YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bir Hiperbolik Denklem için Cauchy Probleminin Çözümü Üzerine

Neşe Karakaş

Doktora Tezi

BİR HİPERBOLİK DENKLEM İÇİN CAUCHY PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

NEŞE KARAKAŞ

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ FEN FAKÜLTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

İSTANBUL - 1984

BİR HİPERBOLİK DENKLEM İÇİN CAUCHY

PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE

Doktora Tezi

Neşe KARAKAŞ

İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi

Matematik Bölümü

İstanbul - 1984

1 - GİRİŞ: Bu araştırmada, $x = (x_1,\ldots,x_n)$, R^n Euclid uzayının genel bir noktasını, t zaman değişkenini, a bir gerçel parametreyi ve $\triangle$ da n- boyutlu Laplace operatörünü göstermek üzere

$$(1.01) \qquad \triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{a}{t}\frac{\partial u}{\partial t} \quad , \quad \triangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \; , \; -\infty < a < \infty \; , \; x \in R^n$$

denkleminin $t = \tau$ hiperdüzlemi üzerinde

$$(1.02) \qquad u(x,\tau,\tau) = f(x) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau,\tau) = 0$$

başlangıç koşullarını gerçekleyen çözümü elde edilecek ya da başka bir deyimle Cauchy probleminin çözümünün verilmesine çalışılacaktır. $n = 1$ ve $a = 2$ olmak üzere

$$(1.03) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2}{t}\frac{\partial u}{\partial t}$$

denkleminin 1967 de H. WEINBERGER - M. PROTTER [9] tarafından ele alındığını görmekteyiz. Weinberger ve Protter (1.03) denklemiyle ilgili bir başlangıç - sınır probleminin çözümünde (1.03) denkleminin

$$(1.04) \qquad u(x,t) = (-1)^k \frac{k!}{(2k)!} \cos\left(x\sqrt{4k+2}\right) He_{2k}(t)\, e^{-t^2} \quad ,$$

ile verilen bir özel çözümünden yararlanmaktadırlar. Oysa bu fonksiyon (1.03) denkleminin $t = 0$ doğrusu üzerinde

$$(1.05) \qquad u(x,0) = \cos (x \sqrt{4k+2}) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad ,$$

başlangıç değerlerini alan çözümüdür. Böylece (1.03) denklemi için Cauchy probleminin çözümü, $n = 1$ ve $a = 2$ halinde çok özel bir $f(x) = \cos (x \sqrt{4k+2})$ başlangıç fonksiyonu için bilinmektedir. Üstelik (1.03) , (1.05) Cauchy probleminde a parametresinin $a = 2$ olarak seçilen değerinin, çözümün elde edilişinde özel ve çok önemli bir rol oynadığını belirtmek zorundayız.

Burada sunmaya çalıştığımız araştırmada (1.01) denkleminin $t = \tau$ düzlemi üzerinde (1.02) başlangıç değerini alan çözümüyle ilgilenilmiş ve çözüm yöntemi olarak Euler - Poisson - Darboux denklemi için Diaz - Davis konjektürünü ([4],[5],[6]) ispatlamak amacıyla 1960 da B. ASRAL ([1],[2],[3]) tarafından verilen seri - çözüm yönteminden yararlanılmış ve $f(x)$ başlangıç fonksiyonları sınıfının yine [1] de verilen teoremle karakterize edilebileceği gösterilmiştir.

$\varphi(t)$, $t = 0$ noktası dolayında regüler ya da R de yakınsak bir üslü seriye açındırılabilir bir fonksiyonu göstermek üzere

$$(1.06) \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\varphi(t)}{t} \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$(1.07) \qquad u(x,\tau,\tau) = f(x) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau,\tau) = 0$$

Cauchy problemi, Euler - Poisson - Darboux denklemi için

$$(1.08) \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t} ,$$

$$(1.09) \qquad u^k(x,\tau,\tau) = f(x) \quad , \quad \frac{\partial u^k}{\partial t}(x,\tau,\tau) = 0$$

ile verilen Cauchy probleminin doğal bir genelleştirilişi olarak gözönüne alınabilir. Ancak (1.06) , (1.07) Cauchy probleminin integrasyonunun getirdiği güçlükler karşısında $\varphi(t)$ fonksiyonunun

$$\varphi(t) = at^2$$

biçimindeki özel seçimi bu yeni problemin çözümüne doğru atılan ilk adımlardan biri olarak da düşünülebilir.

$$\varphi(t) = k + at$$

seçimiyle gerçekleştirilen bir ikinci yaklaşım da I.İZMİRLİOĞLU I7I tarafından incelenmiştir.

2 - İncelememize başlamadan önce a parametresinin pozitif olduğunu varsayalım. Bu varsayımın kısıtlayıcı bir rol oynamadığı ve ne biçimde giderilebileceği ileride görülecektir. Şimdi (1.01) , (1.02) Cauchy problemini [3] de olduğu gibi Volterra integral denklemi yapısında bir fonksiyonel denkleme indirgemek isteyelim. Bu amaçla

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + a\xi \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

denklemini $e^{a\xi^2/2}$ fonksiyonuyla çarparak (τ,μ) aralığı üzerinde ξ değişkenine göre integre edelim. Buradan (1.02) başlangıç koşulu gözönüne alınarak

$$\frac{\partial u}{\partial \mu}(x,\mu,\tau,a) = e^{-a\mu^2/2} \int_{\tau}^{\mu} e^{a\xi^2/2} \Delta u(x,\xi,\tau,a) \, d\xi \quad ,$$

yazılabilir. Bu sonuncu eşitliği de μ değişkenine göre (τ,t) aralığı üzerinde integre etmek ve yine (1.02) başlangıç koşullarını gözönüne almak suretiyle

$$(2.01) \quad u(x,t,\tau,a) = f + \int_{\tau}^{t} \int_{\tau}^{\mu} e^{-(\mu^2-\xi^2)/2} \Delta u(x,\xi,\tau,a) \, d\mu \, d\xi$$

fonksiyonel denklemine varılır. Bu denkleme $u_o(x,t,\tau,a) = f$ olmak üzere ardaşık yaklaşımlar yöntemi uygulanarak

$$(2.02) \quad u(x,t,\tau,a) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,\tau,a) \, \Delta^n f$$

biçimsel çözümü elde edilir. Burada

$$u_o(t,\tau,a) = 1 \ ,$$

(2.03)

$$u_n(t,\tau,a) = \int_\tau^t \int_\tau^\mu u_{n-1}(\xi,\tau,a) \ e^{-a(\mu^2-\xi^2)/2} \, d\mu \, d\xi$$

$$(n = 1,2,\ldots,)$$

dır. $u_n(t,\tau,a)$ fonksiyonlarının,

$$(2.04) \qquad \frac{d^2}{dt^2} u_n(t,\tau,a) + at \frac{d}{dt} u_n(t,\tau,a) = u_{n-1}(t,\tau,a)$$

$$(n = 1,2,\ldots,)$$

diferansiyel denklemlerinin,

$$(2.05) \qquad u_n(\tau,\tau,a) = 0 \ , \quad \frac{d}{dt} u_n(\tau,\tau,a) = 0 \ , \quad (n = 1,2,\ldots,)$$

başlangıç koşullarını gerçekleyen çözümleri oldukları tümevarım ilkesi ve (2.03) den integral işareti altında türev almak işlemi yardımıyla kolayca gösterilebilir. (2.01) denkleminin (2.02) ile verilen çözümünün f başlangıç fonksiyonuna fonksiyonel anlamda bağlı oluşu nedeniyle bundan sonra $u(x,t,\tau,a)$ yerine $u(f,t,\tau,a)$ gösterilimi benimsenecektir. Bu gösterilimle,

$$(2.06) \qquad \Delta u(f,t,\tau,a) = u(\Delta f,t,\tau,a)$$

bağıntısının şimdilik biçimsel olarak gerçeklendiği açıktır. Böylece (2.02) serisi, (1.01) denklemini ve (1.02) başlangıç koşulla rını gerçekler.

Buraya kadar $u_n(t,\tau,a)$ fonksiyonlarında, t ye değişken τ ya bir parametre gözüyle bakılmıştı. Şimdi τ ya değişken ve t ye de parametre gözüyle bakarak $u_n(t,\tau,a)$ fonksiyonlarının τ ya ne biçimde bağlı olduklarını aydınlatalım. Bunun için integral işareti altında türev alarak $u_1(t,\tau,a)$ fonksiyonunun τ ya göre ardaşık ilk iki türevini yazalım:

$$\frac{d}{d\tau} u_1(t,\tau,a) = -e^{a\tau^2/2} \int_\tau^t e^{-a\mu^2/2}\, d\mu \ ,$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} u_1(t,\tau,a) = -a\tau e^{a\tau^2/2} \int_\tau^t e^{-a\mu^2/2}\, d\mu + 1 \ .$$

Buradan

$$\frac{d^2}{d\tau^2} u_1(t,\tau,a) - a\tau \frac{d}{d\tau} u_1(t,\tau,a) = 1$$

denklemi elde edilir ve τ nun fonksiyonu olarak $u_1(t,\tau,a)$,

$$u_1(t,t,a) = 0 \quad , \quad \frac{d}{d\tau} u_1(t,t,a) = 0$$

başlangıç koşullarını gerçekler. $u_{n-1}(t,\tau,a)$ nın τ nun fonksiyonu olarak

$$\frac{d^2}{d\tau^2} u_{n-1}(t,\tau,a) - a\tau \frac{d}{d\tau} u_{n-1}(t,\tau,a) = u_{n-2}(t,\tau,a)$$

denkleminin

$$u_{n-1}(t,t,a) = 0 \quad , \quad \frac{d}{d\tau} u_{n-1}(t,t,a) = 0$$

başlangıç koşullarını gerçekleyen bir çözümünü gösterdiğini varsayalım. Ve $u_n(t,\tau,a)$ nın

$$(2.07) \qquad \frac{d^2}{d\tau^2} u_n(t,\tau,a) - a\tau \frac{d}{d\tau} u_n(t,\tau,a) = u_{n-1}(t,\tau,a)$$

denkleminin

$$(2.08) \qquad u_n(t,t,a) = 0 \quad , \quad \frac{d}{d\tau} u_n(t,t,a) = 0$$

başlangıç koşullarını gerçekleyen bir çözümü olduğunu gösterelim. Bu amaçla $u_n(t,\tau,a)$ nın (2.03) ile verilen integral gösteriliminin τ - ya göre ardaşık ilk iki türevini yazalım:

$$\frac{d}{d\tau} u_n(t,\tau,a) = \int_\tau^t \int_\tau^\mu e^{-a(\mu^2-\xi^2)/2} \frac{d}{d\tau} u_{n-1}(\xi,\tau,a)\, d\mu\, d\xi \ ,$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} u_n(t,\tau,a) = \int_\tau^t \int_\tau^\mu e^{-a(\mu^2-\xi^2)/2} u_{n-2}(\xi,\tau,a)\, d\mu\, d\xi \ +$$

$$+ a\tau \int_\tau^t \int_\tau^\mu e^{-a(\mu^2-\xi^2)/2} \frac{d}{d\tau} u_{n-1}(\xi,\tau,a)\, d\mu\, d\xi$$

$$= u_{n-1}(t,\tau,a) + a\tau \frac{d}{d\tau} u_n(t,\tau,a) \ .$$

Buradan

$$\frac{d^2}{d\tau^2} u_n(t,\tau,a) - a\tau \frac{d}{d\tau} u_n(t,\tau,a) = u_{n-1}(t,\tau,a)$$

elde edilir ve (2.08) başlangıç koşulları gerçeklenir. Buna göre aşağıdaki teorem gösterilmiş olur.

Teorem 1. (1.01) , (1.02) Cauchy probleminin $a = b$ ve $a = -b$ parametre değerleriyle elde edilen çözümleri arasında

(2.09) $u_n(t,\tau,-b) = u_n(\tau,t,b)$, $(n = 1,2,\ldots,)$,

(2.10) $u(f,t,\tau,-b) = u(f,\tau,t,b)$,

bağıntısı gerçeklenir.

Böylece Euler - Poisson - Darboux Denklemi için regüler Cauchy probleminin çözümünde önemli bir rol oynayan ve B.ASRAL [1] tarafından elde edilen simetri ve tekabül teoreminin (1.01), (1.02) Cauchy problemi için de geçerliliği kanıtlanmış olmaktadır.

Bilindiği üzere Euler - Poisson - Darboux Denklemi için regüler Cauchy probleminin [1] de verilen

$$u^k(f,t,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n^k(t,\tau)}{4^n} \Delta^n f$$

seri çözümünde yer alan $u_n^k(t,\tau)$ fonksiyonları ve bu fonksiyonla -

rın integral gösterilişlerinden yararlanılarak t ve τ ya göre $2n$- inci basamaktan homogen fonksiyonlar olarak elde edilmekteydi. Buna karşılık burada incelemeye çalıştığımız $u_n(t,\tau,a)$ fonksiyonlarının (2.03) ile verdiğimiz integral ifadeleri bizi üslü serilere götürmektedir. Bunun için örneğin, bu fonksiyonların ardaşık türevlerinin $t = \tau$ da aldıkları değerler hesaplanarak $u_n(t,\tau,a)$ ların Taylor açılımlarının yazılmasına çalışılabilir. Ancak böyle bir girişimin neden olduğu karmaşık ve yüklü hesaplardan aşağıdaki yöntemle kaçınabiliriz. $u_1(t,\tau,a)$ fonksiyonunun

$$(2.11)\quad u_1(t,\tau,a) = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v\, a^{v/2}\, \frac{K_v^{(1)}}{(v+2)!}\,(t-\tau)^{v+2}$$

biçiminde yazılabildiğini düşünelim. $K_v^{(1)}$ katsayılarının belirlenmesi halinde $u_1(t,\tau,a)$ fonksiyonunun $t = \tau$ noktasındaki Taylor açılımı elde edilmiş olacaktır. Bu amaçla

$$(2.12)\quad \frac{d^2}{dt^2} u_1(t,\tau,a) + at\frac{d}{dt} u_1(t,\tau,a) = 1$$

denklemini,

$$(2.13)\quad \frac{d^2}{dt^2} u_1(t,\tau,a) + a(t-\tau)\frac{d}{dt} u_1(t,\tau,a) + a\tau\frac{d}{dt} u_1(t,\tau,a) = 1$$

biçiminde yazarak (2.11) serisini t nin fonksiyonu olarak (2.13) denkleminde yerine koyalım. Böylece $K_v^{(1)}$ katsayıları arasında

$$(2.14)\quad K_v^{(1)} + v\,K_{v-2}^{(1)} = \zeta\,K_{v-1}^{(1)}\ ,\quad (v = 0,1,2,\dots,)\ ,\ \zeta = \tau\sqrt{a}$$

bağıntılarının gerçeklendiği görülür. (2.14) bağıntılarının,

$$He_n(\zeta) = (-1)^n\, e^{\zeta^2/2} \frac{d^n}{d\zeta^n}\left(e^{-\zeta^2/2} \right)$$

Hermit çokterimlilerinin gerçeklediği,

$$(2.15)\quad He_{n+1}(\zeta) = \zeta\, He_n(\zeta) - n\, He_{n-1}(\zeta)$$

bağıntılarına benzerliği (Bkz. MAGNUS - OBERHETTINGER [8]) $M_{2v,p}^{(1)}$ ve $N_{2v+1,p}^{(1)}$ ler biraz sonra belirlenmesine çalışacağımız katsayıları göstermek üzere $\zeta = \tau\sqrt{a}$ nın fonksiyonları olarak $K_v^{(1)}$ lerin,

$$(2.16)\quad K_{2v}^{(1)} = \sum_{p=0}^{v} M_{2v,p}^{(1)}\, He_{2p}(\zeta)$$

$$(2.17)\quad K_{2v+1}^{(1)} = \sum_{p=0}^{v} N_{2v+1,p}^{(1)}\, He_{2p+1}(\zeta)$$

biçiminde yazılabileceklerini düşündürmektedir. $K_{2v}^{(1)}$ ve $K_{2v+1}^{(1)}$ lerin (2.16) ve (2.17) ile verilen değerleri $He_n(\zeta)$ fonksiyonlarının gerçekledikleri (2.15) bağıntısından yararlanarak (2.14) de yerlerine götürülürse $M_{2v,p}^{(1)}$ ve $N_{2v+1,p}^{(1)}$ katsayıları için

$$(2.18)\quad M_{o,o}^{(1)} = 1\ ,$$

$$(2.19)\quad M^{(1)}_{2v,p} = N^{(1)}_{2v-1,p-1} + (2p+1)\, N^{(1)}_{2v-1,p} - 2v\, M^{(1)}_{2v-2,p},$$

$$(v = 0,1,2,\ldots,)\ ,\ (p = 0,1,2,\ldots,v)$$

$$(2.20)\quad N^{(1)}_{2v+1,p} = M^{(1)}_{2v,p} + (2p+2)\, M^{(1)}_{2v,p+1} - (2v+1)\, N^{(1)}_{2v-1,p}\ ,$$

$$(v = 0,1,2,\ldots,)\ ,\ (p = 0,1,2,\ldots,v)$$

indirgeme bağıntıları elde edilir. Bu bağıntıların v ve p ye göre tümevarım düzeni içinde çözülüşlerindeki güçlük Teorem 1. gereğince $u_1(t,\tau,a)$ nın τ - değişkeninin fonksiyonu olarak

$$(2.21)\quad \frac{d^2}{d\tau^2}\, u_1(t,\tau,a) - a\,\tau\, \frac{d}{d\tau}\, u_1(t,\tau,a) = 1\ ,$$

denkleminin

$$u_1(t,t,a) = 0\ ,\quad \frac{d}{d\tau}\, u_1(t,t,a) = 0\ ,$$

başlangıç koşullarını gerçekleyen çözümü oluşundan yararlanılarak giderilebilir. Bu özellik gözönüne alınmak suretiyle (2.11) serisinin (2.21) de yerine konuluşu $M^{(1)}_{2v,p}$ ve $N^{(1)}_{2v+1,p}$ katsayılarınca gerçeklenen

$$(2.22)\quad M^{(1)}_{o,o} = 1\ ,$$

$$(2.23)\quad M^{(1)}_{2v,p} = N^{(1)}_{2v-1,p-1} - (2p+1)\, N^{(1)}_{2v-1,p} + 2p\, M^{(1)}_{2v-2,p}\ ,$$

$$(v = 0,1,2,\ldots,)\ ,\ (p = 0,1,2,\ldots,v)$$

$$(2.24)\quad N^{(1)}_{2v+1,p} = M^{(1)}_{2v,p} - (2p+2)\, M^{(1)}_{2v,p+1} + (2p+1)\, N^{(1)}_{2v-1,p} \,,$$

$$(v = 0,1,2,\ldots,)\ ,\ (p = 0,1,2,\ldots,v)$$

bağıntı takımının bulunmasına yol açar. $M^{(1)}_{2v,p}$, $N^{(1)}_{2v+1,p}$ katsayılarının gerçeklediği bu iki bağıntı takımından daha elverişli bağıntılara varmak için (2.19) eşitliği ile (2.23) eşitliğini ve (2.20) eşitliği ile (2.24) eşitliğini yanyana çıkaralım. Böylece

$$(2.25)\qquad N^{(1)}_{2v+1,p} = \frac{v+p+1}{2p+1}\, M^{(1)}_{2v,p} \,,$$

$$(2.26)\qquad N^{(1)}_{2v+1,p} = \frac{2p+2}{v+p+2}\, M^{(1)}_{2v+2,p+1}$$

olur. Bu sonuncu bağıntılar da

$$(2.27)\qquad M^{(1)}_{2v+2,p+1} = \frac{(v+p+1)\ (v+p+2)}{(2p+1)\ \ (2p+2)}\, M^{(1)}_{2v,p} \,,$$

bağıntısını gerektirir.

(2.19) ve (2.23) indirgeme bağıntılarından $p = 0$ için

$$M^{(1)}_{2v,0} = N^{(1)}_{2v-1,0} - 2v\, M^{(1)}_{2v-2,0} \,,$$

ve

$$M^{(1)}_{2v,0} = -\, N^{(1)}_{2v-1,0} \,,$$

bulunur ve bu iki bağıntıdan da

$$M^{(1)}_{2v,0} = - v\, M^{(1)}_{2v-2,0} \quad , \quad (v = 1,2,\ldots,) \tag{2.28}$$

bağıntısı elde edilir. (2.28) de v gösterge sayısına 1 den v ye kadar bütün tam değerleri vermek ve v nin bu değerleri için bulunan eşitlikleri yanyana çarpmak suretiyle $M^{(1)}_{2v,0}$ in

$$M^{(1)}_{2v,0} = (-1)^{v}\, v!\, M^{(1)}_{o,o} = (-1)^{v}\, v! \,, \quad (v = 1,2,\ldots,) \tag{2.29}$$

olduğu görülür. (2.25) ve (2.27) den de tümevarım yöntemiyle

$$M^{(1)}_{2v,p} = (-1)^{v-p} \binom{v+p}{2p} (v-p)! \tag{2.30}$$

$$(v = 0,1,2,\ldots,) \,, \quad (p = 0,1,2,\ldots,v)$$

$$N^{(1)}_{2v+1,p} = (-1)^{v-p} \binom{v+p+1}{2p+1} (v-p)! \tag{2.31}$$

$$(v = 0,1,2,\ldots,) \,, \quad (p = 0,1,2,\ldots,v)$$

sonuçlarına varılır.

$$\delta^{(1)}_{2v,p} = \delta^{(1)}_{2v+1,p} = (v-p)! \tag{2.32}$$

denirse bu katsayılar,

$$M^{(1)}_{2v,p} = (-1)^{v-p} \binom{v+p}{2p} \delta^{(1)}_{2v,p} \tag{2.33}$$

ve

$$N^{(1)}_{2v+1,p} = (-1)^{v-p} \binom{v+p+1}{2p+1} \delta^{(1)}_{2v+1,p} \tag{2.34}$$

biçimini alırlar. Buna göre $K_v^{(1)}$ katsayıları,

$$K_{2v}^{(1)} = \sum_{p=0}^{v} (-1)^{v-p} \binom{v+p}{2p} \delta_{2v,p}^{(1)} He_{2p}(\zeta)$$

$$(v = 0,1,2,\ldots,)$$

$$K_{2v+1}^{(1)} = \sum_{p=0}^{v} (-1)^{v-p} \binom{v+p+1}{2p+1} \delta_{2v+1,p}^{(1)} He_{2p+1}(\zeta)$$

$$(v = 0,1,2,\ldots,)$$

ile verilmek üzere $u_1(t,\tau,a)$ serisinin $K_v^{(1)}$ katsayıları bulunmuş olur.

3 - Şimdi de,

$$(3.01)\quad \frac{d^2}{dt^2} u_2(t,\tau,a) + at \frac{d}{dt} u_2(t,\tau,a) = u_1(t,\tau,a)$$

denkleminin

$$u_2(\tau,\tau,a) = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt} u_2(\tau,\tau,a) = 0$$

başlangıç koşullarını gerçekleyen çözümünün

$$(3.02)\quad u_2(t,\tau,a) = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v a^{v/2} \frac{K_v^{(2)}}{(v+4)!} (t-\tau)^{v+4}$$

biçiminde bir seri ile verilebileceğini düşünelim ve $K_v^{(2)}$ katsayılarını belirlemeye çalışalım. (3.02) yi t - nin fonksiyonu olarak (3.01)'e denk olan

$$\frac{d^2}{dt^2} u_2(t,\tau,a) + a(t-\tau) \frac{d}{dt} u_2(t,\tau,a) + a\tau \frac{d}{dt} u_2(t,\tau,a) =$$

$$= u_1(t,\tau,a)$$

denkleminde yerine koyarak

$$(3.03)\quad K_v^{(2)} + (v+2) K_{v-2}^{(2)} - \zeta K_{v-1}^{(2)} = K_v^{(1)} \quad , \quad (v = 1,2,\ldots,)$$

$$(3.04)\quad K_o^{(2)} = K_o^{(1)} = 1 \quad ,$$

bağıntılarını elde ederiz. Yukarıda olduğu gibi $K_v^{(2)}$ leri

$$(3.05) \quad K_{2v}^{(2)} = \sum_{p=0}^{v} M_{2v,p}^{(2)} \, He_{2p}(\zeta)$$

$$(3.06) \quad K_{2v+1}^{(2)} = \sum_{p=0}^{v} N_{2v+1,p}^{(2)} \, He_{2p+1}(\zeta)$$

biçiminde yazalım. $K_v^{(2)}$ lerin (3.05) ve (3.06) ile verilen ifadeleri (3.03) de yerine konur ve (2.15) özelliğinden yararlanılırsa $M_{2v,p}^{(2)}$ ve $N_{2v+1,p}^{(2)}$ katsayıları arasında gerçeklenen

$$(3.07) \quad M_{2v,p}^{(2)} + (2v+2)\, M_{2v-2,p}^{(2)} - N_{2v-1,p-1}^{(2)} - (2p+1)\, N_{2v-1,p}^{(2)} = M_{2v,p}^{(1)}$$

$$(v = 0,1,2,\ldots,) \;,\; (p = 0,1,2,\ldots,v)$$

$$(3.08) \quad N_{2v+1,p}^{(2)} + (2v+3)\, N_{2v-1,p}^{(2)} - M_{2v,p}^{(2)} - (2p+2)\, M_{2v,p+1}^{(2)} = N_{2v+1,p}^{(1)}$$

$$(v = 0,1,2,\ldots,) \;,\; (p = 0,1,2,\ldots,v)$$

indergeme bağıntıları elde edilir.

$u_2(t,\tau,a)$ nın τ nun fonksiyonu olarak Teorem 1. uyarınca,

$$(3.09) \quad \frac{d^2}{d\tau^2} u_2(t,\tau,a) - a\tau \frac{d}{d\tau} u_2(t,\tau,a) = u_1(t,\tau,a) \quad ,$$

$$u_2(t,t,a) = 0 \quad , \quad \frac{d}{d\tau} u_2(t,t,a) = 0$$

probleminin çözümünü göstermesi nedeniyle (3.02) serisinin (3.09) denkleminde yerine konuluşu bize,

$$(3.10) \quad K^{(2)}_{v+1} + 2 \frac{d}{d\tau} K^{(2)}_{v} - \zeta K^{(2)}_{v} + \frac{d^2}{d\tau^2} K^{(2)}_{v-1} -$$

$$- \zeta \frac{d}{d\tau} K^{(2)}_{v-1} = K^{(1)}_{v+1}$$

$$(v = 0,1,2,\ldots,)$$

indergeme bağıntılarını verir. Bu bağıntılardan da (2.15) , (3.05 ve (3.06) yardımıyla

$$(3.11) \quad M^{(2)}_{o,o} = 1 \quad ,$$

$$(3.12) \quad M^{(2)}_{2v,p} - 2p\, M^{(2)}_{2v-2,p} + (2p+1)\, N^{(2)}_{2v-1,p} - N^{(2)}_{2v-1,p-1} = M^{(1)}_{2v,p} \, ,$$

$$(v = 0,1,2,\ldots,) \, , \, (p = 0,1,2,\ldots,v)$$

$$(3.13) \quad N^{(2)}_{2v+1,p} + (2p+2)\, M^{(2)}_{2v,p+1} - M^{(2)}_{2v,p} - (2p+1)\, N^{(2)}_{2v-1,p} =$$

$$= N^{(1)}_{2v+1,p}$$

$$(v = 0,1,2,\ldots,) \, , \, (p = 0,1,2,\ldots,v)$$

bağıntılarına varılır.

Şimdi (3.07) , (3.08) ve (3.12) , (3.13) bağıntı takımlarını bir arada gözönüne alarak $M^{(2)}_{2v,p}$, $N^{(2)}_{2v+1,p}$ katsayılarını belirlemeye çalışalım. (3.07) ve (3.12) den

$$(3.14)\qquad N^{(2)}_{2v+1,p} = \frac{v+p+2}{2p+1} M^{(2)}_{2v,p} \qquad (v = 0,1,2,\ldots,)\ , \quad (p = 0,1,2,\ldots,v)$$

ve benzer işlemlerle (3.08) , (3.13) den

$$(3.15)\qquad N^{(2)}_{2v+1,p} = \frac{2p+2}{v+p+3} M^{(2)}_{2v+2,p+1} \qquad (V = 0,1,2,\ldots,)\ , \quad (p = 0,1,2,\ldots,v)$$

kısmi fark denklemlerine varılır. (3.14) ile (3.15) den de

$$(3.16)\qquad M^{(2)}_{2v+2,p+1} = \frac{(v+p+2)\ (v+p+3)}{(2p+1)\ \ (2p+2)} M^{(2)}_{2v,p}$$

$$(v = 0,1,2,\ldots,)\ , \ (p = 0,1,2,\ldots,v)$$

iki değişkenli kısmi fark denklemi elde edilir. (3.16) kısmi fark denklemlerinin çözümlerinin

$$(3.17)\qquad M^{(2)}_{2v,p} = (-1)^{v-p} \binom{v+p+1}{2p} \delta^{(2)}_{2v,p}$$

$$(3.18)\qquad N^{(2)}_{2v+1,p} = (-1)^{v-p} \binom{v+p+2}{2p+1} \delta^{(2)}_{2v+1,p}$$

biçiminde yazılabileceğini varsayalım. Bu varsayım altında (3.14) ve (3.16) bağıntıları sırasıyla

$$(3.19) \qquad \delta^{(2)}_{2v,p} = \delta^{(2)}_{2v+1,p} \quad , \quad (v = 0,1,2,\dots,) \ , \quad (p = 0,1,2,\dots,v)$$

$$(3.20) \qquad \delta^{(2)}_{2v+2,p+1} = \delta^{(2)}_{2v,p} \quad , \quad (v = 0,1,2,\dots,) \ , \quad (p = 0,1,2,\dots,v)$$

bağıntılarına dönüşürler. (3.19) ve(3.20) den de

$$(3.21) \qquad \delta^{(2)}_{2v,p} - \delta^{(2)}_{2v-1,p-1} = 0 \quad , \quad (v = 0,1,2,\dots,) \ , \quad (p = 0,1,2,\dots,v)$$

bağıntısı elde edilir. (3.19) ve (3.21) den de

$$(3.22) \qquad \delta^{(2)}_{2v,p} - \delta^{(2)}_{2v-2,p-1} = 0$$

Yazılabilir. Bu sonnucu eşitlikte de v ve p nin değerlerini birlikte birer birer azaltmak suretiyle elde edilecek olan eşitlikler yan yana toplanırsa

$$(3.23) \qquad \delta^{(2)}_{2v,p} = \delta^{(2)}_{2v-2p,0} \quad , \quad (v = 0,1,2,\dots,) \ , \quad (p = 0,1,2,\dots,v)$$

bağıntısı bulunur. Öte yandan (3.07) , (3.17) ve (3.18) den de

$$(3.24) \qquad \delta^{(2)}_{2v,p} - \delta^{(1)}_{2v,p} = (v-p+1)\, \delta^{(2)}_{2v-2,p} \ ,$$

$$(v = 0,1,2,\dots,) \ , \ (p = 0,1,2,\dots,v)$$

kısmi fark denklemine varılır. (3.24) de p' ye 1 den v ye kadar bütün tam değerleri vermekle elde edilecek olan eşitlikler yanyana toplanırsa

$$(3.25)\qquad \delta^{(2)}_{2v,0} = \sum_{p=0}^{v} \frac{(v+1)!}{(v-p+1)!}\,\delta^{(1)}_{2v,p}\quad,\quad (v = 0,1,2,\ldots,)$$

temel bağıntısına varılır. Bu bağıntı, (3.23)'e göre

$$(3.26)\qquad \delta^{(2)}_{2v,p} = \delta^{(2)}_{2v-2p,0} = \sum_{v_1=0}^{v-p} \frac{(v-p+1)!}{(v-p-v_1+1)!}\,\delta^{(1)}_{2v-2p,v_1}$$

ve (2.32)'ye göre de

$$(3.27)\qquad \delta^{(2)}_{2v,p} = (v-p+1)! \sum_{p=0}^{v} \frac{1}{v-p-v_1+1}$$

$$= \sum_{v_1=0}^{v-p} \binom{v-p+1}{v_1} (v_1)!\,(v-p-v_1)!$$

biçimini alır. Buradan da $M^{(2)}_{2v,p}$ ve $N^{(2)}_{2v+1,p}$ için

$$(3.28)\qquad M^{(2)}_{2v,p} = (-1)^{v-p} \binom{v+p+1}{2p} \sum_{v_1=0}^{v-p} \binom{v-p+1}{v_1} (v_1)!\,(v-p-v_1)!$$

$$(3.29)\qquad N^{(2)}_{2v+1,p} = (-1)^{v-p} \binom{v+p+2}{2p+1} \sum_{v_1=0}^{v-p} \binom{v-p+1}{v_1} (v_1)!\,(v-p-v_1)!$$

sonuçları elde edilir. Bu sonçların (3.05) ve (3.06) da yerine konulmasıyla $K^{(2)}_{2v}$, $K^{(2)}_{2v+1}$ katsayıları belirlenmiş olur.

4 - Şimdi genel hali gözönüne alalım ve $K_v^{(n-1)}$ ler

$$(4.01)\quad K_{2v}^{(n-1)} = \sum_{p=0}^{v} M_{2v,p}^{(n-1)} He_{2p}(\zeta) =$$

$$= \sum_{p=0}^{v} (-1)^{v-p} \binom{v+p+n-2}{2p} \delta_{2v,p}^{(n-1)} He_{2p}(\zeta)$$

$$(4.02)\quad K_{2v+1}^{(n-1)} = \sum_{p=0}^{v} N_{2v+1,p}^{(n-1)} He_{2p+1}(\zeta) =$$

$$= \sum_{p=0}^{v} (-1)^{v-p} \binom{v+p+n-1}{2p+1} \delta_{2v+1,p}^{(n-1)} He_{2p+1}(\zeta)$$

olmak üzere $u_{n-1}(t,\tau,a)$ fonksiyonunun,

$$(4.03)\quad u_{n-1}(t,\tau,a) = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v a^{v/2} \frac{K_v^{(n-1)}}{(v+2n-2)!} (t-\tau)^{v+2n-2}$$

serisi ile verildiğini onayalım. Terim terime türetim, integrasyon ve serilerin çarpımlarına özgü biçimsel işlemlerin geçerli oldukları varsayımı altında (2.03) ve (4.03) den $u_n(t,\tau,a)$ nın da

$$(4.04)\quad u_n(t,\tau,a) = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v a^{v/2} \frac{K_v^{(n)}}{(v+2n)!} (t-\tau)^{v+2n}$$

yapısındaki bir seri ile verilebileceği görülür. Üstelik bu serinin (2.05) başlangıç koşullarını gerçeklediği açıktır. Ancak oldukça karışık ve uzun hesapları gerektiren bu yöntem yerine $u_{n-1}(t,\tau,a)$ ve $u_n(t,\tau,a)$ nın (4.03) ve (4.04) ile verilen ifadelerini

$$(4.05)\quad \frac{d^2}{dt^2} u_n(t,\tau,a) + at \frac{d}{dt} u_n(t,\tau,a) = u_{n-1}(t,\tau,a)$$

denkleminde yerine koymak suretiyle elde edilen

$$(4.06)\quad K_o^{(n)} = K_o^{(n-1)} = 1 ,$$

$$(4.07)\quad K_v^{(n)} + (v+2n-2)\, K_{v-2}^{(n)} - \zeta K_{v-1}^{(n)} = K_v^{(n-1)}$$

$$(v = 1,2,\ldots,)$$

indirgeme bağıntılarından $K_v^{(n)}(\tau\sqrt{a})$ fonksiyonlarını belirlemeye çalışabiliriz. Bu amaçla

$$(4.08)\quad K_{2v}^{(n)} = \sum_{p=0}^{v} M_{2v,p}^{(n)}\, He_{2p}(\zeta) ,$$

$$(4.09)\quad K_{2v+1}^{(n)} = \sum_{p=0}^{v} N_{2v+1,p}^{(n)}\, He_{2p+1}(\zeta)$$

diyelim. (4.08) ve (4.09) eşitlikleri karşısında (4.07) indirgeme bağıntısı, $M_{2v,p}^{(n)}$ ve $N_{2v+1,p}^{(n)}$ katsayılarının gerçeklediği

$$(4.10)\quad M_{2v,p}^{(n)} - N_{2v-1,p-1}^{(n)} - (2p+1)\, N_{2v-1,p}^{(n)} +$$

$$+ (2v+2n-2)\, M_{2v-2,p}^{(n)} = M_{2v,p}^{(n-1)} ,$$

$$(v = 0,1,2,\ldots,) , \quad (p = 0,1,2,\ldots,v) ,$$

$$(4.11)\quad N^{(n)}_{2v+1,p} - M^{(n)}_{2v,p} - (2p+2)\, M^{(n)}_{2v,p+1} +$$

$$+ (2v+2n-1)\, N^{(n)}_{2v-1,p} = N^{(n-1)}_{2v+1,p} ,$$

$$(v = 0,1,2,\ldots,) , \quad (p = 0,1,2,\ldots,v)$$

indirgeme bağıntılarına dönüşür.

Öte yandan Teorem 1. uyarınca $u_n(t,\tau,a)$, τ değişkeninin fonksiyonu olarak

$$(4.12)\quad \frac{d^2}{d\tau^2} u_n(t,\tau,a) - a\tau \frac{d}{d\tau} u_n(t,\tau,a) = u_{n-1}(t,\tau,a)$$

denkleminin

$$u_n(t,t,a) = 0 \quad , \quad \frac{d}{d\tau} u_n(t,t,a) = 0$$

başlangıç kosullarını gerçekleyen çözümüdür. (4.03) ve (4.04) ün (4.12) de yerine konulmaları

$$(4.14)\quad K^{(n)}_{v+1} + 2\frac{d}{d\tau} K^{(n)}_{v} - \zeta K^{(n)}_{v} - \frac{d^2}{d\tau^2} K^{(n)}_{v-1} - \zeta \frac{d}{d\tau} K^{(n)}_{v-1} = K^{(n-1)}_{v+1}$$

$$(v = 0,1,2,\ldots,) , \quad (p = 0,1,2,\ldots,v)$$

bağıntılarının yazılmasına yol açar. (4.14) , (4.08) ve (4.09) dan

$$(4.15)\quad M^{(n)}_{o,o} = 1 \quad ,$$

$$(4.16)\quad M^{(n)}_{2v,p} - 2p\, M^{(n)}_{2v-2,p} + (2p+1)\, N^{(n)}_{2v-1,p} - $$

$$- N^{(n)}_{2v-1,p-1} = M^{(n-1)}_{2v,p} \;,$$

$$(v = 1,2,\ldots,)\;,\; (p = 0,1,2,\ldots,v)$$

$$(4.17)\quad N^{(n)}_{2v+1,p} + (2p+2)\, M^{(n)}_{2v,p+1} - M^{(n)}_{2v,p} - $$

$$- (2p+1)\, N^{(n)}_{2v-1,p} = N^{(n-1)}_{2v+1,p} \;,$$

$$(v = 1,2,\ldots,)\;,\; (p = 0,1,2,\ldots,v)$$

bağıntıları elde edilir. (4.10) , (4.11) bağıntı takamıyla (4.16) , (4.17) bağıntı takımları n , v , p tam değişkenlerinin $M(n,v,p)$ ve $N(n,v,p)$ gibi iki fonksiyonu tarafından gerçeklenen birer kısmi fark denklemi olarak düşünülebilir. Bizim bu kısmi fark denklemlerinin sonsuz sayıda çözümü arasında başlangıç problemimizle uygunlukta bulunan bir özel çözümü ile ilgili olduğumuz açıktır. $M^{(n)}_{o,o} = 1$, $M^{(n-1)}_{o,o} = 1$ eşitlikleri bu özel çözümle problemimiz arasındaki bağı kuran eşitliklerdir.

Yukarıdaki temel bağıntı takımlarını daha da yalınlaştırabilmek için (4.10) denkleminden (4.16) denklemini ve (4.11) denkleminden de (4.17) denklemini yan yana çıkaralım. Böylece

$$(4.18)\quad N^{(n)}_{2v+1,p} = \frac{v+p+n}{2p+1}\, M^{(n)}_{2v,p} \;,\qquad (v = 0,1,2,\ldots,)\;\; (p = 0,1,2,\ldots,v)$$

$$(4.19) \qquad N^{(n)}_{2v+1,p} = \frac{2p+2}{v+p+n+1} M^{(n)}_{2v+2,p+1} \, , \qquad (v = 0,1,2,\ldots,) \, ,$$

$$(p = 0,1,2,\ldots,v)$$

kısmi fark denklemlerine varılmış olur. Öte yandan (4.18) ve (4.19) gereğince

$$(4.20) \qquad M^{(n)}_{2v+2,p+1} = \frac{(v+p+n)\ (v+p+n+1)}{(2p+1)\ \ (2p+2)} M^{(n)}_{2v,p}$$

$$(v = 0,1,2,\ldots,) \, , \ (p = 0,1,2,\ldots,v)$$

kısmi fark denklemlerini yazabiliriz. Bu fark denklemlerinin çözümlerinin

$$(4.21) \qquad M^{(n)}_{2v,p} = (-1)^{v-p} \binom{v+p+n-1}{2p} \delta^{(n)}_{2v,p}$$

$$(4.22) \qquad N^{(n)}_{2v+1,p} = (-1)^{v-p} \binom{v+p+n}{2p+1} \delta^{(n)}_{2v+1,p}$$

biçiminde yazılabileceğini düşünerek $\delta^{(n)}_{v,p}$ fonksiyonlarını bulmaya çalışalım. (4.18) ve (4.20) uyarınca

$$(4.23) \qquad \delta^{(n)}_{2v,p} = \delta^{(n)}_{2v+1,p} \, , \qquad (v = 0,1,2,\ldots,) \, ,$$

$$(p = 0,1,2,\ldots,v)$$

dır. Oysa (4.10) dan

$$(4.25)\quad \delta^{(n)}_{2v,p} - \delta^{(n-1)}_{2v,p} = (v-p+n-1)\,\delta^{(n)}_{2v-1,p}$$

$$(v = 0,1,2,\ldots,)\ ,\ (p = 0,1,2,\ldots,v)$$

eşitliğine varılır. (4.23)'ü

$$\delta^{(n)}_{2v,p} = \delta^{(n)}_{2v-2,p-1}$$

biçiminde yazıp v ve p ye birer birer azalmak üzere bütün tam değerleri vererek elde edilen bağıntıları yan yana toplayalım. Böylece

$$(4.26)\quad \delta^{(n)}_{2v,p} = \delta^{(n)}_{2v-2p,0} \qquad (v = 0,1,2,\ldots,)\ ,\ (p = 0,1,2,\ldots,v)$$

kısmi fark denklemini elde ederiz. Öte yandan (4.25) bağıntısı, (4.23) uyarınca

$$(4.27)\quad \delta^{(n)}_{2v,p} - (v-p+n-1)\,\delta^{(n)}_{2v-2,p} = \delta^{(n-1)}_{2v,p}$$

biçimini alır. Burada da p ye sıfırdan v ye kadar bütün tam değerleri vererek elde edilen denklemler yan yana toplanırsa

$$(4.28)\quad \delta^{(n)}_{2v,0} = \sum_{p=0}^{v} \frac{(v+n-1)\,!}{(v-p+n-1)\,!}\,\delta^{(n-1)}_{2v,p} =$$

$$= \sum_{p=0}^{v} \binom{v+n-1}{p}\,(p)!\;\delta^{(n-1)}_{2v,p}$$

bulunur. Ve (4.26) ya göre de

$$(4.29)\quad \delta^{(n)}_{2v,p} = \delta^{(n)}_{2v-2p,0} = \sum_{v_{n-1}=0}^{v-p} \frac{(v-p+n-1)!}{(v-p-v_{n-1}+n-1)!}\,\delta^{(n-1)}_{2v-2p,v_{n-1}} =$$

$$= \sum_{v_{n-1}=0}^{v-p} \binom{v-p+n-1}{v_{n-1}} (v_{n-1})!\,\delta^{(n-1)}_{2v-2p,v_{n-1}}$$

yazılabilir. Öte yandan her n tam sayısı için $v_n = p$ olmak üzere

$$d(v_j) = v-v_n-v_{n-1}-\dots-v_j$$

diyelim. Bu gösterilişten ve (2.32) eşitliğinden yararlanılırsa $\delta^{(n)}_{2v,p}$ katsayıları,

$$(4.30)\quad \delta^{(n)}_{2v,p} = (v-p+n-1)! \sum_{v_{n-1}=0}^{d(v_n)} \frac{1}{d(v_{n-1})+n-1} \sum_{v_{n-2}=0}^{d(v_{n-1})} \frac{1}{d(v_{n-2})+n-2} \cdots$$

$$\cdots \sum_{v_2=0}^{d(v_3)} \frac{1}{d(v_2)+2} \sum_{v_1=0}^{d(v_2)} \frac{1}{d(v_1)+1} =$$

$$= (v-p+n-1)! \prod_{j=1}^{n-1} \sum_{v_{n-j}=0}^{d(v_{n-j+1})} \frac{1}{d(v_{n-j})+n-j}$$

biçiminde yazılabilirler. Böylece $\delta^{(n)}_{2v,p} = \delta^{(n)}_{2v+1,p}$ in (4.30) la verilen değeri (4.08) ve (4.09) da yerine konularak $K^{(n)}_v(\tau\sqrt{a})$ fonksiyonları belirlenmiş olur.

5 - Yukarıda elde ettiğimiz $u_n(t,\tau,a)$ serilerinin (4.05) denkleminin (2.05) başlangıç koşullarını gerçekleyen biçimsel çözümleri oldukları açıktır. Bu serilerin düzgün yakınsak seriler olduklarını göstererek bir yandan bunlara yine biçimsel olarak uyguladığımız terim terime türetim ve terim terime integrasyon gibi işlemlerin yerindeliği güven altına alınacak ve öte yandan da (1.01) , (1.02) Cauchy problemi için geçerli çözüme varılmış olacaktır.

Önce $M^{(n)}_{2v,p}$ ve $N^{(n)}_{2v+1,p}$ katsayılarına uygun üst sınırlar vermeye çalışalım. Bu amaçla (4.30) ile verilen $\delta^{(n)}_{2v,p}$ katsayısını oluşturan bağıntıda v_1 gösterge sayısı üzerindeki toplamı gözönüne alalım. Toplam işareti altındaki kesir 1 ile sınırlanabileceğine göre bu toplamdaki terim sayısı toplamın bir üst sınırı olarak alınabilir:

$$\sum_{v_1=0}^{d(v_2)} \frac{1}{d(v_1)+1} \leqslant d(v_2)+1$$

Buna göre

$$\sum_{v_2=0}^{d(v_3)} \frac{1}{d(v_2)+2} \sum_{v_1=0}^{d(v_2)} \frac{1}{d(v_1)+1} \leqslant \sum_{v_2=0}^{d(v_3)} \frac{d(v_2)+1}{d(v_2)+2}$$

$$\leqslant d(v_3)+1$$

olur. Bu işlem v_{n-1} üzerindeki toplama kadar sürdürülerek

$\delta^{(n)}_{2v,p}$ için

$$(5.01) \qquad \delta^{(n)}_{2v,p} \leqslant (v-p+n-1)!\ (v-p+1)$$

üst sınırı elde edilir. Böylece

$$(5.02) \qquad \left| M^{(n)}_{2v,p} \right| \leqslant \frac{(v+p+n-1)!}{(2p)!}(v-p+1) \ ,$$

$$(5.03) \qquad \left| N^{(n)}_{2v+1,p} \right| \leqslant \frac{(v+p+n)!}{(2p+1)!}(v-p+1) \ ,$$

olur. Öte yandan $He_{2p}(\zeta)$ ve $He_{2p+1}(\zeta)$ Hermit polinomları için

$$(5.04) \qquad \left| He_{2p}(\zeta) \right| \leqslant \frac{(2p)!}{2^p\ p!}\ e^{|\zeta|\sqrt{2p}} \ ,$$

$$(5.05) \qquad \left| He_{2p+1}(\zeta) \right| \leqslant \frac{(2p+1)!}{2^p\ p!}\ e^{|\zeta|\sqrt{2p}}$$

üst sınırlarının (Bkz. Magnus - Oberhettinger [8]) geçerli olduğunu bilmekteyiz. Buna göre (5.02) ve (5.04) eşitliklerinden yararlanarak

$$(5.06) \qquad \left| K^{(n)}_{2v} \right| \leqslant \sum_{p=0}^{v} \frac{(v+p+n-1)!}{2^p\ p!}\ e^{|\zeta|\sqrt{2p}}\ (v-p+1)$$

eşitliğine varılır. Öte yandan matematiksel tümevarım yöntemiyle

$$(5.07) \qquad \sum_{p=0}^{v} \frac{(v+p+n)!}{2^p \, p!} \leqslant 2^{v+n} \, (v+n)!$$

bağıntısı gösterilebilir. Oysa (5.07) gereğince (5.06) eşitsizliği,

$$(5.08) \qquad \left| K_{2v}^{(n)} \right| \leqslant e^{|\zeta| \sqrt{2v}} \, 2^{v+n-1} \, (v+n)!$$

biçimini alır. Yine bunun gibi (5.03) , (5.05) ve (5.07) den

$$(5.09) \qquad \left| K_{2v+1}^{(n)} \right| \leqslant e^{|\zeta| \sqrt{2v}} \, 2^{v+n} \, (v+n+1)!$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Böylece (5.08) ile (5.09) eşitsizlikleri uyarınca (4.04) Taylor serisinde $(t-\tau)^{2v+2n}$ ve $(t-\tau)^{2v+2n+1}$ lerin katsayılarının A_{2v} ve A_{2v+1} ile göstereceğimiz salt değerleri

$$A_{2v} = \frac{a^{v/2} \left| K_{2v}^{(n)} \right|}{(2v+2n)!} \leqslant \frac{2^{v+n-1} \, a^v \, (v+n)!}{(2v+2n)!} \, e^{|\tau| \sqrt{2va}}$$

$$A_{2v+1} = \frac{a^{v/2} \left| K_{2v+1}^{(n)} \right|}{(2v+2n+1)!} \sqrt{a} \leqslant \frac{2^{v+n} \, a^v \, (v+n+1)!}{(2v+2n+1)!} \sqrt{a} \, e^{|\tau| \sqrt{2va}}$$

eşitsizlikleri yardımıyla sınırlandırılmış olur.

Şimdi,

$$(5.10)\quad R_{2v}^{(n)} = \frac{2^{v+n-1}\, a^{v}\, (v+n)!}{(2v+2n)!}\sqrt{2v}\; e^{|\tau|\sqrt{2va}},$$

$$(v = 0,1,2,\ldots,),$$

$$(5.11)\quad R_{2v+1}^{(n)} = \frac{2^{v+n}\, a^{v}\, (v+n+1)!}{(2v+2n+1)!}\sqrt{a}\; e^{|\tau|\sqrt{2va}},$$

$$(v = 0,1,2,\ldots,),$$

olarak alınmak üzere

$$(5.12)\quad \sum_{v=0}^{\infty} R_v^{(n)}(\tau,a)\,(t-\tau)^{v+2n}$$

kuvvet serisini gözönüne alalım. $a > 0$ koşulu altında (5.12) kuvvet serisinin katsayıları τ ve a nın sürekli fonksiyonlarıdır. Bu serinin yakınsaklık bölgesini incelemek amacıyla

$$(5.13)\quad \frac{R_{2v+1}^{(n)}}{R_{2v}^{(n)}} = \frac{2\,(v+n+1)\sqrt{a}}{(2v+2n+1)\sqrt{2v}}$$

ve

$$(5.14)\quad \frac{R_{2v+2}^{(n)}}{R_{2v+1}^{(n)}} = \frac{\sqrt{a}\,\sqrt{2v+2}}{(2v+2n+2)}\, e^{|\tau|\left(\sqrt{(2v+2)a}-\sqrt{2va}\right)}$$

oranlarını oluşturalım. v sınırsız büyürken (5.13) ve (5.14) oranları sıfıra yaklaşır. O halde (5.12) serisi $R^2(t,\tau) =$

$R(t) \times R(\tau)$ uzayının kompakt her alt kısmı üzerinde düzgün yakınsaktır. Oysa (4.04) serisi (5.12) serisiyle sınırlandırıldığına göre (4.04) serisinin de $R^2(t,\tau)$ uzayının kompakt her alt kısmı üzerinde düzgün yakınsak olacağı açıktır ya da başka bir deyimle sonlu her t, τ için düzgün yakınsaktır. Üstelik (4.04) serisinin toplamını gösteren (2.03) fonksiyonu da t, τ ve a nın sürekli bir fonksiyonudur.

6 - Yukarıda elde ettiğimiz sonuçların ışığı altında $u_n(t,\tau,a)$ serilerinin toplamıyla tanımlanan fonksiyonlara (2.03) integral gösterilişinden yararlanarak bir üst sınır bulabiliriz. Teorem 1. uyarınca $a > 0$ varsayımının benimsenmiş olmasının burada da her hangi bir kısıtlanışa yol açmayacağı açıktır. Bu varsayım altında t ve τ nun birbirine göre sıralanışlarına bağlı olarak aşağıdaki halleri ayrı ayrı ele alalım.

(i) $0 \leqslant \tau < t$.

Bu halde

$$u_1(t,\tau,a) = \int_\tau^t \int_\tau^\mu e^{-a(\mu^2-\xi^2)/2} \, d\mu \, d\xi$$

$$= \int_\tau^t \int_\tau^\mu d\mu \, d\xi = \frac{(t-\tau)^2}{2!}$$

dır.

$$u_n(t,\tau,a) \leqslant \frac{(t-\tau)^{2n}}{(2n)!} \qquad (n = 1,2,\ldots,)$$

eşitsizlikleri (2.03) ve tümevarım yönteminin bir sonucudur.

(ii) $0 < t < \tau$.

$$u_1(t,\tau,a) \leqslant e^{a(\tau^2-t^2)/2} \int_t^\tau \int_\mu^\tau d\mu \, d\xi =$$

$$= e^{a(\tau^2-t^2)/2} \, \frac{(t-\tau)^2}{2!}$$

dir.

$$u_n(t,\tau,a) \leqslant e^{a(\tau^2-t^2)/2}\,\frac{(t-\tau)^{2n}}{(2n)!} \qquad (n = 1,2,\ldots,)$$

eşitsizliği yine (2.03) ve tümevarım yönteminden yararlanılarak yukarıdaki gibi gösterilebilir.

(iii) $t < \tau \leqslant 0$.

Bu hal $\mu = -r$, $\xi = -s$ değişken dönüşümüyle (i) haline indirgenebildiği için

$$u_n(t,\tau,a) \leqslant \frac{(t-\tau)^{2n}}{(2n)!} \qquad (n = 1,2,\ldots,)$$

olur.

(iv) $\tau < t < 0$.

$\mu = -r$, $\xi = -s$ dönüşümüyle (ii) hali elde edilir. Buna göre

$$u_n(t,\tau,a) \leqslant e^{a(\tau^2-t^2)/2}\,\frac{(t-\tau)^{2n}}{(2n)!} \qquad (n = 1,2,\ldots,)$$

dır.

(v) $\tau < 0 < t$.

Burada integrasyon bölgesi üç alt kısma ayrılarak

$$u_1(t,\tau,a) = \int_\tau^t \int_\tau^\mu e^{-a(\mu^2-\xi^2)/2}\, d\mu\, d\xi =$$

$$= \int_{\tau}^{0}\int_{\tau}^{\mu} e^{-a(\mu^2-\xi^2)/2}\, d\mu\, d\xi + \int_{0}^{t}\int_{\tau}^{0} e^{-a(\mu^2-\xi^2)/2}\, d\mu\, d\xi +$$

$$+ \int_{0}^{t}\int_{0}^{\mu} e^{-a(\mu^2-\xi^2)/2}\, d\mu\, d\xi$$

biçiminde yazılabilir. Bu integraller yerine sırasıyla üst sınırları konularak

$$u_1(t,\tau,a) \leqslant e^{a\tau^2/2}\frac{\tau^2}{2!} - e^{a\tau^2/2}\, t\tau + \frac{t^2}{2!}$$

$$\leqslant e^{a\tau^2/2}\frac{(t-\tau)^2}{2!}$$

bulunur. Tümevarımla da

$$u_n(t,\tau,a) \leqslant e^{na\tau^2/2}\frac{(t-\tau)^{2n}}{(2n)!}$$

sonucuna varılır.

(vi) $t < 0 < \tau$.

Bu hal $\mu = -r$, $\xi = -s$ dönüşümüyle (v) haline indirgenebildiği için

$$u_n(t,\tau,a) \leqslant e^{na\tau^2/2}\frac{(t-\tau)^{2n}}{(2n)!}$$

dir.

$a > 0$ varsayımı altında elde ettiğimiz bu üst sınırlar yanı sıra $-a$ $(a > 0)$ lar için de benzer sonuçlar elde edilmektedir. Burada ayrıntıya girmeksizin genel olarak $\varrho_n(t,\tau,a)$ ile göstereceğimiz bu üst sınırların Teorem 1. ile uyum içinde bulunduğunu ortaya koyan

$$\varrho_n(t,\tau,-a) = \varrho_n(\tau,t,a)$$

bağıntısını vermekle yetineceğiz.

Bu sonuçların ışığı altında (1.01) , (1.02) Cauchy probleminin biçimsel çözümünü gösteren

$$(6.01) \qquad u(f,t,\tau,a) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,\tau,a)\, \Delta^n f$$

serisi için yakınsaklık problemini ele alabiliriz.

$$(6.02) \qquad U(f,t,\tau,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n \,|\Delta^n f|$$

ile tanımlanan fonksiyon serisi (i) ve (iii) hallerinde

$$(6.03) \qquad U(f,t,\tau,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{2n}}{(2n)!} \,|\Delta^n f|$$

(ii) ve (iv) hallerinde

$$(6.04) \qquad U(f,t,\tau,a) = e^{a(\tau^2-t^2)/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{2n}}{(2n)!} \,|\Delta^n f|$$

(v) ve (vi) hallerinde de

$$(6.05)\quad U(f,t,\tau,a) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{na\tau^2/2} \frac{(t-\tau)^{2n}}{(2n)!} \left| \Delta^n f \right|$$

biçimlerini alır. Ancak hangi hal söz konusu olursa olsun (6.02) serisi, Cauchy probleminin (6.01) ile verilen çözümünü sınırlayan bir kuvvet serisidir. Bu kuvvet serisi $|\Delta^n f| = o((2n)!)$ koşulu altında her t, τ ve $|\Delta^n f| = O((2n)!)$ koşulu altında da M pozitif bir sayıyı göstermek üzere $|t-\tau| < M$ aralığında düzgün yakınsaktır. Böylece aşağıdaki teorem elde edilmektedir.

Teorem 2. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, değişkenlerine göre sınırsız türetilebilen bir fonksiyonu göstermek üzere

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{a}{t} \frac{\partial u}{\partial t}$$

denkleminin,

$$u(x,\tau,\tau) = f(x) \;, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x,\tau,\tau) = 0$$

başlangıç koşullarını gerçekleyen çözümü (2.02) serisiyle verilir. Bu seri

$$(6.06)\quad \left| \Delta^n f \right| = o((2n)!)$$

koşulu altında bütün $R^n \times R(t) \times R(\tau)$ uzayında ve

(6.07) $$|\Delta^n f| = O((2n)!)$$

koşulu altında da $R^n \times R(t) \times R(\tau)$ uzayının $t = \tau$ hiperdüzlemini kapsayan bir alt kısmı üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Böylece Euler - Poisson - Darboux denklemi için B. ASRAL [1] tarafından elde edilen bu teoremin, (1.06) , (1.07) genel Cauchy probleminin çözümüne,

$$\varphi(t) = at^2$$

almakla gerçekleştirdiğimiz yaklaşımda da geçerli kaldığı gösterilmiş olmaktadır.

(2.02) serisinin, (6.06) ya da (6.07) koşulları altında a, t, τ ve x'e göre sürekli olması nedeniyle burada incelediğimiz denklem için regüler ve singüler Cauchy problemleri ayrımının yapılması gereksizdir. Üstelik τ nun sıfır olarak seçilmesi halinde a nın negatif değerleri çözüme ve çözümün t-türevlerine hiç bir singülarite getirmez. Ancak $\tau = 0$ için Cauchy probleminin,

(6.08) $$u(f,t,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{v=0}^{\infty} \frac{a^v}{(2v+2n)!} \sum_{p=0}^{v} M_{2v,p}^{(n)} He_{2p}(0)\, t^{2v+2n} \Big) \cdot \Delta^n f$$

ile verilen çözümünü doğrudan doğruya aramak yerine (2.02) den τ

ya sıfır değerini vererek elde etmek $u_n(t,\tau,a)$ fonksiyonlarının karmaşık yapıları nedeniyle daha elverişlidir.

f başlangıç fonksiyonunun $\Delta f = f$ denkleminin bir çözümünü göstermesi ve a nın da $a = \pm 1$ olarak seçilmesi halinde (1.01) , (1.02) Cauchy probleminin açık çözümü,

$$u(f,t,\tau,-1) = \left(e^{(t^2-\tau^2)/2} - \tau e^{t^2/2} \int_\tau^t e^{-\mu^2/2} d\mu \right) f$$

$$u(f,\tau,t,1) = \left(e^{(\tau^2-t^2)/2} + t e^{\tau^2/2} \int_\tau^t e^{-\mu^2/2} d\mu \right) f$$

dir. Öte yandan (2.02) ve (6.08) de $a = 0$ yazılarak dalga denklemi için Cauchy probleminin çözümü elde edilmektedir.

KAYNAKLAR

[1] ASRAL. B. , On the regular and singular Cauchy problems for the Euler - Poisson - Darboux equation, to appear in Revue dela Fac. des Sei. de I'Univ. d' Istanbul série A.

[2] ASRAL. B. , On the regular Cauchy problems for the Euler - Poisson - Darboux equations and the method of ascent, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. de Romanie Tome 25 (73) nr. 2 (1981), 121 - 128

[3] ASRAL. B. , On the solitions of some regular Cauchy problems for the Euler - Poisson - Darboux equation, to appear,

[4] DAVIS. R. M. , On a regular Cauchy problem for the Euler - Poisson - Darboux equation, Ann. Math. , Ser. IV, 42 (1956) , 205 - 226

[5] DAVIS. R. M. , The regular Cauchy problem for the Euler - Poisson - Darboux equation, Bull. Amer. Math. Soc. 60 (1954) , 338

[6] DIAZ. J. B. , On singular and regular Cauchy problems, Comm. Pure Appl. Math. , 9 (1956) 383 - 390

[7] İZMİRLİOĞLU. I. , Genelleştirilmiş Euler - Poisson - Darboux denklemi için singüler Cauchy problemi, İ.Ü. Fen Fak. Mat. Böl. (1984)

[8] MAGNUS. W. - OBERHETTINGER. F. , Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Springer - Verlag , (1948)

[9] PROTTER. M. H. - WEINBERG ER. H. F. , Maximum principles in differential equations, Prentice - Hall , Inc. Englewood Cliffs , Nd. (1967)

Çalışmalarım süresince değerli desteklerini gördüğüm Sayın Prof. Dr. Suzan Kahramaner'e ve her türlü yardımlarını esirgemeksizin doktoramı yöneten Sayın Prof. Dr. Bediz Asral'a teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.
Ayrıca bu tezi itina ile daktilo eden babam Hikmet Karakaş'a teşekkür ederim.