YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Simetrik Dizaynlar

Erol Balkanay

Doktora Tezi

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN — BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİMETRİK DİZAYNLAR ve DEĞİŞMELİ BİR G GRUBUNDAKİ FARK KÜMELERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

(DOKTORA TEZİ)

EROL BALKANAY

İstanbul - 1986

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİMETRİK DIZAYNLAR
ve
DEĞİŞMELİ BİR G GRUBUNDAKİ FARK KÜMELERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

(DOKTORA TEZİ)

EROL BALKANAY

İstanbul - 1986

İ Ç İ N D E K İ L E R

ÖZET

Bu çalışma iki bölümden oluşmuştur.

Birinci bölüm, temel tanım ve kavramları içermektedir.

Çalışmanın özünü oluşturan ikinci bölümde, değişmeli bir G grubundaki bazı (v,k,λ)-fark kümelerinin yokluğu kriteri olarak kullanılabilecek bir teorem ve ispatı verilmiştir.

İkinci bölümde, ayrıca, bir A çakışım matrisinin G'ye ait bir H alt grubu vasıtasıyle büzülmüşü olan A_H matrisini elde etmeye yarayan bir algoritma verilmiş bulunmaktadır.

SUMMARY

This thesis is divided into two chapters.

First chapter contains principal concepts and basic definitions.

Chapter II, which is the original part of the thesis gives a theorem about G-matrices: The theorem is applied directly to the contraction of the incidence matrix of an abelian difference set. The theorem presented serves as a nonexistence criterion of some abelian difference set in the abelian group G.

Chapter II also presents an algorithm to obtain the contraction of incidence matrix A with respect to a subgroup H of the abelian group G.

BÖLÜM I

I.1 TEMEL KAVRAMLAR

I.1.1 ÇAKIŞIM YAPISI

$\mathbb{P}$ ile göstereceğimiz noktalar kümesi ve $\mathbb{B}$ ile göstereceğimiz bloklar kümesi gözönüne alınsın.

$$\mathbb{P} \cap \mathbb{B} = \emptyset \quad \text{ve} \quad \mathcal{R} \subset \mathbb{P} \times \mathbb{B}$$

olmak üzere, $\mathcal{S} = (\mathbb{P}, \mathbb{B}, \mathcal{R})$ üçlüsüne bir çakışım yapısı nedir.

I.1.2 (v , k , λ) -PARAMETRELİ SİMETRİK DİZAYN

(v, k , λ)- Parametreli Simetrik Dizayn, aşağıdaki altı aksiyomu sağlayan bir çakışım yapısıdır.

1°- v sayıda nokta vardır.
2°- v sayıda blok vardır.
3°- Herbir nokta k tane blok ile çakışım durumundadır.
4°- Herbir blok k tane nokta ile çakışım durumundadır.
5°- Herhangi iki bloğun ortaklaşa çakışım durumunda oldukları nokta sayısı λ dır.
6°- Herhangi iki noktanın ortaklaşa çakışım durumunda oldukları blok sayısı λ dır.

Dejenere durumları yok etmek amacıyla, $k > \lambda$ kabul edilmektedir.

I.1.3 SİMETRİK DİZAYN'IN ÇAKIŞIM MATRİSİ

Bir, (v,k, λ) -parametreli Simetrik Dizayn'da

$$\mathbb{P} = \{ p_1, p_2, \ldots, p_v \} \quad , \mathbb{B} = \{ B_1, B_2, \ldots B_v \}$$

olmak üzere, elemanları,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (P_j \text{ noktası } B_i \text{ bloğu ile çakışım durumunda ise}) \\ 0 & (P_j \text{ noktası } B_i \text{ bloğu ile çakışım durumunda değilse}) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan bir $A = \left[a_{ij}\right]_{v \times v}$ matrisine, Simetrik Dizayn'ın çakışım matrisi denir.

I.1.4 BİR (v, k, λ) - SİMETRİK DİZAYNIN MERTEBESİ

$n = k - \lambda$ sayısına SD' nin mertebesi denir.[1]

TEOREM I.1.1.

Bir D - Simetrik Dizaynın v,k,λ parametreleri arasında,

$$(v-1)\lambda = k(k-1) \tag{1}$$

bağıntısı mevcuttur.[2]

(1) Bağıntısından

$$k^2 - v\lambda = k - \lambda \tag{2}$$

$$(v-k)\lambda = (k-1)(k-\lambda) \tag{3}$$

eşitlikleri kolaylıkla elde edilebilir.

TEOREM-I.1.2

Bir (v,k,λ)- SD'da v çift ise, n bir tamsayının karesine eşit olmak zorundadır.[3]

ÖZELLİK I.1.1.

Bir SD'nin çakışım matrisi A ise, J, elemanlarının hepsi +1 olan uygun boyutlu bir kare matris olmak üzere,

$$AJ = JA = kJ \tag{4}$$

$$AA^T = A^TA = nI + \lambda J \tag{5}$$

$$|\det A| = k\, n^{\frac{1}{2}(v-1)} \tag{6}$$

dir.[4]

---

(1) "(v,k,λ)-parametreli Simetrik Dizayn" yerine bazan kısaca SD veya D-Simetrik Dizayn yazılacaktır.

(2) E.J.LANDER. Symmetric Designs: An Algebraic Apprcarh. Cambridge University Press. (1983) s: 3-4

(3) M.P.Schutzenberger. A nonexistence theorem for infinite family of symmetrical block designs. Ann.Eugenics, 14, (1949), 286-287.

(4) E.J.LANDER. Symmetric Designs: An Algebraic Approach. Cambridge University Press. (1983), s: 3-4

I.1.5. (v,k,λ) - FARK KÜMESİ

v mertebeli bir (G,o) grubunun k elemanlı bir alt kümesi D olsun. $x, y \in D$ olmak üzere, $x o y^{-1}$ şeklindeki elemanların listesi, G 'nin etkisiz elemanından farklı elemanlarının herbirini tam λ kez içeriyorsa, bu D alt kümesine, G grubu içindeki bir (v,k,λ)-fark kümesi denir.

TEOREM-I.1.3

v mertebeli bir G grubundaki bir (v,k,λ)-fark kümesi D olsun. G nin elemanlarını noktalar kümesi ve her $g \in G$ için

$$g \circ D = \{ g o x \mid x \in D \}$$

kümelerinin oluşturduğu kümeyi de bloklar kümesi olarak almakla elde edilen $\mathcal{D}$ - çakışım yapısı bir (v,k,λ)- SD dir.

Bu teorem ile tanımlanan Simetrik Dizayn'a D nin geliştirilmişi (development) denir. Bu D^{dev} ile gösterilir.

I.1.6 SİMETRİK DİZAYNIN OTOMORFİ GRUBU

Simetrik Dizaynın kendi üzerine herhangi bir izomorfisine bu dizaynın bir otomorfisi denir. Böyle bir otomorfiyi belirtmek için, çakışım yapısı korunacak şekilde, noktaların ve blokların birer permütasyonu verilmelidir.

Tüm otomorfilerin kümesi, bileşke işlemi altında bir grup olup Full otomorfi grubu adını alır. Bunun herhangi bir alt grubuna Simetrik Dizaynın otomorfi grubu denir. Pratikte, bir otomorfinin hem noktalar hem de bloklar üzerindeki etkisini belirtmek gereksizdir . Örneğin, noktalar üzerindeki etki belirtilirse, bloklar üzerindeki etki hemen görülür.

I.1.7 BÜZÜLMÜŞ (CONTRACTING) FARK KÜMELERİ

Bir (v,k,λ)-SD'ın otomorfi grubu olan G, noktalar üzerinde

$$P_1 , P_2, \ldots, P_r$$

gibi r tane, bloklar üzerinde de

$$B_1, B_2, \ldots, B_r$$

gibi r tane yörüngeye sahip olsun.

$$s_i = |P_i| \quad , \quad t_i = |B_i|$$

diyelim.

G grubu, $\mathbb{Z}$ - Modül olan $W = \mathbb{Z}^{v+1}$ in koordinatları üzerine etki ederek, $r+1$ tane yörünge oluşturur. Bu yolla elde edilen yörüngelerden ilk r tanesi P_i $(i = 1,2,..,r)$ 'ye karşılık gelir. Sonuncu yörünge ise, sonuncu koordinata karşılıktır. Bu P_{r+1} ile gösterilsin. P_i 'nin herbir koordinatına bir tane 1, diğer yerlere 0 yazılarak elde edilen vektör u_i olsun.

$$X = (X_1, X_2, \ldots, X_{v+1}) \ , \ y = (y_1, y_2, \ldots, y_{v+1})$$

$X, y \in W$

olmak üzere, W üzerinde

$$\Psi(X,y) = X_1 y_1 + X_2 y_2 + \ldots + X_v y_v - \lambda X_{v+1} y_{v+1}$$

(skaler) çarpımı tanımlansın. Eğer Ψ , W 'nin

$$W_G = \{\omega \in W \mid g\omega = \omega \ , \ \text{her } g \in G \text{ için}\}$$

alt modülüne kısıtlanırsa, $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ ortogonal bir baz oluşturur. Gerçekten

$$\Psi(u_i, u_j) = \begin{cases} 0 & (\text{eğer } i \neq j \text{ ise}) \\ s_i & (\text{eğer } i = j \leq r \text{ ise}) \\ -\lambda & (\text{eğer } i = j = r+1 \text{ ise}) \end{cases}$$

dir.

Genişletilmiş çakışım matrisi olan

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 1 \\ & A & & \vdots \\ & & & 1 \\ \hline \lambda & \ldots & \lambda & k \end{array}\right]$$

matrisinin İntegral Span'ı M olsun. O takdirde M, D-Simetrik dizaynın bir $\mathbb{Z}$-Modülü olur.

$$M_G = \{m \in M \mid gm = m, \ \text{her } g \in G \text{ için}\}$$

M'nin, M de $W = \mathbb{Z}^{v+1}$ in birer alt modülüdürler. Ayrıca

$$W_G = \{ \omega \in W \mid g\omega = \omega , \quad \text{her } g \in G \text{ için} \}$$

olduğundan,

$$M_G = M \cap W_G$$

dir.

B matrisinin satırları, sırasıyla, $e_1, e_2, \ldots, e_{v+1}$ ile gösterilsin. B_i yörüngesindeki bloklara karşılık gelen tüm e_j lerin toplamı ise f_i olsun. O takdirde M_G, $f_1, f_2, \ldots, f_{r+1}$ elemanlarıyla üretilebilir. $1 \leqslant i, \; j \leqslant v+1$ için $\Psi(e_i, e_j)$ nin değeri bilindiğinden,

$$\Psi(f_i, f_j) = \begin{cases} 0 & (\text{eğer } i \neq j) \\ t_i n & (\text{eğer } i = j \leqslant r \text{ ise}) \\ -\lambda n & (\text{eğer } i = j = r+1 \text{ ise}) \end{cases} \tag{9}$$

bulunur.

f_i 'ler u_i 'lerin $f_i = \Sigma\, b_{ij}\, u_j$ şeklinde (tam) lineer kombinasyonları olarak yazılabilir. Burada $B_G = \{ b_{ij} \}$ matrisi, $\{ f_i, \ldots, f_{r+1} \}$ in bileşenlerini $\{u_1, u_2, \ldots, u_{r+1}\}$ bazına göre veren matristir. B_G matrisine B' nin G ye göre büzülmüşü denir.

W_G üzerinde Ψ matrisi, $\{ u_1, u_2, \ldots, u_{r+1} \}$ 'e göre

$$\Psi_G = \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & s_r & \\ & & & -\lambda \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabileceğinden, (9) eşitlikleri

$$B_G \cdot \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & s_r & \\ & & & -\lambda \end{bmatrix} \cdot B_G^T = \begin{bmatrix} t_1 n & & & \\ & \ddots & & \\ & & t_r n & \\ & & & -\lambda n \end{bmatrix} \tag{10}$$

şeklinde matrisiyel bir denklem olarak ifade edilebilir.

G grubu değişmeli olsun. G içinde bir $D-(v,k,\lambda)$ fark kümesi tanımlansın. D^{dev} in çakışım matrisi A olsun. A çakışım matrisi, G nin herhangi bir H alt grubu vasıtasıyla büyütülebilir; H nin G içindeki index'i $[G:H] = \omega$ ile gösterilsin. Büzülmüş A_H matrisi $\omega \times \omega$ boyutlu olup,

$$A_H A_H^T = n I + h\lambda J \tag{11}$$

$$A_H J = J A_H = k J \tag{12}$$

denklemlerini sağlar(1).

I.1.8 G- MATRİSLERİ

G, elemanları

$$g_1 = e, g_2, g_3, \ldots, g_\omega$$

olan, değişmeli sonlu bir grup olsun. Bir G-matris aşağıdaki gibi tanımlanan $\omega \times \omega$ boyutlu bir matristir. Bu matrisi A ile gösterelim.

A matrisinin birinci satırı

$$(a_{g_1}, a_{g_2}, \ldots, a_{g_\omega})$$

ise A nın j. satırı

$$(b_{g_1}, b_{g_2}, \ldots, b_{g_\omega})$$

olup, burada

$$b_{g_i} = a_{g_j^{-1} g_i}$$

dir.

Doğal olarak G-matrisleriyle uğraşırken elemanlara belli bir sıra numarası verilmelidir.

G- Matrisleri G grubunun sol regüler temsili kullanılarak ta tanımlanabilir.

---

(1) - LANDER, E.S, s: 97-103

Eğer bir j tamsayısı için

$$p^j \equiv -1 \quad (\text{mod}\,\omega) \qquad (p,\ \text{bir asal sayı})$$

ise p asalı semi-primitif (modω) olmuştur denir. Daha genel olarak, bir $m \varepsilon Z$ tamsayısının her asal çarpanı semi-primitif (modω) ise m tamsayısına semi-primitif (modω) denir. Doğal olarak, bu durumda $(m,\omega) = 1$ dir.

YARDIMCI TEOREM I.1.4

G, mertebesi ω olan değişmeli bir grup ve U,

$$U\,U^T \equiv 0 \ (\text{mod}\, m^2) \ , \ (\text{bir } m \varepsilon Z \text{ için})$$

koşulunu sağlayan tamsayısal bir G-matris olsun.

Eğer m semi-primitif (modulo exponent G) ise

$$U \equiv 0 \ (\text{mod}\, m)$$

dir[1].

(1) LANDER,E.S., Symmetric Designs: An Algebraic Approach. Cambridge Univ. Press. (1983), s: 147

BÖLÜM II

II.1 DEĞİŞMELİ FARK KÜMELERİ İÇİN BİR YOKLUK KRİTERİ VE A_H İÇİN BİR ALGORİTMA

II.1.1. GİRİŞ

Çalışmanın özünü oluşturan bu bölümde, v mertebeli, değişmeli bir G grubundaki (v,k,λ)-fark kümelerinin yokluğunu göstermeye yarayan bir teorem verilmiştir.

Bu bölümde ayrıca, A çakışım matrisinin, G nin bir H alt grubu vasıtasıyla büzülmüşü olan A_H yi elde etmeye yarayan bir algoritma türetilmiştir.

TEOREM II.1.1

G, mertebesi v olan değişmeli bir grup ve A,

$$A A^T = x I + y J$$

$$A J = J A = z J \quad , \quad x,y,z \in \mathbb{Z}$$

koşuluna uyan tamsayısal G-matris ve m, modula exponent G'ye göre semi-primitif ve $m^2 | x$ olan bir tamsayı ise

$$z A \equiv y J \pmod m$$

dir.

Burada J, elemanlarının hepsi $(+1)$ olan uygun boyutlu bir kare matristir.

İSPAT

$U = z A - y J$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} U U^T &= (z A - yJ)(z A^T - yJ) \\ &= z^2 A A^T - zyAJ - zyJA^T + y^2 J^2 \\ &= z^2 (xI + yJ) - 2 z^2 yJ + v y^2 J \\ &= z^2 xI - z^2 yJ + v y^2 J \\ &= x z^2 I + (v y^2 - z^2 y) J \end{aligned}$$

dir.

$$U U^T = x z^2 I + (v y^2 - z^2 y) J \quad \text{ve } m^2 \mid x \text{ olduğundan}$$

$$U U^T \equiv (v y^2 - z^2 y) J \pmod{m^2}$$

dir.

Bu kez, $A A^T = x I + y I$ eşitliğinin her iki yanı soldan J ile z çarpılırsa,

$$(J A) A^T = x J + y J^2$$

$$z J A^T = (x + v y) J \quad , \quad (J^2 = v J)$$

$$z^2 J = (x + v y) J$$

ve

$$z^2 = x + v y$$

bulunur.

$$m^2 \mid x \text{ olduğundan}$$

$$x + v y \equiv v y \pmod{m^2}$$

ve
$$z^2 \equiv v y \pmod{m^2}$$

elde edilir.

$$U U^T \equiv (v y^2 - z^2 y) J \pmod{m^2}$$

ifadesinde

$$z^2 \equiv v y \pmod{m^2}$$

yerleştirilirse,

$$U U^T \equiv (v y^2 - v y^2) J$$

$$U U^T \equiv 0 \pmod{m^2}$$

bulunur.

m tamsayısı semi-primitif (mod exponent G) ve $U U^T \equiv 0 \pmod{m^2}$ olduğundan, teorem I.1.4 'e göre

$$U \equiv 0 \pmod{m}$$

olup

$$U = z A - y J \equiv 0 \pmod{m}$$

ve

$$z\,A \equiv y\,J \pmod{m}$$

elde edilerek teorem ispatlanmış olur.

Bu sonuç, doğrudan doğruya değişmeli bir fark kümesinin çakışım matrisinin büzülmüşüne uygulanabilir.

$$U = k\,A_H - h\,\lambda\,J$$

alınırsa

$$U\,U^T = n\,(k^2\,I - h\lambda\,J) \equiv 0 \pmod{m^2}$$

ve

$$U \equiv 0 \pmod{m}$$

$$k\,A_H = h\lambda\,J \pmod{m}$$

elde edilir. Doğal olarak burada $m^2 \mid n$ ve m semi-primitif (mod.exponent G/H) dir.

II.1.2 TEOREMİN UYGULAMASI

1. Mertebesi 66 olan devresel grup G olduğuna göre G içinde, (66,26,10)-fark kümesinin mevcut olmadığını gösterelim : G nin mertebesi 2 olan bir alt grubu H olsun. G değişmeli olduğundan böyle bir alt grup vardır. G içinde bir (66,26,10)-fark kümesinin mevcut olduğunu kabul edelim. A çakışım matrisinin H alt grubu vasıtasıyle büzülmüşü A_H olsun. A_H nin elemanları 0, (+1) , (+2) 'lerdir.

$$v = 66, \quad k = 26, \quad \lambda = 10, \quad n = 16, \quad h = 2$$

olduğundan

$$A_H\,A_H^T = n\,I + h\lambda\,J$$

$$J\,A_H = A_H\,J = k\,J$$

den dolayı

$$A_H\,A_H^T = 16\,I + 2.10\,J$$

$$J\,A_H = A_H\,J = 26\,J$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. G/H nin exponenti 33 tür. Ayrıca

$$2^5 \equiv -1 \pmod{33}$$

olduğundan, $4 = 2.2$ tamsayısı semi-primitif mod.exponent G/H dir. Ayrıca

$$4^2 \mid n$$

olduğundan, teorem II.1.1 in koşulları gerçeklenmiş olup

$$k\,A_H \equiv h\,\lambda\,J \quad (\text{mod } m)$$

yani,

$$26\,A_H \equiv 20\,J \quad (\text{mod } 4)$$

ve

$$20 \equiv 0 \quad (\text{mod } 4)$$

ten dolayı

$$26\,A_H \equiv 0 \quad (\text{mod } 4)$$

olmalıdır.

A_H 'nin elemanları 0,1,2 lerden oluştuğuna göre, 0 olan elemanlar için,

$$26.0 \equiv 0 \quad (\text{mod } 4)$$

sağlanır. Şu halde, A_H matrisinde 0 olan elemanlar vardır.

1 olan elemanlar için :

$$26.1 \not\equiv 0 \ (\text{mod } 4)$$

olduğundan, A_H matrisinin elemanları içinde 1 bulunamaz.

2 olan elemanlar için :

$$26.2 \equiv 0 \quad (\text{mod } 4)$$

olduğundan A_H 'de 2 olan elemanlar bulunabilir. Sonuç olarak, A_H matrisinin elemanları 0 ve 2 lerden oluşmak zorundadır. Buna göre

$$A_H\,A_H^T = 16\,I + 20\,J$$

$$J\,A_H = A_H\,J = 26\,J$$

eşitliklerinin sağlanıp sağlanmadığı araştırılmalıdır.

$$A_H\,J = J\,A_H = 26\,J \qquad (*)$$

eşitliğinin sağlanması için A_H nin herbir satır ve sütununda 13'er tane 2 bulunmalı, diğer elemanlar 0 olmalıdır. Ancak, bu durumda (*) eşitliği sağlanabilir.

Bu kez

$$A_H A_H^T = 16\,I + 20\,J \qquad (**)$$

eşitliğinin sağlanıp sağlanmadığını araştıralım :

$$A_H A_H^T = \begin{bmatrix} a'_{11} & \cdots & a'_{1\omega} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{\omega 1} & \cdots & a'_{\omega\omega} \end{bmatrix} \qquad (33)$$

olup (**) eşitliğinin sağlanabilmesi için

$$a'_{11} = a'_{22} = \ldots = a'_{\omega\omega} = 36$$

olmak zorundadır. Diğer yandan, a'_{11} elemanı, $A_H A_H^T$ çarpımından dolayı, A_H nin birinci satır elemanlarının kareleri toplamıdır. Yani

$$a'_{11} = \underbrace{2.2 + 2.2 + \ldots + 2.2}_{13 \text{ tane}} = 52$$

$$a'_{11} = 52$$

dir.

$A_H A_H^T$ nin asal köşegen elemanları, yani a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}, ..., $a'_{\omega\omega}$ elemanları için aynı durum vardır.

Bu ise

$$a'_{11} = a'_{22} = \ldots = a'_{\omega\omega} = 36$$

oluşuna aykırıdır. Şu halde bulunması gereken A_H matrisi .

$$A_H A_H^T = n\,I + h\lambda\,J$$

eşitliğini sağlamaz. Bu nedenle de, böyle bir fark kümesi yoktur.

2. Ikinci bir örnek olarak, $G = Z_2 \times Z_4 \times Z_5$ grubu içinde bir (40,13,4)-fark kümesinin var olmadığını gösterelim: G içinde bir (40,13,4)-fark kümesinin var olduğu kabul edilsin. H, G nin mertebesi 2 olan bir alt grubu olsun. Ayrıca G/H nin exponenti 10 kabul edilsin. Yani H, G/H nin exponenti 10 olacak şekilde seçilen ve mertebesi 2 olan bir alt grup olsun.

$$\nu = 40,\ k = 13,\ \lambda = 4,\ n = 9,\ h = 2,\ \omega = 20$$

olup,

$$A_H A_H^T = 9\,I + 8\,J$$

$$A_H J = J A_H = 13\,J$$

dir.

$$3^2 \equiv -1 \pmod{10}$$

olduğundan 3, semiprimitif (mod 10) dir. Ayrıca $n = 9$ ve $3^2 \mid n$ dir.

Teoremimize göre

$$13\,A_H \equiv 8\,J \pmod 3$$

$$\equiv 2\,J \pmod 3$$

olması gerekir. Şu halde A_H nin hiçbir elemanı 0 ve 1 olamaz. Çünkü $13.0 \not\equiv 2 \pmod 3$ ve $13.1 \not\equiv 2 \pmod 3$ tür.

Yani A_H nin elemanları en azından 2 olmak zorundadır. Ayrıca A_H nin elemanlarının hepsi de 2 olamaz, çünkü o zaman A_H matrisi J nin bir tam katı olur. Şu halde en azından bir eleman 5 (veya 5 ten büyük olup mod 3'e göre 5'e denk olmalıdır.) olmalıdır. Bu durumda bile A_H nin bir satır elemanlarının toplamı 43 olur. Bu ise

$$A_H\,J = 13\,J$$

oluşuna aykırıdır. Şu halde böyle bir fark kümesi yoktur.

II.1.3. BÜZÜLMÜŞ ÇAKIŞIM MATRİSİNİN BULUNMASI İÇİN BİR ALGORİTMA

D, mertebesi v olan değişmeli bir G grubundaki bir (v, k, λ)-fark kümesi ve A, D-(v, k, λ)'nın gelişmiş'i olan D-simetrik dizayn'ın çakışım matrisi olsun. A matrisinin, G nin bir H alt grubu vasıtasıyle büzülmüşü A_H ile gösterilsin. A, G nin elemanları üzerinde nasıl bir çakışım yapısı tanımlıyorsa, A_H 'de G/H üzerinde benzer bir çakışım yapısı tanımlar. Fakat A_H 'nin elemanları sadece 0 ve 1 'lerden oluşmaz. A_H 'nin sütunlarını "noktalar", satırlarını ise "bloklar" olarak yorumlamakla elde edilen çakışım yapısına da "büzülmüş çakışım yapısı" denmektedir.

Büzülmüş A_H matrisi aşağıdaki algoritma ile belirtilebilir.

ALGORİTMA :

I.ADIM. H nin G üzerindeki yörüngeleri belirtilir.

II.ADIM. D-(v, k, λ) nın A çakışım matrisi bulunur. A, bir $v \times v$ matristir.

III.ADIM. A nın aynı yörüngeye karşılık gelen satırları toplanarak, $\omega = [G:H]$ olmak üzere, bir $\omega \times v$ matris elde edilir.

IV.ADIM. Herbir yörüngeden (noktalara ait) bir sütun alınarak A_H matrisi elde edilir. Bu bir $\omega \times \omega$ -boyutlu matristir. Aynı yörüngedeki sütunlar aynı olduğundan, bu seçim zor değildir.

UYGULAMA :

$(\mathbb{Z}_{21}, \oplus)$ grubundaki bir (21,5,1)-fark kümesi

$$D = \{\bar{4}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{13}, \overline{15}\}$$

tir. Z_{21} in

$$H = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\}$$

alt grubu gözönüne alınsın. A nın H ile büzülmüşü olan A_H matrisini bulalım:

H nin G deki yörüngelerini bulmak kolaydır.

D - (21,5,1) simetrik dizayn'ı, Teorem I.1.3 den dolayı, aşağıdaki gibidir.

Noktalar kümesi $P = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{20} \}$

Bloklar kümesi $B = \{ B_0, B_1, B_2, \ldots, B_{20} \}$

olup

$B_0 = \{4, 7, 8, 13, 15\}$

$B_1 = \{5, 8, 9, 14, 16\}$

$B_2 = \{6, 9, 10, 15, 17\}$

$B_3 = \{7, 10, 11, 16, 18\}$

$B_4 = \{8, 11, 12, 17, 19\}$

$B_5 = \{9, 12, 13, 18, 20\}$

$B_6 = \{10, 13, 14, 19, 0\}$

$B_7 = \{11, 14, 15, 20, 1\}$

$B_8 = \{12, 15, 16, 0, 2\}$

$B_9 = \{13, 16, 17, 1, 3\}$

$B_{10} = \{14, 17, 18, 2, 4\}$

$B_{11} = \{15, 18, 19, 3, 5\}$

$B_{12} = \{16, 19, 20, 4, 6\}$

$B_{13} = \{17, 20, 0, 5, 7\}$

$B_{14} = \{18, 0, 1, 6, 8\}$

$B_{16} = \{19, 1, 2, 7, 9\}$

$B_{17} = \{20, 2, 3, 8, 10\}$

$B_{18} = \{0, 3, 4, 9, 11\}$

$B_{19} = \{1, 4, 5, 10, 12\}$

$B_{20} = \{2, 5, 6, 11, 13\}$

tir. I.1.3' e göre, A çakışım matrisi

$$
A = \begin{bmatrix}
0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&1\\
1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0\\
0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1\\
1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1\\
1&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&1&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}
$$

dır. Buradan kolaylıkla,

$$
A_H = \begin{bmatrix}
2&0&0&1&0&1&1\\
1&2&0&0&1&0&1\\
1&1&2&0&0&1&0\\
0&1&1&2&0&0&1\\
1&0&1&1&2&0&0\\
0&1&0&1&1&2&0\\
0&0&1&0&1&1&2
\end{bmatrix}
$$

elde edilir.

G grubu alarak yine $(Z_{21}, \oplus)$ grubu, alt grup olarak ta

$\overline{H} = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}\}$ alınırsa, A çakışım matrisinin $\overline{H}$ vasıtasıyle büzülmüşü

$$A_{\overline{H}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

olur.

KAYNAKLAR

ARGUNOV , B.I., and EMEL'CHENKOV, E.P., Incidence Structures und Ternary Algebras, Uspekhi Mat. Naak 37:2 (3-37), 1982.

BAUMERT, L.D., Cyclic Difference Sets, In lecture Notes in Mathematics, 182, New York : Springer-Verlag, 1971.

BİRKHOFF,G. and BARTEE, T.C., Modern Applied Algebra, Mc Graw-Hill Book Comp. (1970).

COLBOURN, C.J. and COLBOURN, M.I., Decomposition of block designs: combinatorial issues, Combinatorial Mathematics X, Lecture Notes in Mathematics, 1036, s: 49-71. Springer-Verlag, 1983.

DEMBOWSKİ-Finite Geometries. Springer Verlag New-York Inc. 1968

GRAVER, J.E. and WATKİNS, M.E., Combinatorics with Emphasis on the Theory of Graphs, Springer-Verlag, 1977.

HUNGERFORD, T.W., Algebra, Springer-Verlag, New-York-Heidelberg- Berlin, 1974.

HEDAYAT, A.and HWANG,H.L., Construction of BİB Designs with Various Support Siges-with Special Emphasis for v 8 and k 4, Journal of Comb theory, Series A 36, 163-173, 1984

HEDAYAT, A.and KHOSROVHAHI, G.B., An Algebraic Study of BIB Designs: a Complete Solution for v 6 and k 3, Journal of Comb Theory, Series A 30, 43-52, 1981.

IRELAND, K. and ROJEN,M., A Classical Introduction to Modern Number Theory. Springer-Verlag, 1982.

JOHNSEN, E.C., Skew-Hudamard Abelian Group Difference Sets, Journal of Algebra 4, 388-402, 1966.

JUNGNICKEL, D., On Automorphism groups of divisible designs, Can.J.Math. Vol XXXIV, No:2, s:257-297, 1982.

KANTOR,W.M., Symplectic Group, Symetric Designs, and Line Ovals. Journal of Algebra 33, s: 43-58, 1975.

KEEDWELL,A.D. and HSU, D.F., Generalized Complete Muppings, Neafields, Sequenceable groups and block designs, I. Pacific Journal/of Mat. Vol III, No:2 , s: 317-332, 1984

KEEDWELL, A.D., Sequenceable groups, generalized complete mappings, necfields, and block designs, Combinatorial Mathematics, Lecture Nates in Mathematics 1036. s: 49-71, Springer-Verlag, 1983.

KIBLER, R.E., A Summary of Noncyclic Difference Sets, k 20. Journal of Combinatorial theory, Series A 25, s: 62-67, 1978.

LANDER, E.S., Symetric Designs: An Algebraic Approach, Cambridge University Press, (1983).

MAN,H.B., Recent Advances in difference sets. Amer. Math. Montly, 74, s: 229-235, 1967.

MENON,P.K., Difference sets in Abelian Groups. Proc. AMS. 11, s: 368-376, 1960.

MENON,K.P., On Difference sets whese parameters satisfy a certain relation. Proc. AMS. 13, s: 739-745, 1962.

RUBINSON, D.J.S., A Course in the Theory of Group. Springer-Verlag, 1982.

ROGHELLA,N.N., and SANE, S.S., Classification of (16,6,2)- designs by ovals. Discrete Mathematics 51, s: 167-177, 1984.

SCHUTZENBERGER, M.P., A nonexistence theorem for an infinite family of symetrical block designs. An. Eugenics, 14, s: 286-287, 1949.

STEWART,I.N., and TALL, D.O., Algebraic Number Theory. Chapman and Hall-London, 1979.

TUNCHEV, V.D., On the Mutual Embeddability of (2k, k, k-1) and (2k-1,k,k) Quasi-Residual Designs, Journal of Comb theory, Series A 29, s: 329-335, 1980.

TURYN,R.J., Character Sums and Difference Sets, Pacc Journal of Math. Vol 15, no: 1, s: 319-346, (1965)

WONG, C.S. and MASARO, J.C., A-Optimal design Matrices, Discrete Mat. 50, s: 295-318, 1984

ÖZGEÇMİŞ

Doğduğu yer ve yıl	: Denizli , 23.9.1948
İlk öğrenim	: Denizli , Şirinköy İlkokulu
Orta Öğrenim	: Denizli Lisesi Orta Kısmı , Nazilli Öğretmen Okulu , İzmir Yüksek Öğretmen Okulu hazırlık sınıfı
Yüksek Öğrenim	: Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik-Astronomi Bölümü (İzmir Yüksek Öğretmen Okulu)
Çalıştığı Kurumlar	: 1969 yılından itibaren üç yıl süreyle Adana-Osmaniye Lisesinde Matematik öğretmenliği ; 1972 yılında, İstanbul Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisine Matematik Asistanı olarak atanma ; 1979 yılında Doçent
Şu andaki Görevi	: Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi
Medeni Hali	: Evli ve bir kız çocuğu sahibi