YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Radyal Doğrultuda Heterogenlik Özelliği Gösteren Ortamlar

Uğur Güven

Doktora Tezi

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RADYAL DOĞRULTUDA HETEROGENLİK ÖZELLİĞİ GÖSTEREN ORTAMLARDA BAZI THERMAL İNCLUSİON PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

DOKTORA TEZİ

YÜK.MÜH. UĞUR GÜVEN

İSTANBUL 1986

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RADYAL DOĞRULTUDA HETEROGENLİK ÖZELLİĞİ GÖSTEREN ORTAMLARDA BAZI THERMAL İNCLUSİON PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ.

DOKTORA TEZİ

YÜK.MÜH.UĞUR GÜVEN

İSTANBUL 1986

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BÖLÜM VI.

KÜRESEL KOORDİNATLAR

ÖZET

Bu çalışmada küresel ve silindirik thermal inclusion problemi izotropik ve heterogen ortamlar için küçük şekil değiştirme ve lineer gerilme-birim şekil değiştirme varsayımı altında incelenmektedir. Bu arada heterogenliği ifade etmek üzere, lamé katsayıları konumun fonksiyonu olarak alınmakta ve bunların sıcaklık değişiminden etkilenmedikleri düşünülmektedir.

Bu çalışmada, önce simetri özelliği gösteren Termoelastik problemlerin çözümünde V.M.Maysel ifadesi, E.Betti karşıt teoreminden hareketle elastiklik katsayıları değişken heterogen ortamlara uygulanabilecek şekle dönüştürülmektedir.

V.M.Maysel ifadesinin elde edilen bu şekli değişken katsayılı heterogen ortamlarda, radyal ve eksenel simetri özellikleri gösteren Termoelastik problemlerin çözümünde kullanılmıştır.

Birinci bölümde giriş olarak kısa bir literatür taraması yapılmakta ayrıca heterogen ortam kavramına yaklaşım şekli ayrıntılı olarak verilmektedir.

İkinci bölümde değişken katsayılı heterogen ortamlarla ilgili temel denklemler çıkarılmaktadır. Lamé katsayılarının değişken olmaları sebebiyle, klasik Navier denklemlerine bazı ilave terimler gelmektedir.

Üçüncü bölümde kayma modülünün $\mu = \mu_0 \rho^n$ şeklinde olması halinde, silindirik koordinatlar için kesin (exact) çözümler bulunmaktadır.

Dördüncü bölümde ise bu çözümler küresel koordinat seçilerek yapılmaktadır.

Beşinci bölümde kayma modülü $\mu = \mu_o e^{n\rho^k}$ şeklinde seçilerek k'nin bazı değerleri için çözümler silindirik koordinatlarda bulunmuştur. Altıncı bölümde ise aynı çözümler küresel koordinatlar yardımı ile yapılmıştır.

SUMMARY

In this study spherical and cylindirical thermal inclusion problems are studied for isotropic and non-homogenous medium under the assumption of small displacements and lineer stress-strain laws. Moreover in order to signify the condition of being non-homogenous, lamé coefficients are taken into account as the function of the position and assumed not be affected by any change of temperature.

In this study, at first V.M.Maysel expression, bearing in mind the E.Betti's opposite theorem, is changed to the position likely tobe applied to elasticity coefficients veriable medium.

V.M.Maysel expression in this latter from has been used in solving problems of thermoelasticity possesing axial symmetyr and spherical symmetyr.

At the outsel, a brief literature survey is performed and furthermore the manner of approaching to concept of non homogenous medium is given in detail.

In the second section the basic equations concerning non-homogenous medium with varied coefficients are obtained. Because lamé coefficients are, of course, varied, some additional terms are added to the classical Navier equations.

In the third section, on condition that shear modulus being the form of $\mu = \mu_o\rho^n$ the exact solutions are found for cylindirical coordinates. In the fourth section, those solutions mentioned above are found by the choice of spherical coordinates.

In the fifth section solutions for some values of k are obtained by means of cylindirical coordinates, the choice of the shear modulus in the form of $\mu = \mu_o e^{n\rho^k}$. In the sixth section, the same solutions arefound with the help of spherical coordinates.

Kullanılan Başlıca Gösterimler

λ, μ	: Lamé katsayıları
α_t	: Malzemenin Lineer genleşme katsayısı
n	: Homogen olmama parametresi
$I_\nu(..)$	: Birinci çeşit ν. mertebeden değiştirilmiş Bessel fonksiyonu
$K_\nu(...)$	: İkinci çeşit ν. mertebeden değiştirilmiş Bessel fonksiyonu
δ (..)	: Dirac delta fonksiyonu
η (..)	: Heavside fonksiyonu

BİRİNCİ KISIM
BÖLÜM I
GİRİŞ

Son yıllarda çeşitli mühendislik bilimlerinin ihtiyaç duyması sonucu Termoelastisite biliminde hızlı bir gelişme görülmektedir. Yakın zamanda nükleer mühendislik alanında buhar ve gaz türbinleri gibi makinalarda, uçaklarda görülen gelişmeler sonucu ortaya çıkan ısıl gerilmeler çoğu zaman önemli bir sorun meydana getirmektedir.

Termoelastisite geniş bir alanı kapsamaktadır. Cisimlerde ısı akımından doğan gerilmeler ve şekil değiştirmelerin incelenmesi Termoelastisite ile yapıldığı gibi, elastik şekil değiştirmeler sonucu cisimlerdeki sıcaklık dağılımıda Termoelastisite ile incelenebilmektedir. Cisimlerde gerilme, şekil değiştirme ve ısı iletimi aynı anda birlikte bulunmaktadır.

Termoelastisite problemlerinin çözümünde genel olarak Termoelastik yer değiştirme potansiyeli veya gerilme fonksiyonları kullanılmaktadır. Termoelastik yer değiştirme potansiyeli kavramı ilk defa 1937 yılında J.N.GOODİER tarafından ortaya konmuştur (6).

E.Betti teoreminin termoelastik alanlarla ilgili genelleştirmesi olan V.M.Maysel yönteminde gerek yerdeğiştirme potansiyeli gerekse gerilme fonksiyonları kullanılabilir (3).

Elastisite teorisinde sık sık karşılaşılan integral denklemlerin çözümünde P.F.Papkovich tarafından teklif edilen harmonik fonksiyonlar yönteminin geliştirilmiş bir şekli Termoelastisitede de kullanılabilir.

Sınır şartları gerilmeler cinsinden verilmiş Termoelastisite problemlerinin çözümünde çoğu zaman E.BELTRAMİ, I.H.MICHELL denklemlerini kullanmak uygun düşer. Sıcaklık alanının Laplace denklemini sağlaması halinde ise E.BELTRAMİ I.H.MICHELL denklemleri bir hayli basitleşir. Bu denklemlerin yarı sonsuz ortamla ilgili çözümleri B.SHARMA, B.SEN tarafından verilmiştir.

G.N.Maslav sonsuz bir üçgen levhada, çeşitli sıcaklık alanları için, gerilme dağılışlarını bulmuş ve bunların grafiğini çizmiştir (9).

B.Boley, J.H.Weiner düzgün olmayan sıcaklık alanından dolayı yarı sonsuz ortamda meydana gelen gerilmeleri bulmada Fourier integrallerini kullanmışlardır (7).

Yarı sonsuz ortamda yüzey üzerinde noktasal ısı kaynağının bulunması hali E.Melan, H.Parkus tarafından incelenmiştir (8). Bu çalışmalarda ısı kaynağının bulunduğu yer koordinat eksenlerinin başlangıç noktası seçilmiştir. Ayrıca z=0 yüzeyi boyunca yarı sonsuz ortamın mükemmel yalıtılmış olduğu varsayılmıştır. Yer değiştirme potansiyeli kullanılarak elde edilen termoelastik çözümdeki gerilmeler genellikle verilen sınır şartlarını sağlamaz.
Verilen sınır şartlarını sağlamada termoelastik çözüme, ayrıca love yer değiştirme fonksiyonundan yararlanarak elde edilmiş izotermal çözümüde süperpoze etmek gerekir.

J.IGNACZAK; E.BELTRAMİ ve I.H.MICHELL denklemlerini Termoelastisitede karşılaşılan dinamik problemlere uygulamıştır.

V.I.Danilovskaya; yarı sonsuz ortamda sıcaklık alanının daimi olmaması halinde, bir boyutlu Termoelastisite problemini Laplace dönüşümünü kullanarak çözmüştür (11). Ani sıcaklık değişmelerinin ortaya çıkardığı dinamik problemler E.Melan, H.Parkus tarafından incelenmiştir.

M.A.BİOT varyasyon yöntemlerini kullanarak daha genel Termomekanik karşıtlık bağıntıları geliştirmiştir. W. NOWACKI önce anizotrop cisimlerde, daha sonra viskoelastik cisimlerde daimi olmayan ısıl gerilmeleri incelemiştir.

Termoelastisitede karşılaşılan birçok problemde esas sorun Green fonksiyonunun belirlenmesinde ortaya çıkmaktadır. Green fonksiyonunun belirlenmesinde daha çok Fourier Laplace ve Hankel dönüşümlerinden yararlanılmaktadır. Özellikle daimi olmayan Termoelastisite problemlerinin çözümünde Laplace dönüşümünü kullanmak daha uygun düşer.

İzotrop ve homogen Termoelastisite problemlerinin çözümünde; klasik elastisite teorisinde geçerli olan küçük şekil değiştirme ve lineer gerilme-birim şekil değiştirme yasaları kullanılmakta ve ayrıca elastik malzeme katsayılarının sıcaklıktan etkilenmedikleri varsayımı yapılmaktadır. Ancak sınırlanmış bölgedeki sıcaklık alanı için çözümler verilmiştir. Buna rağmen elde edilen bu çözümler uygulamada karşılaşılan birçok probleme cevap vermekte yeterlidir.

Anizotrop, viskoelastik ve homogen olmayan cisimlerin incelenmesi daha sonra yapılmıştır. Gerçekte kullanılan malzemeler homogen değildir. Bilindiği gibi malzemenin elastiklik modülü anizotrop özellik göstermekte olup, ayrıca sıcaklık değişmelerinden de etkilenmektedir. Elastiklik modülünün her $100^{o}C$ için ortalama % 2-4 azaldığı deneylerle saptanmıştır. Genellikle elastiklik modülünün sıcaklıkla değişimi lineere çok yakındır (14). Ayrıca alaşım elemanlarının oranıda elastiklik modülünü değiştirmektedir (12).

Hernekadar poisson oranıda sıcaklıkla ve alaşım elemanlarının oranı ile değişmekte ise de, bu değişme genellikle elastiklik modülünün değişimi yanında önemsiz kalmaktadır.

Bu çalışmada poisson oranı sabit alınmakta buna tabi olarak kayma modülü ile elastiklik modülünün bir birine göre değişmeleri incelenmektedir. Böyle bir incelemeyle heterogen ortam kavramına yaklaşılmaya çalışılmaktadır. Heterogen ortam için esas alınan bu malzeme özelliğinin gerilme ve şekil değiştirmeler üzerindeki önemi düşünülürse, bu konularda heterogenlik için bir yaklaşım yapıldığı söylenebilir. Ayrıca poisson oranıyla birlikte, malzemenin lineer genleşme katsayısıda sabit alınabilir.

$$k \nabla^2 T = \rho C_E \frac{\partial T}{\partial t} + (3\lambda + 2\mu)\, \alpha_t \frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial t}$$

Enerji bağıntısından görüldüğü üzere birim şekil değiştirme ve sıcaklık alanları kuplajlıdır. Gerçekten cismin hacim elemanın içerdiği ısı miktarındaki değişme sebebiyle gerilme ve birim şekil değiştirme meydana gelmektedir. Buna karşılık herhangi bir dış kuvvet etkisi ve onunla ortaya çıkan birim şekil değiştirme ise sıcaklık alanında değişiklik yapmaktadır.

Bu nedenle daha hassas ve gerçeğe yakın çözüm elde etmek istendiğinde sıcaklık ve birim şekil değiştirme alanlarını kuplajlı olarak düşünmek daha uygun olur. Ayrıca dinamik problemlerinde kuplaj etkisi önemli olarak ortaya çıkmaktadır. Diğer taraftan kuplaj etkisi belirli özel teknolojik uygulamalarda, örneğin elektronikte, önemli olmaktadır.

Bununla beraber Termoelastisitede kuplajın ortadan kaldırılması ile, bir anlamda çözümü kolaylaştıran bir yaklaşım yapılmış olur. Enerji denkleminden görüldüğü üzere daimi sıcaklık alanı halinde kuplajın etkisi büyük olmamaktadır.

Bu çalışmada ısı kaynağının bulunmadığı sıcaklık alanının daimi olduğu, sıcaklık ve birim şekil değiştirme alanlarının kuplajsız olduğu düşünülmektedir. Bu nedenle enerji denklemi laplace denklemine dönüşmektedir.

Küresel koordinatlarda polar simetri gözönüne alınarak sıcaklığın yalnızca radyal doğrultuya göre değiştiği, silindirik koordinatlarda ise eksenel simetri gözönüne alınarak, ayrıca eksen boyunca sıcaklık değişiminin önemli olmadığı varsayılmaktadır. Bundan dolayı yer değiştirmeler sadece radyal doğrultunun fonksiyonu olmaktadır.

Ayrıca poisson oranı ile malzemenin lineer genleşme katsayısı sabit alınırken, kayma modülüde heterogenliği ifade etmek üzere radyal doğrultunun fonksiyonu olarak alınmaktadır.

BÖLÜM II

TERMOELASTİSİTENİN TEMEL DENKLEMLERİ

II.1. ISI İLETİMİNİN DİFERANSİYEL DENKLEMİ BAŞLANGIÇ VE SINIR ŞARTLARI

X_r uzayında S yüzeyi ile çevrili bir B katı cismi gözönüne alınsın. $T(x_r,t)$, X_r noktasında ve t anındaki sıcaklığı göstersin. Katı cisimde noktalar arasındaki sıcaklık farkı sonucunda oluşan ısı akısı,

$$q = - \lambda \text{ grad } T \qquad \text{(II.1.1)}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada λ malzemenin ısı iletim katsayısını göstermektedir. Δt zaman aralığında, x_r noktasında alınmış d yüzey elemanından geçen ısı miktarı,

$$\Delta Q = - \lambda T,_n \, d\sigma \, \Delta t \qquad \text{(II.1.2)}$$

ile verilir. Burada $T,n = \frac{\partial T}{\partial n}$, yüzey elemanına ait x_r noktasındaki sıcaklığın normal türevini göstermekte. Ayrıca (II.1.2) Fourier kanununun ifadesi olarak bilinmektedir.

B cismi içerisinde alınmış S, yüzeyi ile çevrili B1 bölgesindeki ısı dengesi düşünülmüş olsun. Δt zaman aralığında S_1 yüzeyinden geçen ısı miktarı,

$$\Delta Q' = \lambda \int_{S_1} T,n \, d\sigma \, \Delta t \qquad \text{(II.1.3)}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bölgede ısı kaynağı var ise,

$$\Delta Q'' = \int_{B_1} W \, dV \, \Delta t \tag{II.1.4}$$

ile verilen üretilmiş ısıyı ayrıca hesaba katmak gerekir. Burada W birim zamanda ve birim hacımda üretilen ısı miktarını göstermektedir.

$\Delta Q = \Delta Q' + \Delta Q''$ toplam ısısı ΔT zaman aralığında B_1 bölgesinde sıcaklık değişimi meydana getirmesi sebebiyle,

$$\Delta Q = \int_{B_1} c \, \rho \, \dot{T} \, dV \, \Delta t \tag{II.1.5}$$

yazılabilir. Burada ρ özgül kütleyi, c ise özgül ısıyı göstermektedir.

$\Delta Q'$ ve $\Delta Q''$ ve (II.1.5)'den

$$\int_{B_1} (c\rho T - W)dV - \lambda \int_{S_1} T_{,n} \, d\rho = 0,$$

$$\int_{B_1} (c\rho T - W - \lambda T_{,kk}) \, dV = 0,$$

yazılabilir. Buradan ısı iletiminin genel denklemi

$$T_{,kk} - \frac{1}{\chi} T = - \frac{Q}{\chi} \tag{II.1.6}$$

şeklinde bulunur. Burada $\chi = \frac{\lambda}{\rho c}$, $W = Qc\rho$ olarak alınmaktadır.

(II.1.6) ise parabolik kısmi türevli bir diferansiyel denklemdir. Bu denklemin çözümü sonucu, sıcaklık konum ve zamanın ponksiyonu olarak bulunur.

(II.1.6) denklemi daimi sıcaklık alanı halinde

$$T_{,kk} = - \frac{Q}{\chi} \qquad (II.1.7)$$

şekline indirgenir. Bu eliptik kısmi türevli denklem olup, buna ayrıca poisson denklemide denir.

Isı kaynağının bulunmaması halinde ise, poisson denklemi,

$$T_{,kk} = 0 \qquad (II.1.8)$$

şeklinde verilen laplace denklemine dönüşür.

Bu denklemlerden sıcaklığı bulmak için başlangıç ve sınır şartlarının verilmiş olması gerekir.

Başlangıç şartı ile $t = t_o$ anındaki sıcaklık dağılımı gösterilir. Genel olarak bu sıcaklık dağılımı konumun fonksiyonu olarak verilir.

Uygulamada en çok karşılaşılan sınır şartları şu şekilde sıralanabilir :

1. Tüm noktalardaki sıcaklık; konum ve zamanın fonksiyonu olarak verilir.

2. Sıcaklık grodyenti konum ve zamanın fonksiyonu olarak alınır. Özel olarak yalıtılmış yüzey için $T_{,n} = 0$ olur.

3. $T_{,n} + \alpha T = \beta$ fonksiyonu bölge içerisindeki bütün noktalar için verilir. Burada α ve β sabitleri göstermektedir.

II.2. GERİLME, BİRİM ŞEKİL DEĞİŞTİRME VE HAREKET DENKLEMLERİ

Sıcaklık değişimi cisimde gerilme ve birim şekil değiştirmenin ortaya çıkmasına sebep olur. Sıcaklığın zamana göre değişimi yeteri kadar küçük olduğunda, sıcaklık değişiminin cisme ait mekanik ve termal özellikleri üzerindeki etkisi ihmal edilebilir.

Lineer elastisite teorisinde birim şekil değiştirme ifadesi,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\,(U_{i,j}+U_{j,i}) \qquad \text{(II.2.1)}$$

ile verilir. Burada ε_{ij} simetrik birim şekil değiştirme tansörünü, U_i ise yer değiştirme vektörünü göstermektedir. Birim şekil değiştirme bileşenlerinin sağlaması gereken uygunluk şartları

$$\varepsilon_{ij,kl}+\varepsilon_{kl,ij}-\varepsilon_{jl,ik}-\varepsilon_{ik,jl}=0 \qquad \text{(II.2.2)}$$

şeklinde yazılabilir.

Klasik lineer elastisite teorisinde birim şekil değiştirme tansörünün bileşenleri, sıcaklık alanından dolayı meydana gelen birim şekil değiştirme ile birlikte gerilme tansörü bileşenlerinin lineer fonksiyonu olarak

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^{0}+\varepsilon'_{ij} \qquad \text{(II.2.3)}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada ε^{0}_{ij}, elemanter dik paralel yüzlüde sıcaklık artışından dolayı meydana gelen birim şekil değiştirmeyi, ε'_{ij} ise gerilme bileşenlerine tabi olan kısmı göstermektedir.

Paralel yüzlünün serbest olarak şekil değiştirmesi halinde

$$\varepsilon^{0}_{ij}=\alpha_t\, T\, \delta_{ij} \qquad \text{(II.2.4)}$$

olur. Bu bağıntı sadece izotropik cisimler için geçerlidir. Burada $_t$ lineer genleşme katsayısı olarak verilmektedir.

ε'_{ij} birim şekil değiştirme tansörü gerilmeler cinsinden

$$\varepsilon'_{ij}=\frac{1}{2G}\left(\sigma_{ij}-\frac{\nu}{1+\nu}S\,\delta_{ij}\right) \qquad \text{(II.2.5)}$$

şeklinde yazılabilir. Burada G kayma modülünü, ν poisson oranını ve $S=\sigma_{kk}$ normal gerilmelerin toplamını göstermektedir.

(II.2.3), (II.2.4) ve (II.2.5)'den Duhamel-Neumann bağıntıları diye adlandırılan

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_t T\, \delta_{ij} + \frac{1}{2G} (\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+} S\, \delta_{ij}) \qquad \text{(II.2.6)}$$

ifadesi elde edilir.

Normal birim şekil değiştirmelerin toplamı $e = \varepsilon_{kk}$ ile gösterildiğinde

$$e = 3\, \alpha_t T = \frac{1-2\nu}{E} S, \quad E=2G(1+\nu) \qquad \text{(II.2.7)}$$

olarak hesaplanır. Burada E Young modülü olarak verilmektedir.

(II.2.6)'den gerilmeler.

$$\sigma_{ij} = 2G\{\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} (e - \frac{1+\nu}{\nu} \alpha_t T)\}\delta_{ij} \qquad \text{(II.2.8)}$$

şeklinde bulunur.

Bazı hallerde Lamé katsayılarını kullanmak daha uygun olur.

$$G = \mu, \quad E = \frac{\mu.(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \qquad \text{(II.2.9)}$$

bağıntıları gözönüne alındığında (II.2.6), (II.2.7), (II.2.8) ifadeleri,

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_t T\, \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} (\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} S\, \delta_{ij}) \qquad \text{(II.2.6a)}$$

$$e - 3\alpha_t T = \frac{S}{3\lambda+2\mu} \qquad \text{(II.2.7a)}$$

$$\sigma_{ij}=2\mu\varepsilon_{ij}+(\lambda e-\gamma T)\delta_{ij},\ \gamma=(3\lambda+2\mu)\alpha_t \quad \text{(II.2.8a)}$$

şeklinde yazılabilir.

Daimi olmayan sıcaklık alanı halinde, yer değiştirmeler, birim şekil değiştirmeler, gerilmeler, konumun ve zamanın fonksiyonudurlar. Dinamik halde hareket denklemleri,

$$\sigma_{ij,j}+F_i-\rho\ddot{U}_i=0 \qquad \text{(II.2.10)}$$

şeklinde verilir.

Sıcaklığın zamana göre değişimi yeteri kadar küçük olduğunda atalet terimleri ihmal edilebilir. Çözüm esnasında t bir parametre olarak gözönüne alınır.

II.3. DAİMİ HAL İÇİN YERDEĞİŞTİRME DENKLEMLERİ

(II.2.8), (II.2.10)'den yerdeğiştirme denklemi,

$$\mu U_{i,kk}+(\lambda+\mu)U_{k,ki}+F_i-\gamma T_{,i}=0 \qquad \text{(II.3.1)}$$

şeklinde bulunur. Kütle kuvvetlerinin ihmal edilmesi halinde yukardaki denklemden

$$\mu U_{i,kk}+(\lambda+\mu)U_{k,ki}-\gamma T_{,i}=0 \qquad \text{(II.3.2)}$$

elde edilir.

(II.3.2) denklem sisteminin genel çözümü ise, homogen sistemin çözümü ile ikinci taraftan dolayı elde edilen özel çözümün toplamı olarak verilir.

(II.3.2) denklem sisteminin özel çözümü J.N GOODİER tarafından verilen ϕ termoelastik yerdeğiştirme potansiyeli yardımı ile bulunabilir. ϕ'ye tabi olarak, $U_i=\phi_{,i}$ şeklinde tanımlanan yerdeğiştirme (II.3.2) denklem sistemine yerleştirildiğinde,

$$\mu\phi_{,ikk} + (\lambda+\mu)\, \phi_{,kki} - \gamma T_{,i} = 0 \qquad \text{(II.3.3)}$$

bulunur. Bu denklemin X_i'ye göre integrali alındığında, ifadesi,

$$\phi_{,kk} = m\, T \qquad \text{(II.3.4)}$$

ile verilen poisson denklemi elde edilir.

Burada $m = \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\, \alpha_t = \frac{1+\nu}{1-\nu}\, \alpha_t$ olarak verilmektedir.

Poisson denkleminden ϕ bulunduktan sonra, birim şekil değiştirme ile gerilmeler, sırayla ϕ'ye göre verilen

$$\varepsilon_{ij} = \phi_{,ij} \qquad \text{(II.3.5)}$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\, (\phi_{,ij} - \delta_{ij}\, \phi_{,kk}) \qquad \text{(II.3.6)}$$

bağıntılarından hesaplanabilir.

II.4. E.BETTİ KARŞITLIK TEOREMİNİN TERMOELASTİSİTEVE UYGULANMASI

1951 senesinde V.M.Maysel, yerdeğiştirmeler için E.Betti tarafından verilen karşıt teoremi Termoelastisiteye uygulanarak sınır değeri problemleri için esasları aşağıda verilen bir integrasyon yöntemi geliştirmiş oldu:

İzotermal halde iki ayrı yüklemeye maruz elastik bir cisim düşünülmüş olsun. Buna göre E.Betti teoreminin ifadesi

$$\int_V F'_i U_i dV + \int_\Gamma P'_i U_i d\Gamma = \int_V F_i U'_i dV + \int_\Gamma P_i U'_i d\Gamma \qquad (II.4.1)$$

şeklinde verilir. Burada F_i, P_i, U_i ve F'_i, P'_i, U'_i'ler sırayla birinci ve ikinci yükleme durumlarındaki kütle kuvveti, yüzey kuvveti ve yer değiştirmeyi göstermektedir.

Sıcaklık alanından doğan gerilme halleri için V.M.Maysel E.Betti teoremi ifadesindeki F_i kütle ve P_i yüzey kuvvetleri yerine sırayla $-\gamma T_{,i}$ ve $\gamma T n_i$ terimlerini yerleştirerek bir genelleştirmeye gitmiş oldu. Yalnız termal gerilmelerin bulunması ve F_i kütle kuvvetlerinin ihmal edilmesi halinde (II.4.1)'in yerine

$$\int_V F'_i U_i dV + \int_\Gamma P'_i U_i d\Gamma = -\gamma \int_V T_{,i} U'_i dV + \gamma \int_\Gamma T n_i U'_i d\Gamma \qquad (II.4.2)$$

yazılabilir.

Özel olarak x_r noktasında, x_i doğrultusunda etki eden birim tekil kuvvet tarafından meydana getirilen gerilme hali düşünüldüğünde yer değiştirmeler,

$$U_i(x_r) = \gamma \int_V T(\xi_r)\, \theta^{(i)}(\xi_r, x_r) dV(\xi_r) \qquad (II.4.3)$$

veya

$$U_i(x_r) = \alpha_t \int_V T(\xi_r)\, \Lambda^{(i)}(\xi_r, x_r) dV(\xi_r) \qquad (II.4.4)$$

şekillerinde ifade edilebilir.

Burada $\theta^{(i)}(\xi_r, x_r)$, izotermal halde x_r noktasında, x_i doğrultusunda etki eden birim tekil kuvvetin elastik cismin ξ_r noktasında, meydana getirdiği dilatasyonu, $\Lambda^{(i)}$ ise normal gerilmelerin toplamını göstermektedir. Böylece, daimi sıcaklık alanından dolayı cisimde meydana gelen yerdeğiştirmeleri tayin için Maysel formülleri elde edilmiş olur.

Maysel formülleri süreksizlik gösteren sıcaklık alanlarında da kullanılabilir. Mühendislikte süreksizlik gösteren sıcaklık alanlarına sık sık rastlanır. Örneğin cismin bir bölgesi $T^{(i)}$ sıcaklığında bulunurken, diğer bölgesi $T^{(e)}$ sıcaklığında bulunabilir. Maysel'in teklif ettiği metod özellikle simetrik haller için oldukça kolay çözümler verir. Küresel ve eksenel simetri gösteren problemlerde $\theta^{(i)}(\xi_r, x_r)$ Green foks iyonu çoğu sefer kolayca hesaplanabilir.

II.5. HOMOGEN OLMAYAN İZOTROP ORTAMIN NAVİER DENKLEMLERİ

$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda e\,\delta_{ij}$ ifadesi (II.2.10) hareket denklemine taşındığında,

$$(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla.\underline{u}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \underline{U}) + \underline{F} = \rho\ddot{\underline{U}} \quad \text{(II.5.1.)}$$

Navier denklemleri elde edilir. Bu denklemlere ayrıca Lamé denklemleride denir (13). Bu denklemler çıkarılırken lamé katsayıları sabit olarak alınmaktadır.

Lamé katsayılarının değişken alınması halinde, heterogen ve izotrop ortamlar için, Navier denklemleri

$$(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla.\underline{U}) - \mu\nabla\times(\nabla\times\underline{U}) + (\nabla.\underline{U})\nabla\lambda +$$

$$+\{\nabla \underset{\sim}{U} + (\nabla \underset{\sim}{U})^T\}.\nabla\mu + \underset{\sim}{F} = \rho \ddot{\underset{\sim}{U}} \qquad (II.5.2)$$

şeklinde bulunur.

Bu çalışmada yerdeğiştirmelerin sadece radyal doğrultuda oldukları varsayıldığından $\nabla X \underset{\sim}{U} = 0$ olur. Buna göre kütle ve atalet kuvvetlerinin ihmal edilmesi halinde (II.5.2) denklemleri,

$$(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla.\underset{\sim}{U})+(\nabla.\underset{\sim}{U})\nabla\lambda + \{(\nabla \underset{\sim}{U}+(\nabla \underset{\sim}{U})^T\}.\nabla\mu=0 \qquad (II.5.3)$$

şekline indirgenmiş olur.

(II.5.3)'de geçen terimler küresel koordinatlara göre ayrı ayrı hesaplandığında

$$(\lambda+2\mu)\left(\frac{d^2U}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dU}{d\rho} - \frac{2}{\rho^2}U\right) + \frac{d\lambda}{d\rho}\left(\frac{dU}{d\rho} + \frac{2}{\rho}U\right)$$

$$+ 2\frac{d\mu}{d\rho}\frac{dU}{d\rho} = 0 \qquad (II.5.4)$$

denklemi elde edilir.

Silindirik koordinatlarda ise (II.5.3)'den

$$(\lambda+2\mu)\left(\frac{d^2U}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dU}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2}U\right) + \frac{d\lambda}{d\rho}\left(\frac{dU}{d\rho} + \frac{1}{\rho}U\right)$$

$$+ 2\frac{d\mu}{d\rho}\frac{dU}{d\rho} = 0 \qquad (II.5.5)$$

bulunur.

II.6. LAMé KATSAYILARI DEĞİŞKEN ORTAMLAR İÇİN MAYSEL FORMÜLÜNÜN GENELLEŞTİRİLMESİ

Lamé katsayılarının değişken olması halinde de E.Betti teoremi geçerli olur. (EK 1) (II.4.1) E.Betti ifadesinde Fi,Pi terimleri yerine sırayla $-(\gamma T)_{,i}$, $(\gamma T)n_i$ yerleştirildiğinde

$$\int_V F'_i U_i dV + \int_\Gamma P'_i U_i d\Gamma = -\int_V (\gamma T)_{,i} U'_i dV + \int_\Gamma \gamma T n_i U'_i d\Gamma \quad (II.6.1)$$

elde edilir. Buradan

$$\int_\Gamma \gamma T n_i U'_i d\Gamma = \int_V (\gamma T\, U'_i)_{,i}\, dV$$

diverjans teoremi ifadesinin kullanılmasıyla

$$\int_V F'_i U_i dV + \int_\Gamma P'_i U_i d\Gamma = \int_V \gamma T\, U'_{i,i}\, dV \quad (II.6.2)$$

bulunur. Bu bağıntı, $U'_{i,i} = \varepsilon'_{kk}$ alınması halinde

$$\int_V F'_i U_i dV + \int_\Gamma P'_i U_i d\Gamma = \int_V \gamma T\, \varepsilon'_{kk}\, dV \quad (II.6.3)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Yüzey kuvvetlerinin olmaması halinde ($P'_i=0$) küresel koordinatlar için

$$\int_V F' U_r 4\pi r^2 dr = \int_V \gamma T\, U'_{k,k}\, 4\pi\rho^2 d\rho \quad (II.6.4)$$

elde edilir. $U'_{k,k}$ yerine $\Theta\ (\rho,r)$ yerleştirilmesi halinde yerdeğiştirmeler için

$$U_r(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^\infty \gamma(\rho)\, T(\rho)\, \Theta\,(\rho,r)\, \rho^2 d\rho \quad (II.6.5)$$

bağıntısı elde edilir.

Burada $\Theta\ (\rho,r)$, r yarıçaplı küre yüzeyi üzerinde düzgün yayılı radyal birim kuvvetlerin ρ yarıçaplı küre yüzeyi üzerinde meydana getirdikleri dilatasyonu göstermektedir.

Yüzey kuvvetlerinin olmaması halinde ($P'_i=0$) (II.6.3) den silindirik koordinatlar için

$$\int_V F' U_r \, 2\pi r \, dr = \int_V \gamma T \, U'_{k,k} \, 2\pi\rho \, d\rho \qquad (II.6.6)$$

yazılır. Buradan yer değiştirmeler için

$$U_r(r) = \frac{1}{r} \int_0^\infty \gamma(\rho) \, T(\rho) \quad \Theta \, (\rho.r)\rho d\rho \qquad (II.6.7)$$

bağıntısı elde edilir.

Termoelastisite problemlerinin çözümünde çoğu sefer denge denklemlerini; gerilme ve birim şekil değiştirme bağıntılarını eğrisel koordinatlara göre vermek uygun düşer.

Küresel koordinatlarda birim şekil değiştirmeler yer değiştirmeler cinsinden

$$\varepsilon_{rr} = U_{r,r} \, , \, \varepsilon_{\psi\psi} = r^{-1}(U_r + U_\theta \cot\theta)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = r^{-1}(U_r + U_{\theta,\theta}), \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\{U_{\theta,r} + r^{-1}(U_{r,\theta} - U_\theta)\}$$

şeklinde verilir. Küresel simetri halinde birim şekil değiştirmelerle, gerilme tansürleri θ açısından bağımsız olur. Bu hal için gerilme ve birim şekil değiştirme bağıntıları.

$$\sigma_{rr} = 2\mu \cdot \varepsilon_{rr} + \lambda e - \gamma T \qquad (II.6.8)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\psi\psi} = 2\mu \, \varepsilon_{\theta\theta} + \lambda e - \gamma T \qquad (II.6.9)$$

$$\varepsilon_{rr} = U_{r,r}, \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\psi\psi} = r^{-1} U_r, \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta\psi} = \varepsilon_{\psi r} \qquad (II.6.10)$$

$$e = U_{r,r} + 2r^{-1} \, Ur \qquad (II.6.11)$$

olarak yazılabilir.

Silindirik koordinatlarda ise, eksenel simetri ve yerdeğiştirmelerin Z'den bağımsız olmaları halinde gerilme, birim şekil değiştirme bağıntıları

$$\sigma_{rr} = 2\mu\, \varepsilon_{rr} + \lambda\, e - \gamma T \qquad \text{(II.6.12)}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\mu\, r^{-1}\, U_r + \lambda e - \gamma T \qquad \text{(II.6.13)}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda e - \gamma T \qquad \text{(II.6.14)}$$

$$\varepsilon_{rr} = U_{r,r} \qquad \text{(II.6.15)}$$

$$e = U_{r,r} + r^{-1}\, U_r \qquad \text{(II.6.16)}$$

şeklinde verilir.

İKİNCİ KISIM

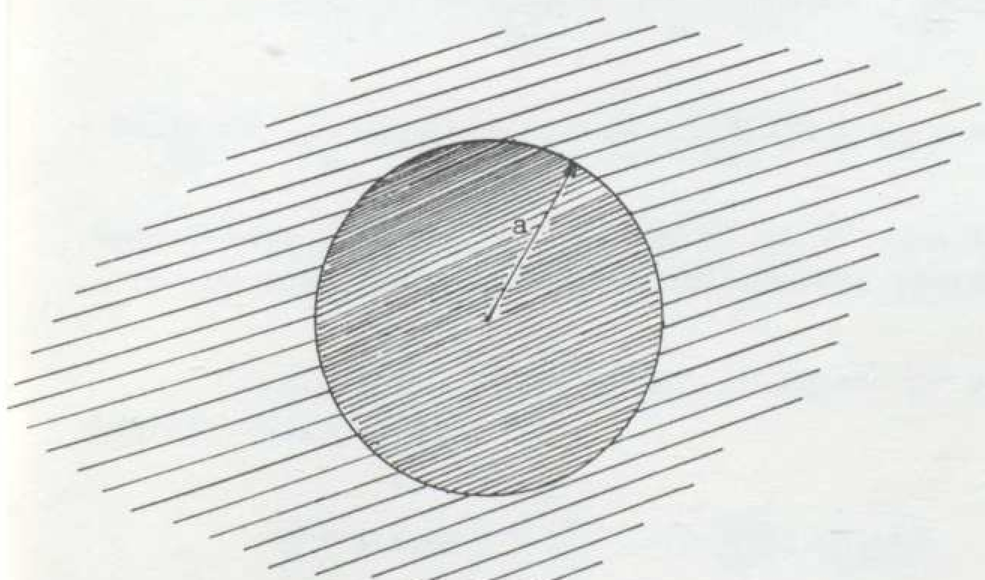
KAYMA MODÜLÜNÜN $\mu = \mu_o \rho^n$ OLMASI HALİ

BÖLÜM III

SİLİNDİRİK KOORDİNATLAR

III.1. SİLİNDİRİK THERMAL İNCLUSİON İÇEREN SONSUZ UZAY HALİ

Heterogen ve izotrop bir ortamın sıcaklık alanı verilmiş "a" yarıçaplı sonsuz silindirik bir bölge içermesi halinde, gerek silindir gerekse silindir dışındaki sonsuz ortamda meydana gelecek yerdeğiştirme ve gerilmeler ne olur problemi incelenmiş olsun.



Sıcaklıktan dolayı, Maysel formülünün uygulanması sonucu (II.5.5)'den

$$(\lambda+2\mu)\left\{\frac{d^2U(\rho,r)}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dU(\rho.r)}{d\rho}-\frac{1}{\rho}U(\rho,.r)\right\}+\frac{d\lambda}{d\rho}\left\{\frac{dU(\rho,r)}{d\rho}+\frac{1}{\rho}U(\rho,r)\right\}+2\frac{d\mu}{d\rho}\frac{dU(\rho,r)}{d\rho}+\delta(\rho-r)=0 \qquad \text{(III.1.1)}$$

yazılabilir. Burada $\delta(\rho-r)$ ile diraç delta fonksiyonu gösterilmektedir.

Ayrıca $U(\rho,r)$ yer değiştirmesinin $\rho = 0$'da sonlu ve sonsuzda sıfır olması gerekir.

(III.1.1)'den $0<\rho<r$ ve $r<\rho<\infty$ bölgeleri için sıra ile

$$(\lambda+2\mu)\left\{\frac{d^2U'(\rho,r)}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dU'(\rho,r)}{d\rho}-\frac{1}{\rho^2}U'(\rho,r)\right\}+$$

$$\frac{d\lambda}{d\rho}\left\{\frac{dU'(\rho,r)}{d\rho}+\frac{1}{\rho}U'(\rho,r)\right\}+2\frac{d\mu}{d\rho}\frac{dU'(\rho,r)}{d\rho}=0,\quad o<\rho<r$$

ve

$$(\lambda+2\mu)\left\{\frac{d^2U''(\rho,r)}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dU''(\rho,r)}{d\rho}-\frac{1}{\rho^2}U''(\rho,r)\right\}+\frac{d\lambda}{d\rho}\cdot\{$$

$$\cdot\left\{\frac{dU''(\rho,r)}{d\rho}+\frac{1}{\rho}U''(\rho,r)\right\}+2\frac{d\mu}{d\rho}\frac{dU''(\rho,r)}{d\rho}=0,\quad r<\rho<\infty \qquad \text{(III.1.2)}$$

bağıntıları yazılabilir. Burada U' ve U'' sıra ile $o<\rho<r$ ve $\rho<r<\infty$ bölgelerindeki yerdeğiştirmeleri göstermektedir.

$m=\dfrac{2\nu}{1-2\nu}$ olmak üzere, $\lambda = m\mu$ ve $\mu=\mu_o\rho^n$ olması halinde (II.5.5)'den

$$\frac{d^2U}{d\rho^2}+(n+1)\frac{1}{\rho}\frac{dU}{d\rho}-\left(1-\frac{m.n}{m+2}\right)\frac{1}{\rho^2}U=0 \qquad \text{(III.1.3)}$$

elde edilir.

(III.1.3) Euler diferansiyel denkleminin karakteristik kökleri

$$\alpha_{1,2} = \frac{-n \pm \sqrt{n^2+4(1-\frac{m\ n}{m+2})}}{2}$$

olarak bulunur.

$m + 2 - mn > 0$ şartının gerçeklenmesi halinde bu köklerden biri pozitif, diğeri negatif olur.

Buna göre (III.1.3) diferansiyel denkleminin çözümü

$$U = A\rho^{\alpha 1} + B\ \rho^{-\ \alpha 2},\ (\alpha_1 > 0 \text{ ve } \alpha_2 > 0)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu çözüme göre $0 < \rho < r$ ve $r < \rho < \infty$ bölgelerindeki yer değiştirmeler sırayla $U' = A\rho^{\alpha 1}$ ve $U'' = B\rho^{-\alpha 2}$ alınabilir. Ayrıca $U'(o) = 0$, $U''(\infty) = 0$ olması gerekir.

A ve B sabitlerini bulmada biri yer değiştirmelerle, diğeri ise gerilmelerle ilgili

$$\left| U'-U'' \right|_{\rho = r} = 0 \qquad \text{(III.1.4)}$$

$$\left| \Sigma'_{\rho\rho} - \Sigma''_{\rho\rho} \right|_{\rho = r} = 1$$

bağıntıları kullanılabilir.

Bu bağıntıların ilki $\rho = r$'de yer değiştirmelerin sürekli olduğunu ikincisi ise radyal gerilmelerin süreksiz olduğunu göstermektedir.

Bu şartların ilkinden

$$\left| A\,\rho^{\alpha_1} - B\,\rho^{-\alpha_2} \right|_{\rho = r} = 0$$

yazılabilir. Buradan

$$B = A r^{\alpha_1 + \alpha_2}$$

bulunur.

(II.6.12), (II.6.15) ve (II.6.16) bağıntılarından

$$\Sigma'_{\rho\rho} = 2\mu\alpha_1\; A\,\rho^{\alpha_1 - 1} + \lambda(\alpha_1 A\,\rho^{\alpha_1 - 1} + \rho^{-1} A\,\rho^{\alpha_1})$$

ve

$$\Sigma''_{\rho\rho} = 2\mu\;(-\alpha_2 B\rho^{-\alpha_2 - 1}) + \lambda\,(-\alpha_2 B\,\rho^{-\alpha_2 - 1} - 2\rho^{-1} B\rho^{-\alpha_2})$$

yazılabilir.

Bu bağıntıların ikinci şartta yerleştirilmesi halinde

$$A = \left| \frac{r^{1-\alpha_1}}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\lambda + 2\mu)} \right|_{\rho = r}$$

Burada $\lambda = m\mu$ ve $\mu = \mu_o\,\rho^n$ alındığında

$$A = \frac{r^{1-\alpha_1 - n}}{\mu_o(m+2)(\alpha_1 + \alpha_2)}\,, \quad B = \frac{r^{1+\alpha_2 - n}}{\mu_o(m+2)(\alpha_1 + \alpha_2)}\,.$$

olur.

Bu değerlere göre,

$$U' = \frac{r^{1-\alpha_1-n}}{\mu o(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)} \cdot \rho^{\alpha_1}$$

$$U'' = \frac{r^{1+\alpha_2-n}}{\mu o(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)} \cdot \rho^{-\alpha_2}$$

şeklinde hesaplanır.

(II.6.16)'a göre, dilatasyon ifadeleri

$$\Theta'(\rho,r) = (1+\alpha_1)\, A\rho^{\alpha_1-1} \quad , \; o < \rho < r$$

$$\Theta''(\rho,r) = (1-\alpha_2)\, B\rho^{-\alpha_2-1} \quad , \; r < \rho < \infty$$

$\lambda = m\,\mu$, $\mu = \mu_o\,\rho^n$ alındığına göre (II.6.7)'den

$$U'_r(r) = \frac{(3m+2)\,(1+\alpha 1)\,\mu o.\,\alpha t}{r}\, A \int_o^r T(\rho)\rho^{\alpha_1}\, d\rho,$$

$o < \rho < r$

ve

$$U''_r(r) = (3m+2)(1-\alpha_2)\mu_o\alpha_t\, r^{\alpha_1+\alpha_2-1} A \int_r^\infty T(\rho)\rho^{-\alpha_2+n}\, d\rho$$

$r < \rho < \infty$

bağıntıları elde edilir.

$$Ur(r) = U'_r(r) + U''_r(r)$$

olduğuna göre, radyal yer değiştirme

$$U_r(r) = \frac{(3m+2)(1+\alpha 1)\,\alpha t}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)}\, r^{-(\alpha_1+n)} \int_o^r T(\rho)\,\rho^{\alpha 1+n}\, d\rho$$

$$+\frac{(3m+2)(1-\alpha_2)\,\alpha_t}{(m+2)\,(\alpha_1+\alpha_2)}\; r^{\alpha_2-n}\int_r^{\infty} T(\rho)\,\rho^{n-\alpha_2}\,d\rho$$

"a" yarıçaplı silindirin dışında sıcaklık alanı bulunmadığına göre

$$U_r(r)=\frac{(3m+2)(1+\alpha_1)\,\alpha_t}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)}\; r^{-(\alpha_1+n)}\int_o^{r} T(\rho)\rho^{\alpha_1+n}\,d\rho+$$

$$+\frac{(3m+2)(1-\alpha_2)\,\alpha_t}{(m+2)\,(\alpha_1+\alpha_2)}\; r^{\alpha_2-n}\int_r^{a} T(\rho)\,\rho^{n-\alpha_2}\,d\rho,\quad o<r<a \qquad \text{(III.1.5)}$$

$$U_r(r)=\frac{(3m+2)(1+\alpha_1)\,\alpha_t}{(m+2)\,(\alpha_1+\alpha_2)}\; r^{-(\alpha_1+n)}\int_o^{a} T(\rho)\rho^{\alpha_1+n}\,d\rho,\quad a<r<\infty \qquad \text{(III.1.6)}$$

yerdeğiştirmeleri elde edilir.

Sıcaklık alanının $T(r) = To\ \eta\ (a-r)$ şeklinde verilmesi halinde (III.1.5) ve (III.1.6)'dan sıra ile

$$U_r(r)=\frac{(3m+2)(1+\alpha_1)\alpha_t\ To.r}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+n+1)}+\frac{(3m+2)\ (1-\alpha_2)\ \alpha_t\ To}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)(-\alpha_2+n+1)}\,\frac{a^{-\alpha_2+n+1}}{r^{n-\alpha_2}}$$

$$-\frac{(3m+2)\ (1-\alpha_2)\ \alpha_t\ To.r}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)\ (-\alpha_2+n+1)},\quad o<r<a \qquad U_r(r)\frac{(3m+2)(1+\alpha_1)\alpha_t\ To}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+n+1)}\,\frac{a^{\alpha_1+n+1}}{r^{\alpha_1+n}},\quad a<r<\infty$$

elde edilir. (Yukarda $\eta\ (a-r)$ ile Heavside fonksiyonu gösterilmektedir.)

Bu yerdeğiştirme ifadelerine göre, (II.6.12), (II.6.13), (II.6.14), (II.6.15), (II.6.16)'dan σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$ σ_{zz} gerilmeleri hesaplanabilir.

$o<r<a$ ve $a<r<\infty$ bölgeleri için sırayla

$$\sigma_{rr} = \frac{2(m+1)\ (3m+2)\ (1+\alpha_1)\ \alpha_t}{(m+2)\ (\alpha_1+\alpha_2)\ (\alpha_1+n+1)}\ \mu\, To\ +$$

$$+ \frac{(3m+2)\ (1-\alpha_2)\ \alpha_t}{(\alpha_1+\alpha_2)(-\alpha_2+n+1)}\ \mu\, To\{\ (\alpha_2-n)\ a^{-\alpha_2+n+1}\ r^{\alpha_2-n-1} - 1\ \}$$

$$+ \frac{m(3m+2)\ (1-\alpha_2)\ \alpha_t}{(m+2)\ (\alpha_1+\alpha_2)(-\alpha_2+n+1)}\ \mu\, To\ \{a^{-\alpha_2+n+1}\ r^{\alpha_2-n-1} - 1\ \}$$

$$- (3m+2)\ \alpha_t\ \mu\, To, \qquad o < r < a \qquad \text{(III.1.7)}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(3m+2)\ (1+\alpha_1)\ \alpha_t}{(\alpha_1+\alpha_2)\ (\alpha_1+n+1)}\ \mu\, To\ +$$

$$+ \frac{(3m+2)\ (1-\alpha_2)\ \alpha_t}{(\alpha_1+\alpha_2)(-\alpha_2+n+1)}\ \mu\, To\{\ a^{-\alpha_2+n+1}\ r^{\alpha_2-n-1} - 1\ \}$$

$$+ \frac{m\ (3m+2)\ (1+\alpha_1)\ \alpha_t}{(m+2)\ (\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+n+1)}\ \mu\, To\ +$$

$$+ \frac{m\ (3m+2)\ (1-\alpha_2)\ \alpha_t}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)(-\alpha_2+n+1)}\ \mu\, To\{\ (\alpha_2-n)\ a^{-\alpha_2+n-1}\ r^{\alpha_2-n-1} - 1\ \}$$

$$- (3m+2)\ \alpha_t\ \mu\, To\ , \qquad o < r < a \qquad \text{(III.1.8)}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2m(3m+2)\ (1+\alpha_1)\ \alpha_t}{(m+2)\ (\alpha_1+\alpha_2)\ (\alpha_1+n+1)}\ \mu\ To\ +$$

$$+ \frac{m\ (3m+2)\ (1-\alpha_2)\ \alpha_t}{(m+2)\ (\alpha_1+\alpha_2)\ (-\alpha_2+n+1)}\ \mu\, To\{\ a^{-\alpha_2+n+1}\ r^{\alpha_2-n-1} - 1\ \}$$

$$+ \frac{m(3m+2)\ (1-\alpha_2)\ \alpha_t}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)(-\alpha_2+n+1)}\ \mu\ To\ \{(\alpha_2-n)a^{-\alpha_2+n+1}\ r^{\alpha_2-n-1} - 1\}$$

$$- (3m + 2)\ \alpha_t\ \mu\, To\ , \qquad o < r < a \qquad \text{(III.1.9)}$$

ve

$$\sigma_{rr} = \frac{m\ (3m+2)\ (1 + \alpha_1)\ (-\alpha_1 + n+1)\ \alpha_t\ \ To}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+n+1)}\ \mu\ \left(\frac{a}{r}\right)^{\alpha_1+n+1}$$

$$- \frac{2(3m+2)\ (1+\alpha_1)\ (\alpha_1+n)\ \alpha_t\ To}{(m+2)\ (\alpha_1+\alpha_2)\ (\alpha_1+n+1)}\ \mu\ \left(\frac{a}{r}\right)^{\alpha_1+n+1}\ , \quad a < r < \infty \qquad \text{(III.1.10)}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{m\,(3m+2)\,(1+\alpha_1)\,(1-\alpha_1-n)\,\alpha_t}{(m+2)\,(\alpha_1+\alpha_2)\,(\alpha_1+n+1)}\,\mu\,To\,\left(\frac{a}{r}\right)^{\alpha_1+n+1}$$

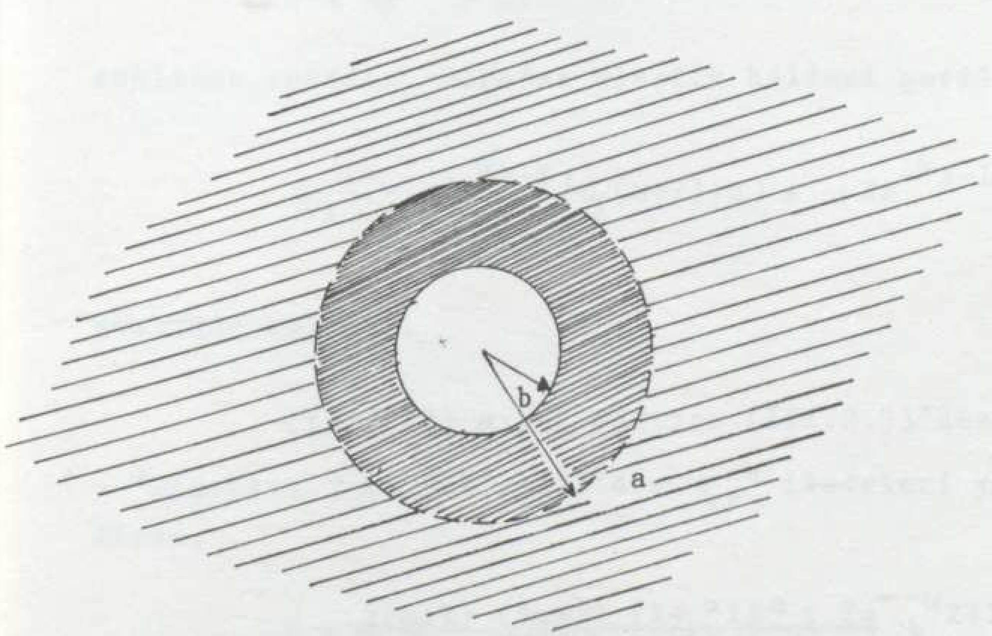
$$+\frac{2(3m+2)\,(1+\alpha_1)\,\alpha_t\,To}{(m+2)\,(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+n+1)}\,\mu\,\left(\frac{a}{r}\right)^{\alpha_1+n+1}, \quad a< r < \infty \qquad (III.1.11)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{m\,(3m+2)\,(1+\alpha_1)\,(1-\alpha_1-n)\,\alpha_t\,To}{(m+2)\,(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+n+1)}\,\mu\,\left(\frac{a}{r}\right)^{\alpha_1+n+1}, a< r < \infty \qquad (III.1.12)$$

elde edilir.

III.2. THERMAL İNCLUSİON VE SİLİNDİRİK BOŞLUK İÇEREN SONSUZ UZAY HALİ

Şimdi sonsuz uzay halinin silindirik bir boşluk içermesi hali incelenmek istensin. Bu durumda boşluk civarında gerilmelerin sıfır olması gerekir. Bu sınır şartı ise, (III.1.1)'de elde edilen termoelastik çözüme klasik elastik çözüm süperpoze edilerek sağlanabilir.



σ_{rr}' ile elastik. σ_{rr}'' ile termoelastik gerilmeler gösterildiğinde toplam gerilme

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}' + \sigma_{rr}'' \qquad \text{(III.2.1)}$$

şeklinde verilir.

Buna göre sınır şartı

$$\left| \sigma_{rr}' + \sigma_{rr}'' \right|_{r=b} = 0 \qquad \text{(III.2.2)}$$

olur.

Sıcaklık etkisinin bulunmaması halinde $\lambda = m\mu$ ve $\mu = \mu_o r^n$ için (II.5.2) denkleminin çözümü

$$U = Ar^{\alpha_1} + Br^{-\alpha_2}$$

şeklinde verilir. Buradan elastik haldeki gerilme

$$\sigma_{rr}' = \mu A r^{\alpha_1 - 1}\{\alpha_1(m+2)+m\} + \mu B r^{-\alpha_2 - 1}\{-\alpha_2(m+2)+m\} \qquad \text{(III.2.3)}$$

şeklinde bulunur.

(III.2.2) sınır şartına (III.2.3)'den $\sigma_{rr}' = \mu B r^{-\alpha_2 - 1}\{-\alpha_2(m+2)+m\}$ ve (III.1.7)'den σ_{rr}'' ifadeleri yerleştirilirse,

$$B = \frac{2(m+1)\,(3m+2)\,(1+\alpha_1)\,\alpha_t\,T_o}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+n+1)\{\alpha_2(m+2)-m\}}\, b^{\alpha_2+1} +$$

$$+ \frac{(3m+2)\,(1-\alpha_2)\,\alpha_t\,T_o}{(\alpha_1+\alpha_2)(-\alpha_2+n+1)\{\alpha_2(m+2)-m\}}\{(\alpha_2-n)a^{-\alpha_2+n+1}b^{\alpha_2-n-1}-1\}\, b^{\alpha_2+1}$$

$$+ \frac{m(3m+2)\ (1-\alpha 2)\ \alpha t\ \ To}{(m+2)\ (\alpha_1+\alpha_2)(-\alpha_2+n+1)\{\alpha_2(m+2)-m\}} \{a^{-\alpha_2+n+1}\ b^{\alpha_2-n-1}\ -1\}\ b^{\alpha_2+1}$$

$$- \frac{(3m+2)\ \ \alpha t\ To}{\{\alpha 2(m+2)\ -\ m\ \}}\ b^{\alpha 2+1}$$

elde edilir. Buna göre

$$\sigma_{rr}' = - \frac{2(m+1)\ (3m+2)\ (1+\alpha 1)\ \alpha t\ \mu\ To}{(m+2)\ (\alpha 1+\alpha 2)(\ \alpha 1+n+1)}\ b^{\alpha 2+1}\ \ r^{-\alpha 2-1}$$

$$- \frac{(3m+2)\ (1-\alpha 2)\ \alpha t\ \mu\ To}{(\alpha 1+\alpha 2)(-\alpha 2+n+1)} \{(\alpha 2-n)a^{-\alpha 2+n+1}\ b^{\alpha 2-n+1}-1\}\ b^{\alpha 2+1} r^{-\alpha 2-1}$$

$$+ (3m+2)\ \alpha t\ \mu\ To\ b^{\alpha 2+1}\ \ r^{-\alpha 2-1}$$

$$- \frac{m(3+2)\ (1-\alpha_2)\ \ \ \alpha_t \mu\ T_o}{(\alpha 1+\alpha 2)\ (-\alpha 2+n\ +1)(m+2)} \left| a^{-\alpha_2+n+1}\ b^{\alpha_2-n-1}\ -1 \right|\ b^{\alpha_2+1}\ r^{-\alpha_2-1}$$

olur. Buradan toplam gerilme

$$\sigma_{rr} = \frac{2(m+1)(3m+2)(1+\alpha 1)\ \alpha t\mu\ To}{(m+2)(\alpha 1+\alpha 2)\ (\alpha 1+n+1)} \{1-b^{\alpha 2+1}\ r^{-\alpha 2-1}\}$$

$$+ \frac{(3m+2)\ (1-\alpha 2)\ \alpha t\ \mu To}{(\alpha 1+\ 2)\ (-\alpha 2+n+1)} \{(\alpha 2-n)\ a^{-\alpha 2+n+1})r^{\alpha 2-n-1}-1\} -$$

$$\{((\alpha 2-n)\ a^{-\alpha 2+n+1} c^{\alpha 2-n-1}\ -1)\ \frac{b^{\alpha 2+1}}{r^{\alpha 2+1}}\} +$$

$$+ \frac{m(3m+2)\ (1-\alpha 2)\ \ \alpha t\ \mu\ To}{(\alpha 1+\alpha 2)\ (m+2)\ (-\alpha 2+n+1)}\ \ \{a^{-\alpha 2+n+1}\ r^{\alpha 2-n-1}\ -\ 1\ \}-$$

$$a^{-\alpha 2+n+1}\ b^{\alpha 2-n-1}\ \ -\ 1\}\frac{b^{\alpha 2+1}}{r^{\alpha 2+1}}\ \} +$$

$$+ (3m+2)\ \alpha t\ \mu To\ (\frac{b^{\alpha 2+1}}{r^{\alpha 2+1}}\ -\ 1)\qquad\qquad b < r < a$$

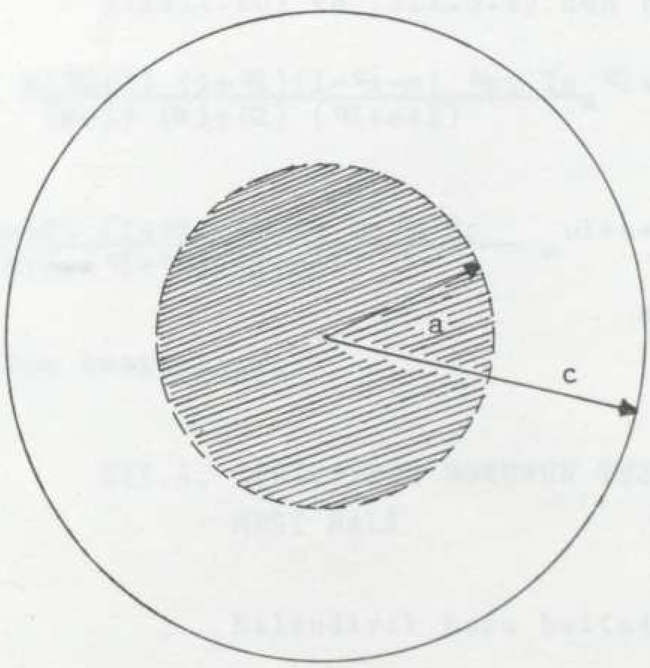
şeklinde bulunur.

III.3. THERMAL İNCLUSİON İÇEREN SONSUZ SİLİNDİR HALİ

Sonsuz silindir halinde sınır şartı

$$\left| \sigma_{rr}' + \sigma_{rr}'' \right|_{r = C} = 0 \qquad \text{(III.3.1)}$$

şeklinde verilir.



(III.3.1) sınır şartında (III.3.3)'den $\sigma_{rr}' = \mu \cdot A r^{\alpha_1 - 1} \{ \alpha_1 (m+2) + m \}$ ve (III.1.10)'dan σ_{rr}'' değerleri yerleştirilirse

$$A = \frac{-m(3m+2)\,(1+\alpha_1)\,(1-\alpha_1-n)\,\alpha_t\ T_o}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+n+1)\,\{\alpha_1(m+2)+m\}} \left(\frac{a}{c}\right)^{\alpha_1+n+1} c^{1-\alpha_1}$$

$$+ \frac{2(3m+2)\,(1+\alpha_1)\,(\alpha_1+n)\,\alpha_t\,T_o}{(m+2)\,(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+n+1)\{\alpha_1(m+2)+m\}}\left(\frac{a}{c}\right)^{\alpha_1+n+1} c^{1-\alpha_1}$$

bulunur. Buradan

$$\sigma_{rr}' = \frac{-m(3m+2)(1+\alpha_1)(1-\alpha_1-n)\,\alpha_t\,\mu\,T_o}{(m+2)\,(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+n+1)}\,\frac{a^{\alpha_1+n+1}}{c^{2\alpha_1+n}}\,r^{\alpha_1-1}$$

$$+ \frac{2\,(3m+2)\,(1+\alpha_1)\,(1-\alpha_1-n)\alpha_t\,\mu\,T_o}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+n+1)}\,\frac{a^{\alpha_1+n+1}}{c^{2\alpha_1+n}}\,r^{\alpha_1-1} \qquad \text{(III.3.2)}$$

elde edilir.

(III.1.10) ve (III.3.2)'den toplam gerilme

$$\sigma_{rr} = \frac{m(3m+2)\,(1+\alpha_1)(1-\alpha_1-n)\,\alpha_t\,\mu\,T_o}{(m+2)\,(\alpha_1+\alpha_2)\,(\alpha_1+n+1)}\,a^{\alpha_1+n+1}\left\{r^{-(\alpha_1+n+1)}-\frac{r^{\alpha_1-1}}{c^{2\alpha_1+n}}\right\}$$

$$+ \frac{2(3m+2)\,(1+\alpha_1)(\alpha_1+n)\,\alpha_t\,\mu\,T_o}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+n+1)}\,a^{\alpha_1+n+1}\left\{-r^{-(\alpha_1+n+1)}+\frac{r^{\alpha_1-1}}{c^{2\alpha_1+n}}\right\}$$

$$a < r < c$$

şeklinde hesaplanır.

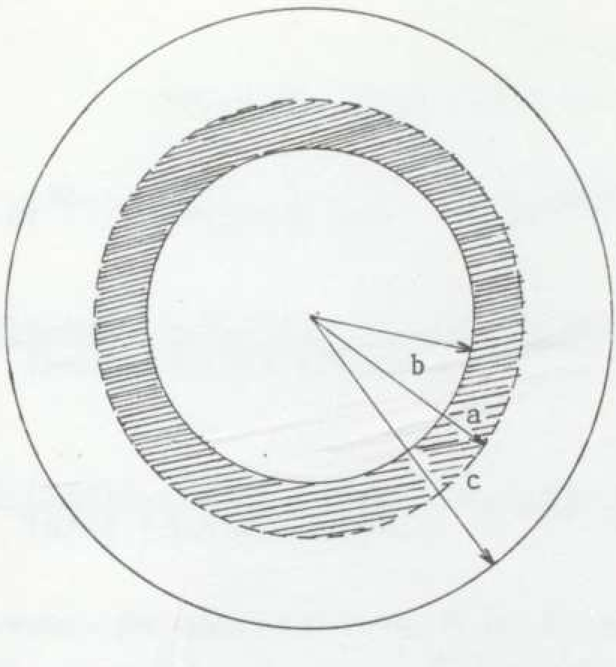
III.4. SİLİNDİRİK BORUNUN THERMAL İNCLUSİON İÇERMESİ HALİ

Silindirik boru halinde sınır şartları

$$\left|\,\sigma_{rr}' + \sigma_{rr}''\,\right|_{r=b} = 0 \qquad \text{(III.4.1)}$$

$$\left|\,\sigma_{rr}' + \sigma_{rr}''\,\right|_{r=c} = 0 \qquad \text{(III.4.2)}$$

şeklinde verilir.



(III.2.3), (III.1.7) ve (III.4.1)'den

$$\Big| \mu A r^{\alpha_1-1}\{\alpha_1(m+2)+m\} + \mu B r^{-\alpha_2-1}\{-\alpha_2(m+2)+m\}$$

$$+ \frac{2(m+1)(3m+2)(1+\alpha_1)\alpha_t \mu T_o}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+n+1)} +$$

$$+ \frac{(3m+2)(1-\alpha_2)\alpha_t \mu T_o}{(\alpha_1+2)(-\alpha_2+n+1)}\{(\alpha_2-n)\, a^{-\alpha_2+n+1}\, r^{\alpha_2-n-1} - 1\} +$$

$$+ \frac{m(3m+2)(1-\alpha_2)\alpha_t \mu T_o}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)(-\alpha_2+n+1)}\{a^{-\alpha_2+n+1}\, r^{\alpha_2-n-1} - 1\}$$

$$- (3m+2)\alpha_t \mu T_o \Big|_{r=b} = 0$$

yazılır.

(III.2.3), (III.1.10) ve (III.4.2)'den ise

$$\Big| \mu A r^{\alpha 1-1} \{(\alpha 1(m+2)+m\} + \mu B r^{-\alpha 2-1}\{-\alpha 2(m+2)+m\}$$

$$+ \frac{m(3m+2)(1+\alpha 1)(1-\alpha 1-n)\alpha_t \mu To}{(m+2)(\alpha 1+\alpha 2)(\alpha 1+n+1)} \left(\frac{a}{r}\right)^{\alpha 1+n+1} +$$

$$- \frac{2(3m+2)(1+\alpha 1)(\alpha 1+n)\alpha t \mu To}{(m+2)(\alpha 1+\alpha 2)(\alpha 1+n+1)} \left(\frac{a}{r}\right)^{\alpha 1+n+1} \Big|_{r=c} = 0$$

bulunur. Bu bağıntılardan A ve B sabitleri tayin edilebilir. Özel olarak $m = 0$, $n = -\frac{3}{2}$ alınması halinde gerilmeler

$$\sigma_{rr} = \frac{4}{5} \frac{\mu \alpha_t To}{(b^{5/2}-c^{5/2})} \left(a^{3/2} - \frac{b^{5/2}}{2a}\right)\left(r - \frac{b^{5/2}}{r^{3/2}}\right) +$$

$$+ \frac{2}{5} \mu\alpha_t To \frac{1}{a} \left(r - \frac{b^{5/2}}{r^{3/2}}\right) \qquad b < r < a$$

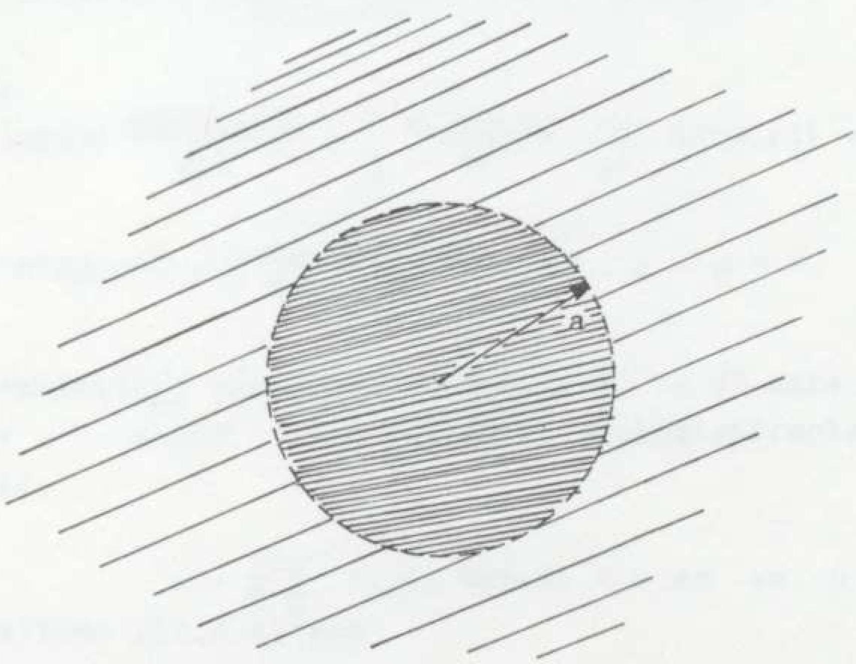
$$\sigma_{rr} = \frac{4}{5} \mu\alpha_t To \frac{1}{(b^{5/2}-c^{5/2})}\left(a^{3/2} - \frac{b^{5/2}}{2a}\right)\left(r - \frac{c^{5/2}}{r^{3/2}}\right) \quad a < r < c$$

şeklinde hesaplanır.

BÖLÜM IV

IV.1. KÜRESEL THERMAL İNCLUSİON İÇEREN SONSUZ UZAY HALİ

Heterogen ve izotrop bir ortamın sıcaklık alanı verilmiş "a" yarıçaplı küresel bir bölge içermesi halinde, gerek küre gerekse küre dışındaki sonsuz ortamda meydana gelecek yer değiştirme ve gerilmeler ne olur problemi incelenmiş olsun.



Sıcaklıktan dolayı, Maysel formülünün uygulanması halinde (II.5.4)'den

$$(\lambda+2\mu)\left\{\frac{d^2U(\rho,r)}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{dU(\rho,r)}{d\rho}-\frac{2}{\rho^2}U(\rho,r)\right\}+\frac{d\lambda}{d\rho}\left\{\frac{dU(\rho,r)}{d\rho}+\frac{2}{\rho}U(\rho,r)\right\}+2\frac{d\mu}{d\rho}\frac{dU(\rho,r)}{d\rho}+\delta(\rho-r)=0 \qquad \text{(IV.1.1)}$$

yazılabilir.

Ayrıca $U(\rho,r)$ yer değiştirmesinin $\rho = 0$'da sonlu ve sonsuzda sıfır olması gerekir.

(IV.1.1)'den $o<\rho<r$ ve $r<\rho<\infty$ bölgeleri için sıra ile

$$(\lambda+2\mu)\left\{\frac{d^2U'(\rho,r)}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{dU'(\rho,r)}{d\rho}-\frac{2}{\rho^2}U'(\rho,r)\right\}+\frac{d\lambda}{d\rho}\left\{\frac{dU'(\rho,r)}{d\rho}+\frac{2}{\rho}U'(\rho,r)\right\}+2\frac{d\mu}{d\rho}\frac{dU'(\rho,r)}{d\rho}=0 \qquad 0<\rho<r \qquad \text{(IV.1.2a)}$$

ve

$$(\lambda+2\mu)\left\{\frac{d2U''(\rho,r)}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{dU''(\rho,r)}{d\rho}-\frac{2}{\rho^2}U''(\rho,r)\right\}+\frac{d\lambda}{d\rho}\left\{\frac{dU''(\rho,r)}{d\rho}+\frac{2}{\rho}U''(\rho,r)\right\}+2\frac{d\mu}{d\rho}\frac{dU''(\rho,r)}{d\rho}=0\,, \qquad r<\rho<\infty \qquad \text{(IV.1.2b)}$$

bağıntıları yazılabilir. Burada U' ve U" sıra ile $o<\rho<r$ ve $r<\rho<\infty$ bölgelerindeki yerdeğiştirmeleri göstermektedir.

$m=\frac{2\nu}{1-2\nu}$ olmak üzere, $\lambda=m\mu$ ve $\mu=\mu_o\rho^n$ olması halinde (II.5.4)'den

$$\frac{d^2U}{d\rho^2}+(n+2)\frac{1}{\rho}\frac{dU}{d\rho}-2\left(1-\frac{mn}{m+2}\right)\frac{1}{\rho^2}U=0 \qquad \text{(IV.1.3)}$$

elde edilir.

IV.1.3. Euler diferansiyel denkleminin karakteristik kökleri,

$$\alpha_{1,2}=\frac{-(n+1)\pm\sqrt{(n+1)^2+8\left(1-\frac{mn}{m+2}\right)}}{2}$$

olarak bulunur.

$m + 2 - mn > o$ şartının gerçeklenmesi halinde bu köklerden biri pozitif, diğeri negatif olur.

Buna göre IV.1.3 diferansiyel denkleminin çözümü

$$U = A\rho^{\alpha 1} + B\rho^{-\alpha 2}, \quad (\alpha_1 > 0 \text{ ve } \alpha_2 > 0)$$

şeklinde verilir.

Bu çözüme göre $o < \rho < r$ ve $r < \rho < \infty$ bölgelerindeki yerdeğiştirmeler sırayla $U' = A\rho^{\alpha 1}$ ve $U'' = B\rho^{-\alpha 2}$ şeklinde alınabilir. Ayrıca $U'(o) = 0$, $U''(\infty) = 0$ olması gerekir.

A ve B sabitlerini bulmada biri yer değiştirmelerle diğeri ise gerilmelerle ilgili

$$\left| U' - U'' \right|_{= r} = 0 \qquad \text{(IV.1.4a)}$$

$$\left| \Sigma'_{\rho\rho} - \Sigma''_{\rho\rho} \right|_{\rho = r} = 1 \qquad \text{(IV.1.4b)}$$

bağıntıları kullanılabilir.

Bu bağıntıların ilki $\rho = r$'de yerdeğiştirmelerin sürekli olduğunu ikincisi ise radyal gerilmelerin süreksiz olduğunu göstermektedir.

(IV.1.4a)'dan

$$\left| A\rho^{\alpha_1} - B\rho^{-\alpha_2} \right|_{\rho = r} = 0$$

yazılabilir. Buradan

$$B = Ar^{\alpha_1 + \alpha_2}$$

bulunur.

(II.6.8), (II.6.10) ve (II.6.11) bağıntılarından

$$\Sigma'_{\rho\rho} = 2\,\mu\alpha_1 A\,\rho^{\alpha_1 - 1} + \lambda\,(\alpha_1 A\rho^{\alpha_1 - 1} + 2\rho^{-1} A\rho^{\alpha_1})$$

ve

$$\Sigma''_{\rho\rho} = 2\,\mu\,(-\,\alpha_2 B\rho^{-\alpha_2 - 1}) + \lambda\,(-\,\alpha_2 B\rho^{-\alpha_2 - 1} + 2\rho^{-1} B\rho^{-\alpha_2})$$

yazılabilir.

Bu bağıntıların (IV.1.4b)'de yerleştirilmesi halinde,

$$A = \left| \frac{r^{1-\alpha_1}}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\lambda + 2\mu)} \right|_{\rho = r}$$

bulunur.

Bu bağıntıda $\lambda = m\mu$ ve $\mu = \mu_o \rho^n$ değerleri yerleştirildiğinde

$$A = \frac{r^{1-\alpha_1 - n}}{\mu_o(m+2)(\alpha_1 + \alpha_2)} \;, \; B = \frac{r^{1+\alpha_2 - n}}{\mu_o(m + 2)(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

elde edilir.

Bu değerlere göre yerdeğiştirmeler

$$U' = \frac{r^{1-\alpha_1-n}}{\mu_o (m+2)(\alpha_1+\alpha_2)} \rho^{\alpha_1}$$

$$U'' = \frac{r^{1+\alpha_2-n}}{\mu_o (m+2)(\alpha_1+\alpha_2)} \rho^{-\alpha_2}$$

şeklinde hesaplanır.

(II.6.11)'e göre dilatasyon ifadeleri

$$\Theta'(\rho,r) = (2+\alpha_1) A\rho^{\alpha_1-1} \qquad o < \rho < r \qquad \text{(IV.1.5a)}$$

$$\Theta''(\rho,r) = (2-\alpha_2) B\rho^{-\alpha_2-1} \qquad r < \rho < \infty \qquad \text{(IV.1.5b)}$$

şeklinde yazılır.

$\lambda = m\mu$, $\mu = \mu_o \rho^n$ alındığına göre, (IV.1.5a), (IV.1.5b) ve (II.6.5)'den

$$U'_r(r) = \frac{(3m+2)(2+\alpha_1)\mu_o \alpha_t}{r^2} A\int_o^r T(\rho)\rho^{\alpha_1+n+1} d\rho,$$

$o < \rho < r$ ve

$$U''_r(r) = (3m+2)(2-\alpha_2)\mu_o \alpha_t r^{\alpha_1+\alpha_2-2} A\int_r^\infty T(\rho)\rho^{-\alpha_2+n+1} d\rho$$

$r < \rho < \infty$ elde edilir.

$U_r(r) = U'_r(r) + U''_r(r)$ toplam yerdeğiştirmesi

$$U_r(r) = \frac{(3m+2)(2+\alpha_1)\alpha_t}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)} r^{-(\alpha_1+n+1)} \int_o^r T(\rho)\rho^{\alpha_1+n+1} d\rho$$

$$+\frac{(3m+2)\,(2-\alpha_2)\,\alpha_t}{(m+2)\,(\alpha_1+\alpha_2)}\, r^{-(-\alpha_2+n+1)} \int_r^{\infty} T(\rho)\rho^{-\alpha_2+n+1}\, d\rho$$

şeklinde bulunur.

"a" yarıçaplı kürenin dışında sıcaklık alanı bulunmaması halinde ise

$$Ur(r) = \frac{(3m+2)\,(2+\alpha_1)\,\alpha_t}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)}\, r^{-(\alpha_1+n+1)} \int_0^r T(\rho)\rho^{\alpha_1+n+1} d$$

$$+\frac{3m+2)(2-\alpha_2)\,\alpha_t}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)}\, r^{-(\alpha_1+n+1)} \int_r^a T\,(\rho)\rho^{-\alpha_2+n+1} d\rho \qquad o < r < a$$

(IV.1.6)

ve

$$Ur(r) = \frac{(3m+2)(2+\alpha_1)\,\alpha_t}{(m+2)\,(\alpha_1+\alpha_2)}\, r^{-(\alpha_1+n+1)} \int_0^a T(\rho)\rho^{-\alpha_1+n+1} d\rho$$

$a < r < \infty$

(IV.1.7)

olur.

Sıcaklık alanının $T(r) = To\ \eta\ (a-r)$ şeklinde verilmesi halinde (IV.1.6) ve (IV.1.7)'den sıra ile

$$Ur(r) = \frac{(3m+2)\,(2+\alpha_1)\,t}{(m+2)\,(\alpha_1+\alpha_2)}\, To.r +$$

$$+\frac{(3m+2)\,(2-\alpha_2)\,\alpha_t\, To}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)(n+2-\alpha_2)}\,\left(\frac{a^{n+2-\alpha_2}}{r^{n+1-\alpha_2}} - r\right) \qquad o < r < a$$

$$Ur(r) = \frac{(3m+2)\,(2+\alpha_1)\,\alpha_t\, a^{\alpha_1+n+2}}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+n+2)}\, To\ r^{-(\alpha_1+n+1)}$$

elde edilir.

Bu yerdeğiştirme ifadelerine göre (II,6,7), (II.6.8) (II.6.9), (II.6.10) ve (II.6.11)'den σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\psi\psi}$ gerilmeleri hesaplanabilir.

$o < r < a$ ve $a < r < \infty$ bölgeleri için sırayla.

$$\sigma_{rr} = \frac{(3m+2)^2\ (2+\alpha_1)\ \alpha_t\ \mu\ To}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+n+2)} -$$

$$- \frac{m(3m+2)\ (2-\alpha_2)\ \alpha_t\ \mu To}{(m+2)\ (\alpha_1+\alpha_2)\ (-\alpha_2+n+2)}\{(-\alpha_2+n+1)\ (\frac{a}{r})^{-\alpha_2+n+2} - 1\ \}+$$

$$+ \frac{2(m+1)\ (3m+2)\ (2-\alpha_2)\ \alpha_t\ \mu\ To}{(m+2)\ (\alpha_1+\alpha_2)\ \ (-\alpha_2+n+2)}\{(-\alpha_2+n+1)\ (\frac{a}{r})^{-\alpha_2+n+2} - 1\}$$

$$- (3m+2)\ \alpha_t\ \mu\ To \qquad o < r < a \qquad (IV.1.8)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\psi\psi} = \frac{(3m+2)^2(2+\alpha_1)\ \alpha_t\ \mu\ To}{(m+2)\ (\alpha_1+\alpha_2)\ (\alpha_1+n+2)} +$$

$$- \frac{m(3m+2)\ (2-\alpha_2)\ \ \alpha_t\ \mu To}{(m+2)\ (\alpha_1+\alpha_2)(-\alpha_2+n+2)}\{(-\alpha_2+n+1)\ (\frac{a}{r})^{-\alpha_2+n+2} + 1\ \} +$$

$$+ \frac{2(m+1)\ (3m+2)\ (2-\alpha_2)\ \alpha_t\ \mu\ To}{(m+2)\ (\alpha_1+\alpha\ )\ (-\alpha_2+n+2)}\{(\frac{a}{r})^{-\alpha_2+n+2} - 1\ \} -$$

$$- (3m+2)\ \alpha_t\ \mu To \qquad o< r < a \qquad (IV.1.9)$$

ve

$$\sigma_{rr} = \frac{-(3m+2)(2+\alpha_1)(\alpha_1+n+1)a^{\alpha_1+n+2}\ \alpha_t \mu\ To}{(\alpha_1+\alpha_2)\ (\alpha_1+n+2)}\ r^{-(\alpha_1+n+2)}$$

$$+ \frac{2m(3m+2)\ (2+\alpha_1)\ a^{\alpha_1+n+2}\ \alpha_t\ \mu\ To}{(m+2)\ (\alpha_1+\alpha_2)\ (\alpha_1+n+2)}\ r^{-(\alpha_1+n+2)}, a < r \leq \infty \quad (IV.1.10)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\psi\psi} = \frac{2(m+1)(3m+2)(2+\alpha_1)a^{\alpha_1+n+2}\,\alpha_t\,\mu\,T_o}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+n+2)}\, r^{-(\alpha_1+n+2)}$$

$$- \frac{m(3m+2)\,(2+\alpha_1)(\alpha_1+n+1)\,a^{\alpha_1+n+2}\,\alpha_t\,\mu\,T_o}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)\,(\alpha_1+n+2)}\, r^{-(\alpha_1+n+2)}$$

$$a < r < \infty \qquad (IV.1.11)$$

elde edilir.

IV.2. THERMAL İNCLUSİON VE KÜRESEL BOŞLUK İÇEREN SONSUZ UZAY HALİ

Şimdi sonsuz uzay halinin küresel bir boşluk içermesi hali incelenmek istensin. Bu durumda boşluk civarında gerilmelerin sıfır olması gerekir. Bu sınır şartı ise (IV.1.8)'de elde edilen termoelastik çözüme klasik elastik çözüm süperpoze edilerek sağlanabilir.

σ_{rr}' ile elastik, σ_{rr}'' ile termoelastik gerilmeler gösterildiğinde, sınır şartı olarak

$$\left| \sigma_{rr}' + \sigma_{rr}'' \right|_{r=b} = 0 \qquad \text{(IV.2.1)}$$

yazılır. $\lambda = m\mu$ ve $\mu = \mu_o r^n$ alındığına göre (II.5.2)'den bulunan yerdeğiştirmeler $\sigma_{rr}' = 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda e$ bağıntısına yerleştirildiğinde

$$\sigma_{rr}' = \mu A r^{\alpha_1 - 1}\{\alpha_1(m+2)+2m\} + \mu B r^{-\alpha_2 - 1}\{-\alpha_2(m+2) + 2m\} \qquad \text{(IV.2.2)}$$

elde edilir.

(IV.2.1)'de (IV.2.2)'den alınan $\sigma_{rr}' = \mu B r^{-\alpha_2 - 1}\{-\alpha_2(m+2) + 2m\}$ terimi ve (IV.1.8)'den alınan σ_{rr}'' değeri yerleştirilirse

$$B = \left\{\frac{(3m+2)^2(2+\alpha_1)\alpha_t\, T_o}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+n+2)} - \frac{(3m+2)^2(2-\alpha_2)\,\alpha_t\, T_o}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)(n+2-\alpha_2)} - (3m+2)\,\alpha_t\, T_o\right\} \frac{b^{\alpha_2+1}}{\{\alpha_2(m+2)-2m\}} +$$

$$+ \frac{(3m+2)\,(2-\alpha_2)\,\alpha_t\, T_o\,(n+1-\alpha_2)}{(\alpha_1+\alpha_2)(n+2-\alpha_2)\{\alpha_2(m+2)-2m\}} \cdot \frac{a^{n+2-\alpha_2}}{b^{n+1-2\alpha_2}}$$

bulunur.

Buna göre elastik haldeki gerilme

$$\sigma_{rr}' = \Big\{ \frac{(3m+2)^2(2-\alpha_2)\ \alpha_t\,\mu\,To}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)(n+2-\alpha_2)} - \frac{(3m+2)^2(2+\alpha_1)\ \alpha_t\,\mu\,To}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)\ (\alpha_1+n+2)} +$$

$$+ (3m+2)\ \alpha_t\ \mu\ To \Big\} \ (\frac{b}{r})^{\alpha_2+1} -$$

$$- \frac{(3m+2)\ (2-\alpha_2)\ \alpha_t\,\mu\,To}{(\alpha_1+\alpha_2)\ (n+2-\alpha_2)} (n+1-\alpha_2) \frac{a^{n+2-\alpha_2}}{b^{n+1-2\alpha_2}} r^{-\alpha_2-1} \qquad (IV.2.3)$$

şeklinde elde edilir.

(IV.2.3) ve (IV.1.8)'den toplam gerilme

$$\sigma_{rr} = \frac{(3m+2)^2(2+\alpha_1)\ \alpha_t\,\mu\ To}{(m+2)\ (\alpha_1+\alpha_2)\ (\alpha_1+n+2)} \{ 1-\ (\frac{b}{r})^{\alpha_2+1} \}$$

$$+ \frac{(3m+2)^2(2-\alpha_2)\ \ \alpha_t\,\mu To}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)(n+2-\alpha_2)} \{ (\frac{b}{r})^{\alpha_2+1} - 1 \}$$

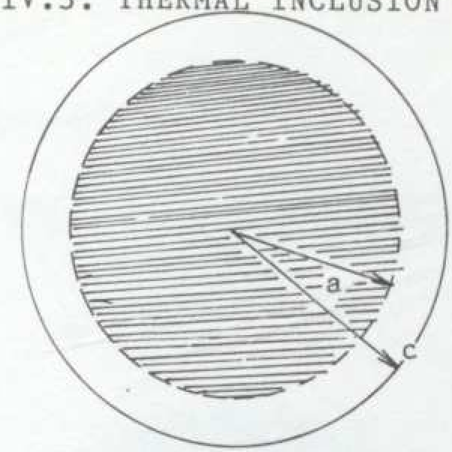
$$+ (3m+2)\ \ \alpha_t\,\mu\ To \{ (\frac{b}{r})^{\alpha_2+1} - 1 \}$$

$$+ \frac{(3m+2)\ (2-\alpha_2)\ \alpha_t\,\mu\ To}{(\alpha_1+\alpha_2)\ (n+2-\alpha_2)} (n+1-\alpha_2) a^{n+2-\alpha_2} \{ r^{-(n+2-\alpha_2)} - \frac{r^{-(\alpha_2+1)}}{b^{n+1-2\alpha_2}} \}$$

$$b < r < a$$

olarak hesaplanır.

IV.3. THERMAL İNCLUSİON İÇEREN DOLU KÜRE HALİ



σ_{rr}' ile elastik, σ_{rr}'' ile termoelastik gerilmeler gösterildiğinde sınır şartı olarak

$$\left. \left| \sigma_{rr}' + \sigma_{rr}'' \right| \right._{r = c} = 0 \qquad \text{(IV.3.1)}$$

yazılır. (IV.3.1)'de $\sigma_{rr}' = \mu A r^{\alpha_1 - 1} \{ \alpha_1(m+2)+2m \}$ ve (IV.1.10) değerleri yerleştirildiğinde

$$A = \frac{(3m+2)(2+\alpha_1)\, a^{\alpha_1+n+2} \alpha_t \; To}{(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+n+2)\{\alpha_1(m+2)+2m\}} \left\{ (\alpha_1+n+1) - \frac{2m}{m+2} \right\} c^{-(2\alpha_1+n+1)}$$

elde edilir. Buna göre

$$\sigma_{rr}' = \frac{(3m+2)(2+\alpha_1)\, a^{\alpha_1+n+2} \alpha_t \mu \; To}{(\alpha_1+\alpha_2)\;(\alpha_1+n+2)} \left\{ (\alpha_1+n+1) - \frac{2m}{m+2} \right\} c^{-2\alpha_1+n+1)} \,.\, r^{\alpha_1 -1} \qquad \text{(IV.3.2)}$$

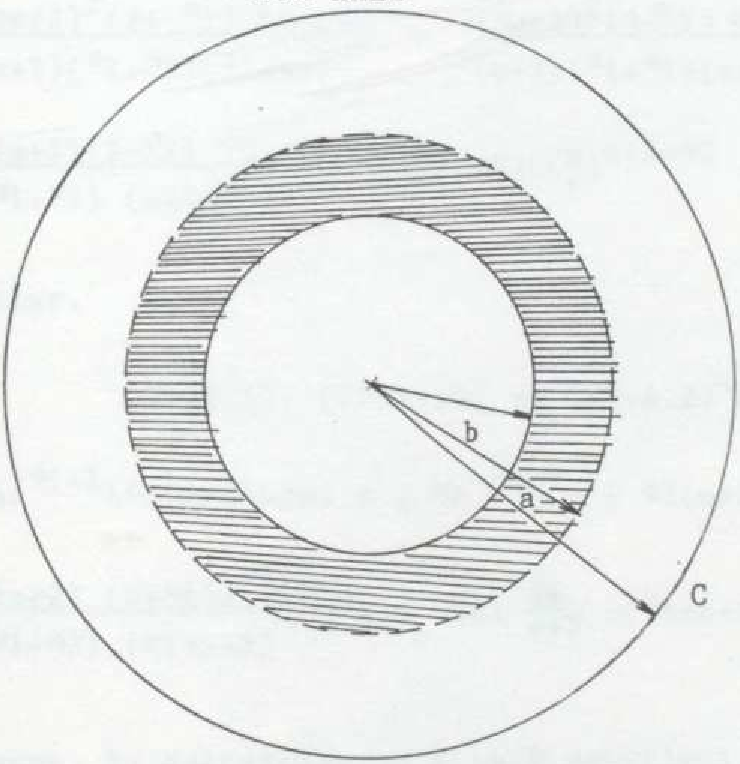
olur. (IV.3.2), (IV.1.10)'dan toplam gerilme

$$\sigma_{rr} = \frac{(3m+2)\;(2+\alpha_1)\, a^{\alpha_1+n+2} \alpha_t \mu \; To}{(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+n+2)} \{ \; (\alpha_1+n+1) \qquad -$$

$$- \frac{2m}{m+2} \} . \{ c^{-(2\alpha_1+n+1)} \, r^{\alpha_1-1} - r^{-(\alpha_1+n+2)} \} \quad a < r < c$$

şeklinde bulunur.

IV.4. THERMAL İNCLUSİON İÇEREN KALIN KÜRESEL KABUK HALİ



Kalın küresel kabuk halinde sınır şartları

$$\left| \sigma_{rr}' + \sigma_{rr}'' \right|_{r=b} = 0 \qquad \text{(IV.4.1)}$$

$$\left| \sigma_{rr}' + \sigma_{rr}'' \right|_{r=c} = 0 \qquad \text{(IV.4.2)}$$

şeklinde verilir.

(IV.2.2), (IV.1.8) ve (IV.4.1)'den

$$\left| \mu A r^{\alpha_1-1}\{\alpha_1(m+2)+2m\} + \mu B r^{-\alpha_2-1}\{-\alpha_2(m+2)+2m\} \right.$$

$$+ \frac{(3m+2)^2(2+\alpha_1)\,\alpha_t\,\mu\,T_o}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+n+2)} - \frac{(3m+2)^2(2-\alpha_2)\,\alpha_t\,\mu\,T_o}{(m+2)(\alpha_1+\alpha_2)(n+2-\alpha_2)}$$

$$+ \frac{(3m+2)(2-\alpha_2)\,\alpha_t\,\mu\,T_o}{(\alpha_1+\alpha_2)\,(n+2-\alpha_2)}\{(n+1-\alpha_2)\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2-\alpha_2} - (3m+2)\mu\,\alpha_t\,T_o \left.\right|_{r=b} = 0$$

yazılır.

(IV.2.2), (IV.1.10) ve (IV.4.2)'den ise

$$\left| \mu A r^{\alpha_1-1}\{\alpha_1(m+2)+2m\} + \mu B r^{-\alpha_2-1}\{-\alpha_2(m+2)+2m\} + \right.$$

$$+ \frac{(3m+2)\,(2+\alpha_1)a^{\alpha_1+n+2}}{(\alpha_1+\alpha_2)\,(\alpha_1+n+2)}\mu\,\alpha_t\,T_o\{\frac{2m}{m+2} - (\alpha_1+n+1)\}\,r^{-(\alpha_1+n+2)} \left.\right|_{r=c} = 0$$

bulunur. Bu bağıntılardan A ve B sabitleri tayin edilebilir. Özel olarak $m = 0$, $n = -2$ alınması halinde gerilmeler

$$\sigma_{rr} = \frac{4}{3}\,\frac{\mu\,\alpha_t\,T_o}{(c^3-b^3)}\left(\frac{b^3}{a}+a^2\right)\left(r-\frac{b^3}{r^2}\right) + \frac{4}{3}\,\frac{\mu\alpha_t\,T_o}{a}\,.$$

$$.\left(r-\frac{b^3}{r^2}\right) \qquad b < r < a$$

$$\sigma_{rr} = \frac{4}{3}\,\frac{\mu\,\alpha_t\,T_o}{(c^3-b^3)}\left(\frac{b^3}{a}+a^2\right)\left(r-\frac{c^3}{r^2}\right) \qquad a < r < c$$

şeklinde hesaplanır.

ÜÇÜNCÜ KISIM

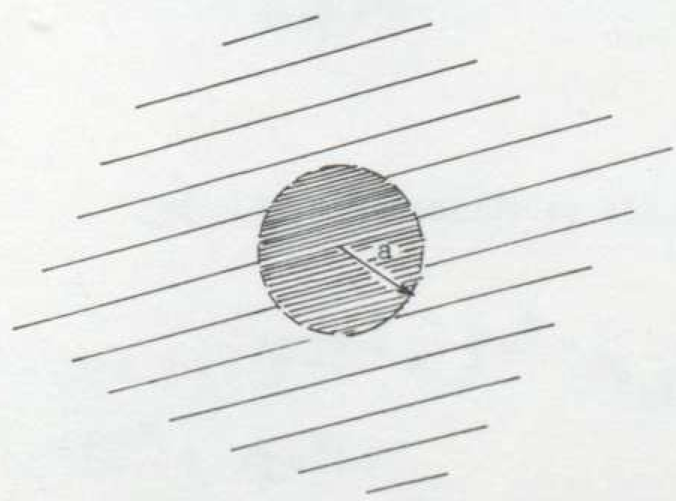
KAYMA MODÜLÜNÜN $\mu = \mu_0 e^{n\rho^k}$ OLMASI HALİ

BÖLÜM V

SİLİNDİRİK KOORDİNATLAR

V.1. SİLİNDİRİK THERMAL İNCLUSİON İÇEREN SONSUZ UZAY HALİ

Heterogen ve izotrop bir ortamın sıcaklık alanı verilmiş "a" yarıçaplı sonsuz bir silindirik bölge içermesi halinde, gerek silindir gerekse silindir dışındaki sonsuz ortamda meydana gelecek yerdeğiştirmeler ve gerilmeler ne olur problemi incelenmiş olsun.



$m = \dfrac{2\nu}{1-2\nu}$ olmak üzere, $\lambda = m\mu$ ve $\mu = \mu_0 e^{n\rho^k}$ olması halinde (II.5.5)'den

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} + \left\{\frac{1}{\rho} + nk\,\rho^{k-1}\right\}\frac{dU}{d\rho} + \left\{-\frac{1}{\rho^2} + nk\,\frac{m}{m+2}\,\rho^{k-2}\right\}U = 0, \qquad \text{(V.1.1)}$$

elde edilir.

$m = \frac{2k}{2-k}$, $k = \frac{1}{b+1}$, $b = 0,1,2,3.....$için (V.1.1) diferansiyel denkleminin çözümü

$$U = Ae^{-\frac{n}{2}\rho^k} I_\nu\left(\frac{n}{2}\rho^k\right) + B\, e^{-\frac{n}{2}\rho^k} K_\nu\left(\frac{n}{2}\rho^k\right)$$

şeklinde verilir.

Bu çözüme göre $o < \rho < r$ ve $r < \rho < \infty$ bölgelerindeki yer değiştirmeler sıra ile $U' = A\, e^{-\frac{n}{2}\rho^k} I_\nu(\frac{n}{2}\rho^k)$ ve $U'' = Be^{-\frac{n}{2}\rho^k} K_\nu(\frac{n}{2}\rho^k)$ şeklinde alınabilir. Ayrıca başlangıç noktasında ve sonsuzda sıra ile $U'(o) = o$, $U''(\infty) = 0$ olması gerekir.

(III.1.4a)'dan

$$A = B\,\frac{K_\nu(\frac{n}{2}r^k)}{I_\nu(\frac{n}{2}r^k)}$$

bulunur.

(II.6.12), (II.6.15) ve (II.6.16) bağıntılarından

$$\Sigma'_{\rho\rho} = A\{\,(\lambda + 2\mu)\frac{nk}{2}\rho^{k-1}e^{-\frac{n}{2}\rho^k}\{I_{\nu-1}(\frac{n}{2}\rho^k) - I_\nu(\frac{n}{2}\rho^k)\}$$
$$- 2\mu\rho^{-1}e^{-\frac{n}{2}\rho^k} I_\nu(\frac{n}{2}\rho^k)\}$$

ve

$$\Sigma''_{\rho\rho} = -B\{\,(\lambda+2\mu)\frac{nk}{2}\rho^{k-1}e^{-\frac{n}{2}\rho^k}|K_\nu(\frac{n}{2}\rho^k) - K_{\nu-1}($$
$$(\frac{n}{2}\rho^k)| - 2\mu\rho^{-1}e^{-\frac{n}{2}\rho^k}K_\nu(\frac{n}{2}\rho^k)\}$$

yazılabilir. Bu bağıntıların (III.1.4b)'de yerleştirilmesi halinde

$$B = \frac{I\nu\, e^{-\frac{n}{2} r^k}}{(m+2)\,\frac{nk}{2}\, r^{k-1}\{K_\nu(\frac{n}{2} r^k)\, I_{\nu-1}(\frac{n}{2} r^k) + K_{\nu-1}(\frac{n}{2} r^k)\, I_\nu(\frac{n}{2} r^k)\}}$$

ve

$$A = \frac{K_\nu(\frac{n}{2} r^k)\, e^{-\frac{n}{2} r^k}}{(m+2)\frac{nk}{2} r^{k-1}\{K_\nu(\frac{n}{2} r^k) I_{\nu-1}(\frac{n}{2} r^k) + K_{\nu-1}(\frac{n}{2} r^k)\, I_\nu\, (\frac{n}{2} r^k)\}}$$

elde edilir.

(II.6.16)'ya göre dilatasyon ifadeleri sıra ile,

$$\Theta\,'(\rho,r) = A\,\frac{nk}{2}\rho^{\,k-1}\,\{I_{\nu-1}(\tfrac{n}{2}\rho^{\,k}) - I_\nu(\tfrac{n}{2}\rho^{\,k})\},\quad o < \rho < r \qquad (V.1.2a)$$

ve

$$\Theta\,''(\rho,r) = -\,B\,\frac{nk}{2}\rho^{\,k-1}\{\,K_{\nu-1}(\tfrac{n}{2}\rho^{\,k}) + K_\nu(\tfrac{n}{2}\rho^{\,k})\}\ ,\ r<\rho<\infty \qquad (V.1.2b)$$

şeklinde yazılabilir.

$\lambda = m\mu\ ,\ \mu = \mu_o\, e^{n\rho^k}$ alındığına göre, (V.1.2a), (V.1.2b) ve (II.6.7)'den, sıra ile

$$U'_r(r) = \frac{2\,\mu o\ \alpha t\ nk(k+1)}{r(2-k)}\, A \int_o^r T\ \ e^{\frac{n}{2}\rho^k}\ \rho^k\ \{\,I_{\nu-1}\ (\tfrac{n}{2}\,\rho^k) -$$

$$- I_\nu\,(\tfrac{n}{2}\rho^{\,k})\}\,d\rho \qquad\qquad o < \rho < \ r$$

ve

$$U''_r(r) = \frac{-2\mu o^{\alpha} t\; nk(k+1)}{r\,(2-k)}\, B \int_r^a T\, e^{\frac{n}{2}\rho^k} \rho^k \{ K_{\nu-1}(\tfrac{n}{2}\rho^k) +$$

$$+ K_\nu (\tfrac{n}{2}\rho^k) \}\, d\rho \qquad r < \rho < \infty$$

elde edilir. Buradan

$Ur(r) = Ur'(r) + U''_r(r)$ toplam yerdeğiştirmesi

$$Ur(r) = \frac{2\mu o^{\alpha} t\; nk(k+1)}{r(2-k)}\, A \int_o^r T\, e^{\frac{n}{2}\rho^k} \rho^k \{ I_{\nu-1}(\tfrac{n}{2}\rho^k) -$$

$$- I_\nu (\tfrac{n}{2}\rho^k) \}\, d\rho - \frac{2\mu o^{\alpha} t\; nk\,(k+1)}{r(2-k)}\, B \int_r^\infty T\, e^{\frac{n}{2}\rho^k} \rho^k \{ K_{\nu-1}(\tfrac{n}{2}\rho^k) +$$

$$+ K_\nu (\tfrac{n}{2}\rho^k) \}\, d\rho$$

şeklinde hesaplanır.

"a" yarıçaplı silindirin dışında sıcaklık alanı bulunmadığından, $o < r < a$ ve $a < r < \infty$ bölgeleri için, sıra ile,

$$Ur(r) = \frac{2\mu o^{\alpha} t\; nk\,(k+1)}{r(2-k)}\, A \int_o^r T\, e^{\frac{n}{2}\rho^k} \rho^k \{ I_{\nu-1}(\tfrac{n}{2}\rho^k) -$$

$$- I_\nu (\tfrac{n}{2}\rho^k) \}\, d\rho - \frac{2\mu o^{\alpha} t\; nk\,(k+1)}{r(2-k)}\, B \int_r^a T\, e^{\frac{n}{2}\rho^k} \rho^k \{ K_{\nu-1}(\tfrac{n}{2}\rho^k) +$$

$$+ K_\nu (\tfrac{n}{2}\rho^k) \}\, d\rho \qquad o < r < a \qquad \text{(V.1.3)}$$

$$Ur(r) = \frac{2\mu o\, \alpha_t\, nk(k+1)}{r(2-k)} A \int_o^a T\, e^{\frac{n}{2}\rho^k} \rho^k \{ I_{\nu-1}(\tfrac{n}{2}\rho^k) - I_\nu(\tfrac{n}{2}\rho^k) \} d\rho$$

$$a < r < \infty \qquad (V.1.4)$$

yerdeğiştirmeleri bulunur.

Sıcaklık alanının $T(r) = To\ \eta\,(a-r)$ şeklinde verilmesi halinde (V.1.3) ve (V.1.4)'den sıra ile

$$Ur(r) = \frac{2\mu o\, \alpha_t\, To\, nk(k+1)}{r\,(2-k)} A \int_o^r e^{\frac{n}{2}\rho^k} \rho^k \{ I_{\nu-1}(\tfrac{n}{2}\rho^k) -$$

$$- I_\nu(\tfrac{n}{2}\rho^k) \}\, d\rho - \frac{2\mu o\, \alpha_t\, To\, nk\,(k+1)}{r\,(2-k)} B \int_o^a e^{\frac{n}{2}\rho^k} \rho^k \{ K_{\nu-1}(\tfrac{n}{2}\rho^k) -$$

$$+ K_\nu(\tfrac{n}{2}\rho^k) \}\, d\rho \qquad o < r < a$$

$$Ur(r) = \frac{2\mu o\, \alpha_t\, To\, nk(k+1)}{r\,(2-k)} A \int_o^a e^{\frac{n}{2}\rho^k} \rho^k \{ I_{\nu-1}(\tfrac{n}{2}\rho^k) -$$

$$- I_\nu(\tfrac{n}{2}\rho^k) \} d\rho \qquad a < r < \infty$$

yerdeğiştirmeleri hesaplanır.

Bu yerdeğiştirme ifadelerine göre, (II.6.12), (II.6.13), (II.6.14), (II.6.15) ve (II.6.16)'dan σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} gerilmeleri hesaplanabilir.

$$G_1(r) = \int_o^r e^{\frac{n}{2}\rho^k} \rho^k \{ I_{\nu-1}(\tfrac{n}{2}\rho^k) - I_\nu(\tfrac{n}{2}\rho^k) \} d\rho$$

$$G_2(r) = \int_r^a e^{\frac{n}{2}\rho^k} \rho^k \{ K_{\nu-1}(\tfrac{n}{2}\rho^k) + K_\nu(\tfrac{n}{2}\rho^k) \} d\rho$$

$$G_1(a) = \int_o^a e^{\frac{n}{2}\rho^k} \rho^k \{ I_{\nu-1}\{(\frac{n}{2}\rho^k) - I_\nu (\frac{n}{2}\rho^k) \} d\rho$$

fonksiyon ifadelerinin tanımlanması halinde $o < r < a$ ve $a < r < \infty$ bölgeleri için sıra ile

$$\sigma_{rr} = 4\mu \frac{To\ \alpha_t\ \mu_o\ nk\ (k+1)}{r^2(2-k)} \{B(r)\ G_2(r) - A(r)\ G_1(r)\} +$$

$$+ 2\ (m+2)\ \mu \frac{To\ \alpha t\ \mu_o\ nk\ (k+1)}{r(2-k)} \{(A(r)\ G_1(r))' - (B(r)\ G_2(r))'\}$$

$$- (3m+2)\ \mu\ \alpha_t\ To \qquad o\ r\ a \qquad (V.1.5)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 4\ \mu \frac{To\ \alpha_t\ \mu_o\ nk\ (k+1)}{r^2(2-k)} \{ A(r)\ G_1(r) - B(r) G_2(r)\} +$$

$$+ 2\ m\ \mu \frac{To\ \alpha_t \mu_o\ nk\ (k+1)}{r\ (2-k)} \{A(r) G_1(r)' - (B(r)\ G_2(r))'\}$$

$$- (3m+2)\ \mu\ \alpha_t\ To \qquad o < r < a \qquad (V.1.6)$$

$$\sigma_{ZZ} = 2m\mu \frac{To\ \alpha t\ \mu_o\ nk\ (k+1)}{r\ (2-k)} \{(A(r)\ G_1(r))' -$$

$$- (B(r)\ G_2(r))'\} - (3m+2)\ \mu\alpha_t\ To, \quad o < r < a \qquad (V.1.7)$$

$$\sigma_{rr} = -4\mu \frac{To\ \alpha_t\ \mu_o\ nk\ (k+1)}{r^2(2-k)}\ A.\ G_1\ (a) +$$

$$+ 2(m+2) \frac{To\ \alpha_t \mu_o\ nk\ (k+1)}{r\ (2-k)} A'(r)\ G_1(a)\ a < r < \infty\ (V.1.8)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 4\mu \frac{To\ \alpha_t \mu_o\ nk\ (k+1)}{r^2\ (2-k)} A\ G_1\ (a) +$$

$$+ 2\, m\, \mu \frac{T_o\, \alpha_t\, \mu_o \quad nk\,(k+1)}{r\,(2-k)} A'(r)\, G_1(a), \quad a < r < \infty \qquad (V.1.9)$$

$$\sigma_{zz} = 2\, m\, \mu \frac{T_o\, \alpha_t\, \mu_o \quad nk\,(k+1)}{r(2-k)} A'(r)\, G_1(a) \quad a < r < \infty \qquad (V.1.10)$$

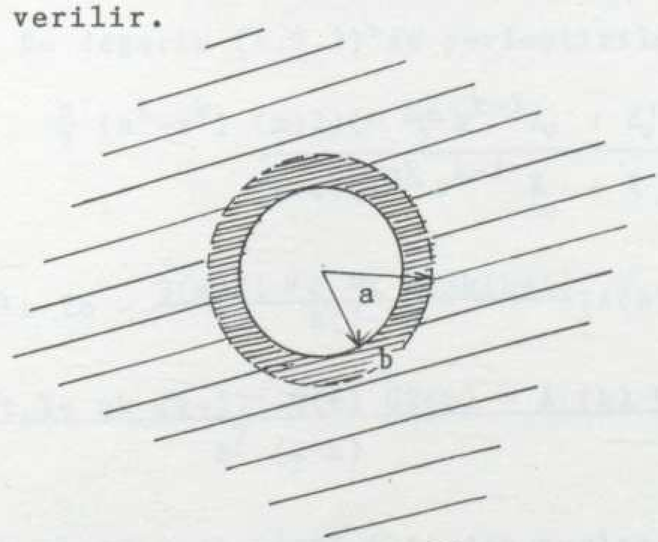
ifadeleri elde edilir.

V.2. THERMAL İNCLUSİON VE SİLİNDİRİK BOŞLUK İÇEREN SONSUZ UZAY HALİ

Sonsuz uzay halinin sıcaklık alanı verilmiş içi boş silindirik bir bölge içermesi halinde sınır şartı

$$\left| \sigma_{rr}' + \sigma_{rr}'' \right|_{r=b} = 0 \qquad (V.2.1)$$

şeklinde verilir.



$\lambda = m\mu$ ve $\mu = \mu_o e^{nr^k}$ alarak (V.1.1)'den bulunan

$U = \bar{B}\ e^{-\frac{n}{2}r^k} K_\nu \left(\frac{n}{2} r^k\right)$ yerdeğiştirme ifadesinin $\overset{''}{\sigma}_{rr} = 2\ \mu\ \varepsilon_{rr}$ $+ \lambda$ e'e yerleştirilmesi halinde

$$\sigma_{rr}' = \mu (m+2)\ \bar{B}\ e^{-\frac{n}{2}r^k} \left(-\frac{nk}{2} r^{k-1} K_\nu + K_\nu'\right) +$$

$$+ m\ \mu\bar{B}\ r^{-1} e^{-\frac{n}{2} r^k} K_\nu \qquad (V.2.2)$$

bulunur.

(V.2.2), (V.1.5) gerilme ifadeleri (V.2.1) sınır şartına yerleştirilirse

$$\bar{B} = \frac{3(m+2)\alpha_t\ T_o - 2(m+2)\mu_o\ \alpha_t T_o\ nk\ (k+1)\{\{A(b)\ G_1(b)\}' - \{B(b)}{(m+2)\ e^{-\frac{n}{2} b^k} \left(-\frac{nk}{2} b^{k-1} K_\nu + K_\nu'\right) + m e^{-\frac{n}{2}b^k}\ b^{-1} K_\nu}$$

$$- \frac{G_2(b)\}'\}\ /\ b(2-k)\ 4\ \mu o\ \alpha t\ To\ nk(k+1)\{\ B(b)G_2(b) - A(b)G_1(b)\}\ /b^2(}{(m+2)\ e^{-\frac{n}{2}b^k}\left(-\frac{nk}{2}\ b^{k-1}K_\nu + K_\nu'\right) + m e^{-\frac{n}{2}b^k}\ b^{-1}\ K_\nu}$$

bulunur. Bu değerin (V.2.2)'de yerleştirilmesi halinde

$$\sigma_{rr}' = \mu\ e^{\frac{n}{2}(b^k - r^k)} \frac{(m+2)\left(-\frac{nk}{2} k^{k-1} K_\nu + K_\nu'\right) + m r^{-1} K_\nu}{(m+2)\left(-\frac{nk}{2} b^{k-1} K_\nu + K_\nu'\right) + m b^{-1} K_\nu} \cdot \{$$

$$+ (3m+2)\ \alpha_t\ To - \frac{2(m+2)\ \mu_o\ \alpha_t\ Tonk(k+1)}{b(2-k)}\{A(b)G_1(b)\}' - \{B(b)G_2(b)\}'$$

$$- \frac{4\ \mu_o\ \alpha_t\ To\ nk\ (k+1)\{\ B(b)\ G2(b) - A\ (b)\ G1(b)\}}{b^2\ (2-k)}\} \qquad (V,2,3)$$

elde edilir. (V,2,3) ve (V,1,5) den toplam gerilme

$$\sigma_{rr} = \mu e^{\frac{n}{2}(b^k - r^k)} \frac{(m+2)\left(-\frac{nk}{2} r^{k-1} K_\nu + K_\nu'\right) + m r^{-1} K_\nu}{(m+2)\left(-\frac{nk}{2}\ b^{k-1}\ K_\nu' + K_\nu'\right) + m b^{-1} K_\nu} \cdot \{(3m+2)\alpha_t\ To -$$

$$- \frac{2(m+2)\mu_o \alpha_t To\ nk\ (k+1)}{b\ (2-k)} \{(A(b)G_1(b))' - (B(b)G_2(b))'\}$$

$$- \frac{4\mu_o \alpha_t To\ nk\ (k+1)}{b^2(2-k)} \{B(b)\ G_2(b) - A(b)G_1(b)\} - (3m+2)\alpha_t To$$

$$+ 2(m+2)\mu \frac{To\ \alpha_t\ \mu_o\ nk(k+1)}{r\ (2-k)} \{(A(r)\ G_1(r))' - (B(r)\ G_2(r))'\}$$

$$+ 4\mu \frac{To\ \alpha_t\ \mu_o\ nk\ (k+1)}{r^2(2-k)} \{B(r)\ G_2(r) - A(r)\ G_1(r)\}$$

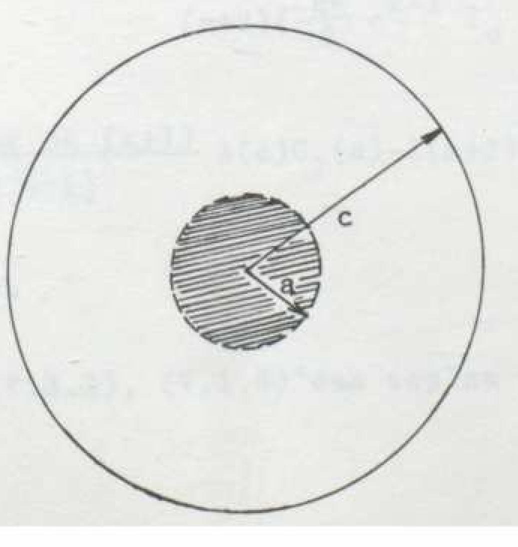
şeklinde hesaplanır.

V.3. THERMAL İNCLUSİON İÇEREN SONSUZ SİLİNDİR HALİ

Sonsuz silindirin sıcaklık alanı verilmiş (a) yarıçaplı sonsuz silindirik bir bölge içermesi halinde sınır şartı

$$\left| \sigma_{rr}' + \sigma_{rr}'' \right|_{r=c} = 0 \qquad (V.3.1)$$

şeklinde verilir.



$\lambda = m\mu_n$ ve $k\mu = \mu_o e^{nrk}$ alındığına göre, (V.1.1)'den bulunan $U = \bar{A}\, e^{-\frac{n}{2} r^k}\, I_\nu (\frac{n}{2} r^k)$ yerdeğiştirme ifadesinin $\sigma_{rr}' = 2\mu\, \varepsilon_{rr} + \lambda e'$e yerleştirilmesi halinde

$$\sigma_{rr}' = \mu (m+2)\, \bar{A}\, e^{-\frac{n}{2} r^k} (-\frac{nk}{2} r^{k-1} I_\nu + I_\nu') +$$

$$+ m\, \mu \bar{A}\, r^{-1} e^{-\frac{n}{2} r^k} I_\nu \qquad (V.3.2)$$

bulunur. (V.3.2), (V.1.8) gerilme ifadeleri (V.3.1) sınır şartına yerleştirilirse

$$\bar{A} = \frac{\{4\mu_o \alpha_t T_o nk(k+1)/c^2(2-k)\} A(c) G_1(a) - (m+2)\{2\mu_o \alpha_t T_o}{(m+2)\, e^{-\frac{n}{2} c^k} (-\frac{nk}{2} c^{k-1} I_\nu + I_\nu') + mc^{-1} e^{-\frac{n}{2} c^k}}$$

$$- nk(k+1) \frac{A'(c)\, G_1\}}{C(2-k)}$$

bulunur.

Bu değerin (V.2.2)'de yerleştirilmesi halinde

$$\sigma_{rr}' = \mu e^{\frac{n}{2}(c^k - r^k)} \frac{(m+2)(-\frac{nk}{2} r^{k-1} I_\nu + I_\nu') + mr^{-1} I_\nu}{(m+2)(-\frac{nk}{2} c^{k-1} I_\nu + I_\nu') + mc^{-1} I_\nu} . \{$$

$$+ \frac{4\mu_o T_o \alpha_t nk(k+1)}{c^2 (2-k)} A(c) G_1(a) - 2(m+2) \frac{\mu_o T_o \alpha_t nk(k+1)}{c(2-k)} A'(c) G_1(a)$$

$$(V.3.3)$$

elde edilir.

(V.3.3), (V.1.8)'den toplam gerilme

$$\sigma_{rr} = \mu e^{\frac{n}{2}(c^k - r^k)} \frac{(m+2)\left(-\frac{nk}{2} r^{k-1} I_\nu + I'_\nu\right) + mr^{-1} I_\nu}{(m+2)\left(-\frac{nk}{2} c^{k-1} I_\nu + I'_\nu\right) + mc^{-1} I_\nu} \cdot \{$$

$$\frac{4\mu_o \alpha_t To\, nk\,(k+1) A(c) G_1(a)}{c^2(2-k)} - 2(m+2) \frac{\mu_o \alpha_t To\, nk(k+1) A'(c) G_1(a)}{c\,(2-k)} \}$$

$$-\mu \frac{4\,To\, \alpha_t\, \mu_o\, nk(k+1) A(r)\, G_{1(a)}}{r^2\,(2-k)} +$$

$$+\frac{2To\, \alpha_t\, \mu_o\, nk(k+1)\, A'(r)\, G_1(a)\,(m+2)}{r\,(2-k)} \mu$$

şeklinde hesaplanır.

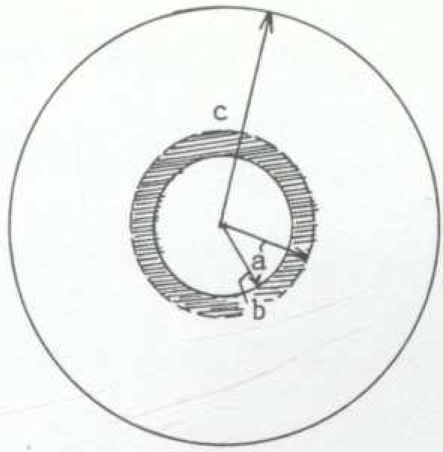
V.4. SİLİNDİRİK BORUNUN THERMAL İNCLUSİON İÇERMESİ HALİ

Silindirik boru halinde sınır şartları

$$\left. \sigma_{rr}' + \sigma_{rr}'' \right|_{r=b} = 0 \qquad (V,4,1)$$

$$\left. \sigma_{rr}' + \sigma_{rr}'' \right|_{r=c} = 0 \qquad (V,4,2)$$

şeklinde verilir.



$$B_1(r,n) = \frac{\mu o n k(k+1)}{r^2\ (2-k)} \{ B(r)\ G_2(r) - A(r)\ G_1(r) \}$$

$$B_2\ (r,n) = \frac{\mu o(m+2) n k(k+1)}{r(2-k)} ((A(r) G_1(r))' - (B(r) G_2(r))')$$

$$B_3(r,n) = \frac{\mu o\ n k\ (k+1)}{r^2\ (2-k)} A(r)\ G_1(a)$$

$$B_4(r,n) = \frac{\mu o n k(k+1)}{r(2-k)} A'(r)\ G_1(a)$$

$$\bar{I}_\nu\ (r,n) = m r^{-1}\ e^{-\frac{n}{2} r^k}\ I_\nu(\tfrac{n}{2}\ r^k)$$

$$\bar{\bar{I}}_\nu\ (r,n) = (m+2) e^{-\frac{n}{2}\ r^k} \{ -\frac{nk}{2} r^{k-1}\ I_\nu\ (\tfrac{n}{2}\ r^k) +\ I'_\nu\ \}$$

$$\bar{K}_\nu\ (r,n) = m r^{-1} e^{-\frac{n}{2}\ r^k}\ K_\nu\ (\tfrac{n}{2} r^k)$$

$$\bar{\bar{K}}_\nu\ (r,n) = (m+2)\ e^{-\frac{n}{2} r^k}\ \{ -\frac{nk}{2} r^{k-1} K_\nu\ (\tfrac{n}{2} r^k) + K'_\nu \}$$

$$J_1\ (r,n) = \bar{\bar{I}}_\nu\ (r,n) + \bar{I}_\nu\ (r,n)$$

$$J_2(r,n) = \bar{\bar{K}}_\nu (r,n) + \bar{K}_\nu (r,n)$$

$$J(b,c,n) = J_2(c,n)J_1(b,n)-J_2(b,n)J_1(c,n)$$

fonksiyon ifadelerinin tanımlanması halinde (V.1.1)'den bulunan $\sigma_{rr}' = \mu\, \bar{A}\, J_1(r,n) + \mu\, \bar{B}\, J_2(r,n)$ ve (V.1.5)'den alınan σ_{rr}'' gerilme ifadelerinin (V.4.1)'e yerleştirilmesi halinde

$$\Big| \mu\, \bar{A}\, J_1(r,n) + \mu\, \bar{B}\, J_2(r,n) + 4\, \mu \alpha_t\, T_o\, B_1(r,n) + 2\mu\, \alpha_t\, T_o\, B_2(r,n) - (3m+2)\mu\, \alpha_t\, T_o \Big|_{r=b} = 0$$

bulunur.

(V.1.1)'den bulunan σ_{rr}' ve (V.1.8)'den alınan σ_{rr}'' ifadeleri (V.4.2)'de yazılarak

$$\Big| \mu\bar{A}\, J_1(r,n) + \mu\, \bar{B}\, J_2(r,n) - 4\mu\, \alpha_t\, T_o\, B_3(r,n) + 2\mu\, \alpha_t\, T_o\, B_4(r,n) \Big|_{r=c} = 0$$

elde edilir. Bu bağıntılardan $\bar{A}$ ve $\bar{B}$ sabitleri hesaplanarak gerilmeler

$$\sigma_{rr} = \frac{2\mu\, \alpha_t\, T_o \quad B_4(c,n)-2\, B_3(c,n)}{J(b,c,n)} \{ J_1(r,n)\, J_2(b,n) - J_1(b,n)\, J_2(r,n) \} + \frac{\mu\, \alpha_t\, T_o}{J(b,c,n)} \{ (3m+2)-2\, B_2(b,n) - 4\, B_1(b,n) \} .$$

$$. \{ J_1(r,n)\, J_2(c,n) - J_2(r,n)\, \frac{J2(c,n)\, J1(b,n)}{J_2(b,n)} \} +$$

$$+\mu\ \alpha_t T_o \{ (3m+2) - 2\, B_2(b,n) - 4\, B_1(b,n)\} \{ \frac{J_2(r,n)}{\bar{J_2}(b,n)} - 1 \}$$

$$b < r < a$$

$$\sigma_{rr} = \frac{2\mu\ \alpha_t\ T_o \{ B_4(c,n) - 2B_3(c,n)\}}{J\ (b,c,n)} \{ J_2(b,n) J_1(r,n) - J_2(b,n).$$

$$J_1(c,n) \frac{J_2(r,n)}{J_2(c,n)} \} + \mu\ \ \alpha_t\ T_o \frac{\{ (3m+2) - 2B_2(b,n) - 4B_1(b,n)\}}{J(b,c,n)} \{$$

$$.\ J_2\ (c,n)\, J_1(r,n) - J_2(r,n)\, J_1(c,n) \quad \} +$$

$$+\mu\ \alpha_t\ T_o \{ \frac{J_2(r,n)}{J_2(c,n)} \{ 4\, B_3(c,n) - 2\, B_4\ (c,n) \} - 4\, B_3(r,n)$$

$$+ 2\, B_4\ (r,n) \} \qquad a < r < c$$

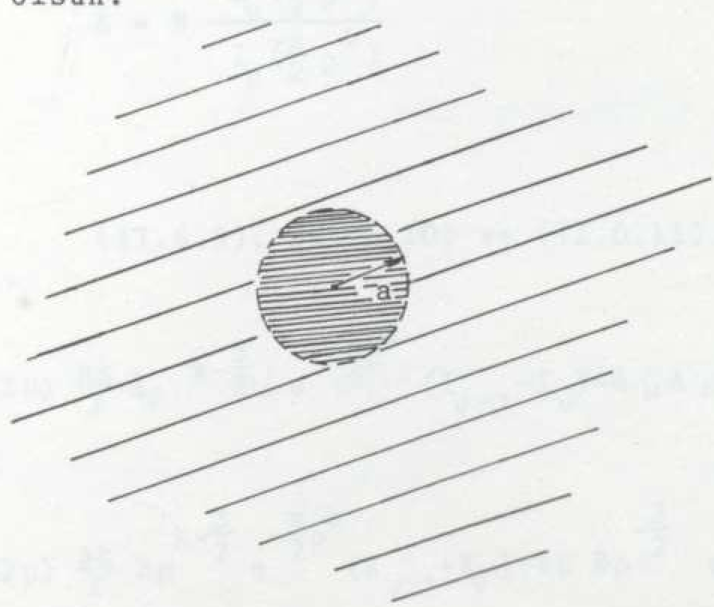
şeklinde bulunurlar.

BÖLÜM VI

KÜRESEL KOORDİNATLAR

VI.1. KÜRESEL THERMAL İNCLUSİON İÇEREN SONSUZ UZAY HALİ

Heterogen ve izotrop bir ortamın sıcaklık alanı verilmiş "a" yarıçaplı küresel bir bölge içermesi halinde, gerek küre gerekse küre dışındaki sonsuz ortamda meydana gelecek yerdeğiştirme ve gerilmeler ne olur problemi incelenmiş olsun.



$\lambda = m\mu$ ve $\mu = \mu_o e^{n\rho^k}$ alınması halinde (II. 5.4)'den

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} + \left\{ \frac{2}{\rho} + nk\rho^{k-1} \right\} \frac{dU}{d\rho} + \left\{ -\frac{2}{\rho^2} + \frac{2mnk\rho^{k-2}}{m+2} \right\} U = 0 \quad \text{(VI.1.1)}$$

bulunur. Burada $m = \frac{2\nu}{1-2\nu}$ olarak verilmektedir.

$m = \frac{2(k+1)}{3 \pm k}$, $k = \frac{3}{b+2}$, $b = 0,2,4,6,\ldots$ değerleri için (VI.1.1) diferansiyel denkleminin çözümü

$$U = A\, e^{-\frac{n}{2}\rho^{k}} \rho^{-1/2}\, I_{\nu}\left(\frac{n}{2}\rho^{k}\right) + B e^{-\frac{n}{2}\rho^{k}} \rho^{-1/2} K_{\nu}\left(\frac{n}{2}\rho^{k}\right)$$

şeklinde verilir.

Bu çözüme göre $o < \rho < r$ ve $r < \rho < \infty$ bölgelerindeki yerdeğiştirmeler sıra ile $U' = A\, e^{-\frac{n}{2}\rho^{k}} \rho^{-1/2}\, I_{\nu}\left(\frac{n}{2}\rho^{k}\right)$ başlangıç noktasında ve sonsuzda sıra ile $U'(o) = 0$, $U''(\infty) = 0$ şartlarının sağlanması gerekir.

(IV.1.4a) dan

$$A = B\, \frac{K_{\nu}\left(\frac{n}{2}\rho^{k}\right)}{I_{\nu}\left(\frac{n}{2}\rho^{k}\right)}$$

bulunur.

(II.6.8), (II.6.10) ve (II.6.11) bağıntılarından,

$$\Sigma''_{\rho\rho} = -(\lambda+2\mu)\, \frac{nk}{2} A \rho^{k-\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{n}{2}\rho^{k}} (I_{\nu-1} - I_{\nu}) - 4\mu A \rho^{-\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{n}{2}\rho^{k}} I_{\nu}$$

ve

$$\Sigma''_{\rho\rho} = -(\lambda+2\mu)\, \frac{nk}{2} B \rho^{k-\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{n}{2}\rho^{k}} (K_{\nu-1} - K_{\nu}) - 4\mu B \rho^{-\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{n}{2}\rho^{k}} K_{\nu}$$

yazılabilir.

Bu bağıntıların (IV.1.4b)'de yerleştirilmesi halinde

$$B = \frac{I_{\nu}\left(\frac{n}{2} r^{k}\right) e^{-\frac{n}{2} r^{k}}}{\mu\, o(m+2)\, \frac{nk}{2}\, r^{k-\frac{3}{2}} \left\{K_{\nu}\left(\frac{n}{2} r^{k}\right) I_{\nu+1}\left(\frac{n}{2} r^{k}\right) + K_{\nu-1}\left(\frac{n}{2} r^{k}\right) I_{\nu}\left(\frac{n}{2} r^{k}\right)\right\}}$$

ve

$$A = \frac{K_\nu(\frac{n}{2}r^k)\; e^{-\frac{n}{2}r^k}}{\mu o(m+2)\;\frac{nk}{2}r^{k-\frac{3}{2}}\{K_\nu(\frac{n}{2}r^k) + I_{\nu-1}(\frac{n}{2}r^k) + K_{\nu-1}(\frac{n}{2}r^k)\; I_\nu(\frac{n}{2}r^k)\}}$$

şeklinde hesaplanır.

(II.6.11)'e göre dilatasyon ifadeleri

$$\theta'(\rho,r) = \frac{nk}{2} A\rho^{k-\frac{3}{2}} e^{-\frac{n}{2}\rho^k}\{I_{\nu-1}(\frac{n}{2}\rho^k) - I_\nu(\frac{n}{2}\rho^k)\}\;, \quad o < \rho < r \qquad \text{(VI.1.2a)}$$

ve

$$\theta''(\rho,r) = -\frac{nk}{2} B\rho^{k-\frac{3}{2}} e^{-\frac{n}{2}\rho^k}\{K_{\nu-1}(\frac{n}{2}\rho^k) + K_\nu(\frac{n}{2}\rho^k)\}\;, \quad r < \rho < \infty \qquad \text{(VI.1.2b)}$$

şeklinde yazılır.

(VI.1.2a), (VI.1.2b) ve (II.6.5)'den

$$U'(r) = \frac{2\mu o\;\alpha t\; nk\;(3+k)}{r^2(3-k)} A \int_o^r T\rho^{k+\frac{1}{2}} e^{\frac{n}{2}\rho^k}(I_{\nu-1}+I_\nu)\,d\rho,$$

$$o < \rho < r$$

elde edilir. Buradan

$U_r(r) = U_r'(r) + U_r''(r)$ toplam yer değiştirme ifadesi

$$U_r(r) = \frac{2\mu o\;\alpha t\; nk\;(3+k)}{r^2(3-k)} A \int_o^r T^{k+\frac{1}{2}} e^{\frac{n}{2}\rho^k}(I_{\nu-1}-I_\nu)\,d\rho$$

$$-\frac{2\mu o\;\alpha t\; nk\;(3+k)}{r^2(3-k)} B \int_r^\infty T^{k+\frac{1}{2}} e^{\frac{n}{2}\rho^k}(K_{\nu-1}+K_\nu)\,d\rho$$

Not:

$$U''(r) = \frac{2\mu_o\,\alpha_t\; nk\;(3+k)}{r2(3-k)} B\int_r^\infty T\rho^{k+\frac{1}{2}} e^{\frac{n}{2}\rho^k}(K_{\nu-1}+K_\nu)\,d\rho$$

şeklinde bulunur.

"a" yarıçaplı kürenin dışında sıcaklık alanı bulunmadığından $o < r < a$ ve $a < r < \infty$ bölgeleri için sıra ile

$$U_r(r) = \frac{2\mu_o\, \alpha_t\, nk\,(3+k)}{r^2(3-k)} A \int_o^r T \rho^{k+\frac{1}{2}} e^{\frac{n}{2}\rho^k} (I_{\nu-1} - I_\nu)\, d\rho$$

$$- \frac{2\mu_o\, \alpha_t\, nk(3+k)}{r^2(3-k)} B \int_r^a T \rho^{k+\frac{1}{2}} e^{\frac{n}{2}\rho^k} (K_{\nu-1} + K_\nu)\, d\rho \quad o < r < a$$

(VI.1.3)

ve

$$U_r(r) = \frac{2\mu_o\, \alpha_t\, nk\,(3+k)}{r^2(3-k)} A \int_o^a T.\rho^{k+\frac{1}{2}} e^{\frac{n}{2}\rho^k} (I_{\nu-1} - I_\nu)\, d\rho$$

$$a < r < \infty \qquad \text{(VI.1.4)}$$

yerdeğiştirme ifadeleri bulunur.

Sıcaklık alanının $T = To\ (a-r)$ şeklinde verilmesi halinde (VI.1.3) ve (VI.1.4)'den sıra ile

$$U_r(r) = \frac{2\mu_o\, \alpha_t\, nk\,(3+k)}{r^2(3-k)} A \int_o^r e^{\frac{n}{2}\rho^k} \rho^{k+\frac{1}{2}} (I_{\nu-1} - I_\nu)\, d\rho$$

$$- \frac{2\mu_o\, \alpha_t\, nk\,(3+k)}{r^2(3-k)} B \int_r^a e^{\frac{n}{2}\rho^k} \rho^{k+\frac{1}{2}} (K_{\nu-1} + K_\nu)\, d\rho\ , \quad o < r < a$$

ve

$$U_r(r) = \frac{2\mu_o\, \alpha_t\, nk\,(3+k)}{r^2(3-k)} A \int_o^a e^{\frac{n}{2}\rho^k} \rho^{k+\frac{1}{2}} (I_{\nu-1} - I_\nu)\, d\rho\ , \quad a < r < \infty$$

elde edilir.

Bu yerdeğiştirme ifadelerine göre (II.6.7), (II.6.8), (II.6.9), (II.6.10) ve (II.6.11)'den σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\psi\psi}$ gerilmeleri hesaplanabilir :

$$F_1(r) = \int_o^r e^{\frac{n}{2}\rho^k} \rho^{k+\frac{1}{2}} \{(I_{\nu-1}(\tfrac{n}{2}\rho^k) - I_\nu(\tfrac{n}{2}\rho^k)\}\, d\rho$$

$$F_2(r) = \int_r^a e^{\frac{n}{2}\rho^k} \rho^{k+\frac{1}{2}} \{K_{\nu-1}(\tfrac{n}{2}\rho^k) + K_\nu(\tfrac{n}{2}\rho^k)\}\, d\rho$$

$$F_1(a) = \int_o^\alpha e^{\frac{n}{2}\rho^k} \rho^{k+\frac{1}{2}} \{I_{\nu-1}(\tfrac{n}{2}\rho^k) - I_\nu(\tfrac{n}{2}\rho^k)\}\, d\rho$$

fonksiyon ifadelerinin tanımlanması halinde $o < r < a$ ve $a < r < \infty$ bölgeleri için sıra ile

$$\sigma_{rr} = 8\{\frac{To\ \alpha_t\ \mu o\ nk\ (3+k)}{r^3(3-k)}\{B(r)\ F_2(r) - A(r)\ F_1(r)\}\}$$

$$+\ 2(m+2)\ \mu\ \frac{To\ \alpha_t\ \mu_o\ nk\ (3+k)}{r^2(3-k)}\{\{A(r)\ F_1(r)\}' - \{B(r)F_2(r)\}'\}$$

$$-\ (3m+2)\mu\ \alpha_t\ To\ ,\quad o < r < a \qquad (VI.1.5)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\psi\psi} = 4\mu\{\frac{To\ \alpha_t \mu\ o\ nk\ (3+k)}{r^3(3-k)}\ A(r)F_1(r) - B(r)F_2(r)\}$$

$$+\ 2m\ \mu \frac{To\ \alpha t\ \mu o\ nk\ (3+k)}{r^2(3-k)}\{\{A(r)F_1(r)\}' - \{B(r)\ F_2(r)\}'\}$$

$$-\ (3m+2)\ \mu\ \alpha_t\ To,\quad o < r < a \qquad (VI.1.6)$$

$$\sigma_{rr} = -8\,\mu\,\frac{To\ \alpha_t\ \mu_o\ nk\ (3+k)}{r^3(3-k)}\ A\ F_1(a) +$$

$$+\ 2(m+2)\ \mu\,\frac{To\ \alpha_t\ \mu_o\ nk\ (3+k)}{r^2(3-k)}\ A'(r)F_1(a),\ a < r < \infty \quad (VI.1.7)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\psi\psi} = 4\,\mu\,\frac{To\ \alpha_t\ \mu_o\ nk\ (3+k)}{r^3(3-k)}\ A.\ F_1(a) +$$

$$+\ 2\ m\ \mu\,\frac{To\ \alpha_t\ \mu_o\ nk\ (3+k)}{r^2(3-k)}\ A'(r)\ F_1(a),\ a < r < \infty \quad (VI.1.8)$$

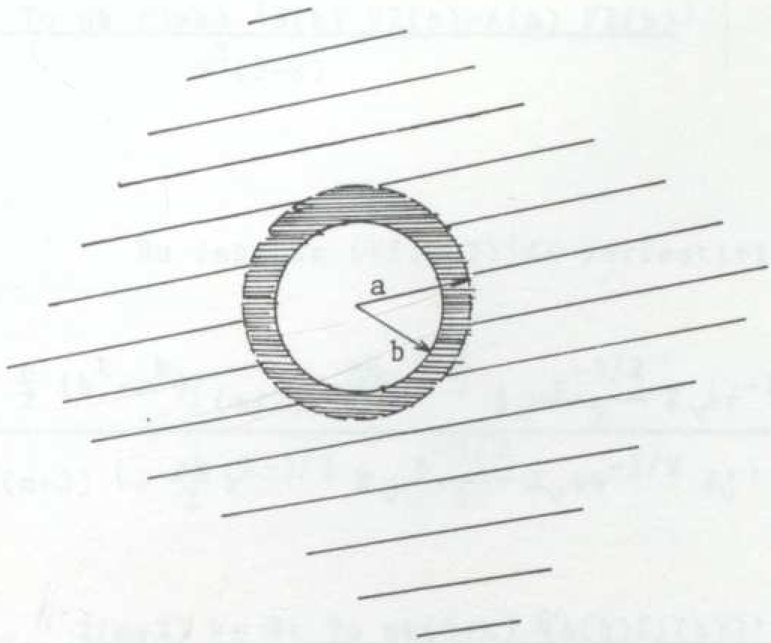
ifadeleri elde edilir.

VI.2. THERMAL İNCLUSİON VE KÜRESEL BOŞLUK İÇEREN SONSUZ UZAY HALİ

Sonsuz uzay halinin sıcaklık alanı verilmiş içi boş küresel bir bölge içermesi halinde sınır şartı

$$\left| \sigma'_{rr} + \sigma''_{rr} \right|_{r=b} = 0 \quad (VI.2.1)$$

şeklinde verilir.



$\lambda = m\mu$ ve $\mu = \mu_o e^{nr^k}$ alarak (VI.1.1)'den bulunan $U = \bar{B}\, e^{-\frac{n}{2}r^k} r^{-1/2} K\left(\frac{n}{2} r^k\right)$ yerdeğiştirme ifadesinin $\sigma'_{rr} = 2\mu\, \varepsilon_{rr} + \lambda e$'e yerleştirilmesi halinde

$$\sigma'_{rr} = \mu(m+2)\, \bar{B}\; e^{-\frac{n}{2} r^k} \left\{ -\frac{nk}{2} r^{k-\frac{3}{2}} K_\nu - \frac{r^{-3/2}}{2} K_\nu + r^{-1/2} K'_\nu \right\} + 2\, m\, \mu \bar{B}\; e^{-\frac{n}{2} r^k}\, r^{-3/2} K_\nu \qquad \text{(VI.2.2)}$$

bulunur.

(VI.2.2), (VI.1.5) gerilme ifadeleri (VI.2.1) sınır şartına yerleştirilirse

$$\bar{B} = \frac{1}{e^{-\frac{n}{2} b^k} (m+2) \left\{ -\frac{nk}{2} b^{k-\frac{3}{2}} K_\nu - \frac{b^{-3/2}}{2} K_\nu + b^{-1/2} K'_\nu \right\} + 2m e^{-\frac{n}{2} b^k} b^{-3/2} K_\nu} \cdot \left| (3m+2)\, \alpha_t\, To - \frac{2(m+2)\, \mu o\, \alpha_t\, To\, nk(3+k) \left| \{ A(b)F1(b)\,' - B(b)F2(b) \}\,' \right|}{b^2(3-k)} \right|$$

$$- \frac{8\,\mu_o\,\alpha_t\,To\,nk\,(3+k)\,\{B(b)\,F2(b)-A(b)\,F1(b)\}}{b^3(3-k)}\Bigg|$$

bulunur.

Bu değerin (VI.2.2)'de yerleştirilmesi halinde

$$\sigma'_{rr} = \frac{\mu e^{\frac{n}{2}(b^k-r^k)}\{(m+2)\{-\frac{nk}{2}r^{k-\frac{3}{2}}K_\nu-\frac{r^{-3/2}}{2}K_\nu+r^{-1/2}K'_\nu\}+2mr^{-3/2}}{(m+2)\{-\frac{nk}{2}b^{k-3/2}K_\nu-\frac{b^{-3/2}}{2}K_\nu+b^{-1/2}K'_\nu\}+2mb^{-3/2}K_\nu}$$

$$\Bigg|(3m+2)\alpha_t\,To-\frac{2(m+2)\,\mu_o\,\alpha_t\,To\,nk(3+k)\,\{\{A(b)F1(b)\}'-\{B(b)F2(b)\}'\}}{b^2(3-k)}$$

$$-\frac{8\,\mu_o\,\alpha_t\,To\,nk(3+k)\,\{B(b)F2(b)-A(b)F1(b)\}}{b^3(3-k)}\Bigg| \qquad (VI.2.3)$$

elde edilir.

(VI.2.3) ve (VI.1.5)'den toplam gerilme

$$\sigma_{rr} = \frac{\mu e^{\frac{n}{2}(b^k-r^k)}\{(m+2)\{-\frac{nk}{2}r^{k-\frac{3}{2}}K_\nu-\frac{r^{-3/2}}{2}K_\nu+r^{-1/2}K'_\nu\}+2mr^{-3/2}K_\nu\}}{(m+2)-\{\frac{nk}{2}-\frac{nk}{2}b^{k-\frac{3}{2}}K_\nu-\frac{b^{-3/2}}{2}K_\nu+b^{-1/2}K'_\nu\}+2mb^{-3/2}K_\nu}.$$

$$\Bigg|(3m+2)\,\alpha_t\,To-\frac{2(m+2)\mu_o\,\alpha_t\,To\,nk(3+k)\{\{A(b)\,F1(b)\}'-\{B(b)\,F2\,(b)\}'\}}{b^2\,(3-k)}$$

$$-\frac{8\,\mu_o\,\alpha_t\,To\,nk\,(3+k)\,\{B(b)F2(b)-A(b)F1(b)\}}{b^3\,(3-k)}\Bigg|+$$

$$+\,8\,\mu\frac{To\,\alpha t\,\mu o\,nk\,(3+k)\,\{B(r)\,F2(r)-A(r)\,F1(r)\}}{r^3\,(3-k)}$$

$$+ 2\,(m+2)\,\mu \frac{To\ \alpha_t\ \mu_o\ nk\ (3+k)}{b^3(-k)} \{\{A(r)\ F1(r)\}' - \{B(r)\ F2(r)\}'\}$$

$$- (3m+2)\ \mu\ \alpha_t\ To$$

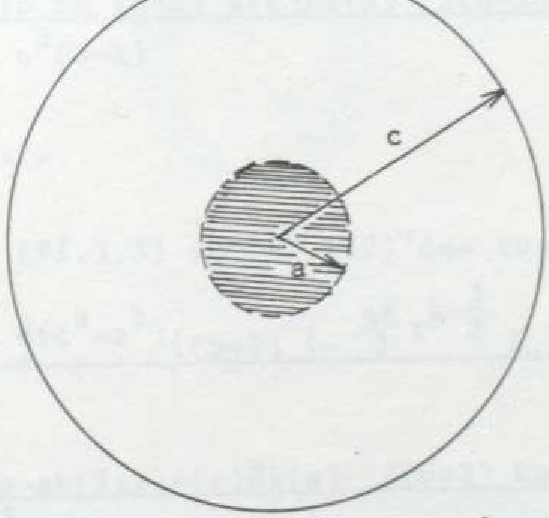
şeklinde hesaplanır.

VI.3. THERMAL İNCLUSİON İÇEREN DOLU KÜRE HALİ

Dolu kürenin sıcaklık alanı verilmiş "a" yarıçaplı küresel bir bölge içermesi halinde sınır şartı

$$\left| \sigma_{rr}' + \sigma_{rr}'' \right|_{r=c} = 0 \qquad \text{(VI.3.1)}$$

şeklinde verilir.



$\lambda = m\mu$ ve $\mu = \mu_o e^{nr^k}$ olarak (VI.1.1)'den bulunan $U = \bar{A}\ e^{-\frac{n}{2}r^k}\ r^{-1/2}\ I_\nu(\frac{n}{2}r^k)$ yerdeğiştirme ifadesinin $\sigma_{rr}' = 2\mu\,\varepsilon_{rr} + \lambda\, e$'e yerleştirilmesi halinde

$$\sigma_{rr}' = \mu(m+2)\,\bar{A}\,e^{-\frac{n}{2}r^k}\{-\frac{nk}{2}\,r^{k-\frac{3}{2}}\,I_\nu - \frac{r^{-3/2}}{2}\,I_\nu +$$

$$+\,r^{-1/2}\,I'_\nu\;\}+\,2m\mu\,\bar{A}\;\;e^{-\frac{n}{2}r^k}\;\;r^{-3/2}\;I_\nu \qquad \text{(VI.3.2)}$$

bulunur. (VI.3.2), (VI.1.7) gerilme ifadeleri (VI.3.1) sınır şartına yerleştirilirse

$$\bar{A} = \frac{8\,\mu_o\,\alpha_t\,To\,nk(3+k)\,\dfrac{A(c)\,F1(a)}{c^3(3-k)} - 2(m+2)\,\mu_o\,\alpha_t\;\;To\,nk(3+k)\,\dfrac{A'.F1}{C^2(3-k)}}{(m+2)\;e^{-\frac{n}{2}\,c^k}\,\{\,-\frac{nk}{2}\,c^{k-\frac{3}{2}}\,I_\nu\;-\frac{c^{-3/2}}{2}\,I_\nu\,+c^{-1/2}I'_\nu\}\,+2me^{-\frac{n}{2}c^k}c^{-3/2}\;I_\nu}$$

bulunur. Bu değerin (VI.3.2)'de yerleştirilmesi halinde

$$\sigma_{rr}' = \frac{\mu_e\,{}^{-\frac{n}{2}(c^k-r^k)}\,\{(m+2)\{\;-\frac{nk}{2}\,r^{k-\frac{3}{2}}\;I_\nu - \frac{r^{-3/2}}{2}\;I_\nu + r^{-1/2}I'_\nu\}\,+2m\;r^{-3/2}\;I_\nu\}}{(m+2)\;\;-\frac{nk}{2}\,c^{k-\frac{3}{2}}\{I_\nu - c^{-3/2}\,I_\nu + c^{-1/2}I'_\nu\}\,+2mc^{-3/2}\;I_\nu}$$

$$\left|\frac{8\;\mu_o\;\alpha_t\;\;To\;nk\;(3+k)\;A(c)F1(a)}{c^3(3-k)} - \frac{2(m+2)\;\mu_o\;\alpha_t\;To\;nk(3+k)A'.F1}{c^2(3-k)}\right|$$

$$\text{(VI.3.3)}$$

elde edilir.

(VI.3.3) ve (VI.1.7)'den toplam gerilme

$$\sigma_{rr} = \frac{\mu_e\,{}^{\frac{n}{2}(c^k-r^k)}\{(m+2)\;\{-\frac{nk}{2}\,r^{k-\frac{3}{2}}\;I_\nu - \frac{r}{2}^{-3/2}\;\;I_\nu + r^{-1/2}I_\nu\} + 2mr^{-3/2}I_\nu\}}{}\;\Big|$$

$$\left|\frac{8\;\mu_o\;\alpha_t\;To\;nk(3+k)A(c)F1(a)}{c^3(3-k)} - \frac{2(m+2)\;\mu_o\;\alpha_t\;To\;nk(3+k)A'(c)F1(a)}{c^2(3-k)}\right|$$

$$-8\mu\;\frac{To\;\alpha_t\,\mu_o\;nk\;(3+k)\;A(r)F1(a)}{r^3(3-k)} + 2(m+2)\mu\,\frac{To\,\alpha_t\;\mu_o\;nk(3+k)\;A'(r)\;F1(a)}{r^2(3-k)}$$

şeklinde hesaplanır.

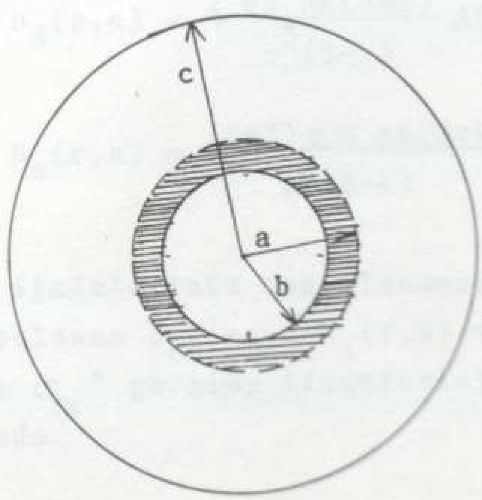
VI.4. THERMAL İNCLUSİON İÇEREN KALIN KÜRESEL KABUK HALİ

Kalın küresel kabuk halinde sınır şartları

$$\left| \sigma_{rr}' + \sigma_{rr}'' \right|_{r=b} = 0 \qquad \text{(VI.4.1)}$$

$$\left| \sigma_{rr}' + \sigma_{rr}'' \right|_{r=c} = 0 \qquad \text{(VI.4.2)}$$

şeklinde verilir.



$$\underline{I_\nu} = 2\, m\, e^{-\frac{n}{2}r^k}\, r^{-3/2}\, I_\nu\left(\frac{n}{2}\, r^k\right)$$

$$\underline{\underline{I_\nu}} = (m+2)\, e^{-\frac{n}{2}r^k} \left\{ -\frac{nk}{2} r^{k-\frac{3}{2}}\, I_\nu\left(\frac{n}{2} r^k\right) - \frac{r^{-3/2}}{2}\, I_\nu\left(\frac{n}{2} r^k\right) + r^{-1/2} I_\nu \right\}$$

$$\underline{K}_{\nu} = 2\, m e^{-\frac{n}{2} r^k}\, r^{-3/2}\, K_{\nu}\left(\frac{n}{2} r^k\right)$$

$$\underline{\underline{K}}_{\nu} = (m+2) e^{-\frac{n}{2} r^k} \left\{ -\frac{nk}{2} r^{k-\frac{3}{2}} K_{\nu}\left(\frac{n}{2} r^k\right) - \frac{r^{-3/2}}{2} K_{\nu}\left(\frac{n}{2} r^k\right) + r^{-1/2} K'_{\nu} \right.$$

$$H_1(r,n) = \underline{I}_{\nu} + \underline{\underline{I}}_{\nu}$$

$$H_2(r,n) = \underline{K}_{\nu} + \underline{\underline{K}}_{\nu}$$

$$H(b,c,n) = H_1(b,n)\, H_2(c,n) - H_1(c,n) H_2(b,n)$$

$$D_1(r,n) = \frac{2 \mu o\, nk(3+k)}{r^3 (3-k)} \{ B(r) F_2(r) - A(r) F_1(r) \}$$

$$D_2(r,n) = \frac{(m+2) \mu o\, nk(3+k)}{r^2 (3-k)} \{ \{A(r)\, F_1(r)\}' - \{B(r) F_2(r)\}' \}$$

$$D_3(r,n) = \frac{2 \mu o\, nk(3+k)}{r^3 (3-k)} A(r)\, F_1(a)$$

$$D_4(r,n) = \frac{(m+2) \mu o\, nk(3+k)}{r^2 (3-k)} A'(r)\, F_1(a)$$

fonksiyon ifadelerinin tanımlanması halinde (VI.1.1)'in çözümünden bulunan $\sigma_{rr}' = \mu \bar{A}\, H_1(r,n) + \mu \bar{B}\, H_2(r,n)$ ve (VI.1.5) den alınan σ_{rr}'' gerilme ifadelerinin (VI.4.1)'e yerleştirilmesi halinde

$$\left| \mu \bar{A}\, H_1(r,n) + \mu \bar{B}\, H_2(r,n) + 4 \mu^{\alpha} t\, To\, D_1(r,n) + 2 \mu^{\alpha} t\, To\, D_2(r,n) - (3m+2) \mu^{\alpha} t\, To \right|_{r=b} = 0$$

yazılır.

$\sigma_{rr}' = \mu \bar{A}\, H_1(r,n) + \mu \bar{B}\, H_2(r,n)$ ve (VI.1.7)'den alınan

σ_{rr}" gerilmeleri (VI.4.2)'e yerleştirildiğinde ise

$$\left| \mu \bar{A} H_1(r,n) + \mu \bar{B} H_2(r,n) - 4\mu\alpha_t \, To \, D_3(r,n) + 2\mu\alpha_t \, To \, D_4(r,n) \right|_{r=c} = 0$$

bulunur.

Bu bağıntılardan A ve B sabitleri hesaplanarak gerilmeler

$$\sigma_{rr} = \frac{2\mu\alpha t \, To\{D_4(c,n)-2D_3(c,n)\}}{H(b,c,n)} \{H_1(r,n)\, H_2(b,n) - H_1(b,n)H_2(r,n)\} + \frac{\mu\alpha t \, To}{H(b,c,n)} \{(3m+2) - 2\, D_2(b,n) - 4D_1(b,n)\} \cdot$$

$$\cdot \{H_1(r,n)\, H_2(c,n) - H_2(r,n) \frac{H2(c,n)H1(b,n)}{H_2(b,n)}\} +$$

$$+ \mu \alpha_t \, To \, \{(3m+2) - 2D_2(b,n) - 4D_1(b,n)\}\{ \frac{H_2(r,n)}{H_2(b,n)} - 1\} \quad b < r < q$$

$$\sigma_{rr} = \frac{2\mu\alpha_t \, To\{D4(c,n)-2D3(c,n)\}}{H\,(b,c,n)} \{H_2(b,n)H_1(r,n) - H_2(b,n)H_1(c,n) \frac{H2(r,n)}{H2(c,n)}\} + \mu^{\alpha} t \, To\{\frac{(3m+2)-2D2(b,n)-4D1(b,n)\}}{H(b,c,n)} \{$$

$$H_2(c,n)\, H_1(r,n) - H_2(r,n)\, H_1(c,n)\} +$$

$$+ \mu^{\alpha} t \, To\{ \frac{H2(r,n)}{H_2(c,n)} \{4D_3(c,n) - 2D_4(c,n)\} - 4D_3(r,n) + 2\, D_4(r,n)\} \quad a < r < c$$

şeklinde bulunurlar.

VI.5. k=1 İÇİN KÜRESEL THERMAL İNCLUSİON İÇEREN SONSUZ UZAY HALİ

İzotrop ve kayma modülü $\mu = \mu_o e^{n\rho^k}$ olan sonsuz ortamın sıcaklık alanı verilmiş "a" yarıçaplı küresel bir bölge içermesi halinde (VI.1.1) diferansiyel denkleminin çözümü

$$U = A\rho^{-1/2}\, e^{-\frac{n}{2}\rho}\, I_{\frac{3}{2}}\left(\frac{n}{2}\rho\right) + B\rho^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{n}{2}\rho}\, I_{-\frac{3}{2}}\left(\frac{n}{2}\rho\right) \qquad \text{(VI.5.1)}$$

verilir.

Bu çözüme göre $a < \rho < r$ ve $r < \rho < \infty$ bölgelerindeki yerdeğiştirmeler sıra ile $U' = A\rho^{-1/2}\, e^{-\frac{n}{2}\rho} I_{\frac{3}{2}}\left(\frac{n}{2}\rho\right)$ ve $U'' = B\rho^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{n}{2}\rho} I_{-\frac{3}{2}}\left(\frac{n}{2}\rho\right)$ şeklinde alınabilir. Ayrıca başlangıç noktasında ve sonsuzda sıra ile $U'(0) = 0$, $U''(\infty) = 0$ şartlarının sağlanması gerekir.

(IV.1.4a)'dan

$$B = A\,\frac{\left(\frac{nr}{2}\right)(1+e^{-nr}) + e^{-nr} - 1}{\left(\frac{nr}{2}\right)(1-e^{-nr}) - (e^{-nr}+1)}$$

bulunur.

(II.6.8),(II.6.10) ve (II.6.11) bağıntılarından

$$\Sigma'_{\rho\rho} = \mu A \left\{ -\frac{8}{\rho} e^{-n\rho} - \frac{16}{n\rho^2} e^{-n\rho} - \frac{16}{n^2\rho^3}(e^{-n\rho} - 1) \right\}$$

$$\Sigma''_{\rho\rho} = \mu B \left\{ \frac{8}{\rho} e^{-n\rho} + \frac{16}{n\rho^2} e^{-n\rho} + \frac{16}{n^2\rho^3}(e^{-n\rho} + 1) \right\}$$

yazılabilir. Bu bağıntıların (IV.1.4b)'de yerleştirilmesi halinde

$$A = \frac{(e^{-nr}-1)\ r}{16\,\mu_o} + \frac{(e^{-nr}+1)}{8n\,\mu_o}$$

elde edilir.

(II.6.11)'e göre dilatasyon ifadeleri

$$\theta' = \mu A\ \{-\frac{2}{\rho}\ e^{-n\rho} + \frac{2}{n\rho^2}\ (1-e^{-n\rho}\ )\ \},\quad a < \rho < r \qquad \text{(VI.5.2a)}$$

ve

$$\theta'' = B\{\ \frac{2}{\rho}\ e^{-n\rho} + \frac{2}{n\rho^2}\ (1+e^{-n}\rho)\quad ,\ r < \rho < \infty \qquad \text{(VI.5.2b)}$$

şeklinde yazılır.

(VI.5.2a), (VI.5.2b) ve (II.6.5)'den

$$U'_r(r) = \frac{8\ \mu o\ \alpha t}{r^2}\ A \int_o^r T\ (-2\rho + \frac{2}{n}\ e^{n\rho} + \frac{2}{n}\ )\ d\rho\ ,\quad o < \rho < r$$

ve

$$U''_r\ (r) = \frac{8\ \mu o\ \alpha t}{r^2}\ B \int_r^\infty T\ (2\rho + \frac{2}{n}\ e^{n\rho} + \frac{2}{n})\ d\rho\ ,\quad r < \rho < \infty$$

elde edilir. Buradan

$Ur(r) = U'_r(r) + U''_r\ (r)$ toplam yerdeğiştirmesi

$$Ur(r) = \frac{8\ \mu o\ \alpha_t}{r^2}\ A \int_o^r T\ (-2\rho + \frac{2}{n}\ e^{n\rho} - \frac{2}{n})\ d\rho\ +$$

$$+ \frac{8\ \mu o\ \alpha_t}{r^2}\ B \int_r^\infty T\ (2\rho + \frac{2}{n}\ e^{n\rho} + \frac{2}{n}\ )\ d\rho$$

şeklinde bulunur.

"a" yarıçaplı kürenin dışında sıcaklık alanı bulunmadığından, $o< r< a$ ve $a <r < \infty$ bölgeleri için, sıra ile

$$U_r(r) = \frac{8\,\mu_o\,\alpha_t}{r^2} A \int_o^r T\left(-2\rho + \frac{2}{n}\,e^{n\rho} - \frac{2}{n}\right) d\rho$$

$$+ \frac{8\,\mu_o\,\alpha_t}{r^2} B \int_r^a T\left(2\rho + \frac{2}{n}\,e^{n\rho} + \frac{2}{n}\right) d\rho \qquad o < r < q$$

(VI.5.3)

$$U_r(r) = \frac{8\,\mu_o\,\alpha_t}{r^2} A \int_o^a T\left(-2\rho + \frac{2}{n}\,e^{n\rho} - \frac{2}{n}\right) d\rho, \qquad a< r<\infty$$

(VI.5.4)

yerdeğiştirmeleri elde edilir.

Sıcaklık alanının $T = To\,\eta\,(a-r)$ şeklinde verilmesi halinde (VI.5.3) ve (VI.5.4)'den sıra ile

$$U_r(r) = \frac{8\,\mu_o\,\alpha_t\,To}{r^2} A \int_o^r \left(-2\,\rho + \frac{2}{n}\,e^{n\rho} - \frac{2}{n}\right) d\rho \;+$$

$$+ \frac{8\,\mu_o\,\alpha_t\,To}{r^2} B \int_r^a \left(2\rho + \frac{2}{n}\,e^{n\rho} + \frac{2}{n}\right) d\rho \qquad o < r < q$$

$$U_r(r) = \frac{8\,\mu_o\alpha_t\,To}{r^2} A \int_o^a \left(-2\rho + \frac{2}{n}\,e^{n\rho} - \frac{2}{n}\right) d\rho\,, \qquad a < r < \infty$$

bulunur. Bu bağıntılarda geçen integrallerin hesaplanması sonucu

$$U_r(r) = \frac{8\,\mu_o\,\alpha_t\,To\,A}{r^2}\left(-r^2 + \frac{2}{n^2}\,e^{nr} - \frac{2}{n}\,r - \frac{2}{n^2}\right) +$$

$$+ \frac{8\,\mu_o\,\alpha_t\,To\,B}{r^2}\left\{(a^2-r^2) + \frac{2}{n^2}\left(e^{na}-e^{nr}\right) + \frac{2}{n}\,(a-r)\right\}, \qquad o < r < q$$

ve

$$U_r(r) = \frac{8\,\mu_o\,\alpha_t\,To\,A}{r^2}\,(-a^2 + \frac{2}{n^2}\,e^{na} - \frac{2}{n}\,a - \frac{2}{n^2})\ ,\quad a < r < \infty$$

elde edilir.

Bu yerdeğiştirme ifadelerine göre (II.6.7), (II.6.8), (II.6.9), (II.6.10) ve (II.6.11)'den σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\psi\psi}$ gerilmeleri hesaplanabilir.

$o < r < a$ ve $a < r < \infty$ bölgeleri için sıra ile

$$\sigma_{rr} = 2\,\mu\{ - \frac{16\,To\,\alpha_t\,\mu_o\,A(r)}{r^3}(-r^2 + \frac{2}{n^2}e^{nr} - \frac{2}{n}\,r - \frac{2}{n^2}) +$$

$$+ \frac{8\,To\,\alpha_t\,\mu_o\,A'(r)}{r^2}(-r^2 + \frac{2}{n^2}\,e^{nr} - \frac{2}{n}\,r - \frac{2}{n^2}) +$$

$$+ \frac{8\,To\,\alpha_t\,\mu_o\,A(r)}{r^2}\,(-2r + \frac{2}{n}\,e^{nr} - \frac{2}{n}) +$$

$$- \frac{16\,To\,\alpha_t\,\mu_o\,B(r)}{r^3}\left|(a^2-r^2) + \frac{2}{n^2}\,(e^{na}-e^{nr}) + \frac{2}{n}\,(a-r)\right| +$$

$$+ \frac{8\,To\,\alpha_t\,\mu_o\,B'(r)}{r^2}\left|(a^2-r^2) + \frac{2}{n^2}\,(e^{na}-e^{nr}) + \frac{2}{n}\,(a-r)\right| +$$

$$+ \frac{8\,To\,\alpha_t\,\mu_o\,B(r)}{r^2}\,(- 2r - \frac{2}{n}\,e^{nr} - \frac{2}{n})\} +$$

$$+ 16\,\mu\frac{To\,\alpha_t\,\mu_o}{r^2}\,\{ A\,\left|(-r^2 + \frac{2}{n^2}\,e^{nr} - \frac{2}{n}\,r - \frac{2}{n^2})\right|' +$$

$$+ \left|B(r)\ (a^2-r^2) + \frac{2}{n2}\,(e^{na}-e^{nr}) + \frac{2}{n}\,(a-r)\right|'\} +$$

$$- 8\,\mu\alpha_t T_o \qquad o < r < a \qquad (VI.5.5)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\psi\psi} = 16\,\mu\{\frac{To\,\alpha_t\,\mu_o\,A}{r^3}\,(-r^2 + \frac{2}{n^2}\,e^{nr} - \frac{2}{n}\,r$$

$$- \frac{2}{n^2}\,\} + \frac{To\,\alpha_t\,\mu_o\,B}{r^3}\,|\,(a^2-r^2) + \frac{2}{n^2}\,(e^{na}-e^{nr}) + \frac{2}{n}\,(a-r)|\,\}$$

$$+ 16\mu\,\frac{To\,\alpha_t\,\mu_o}{r^2}\,\{\,|\,A(r)\quad(-r^2 + \frac{2}{n^2}\,e^{nr} - \frac{2}{n}r - \frac{2}{n^2}\}\,|' +$$

$$+ |\,B\,(r)\,\{\,(a^2-r^2) + \frac{2}{n^2}\,(e^{na}-e^{nr}) + \frac{2}{n}\,(a-r)\}'\,|\} - 8\mu\,\alpha_t\,To$$

$$o < r < a \qquad (VI.5.6)$$

ve

$$\sigma_{rr} = 2\,\mu\,\alpha_t\,To\,(-a^2 + \frac{2}{n^2}\,e^{na} - \frac{2}{n}\,a - \frac{2}{n^2}\,).\,|\,\frac{-ne^{-nr}}{r}$$

$$- \frac{2(e^{-nr}+1)}{nr^3}\,| \quad , \qquad a < r < \infty \qquad (VI.5.7)$$

ve

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\psi\psi} = 2\mu\,\alpha_t\,To\,(-a^2 + \frac{2}{n^2}\,e^{na} - \frac{2}{n}\,a - \frac{2}{n^2}\,).\,|$$

$$|+ \frac{e^{-nr}+1}{nr^3} + \frac{e^{-nr}-1}{r^2} + \frac{e^{-nr}}{r^2} - \frac{ne^{-nr}}{2r}\,|, \qquad a < r < \infty \qquad (VI.5.8)$$

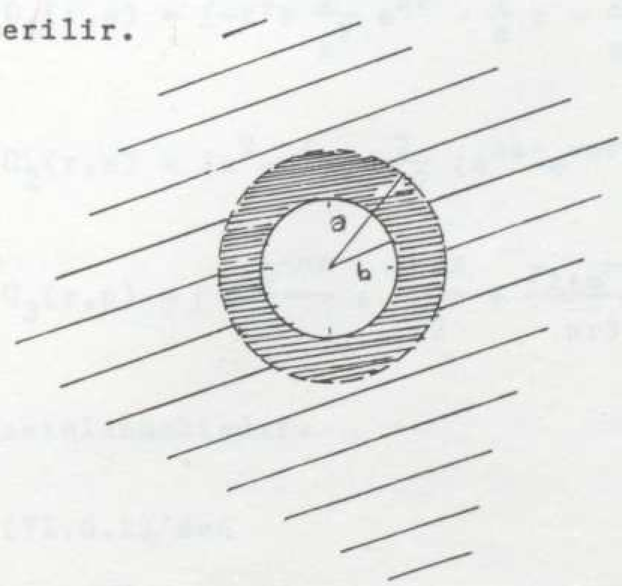
bulunur.

VI.6. k=1 İÇİN KÜRESEL BOŞLUK VE THERMAL İNCLUSİON İÇEREN SONSUZ UZAY HALİ

Sonsuz uzay halinin sıcaklık alanı verilmiş içi boş küresel bir bölge içermesi halinde sınır şartı

$$\left| \sigma_{rr}{}' + \sigma_{rr}{}'' \right|_{r=b} = 0 \qquad \text{(VI.6.1)}$$

şeklinde verilir.



$\lambda = 2\mu$ ve $\mu = \mu_o e^{nr}$ alındığına göre (VI.1.1)'den $U = \bar{B}\{ \frac{1-e^{-nr}}{2r} \frac{(1+e^{-nr})}{nr2} \}$ hesaplanır. Bu bağıntının $\sigma_{rr}{}' = 2\mu\, \varepsilon_{rr} + \lambda e$'e yerleştirilmesi halinde

$$\sigma_{rr}{}' = 4\mu\bar{B}\{ \frac{-ne^{-nr}}{2r} + \frac{e^{-nr}}{r2} + \frac{(1+e^{-nr})}{nr3} \} \qquad \text{(VI.6.2)}$$

bulunur.

(VI.6.2), (VI.5.5) gerilme ifadeleri (VI.6.1) sınır şartına yerleştirildiğinde

$$\bar{B} = \frac{-8To\ \alpha_t\ \mu_o}{C_3(b,n)}\left\{\left\{\frac{A(r)C1(r,n)+B(r)C2(r,n)}{r^2}\right\}'_{r=b} + \frac{1}{b^3}(A(b)C_1(b,n) +\right.$$

$$\left. B\ (b)\ C_2(b,n)\right\}\} + \frac{2\ \alpha_t\ To}{C_3(b,n)}$$

elde edilir. Burada

$$C_1(r,n) = (-r^2 + \frac{2}{n^2}\ e^{nr} - \frac{2}{n}\ r - \frac{2}{n^2}\ )$$

$$C_2(r,n) = (a^2-r^2) + \frac{2}{n^2}\ (e^{na}-e^{-nr}) + \frac{2}{n}\ (a-r)$$

$$C_3(r,n) = (\frac{-ne^{-nr}}{2r} + \frac{e^{-nr}}{r2} + \frac{(1+e^{-nr})}{nr3}\ )$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

(VI.6.2)'den

$$\sigma_{rr}{}' = -32\mu\frac{To\ \alpha_t\ \mu_o\ C3(r,n)}{C_3(b,n)}\left\{\left\{\frac{A(r)C1(r,n)+B(r)C2(r,n)}{r^2}\right\}' +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{b^3}\{A(b)\ C_1(b,n)+B(b)C_2(b,n)\}\right\} + \frac{8\mu\alpha_t\ To\ C3\ (r,n)}{C_3\ (b,n)} \quad (VI.6.3)$$

şeklinde bulunur.

(VI.6.3), (VI.5.5)'den toplam gerilme

$$\sigma_{rr} = 8\mu\alpha_t\, To\{ \frac{C3(r,n)}{C3(b,n)} - 1 \} - 32\, \frac{To\, \alpha_t\, \mu o\, C3(r,n)}{C_3(b,n)} \{$$

$$\{\{ \frac{A(r)\, C1(r,n) + B(r)\, C2(r,n)}{r^2} \}'_{r=b} + \frac{1}{b^3} \{ A(b)\, C_1(b,n) + B(b) C_2(b,n) \}\}$$

$$+ 4\mu\, \alpha_t\, To \{\{ \frac{8\, \mu o\, A(r)\, C_1(r,n)}{r^2} \}' + \{ \frac{8\, \mu o\, B(r)\, C_2(r,n)}{r^2} \}' +$$

$$+ \frac{8\, \mu_o\, A(r)\, C_1(r,n)}{r^3} + \frac{8\, \mu_o B(r)\, C_2(r,n)}{r^3} \}$$

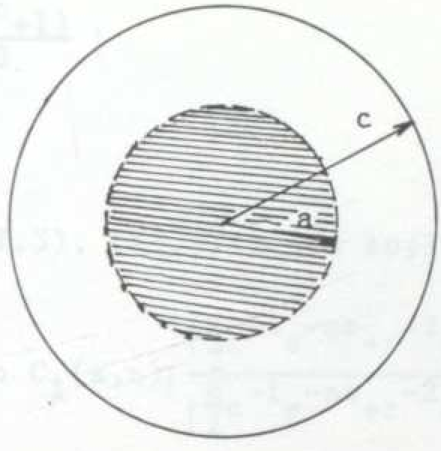
şeklinde elde edilir.

VI.7. k = 1 İÇİN KÜRESEL THERMAL İNCLUSİON İÇEREN DOLU KÜRE HALİ

Dolu kürenin sıcaklık alanı verilmiş "a" yarıçaplı küresel bir bölge içermesi halinde sınır şartı

$$\left| \sigma_{rr}' + \sigma_{rr}'' \right|_{r = c} \qquad \text{(VI.7.1)}$$

şeklinde verilir.



$\lambda = 2\mu$ ve $\mu = \mu_o e^{nr}$ alındığına göre (VI.1.1) den $U = \bar{A} \left| \frac{1+e^{-nr}}{2r} + \frac{e^{-nr}-1}{nr^2} \right|$ hesaplanır. Bu bağıntının $\sigma_{rr}' = 2\mu\ \varepsilon_{rr} + \lambda e'$e yerleştirilmesi halinde

$$\sigma_{rr}' = -4\mu \bar{A} \left| \frac{ne^{-nr}}{2r} + \frac{e^{-nr}}{r2} + \frac{(e^{-nr}-1)}{nr3} \right| \qquad \text{(VI.7.2)}$$

bulunur.

(VI.7.2), (VI.5.7) gerilme ifadeleri (VI.7.1) sınır şartına yerleştirildiğinde

$$A = \frac{1}{2} \alpha_t \, To \, C_1(a,n \; \frac{\left| -\frac{ne^{-nc}}{c} + \frac{2(e^{-nc}+1)}{nc3} \right|}{\left| \frac{ne^{-nc}}{2c} + \frac{e^{-nc}}{c2} + \frac{(e^{-nc}-1)}{nc3} \right|}$$

elde edilir. Burada $C_1\ (a,n) = (-a^2 + \frac{2}{n^2} e^{na} - \frac{2}{n} a - \frac{2}{n^2})$ şeklinde tanımlanmıştır. Buna göre

$$\sigma_{rr}' = 2\mu\, \alpha_t\, T_o\, C_1\ (a,n) \frac{\left| \frac{n}{2} r^{-1} e^{-nr} + r^{-2} e^{-nr} + nr^{-3} (e^{-nr}-1) \right|}{\left| \frac{n}{2} c^{-1} e^{-nc} + c^{-2} e^{-nc} + nc^{-3}\ (e^{-nc}-1) \right|} .$$

$$\left| \frac{ne^{-nc}}{c} + \frac{2(e^{-nc}+1)}{nc^3} \right| \qquad (VI.7.3)$$

olur.

(VI.7.3), (VI.5.7)'den toplam gerilme

$$\sigma_{rr} = 2\mu\ \alpha_t\ To\ C_1(a,n)\left\{ \frac{\left| \frac{n}{2}r^{-1}e^{-nr} + r^{-2}e^{-nr} + nr^{-3}(e^{-nr}-1) \right|}{\left| \frac{n}{2}c^{-1}e^{-nc} + c^{-2}e^{-nc} + nc^{-3}(e^{-nc}-1) \right|} \right.$$

$$\left. \left| \frac{ne^{-nc}}{c} + \frac{2(e^{-nc}+1)}{nc^3} \right| - \left| \frac{ne^{-nr}}{r} + \frac{2(e^{-nr}+1)}{nr^3} \right| \right\}$$

bulunur.

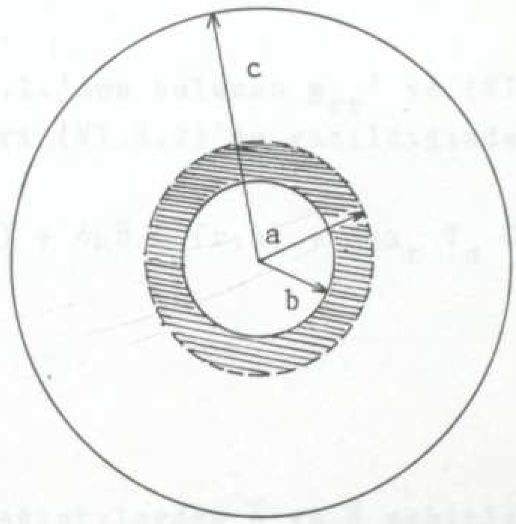
VI.8. k=1 İÇİN THERMAL İNCLUSİON İÇEREN KALIN KÜRESEL KABUK HALİ

Kalın küresel kabuk halinde sınır şartları

$$\left| \sigma_{rr}' + \sigma_{rr}'' \right|_{r=b} = 0 \qquad (VI.8.1)$$

$$\left| \sigma_{rr}' + \sigma_{rr}'' \right|_{r=c} = 0 \qquad (VI.8.2)$$

şeklinde verilir.



$$\bar{C}_3(r,n) = \frac{ne^{-nr}}{2r} + \frac{e^{-nr}}{r^2} + \frac{e^{-nr}-1}{nr^3}$$

$$C_4(r,n) = \frac{-ne^{-nr}}{r} - \frac{2\,(e^{-nr}+1)}{nr^3}$$

$$\bar{F}(r,n) = \left|\frac{AC_1(r,n)}{r^2}\right.' + \left|\frac{BC_2(r,n)}{r^2}\right|' + \frac{AC_1(r,n)}{r^3} + \frac{BC_2(r,n)}{r^3}$$

$$\bar{C}_3\,(b,c,n) = \bar{C}_3(c,n)\; C_3(b,n) - \bar{C}_3(b,n)\; C_3(c,n)$$

fonksiyon ifadelerinin tanımlanması halinde

(VI.5.1)'den bulunan $\sigma_{rr}' = -\,4\,\mu\,\bar{A}\;\bar{C}_3(r,n) + 4\,\mu\,\bar{B}C_3$ (r,n) ve (VI.5.5)'den alınan σ_{rr}'' gerilmeleri (VI.8.1'de yerleştirildiğinde

$$\left| -4\,\mu\,\bar{A}\;\bar{C}_3(r,n) + 4\mu\bar{B}\;C_3(r,n) + 32\,\mu\,\alpha_t\;To\;\bar{F}(r,n) - 8\mu\;\alpha_t\;To\;\right|_{r=b} = 0$$

elde edilir.

VI.5.1.'den bulunan $\bar{\sigma}_{rr}$' ve (VI.5.7)'den alınan σ_{rr}" gerilmeleri (VI.8.2)'de yazıldığında

$$\left| - 4\mu \bar{A} \bar{C}_3(r,n) + 4\mu\bar{B} C_3(r,n) + 2\mu\alpha_t T_o C_1(a,n)C_4(r,n) \right|_{r = c} = 0$$

bulunur.

Bu bağıntılardan $\bar{A}$ ve $\bar{B}$ sabitleri hesaplanarak

$$\sigma_{rr} = \frac{2\mu\ \alpha t\ To\ C1(a,n)C4(c,n)}{\bar{C}_3(b,c,n)} \{\bar{C}_3(b,n)C_3(r,n)-C_3(b,n)\bar{C}_3(r,n)\}$$

$$+ \frac{32\mu\ \alpha t\ To\ \bar{F}(b,n)C3(c,n)}{\bar{C}_3\ (b,c,n)} \{\bar{C}_3(r,n) - \bar{C}_3(b,n)\ \frac{C3(r,n)}{C3(b,n)}\}$$

$$+ 32\mu\ ^{\alpha}t\ To\{\bar{F}(r,n)-\bar{F}(b,n)\ \frac{C3(r,n)}{C3(b,n)}\} + 8\quad t\ To\{\frac{C3(r,n)}{C3(b,n)} - 1\}$$

$$b < r < a$$

$$\sigma_{rr} = \frac{2\mu\alpha t\ To\ C1(a,n)C4(c,n)C3(b,n)}{\bar{C}_3(b,c,n)} \{\bar{C}_3(c,n)\ \frac{C3(r,n)}{C3(c,n)} - \bar{C}_3(r,n)\}$$

$$+ \frac{32\mu\alpha t\ To\ \bar{F}(b,n)}{\bar{C}_3(b,c,n)} \{C_3(c,n)\ \bar{C}_3(r,n) - C_3(r,n)\bar{C}_3(c,n)\}$$

$$+ 2\mu\ ^{\alpha}t\ To\ C_1(a,n)\ C_4(r,n)\ \{1 - \frac{C3(r,n)}{C3(c,n)}\}, a < r < c$$

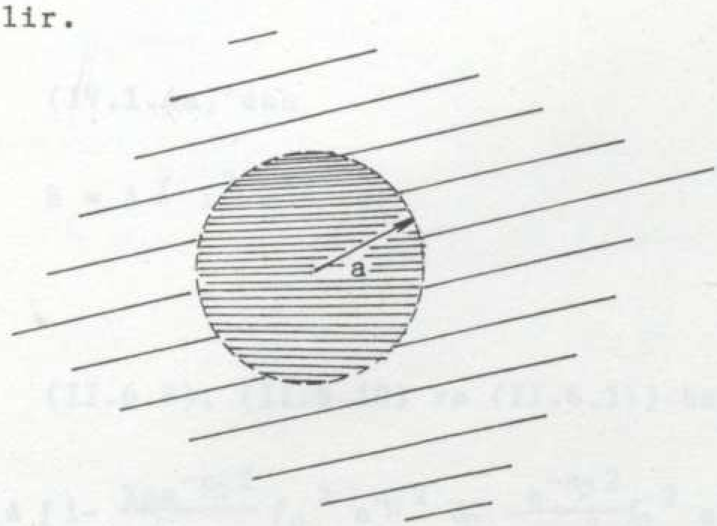
gerilme ifadeleri elde edilir.

VI.9. k=2 İÇİN KÜRESEL THERMAL İNCLUSİON İÇEREN SONSUZ UZAY HALİ

İzotrop ve kayma modülü $\mu = \mu_o e^{n\rho^k}$ olan sonsuz ortamın, sıcaklık alanı verilmiş "a" yarıçaplı bir küresel bölge içermesi halinde, k=2 için (VI.1.1)'den

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} + \left(\frac{2}{\rho} + 2n\rho\right)\frac{dU}{d\rho} + \left(-\frac{2}{\rho^2} + 2n\right)U = 0 \qquad (VI.9.1)$$

elde edilir.



$f = \left(\frac{2}{\rho} + 2n\rho\right)$ alınması halinde (IV.4.1)'den

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} + f\,\frac{dU}{d\rho} + \frac{df}{d\rho}\,U = 0$$

yazılabilir. Buradan,

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} + (fU)' = 0$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü ise :

$$U = A \frac{e^{-n\rho 2}}{\rho^2} \int \rho^2 e^{n\rho 2} d\rho + B \frac{e^{-n\rho 2}}{\rho^2}$$

şeklinde verilir.

Bu çözüme göre $o < \rho < r$ ve $r < \rho < \infty$ bölgelerindeki yer değiştirmeler sıra ile $U' = A \frac{e^{-n\rho 2}}{2} \int \rho^2 e^{n\rho 2} d\rho$ ve $U'' = B \frac{e^{-n\rho 2}}{\rho^2}$ şeklinde alınabilir. Ayrıca başlangıç noktasında ve sonsuzda sıra ile $U'(o) = 0$, $U''(\infty) = 0$ olması gerekir.

(IV.1.4a)'dan

$$B = A \int r^2 e^{nr2} dr$$

bulunur.

(II.6.8), (II.6.10) ve (II.6.11) bağıntılarından

$$\Sigma'_{\rho\rho} = 4\mu A \{ 1 - \frac{2ne^{-n\rho 2}}{\rho} \int \rho^2 e^{n\rho 2} d\rho - \frac{e^{-n\rho 2}}{\rho^2} \int \rho^2 e^{n\rho 2} d\rho \}$$

ve

$$\Sigma''_{\rho\rho} = - 8 \mu Bn \frac{e^{-n\rho^2}}{\rho} - 4 B \frac{e^{-n\rho 2}}{\rho^3}$$

yazılabilir.

Bu bağıntıların (IV.1.4b)'de yerleştirilmesi halinde

$$B = \frac{\int r^2 e^{nr2} dr}{4 \mu_o}$$

$$A = \frac{1}{4\mu_o}$$

elde edilir.

(II.6.16)'a göre, dilatasyon ifadeleri

$$\Theta' = -\frac{2A\, e^{-n\rho^2}}{\rho}\; n \int \rho^2 \; e^{n\rho^2}\, d\rho + A \qquad \text{(VI.9.2a)}$$

ve

$$\Theta'' = -\,2\,Bn\,\frac{e^{-n\rho^2}}{\rho} \qquad \text{(VI.9.2b)}$$

şeklinde yazılabilir.

(VI.9.2a), (VI.9.2b) ve (II.6.7)'den

$$U_r'(r) = \frac{2\alpha t}{r2}\int_o^r T\,\{\, e^{n\rho^2}\rho^2 - \{\frac{2n}{}\int \rho^2\, e^{n\rho^2} d\rho\,\}\}\, d\rho$$

ve

$$U_r''(r) = \frac{-4\{\int r^2 e^{nr^2}\, dr\}\,\alpha_{t.n}}{r^2}\int_r^\infty T.\rho\,.d\rho$$

Buradan,

$U_r(r) = U_r'(r) + U_r''(r)$ toplam yerdeğiştirmesi

$$U_r(r) = \frac{2\,\alpha_t}{r2}\int_o^r T\;\{\, e^{n\rho^2}\rho^2 \;-\{\frac{2n}{\rho}\int \rho^2\; e^{n\rho^2}\; d\rho\}\}\, d\rho$$

$$-\;\frac{4\{\int r^2\; e^{nr^2} dr\}\;\alpha_{t.n}}{r^2}\int_r^\infty T.\rho\,.d\rho$$

şeklinde elde edilir. "a" yarıçaplı kürenin dışında sıcaklık alanı bulunmadığından, $o < r < a$ ve $a < r < \infty$ bölgeleri için sıra ile

$$U_r(r) = \frac{2\,\alpha t}{r2} \int_o^r T\{ e^{n\rho^2}\rho 2 \;-\{\frac{2n}{\rho} \int \rho^2 e^{n\rho^2}\, d\rho\ \}\}\, d\rho$$

$$- \frac{4\{\int r^2 e^{nr2} dr\ \ \alpha tn}{r^2} \int T \rho\, d\rho\ , \quad a < r < a \qquad (VI.9.3)$$

$$U_r(r) = \frac{2\,\alpha\, t}{r2} \int_o^r \{\ T\ \{\ e^{n\rho 2}\rho 2 \;-|\ \frac{2n}{\rho} \int \rho^2 \ e^{n\rho 2}\ d\rho|\}\, d\rho \quad a < r < \infty$$

$$(VI.9.4)$$

yerdeğiştirme ifadeleri bulunur.

Sıcaklık alanının $T = To\,\eta\ (a-r)$ şeklinde verilmesi halinde (VI.9.3) ve (VI.9.4)'den sıra ile

$$U_r(r) = \frac{2\,\alpha\, t\ To}{r^2} \int_o^r \{\ e^{n\rho^2}\rho^2 \;-\{\ \frac{2n}{\rho} \int \rho^2\ e^{\ n\rho^2}\ \ d\rho\ \}\}\ \ d\rho$$

$$- \frac{4\{\ \int r^2\ e^{nr^2}\ dr\}\ \ \alpha t\ n\ To}{r^2} \int_r^a \rho\, d\rho\ \ , \qquad o < r < a$$

$$U_r(r) = \frac{2\ \alpha t\ To}{r^2} \int_o^a \{\ e^{n\rho^2}\rho^2 \;-\{\frac{2n}{\rho}\int \rho^2\ \ e^{n\rho^2} d\rho\ \}\}d\rho \qquad a < r < \infty$$

elde edilir.

Bu yerdeğiştirme ifadelerine göre, (II.6.7), (II.6.8), (II.6.9), (II.6.10) ve (II.6.11)'den σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\psi\psi}$ gerilmeleri hesaplanabilir.

$$E_1(r) = \int_o^r \{\ e^{n\rho^2}\ \rho^2 \;-\{\ \frac{2n}{\rho} \int \rho^2\ e^{n\rho^2}\ \ d\rho\ \}\}\,.\,d\rho$$

alınması halinde, $o < r < a$ ve $a < r < \infty$ bölgeleri için sıra ile

$$\sigma_{rr} = 2\,\mu\{\frac{-4\,\alpha_t\,To}{r^3}\,E_1(r) + \frac{4\,\alpha_t\,To.n}{r^3}\{\int r^2 e^{nr2} dr\}(a^2-r^2)$$

$$+ \frac{4\,\alpha_t\,To}{r^2}\,E_1'(r) - 2\,\alpha_t\,To\,n\,e^{nr^2}\,(a^2-r^2) +$$

$$+ \frac{8\,\alpha t\,To\,n\{\int r^2 e^{nr2} dr\}}{r}\} - 8\,\mu\,\alpha_t\,To, \quad o < r < a \qquad (VI.9.5)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\psi\psi} = 2\mu\{\frac{2\,\alpha t\,To}{r^3}\,E_1(r) - \frac{2\,\alpha_t\,To.n}{r^3}\{\int r^2 e^{nr2} dr\}(a^2-r^2)$$

$$+ \frac{2\,\alpha_t\,To}{r^2}\,E_1'(r) + \frac{4\,\alpha_t\,To\,n}{r}\{\int r^2 e^{nr2}\,dr\} - 4\,\alpha_t\,To\} \quad o < r < a \qquad (VI.9.6)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{8\mu\,\alpha_t\,To}{r^3}\int_o^a \{e^{n\rho^2}\rho^2 - \{\frac{2n}{\rho}\int \rho^2\,e^{n\rho^2}\,d\rho\}\}\,d\rho, \quad a < r < \infty \qquad (VI.9.7)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\psi\psi} = \frac{4\mu\,\alpha t\,To}{r^3}\int_o^a \{e^{n\rho^2}\,\rho^2 - \{\frac{2n}{\rho}\int\rho^2\,e^{n\rho^2}\,d\rho\}\}\,d\rho, \quad a < r < \infty \qquad (VI.9.8)$$

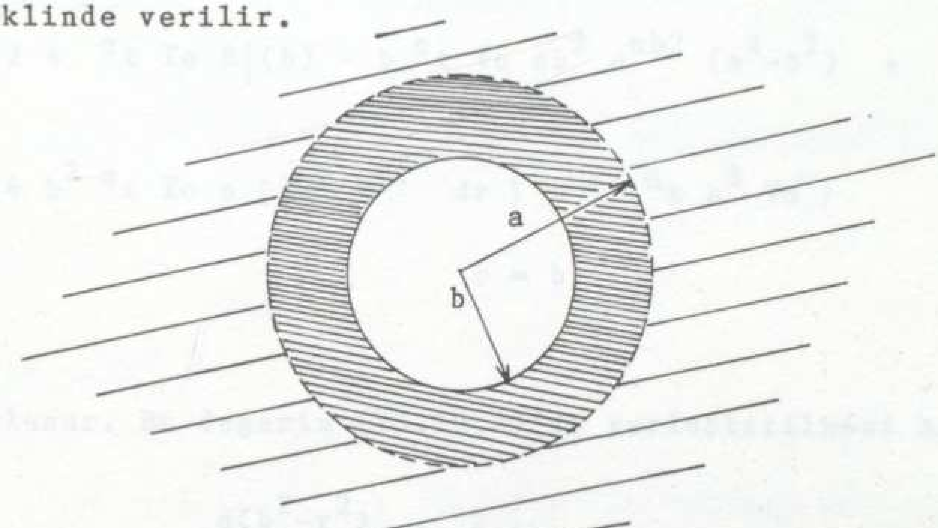
bulunur.

VI.10. k=2 İÇİN KÜRESEL BOŞLUK İÇEREN SONSUZ UZAY HALİ

Sonsuz uzay halinin sıcaklık alanı verilmiş içi boş küresel bir bölge içermesi halinde sınır şartı

$$\left| \sigma_{rr}' + \sigma_{rr}'' \right|_{r = b} = 0 \qquad \text{(VI.10.1)}$$

şeklinde verilir.



$\lambda = 2\,\mu$ ve $\mu = \mu_o e^{nr^2}$ alındığına göre (II.5.2)'den bulunan yerdeğiştirme ifadeleri $\sigma_{rr}' = 2\mu\, \varepsilon_{rr} + \lambda\, e$'e yerleştirilmesi halinde

$$\sigma_{rr}' = 2\mu\, A\{\, 2-3\, \frac{ne^{-nr^2}}{r^2} (\int r^2 e^{nr^2} dr) - 2\, \frac{e^{-nr^2}}{r^3} (\int r^2 e^{nr^2}$$

$$- 4\mu\, B\, \frac{e^{-nr^2}}{r^3} (2nr^2 + 1) \qquad \text{(VI.10.2)}$$

elde edilir.

(VI.10.1)'de (VI.10.2)'den alınan $\sigma_{rr}' = - 4\,\mu\, B$.

$\cdot\, \frac{e^{-nr^2}}{r^3} (2nr^2+1)$ terimi ve (VI.9.5)'den alınan σ_{rr}'' değeri yerleştirilirse

$$B = \frac{e^{nb^2}}{(2nb^2+1)} \{ -2\ \alpha_t\ To\ E_1(r) + 2\ \alpha_t\ To\ n\ (a^2-b^2) \{ \int r^2 e^{nr^2} dr \}_{r=b} +$$

$$+ 2\ b\ \alpha_t\ To\ E_1'(b) - b\ \alpha_t\ To\ nb^2\ e^{nb2}\ (a^2-b^2)\ +$$

$$+ 4\ b^2\ \alpha_t\ To\ n\ \{ \int r^2\ e^{nr^2}\ dr\ \}_{r=b} - 2\ \alpha_t\ b^3\ To\ \}$$

bulunur. Bu değerin (VI.10.2)'de yerleştirilmesi halinde

$$\sigma_{rr}' = -4\,\mu\, \frac{e^{n(b^2-r^2)}\ (2nr^2+1)}{r^3(2nb^2+1)} \{ -\ 2\ \alpha_t\ To\ E_1(b) + 2\ \alpha_t\ \ To.n.$$

$$.\ (a^2-b^2)\{ \int\ r^2\ e^{nr^2} dr\ \}_{b=r} + 2b\ \alpha_t\ To\ E_1'(b) - b^3\ \alpha_t\ \ Ton\ e^{nb2}\ .$$

$$.\ (a^2-b^2) + 4\ b^2\ \ \alpha_t\ To\ n\ \{ \int r^2\ e^{nr2}\ dr\}_{r=b}\ -\ 2\ \ \alpha_t\ \ b^3\ To\} \quad (VI.10.3)$$

elde edilir.

(VI.9.5) ve (VI.10.3)'den toplam gerilme

$$\sigma_{rr} = -\ 4\mu\ \frac{e^{n(b^2-r^2)}\ (2nr^2+1)}{(2nb^2+1)r^3} \{ \ -\ 2\ \alpha_t\ To\ E_1(b) + 2\ \alpha_t\ To\ n\ .$$

$$\cdot\ (a^2-b^2)\ \{ \int r^2 e^{nr^2} dr \}_{r=b}\ \ +\ 2\ b\ \ \alpha_t\ To\ E_1'(b) - b^3\ \alpha_t\ To\ n\ e^{nb2}\ ;$$

$$.(a^2-b^2) + 4b^2\,\alpha_t\,To.n\,\left\{ r^2 e^{nr^2} dr \right\}_{r=b} - 2\,\alpha_t b^3 To\} + 2\mu\,\{$$

$$\{ -\frac{4\,\alpha_t\,To}{r^3}\,E_1(r) + \frac{4\,\alpha_t\,To\,n}{r^3}\{\int r^2 e^{nr^2} dr\}\,(a^2-r^2) + \frac{4\,\alpha_t\,To}{r^2}\,.$$

$$.E_1'(r) - 2\,\alpha_t\,To\,n\,e^{nr^2}\,(a^2-r^2) + \frac{8\,\alpha_t\,To\,n\{\int r^2 e^{nr^2} dr\}}{r}\,\} -$$

$$- 4\,\alpha_t\,To\,\}$$

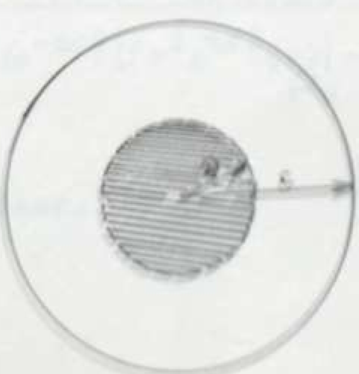
elde edilir.

VI.11. k = 2 İÇİN KÜRESEL THERMAL İNCLUSİON İÇEREN DOLU KÜRE HALİ

Dolu kürenin sıcaklık alanı verilmiş "a" yarıçaplı küresel bir bölge içermesi halinde sınır şartı

$$\left| \sigma_{rr}' + \sigma_{rr}'' \right|_{r=c} = 0 \qquad (VI.11.1)$$

şeklinde verilir.



(VI.10.2)'den alınan $\sigma_{rr}' = 2\mu A \{ 2-3 \frac{e^{-nr2}}{r^2} \cdot$
$(\int r^2 e^{nr2} dr)\} - 2 \frac{e^{-nr2}}{r^3} (\int r^2 enr^2 dr)$ terimi ile (VI.9.5) gerilme ifadesinin (VI.11.1) sınır şartına yerleştirilmesi halinde

$$A = \frac{4 \quad \alpha_t \text{ To } E_1(a)}{C^3\{ 2-3 \frac{e^{-nc2}}{c} (\int r^2 e^{nr2} dr)\Big|_{r=c} - 2 \frac{e^{-nc2}}{c3} (\int r^2 e^{nr2} dr)\Big|_{r=c} \}}$$

bulunur. Buradan

$$\sigma_{rr}' = \frac{8\mu \; \alpha_t \text{ To } E_1(a) \{ 2-3nr^{-1} e^{-nr2} (\int r^2 e^{nr2} dr) - 2r^{-3} e^{-nr2} \int r^2 e^{nr2} dr)}{C^3\{ 2-3 \, nc^{-1} e^{-nc2} (\int r^2 \, e^{nr2} dr)\Big|_{r=c} - 2 \, c^{-3} e^{-nc2} (\int r^2 e^{nr2} dr)\Big|_{r=c} \}}$$

elde edilir.

(VI.11.2), (VI.9.5)'den toplam gerilme

$$\sigma_{rr} = 8\mu \; \alpha_t \text{ To} \int_0^a \{ e^{n\rho 2} \rho^2 - \{ \frac{2n}{\rho} \; \rho^2 \; e^{n\rho 2} \, d\rho\} \; d\rho \; -$$

$$- \frac{\{2-3 \; nr^{-1} e^{-nr2} \{\int r^2 e^{nr2} dr\} - 2 \; r^{-3} e^{-nr2} (\int r^2 e^{nr2} dr)\}}{c^3 \{2-3n \; c^{-1} \{\int e^{-nc2} (\int r^2 e^{nr2} dr)\Big|_{r=c} - 2c^{-3} e^{-nc3} (\int r^2 e^{nr2} dr)\}\}\Big|_{r=c}} \frac{1}{r^3}$$

şeklinde bulunur.

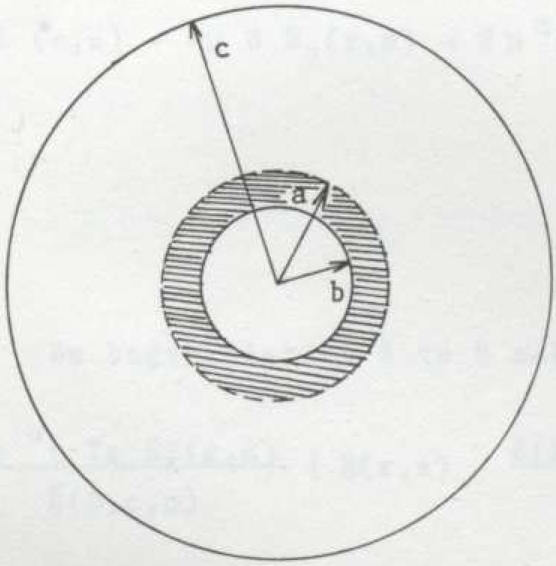
VI.12. THERMAL İNCLUSİON İÇEREN KALIN KÜRESEL KABUK HALİ

Kalın küresel kabuk halinde sınır şartları

$$\left| \sigma_{rr}' + \sigma_{rr}'' \right|_{r=b} = 0 \qquad (VI.12.1)$$

$$\left| \sigma_{rr}' + \sigma_{rr}'' \right|_{r=c} = 0 \qquad (VI.12.2)$$

şeklinde verilir.



$$E(r,n) = 2-3\,\frac{ne^{-nr2}}{r^2}\,(\int r^2 e^{nr2}dr)-2\,\frac{e^{-nr2}}{r^3}\,(\int r^2 e^{nr2}dr)$$

$$E_2(r,n) = \frac{e^{-nr2}}{r^3}\,(2nr^2+1)$$

$$F(r,n) = -\frac{4}{r^3}E_1(r) + \frac{4n}{r^3}\{\int r^2 e^{nr2} dr\}\ (a^2-r^2) +$$

$$+ \frac{4E'_1(r)}{r^2} - 2\,ne^{nr^2}(a^2-r^2) + \frac{8n}{r}\{\int r^2 e^{nr2} dr\}$$

fonksiyon ifadelerinin tanımlanması halinde, (VI.10.2), (VI.9.5) ve (VI.12.1)'den

$$\left| 2\mu A\, E\,(r,n) - 4\mu B\, E_2(r,n) + 2\mu\,^{\alpha}t\ To\ F(r,n) - 8\mu^{\alpha}t\ T_o \right|_{r=b} = 0$$

yazılır. (VI.10.2), (VI.9.7) ve (VI.12.2)'den ise

$$\left| 2\mu A\, E\,(r,n) - 4\mu\, B\, E_2(r,n) - 8\mu\,^{\alpha}t\ To\ \frac{E1(a)}{r^3} \right|_{r=c} = 0$$

bulunur.

Bu bağıntılardan A ve B sabitleri hesaplanarak

$$\sigma_{rr} = \frac{8\mu\,^{\alpha}t\ To\ E2(c,n)}{\bar{E}(b,c,n)}\ \{ E(r,n) - \frac{E(b,n)\ E2(r,n)}{E_2\ (b,n)} \} +$$

$$+ \frac{8\mu\alpha t\ To\ E1(a)}{\bar{E}(b,c,n).c^3}\ \{E(b,n)\ E_2(r,n) - E(r,n)\ E_2(b,n)\}$$

$$+ \frac{2\mu\,^{\alpha}t\ To\ F(b)\ E2(c,n)}{\bar{E}(b,c,n)}\{ \frac{E(b,n)\ E2(r,n)}{E_2(b,n)} - E\ (r,n)\}$$

$$+ 2\mu^{\alpha} t \, To \, F(b) \left\{ 1 - \frac{E2(r,n)}{E2(b,n)} \right\} + 8\mu^{\alpha} t \, To \left\{ 1 - \frac{E2(r,n)}{E2(b,n)} \right\}$$

$$b < r < a$$

$$\sigma_{rr} = \frac{8\mu^{\alpha} t \, To}{E(b,c,n)} \{ E(r,n) E_2(c,n) - E(c,n) E_2(r,n) \} +$$

$$+ \frac{2\mu^{\alpha} t \, To \, F(b)}{\bar{E}(b,c,n)} \{ E(c,n) E_2(r,n) - E(r,n) E_2(c,n) \}$$

$$+ \frac{8\mu^{\alpha} t \, To \, E1(a) \, E2(b,n)}{\bar{E}(b,c,n) c^3} \left\{ \frac{E(c,n) \, E2(r,n)}{E_2(c,n)} - E(r,n) \right\}$$

$$+ 8\mu^{\alpha} t \, To \, E_1(a) \left\{ \frac{E2(r,n)}{E_2(c,n).c3} - \frac{1}{r^3} \right\} \quad a < r < c$$

gerilmeler elde edilir.

$\bar{E} = E(b,n) E_2(c,n) - E(c,n) E_2(b,n)$ şeklinde tanımlanmıştır.

EKLER

EK-1

(II.4.1) E.Betti teoreminin ifadesinde

$$F_i = - \sigma_{ij,j}$$

$$P_i = \sigma_{ij} n_j$$

yerleştirildiğinde

$$\int_V F_i U'_i \, dV + \int_\Gamma P_i \, U'_i \, d\Gamma = - \int_V \sigma_{ij,j} \, U'_i \, dV + \int_\Gamma \sigma_{ij} n_j U'_i d\Gamma$$

elde edilir. Buradan

$$\int_\Gamma \sigma_{ij} n_j U'_i \, d\Gamma = \int_V (\sigma_{ij} \, U'_i),_j \, dV$$

diverjans teoremi ifadesinin kullanılmasıyla

$$\int_\Gamma \sigma_{ij} n_j U'_i \, d\Gamma = \int_V \sigma_{ij,j} \, U_i \, dV + \int_V \sigma_{ij} U'_{i,j} \, dV$$

bulunur. Bu bağıntıdan yararlanarak

$$\int_V F_i U'_i \, dV + \int_\Gamma P_i U'_i \, d\Gamma = \int_V \sigma_{ij} \, U'_{i,j} \, dV$$

yazılır.

$$\sigma_{ij} = \lambda\, e\, \delta_{ij} + \mu (U_{i,j} + U_{j,i}) \text{ olduğundan}$$

$$\int_V F_i U'_i \, dV + \int_\Gamma P_i U'_i \, d\Gamma = \int_V \{ \lambda e U'_{i,j} \delta_{ij} + \mu U_{i,j} U'_{i,j}$$

$$+ \mu U_{j,i} U'_{i,j} \} \, dV$$

olur.

EK-2

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} + \{\frac{1}{\rho} + nk\rho^{k-1}\}\frac{dU}{d\rho} + \{-\frac{1}{\rho^2} + nk\frac{m}{m+2}\rho^{k-2}\}U = 0$$

denkleminin $m = \frac{2k}{2-k}$ ve $k = \frac{1}{a+1}$, $a = 0,1,2,3, \ldots$ olması halinde çözümü aranmaktadır.

$U = V.e^{-\frac{n}{2}\rho^k}$ dönüşümü uygulanırsa

$$V'' + \frac{1}{\rho}V' - \{\frac{n^2k^2}{4}\rho^{2(k-1)} + \frac{1}{\rho^2}\} V = 0$$

denklemi bulunur. Buradan $z = \rho^k$ dönüşümü sonucunda

$$\frac{d^2V}{dz^2} + \frac{1}{Z}\frac{dV}{dz} - (\frac{n^2}{4} + \frac{1}{k^2z^2})V = 0$$

şeklindeki Bessel diferansiyel denklemi elde edilir.

$\nu^2 = \frac{1}{k^2}$ olmak üzere bu diferansiyel denklemin çözümü

$$V = A\, I_\nu(\frac{n}{2}Z) + B\, K_\nu(\frac{n}{2}Z)$$

şeklinde verilir. Buradan

$$U = Ae^{-\frac{n}{2}\rho^k} I_\nu(\frac{n}{2}\rho^k) + B\, e^{-\frac{n}{2}\rho^k} K_\nu(\frac{n}{2}\rho^k)$$

olarak aranılan çözüm bulunur.

EK-3

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} + \{ \frac{2}{\rho} + nk\rho^{k-1} \} \frac{dU}{d\rho} + \{ -\frac{2}{\rho 2} + \frac{2\ mnk\rho^{\ k-2}}{m+2} \} U = 0$$

denkleminin $m = \frac{2(k+1)}{3-k}$ ve $k = \frac{3}{b+2}$

$b = 0,2,4,6,\ ...$ olması halinde çözümü aranmaktadır.

$U = Ve^{-\frac{n}{2}\rho^k}$ dönüşümü uygulanırsa

$$V'' + \frac{2}{\rho} V' - (\frac{2}{\rho^2} + \frac{n^2k^2}{4} \rho^{2(k-1)}) \quad V = 0$$

bulunur. $V = W\rho^{-1/2}$ dönüşümü sonucunda bu denklem

$$W'' + \frac{1}{\rho} W' - \{ \frac{9}{4\rho^2} + \frac{n^2k^2}{4} \rho^{2(k-1)} \} W = 0$$

şeklini alır.

Son olarak $Z = \rho^{k}$ dönüşümü ile

$$\frac{d^2W}{dz^2} + \frac{1}{Z} \frac{dW}{dZ} - (\frac{9/4}{k^2z^2} + \frac{n^2}{4}) W = 0$$

Bessel diferansiyel denklemi elde edilir.

$\nu^{2} = \frac{9}{4k^2}$ olmak üzere

$$W = A\, I_\nu \left(\frac{n}{2} z\right) + B\, K_\nu \left(\frac{n}{2} Z\right),$$

$$U = A\, e^{-\frac{n}{2}\rho^k} \rho^{-1/2} I_\nu\left(\frac{n}{2}\rho^k\right) + Be^{-\frac{n}{2}\rho^k} \rho^{-1/2} K_\nu\left(\frac{n}{2}\rho^k\right)$$

elde edilir.

EK - 4

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} + \{\frac{2}{\rho} + n\} \frac{dU}{d\rho} + \{ - \frac{2}{\rho 2} + \frac{n}{\rho} \} U = 0$$

denkleminin çözümü için

$U = Ve^{-\frac{n}{2}\rho}$ dönüşümü uygulanırsa

$$V'' + \frac{2}{\rho} V' - \{ \frac{2}{\rho^2} + \frac{n^2}{4} \} V = 0$$

bulunur.

$V = W\rho^{-1/2}$ dönüşümü sonucunda

$$\frac{d^2W}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dW}{d\rho} - \{ \frac{9/4}{\rho^2} + \frac{n^2}{4} \} W = 0$$

şeklindeki Bessel diferansiyel denklemi elde edilir.

Bu denklemin çözümü

$$W = A\, I_{\frac{3}{2}} (\frac{n}{2}\rho) + B\, I_{-\frac{3}{2}} (\frac{n}{2}\rho)$$

ifadesi ile verilir. Buna göre aranılan çözüm

$$U = A\, e^{-\frac{n}{2}\rho} \rho^{-\frac{1}{2}} I_{\frac{3}{2}} (\frac{n}{2}\rho) + B\, e^{-\frac{n}{2}\rho} \rho^{-\frac{1}{2}} I_{-\frac{3}{2}} (\frac{n}{2}\rho)$$

şeklinde bulunur.

KAYNAKLAR

(1) Thermoelasticity, W.Nowacki

(2) Elasticity, Robert WM Little

(3) Temperature problem of the theory of elasticity, V.M. Maysel, 1951

(4) Elastisite modülü değişken ortam için bazı elastisite problemlerinin çözümü, İbrahim Bakırtaş, Doktora Tezi, İ.T.Ü. Yayını, 1977

(5) Mathematical theory of elasticity, I.S. Sokolnikoff, 1956

(6) On the integration of the termoelastic equations, J.N. Goodier Phil.Mag., 1937

(7) Theory of Thermal Stresses, B.Boley, J.H.Weiner New York - London 1960

(8) Warmespannungen İnfolge Stationarer Temperaturfelder, E. Melan, H.Parkus, Springer-Verlag, 1953

(9) Thermal Stresses and Strains in Concrete Blocks Based on the Theory of Elasticity, G.N. Maslov, İzv. Nauch-noisled. İnst. Gidrotehniki, 1934

(10) Structural Analysis for Thermal Shock Stroiizdat, A.P. Sinitsy, 1971

(11) Prikl. Mat. iMekh., V.I. Danilvskaya, 1950

(12) Mechanical Properties Of Metals, M.L. Bernstein and V.A. Zaimovsky M.İ.R. Publishers, 1979

(13) Mathematical Methods of the Theory Of Elasticity, V.Z. Parton, P.I.Perlin, Mir Publishers, 1981

(14) Principles of Thermodynamics, J.S.Hsieh, Mc Graw-Hill, 1975

(15) Bessel Functions for Engineers, N.W.McLachlan, Oxford at the Clarendon Press, 1955

ADAYIN ÖZGEÇMİŞİ

Uğur Güven 25 Eylül 1952'de Mardin'de doğdu. 1959'da Manyas'da başladığı ilk öğrenimine 1960'dan itibaren Karaman'da Gazi Mustafa Kemal ilkokulunda devam etti. Orta öğreniminide aynı ilçede görerek 1970'de Karaman Lisesinden mezun oldu ve aynı sene İ.T.Ü M.M.F Maden Mühendisliği bölümüne girdi. 1971'de yeniden sınavlara girerek İ.T.Ü. Makina Fakültesi Genel Makina Mühendisliğini kazandı. 20 Mayıs 1977'de bu Fakültenin Kuvvet ve Isı kolunu bitirdi. 1.7.1977 tarihinden 1.1.1980'e kadar Etibank Kırka Boraks İşletmesinde, daha sonraları İstanbul Su Arıtım tesislerini yapan C.T.E'de ve sözleşmeli olarak E.D.M.M.A, Vatan Mühendislik Fakültesinde çalıştı. Bu arada 7.11.1980'de Y.Ü'de Isı Proses dalında başladığı Lisans üstü öğrenimini 8.7.1982'de tamamladı. Halen 8 Mayıs 1982'de girdiği Y.Ü. Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği Mukavemet Bilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.