E nin bir solid vektör alt uzayına E de bir ideal denir.

Tanım 2.18 E bir Riesz uzayı olsun. A, E içerisinde bir ideal olsun. $\{x_a\} \subseteq A$ *ve* $0 \leq x_a \uparrow x$ iken $x \in A$ oluyorsa A ya E de band denir [20].

Örnek 2.19 $E = L_p[0,1]$, $0 < p < 1$ ve $G = L_\infty[0,1]$ olsun. O zaman $G \subseteq E \subseteq L_1[0,1]$ eşitsizliği ile G, E nin idealidir, E de $L_1[0,1]$ in idealidir. (Burada $f \geq g$ eşitsizliği ile Lebesgue ölçümüne göre her x için $f(x) \geq g(x)$ olduğu gösterilmektedir.)

Tanım 2.20 Bir Riesz uzayı E üzerinde tanımlı $\|\,.\,\|$ norma; $x, y \in E$ için $|x| \leq |y|$ olduğunda $\|x\| \leq \|y\|$ oluyorsa; latis norm denir. Latis normu içeren Riesz uzaya da normlu Riesz uzayı denir [21].

Tanım 2.21 Normlu Riesz uzayına tam ise Banach latis denir [21].

Tanım 2.22 Bir Riesz uzayına, uzayın üstten sınırlı her boştan farklı alt kümesi bir supremuma (ya da alttan sınırlı her boştan farklı alt kümesi bir infimuma) sahipse Dedekind tam Riesz uzayı denir [21].

Tanım 2.23 Bir Riesz uzayına, uzayın üstten sınırlı her sayılabilir alt kümesi bir supremuma sahipse σ-Dedekind tam Riesz uzayı denir [21].

Tanım 2.24 Bir Y sıralı vektör uzayına eğer her n için nx ≤ y ifadesi $x \leq 0$ olmasını gerektiriyorsa Archimedean sıralı vektör uzayı denir [21].

Tanım 2.25 E, bir vektör uzayı ve K reel veya kompleks sayıların cismi olsun. $f : E \to K$ lineer operatörüne bir lineer fonksiyonel denir [20].

Tanım 2.26 $f : E \to R$ bir lineer fonksiyonel olsun. Her $x \in E^{+}$ için $f(x) \geq 0$ oluyorsa f fonksiyoneline pozitiftir denir [20].

$f : E \to R$ bir lineer fonksiyonel olsun. f, E nin sıralı sınırlı alt uzaylarını R nin sınırlı alt uzaylarına örterek eşliyorsa f ye sıralı sınırlı fonksiyonel denir [20].

Tanım 2.27 E, bir Riesz uzayı olsun.

(i) E üzerindeki tüm sıralı sınırlı lineer fonksiyonellerin vektör uzayına E nin sıralı duali denir. E' ile gösterilir.

(ii) E üzerindeki sıralı sürekli lineer fonksiyonellerin vektör uzayı E'_n ile gösterilir. E'_n E üzerinde bandtır. E'_n bandına, E nin sıralı sürekli duali denir.

(iii) E bir Riesz uzayı ise onun sıralı duali E'de yine bir Riesz uzayıdır. E' üzerindeki tüm sıralı sınırlı lineer fonksiyonellerin Riesz uzayına E nin ikinci sıralı duali denir ve E'' ile gösterilir. E'' , E' nün sıralı dualidir [20].

Örnekler 2.28

$a)$ $c'_0 \equiv l_1$ olduğunu gösterelim.

İspat:

$f \in c'_0$ olsun. $f(e_n) = y_n$ ve $y = (y_n)$ yazalım. $x_N = \sum_{n=1}^{N} (\operatorname{sgn} y_n) e_n$, $e_n = (0,\ldots 1,0,\ldots.)$ olsun. O zaman,

$f(x_N) = \sum_{n=1}^{N} |y_n| \leq \|f\| \|x_N\|$ eşitsizliğinden $y = (y_n) \in l_1$ ve $\|y\| \leq \|f\|$ elde edilir.

$x = (x_n) \in c_0$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ için f nin lineer ve sürekliliğinden

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ yazılabilir. Buradan da

$|f(x)| \leq \|x\| \sum_{n=1} |y_n| = \|x\| \|y\|$ eşitsizliğinde $\|x\| \leq 1$ üzerinden supremum alınırsa $\|f\| \leq \|y\|$ elde edilir. Bu nedenle $\|f\| = \|y\|$, $yani$ $\|Tf\| = \|y\| = \|f\|$.

$T : c_0' \to l_1$, $f \to Tf = (f(e_n)) = (y_n)$

dönüşümü lineer izometri olduğundan T nin örten olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $y = (y_n) \in l_1$ alalım. O zaman,

$g_y(x) = \sum_{n=1} x_n y_n$, $x = \sum_n x_n e_n \in l_1$ tanımıyla g_y sürekli lineer bir fonksiyoneldir. Bu nedenle $T(g_y) = g_y(e_n) = (y_n) = y$ *ile* T örtendir. O halde $c_0' \equiv l_1$ dir.

$b)$ $c' \equiv l_1$ olduğunu gösterelim.

İspat :

$x = (x_n) \in c$, $\lim_n x_n = x_0$ ve $e = (1,1,1,......)$ olmak üzere,

$x = x_0 e + \lim_n \sum_{n=1}^{N} (x_{n-x_0}) e_n$ yazalım. Bir $f \in c'$ için,

$f(x) = x_0 f(e) + \lim_n \sum_{n=1}^{N} (x_{n-x_0}) f(e_n)$, $f(e_n) = b_n$, $f(e) = b_0$ olsun. $c_0 \subset c$

olduğundan $(x_{n_0}) \in c_0$, $\|x_{n_0} \le 1\|$ kabul edelim. O zaman, $f(x_{n_0}) = \sum_{n=1}^{n_0} |b_n|$ ve buradan da $|f(x_{n_0})| \le \|x_{n_0}\| \|f\|$ eşitsizliği $(b_n) \in l_1$ olmasını gerektirir.

$b_0 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = a_0$ olsun.

Bu durumda $f(x) = x_0 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n b_n$, $x = (x_n) \in c$ ve buradan da $|a_0| + \sum |b_n| \le \|f\|$ olur.

$y = (y_n) \in l_1$ *ve* $\|y\| = |a_0| + \sum |b_n| < \infty$ *ise* $b_0 \lim_n x_n + \sum x_n y_n = f_y(x)$, $f_y \in c'$ olduğundan örtendir [22] .

$c)$ $l_1' \equiv l_\infty$ dir.

İspat :

l_1 uzayının Schauder tabanı (e_n) olsun. O halde $x \in l_1$ vektörü $x = \sum_n a_n e_n$ olacak şekilde tek bir biçimde (a_n) sayı dizisi bulunabilir. Böylece,

$T : l_1' \to l_\infty$, $Tf = (f(e_n))$ ve $f(e_n) = b_n$ olarak tanımlansın.

f lineer ve sınırlı olduğundan,

$|b_n| \le \|f\| \|e_n\|$, $(\|e_n = 1\|)$ ve bundan dolayı,

$\sup_n |b_n| \leq \|f\|$ elde edilir. O halde $(b_n) \in l_\infty$ dir.

$|f(x)| = \sum_n a_n b_n \leq \|x\| \sup_i |b_i|$

$\|x\| \leq 1$ üzerinden supremum alınırsa $\sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \leq \|f\|$ elde edilir.

O halde $\|Tf\| = \|(b_n)\| = \|f\|$, yani bir $y = (y_n) \in l_\infty$ için $g_y(x) = \sum_n a_n y_n$, $\quad x = (a_n) \in l_1$ olacak biçimde bir g lineer ve sınırlı fonksiyoneli vardır. g nin lineerliliği açık olduğundan g nin sınırlılığını verelim:

$|g(x)| \leq \sum |a_n y_n| \leq \|x\|]y].$

O halde $g \in l_1'$ dür.

Teorem 2.29 E, bir reel vektör uzayı ve F, E nin bir özalt uzayı ve $p: E \to R$ bir altlineer fonksiyonel ve $f: F \to R$ bir lineer fonksiyonel ve her $x \in F$ için $f(x) \leq p(x)$ olsun.

O zaman, bir $\hat{f}: E \to R$ lineer fonksiyoneli bulunabilir ki her $x \in E$ için $\hat{f}(x) \leq p(x)$ sağlanır ve her $x \in F$ için $\hat{f}(x) = f(x)$ dir [22].

İspat:

Bu teoremi ispat etmek için önce şu iddiayı ispat edelim.

$z \in E - F$ olsun. $\{z\}$ ve F ile üretilen altuzay M olsun, yani, $M = span(\{z\} \cup F)$. $f: F \to R$ bir lineer fonksiyonel ve $p: E \to R$ bir altlineer fonksiyonel , ve her $x \in F$ için $f(x) \leq p(x)$ olsun. O zaman f fonksiyonelini M altuzayına genişletebiliriz, yani; $\hat{f}: M \to R$ lineer fonksiyoneli bulunabilir ki, her $x \in M$ için $\hat{f}(x) \leq p(x)$ eşitsizliği sağlanır ve $\hat{f}(x) = f(x)$ dır.

$f(x) \leq p(x)$ olsun. $y - u \in F$ için

$f(y-u) = f(y) - f(u) \leq p(y-u) \leq p(y+z) + p(-u-z)$ eşitsizliği elde edilir. O halde,

$$-p(-u-z) - f(u) \leq p(y+z) - f(y) \text{ eşitsizliği doğrudur.}$$

$y \in F$ elemanını sabit tutup $u \in F$ üzerinden supremum alalım. Sol tarafın bir üst sınırı olduğundan en küçük üst sınırı vardır, bu a olsun.

$$a = \sup\{-p(-u-z) - f(u) : u \in F\}.$$

Şimdi $u \in F$ elemanını sabit tutup $y \in F$ üzerinden infimum alalım. Sağ tarafın bir alt sınırı olduğundan en büyük alt sınırı vardır, bu b olsun.

$$b = \inf\{p(y+z) - f(y) : y \in F\}.$$

O halde bir $c \in R$ bulunabilir ki $a \leq c \leq b$ eşitsizliği sağlanır. Bir $t \in F$ için,

$$-p(-t-z)-f(t)\leq c\leq p(t+z)-f(t)$$ olur.

$z\in E-F$ olduğundan bir $a\in K$ için,

$$x=y+az,\quad y\in M$$ yazılabilir.

$\hat{f}:M\to R$ dönüşümü $\hat{f}(y+az)=f(y)+ac$ olarak tanımlansın. $\hat{f}$, M üzerinde iyi tanımlı, lineer fonksiyoneldir. $a=0$ alınırsa $\hat{f}(y)=f(y)$ olduğundan $\hat{f}$, f fonksiyonelinin bir genişlemesidir, yani , her $y\in M$ için $\hat{f}(y)=f(y)$ eşitliği sağlanır. Bir $x\in M$ alalım. O halde $x=y+az$ biçimindedir. Burada a sayısı $0<a$, $a<0$ $veya$ $a=0$ dır.

(1) $a=0$ olsun. O zaman $\hat{f}(y+az)=\hat{f}(y)=f(y)$ olduğundan

$$\hat{f}(y)\leq p(y)$$

eşitsizliği sağlanır.

(2) $a>0$ olsun. Bu durumda

$$c\leq p(y+z)-f(y)$$

eşitsizliğinde $\dfrac{y}{a}\in F$ yazılırsa

$$c\leq p\left(\frac{y}{a}+z\right)-f\left(\frac{y}{a}\right)$$

olması gerekir. Böylece,

$$f(y)+ac\leq p(y+az)$$

yani,

$$\hat{f}(x)\leq p(x)$$ elde edilir.

(3) $a<0$ olsun. Bu durumda

$$-p(-y-z)-f(y)\leq c$$

eşitsizliğinde $\dfrac{y}{a}\in F$ yazılırsa

$$-p\left(-\frac{y}{a}-z\right)\leq c+f\left(\frac{y}{a}\right)$$

bulunur. $-a>0$ olduğundan,

$$\hat{f}(y)=ac+f(y)\leq p(y+az)$$

elde edilir. f fonksiyonelinin genişlemesi olan lineer fonksiyonellerin kümesi

$$S=\{f_\alpha : \alpha\in I\}$$

olsun ve her x için $f_\alpha(x) \le p(x)$ sağlansın. $f \in S$ olduğundan S kümesi boş değildir. $f_\alpha, f_\beta \in S$ için,

$$f_\alpha \le f_\beta \Leftrightarrow T_{f_\alpha} \subset T_{f_\beta}, f_\beta | T_\alpha = f_\alpha$$

bağıntısını tanımlayalım. Burada T_{f_a} *ile* f_α nın tanım kümesi belirtilmektedir. $\le$, S üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı tanımlar. $\hat{f} \in S$ *ve* $T_{\hat{f}} = \bigcup_\alpha T_\alpha$ bir altuzaydır. $x \in \bigcup_\alpha T_\alpha$ olsun. O zaman, bir α için $x \in T_{f_\alpha}$ ve $\hat{f}(x) = f_\alpha(x)$ dır. S lineer olarak sıralı olduğundan,

$$T_{f_\alpha} \subset T_{f_\beta} \quad veya \quad T_{f_\beta} \subset T_{f_\alpha}$$

sağlanır. $T_{f_\alpha} \subset T_{f_\beta}$ olsun.

$$x, y \in \bigcup_\alpha T_{f_\alpha}$$

alalım. Bu durumda $x, y \in T_{f_\beta}$ *ve* $x + y \in T_{f_\beta}$ olduğundan

$$x + y \in \bigcup_\alpha T_{f_\alpha}$$

elde edilir. α bir skaler ve $x \in \bigcup_\alpha T_{f_\alpha}$ ise

$$ax \in \bigcup_\alpha T_{f_\alpha}$$

olduğu da benzer biçimde gösterilir. Böylece $\bigcup_\alpha T_{f_\alpha}$ bir altuzaydır. $\hat{f}$ iyi tanımlıdır. Bunun için $x \in T_{f_\alpha}$ *ve* $x \in T_{f_\beta}$ alalım. O zaman $\hat{f}(x) = f_\alpha(x)$ *ve* $\hat{f}(x) = f_\beta(x)$ olur. Bu durumda ya f_α , f_β nin genişlemesi veya f_β , f_α nın genişlemesi olduğundan ,

$$f_a(x) = f_\beta(x)$$

bulunur. O halde her $x \in T_f$ için

$$\hat{f}(a) \le p(x)$$

Ve $\hat{f}$ lineer bir fonksiyoneldir. Her $\alpha \in I$ için

$$f_\alpha \le \hat{f}$$

sağladığından S üstten sınırlıdır. Bu nedenle Zorn Yardımcı Özelliğinden dolayı bir $G \in S$ olduğundan G, f nin bir genişlemesi ve $G(x) \le p(x)$ *ve* $T_G = E$ dir. $E - T_G \ne \phi$ olsaydı bir $y_1 \in E$, $y_1 \notin T_G$ vektörü bulunabilirdi. O zaman f nin genişlemesi bir başka H lineer fonksiyoneli olacaktı ve her $x \in (T_G \cup \{y_1\})$ için

$$H(x) \le p(x)$$

eşitsizliği sağlanacaktı. Bu durumda $H \in S$ olması gerekirdi ki bu G nin maksimal eleman olması ile çelişir. O halde $T_G = E$ dir.

Teorem 2.30 (Hanh-Banach Teoremi) E , bir kompleks vektör uzayı, F de E nin bir alt uzayı ve p , E üzerinde bir semi-norm olsun. $f : F \to K$ lineer fonksiyonel ve her $x \in F$ için $|f(x)| \leq p(x)$ olsun. O zaman bir $H : E \to K$ lineer fonksiyoneli bulunabilir ki, $H|_F = f$ ve her $x \in E$ için $|H(x)| \leq p(x)$ sağlanır. Buradaki H fonksiyoneline f nin genişlemesi adı verilir [22].

İspat :

$f = f_1 + if_2$ olarak yazalım. Burada f_1 ve f_2 reel değerli lineer fonksiyonellerdir.

$a \in R$ için,

$$f(ax) = f_1(ax) + if_2(ax) = af_1(x) + iaf_2(x) = af(x) \text{ elde edilir.}$$

$x, y \in E$ için,

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f_1(x+y) + if_2(x+y) \\ &= f_1(x) + f_1(y) + if_2(x) + if_2(y) \\ &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

sağlandığından f lineer fonksiyoneldir. Burada f_1 ile f_2 reel lineer fonksiyonellerdir.

$$f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix) = if(x) = if_1(x) - f_2(x) \quad \text{eşitliğinden}$$

$f_1(ix) = -f_2(x),$

$f_2(ix) = if_1(x)$ bulunur. Hipotezden,

$$f_1(x) \leq p(x), \quad x \in F \quad \text{elde edilir.}$$

Hanh-Banach ın reel drumundan f_1 lineer fonksiyonelinin genişlemesi bir G lineer fonksiyoneli bulunabilir ki her $x \in E$ için

$$G(x) \leq p(x) \text{ sağlanır.}$$

Şimdi, $H(x) = G_1(x) - iG_1(ix)$ tanımlayalım. $x \in F$ olsun. O zaman,

$G_1(x) = f_1(x)$ ve

$G_1(ix) = f_1(ix) = -f_2(x)$ elde edilir. Bu yüzden,

$H(x) = f_1(x) + if_2(x) = f(x)$ eşitsizliği bize H nin f nin bir genişlemesi olduğunu gösterir.

$H(ix) = G_1(ix) - iG_2(ix) = G_1(ix) + iG_1(x) = iH(x)$ eşitsizliği bize H nin bir lineer fonksiyonel olduğunu verir. $H(x) \neq 0$ olsun. $H(x) = re^{i\theta}$ yazalım. $H(e^{-i\theta}x) = r = |H(x)|$ olduğundan $H(e^{-i\theta}x) = G_1(e^{-i\theta}x)$ olur. O halde her $x \in E$ için,

$|G_1(x)| \leq p(x) \Rightarrow |H(x)| = G_1(e^{-i\theta}) \leq p(e^{-i\theta}) = p(x)$ eşitsizliği sağlanır. Eğer, $H(x) = 0$ ise açıktır.

Önerme 2.31 f normlu bir E uzayının bir F alt uzayında sınırlı lineer bir fonksiyonel olsun. O zaman f fonksiyonelini E uzayına normları korumak üzere genişletebiliriz. O halde, bir $\hat{f} : E \rightarrow K$ lineer fonksiyoneli bulunabilir ki her $x \in F$ için $\hat{f}(x) = f(x)$ ve $\|\hat{f}\| = \|f\|$ sağlanır [22].

Tanım 2.32 $T : X \rightarrow Y$ operatörü iki vektör uzayı arasında tanımlansın. Her $x, y \in X$ ve her α, β skaleri için; $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ oluyorsa; T ye lineer operatör denir [20].

Tanım 2.33 X ve Y normlu uzaylar ve $T : X \rightarrow Y$ operatörü bir lineer operatör olsun T nin normu;

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Tx\|$$ ile tanımlanır.

Eğer; $\|T\| < \infty$ ise T ye sınırlı operatör denir [20].

Tanım 2.34 İki sıralı vektör uzayı arasında tanımlanmış $T : E \rightarrow F$ operatörüne; $\forall x \geq 0$ için $T(x) \geq 0$ oluyorsa pozitif operatör denir.

Eğer; $x \rangle 0$ için $T(x) \rangle 0$ oluyorsa, T operatörüne tam pozitif operatör denir [20].

Tanım 2.35 $T : X \rightarrow Y$ iki sıralı vektör uzayı arasında tanımlı bir operatör olmak üzere; T, X in sıralı sınırlı alt kümelerini, Y nin sıralı sınırlı alt kümelerine taşıyorsa, T ye sıralı sınırlı operatör denir [20].

Tanım 2.36 E, F normlu uzaylar ve $T : E \rightarrow F$ lineer sınırlı bir operatör olsun. O zaman T operatörünün adjointi, T', $T' : F' \rightarrow E'$, $g \in F'$ $için$ $T'g = gT$ ile tanımlanır [22].

$$g, h \in F' \; için \; T'(g+h)(x) = (g+h)(Tx) = g(Tx) + h(Tx) = (T'g + T'h)(x), \; x \in E$$

olduğundan T' toplamayı korur. $a \in K$, $f \in F'$ için

$$T'(af)(x) = (af)(Tx) = af(Tx) = aT'f(x), \; x \in E$$

olması T' nin çarpmayı koruduğunu gösterir. Böylece T' lineer bir operatördür.

$$|g(Tx)| \leq \|g\|\|Tx\|$$

eşitsizliğinden $T'g \in E'$ olduğu görülür.

Tanım 2.37 $\{x_a\}$ E de bir net olsun. Eğer $|x_a - x| \leq y_a \downarrow 0$ olacak şekilde aynı indeksli kümede bir $\{y_a\}$ neti varsa $\{x_a\}$, x e sıralı yakınsar denir ve $x_a \xrightarrow{0} x$ ile gösterilir.

İki Riesz uzayı arasında tanımlı $T: E \to F$ operatörüne; E de $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olduğu sürece F de $Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$ oluyorsa, sıralı sürekli operatör denir [22].

Örnek 2.38

1) $T: l_\infty \to l_\infty$, $T(x_1, x_2, ...) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, ...)$ ile tanımlı T operatörü lineer ve sınırlıdır.

2) $T: C[0,1] \to R, T(f) = \int_0^1 f(x)dx$ tanımıyla T sınırlı lineer bir operatördür.

3) $E = \{p | p: R \to R \ polinom\}$ uzayı veriliyor. $T: E \to R$, $T(p) = p(t), t \in R$ tanımıyla T bir lineer operatördür.

4) $T: C[0,1]$ için $T: C[0,1] \to C[0,1]$ operatörü

$Tf(x) = f(\sin x) - f(\cos x)$ tanımıyla süreklidir.

Tanım 2.39 İki Riesz uzayı arasında tanımlı $T: E \to F$ operatörüne, her $x, y \in E$ için; $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ oluyorsa, latis homomorfizma (Riesz homomorfizma) denir [20].

Tanım 2.40 $\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ ve $\{y_j : 1 \leq j \leq m\}$ bir Riesz uzayında tanımlı pozitif elemanların iki sınırlı altkümeleri olsun. Eğer; $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{m} y_j$ sağlanıyorsa; o zaman bu pozitif elemanların $\{z_{i_j} : 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ olacak şekilde,

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} z_{i_j}; i = 1, ..., n$$

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} z_{i_j}; j = 1, ..., m$$

sınırlı alt kümeleri vardır [22].

Tanım 2.41 L , bir Archimedean Riesz uzayı olsun. L de tanımlı π operatörü L deki her B bandı için $\pi(B)\subset B$ yi sağlıyorsa π ye band genişleyen denir.

π nin band genişleyen operatör olması için gerek ve yeter koşul L deki f ve g için $f \perp g$ olduğunda $\pi f \perp g$ olmasıdır [19].

Teorem 2.42 L, bir Archimedean Riesz uzayı olsun. L de tanımlı π operatoru için aşağıdaki durumlar denktir:

(i) π , band genişleyendir.

(ii) L nin boştan farklı her D alt kümesi için $\pi(D^d)\subset D^d$ sağlanır.

(iii) L de $u \wedge v = 0$ ise $\pi u \perp v$ olur.

(iv) L de $f \perp g$ ise $\pi f \perp g$ olur.

(v) L deki her f elemanı için $\pi f \in \{f\}^{dd}$ sağlanır.

Eğer bu koşullar sağlanıyorsa, her $f \in L$ için $|\pi f| = |\pi(|f|)|$ sağlanır [19].

İspat :

$(i)\to(ii)$ D^d band olduğundan bu durum aşikardır.

$(ii)\to(iii)$ Eğer $u \Lambda v=0$ ise $u\in\{v\}^d$ olur. Bundan dolayı $\pi u\in\{v\}^d$ elde edilir. Yani; $\pi u\perp v$ dir.

$(iii)\to(iv)$ $f \perp g$ olduğu için $f^+\Lambda|g|=0$ ve $f^-\Lambda|g|=0$ eşitlikleri sağlanır. O zaman $\pi f^+\perp g$ ve $\pi f^-\perp g$ olur. Bundan dolayı $\pi f=(\pi f^+ - \pi f^-)\perp g$ olduğu görülür.

$(iv)\to(v)$ $\{f\}^d$ den herhangi bir g elemanı alalım. O zaman $f\perp g$ olduğundan $\pi f\perp g$ sağlanır. Bu durum $\pi f\in\{f\}^{dd}$ olduğunu gösterir.

$(v)\to(i)$ L den bir B bandı alalım. $f\in L$ olsun. $f^+\perp f^-$ olduğu için $\pi f^+\perp f^-$ ve $\pi f^+\perp \pi f^-$ elde edilir. Fakat o zaman, $|\pi f^+ + \pi f^-|=|\pi f^+ - \pi f^-|$ olur. Yani, $|\pi f|=|\pi(|f|)|$ dir.

Tanım 2.43 E ve F vektör uzayları ve $T: E\to F$ lineer operatör olsun.

$Çek\,T=\{x\in E:\ Tx=0\}$ kümesine T nin sıfır uzayı (çekirdeği) adı verilir [20].

Tanım 2.44 L, bir Archimedean Riesz uzayı olsun. L deki sıralı sınırlı band genişleyen operatöre ortomorfizma denir [19].

Özellikler :

* L , bir Archimedean Riesz uzayı olsun. Eğer π, L de bir pozitif operator ise; o zaman π nin ortomofizma olması için gerek ve yeter koşul, L de $u \wedge v = 0$ olduğunda $\pi u \wedge v = 0$ olmasıdır.

* $Orth(L)$ ile L deki bütün ortomorfizmalar kümesi gösterilir. $Orth(L)$, L deki tüm sıralı sınırlı operatörlerin kümesi olan $L_b(L)$ vektör uzayının lineer alt uzayıdır.

* $L_b(L)$ den π_1 , π_2 operatörlerini alalım.

Eğer ; her $u \in L^+$ için $\pi_1 u \le \pi_2 u$ iken $\pi_1 \le \pi_2$ oluyorsa , $Orth(L)$ vektör uzayı sıralı vektör uzayı olur.

* $L_b(L)$ den alınan π_1 , π_2 operatörleri için , $0 \le \pi_1 \le \pi_2$ ve π_2 ortomorfizma ise π_1 operatörü de ortomorfizmadır.

* Özel olarak eğer L Dedekind tam ise , $L_b(L)$ uzayı Dedekind tam Riesz uzayıdır. Bu durumda L deki sıralı sınırlı π operatörünün ortomorfizma olması için gerek ve yeter koşul $\pi^+ ve\ \pi^-$ operatörlerinin ortomorfizma olmalarıdır. Diğer bir ifadeyle ; π nin ortomorfizma olması için gerek ve yeter koşul $|\pi|$ nin ortomorfizma olmasıdır. Bu durumu $L_b(L)$ de tanımlı $Orth(L)$ nin ideal (ve band) olması takip eder. Aslında $Orth(L)$, $L_b(L)$ nin birim operatörü tarafından üretilen band genişlemesidir.

* N_π ve R_π ile sıfır uzayı ve ortomorfizma π nin görüntüsü ifade edilmek üzere ; $N_\pi = N_{|\pi|}$ ve N_π L de bir bandtır. Aynı zamanda $Orth(L)$ de $N_\pi = R_\pi^d$ ve $\pi_1 \perp \pi_2$ olması $R_{\pi_1} \perp R_{\pi_2}$ olmasını gerektirir.

* $Orth(L)$, bir Riesz uzayıdır.

Tanım 2.45 E bir kompleks vektör uzayı ve E nin elemanlarının çarpımı şu aksiyomları sağlasın. $x, y \in E$ için $xy \in E$ olsun.

1) $x(yz) = (xy)z$,
2) $x(y+z) = xy + xz$,
3) $(x+y)z = xz + yz$,
4) $a \in K$ için $a(xy) = x(ay)$.

O zaman E ye bir cebir denir. Her $x \in E$ için $ex = xe = x$ eşitliğini sağlayan $0 \ne e \in E$ varsa E ye birimli cebir denir. Her $x, y \in E$ için $xy = yx$ ise E ye değişmeli cebir denir [19].

Tanım 2.46 Normlu bir E uzayı cebir aksiyomlarını sağlasın. Her $x, y \in E$ için $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ ise E ye normlu cebir denir. Tam normlu cebire bir Banach cebiri denir [19].

Tanım 2.47 Eğer A Riesz uzayında çarpmanın birleşme özelliği (genel cebir kurallarına göre) var ve $u, v \in A^{+}$ için $uv \geq 0$ sağlanıyorsa Riesz uzayı A ya Riesz cebiri denir. Her $0 \leq u, v \in A$ *için* $0 \leq uv$ olması $|u.v| \leq |x|.|y|$ olmasına denktir [19].

Örnek 2.48 Riesz cebirine örnekler verelim:

1) Dedekind tam Riesz uzayı L deki tüm sıralı sınırlı operatörler cebiri $L_b(L)$ bir Riesz cebiridir.

2) X topolojik uzayı üzerindeki tüm reel değerli fonksiyonların uzayı $C(X)$ bir Riesz cebiridir.

Tanım 2.49 Riesz cebiri A ya her $f, g \in A$ için $fg = gf$ sağlıyorsa değişmelidir denir [19].

Tanım 2.50 A, bir Riesz cebiri olsun. Eğer alınan her $w \in A^{+}$ için $u \wedge v = 0$ olduğunda $(uw) \wedge v = (wu) \wedge v = 0$ oluyorsa A ya $f-cebiri$ denir. Archimedean özelliğini sağlayan $f-cebiri$ ne Archimedean $f-cebiri$ denir. $f-cebirlerine$ aşağıdaki örnekleri verebiliriz:

1) Bir X topolojik uzayı üzerinde tüm sürekli reel fonksiyonların cebiri $C(X)$ bir $f-cebiri$ dir.

2) Bir X topolojik uzayı üzerinde tüm sınırlı sürekli reel fonksiyonların oluşturduğu Riesz uzayı $C_b(X)$ bir $f-cebiri$ dir.

3) Boştan farklı X kümesi üzerinde tüm reel fonksiyonların oluşturduğu Riesz uzayı R^X bir $f-cebiri$ dir.

4) Boştan farklı X kümesi üzerinde tüm sınırlı reel değerli fonksiyonların oluşturduğu Riesz uzayı $\ell_\infty(X)$ bir $f-cebiri$ dir.

5) Ölçüm uzayında tanımlı tüm ölçülebilir fonksiyonlardan oluşan μ Riesz uzayı bir $f-cebiri$ dir [19].

Özellikler:

* Her Archimedean $f-cebiri$ değişmelidir.

* $Orth(L)$ uzayının birim elemanını L nin birim elemanı olarak tanımladığımızda $Orth(L)$ uzayı bir Archimedean $f-cebiri$'dir. Eğer L düzgün olarak tamsa $Orth(L)$ de tamdır. Eğer L izdüşüm özelliğine sahipse $Orth(L)$ de izdüşüm özelliğine sahiptir.

* L birim elemanlı Archimedean $f-cebiri$ ve π, L de ortomorfizma olsun. O zaman, her $f \in L$ için $\pi(f) = pf$ sağlayan bir $p \in L$ vardır.

* A bir $f-cebiri$ olsun. Her $f \in A$ için $f^2 \geq 0$' dır. Her $u,v \in A^+$ için $(u \wedge v)^2 = u^2 \wedge v^2$ ve $(u \vee v)^2 = u^2 \vee v^2$ doğrudur.

* A nın birim elemanı e olsun. O zaman $e \geq 0$ dır. Herhangi bir $u \in A^+$ elemanının tersi vardır ve $u^{-1} \in A^+$ dır. Ayrıca $u \wedge u^{-1} \leq e$ sağlanır. $u,v \in A^+$ alalım. Eğer hem u hem de v nin tersleri var ise ; $(u \vee v)^{-1} = u^{-1} \wedge v^{-1}$ ve $(u \wedge v)^{-1} = u^{-1} \vee v^{-1}$ sağlanır.

* A yarıasal ($f^2 = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $f = 0$ olmasıdır) olsun. O zaman f ve g nin ayrık olması için gerek ve yeter koşul $fg = 0$ olması ve $u^2 \langle v^2$ olduğu sürece $0 \leq u \leq v$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

* Archimedean $f-cebirlerinde$ her $f,g \in A$ için $fg = (f \vee g)(f \wedge g)$ eşitliği sağlanır. A eğer birim elemanlı Archimedean ise , A yarıasaldır ve bu özellik yukarıda bahsedilen tüm özellikleri kapsar.

Bu özelliklerin hepsi $Orth(L)$ için de geçerlidir.

Tanım 2.51 Banach latis A, $f-cebiri$ olduğunda A ya $Banach$ $f-cebiri$ denir [19].

Teorem 2.52 Archimedean Riesz uzayı L deki her ortomorfizma π nin sıralı sürekli olması için L de $u_0 \geq u_T \downarrow 0$ olduğunda $\inf|\pi u_T| = 0$ eşitliğinin sağlanması gerekir [19].

* L, Archimedean Riesz uzayı olsun. L deki her pozitif ortomorfizma Riesz homomorfizmadır.

* π, Archimedean Riesz uzayı L de tanımlı bir pozitif ortomorfizma iken $u \wedge v = 0$ eşitliği de L de sağlanıyorsa o zaman ; $\pi u \wedge v = 0$ ve buradan da $\pi u \wedge \pi v = 0$ eşitliği sağlanır. Bu ifadenin tersi doğru değildir.

Örneğin; sıfırdan farklı bir a sayısını alalım. Eğer , $L = L_1(R)$ ve $\pi : L \to L$ her $f \in L$ için $(\pi f)(x) = f(x+a)$ olarak tanımlanmışsa, o zaman π bir Riesz homomorfizmadır fakat ortomorfizma değildir. L de tanımlı birim operatör, pozitif ortomorfizmadır.

Yardımcı Teorem 2.53 L, Archimedean Riesz uzayı ve M Dedekind tam Riesz uzayı olsun. L nin Dedekind tamlamasını $L^\wedge$ ile göstereceğiz. Ayrıca $T : L \to M$ operatörü sıralı sınırlı ve sürekli yani M de $\inf|Tu_\tau|$ =0 iken L de $u_0 \geq u_\tau \downarrow 0$ olsun. O zaman; T ,T^+ ve T^- sıralı sürekli $T^\wedge$, $(T^+)^\wedge$ ve $(T^-)^\wedge$ genişlemelerine sahiptir. Bu genişleme $L^\wedge$ den M ye şeklindedir. Ve $(T^\wedge)^+ = (T^+)^\wedge$, $(T^\wedge)^- = (T^-)^\wedge$ eşitlikleri sağlanır [19].

Yardımcı Teorem 2.54 Archimedean Riesz uzayı L deki herhangi bir π ortomorfizması, L nin tamlaması $L^\wedge$ daki ortomorfizma $\pi^\wedge$ ye genişletilebilir [19].

Yardımcı Teorem 2.55 Dedekind tam Riesz uzayı L den bir π ortomorfizması alalım. O zaman, *her* $u \in; L^+$ *için*, $(\pi^+)u = (\pi u)^+$ *ve* $(\pi^-)u = (\pi u)^-$ olur [19].

Teorem 2.56 L, bir Archimedean Riesz uzayı olsun. Herhangi bir $\pi \in Orth(L)$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) π nin sıfır uzayı N_π, L de bir bandtır ve $N_\pi = N_{|\pi|} = N_{\pi^+} \cap N_{\pi^-}$ olur.

(ii) $N_\pi = R_\pi^d$, (R_π, π nin görüntüsünü ifade etmektedir) [19].

Teorem 2.57 L , bir Archimedean Riesz uzayı olsun. O zaman , sıralı vektör uzayı $Orth(L)$ bir Archimedean Riesz uzayıdır. Ve her $\pi_1, \pi_2 \in Orth(L)$ ve her $u \in L^+$ için,

$$(\pi_1 \vee \pi_2)u = (\pi_1 u) \vee (\pi_2 u)$$
$$(\pi_1 \wedge \pi_2)u = (\pi_1 u) \wedge (\pi_2 u)$$

sağlanır.

Ayrıca , her $\pi \in Orth(L)$ ve her $u \in L^+$ için;

$$(\pi^+)u = (\pi u)^+ ,$$
$$(\pi^-)u = (\pi u)^- \; ve$$
$$|\pi|u = |\pi u|$$

sağlanır [19] .

Teorem 2.58 L bir Archimedean Riesz uzayı olsun. Her $\pi \in Orth(L)$ için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

(i) π nin sıfır uzayı N_π , L de bir bandtır ve $N_\pi = N_{|\pi|} = N_{\pi^+} \cap N_{\pi^-}$

(ii) R_π , π nin değeri olmak üzere, $N_\pi = R_\pi^d$ dir [19].

Sonuç 2.59 L , bir Archimedean Riesz uzayı olsun:

(i) L de tanımlı π ortomorfizması ancak ve ancak R_π band genişlemesi L nin kendisine eşitse birebirdir. Yani, $R_\pi^{dd} = L$.

(ii) $\pi_1, \pi_2 \in Orth(L)$ *ve* $D^{dd} = L$ olacak şekilde L nin bir D alt kümesini alalım. Eğer, her $f \in D$ için $\pi_1 f = \pi_2 f$ verilmişse o zaman $\pi_1 = \pi_2$'dir. Ayrıca, eğer e , L de zayıf sıralı birim ve $\pi_1 e = \pi_2 e$ ise , o zaman $\pi_1 = \pi_2$'dır.

(iii)Bir $f \in L$ için $\pi^2 f = 0$ sağlanıyorsa, o zaman $\pi f = 0$ dır. Ayrıca $\pi^2 = 0$ ise $\pi = 0$ dır.

(iv) Eğer, $\pi_1, \pi_2 \in Orth(X)$ için $\pi_1 \perp \pi_2$ sağlanıyorsa $R_{\pi_1} \perp R_{\pi_2}$'dır [19].

Teorem 2.60 Her Archimedean $f-cebiri$ aynı zamanda değişmelidir [19].

İspat :

A da pozitif elemenların değişmeli olduğunu göstermek ispat için yeterlidir. Öncelikle A da $u \wedge v = 0$ olduğunda $uv = 0$ olur. A $f-cebiri$ olduğundan, $u \wedge v = 0$ eşitliğinden $uv \wedge v = 0$ yazabiliriz. Yani, $uv \in \{v\}^d$ dir. Diğer taraftan, $v \perp \{v\}^d$ olmasından $uv \perp \{v\}^d$ elde edilir. Böylece $uv = 0$ olur. Benzer şekilde $vu = 0$ olur.

$w \in A^+$ verilsin. Her $u \in A^+$ için $uw = wu$ olduğunu gösterelim. Bunun için öncelikle A da her $f \in A$ için, $\pi_\ell f = wf$ ve $\pi_r f = fw$ olacak şekilde π_ℓ ve π_r operatörleri tanımlayalım. O zaman, π_ℓ ve π_r operatörleri A da pozitif ortomorfizmalardır. Herhangibir $v \in A^+$ için $\{w\}^d$ de $v \wedge w = 0$ eşitliği vardır. O zaman, ispatın ilk kısmından $wv = vw = 0$ elde edillir. Diğer bir ifadeyle her $0 \le v \in \{w\}^d$ için $\pi_\ell v = \pi_r v = 0$ olur. Buradan her $f \in \{w\}^d$ için $\pi_\ell f = \pi_r f$ yazılır. Böylece $\pi_\ell w = \pi_r w = w^2$ elde edillir. A nın, w ve $\{w\}^d$ yi içeren bir D alt kümesini alalım. O zaman, $D^d = \{0\}$ dır. Yani, $D^{dd} = A$ olur. Ayrıca, π_ℓ ve π_r D de çakışıktır. Bu A da $\pi_\ell = \pi_r$ olması demektir. Yani, her $u, w \in A^+$ için $wu = uw$ olur.

$L_b(L)$ Archimedeandır fakat değişmeli değildir. Bu yüzden $L_b(L)$ Riesz cebiri olup $f-cebiri$ olmayan cebire özel bir örnektir.

Tanım 2.61 $Orth(L)$ de I tarafından üretilen ideale L nin merkezi denir ve $Z(L)$ ile gösterilir. Yani $Z(L) = \{T \in Orth(L) : \ |T| \le \lambda I \quad her\ \lambda\ skaleri\ için\}$ [19].

Teorem 2.62 $\pi \in Orth(L)$ olarak verilsin. O zaman, $\pi \in Z(L)$ olması için gerek ve yeter koşul bir n sayısı için $|\pi| \le nI$ olmasıdır [19].

Teorem 2.63 L, birim elemanı e olan Archimedean $f-cebiri$ olsun. (yani her $f \in L$ için $fe = ef$) Eğer π, L de bir ortomorfizma ise o zaman her $f \in L$ için $\pi f = pf$ sağlanacak şekilde bir $p \in L$ vardır. Ters olarak her $p \in L$, $\pi f = pf$ ile tanımlı L deki bir π ortomorfizmasına neden olur. π ortomorfizmasının pozitif olması için gerek ve yeter koşul p elemanının pozitif olmasıdır.

Ayrıca, π ortomorfizmasının $Z(L)$ ye ait olması için gerek ve yeter koşul p nin L de e tarafından üretilen ideale ait olmasıdır [19].

Teorem 2.64 Her $f-cebiri$ A aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) Pozitif elemanla çarpım bir Riesz homomorfizmadır. Yani her $u \in A^+$ ve her $f, g \in A$ için;

$u(f \wedge g) = (uf) \wedge (ug)$ ve $(f \wedge g)u = (fu) \wedge (gu)$ eşitlikleri sağlanır.

Benzer şekilde ;

$u(f \vee g)=(uf)\vee(ug)$ ve $(f \vee g)u=(fu)\vee(gu)$ eşitlikleri sağlanır.

Ayrıca ;

$uf^{+}=(uf)^{+}$ ve $f^{+}u=(fu)^{+}$ eşitlikleri de sağlanır.

(ii) Her $f,g \in A$ için $|fg|=|f|.|g|$ eşitliği sağlanır. Ayrıca;

$(fg)^{+}=f^{+}g^{+}+f^{-}g^{-}$ ve $(fg)^{-}=f^{+}g^{-}+f^{-}g^{+}$ eşitlikleri de sağlanır.

(iii) Eğer; $f,g,h \in A$ ve $f \perp g$ ise $hf \perp g$ ve $fh \perp g$ olur. Bundan dolayı A daki herhangi bir ayrık tümleyen çift taraflı halka idealidir.

(iv) Eğer ; $f,g \in A$ için $f \perp g$ ise $f.g=0$ dır. Her $f \in A$ için $f^{+}f^{-}=f^{-}f^{+}=0$ eşitliği sağlanır.

(v) Her $f \in A$ için $f^{2} \geq 0$ ve $ff^{+}=f^{+}f=(f^{+})^{2} \geq 0'$ dır.

(vi) Her $u,v \in A^{+}$ için;

$u^{2} \wedge v^{2} \leq (uv)\wedge(vu)$ ve $u^{2} \vee v^{2} \geq (uv)\vee(vu)$ sağlanır.

(vii) Her $u,v \in A^{+}$ için;

$u^{2} \wedge v^{2}=(u \wedge v)^{2}$ ve $u^{2} \vee v^{2}=(u \vee v)^{2}$ sağlanır [19].

İspat :

(i) $\{f-(f \wedge g)\}\wedge\{g-(f \wedge g)\}=0$ olduğu için $\{uf-u(f \wedge g)\}\wedge\{ug-u(f \wedge g)\}=0$ olur. Ve buradan da, $u(f \wedge g)=(uf)\wedge(ug)$ elde edilir. $f \vee g=f+g-(f \wedge g)$ eşitliğini biliyoruz buradan $u(f \vee g)=(uf)\vee(ug)$ olduğunu elde ederiz. Sağdan çarpım da benzer şekilde gösterilir.

(ii) $f,g \in A$ verilsin. $f-cebiri$ tanımından,
$f^{+}g^{+} \perp f^{+}g^{-},\ f^{+}g^{+} \perp f^{-}g^{+},\ f^{-}g^{-} \perp f^{+}g^{-}$ ve $f^{-}g^{-} \perp f^{-}g^{+}$ vardır. Burdan $u_{1}=(f^{+}g^{+}+f^{-}g^{-})\perp(f^{+}g^{-}+f^{-}g^{+})=u_{2}$ bulunur. Aynı zamanda $fg=u_{1}-u_{2}$ olduğunu da biliyoruz. u_{1} ve u_{2} elemanları pozitif ve ayrıktır, farkları da fg dir. O zaman $(fg)^{+}=u_{1}$ ve $(fg)^{-}=u_{2}$ oldukları için bu durum;

$|fg|=(fg)^{+}+(fg)^{-}=u_{1}+u_{2}=(f^{+}+f^{-})(g^{+}+g^{-})=|f|.|g|$ olmasını gerektirir.

(iii) $f \perp g$ ve h keyfi seçilmiş olsun. O zaman, $|f|\wedge|g|=0$ olduğunda $(|h|.|f|)\wedge|g|=0$ olur. Yani $|hf|\wedge|g|=0$ dır. Diğer bir deyişle, $hf \perp g$ dir. Benzer şekilde $fh \perp g$ dir.

(iv) Eğer $f \perp g$ ise, (iii) den $fg \perp g$ elde edilir, buradan da $fg \perp fg$ yani $fg=0$ olur.

(v) Her $f \in A$ için $f^{+}f^{-}=f^{-}f^{+}=0$ eşitliği vardır. Buradan da ;

$f^2 = \left(f^+ - f^-\right)^2 = \left(f^+\right)^2 + \left(f^-\right)^2 \geq 0$ olur. Ve ,

$ff^+ = \left(f^+ - f^-\right)f^+ = \left(f^+\right)^2 - f^- f^+ = \left(f^+\right)^2$ elde edilir. Benzer şekilde, $f^+ f = \left(f^+\right)^2$ dır.

(vi) $(u-v)^+ \wedge (v-u)^+ = 0$ olduğundan $\{u(u-v)^+\} \wedge \{(v-u)^+ v\} = 0$ olur. Genel formül olan, $f^+ \wedge g^+ = (f+g)^+$ yardımıyla; $\{u(u-v) \wedge (v-u)v\}^+ = 0$ elde edilir. Buradan da,

$\{(u^2 \wedge v^2) - uv\}^+ = \{(u^2 - uv) \wedge (v^2 - uv)\}^+ = 0$ olur. Bu eşitlik gösterir ki; $u^2 \wedge v^2 \leq uv$ ve $u^2 \wedge v^2 \leq vu$ eşitsizlikleri sağlanır.

$u^2 \vee v^2$ için ispat benzer şekilde ;

$(u-v)^+ \wedge (v-u)^+ = 0$ eşitliği yardımı ile $\{(u-v)^+ v\} \wedge \{u(v-u)^+\} = 0$ olmasıyla gösterilir.

(vii) $(u \wedge v)^2 = \{u(u \wedge v)\} \wedge \{v(u \wedge v)\} = u^2 \wedge uv \wedge vu \wedge v^2 = u^2 \wedge v^2$ olduğunu biliyoruz. Buradan da, $u^2 \wedge v^2 \leq (uv) \wedge (vu)$ bulunur. $(u \vee v)^2$ için ispat benzer şekilde gösterilir.

Teorem 2.65 Birim elemanı e olan bir A $f-cebirinde$ aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $e \geq 0.$

(ii) Eğer; $u \in A^+$ ve u elemanının tersi u^{-1}, A da tanımlı ise, o zaman $u^{-1} \in A^+$ ve $u \wedge u^{-1} \leq e$ 'dir. Ayrıca, $\{u\}^{dd} = \{0\}$. Yani, $\{u\}^{dd} = A$. Diğer bir deyişle $\{e\}^{dd} = A$.

(iii) Eğer; $u, v \in A^+$ ve hem u^{-1} hem de v^{-1} var ise, o zaman $(u \vee v)^{-1}$ ve $(u \wedge v)^{-1}$ de vardır. Ayrıca;

$(u \vee v)^{-1} = u^{-1} \wedge v^{-1}$ $\quad ve \quad$ $(u \wedge v)^{-1} = u^{-1} \vee v^{-1}$ eşitlikleri de sağlanır [19].

Teorem 2.66 A, yarıasal $f-cebiri$ olsun. O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $f \perp g$ olması için gerek ve yeter koşul $fg = 0$ olmasıdır.

(ii) $u, v \in A^+$ için $u^2 \leq v^2$ ancak ve ancak $u \leq v$ olduğunda sağlanır. Sonuç olarak, $u^2 = v^2$ nin sağlanması için gerek ve yeter şart $u = v$ olmasıdır [19].

Teorem 2.67 A, Archimedean $f-cebiri$ olsun. N, A daki tüm nilpotent elemanların kümesi olsun. O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $f \in N$ ancak ve ancak $f^2 = 0$ olduğunda sağlanır.

(ii) N , A içinde bandtır ve halka idealidir.

(iii) Her $g \in A$ için $f \in A$ olduğunda $f.g = 0$ olur. Bundan dolayı, eğer A nın birim elemanı varsa, o zaman $f \in N$ olması için gerek ve yeter koşul $f = 0$ olmasıdır. Diğer bir deyişle, herhangi bir Archimedean $f-cebiri$ birim elemana sahipse, yarıasaldır [19].

Teorem 2.68 Yarıasal $f-cebiri$ A için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $f \perp g$ olması için gerek ve yeter şart $fg = 0$ dır.

(ii) $u, v \in A^+$ için, $u^2 \leq v^2$ ancak ve ancak $u \leq v$ olduğunda sağlanır. Bunun sonucu olarak, $u^2 = v^2$ 'nin sağlanması için gerek ve yeter koşul $u = v$ olmasıdır [19].

Teorem 2.69 A , değişmeli $f-cebiri$ olsun. Her $f, g \in A$ için $fg = (f \vee g)(f \wedge g)$ eşitliği sağlanır [19].

Teorem 2.70 Eğer, $u \, ve \, v$ A $f-cebirinde$ pozitif elemanlar ise, o zaman $n = 1,2,.....$ için;

$nv(u - nv)^+ \leq u^2 \quad ve \quad n(n - nv)^+ v \leq u^2$ olur. Ayrıca eğer; A $f-cebirinin$ birim elemanı e ise $n = 1,2,.....$ için;

$n(u - ne)^+ \leq u^2 \qquad ve \qquad 0 \leq u - \inf(u, ne) = (u - ne)^+ \leq n^{-1}u^2$ 'dir [19].

Teorem 2.71 π ortomorfizması, Archimedean Riesz uzayı L de pozitif bir ortomorfizma olsun. O zaman, $n = 1,2,...$ için ;

$0 \leq \pi - \inf(\pi, nI) \leq n^{-1}\pi^2$ olur. Burada I olarak belirttiğimiz , L deki birim operatördür. Ayrıca; $n = 1,2,...$ için ; $\pi_n = \inf(\pi, nI)$ dizisi artandır ve π^2 ye yakınsar [19].

Teorem 2.72 L Dedekind tam Riesz uzayı olsun. O zaman L deki tüm sıralı sınırlı operatörlerin uzayı olan $L_b(L)$ Dedekind tam uzayında birim operatör I tarafından üretilen $Orth(L)$ bandtır [19].

Tanım 2.73 Riesz uzaylarında tanımlı $T: E \to F$ operatörüne, E de $x \perp y$ olduğunda F de $Tx \perp Ty$ oluyorsa ayrıklığı koruyan operatör denir [19].

Tanım 2.74 Bir $\langle X, X' \rangle$ dual sistemi;

(1) Her $x \in X$ için $\langle x, x' \rangle = 0$ olduğunda $x' = 0$,

(2) Her $x' \in X'$ için $\langle x, x' \rangle = 0$ olduğunda $x = 0$,

olacak şekilde $(x, x') \to \langle x, x' \rangle$ bilineer formuyla (yani her bir değişkeni ile ayrı ayrı lineer olan bir $\langle .,. \rangle : X x X' \to R$ fonksiyonu ile) birlikte $X \; ve \; X'$ vektör uzaylarının bir çiftidir. Eğer, (X, τ), yerel konveks uzay ise bu durumda $\langle X, X' \rangle$, $\langle x, x' \rangle = x'(x)$ bilineer formu altında bir dual sistemdir.

$\langle X, X' \rangle$ bir dual sistemi olsun. Bu durumda, her bir $x' \in X'$ için $f(x) = \langle x, x' \rangle, x \in X$ ifadesi X üzerinde bir lineer fonksiyonel tanımlar. Ayrıca, X' den X^* ye tanımlı $x' \to \langle . , x' \rangle$ dönüşümü, birebir ve lineerdir. Diğer bir deyişle

$\langle\, .\, , x' \rangle$ lineer fonksiyonelini x' ile tanımlayarak, her bir $x' \in X'$, X üzerinde bir lineer fonksiyonel olarak görülebilir ve aşağıdaki altuzay kapsaması sağlanır:

$$X' \subseteq X^* \subseteq R^*$$

X' üzerindeki $\sigma(X', X)$ zayıf topolojisi, X' üzerinde R^x çarpım topolojisi tarafından üretilen bir yerel konveks topolojidir. R^x çarpım topolojisi, her $f \in R^x$ *için* $p_x(f) = |f(x)|$ sağlanacak şekilde $\{p_x : x \in X\}$ yarınormlar ailesi tarafından üretilen yerel konveks topolojidir. Böylece, $\sigma(X', X)$, her $x' \in X'$ için $p_x(x') = |\langle x, x' \rangle|$ sağlanacak şekilde $\{p_x : x \in X\}$ yarınormların bir ailesi tarafından üretilir. Özel olarak,

$$\{x' \in X' : |\langle x_i, x' \rangle| \leq 1,\ i = 1,2,....n \ \textit{için}\}$$

kümelerinin bir ailesinin, $\sigma(X', X)$ için sıfırda bir taban oluşturduğuna dikkat etmeliyiz. Bir $\{x'_\alpha\} \subseteq X'$ netinin, $x'_\alpha \xrightarrow{\sigma(x', x)} 0$ durumunu sağlaması için gerek ve yeter koşul her bir $x \in X$ için $\mathbb{R}$ de $\langle x, x'_\alpha \rangle \to 0$ durumunun sağlanmasıdır, bu $\sigma(X', X)$ için kullanılan 'X üzerinde noktasal yakınsaklığın topolojisi' ismini doğrular.

Benzer şekilde, her bir $x \in X$ için $x(x') = \langle x, x' \rangle$ formülü, X' üzerinde x ile belirlediğimiz bir lineer fonksiyonel tanımlar. Böylece, aşağıdaki vektör altuzay kapsaması sağlanır:

$$X \subseteq (X')^* \subseteq R^{x'}$$

$\sigma(X', X)$ zayıf topolojisi (ya da X' üzerinde nokta tabanlı yakınsaklığın topolojisi) $R^{x'}$ nün çarpım topolojisi ile üretilen , X üzerinde yerel konveks bir topolojidir. $\sigma(X', X)$ nün, $p_{x'}(x) = |\langle x, x' \rangle|$ olmak üzere $\{p_{x'} : x' \in X'\}$ yarınormlarının ailesi tarafından üretilir. Özel olarak, bir $\{x_\alpha\} \subseteq X$ netinin $x_\alpha \xrightarrow{\sigma(x', x)} 0$ durumunu sağlaması için gerekli ve yeterli koşul her bir $x' \in X'$ için R de $\langle x_\alpha, x' \rangle \to 0$ durumunun sağlanmasıdır. Ayrıca,

$$\{x \in X : |\langle x, x'_i \rangle| \leq 1, \quad i = 1,2,3...., n \ \textit{için}\}$$

formundaki kümelerin ailesi $\sigma(X', X)$ topolojisi için sıfırda bir taban oluşturur [19].

BÖLÜM 3

---

f-CEBİRLERİNİN İKİNCİ SIRALI DUALİ

E bir Riesz uzayı olsun. $f: E \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneli E nin sıralı sınırlı alt kümelerini R deki sınırlı kümelere taşıyorsa, f ye sıralı sınırlı lineer fonksiyonel denir. E üzerindeki tüm sıralı sınırlı lineer fonksiyonellerin kümesi E' ye E nin sıralı duali denir. Yani $E' := L_b(E, R)$ olur.

X Archimedean $f-$cebiri olsun. X in duali de X' olsun. O zaman aşağıda tanımlayacağımız çarpımlar X in ikinci duali X'' için sağlanır:

1) $Orth(X) \times X \to X$

$$T \in Orth(X), x \in X \ \text{için}, \qquad (T, x) \to T.x = T(x)$$

2) $X \times X' \to Orth(X)'$

$$x' \in X', \ x \in X, \ T \in Orth(X)' \ \text{için}, \qquad (x, x') \to (x.x')T = x'(T.x)$$

3) $Orth(X)'' \times X' \to X'$

$$T \in Orth(X)'', x' \in X', x \in X \ \text{için}, \qquad (T, x') \to (T.x')x = T(x.x')$$

4) $Orth(X)'' \times X'' \to X''$

$$T \in Orth(X)'', x' \in X', \ \hat{x} \in X'' \ \text{için}, \qquad (T, \hat{x}) \to (T.\hat{x})(x') = \hat{x}(T.x')$$

Teorem 3.1 $T \in Orth(X)''$, $x' \in X'$ *için*,

$\alpha: Orth(X)'' \to Orth(X)'$
$\alpha(T)x' = T.x'$ dönüşümü tanımlansın.

Bu dönüşümle α lineer, birebir bir cebir homomorfizmadır.

İspat :

Aşağıdaki ifadelerin doğruluğunu gösterelim:

(i) α , lineer bir dönüşümdür.

(ii) α, birebir bir dönüşümdür.

(iii) α, cebir homomorfizmadır.

(i) $\alpha : Orth(X)'' \to Orth(X)'$

$\alpha(T)x' = T.x'$, $T \in Orth(X)''$, $x' \in X'$ *için*

$\alpha(T)x' = T.x'$ α , lineer bir dönüşümdür:

(a) $\alpha(T+S) = \alpha(T) + \alpha(S)$

$\alpha(T+S)x' = \alpha(T)x' + \alpha(S)x'$ $\forall\ x \in X$ için doğruluğunu göstermeliyiz.

$[\alpha(T+S)x']x = [(T+S).x']x = (T+S)(x.x')$ ($III.$ çarpımdan, $(T.x')x = T(x.x')$)

$$\begin{aligned}(T+S)(x.x') &= T(x.x') + S(x.x') \\ &= (T.x')x + (S.x')x \\ &= [\alpha(T)x']x + [\alpha(S)x']x\end{aligned}$$

olur.

(b) $\alpha(\lambda T) = \lambda\alpha(T)$

$\alpha(\lambda T)x' = \lambda\alpha(T)x'$ $\forall\ x \in X$ için doğruluğunu göstermeliyiz.

$([\alpha(\lambda T).x'])x = [(\lambda T).x']x$ $\forall\ x' \in X'$ *için*

$$\begin{aligned}&= \lambda T(x.x') \\ &= \lambda(T.x')x \\ &= \lambda[\alpha(T).x']x\end{aligned}$$

Yani, α lineer bir dönüşümdür.

(ii) α, birebir bir dönüşümdür: $[Yani\ ,\ T \neq 0 \Rightarrow \alpha(T) \neq 0]$

$0 \neq T \in Orth(X)''$ $\exists\, y \in Orth(X)'$ vardır.

$y = x.x' \in Orth(X)'$ alalım. O zaman,

$Ty \neq 0$

$T(x.x') \neq 0$

$(T.x')x \neq 0$

$[\alpha(T)x']x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(T) \neq 0$

olur.

(iii) $\alpha,$ cebir homomorfizmadır:

$\alpha(T.S) = \alpha(T)\alpha(S)$ $\quad \forall\, x \in X$ için doğruluğunu göstermeliyiz.

$$[\alpha(T.S).x'].x = (T.S)(x.x') \ , \qquad x.x' \in Orth(X)'$$
$$= T(S(x.x'))$$
$$= T(S.x')x$$
$$= T(\alpha(S)x')x$$
$$\alpha(TS) = \alpha(T)\alpha(S)$$

şeklinde ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2 $x \in X \ \ ve \ \ f \in X'$ alalım. Eğer;

$\pi \in Orth(X)$ için, $f.x\colon Orth(X) \to \mathbb{R}$ dönüşümünü

$(f.x)(\pi) = (fo\pi)(x)$ olarak tanımlarsak, $fox \in Orth(X)'$ olur.

İspat:

$II.$ dönüşümden,

$X \times X' \to Orth(X)'$

$(x, f) \to x.f$, $\quad x.f \in Orth(X)'$, $x o f \in Orth(X) \to R$ O zaman,

$(x.f)(\pi) = (fo\pi)(x)$ olduğunu gösterelim:

$\beta\colon Orth(X) \to L_b(X)$ dönüşümünü

$T \to \beta(T)x = Tx$ olarak tanımlayalım.

O zaman aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$(x.f)(T)=(Tx)(f), \qquad f\in X'$

$=\beta(T)x$

$(x.f)(\pi)=(\pi x)f$

$=(\beta(\pi)x)f$

$= f(\beta(\pi)x)$

$= f(\pi x)$

bulunur. Öyleyse;

$(x.f)(\pi)= f(\pi x)$ olur ve $xof \in Orth(X)'$ elde edilir [23].

Yardımcı Teorem 3.3 $Her\ F\in X''$, $f\in Orth(X)'$ için

$\phi: X''\rightarrow Orth(X)''$ dönüşümünü şöyle tanımlayalım:

$\phi(F)f = F(f_X)$. Ayrıca;

$\alpha: Orth(X)''\rightarrow Orth(X)'$ olarak tanımlandığından,

$\beta=\alpha\, o\, \phi$ bir cebir homomorfizmadır.

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{\phi} & Orth(X)'' & & \\ X'' & & \downarrow & \alpha \\ & \xrightarrow[\beta=\alpha\, o\, \phi]{} & Orth(X)' & & \end{array}$$

İspat :

$Her\ F,G\in X''$ için; $\beta(F.G)=\beta(F).\beta(G)$ doğruluğunu göstermeliyiz.

$\beta(F.G)=(\alpha o\phi)(F.G)$

$=\alpha(\phi(F.G))$ (ϕ dönüşümünün homomorfizma olduğunu biliyoruz.)

$=\alpha(\phi(F).\phi(G))$

$=\alpha(\phi(F)).\alpha(\phi(G))$

$=(\alpha o\phi)(F).(\alpha o\phi)(G)$

$=\beta(F).\beta(G)$

şeklinde ispat tamamlanmış olur.

Tanım 3.4 Her $f \in (X')^{+}$ için $\left(Orth(X)'\right)^{+}$ deki tüm f genişlemelerinin kümesi $\varepsilon(f)$ şu şekilde tanımlıdır:

$$\varepsilon(f) = \left\{ g \in Orth(X)' : \quad 0 \le g \quad ve \quad g_X = f \right\}.$$

Teorem 3.5 X in sıralı duali X' den $\varepsilon(f) \neq 0$ olacak şekilde bir f elemanı alalım. $x \in X^{+}$ için, $f.x = 0$ olduğunda $f(x) = 0$ olur.

İspat:

$\forall\, f \in X'$, $x \in X$ için;

$\varepsilon(f) = \left\{ g \in Orth(X)' : \quad 0 \le g \quad ve \quad g_X = f \right\}$ olsun.

$0 = f.x \in Orth(X)'$ alalım.

$0(T) = f(T.x)$, $\qquad \forall\, T \in Orth(X)$

$0 = f(T.x)$ olur.

Eğer , $T = I$ olarak alırsak,

$f(Ix) = 0 \;\Rightarrow\; f(x) = 0$ bulunur.

BÖLÜM 4

BANACH A-MODÜLLERİ ÜZERİNDEKİ A-LİNEER OPERATÖRLER

Tanım 4.1 X,Y,Z ; K (kompleks ya da reel sayılar) cismi üzerinde normlu lineer uzay olsunlar. X',Y',Z' sırasıyla X,Y,Z nin birinci duali olsunlar. X'',Y'',Z'' sırasıyla X,Y,Z nin ikinci duali olsunlar.

X te tanımlı f lineer fonksiyonelleri için ;

$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$ olarak tanımlansın.

$X \times Y$ üzerinde bir m sınırlı bilineer dönüşüm tanımlansın :

$$m : X \times Y \to Z$$

$$(1)\quad x_1, x_2 \in X \ , y \in Y \ ve \ \lambda \ skaleri \ için,$$
$$m(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda m(x_1, y) + m(x_2, y)$$

$$(2)\quad x_1 \in X \ , y_1, y_2 \in Y \ ve \ \lambda \ skaleri \ için,$$
$$m(x, \lambda y_1 + y_2) = \lambda m(x, y_1) + m(x, y_2)$$

$$(3)\quad M \langle \infty \ için,$$
$$\sup_{\|x\|,\|y\| \le 1} \|m(x,y)\| \le M \ .$$

O zaman ;

$m^* : Z' \times X \to Y'$ adjoint operatörü, $\forall \ f \in Z', x \in X$ için;

$m^*(f, x)(y) = f(m(x, y))$ ile $(1),(2),(3)$ şartlarını sağlar.

$m^{**}: Y'' \times Z' \to X'$. Bu dönüşüm de (1),(2),(3) şartlarını sağlar.

Ayrıca m dönüşümünün Arens genişlemesi $m^{***}: X'' \times Y'' \to Z''$ dönüşümü ile verilir. Bu dönüşüm (1),(2),(3) şartlarını sağlar [24].

Yukarıda tanımlanan çarpımlar vasıtasıyla, değişme özelliği olması gerekmeyen fakat birleşme özelliği olan A cebirinin ikinci duali A'' de bir çarpım şöyle tanımlanır:

A', A nın birinci duali ve A'', A nın ikinci duali olmak üzere,

$a, b \in A$, $F, G \in A''$ verildiğinde ,

$$\begin{array}{l} A \times A \to A \\ (a,b) \to a.b \end{array}$$ tanımını verelim.

Diğer çarpımları da,

(1) $A' \times A \to A'$
$(f, a) \to f.a$, $\quad (f.a)(b) = f(a.b) \quad (f \in A', \ a \in A, \ b \in A)$

(2) $A'' \times A' \to A'$
$(G, f) \to G.f$, $\quad (G.f)(a) = G(f.a) \quad (f \in A', \ a \in A, \ G \in A'')$

(3) $A'' \times A'' \to A''$
$(F, G) \to F.G$, $\quad (F.G)(f) = F(G.f) \quad (f \in A', \ F \in A'', \ G \in A'')$

eşitlikleri ile $f.a \in A', \ G.f \in A' \ ve \ F.G \in A''$ olmak üzere tanımlayabiliriz. Bu çarpımlara Arens Çarpımları denir.

(3)üncü çarpımdan A'' birleşmeli cebirdir. A da tanımlı çarpım birleşme özelliğine sahip olmasına rağmen , A'' de tanımlı Arens çarpımı değişme özelliğine sahip olmak zorunda değildir.

Arens çarpımları aşağıda verilen özellikleri sağlar:

(i) A da tanımlı çarpım, A'' deki Arens çarpımına genişletilebilir. (Yani $a''.b'' = (a.b)'' \ \forall \ a, b \in A \ için$)

(ii) Eğer, A cebirinin birim elemanı e ise , A'' cebirinin birim elemanı da e'' olur.

(iii) Eğer, A değişme özelliğine sahip ise $her \ a \in A \ ve \ f \in A' \ için \ a''.f = f.a$ olur.
(Yani $her \ b \in A \ için, \ (a''.f)(b) = a''(f.b) = (f.b)(a) = f(b.a) = f(a.b) = (f.a)(b)$)

A, bir Banach $f-$cebiri ve X bir Banach uzayı olsun.

$L(X)$ ile X *ten* X *e* tanımlı tüm lineer oparetörlerin kümesini gösterelim. X in topolojik dualini X' ile gösterelim.

$$\begin{aligned} p : A \times X &\to X \\ (a, x) &\to a.x \end{aligned}$$

bilineer dönüşüm aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X e Banach $A-$ modülü denir:

$(i)\ 1.x = x \quad her\ \ x \in X\,,\ 1 \in A\ \ için$

$(ii)\ (ab).x = a.(b.x)\ \ her\ \ a,b \in A\ ,\ x \in X\ \ için$

$(iii)\ \|a.x\| \leq \|a\|\|x\|\ \ her\ \ a \in A\,,\ x \in X\ \ için.$

Örneğin, Banach $C(K)$ modülleri Banach A- modülüdür [30].

p bilineer dönüşümü, $m: A \to L(X)$, $(a, x) \to a.x = m(a)x$, norm $\|\,.\,\|$ topolojiden kuvvetli operatör topolojiye sürekli birimsel cebir homomorfizmasını tanımlar ve A**,** A'' içine aşağıdaki gibi gömülebilir.

Her $a \in A,\ f \in A'$ için, $a'' \in A''$ elemanı $a''(f) = f(a)$.

Her $a \in A, \sigma : A \to A''$ dönüşümü $\sigma(a) = a''$ ile tanımlandığında birebir cebir homomorfizmasıdır. Bu nedenle A, A'' içinde bir alt cebir olarak düşünülebilir**.** Aşağıdaki üç bilineer dönüşümü kurabiliriz:

$(1)\ X \times X' \to A'$

$x \in X,\ f \in X', a \in A \quad için \qquad (x, f) \to (x.f)(a) = f(a.x),$

$(2)\ A'' \times X' \to X'$

$a \in A'',\ f \in X', x \in X \quad için \qquad (a, f) \to (a.f)(x) = a(x.f),$

$(3)\ A'' \times X'' \to X''$

$a \in A'', z \in X'',\ f \in X' \quad için \qquad (a, z) \to (a.z)(f) = z(a.f).$

X i A olarak aldığımız zaman (3) dönüşümü A'' üzerinde Arens çarpımı olarak adlandırılır. (2) deki bilineer dönüşüm $\dot{X}'$ üzerinde Banach $A-$modül yapısı $m*$ homomorfizmasını şu şekilde tanımlamamızı sağlar:

$$m^*: A'' \rightarrow L(X')$$

$$m^*(a)f = a.f$$

(3) teki bilineer dönüşüm X'' üzerinde Banach $A''-$modül yapısı tanımlar. Bu çarpımlara X modül çarpımlarının Arens genişlemesi denir [29].

Yardımcı Teorem 4.2 X, bir Banach $A-$ modül olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler doğrudur :

(i) Her $a \in A$ için

$m^*(a) = (m(a))^*$ dır, burada $(m(a))^*$ ile $m(a)$'nın adjointi gösterilmektedir.

(ii) X' bir Banach $A''-$ modüldür.

(iii) X'' bir Banach $A''-$ modüldür.

(iv) Her $a \in A''$ *için* $m^*(a)$, $A''[\sigma(A'', A')]$ 'den $L(X')[w^* ot]$ ye süreklidir. Burada $w^* ot$ zayıf * operatör topolojisidir.

İspat:

(i) Her $a \in A$ için

$$\begin{aligned}
m^*(a)f &= a.f \\
[m^*(a)f](x) &= (a.f)(x) \\
&= a(f.x) \\
&= f(a.x) \\
&= f(m(a)x) \\
&= ((m(a))^* f)(x)
\end{aligned}$$

(ii) - *Her* $f \in X'$, $1 \in A''$ *için* $1.f = f$ olduğunu gösterelim.

$$(1.f)(x) = f(1.x) = f(x) \text{ ise}$$
$$1.f = f \text{ olur.}$$

- *Her* $a'', b'' \in A''$ *ve* $f \in X'$ *için* $(a''b'').f = a''(b''.f)$ olduğunu gösterelim.

Her $a'', b'' \in A''$ için

$$\lim a_\alpha = a'' \qquad \lim a_\beta = b''$$

olacak şekilde $a_\alpha, a_\beta \in A$ netlerini alalım.

$\lim\left(a_{\alpha}a_{\beta}\right)=a''.b''$ olduğundan

$\left(a_{\alpha}.a_{\beta}\right).f=a_{\alpha}\left(a_{\beta}.f\right)$

$\lim\left(a_{\alpha}.a_{\beta}\right).f=\lim a_{\alpha}\left(a_{\beta}.f\right)$ (çarpımın sürekliliğinden)

$\left(a''.b''\right).f=a''.\left(b''.f\right)$ elde edilir.

- $Her\ a''\in A''\quad ve\quad f\in X'\ için\ \left\|a''.f\right\|\leq\left\|a''\right\|\left\|f\right\|$ olduğunu gösterelim.

p dönüşümünün bilineer sürekli olmasından sırasıyla $(1),(2),(3)$ dönüşümleri de bilineer süreklidir. Yani, $\left\|a''.f\right\|\leq\left\|a''\right\|\left\|f\right\|$ eşitsizliği sağlanır.

(iii) - $Her\ F\in X'',1\in A''\ için\ 1.F=F$ olduğunu gösterelim.

$(1.F)(f)=F(1.f)=F(f)\ ise$

$(1.F)=F\ olur.$

- $Her\ a'',b''\in A''\quad ve\quad F\in X'\ için\ \left(a''b''\right).F=a''\left(b''.F\right)$ olduğunu gösterelim.

(ii) deki ispata benzer şekilde gösterilir.

- $Her\ a''\in A''\quad ve\quad F\in X'\ için\ \left\|a''.F\right\|\leq\left\|a''\right\|\left\|F\right\|$ olduğunu gösterelim.

m dönüşümünün lineer sürekli olmasından sırasıyla m^{*},m^{**},m^{***} dönüşümleri de lineer süreklidir. Yani, $\left\|a''.F\right\|\leq\left\|a''\right\|\left\|F\right\|$ eşitsizliği sağlanır.

(iv) $a_{\alpha}\rightarrow a$ olacak şekilde $a_{\alpha}\in A$ neti alalım. $\sigma(A'',A')$ topolojisine göre,

her $f\in A'$ için $a_{\alpha}(f)\rightarrow a(f)$ demektir.

$m^{*}:A''\rightarrow L(X')$ için,

$a_{\alpha}\rightarrow a$ alındığında, bir x' sabiti için;

$a_{\alpha}.x'\rightarrow a.x'$ (3) ün sürekliliğinden

$\left(m^{*}(a_{\alpha})x'\right)x\rightarrow\left(m^{*}(a)x'\right)x$

$m^{*}(a_{\alpha})\rightarrow m^{*}(a)$ olup $\left[w^{*}ot\right]$ topolojiye süreklidir.

Tanım 4.3 X, bir Banach $A-$ modülü olsun. O zaman, Cl_{X} ile X e göre kapanışını göstermek üzere $\Delta(x)=Cl_{X}\{a.x:a\in A,\ \|a\|\leq 1\}$ olsun. Y, X in bir altuzayı olsun. Her $x\in Y$ için $\Delta(x)\in Y$ oluyorsa Y ye ideal denir.

X, bir Banach $A-$ modül ve $f\in X'$, olsun. Benzer biçimde,

$\Delta(f)=Cl_{X'}\{a.f\ :\ a\in A'',\ \|a\|\leq 1\}$ tanımlanabilir. Burada $Cl_{X'}$ ile X' e göre kapanışını göstermekteyiz [26].

Tanım 4.4 X, bir Banach $A-$ modülü ve $x, y \in X$ olsun. Eğer ;

$\Delta(x+y)=\Delta(x)+\Delta(y)$ ve $\Delta(x)\cap\Delta(y)=\{0\}$ sağlanıyorsa, $x, y\,(x\perp y)$ ayrıktır denir.

X, bir Banach A_1- modülü ve Y, bir Banach A_2- modülü olsun. $T: X\to Y$ lineer operatörünü alalım. O zaman, $x\perp z$ olduğunda $Tx\perp Tz$ sağlanıyorsa T ye ayrıklığı koruyan operatör (d-homomorfizm) denir [26].

X ve Y Banach $A-$ modülü olsunlar. (aynı A üzerinde) O zaman, $T: X\to Y$ lineer sürekli operatörüne $a\in A$ ve $x\in X$ için $T(a.x)=a.Tx$ ise $A-$lineer operatör denir. Eğer, $T: X\to Y$ operatörü $A-$ lineer ise , T nin adjointi T' operatörü Y' den X'e ayrıklığı koruyan operatör olur [27].

Teorem 4.5 X ve Y Banach $A-$ modülü olsunlar. O zaman, lineer $T: X\to Y$ operatörü $A-$lineer ise onun sürekli adjoint operatörü $T': Y'\to X'$ de $A''-$lineer operatördür.

İspat:

$a\in A,\ y'\in Y'$ için , $T'(a.y')=a.T'y'$ alalım. $x\in X$ değişkeni için , $T'(a.y')(x)=(a.T'y')(x)$ olduğunu gösterelim:

$T'(a.y')(x)=(a.y')(Tx)=y'(a.Tx)$ ((1) deki bilineer dönüşümden)

$= y'(T(a.x))$ (A lineerlikten)

$T'y'(a.x)=a(x.T'y')$ ((1) deki bilineer dönüşümden)

$=(a.T'y')(x)$ ((2) deki bilineer dönüşümden)

Bundan dolayı, T' bir $A-$lineer operatördür. A, A'' de $|\sigma|(A'', A')-$yoğundur [20]. $a\in A''$ alalım. O zaman, $\sigma(A'', A')'$ da $a_\alpha\to a$ olacak şekilde A da bir $\{a_\alpha\}$ neti vardır. (2) deki bilineer dönüşümün sürekliliğinden , $a.y'\in Y'$ için $a_\alpha.y'\to a.y'$ elde edebiliriz. T' operatörünün sürekli olmasından $T'(a_\alpha.y')\to T'(a.y')$ olur. Birinci ifade sayesinde $T'(a_\alpha.y')=a_\alpha.T'y'$ elde edilir. (2) deki bilineer dönüşüm ile $a_\alpha.T'y'\to a.T'y'$ olur ve burdan $T'(a.y')=a.T'y'$ elde edilir. Bu nedenle, T', $A''-$ lineerdir.

Önerme 4.6 X, bir Banach $A-$ modül ve $T:X \to X$ operatörü bir $A-$lineer operatör olsun. O zaman, her $x \in X, x' \in X'$, için $Tx.x' = x.T'x'$ olur. Burada $T': X' \to X'$ operatörü T operatörünün adjointidir.

(2) deki bilineer dönüşüm ve p ile bunu ispatlayabiliriz.

X, bir Banach $A-$ modül olsun. . O zaman, tüm $A-$lineer dönüşümlerin kümesini $Orth_A(X)$ olarak tanımlayalım.

Sonuç 4.7 Eğer, $T \in Orth_A(X)$, ise o zaman $T' \in Orth_{A''}(X')$ olur.

İspat :

$T: X \to X$ alalım.

Her $a \in A$ için,

$T'(a.x') = a.(T'x')$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}(T'(a.x'))(x) &= (a.x')(Tx)\\ &= a\,(x'.Tx)\\ &= a(T'x'.x)\\ &= (T'x')(a.x)\\ &= (a.T'x')(x)\end{aligned}$$

$A = C(K)$ alalım. X bir Banach $C(K)-$modül olsun. O zaman, X' in her w^*-kapalı ideali E için $TE \subseteq E$ olacak şekilde tüm $T': X' \to X'$ sürekli lineer operatörlerin kümesini $W(X')$ ile göstereceğiz.

Sonuç 4.8 X, bir Banach $C(K)-$modülü olsun. O zaman $W(X') = Orth_{C(K)''}(X')$ olur [28].

İspat:

$T \in W(X')$ alalım. O zaman T operatörü $C(K)-$lineerdir. $C(K)$, $C(K)''$ de $|\sigma|\left(C(K)'', C(K)'\right)$ yoğun ve T nin sürekliliğinden $W(X') \subseteq Orth_{C(K)''}(X')$ olduğu gösterilir. Diğer tarafın ispatı için [26] daki Teorem 2 kullanılır [25].

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, A $f-cebirlerinin$ ikinci sıralı dualleri ve Banach $A-\mathrm{mod}\,ulleri$ üzerindeki lineer operatörler incelenmiştir. X bir Archimedean $f-cebiri$ olmak üzere, $T \in Orth(X)''$, $x' \in X'$ için $\alpha : Orth(X)'' \to Orth(X')$, $\alpha(T)x' = Tx'$ dönüşümü ve $F \in X$, $f \in Orth(X)'$ için $\phi : X'' \to Orth(X)''$, $\phi(F)(f) = F(f_X)$ olmak üzere $\beta = \alpha \circ \phi$ dönüşümünün bir cebir homomorfizması olduğu gösterilmiştir.

A, Banach $f-cebiri$ olmak üzere X ve Y Banach $A-\mathrm{mod}\,ül$ olduğunda X' ve X'' nin birer Banach $A''-\mathrm{mod}\,ül$ olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, lineer $T : X \to Y$ operatörü $A-lineer$ ise onun sürekli adjoint operatörü $T' : Y' \to X'$ de $A''-lineer$ operatör olduğu gösterilmiştir. Son olarak X , bir Banach $C(K)-\mathrm{mod}\,ülü$ olduğunda $W(X') = Orth_{C(K)''}(X')$ eşitliğinin sağlandığı gösterilmiştir. Bu eşitlikte A bir $f-cebiri$ alınırsa $W(X') = Orth_{A''}(X')$ eşitliğinin varlığı araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Amemiya, I., (1953), "A general spectral theory in semi-ordered linear spaces", J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I. 12:111–156.

[2] Bigard, A., Kemiel, K., Wolfenstein S., (1977). Groupes et anneaux réticulés, Lecture Notes in Mathematics., Springer-Verlag, Berlin, French.

[3] Birkhoff G., Pierce R. S., (1956), Lattice-ordered rings , An. Acad. Brasil. Ci.28 :41–69.

[4] Fuchs L.,(1966)., Teilweise geordnete algebraische Strukturen, Studia Mathematica–Mathematische Lehrbücher, Band XIX. Übersetzt aus dem Englischen von Éva Vas, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, (German).

[5] Henriksen M., Isabell J. R., Johnson D. G. (1961/1962). "Residue class fields of lattice-ordered algebras", Fund. Math., 50:107–117.

[6] Henriksen M., Johnson D. G., (1961/1962). "On the structure of a class of archimedean lattice-ordered algebras", Fund. Math., 50:73–94.

[7] Johnson D. G., (1960). "A structure theory for a class of lattice-ordered rings", Acta Math. 104:163–215.

[8] Nakano H., (1950). Modern Spectral Theory, Maruzen Co. Ltd., Tokyo.

[9] Huijsmans C. B., De Pagter B.,(1982). "Ideal Theory in f-algebras", Trans. Amer. Math. Soc., 1:225-245.

[10] Riesz F., (1930). "Sur la decomposition des operations lineaires", Atti Cong. Internaz. Mat., Bologna, 3:143-148.

[11] Birkhoff, G. (1967). "Lattice Theory", 3rd ed. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. No. 25, Providence, Rhode Island.

[12] Kantorovic, L. V., Vulıkh B. Z., Pinsker A. G., (1950). "Functional Analysis in partially ordered spaces", Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit. Moskow and Leningrad.

[13] Schaefer, H. H., (1974). "Banach Lattices and Positive Operators", Springer Verlag, Berlin and New York.

[14] Dodds P. G., Fremlin D. H., (1979), "Compact operators in Banach Lattices" Israel J. Math., 34:287-320.

[15] Aliprantis C. D., Burkinshaw O.,(1980), "Positive compact operators on Banach lattices", Math. Z., 174:289-298

[16] Aliprantis C. D., Burkinshaw O., (1982), "Dunford-Pettis operators on Banach lattice", Trans. Amer. Math. Soc., 274:227-238.

[17] Aliprantis C. D., Burkinshaw O., (1983), "The components of a positive operator", Indagationes Math., 86:229-241.

[18] Aliprantis C. D., Burkinshaw O., (1984), “Factoring compact and weakly compact operator through reflexive Banach lattices”, Trans. Amer. Math. Soc., 283:369-381.

[19] Zaanen A. C., (1983), Riesz spaces II, North-Holland, Amsterdam.

[20] Aliprantis C. D., Burkinshaw O., (1985), Positive Operators, Indianapolis, Indiana, Academic Press, Inc.

[21] Meyer P., Nieberg, (1991), Banach Lattices, North Holland Mathematical Library, Germany, Springer Verlag.

[22] Gök, Ö., (2010), Fonksiyonel Analize Giriş, 3. Baskı, YTÜ Yayınları, İstanbul

[23] Boulabiar K., Jaber J., (2010), “The order bidual of f-algebras revisited”, Positivity, 15:271-279.

[24] Huijmans C. B., (1989), “The Order Bıdual of Lattice Ordered Algebras II”, J. Operator Theory, 22:277-290

[25] Gök Ö.,(1999), “On dual Bade theorem in locally convex C(K)-modules”, Demonstratio Math., 32:807-810.

[26] Abramovich Y. A., Arenson E. L. and Kitover A. K.: Banach $C(K)-$Modules and Operator Preserving Disjointness, Pitman Res. Notes in Mathematics Series 227, J.Wiley (1997).

[27] Gök Ö., “On disjointness preserving operators in Banach $C(K)-$modules” Int. J. Appl. Math., (1999), 1:127-130

[28] Gök Ö., “On $C(K)-$Orthomorphisms” Math. Sci. Res. J.,(2003), 7:72-78.

[29] Hadwin, Don; Orhon, Mehmet, “Reflexivity and approximate reflexivity for bounded Boolean algebras of projections”. J. Funct. Anal. 87 (1989), 2:348-358.

[30] Gök Ö., “On Maharam Extensions of Positive Operators on Banach f-modules”, Int J. Appl. Math, (2002), 3:309-321.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Esra ULUOCAK
Doğum Tarihi ve Yeri	: 19.05.1983 İstanbul
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: esraaltinbilezik@arel.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Y.T.Ü	2008
Lisans	Matematik	Y.T.Ü	2006
Lise	Fen-Matematik	Kurtuluş Lisesi	2001

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2010 – Devam Ediyor	İstanbul Arel Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. ULUOCAK, E., GÖK Ö.,	"A note on the Order Bidual of f-algebras", Pure Mathematical Science, (2013), 1:23-28.
2. ULUOCAK, E., GÖK Ö.,	"A note on A-linear Operators on Banach A-module", International Journal of Mathematical Analysis, (2014), 39:1945-1950.

Bildiri

1. ICAAA 2011	International Conference on Applied Analysis and Algebra, İstanbul , YTÜ.