YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Lie Grup. Üzer. Line. Kont. Sist.

Doktora Tezi

Ayşe K. Hacıbekiroğlu

1995

Mat

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LIE GRUPLARI ÜZERİNDE

LİNEER KONTROL SİSTEMLERİ

Ayşe Kara HACIBEKİROĞLU

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Hamit AVCI

İSTANBUL, 1995

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LIE GRUPLARI ÜZERİNDE LİNEER KONTROL SİSTEMLERİ

Ayşe Kara HACIBEKİROĞLU

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Hamit AVCI

İSTANBUL, 1995

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR

Bu tezin konusu Uluslararası Teorik Fizik Merkezi ICTP (Trieste-İtalya) de Prof.Dr. Victor Ayala danışmanlığındaki Diploma Kursu tezi çalışması sırasında seçilmiştir.

Tez konusunun seçimindeki katkılarından, araştırmanın her aşamasında verdiği yönlendirici destekten, kaynak bulma ve araştırmanın sonuca ulaşmasındaki yardımlarından ötürü Prof.Dr. Victor Ayala 'ya ve danışman hocam Prof. Hamit Avcı 'ya; çalışmaya sağladıkları maddi desteklerden ötürü Uluslararası Teorik Fizik Merkezi ICTP (Internetional Centre for Theoretical Physics, Trieste, İtalya) 'ya, Merkezin Matematik Bölümü Başkanı Prof.Dr.Narasimhan 'a, ICTP Matematik Diploma Kursu Koordinatörü Prof.Dr. C. Chidume 'ye, TWAS (The Third World Academy of Sciences, Trieste, İtalya) 'ye ve Proyecto Fondecyt No: 1941137 CONICYT (Şili) 'ye; İtalyadaki çalışmalarımı destekleyen ve teşvik eden Bölüm Başkanımız Prof. Yaşar Özdemir 'e; yazılım aşamasındaki katkılarından ötürü Arş.Gör. Selmahan Selim 'e; çalışmanın her aşamasında destek veren eşim Arş.Gör. Gürsel Hacıbekiroğlu 'na teşekkür ederim.

Arş.Gör. Ayşe (Kara) Hacıbekiroğlu

Kasım, 1995

ÖZET

"Lie Grupları Üzerinde Lineer Kontrol Sistemleri" adlı bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

I. Bölümde, kontrol sistemleri hakkında genel bilgileri verdik.

II. Bölümde, V. Ayala ve J. Tirao 'nun yaptığı "Lie Grupları Üzerinde Lineer Vektör Alanlarının Kontrol Edilebilirliği" adlı çalışmadan Lie grupları üzerinde lineer kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirlik problemini inceledik.

III. Bölüm ise, matematiksel açıdan Kontrol Sistem Teoriye bu tezin yaptığı katkıdır ve bu bölümde yer alan tüm sonuçlar orijinaldir. Lie grupları üzerindeki lineer kontrol sistemleri için yerel gözlenebilirliği ve global gözlenebilirliği karakterize eden cebirsel koşulları bulduk. Sistemimiz için minimal gerçekleştirme elde ettik. Ayrıca, Lie grubunun etkisiz elemanının denklik sınıfının Lie cebirini hesaplamak için G nin eş-teğet demeti üzerinde bir algoritma verdik.

SUMMARY

This thesis with the title "Linear Control Systems on Lie Groups" contains three chapters.

In Chapter I, we gave general facts about control systems.

In Chapter II, we studied controllability problem of linear control systems on Lie groups from the work "Controllability of Linear Vector Fields on Lie Groups" of V. Ayala and J. Tirao.

Chapter III is the contribution of this thesis to Control System Theory from the mathematical point of view and in this chapter, all results are original. We found algebraic conditions to characterize locally observability and globally observability for linear control systems on Lie groups. We obtained minimal realization for our system. Also, we gave an algorithm on the co-tangent bundle of G to calculate Lie algebra of equivalence class of neutral element of Lie group.

GİRİŞ

Bu tezin temel amacı matematiksel bakış açısından Kontrol Sistem Teoriye katkıda bulunmaktır. Daha açık bir ifade ile, Kontrol Teoride en önemli ve iyi bilinen sınıfı, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Lineer Kontrol Sistemlerini içeren yeni bir $\mathcal{L}$ sınıfı olarak *"Lie grupları üzerindeki Lineer Kontrol Sistemleri"* ni incelemek için Topoloji, Lie grupları, Lie cebirleri ve Diferansiyel Geometri kullanıyoruz.

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde teori hakkında genel bilgileri veriyoruz. II. bölüm, Ayala ve Tirao'nun $\mathcal{L}$ nin kontrollenebilirlik problemi hakkındaki sonuçlarını, [4], içermektedir ve III. bölümde de, $\mathcal{L}$ nin gözlenebilirlği problemi hakkındaki tüm sonuçlar orijinal olup, bu bölümde tezin konuya yaptığı katkı yer almaktadır, [3].

Tanımdan dolayı, bir Σ genel kontrol sistemi, sonlu boyutlu bir diferansiyellenebilen M manifoldu, durum (state) uzayı, vektör alanlarının bir D ailesi, kontroller, M üzerinden bir diferansiyellenebilen N manifolduna tanımlı bir gözlenebilirlik h fonksiyonu ve çıkış uzayı ile belirlenir. x, M nin bir elemanı olsun. Σ için kontrollenebilirlik problemi M ve D ile ilgilidir ve doğal olarak aşağıdaki sorudan kaynaklanır : x, M ve D üzerindeki hangi koşullar altında, D deki vektör alanlarının neden olduğu negatif olmayan zamanlı yerel difeomorfizmlerin tüm bileşkelerini kullandığımızda x den başlayarak M nin her bir y elemanına ulaşmak mümkündür? Gözlenebilirlik problemi ise aşağıdaki sorudan kaynaklanır : Sadece h altında N deki görüntüye bakarak Σ nın dinamiğini oluşturmak mümkün olabilir mi? Diğer bir deyişle, $y \in M$ verildiğinde, x den ve y den başlayarak h tarafından N deki Σ nın dinamikleri farklı olacak şekilde bir strateji (kontrol) var mıdır?

Bu çalışmada, bu iki problemi $\mathcal{L}$ üzerinde inceledik. Tanımdan dolayı, n boyutlu bir G Lie grubu üzerindeki bir $\mathcal{L}$ lineer kontrol sisteminin bir D dinamiği, X sapan (drift) vektör alanı yani G nin bir sonsuzküçük (infinitesimal) otomorfizmi ve G nin $L(G)$ Lie cebirindeki $Y^1, \ldots, Y^m$ kontrol vektör elemanları ile verilir. Bu durumda, N manifoldu aynı zamanda bir Lie grubu ve h de Lie gruplarının bir homomorfizmidir.

II. bölümde, $\mathcal{L}$ nin kontrol edilebilirlik problemi için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. III. bölümde ise, $\mathcal{L}$ nin yerel ve global gözlenebilirlik problemi için gerek ve yeter koşulları veriyoruz.

$\mathcal{L}$, $\mathbb{R}^n$ değişmeli Lie grubu üzerindeki lineer kontrol sistemlerinin sınıfını kapsar ve bu tezdeki sonuçlar, Kalman et al, [7], [6], a ait $\mathbb{R}^n$ üzerindeki kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik ile ilgili iyi bilinen temel teoremleri keyfi bir G Lie grubuna genelleştirmektedir.

Buradan bölümlerin temel esaslarına geçebiliriz.

I. Bölüm "*Genel Kontrol Sistemleri*"

Σ keyfi bir kontrol sistemi olsun. M manifoldundaki her bir x durumunun yörüngesini ve Σ tarafından x in bulunabilirlik (accessibility) kümelerini tanımlıyoruz. Kontrol edilebilirlik kavramını veriyoruz ve Yörünge Teoremi'ni kuruyoruz. Kontrol Teorideki bu önemli sonuç H. Sussmann, [10], a aittir. Özellikle bu teorem, M üzerindeki kontrol edilebilirlik probleminin yörüngelerine indirgenmesine olanak verir. İspatı detayları ile veriyoruz. Aynı zamanda, M nin teğet demeti üzerinde, integrallenebilir manifoldları tamamen Σ nın yörüngeleri olacak şekilde bir Δ integrallenebilir dağılımını sağlıyoruz ve bir kaç örnek veriyoruz. Gözlenebilirlik ile ilgili olarak Σ nın neden olduğu M üzerinde ayırd edilemeyen bağıntı kavramını veriyoruz ve, yerel ve global gözlenebilirliği tanımlıyoruz. Bu bölümü, çeşitli örneklerle sonuçlandırıyoruz.

II. Bölüm "*Lie Grupları Üzerinde Lineer Kontrol Sistemlerin Kontrol Edilebilirliği*"

Bu bölümde, [4] deki sonuçları elde ediyoruz.

İlk olarak, Yardımcı Teorem 2.3.1 de, $L(G)$ nin G üzerindeki tüm pürüzsüz (smooth) vektör alanlarının ailesi olan $\mathcal{X}(G)$ nin bir $ad(X)$-invariant Lie altcebiri olduğunu gösteriyoruz. Teorem 2.3.3 de, eğer

$$\mathcal{H} = geren_{\mathcal{L}.A.}\{Y^1, \dots, Y^m\}$$

kontrol vektörleri tarafından üretilen Lie cebirini gösteriyorsa, o taktirde Σ nın $L(\Sigma)$ Lie cebirini elde ediyoruz, yani X ve $\mathcal{H}$ tarafından üretilen cebir, $\mathcal{H}$ yi içeren

$L(G)$ nin en küçük $ad(X)$-invariant Lie altcebiri $\langle X \mid \mathcal{H}\rangle$ ile sonsuzküçük (infinitesimal) X otomorfizmi ile üretilmiş (induced by) $T = (X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 1-parametreli grubun $L(T)$ Lie cebirinin yarı-direkt çarpımına izomorfiktir. Yani

$$L(\Sigma) \cong \langle X|\mathcal{H}\rangle \otimes L(T)$$

dır. Bu sonuç ve Yörünge Teoreminden dolayı, Teorem 2.3.5 de, eğer H, $\mathcal{H}$ Lie cebirli bağlantılı Lie grubu ise, o taktirde G nin e etkisiz elemanının $G_\Sigma(e)$ yörüngesinin H yı içeren en küçük T-invariant $\langle X \mid H\rangle$ Lie altgrubu olduğunu gösteriyoruz. Yani

$$G_\Sigma(e) = \langle X|H\rangle$$

dir. Teorem 2.3.5 de, Lie cebiri rank koşulunu veriyoruz. Yani

$$boy.geren_{\mathcal{L}.A.}\{Y^j, ad^i(X)(Y^j)|0 \le i \le p, 1 \le j \le m\} = n$$

Σ nın geçişliliği (ve dolayısıyla kontrol edilebilirliği) için gerekli bir koşuldur. Burada p en küçük tamsayıdır ve $ad(X) - \mathcal{H}$ dizisi

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0 + [X, \mathcal{H}],$$

$$\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_{i-1} + [X, \mathcal{H}_{i-1}], \quad i \ge 1$$

stabilize edilmiş Lie parantezleri alınarak oluşturulmuştur.

$\mathbb{R}^n$ haline aykırı olarak, bu koşul kontrol edilebilirliği karakterize etmez. Bunu göstermek için 3-boyutlu basit bağlantılı sıfır güçlü (nilpotent) Heisenberg Lie grubunda aykırı örnek veriyoruz. Diğer taraftan, Teorem 2.3.8 de, rank koşulunu veriyoruz. Yani

$$boy.geren\{Y^j, ad^i(X)(Y^j)|0 \le i \le p, 1 \le j \le m\} = n$$

Σ nın kontrol edilebilirliği için yeterli bir koşuldur. Özellikle, Sonuç 2.3.9 da, Kalman Teoremini, [7], Abelian bağlantılı Lie gruplarına genelleştiriyoruz. Aynı zamanda, L. Markus, [9], a ait kontrol edilebilirlik sonuçlarını genelleştiriyoruz. Çeşitli örneklerle bu kısmı sonuçlandırıyoruz.

III. Bölüm "*Lie Grupları Üzerinde Lineer Kontrol Sistemlerinin Gözlenebilirliği*"

Bu bölüm, çalışmamızın Matematiksel Kontrol Sistem Teoriye yaptığı katkıdır.

İlk olarak, Önerme 3.2.1 de, G nin e etkisiz elemanının I denklik sınıfının h nın çekirdeğinin bir G_Σ-invariant normal kapalı Lie altgrubu olduğunu ispatlıyoruz. Önerme 3.2.2 de, I nın $\mathcal{I}$ Lie cebirinin $L(G)$ nin bir $ad(X)$-invariant altcebiri olduğunu ispatlıyoruz. Bu sonuç, $\mathcal{I}$ nın bir cebirsel karakterizasyonunu vermeye olanak sağlar. Gerçekten, Önerme 3.2.3 de

$$\mathcal{I} = \bigcap_{i=0}^{n-1} ad^{-i}(X)(\mathcal{K})$$

olduğunu ispatlıyoruz, burada $\mathcal{K}$, $Ker(h)$ nın Lie cebiridir.

Sonuçta, $\mathcal{L}$ nin gözlenebilirliğini karakterize ediyoruz. Teorem 3.2.4 de,

$$\Sigma \quad yerel \quad gözlenebilirdir \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} = 0$$

olduğunu ispatlıyoruz. Teorem 3.2.5 de, Σ gözlenebilirdir $\Leftrightarrow$

a) $\mathcal{I} = 0$,

b) $Fix(T) \cap Ker(h) = \{e\}$,

olduğunu ispatlıyoruz, burada $Fix(T)$ T-etkisiyle (T-action) G deki sabit noktaların kümesidir.

Bu sonuçlar, $\mathbb{R}^n$üzerindeki gözlenebilirlik hakkındaki iyi bilinen teoremleri, [6], genelleştirir. Bundan başka, bir $\Sigma = (G, D, h, V)$ geçişli lineer kontrol sistemi için minimal gerçekleştirme (realization) elde ediyoruz. Yani yeni bir

$$\tilde{\Sigma} = (I\backslash G, \pi_*(D), \tilde{h}, V)$$

sistemini oluşturuyoruz. Burada $\pi : G \to I\backslash G$, $\tilde{\Sigma}$ gözlenebilir ve aşağıdaki şema değişmeli olacak şekilde $I\backslash G$ Lie grubu üzerine kanonik izdüşümdür :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & & V \\ & I\backslash G \arrow[ur, "\tilde{h}"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{L}$ nin gözlenebilirlik özeliği güçlü bir şekilde I ye bağlıdır. I yı oluşturmak için, ilk olarak, I nın $\mathcal{I}$ Lie cebirinin hesaplanmasına olanak veren G nin T^*G eş-teğet demetinde bir algoritma veriyoruz. Gerçekten, $L(G)$ nin her bir $\mathcal{P}$ Lie altcebiri

$$\Delta_{\mathcal{P}}^{\perp}(g) = (R_{g^{-1}})^*(\mathcal{P}^{\perp}), \quad g \in G$$

şeklinde tanımlı G üzerinde bir sağ-invariant ortogonal eş-dağılım üretir. $\Delta_{\mathcal{I}}^{\perp}$ nın $\Delta_{\mathcal{K}}^{\perp}$ yı kapsayan en küçük X-invariant sağ-invariant eş-dağılım olduğunu ispatlıyoruz ve Sonuç 3.3.3 de,

$$\Theta_0 = \Delta_{\mathcal{K}}^{\perp}, \quad \Theta_k = \Theta_{k-1} + L_X(\Theta_{k-1})$$

dizisinin $\Delta_{\mathcal{I}}^{\perp}$ ya yakınsadığını ispatlamak için Isidori-algoritmasını, [6], kullanıyoruz. Özellikle, bu algoritma, "*flag*" olarak adlandırılan

$$\mathcal{K}^{\perp} = \Theta_0(e) \subset \Theta_1(e) \subset ... \subset \Theta_{k^*}(e) = \mathcal{I}^{\perp}$$

sağ-invariant altuzayların sonlu bir dizisini verir. Böylece, I yi elde etmek için aşağıdaki algoritma gözönüne alınabilir :

1. $Ker(h)$ nin hesaplanması,

2. $\mathcal{K}$ Lie altcebiri için bir $\mathcal{B} = \{Z^1, ..., Z^l\}$ tabanının seçilmesi,

3. $\mathcal{B}$-dual $\mathcal{B}^{\perp} = \{w_1, ..., w_{n-l}\}$ tabanının bulunması,

4. (Sonuç 3.3.3 ü kullanarak) $\mathcal{I}^{\perp}$ için $ad(X)(\mathcal{B}^{\perp})$-birleşmiş (-associated) tabanın, yani

$$ad(X)(\mathcal{B}^{\perp}) = \{ad^i(X)(w_j) \mid 0 \leq i \leq k^*, 1 \leq j \leq n-l\}$$

bulunması, burada

$$ad^0(X) = Id, \quad ad(X)(w) = L_X(w) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (X_t)^* w_{X_t(\cdot)}$$

$$ad^i(X)(w) = ad(ad^{i-1}(X)(w)), \quad i \geq 1, \quad dır.$$

5. $\mathcal{I} = geren(ad(X)(\mathcal{B}^{\perp}))^{\perp}$,

6. İntegrasyonla yani $\mathcal{I}$ ve T_eI teğet uzayı arasındaki izomorfizm ile I yı oluşturulabilir. Bu bölümün sonunda da çeşitli örnekler veriyoruz.

BÖLÜM I
GENEL KONTROL SİSTEMLERİ

1.1 Giriş

M bir diferansiyellenebilen manifold olsun ve $\mathcal{X}(M)$ de, M nin açık altkümeleri üzerinde tanımlı tüm pürüzsüz (smooth) vektör alanlarının ailesini göstersin. Pürüzsüz (smooth) kavramını C^∞ veya analitik olarak düşüneceğiz. Her bir $X \in \mathcal{X}(M)$, M üzerinde yerel difeomorfizmlerin bir 1-parametreli grubunu tanımlar, yani X için olanaklı her bir $t \in \mathbb{R}$ için, manifoldlar üzerinde vektör alanları vasıtası ile üretilmiş adi diferansiyel denklemlerin varlık-teklik teoreminden dolayı, [14],

$$X_t : dom(X_t) \subset M \to M \tag{1.1}$$

nin bir yerel difeomorfizm olduğu elde edilir ve eğer $\gamma^X(\cdot, x)$, x noktasındaki vektör alanının integral eğrisi ise, o taktirde

$$X_t(x) = \gamma^X(t, x) \tag{1.2}$$

ile tanımlıdır. Kuşkusuz,

$$X_{-t} : X_t(dom(X_t)) \subset M \to dom(X_t) \subset M \tag{1.3}$$

tersidir. Ayrıca, tanımlandığında,

i) $X_t \circ X_s = X_{t+s}$,

ii) $(X_t)^{-1} = X_{-t}$,

iii) $X_0 = Id$ dir.

1.1.1 İlk Tanım : Bir Σ *control sistemi*, $\Sigma = (M, D)$ şeklinde bir ikili olarak tanımlanır. Burada M diferansiyellenebilen bir manifold ve D, $\mathcal{X}(M)$ nin bir altailesidir. ◇

1.1.2 Uyarılar :

i) M ye Σ nın *durum uzayı* denir.

ii) D nin elemanları sistemin stratejileri ve Σ nın kontrolleridirler.

iii) Σ bir

$$G_\Sigma = \{X^1_{t_1} \circ X^2_{t_2} \circ \ldots \circ X^r_{t_r} \mid X^j \in D, t_j \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{N}\} \tag{1.4}$$

"*sözde (pseudo) grubu*" tanımlar ve Σ tarafından M de x in yörüngesi, x de G_Σ nın etkisi (action) ile verilir :

$$G_\Sigma(x) = \{\varphi(x) \mid \varphi \in G_\Sigma\}. \tag{1.5}$$

1.1.3 Tanım : Eğer $G_\Sigma(x) = M$ olacak şekilde $x \in M$ varsa, Σ sistemine ***geçişlidir*** denir. $\diamond$

$$x \sim y \Leftrightarrow y \in G_\Sigma(x) \tag{1.6}$$

ile G_Σ ile M üzerinde "$\sim$" bağıntısını tanımlayalım. Elbette, "$\sim$" bir denklik bağıntısıdır. Özellikle, eğer Σ geçişli ise, o taktirde

$$G_\Sigma(x) = M, \quad \forall x \in M \tag{1.7}$$

dir. Ayrıca Σ ile birleşmiş,

$$S_\Sigma = \{X^1_{t_1} \circ X^2_{t_2} \circ \ldots \circ X^r_{t_r} \mid X^j \in D, \quad t_j \geq 0, \quad r \in \mathbb{N}\} \tag{1.8}$$

"***sözde-yarı (pseudo-semi) grubu***" elde edilir ve x den Σ nın "***ulaşılılabilirlik (accesibility) kümesi***" denilen Σ ile M deki x in pozitif yörüngesi

$$S_\Sigma(x) = \{\varphi(x) \mid \varphi \in S_\Sigma\} \tag{1.9}$$

dir.

1.1.4 Uyarılar :

i) Kuşkusuz, $S_\Sigma(x) \subset G_\Sigma(x), \quad \forall x \in M$ dir,

ii) S_Σ itarafından tanımlanan M üzerindeki "$\sim$" bağıntısı simetrik bir bağıntı değildir. Gerçekten de eğer $t > 0$ ise, o taktirde X_{-t} nin S_Σ ya ait olması gerekmez. Diğer bir deyişle,

$$X \in D \not\Rightarrow -X \in D \tag{1.10}$$

dir. Kontrol Teorideki temel problemlerden biri $S_\Sigma(x) = M$ olacak şekilde M, D ve $x \in M$ altındaki koşulları bulmaktır. Gerçekten eğer bir x başlangıç noktası ile başlanırsa problem, Σ nın D dinamiği ile verilen negatif olmayan stratejiler ile M nin her noktasına ulaşmaktır. Yani $S_\Sigma(x) = M$ ne zaman doğrudur? Uyarılar 1.1.4 (i) den dolayı,

$$S_\Sigma(x) \subset G_\Sigma(x) \subset M \tag{1.11}$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, Σ nın geçişliliği bu problemi çözmek için gerekli bir koşuldur, ancak yeterli değildir. Örneğin, eğer

$$\Sigma = \left(\mathbb{R}, \left\{\frac{d}{dx}\right\}\right) \tag{1.12}$$

alınırsa, o zaman,

$$S_\Sigma(0) = [0, \infty) \subsetneq G_\Sigma(0) = \mathbb{R} \tag{1.13}$$

olur. Bu basit örnek kontrol edilebilirlik probleminin çok zor bir soru olduğunu gösterir. 1970'den beri bir çok matematikçi diferansiyel geometri açısından kontrol sistemlerin kontrol edilebilirliği ile ilgilenmiştir.

1.2 Kontrol Edilebilirlik

1.2.1 Tanım : $\Sigma = (M, D)$ bir kontrol sistemi ve $x \in M$ olsun. Σ ya :

i) eğer $S_\Sigma(x) = M$ ise, x de *kontrol edilebilirdir*,

ii) eğer Σ, M nin her elemanı üzerinde kontrol edilebilir ise, *kontrol edilebilirdir* denir. $\diamond$

Burada, genel kontrol sistemleri için teorik açıdan çok önemli bir sonucu vereceğiz. Bu sonuca, sistemin dinamiği hakkındaki tüm bilgileri koruyan, M deki herhangi bir başlangıç koşulu için durum (state) uzayının yörüngesine indirgenmesine olanak veren Yörünge (Orbit) Teoremi adı verilir.

1.2.2 Teorem (Yörünge Teoremi, [10]) : Eğer $\Sigma = (M, D)$ bir kontrol sistemi ve $x \in M$ ise, o taktirde $G_\Sigma(x)$ yörüngesi bir diferansiyellenebilen manifold yapısına sahiptir.

İspat : $\mathcal{D} = \{X^1, \ldots, X^k\} \subset \mathcal{X}(M)$ olsun. Her bir $x \in M$ için,

$$\rho_{\mathcal{D},x}(t_1, \ldots, t_k) = X^1_{t_1} \circ \ldots \circ X^k_{t_k}(x) \tag{1.14}$$

olacak şekilde

$$\rho_{\mathcal{D},x} : dom(\rho_{\mathcal{D},x}) \subset \mathbb{R}^k \to M \tag{1.15}$$

tanımlanabilir. Diferansiyel denklemlerin varlık-teklik teoreminden dolayı, her bir $X \in \mathcal{X}(M)$ için M nin bağlantılı açık bir altkümesi olan

$$0 \in \{t \in \mathbb{R} \mid x \in dom(X_t)\} \tag{1.16}$$

kümesini elde ederiz ve her bir $t \in domX_{(\cdot)}$ için

$$X_t : dom(X_t) \subset M \to M \tag{1.17}$$

bir yerel difeomorfizmdir. O halde $dom\rho_{\mathcal{D},x}$, $\mathbb{R}^k$ nın sıfırı (orjini) içeren açık bağlantılı bir altkümesidir.

$$\rho = \{\rho_{\mathcal{D},x} = X^1_{(\cdot)} \circ \ldots \circ X^k_{(\cdot)}(x) \mid \mathcal{D} \subset D\} \tag{1.18}$$

olsun. O taktirde,

$$Im(\rho) = \{\rho_{\mathcal{D},x}(dom\rho_{\mathcal{D},x}) \mid \mathcal{D} \subset D\} = G_\Sigma(x) \tag{1.19}$$

dir. Gerçekten, her bir $\mathcal{D} \subset D$ için

$$\rho_{\mathcal{D},x} : dom\rho_{\mathcal{D},x} \subset \mathbb{R}^k \to G_\Sigma(x) \tag{1.20}$$

fonksiyonunu elde ederiz.

Diğer kapsama, G_Σ nın tanımından dolayı açıktır. Θ, M nin topolojisi olsun. $G_\Sigma(x)$ için Θ_I üretilmiş (induced) topolojiyi gözönüne alabiliriz. Yani

$$U \in \Theta_I \Leftrightarrow bir \quad V \in \Theta \quad için \quad U = G_\Sigma(x) \cap V \tag{1.21}$$

dir.

$$\rho_{\mathcal{D},x}(\cdot) : dom\rho_{\mathcal{D},x} \subset \mathbb{R}^n \to (M, \Theta) \tag{1.22}$$

uygulaması, diferansiyellenebilen tasvirlerin bileşkesi olduğundan, süreklidir. O taktirde,

$$\rho_{\mathcal{D},x} : dom(\rho_{\mathcal{D},x}) \subset \mathbb{R}^k \to (G_\Sigma(x), \Theta_I) \tag{1.23}$$

her $\mathcal{D} \subset D$ için süreklidir. Θ_x ile, her bir $\mathcal{D} \subset D$ için $\rho_{\mathcal{D},x}$ sürekli olacak şekilde $G_\Sigma(x)$ üzerindeki en ince topolojiyi gösterelim. Böylece, $\Theta_I \subset \Theta_x$ dir. Özellikle,

$$(G_\Sigma(x), \Theta_x) \hookrightarrow (M, \Theta) \tag{1.24}$$

süreklidir. O halde, $G_\Sigma(x)$ Hausdorff uzayıdır ve yol-bağlantılıdır. Gerçekten, eğer $G_\Sigma(x)$ den herhangi iki nokta alınırsa, x den geçen ve bu iki noktayı birleştiren bir eğri bulabiliriz. Bundan dolayı, her bir yörünge bir Haussdorff ve bağlantılı topolojik uzaydır. Ayrıca, Θ_x, $G_\Sigma(x)$ yörüngesinde x den bağımsızdır. Yani

$$x \sim y \Rightarrow \Theta_x \quad ve \quad \Theta_y \quad denk \quad topolojilerdir. \tag{1.25}$$

Simetriden dolayı, her bir $\mathcal{D} \subset D$ için

$$dom(\rho_{\mathcal{D},x}) \overset{\rho_{\mathcal{D},x}}{\longrightarrow} (G_\Sigma(x), \Theta_y) \tag{1.26}$$

nın sürekli olduğunu ispatlamak yeterlidir.
$\rho_{\mathcal{D}_0,y}(S_0) = x$ olacak şekilde $\mathcal{D}_0 = (Y^1, \cdots, Y^r) \subset D$ dinamiği ve $S_0 = (s_1^0, \cdots, s_r^0)$ vardır. Fakat, $x \in G_\Sigma(y)$ dir.

$$\rho_{(\mathcal{D},\mathcal{D}_0),y}(T, S) = X_{t_1}^1 \circ \ldots \circ X_{t_k}^k \circ Y_{s_1}^1 \circ \ldots \circ Y_{s_r}^r(y) \tag{1.27}$$

olacak şekilde

$$dom(\rho_{\mathcal{D},x}) \times dom(\rho_{\mathcal{D}_0,y}) \overset{\rho_{(\mathcal{D},\mathcal{D}_0),y}}{\longrightarrow} (G_\Sigma(x), \Theta_y) \tag{1.28}$$

bileşkesini tanımlayalım. Burada, $T = (t_1, \ldots, t_k)$ ve $S = (s_1, \ldots, s_r)$ dir. Dolayısıyla,

$$\rho_{(\mathcal{D},\mathcal{D}_0),y}(T, S_0) = \rho_{\mathcal{D},x}(T) \tag{1.29}$$

dir. $\rho_{(\mathcal{D},\mathcal{D}_0),y}$, Θ_y ye göre sürekli olduğundan, $\rho_{\mathcal{D},x}(T)$, Θ_y ye göre süreklidir. Özellikle,

$$\forall \mathcal{D} = \{X^1, \ldots, X^k\} \subset D, \quad \forall y \in G_\Sigma(x) \tag{1.30}$$

dir.

$$\rho_{\mathcal{D},y}(T) = X_{t_1}^1 \circ \ldots \circ X_{t_k}^k(y) \tag{1.31}$$

ile tanımlı

$$\rho_{\mathcal{D},y} : dom(\rho_{\mathcal{D},y}) \subset \mathbb{R}^k \to G_\Sigma(x) \tag{1.32}$$

süreklidir. Diğer taraftan,

$$\rho_{\mathcal{D},y} : dom(\rho_{\mathcal{D},y}) \subset \mathbb{R}^k \to M \tag{1.33}$$

pürüzsüz (smooth) dür. O taktirde, her bir $T \in dom(\rho_{\mathcal{D},y})$ için

$$d\rho_{\mathcal{D},y}(T) : \mathbb{R}^k \to T_{\rho_{\mathcal{D},y}(T)}M \tag{1.34}$$

onun türevidir.

$z \in G_\Sigma(x)$ alalım. $boy(M) < \infty$ olduğundan,

a) $\rho_{\mathcal{D},y}(T) = z$,

b) $boy.Im(d\rho_{\mathcal{D},y}(T)) = s$ maksimal olacak şekilde $(\mathcal{D}, T, y)$ vardır.

İddia : s, z den bağımsızdır.

İddia'nın İspatı : $z_1, z_2 \in G_\Sigma(x)$ olsun. O taktirde, (a) ve (b) geçerli olacak şekilde sırasıyle z_1 ve z_2 için $(\mathcal{D}_1, t_1, y_1)$ ve $(\mathcal{D}_2, t_2, y_2)$ vardır. Geçişlilikten dolayı, $\rho_{\mathcal{D},z_1}(T) = z_2$ olacak şekilde $(\mathcal{D}, T)$ vardır.

$$\rho_{(\mathcal{D},\mathcal{D}_1),(z_1,y_1)} = \rho_{\mathcal{D},z_1} \circ \rho_{\mathcal{D}_1,y_1} \tag{1.35}$$

tasvirini gözönüne alalım. O zaman

$$s_1 \leq boy.Im(\rho_{(\mathcal{D},\mathcal{D}_1),(z_1,y_1)}) \leq s_2 \tag{1.36}$$

olduğu açıktır. Gerçekten, z_2 ye bağlı $\rho_{\mathcal{D}_2,y_2}$ nin maksimalliğinden

$$boy.Im(\rho_{(\mathcal{D},\mathcal{D}_1),(z_1,y_1)}) \leq s_2 \tag{1.37}$$

olduğu sonucu çıkar. Benzer şekilde,

$$s_1 = s_2 \tag{1.38}$$

şeklinde sonuçlandırılabilir. Böylece, iddia ispatlanmış olur.

y, x in yörüngesinin bir elemanı olsun. $d\rho_{\mathcal{D},y}(T)$ matrisi süreklidir ve dolayısıyla, $boy.Im(d\rho_{\mathcal{D},y}(\cdot))$ yarı-sürekli bir fonksiyondur. Yani boyut yerel olarak azalmaz. Böylece, her bir $z \in G_\Sigma(x)$ için, $\rho_{\mathcal{D},y}(T) = z$ olacak şekilde $(\mathcal{D}, T, y)$ nin ve $\mathbb{R}^k$ nın açık bir V altkümesinin varolduğunu ispatlamış olduk ve ayrıca

$$\rho_{\mathcal{D},y} : V \subset \mathbb{R}^k \to M \tag{1.39}$$

tasviri V üzerinde rank s nin bir daldırması (immersion) dır. Aşağıdaki sonucu elde etmek için daldırma (immersion) ların yerel form teoremini, [14], kullanıyoruz :

Aşağıdaki şema değişmeli olacak şekilde $\mathbb{R}^k$ da T nin bir U komşuluğu, M de z nin bir W komşuluğu ve φ, ψ difeomorfizmleri vardır :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\rho_{\mathcal{D},y}} & W \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\psi \\ (-1,1)^k & \xrightarrow{i} & (-1,1)^m \end{array} \tag{1.40}$$

burada bire-bir i tasviri

$$i(x_1, ..., x_k) = (x_1, ..., x_k, 0, ..., 0) \tag{1.41}$$

şeklinde tanımlıdır ve

$$\varphi(T) = 0, \quad \psi(z) = 0 \tag{1.42}$$

dır.

$$N = \rho_{\mathcal{D},y}(U) \tag{1.43}$$

olsun. Değişmelilikten dolayı,

$$N = \psi^{-1}(i(-1,1)^m) \tag{1.44}$$

dır. ψ bir difeomorfizmdir, dolayısıyla N x in yörüngesinde kapsanan M nin bir altmanifold yapısına sahiptir. Burada, N nin Θ_x in bir elemanı olduğunu göstereceğiz. Bu nedenle, N nin M tarafından üretilmiş (induced) topolojili $G_\Sigma(x)$ in açık bir altkümesi olduğunu göstermek yeterlidir. Önce,

$$U \xrightarrow{\rho_{\mathcal{D},y}} N \xrightarrow{j} M \tag{1.45}$$

bileşkesinin diferansiyellenebilir olduğunu görelim. Gerçekten, j kapsaması bir daldırma (immersion) dır ve $\rho_{\mathcal{D},y}$ sürekli olduğundan, diferansiyellenebilir olduğu sonucuna varılır, [14]. Dolayısıyla, her bir $\rho_{\mathcal{D},y} \in N$ için

$$d\rho_{\mathcal{D},y}(T)(T_T U) = Im(d\rho_{\mathcal{D},y}(T)) \subset T_{\rho_{\mathcal{D},y}(T)} N \tag{1.46}$$

dir. Özellikle, T deki $\rho_{\mathcal{D},y}$ nin kısmi türevleri bu altuzayın elemanlarıdır. Böylece, her bir $i = 1, 2, ..., k$ için,

$$| s | < \epsilon_i \Rightarrow \rho_{\mathcal{D},y}(t_1, ..., t_i + s, ..., t_k) \in N \tag{1.47}$$

olacak şekilde $\epsilon_i > 0$ vardır. Bu, N deki her bir elemanın bir komşuluğa sahip olduğunu gösterir. Dolayısıyla

$$N \to G_\Sigma(x) \tag{1.48}$$

kapsaması görüntüsü üzerine bir homeomorfizmadır. Charts (göreçler) ailesini oluşturalım :

$$\mathcal{V} = \{(\rho_{\mathcal{D},y}(U), \psi|_{\rho_{\mathcal{D},y}(U)}) \mid \mathcal{D} \subset \mathcal{D}_\Sigma, \quad y \in G_\Sigma(x), \quad U = U(\mathcal{D}, y, T)\} \tag{1.49}$$

$\mathcal{V}$, $G_\Sigma(x)$ üzerinde bu yörüngeye bir diferansiyellenebilen manifold yapısı veren bir maksimal atlastır. Gerçekten, eğer $V_i = \psi_i(U_1 \cap U_2)$ ise,

$$\psi_1|_{\rho_{\mathcal{D}_1,y_1}(V_1)} \circ \psi_2^{-1}|_{\rho_{\mathcal{D}_2,y_2}(V_2)} \in C^\infty \tag{1.50}$$

dir. Çünkü, $\psi_1 \circ \psi^{-1} \in C^\infty$ dir.

1.2.3 Uyarı : Σ, M üzerinde bir kontrol sistemi olsun. $X \in D = D_\Sigma$ ise, o taktirde her bir $y \in dom(X) \cap G_\Sigma(x)$ için ve her bir olanaklı t için $X_t(y) \in G_\Sigma(x)$ elde edilir. Özellikle, $X_y \in T_y G_\Sigma(x)$ dir. Yani X bu yörüngeye teğettir. Dolayısıyla, Σ yı $G_\Sigma(x)$ üzerinde gözönüne alabiliriz ve o zaman genelliği bozmadan Σ nın M üzerinde geçişli olduğunu kabul etmek her zaman olanaklıdır.

$(G_\Sigma(x), i)$ nin bir daldırma (immersion) olarak kullanıldığı görülüyor.

Sonuçta, her bir $x \in M$ ve her Σ için $TG_\Sigma(x)$ teğet demetini inceliyoruz.

Σ bir kontrol sistemi olsun.

$$D_{\Sigma_e} = \{\varphi_* \circ X \circ \varphi^{-1} \mid \varphi \in G_\Sigma, \quad X \in \mathcal{D}_\Sigma\} \tag{1.51}$$

ile tanımlı D_Σ nın D_{Σ_e} genişlemesini gözönüne alalım. Kuşkusuz,

$$D_\Sigma \subset D_{\Sigma_e} \tag{1.52}$$

dir.

$$\varphi X = \varphi_* \circ X \circ \varphi^{-1} \tag{1.53}$$

olsun. O zaman her bir olanaklı t için

$$(\varphi X)_t = \varphi \circ X_t \circ \varphi^{-1} \tag{1.54}$$

dir. Dolayısıyla $z \in G_\Sigma(x)$ için

$$\Delta(z) =: geren.D_{\Sigma_e}(z) \tag{1.55}$$

$T_z G_\Sigma(x)$ in bir vektör altuzayıdır. Yani $\Delta(z) \subset T_z G_\Sigma(x)$ dir. Aşağıdaki Yardımcı Teorem diğer kapsamayı verir.

1.2.4 Yardımcı Teorem : $\mathcal{D} \subset D_\Sigma$ ve $z = \rho_{\mathcal{D},x}(T)$ olsun. O taktirde

$$Im.d\rho_{\mathcal{D},x}(T) \subset \Delta(z) \tag{1.56}$$

dir.

İspat : $\#(\mathcal{D})$ üzerinden tümevarımla ispatlanır. D_Σ daki her bir vektör alanı D_{Σ_e} ye ait olduğundan, $n = 1$ için sonuç derhal çıkar.

$$\mathcal{D}_{1,x}(T^1) = z_1 \quad ve \quad \mathcal{D}_x(t, T^1) = z \tag{1.57}$$

koşuluyla

$$\mathcal{D}_1 = (X^1 ... X^k) \quad ve \quad \mathcal{D} = (XX^1 ... X^k) \tag{1.58}$$

yi gözönüne alalım. O taktirde,

a) $\frac{\partial}{\partial t_i} \rho_{\mathcal{D},x}(t, T^1) = (X_t)_* \circ ... \circ (X^{i-1}_{t_{i-1}})_* \circ X^i(X^i_{t_i} \circ ... \circ X^k_{t_k}(x))$ dir,

b) $Im.d\rho_{\mathcal{D},x}(t,T^1) = geren.\{\frac{\partial}{\partial t_i}\rho_{\mathcal{D},x}(t,T^1) \mid i = 0,1,...,k\}$ dir.

Sonuç olarak,

$$d\rho_{\mathcal{D},x}(t,T^1)(\mathbb{R}^{k+1}) = (X_t)_* d\rho_{\mathcal{D}_1,x}(T^1)(\mathbb{R}^k) + \mathbb{R} \cdot X_z \tag{1.59}$$

dir. Tümevarım hipotezinden dolayı,

$$Im.d\rho_{\mathcal{D}_1,x}(T^1) \subset \Delta(z_1) \tag{1.60}$$

elde ederiz. Diğer taraftan, Δ nın tanımından dolayı, Δ nın G_Σ-invariant (D_Σ-invariant) olduğunu görürüz. Yani eğer

$$w = \varphi_* \circ X^1 \circ \varphi^{-1} \in \Delta \tag{1.61}$$

ise, o taktirde

$$(X_t)_* \circ w \circ X_{-t} = (X_t \circ \varphi)_* \circ X^1 \circ (X_t \circ \varphi)^{-1} \in \Delta \tag{1.62}$$

dır. Özellikle,

$$(X_t)_* Im.d\rho_{\mathcal{D}_1,x}(T^1) \subset (X_t)_* \Delta(z_1) = \Delta(z) \tag{1.63}$$

olduğu görülür. $\mathbb{R} \cdot X_z \subset \Delta(z)$ olduğundan, ispat tamamlanmış olur.

1.2.5 Önerme : Her bir $z \in G_\Sigma(x)$ için,

$$T_z G_\Sigma(x) = \Delta(z) \tag{1.64}$$

dir.

İspat : Yörünge Teoreminin ispatında, her bir $z \in G_\Sigma(x)$ için, $(\mathcal{D}, T, y)$, $y \in G_\Sigma(x)$, $\rho_{\mathcal{D},y}(T) = z$ ve $\rho_{\mathcal{D},y}(U)$, $G_\Sigma(x)$ in açık bir altkümesi olacak şekilde T nin bir U komşuluğunun var olduğu gösterilmişti. O zaman,

$$Im.d\rho_{\mathcal{D},y}(T) = T_z G_\Sigma(x) \tag{1.65}$$

olduğu açıktır, (her bir açık küme tüm olanaklı yönleri kapsar), özellikle,

$$T_z G_\Sigma(x) \subset \Delta(z) \tag{1.66}$$

dir.

1.2.6 Uyarılar :

i) $[X,Y]$ ile gösterilen $X,Y \in \mathcal{X}(M)$ nin Lie parantezinin

$$[X,Y] = XY - YX \tag{1.67}$$

ile verilen $\mathcal{X}(M)$ de yeni bir vektör alanı ile tanımlandığını hatırlatmak istiyoruz. $D \subset \mathcal{X}(M)$ olsun. $geren_{\mathcal{L}.A}(D)$ ile, D tarafından üretilmiş $\mathcal{X}(M)$ nin Lie altcebirini, yani D yi içeren $\mathcal{X}(M)$ nin en küçük altcebirini göstereceğiz.

ii) Sadece D_{Σ_e} ailesi gözlenerek, D deki elemanların tüm Lie parantezlerini oluşturabiliriz. Gerçekten, eğer $Y, X \in D$ ise,

$$[Y,X](x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (Y_{-t})_* \circ X \circ Y_t(x) \tag{1.68}$$

dir. **iii)** Bir Σ analitik kontrol sistemi için,

$$L(\Sigma) = geren_{\mathcal{L}.A.} D \tag{1.69}$$

Lie cebiri ile Σ nın yörüngelerinin elde edilebildiğini ispatlamak olanaklıdır, [10]. Diğer bir deyişle, her bir $x \in M$ için,

$$L(\Sigma)(x) = \Delta(x) \tag{1.70}$$

dir. Özellikle, $L(\Sigma)$ integrallenebilir dağılımın $In_{L(\Sigma)}$ integral manifoldları

$$In_{L(\Sigma)}(x) = G_\Sigma(x), \quad \forall x \in M \tag{1.71}$$

ile verilir.

1.3 Gözlenebilirlik

1.3.1 İkinci Tanım : Gözlemeli bir Σ kontrol sistemi

$$\Sigma = (M, D, h, N) \tag{1.72}$$

ile belirlidir. Burada, M ve D Tanım 1.1.1 deki gibidir. N bir deferansiyellenebilen manifold ve $h : M \to N$ bir pürüzsüz (smooth) fonksiyondur . $\diamond$

N ye *gözleme (observation) uzayı* ve h ye Σ nın *çıkış (output) tasviri* denir.

1.3.2 Tanım : Σ bir kontrol sistemi olsun. $x, y \in M$ noktalarına, eğer

$$h \circ \varphi(x) = h \circ \varphi(y), \quad \forall \varphi \in S_\Sigma \tag{1.73}$$

ise, Σ için *ayırd edilemez* denir. $\diamond$

1.3.3 Uyarı : $x \sim y \Leftrightarrow x$ ve y ayırd edilemez

bağıntısı genel olarak bir denklik bağıntısı değildir. Bu durum, D ye bağlıdır. Gerçekten :

Eğer D sadece analitik vektör alanlarını kapsıyorsa ya da D forward complete ise, yani her bir $X \in D$ için, X_t her bir $t \geq 0$ için iyi tanımlı ise, o taktirde "$\sim$" bir denklik bağıntısıdır, [11]. Sonuçta bu özeliği kabul edeceğiz ve x in denklik sınıfını $\tilde{x}$ ile göstereceğiz.

1.3.4 Tanım : Σ bir kontrol sistemi ve $x \in M$ olsun. Σ ya :

i) Eğer $\tilde{x} \cap U = \{x\}$ $(\forall x \in M)$ olacak şekilde x in bir U komşuluğu varsa, $x \in M$ de (M üzerinde) *yerel gözlenebilir* dir,

ii) Eğer $\tilde{x} \cap M = \{x\}$ $(\forall x \in M)$ ise, $x \in M$ de (M üzerinde) *gözlenebilir* dir, denir. $\diamond$

Diğer bir deyişle, eğer uygulamaların $h \circ S_\Sigma$ ailesi x i (M üzerindeki noktaları), M nin herhangi bir noktasından ayırıyorsa, Σ, $x \in M$ de (M üzerinde) *gözlenebilir* dir.

1.4 Örnekler

1.4.1) $\mathbb{R}^n$ üzerindeki diferansiyel denklemlerin

$$D = \{\dot{x} = Ax + Bu \mid u \in \mathbb{R}^k\} \tag{1.74}$$

ailesini gözönüne alalım. Burada, $A \in M_n(\mathbb{R})$ ve $B \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$ dır.

$G_\Sigma(0) = S_\Sigma(0) = Im(B)$ yi içeren $\mathbb{R}^n$ nin en küçük A-invariant altuzay olduğunu ispatlamak olanaklıdır. Bu sonuç, Kalman et al. [7], tarafından elde edilmiştir. Bundan, $\Sigma = (\mathbb{R}^n, D)$ lineer kontrol sisteminin kontrol edilebilirliği için Kalman rank koşulu sonucu çıkar. Yani

$$\Sigma, \ \mathbb{R}^n \ \textit{de kontrol edilebilirdir} \Leftrightarrow$$

$$rank(BABA^2B\dots A^{n-1}B) = n \tag{1.75}$$

$\diamond$

II. Bölümde, Lie grupları üzerinde genel lineer kontrol sistemleri için Kalman rank koşulunu inceleyeceğiz. Orada, Abelian gruplar dışında rank koşulunun kontrol edilebilirliği karakterize etmediğini ispatlıyoruz.

1.4.2) (i) Bu örnekte, kontrol edilebilirliğe karar vermek için sadece rank koşulunu kullanıyoruz.

$$D = \left\{ \dot{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \middle| u \in \mathbb{R} \right\} \tag{1.76}$$

ile $\Sigma = (\mathbb{R}^2, D)$ kontrol edilemezdir.

(ii)

$$D = \left\{ \dot{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \middle| u \in \mathbb{R} \right\} \tag{1.77}$$

ile $\Sigma = (\mathbb{R}^2, D)$ kontrol edilebilirdir.

1.4.3) $M = \mathbb{R}^2$ ve

$$D = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \tag{1.78}$$

yi gözönüne alalım.

O taktirde, $\Sigma = (M, D)$ nin yörüngeleri :

i) $b > 0$, $G_\Sigma(a, b) = \{(x, y) \mid y > 0\}$,

ii) $b = 0$, $G_\Sigma(a, b) = \{(x, y) \mid y = 0\}$,

iii) $b < 0$, $G_\Sigma(a, b) = \{(x, y) \mid y < 0\}$ dir.

Σ nın pozitif yörüngeleri :

i) $b \geq 0$, $S_\Sigma(a, b) = \left\{(x, y) \mid \frac{ab}{x} \leq y \leq b, \quad x \geq a\right\}$,

ii) $b < 0$, $S_\Sigma(a, b) = \left\{(x, y) \mid b \leq y \leq \frac{ab}{x}, \quad x \geq a\right\}$ dır.

1.4.4)

$$G = SL_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid detA = 1\} \tag{1.79}$$

grubunu ve

$$L(G) = sl_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid trA = 0\} \tag{1.80}$$

ile verilen grubun $L(G)$ Lie cebirini gözönüne alalım.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.81}$$

olmak üzere

$$D = \{X + uY \mid u \in \mathbb{R}\} \subset sl_2(\mathbb{R}) \tag{1.82}$$

dinamiğini yine gözönüne alalım. Akışlar (flows)

$$X_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) \tag{1.83}$$

dir. $\Sigma = (\mathbb{R}^2, D)$ için

$$G_\Sigma(a,b) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad ve \tag{1.84}$$

$$eğer \quad a^2 + b^2 \neq 0 \quad ise, \quad G_\Sigma(0,0) = \{(0,0)\}, \tag{1.85}$$

elde edilir. Oysa, Σ kontrol edilemezdir. Örneğin, eğer $a > 0, \quad b > 0$ ise, o taktirde

$$S_\Sigma(a,b) = \{(x,y) \mid x \geq a\} \tag{1.86}$$

dir. Aşağıdaki örnek invariant kontrol sistemlerin sınıfına aittir, [2].

1.4.5) G 3-boyutlu Heisenberg grubu, yani

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \tag{1.87}$$

olsun. G üzerinde

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ve \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.88}$$

invariant vektör alanlarını, yani G nin

$$L(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \tag{1.89}$$

Lie cebirindeki elemanları gözönüne alalım.

$$D = \{X + uY \mid u \in \mathbb{R}\} \tag{1.90}$$

yi tanımlayalım. $\Sigma = (G, D)$ sistemi geçişlidir. Bu durum, Uyarı 1.2.6 (iii) ün sonucu olarak elde edilir. Gerçekten,

$$\Delta(e) = geren\{X, Y, [X, Y]\} = L(G) \tag{1.91}$$

dir. Özellikle, G nin e etkisiz elemanının yörüngesi G ile çakışır. Σ nın kontrol edilemez, yani

$$S_\Sigma(e) \underset{\neq}{\subset} G, \quad [2], \tag{1.92}$$

olduğunu ispatlamak olanaklıdır.

1.4.6) $\mathbb{R}^n$ üzerinde gözlemeli bir lineer kontrol sistemini gözönüne alalım.

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.93}$$

ve

$$h(x) = C \cdot x, \quad C \in M_{s\times n}(\mathbb{R}) \tag{1.94}$$

olsun.

$$\tilde{0} = \bigcap_{i=1}^{n-1} Ker(C \cdot A^i) \tag{1.95}$$

olduğu biliniyor. Buradan,

$$\Sigma = (\mathbb{R}^n, D, h, \mathbb{R}^s), \quad [6], \tag{1.96}$$

lineer kontrol sisteminin gözlenebilirliği için rank koşulu sonuç olarak çıkar.

Σ gözlenebilirdir $\Leftrightarrow$ Σ yerel gözlenebilirdir $\Leftrightarrow$

$$rank \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ . \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n \tag{1.97}$$

III. Bölümde, Lie grupları üzerinde genel lineer kontrol sistemleri için gözlenebilirlik rank koşulunu inceleyeceğiz. Yerel ve global gözlenebilirliği karakterize edeceğiz.

1.4.7)

$$\Sigma = (\mathbb{R}^2, D, h, \mathbb{R}) \tag{1.98}$$

sistemini gözönüne alalım. Burada,

$$D = \left\{ \dot{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \middle| u \in \mathbb{R} \right\} \tag{1.99}$$

dır. Aşağıdaki iki durumu inceleyelim :

i) $h(x, y) = x$ olsun.

$$\rho \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \tag{1.100}$$

elde edilir ve Σ gözlenebilirdir.

ii) $h(x, y) = y$ olsun. Bu durumda,

$$\rho \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \tag{1.101}$$

dir ve Σ (yerel) gözlenemezdir.

Aşağıdaki iki örnek ikililineer kontrol sistemlerinin sınıfına aittir, [6], [8].

1.4.8)

$$\Sigma = (\mathbb{R}^2, D, h, \mathbb{R}) \tag{1.102}$$

sistemi,

$$D = \left\{ \dot{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| u \in \mathbb{R} \right\} \tag{1.103}$$

$$h(x, y) = y \tag{1.104}$$

şeklinde tanımlı olsun. Σ geçişli değildir. Gerçekten,

i) $b > 0$, $G_\Sigma(a, b) = \{(x, y) \mid y > 0\}$,

ii) $b = 0$, $G_\Sigma(a, 0) = \{(a, 0)\}$,

iii) $b < 0$, $G_\Sigma(a, b) = \{(x, y) \mid y < 0\}$ dır.

Bundan başka, eğer $a > 0$, $b > 0$ ise,

$$S_\Sigma(a,b) = \{(x,y) \mid y > 0, \quad x \geq a\} \tag{1.105}$$

dır. Özellikle, Σ kendi yörüngesi üzerinde kontrol edilemezdir. Diğer taraftan, etkisiz noktanın denklik sınıfı h nın çekirdeği ile çakışır. Böylece, sistem gözlenemezdir.

1.4.9) $\mathbb{R}^3$ üzerinde

$$D = \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| u \in \mathbb{R} \right\} \tag{1.106}$$

ve

$$h(x,y,z) = (x,y) \tag{1.107}$$

şeklinde tanımlı

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \tag{1.108}$$

ile belirlenmiş Σ sistemini gözönüne alalım. $a > 0$, $b > 0$ ve $c > 0$ için

$$G_\Sigma(a,b,c) = \{(x,y,z) \mid z \geq c\} \tag{1.109}$$

ve

$$S_\Sigma(a,b,c) = \{(x,y,z) \mid x \geq a, \quad y \geq b, \quad z \geq c\} \tag{1.110}$$

elde ederiz ve $\tilde{0}$ apaçık (trivial) olduğundan sistem gözlenebilirdir.

BÖLÜM II
LIE GRUPLARI ÜZERİNDE LİNEER KONTROL SİSTEMLERİNİN KONTROL EDİLEBİLİRLİĞİ

2.1 Giriş

Bu kısmın amacı, durum (state) uzayının bağlantılı reel sonlu boyutlu bir G Lie grubu olduğu ve D dinamiğinin $u \in \mathcal{U}$ kontrolleri ile parametrelenmiş G üzerindeki

$$\dot{g}(t) = X(g(t)) + \sum_{j=1}^{m} u_j Y^j(g(t)) \tag{2.1}$$

diferansiyel denklemlerinin ailesi ile belirlendiği $\Sigma = (G, D)$ şeklindeki sistemlerin bir belirli sınıfı olan lineer kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirlik özeliği hakkında bilgi veren cebirsel koşulları incelemektir. Burada, X G nin sonsuzküçük (infinitesimal) bir otomorfizmdir. Yani X vektör alanı tarafından üretilen

$$T = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}\} \tag{2.2}$$

akışı (flow) G-otomorfizmlerinin bir 1-parametreli grubudur. Y^j, $j = 1, 2, \ldots, m$, kontrol vektörleri G nin $L(G)$ Lie cebirine aittir. $L(G)$ yi sağ-invariant vektör alanlarının kümesi olarak düşüneceğiz. $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ giriş fonksiyonları parçalı kısıtlanmayan kabul edilebilir (admissible) kontrollerin $\mathcal{U}$ sınıfına aittir. Yani

$$u : [0, \infty) \to \mathbb{R}^m \tag{2.3}$$

parçalı sabit bir fonksiyondur.

D, Σ ile birleşmiş vektör alanlarının ailesidir. Yani

$$D = \{X + \sum_{j=1}^{m} u_j Y^j \mid u \in \mathbb{R}^m\} \tag{2.4}$$

dir. Sistemlerin bu sınıfı $\mathbb{R}^n$ üzerindeki lineer kontrol sistemlerini genelleştirir. Gerçekten, eğer L, $\mathbb{R}^n$ üzerinde kısıtlanmayan zaman-invariant bir lineer kontrol sistemi ise, o taktirde L

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.5}$$

dinamiği ile belirlidir. Burada, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U}$ ve A ve B uygun boyutlu sabit matrislerdir. B nin sütunlarını $b_1, b_2, \ldots b_m$ ile gösterelim. O zaman, L yi

$$\dot{x} = Ax + \sum_{j=1}^{m} u_j b_j \tag{2.6}$$

ile tanımlayacağız. Burada, b_j sabit vektörünün $\mathbb{R}^n$ üzerinde

$$Y^j(x) = b_j, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.7}$$

şeklinde verilen bir sağ-invariant Y^j vektör alanı tanımladığı bilinmektedir. Ayrıca, [9] da Markus tarafından işaret edildiği gibi,

$$A_t = e^{tA}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

ile verilen A lineer vektör alanının akışı (flow) tüm $\mathbb{R}^n$-otomorfizmlerinin Lie grubu olan $GL_n(\mathbb{R})$ a aittir. Böylece, $L = (G, D)$ dir, burada G, $\mathbb{R}^n$ değişmeli Lie grubudur ve

$$D = \{A + \sum_{j=1}^{m} u_j Y^j \mid u \in \mathbb{R}^m\} \tag{2.9}$$

dir. L için rank koşulunun anlamı :

$$boy.geren\{b_1, \ldots, b_m, Ab_1, \ldots, Ab_m, \ldots, A^{n-1}b_1, \ldots, A^{n-1}b_m\} = n \tag{2.10}$$

dir. Aşağıda, L nin kontrol edilebilirliği için temel teoremi vereceğiz.

2.1.1 Teorem : (Kalman R., Ho Y., Narendra K., [7]).

L, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir lineer kontrol sistemi olsun. O taktirde, aşağıdaki ifadeler denktir :

a) L, $\mathbb{R}^n$ üzerinde kontrol edilebilirdir,

b) L, rank koşulunu sağlar. ◇

Markus [9] da, $GL_n(\mathbb{R})$ ın altgrubu olan bir q^2-boyutlu G matris Lie grubu üzerinde ve dinamiği

$$\dot{P} = (XP - PX) + \sum_{j=1}^{m} u_j Y^j P \tag{2.11}$$

şeklindeki G üzerindeki diferansiyel denklemlerin bir ailesi ile tanımlanan Σ lineer kontrol sistemi kavramını veriyor. Burada, X sapan (drift) vektör alanı tüm $n \times n$ reel matrislerin $M_n(\mathbb{R})$ Lie cebirine aittir ve her bir $j = 1, 2, \ldots, m$ için Y^j sol çarpma ile tanımlanır. Yani G nin Lie cebirindeki elemanlardır. Bu durumda

$$X(P) = XP - PX \tag{2.12}$$

vektör alanı tarafından üretilen

$$X_t(P) = e^{tX} P e^{-tX} \tag{2.13}$$

akışı (flow) belirli sonsuzküçük (infinitesimal) bir otomorfizmdir. Bu tip sistemler için yazar aşağıdaki sonuçları elde ediyor :

2.1.2 Teorem : (Markus L., [9])

G nin e etkisiz elemanının Σ-ulaşılabilir (-reachable) kümelerinin G de kapanışları vardır :

a) Her bir $t_0 \geq 0$ için, $\bigcup_{0 \leq t \leq t_0} G_t \subset \overline{S_\Sigma^{t_0}(e)}$ dir,

b) $\bigcup_{0 \leq t} G_t \subset \overline{S_\Sigma(e)}$ dir.

Burada

$$G_t = e^{tX} G_0 e^{-tX}, \tag{2.14}$$

$$L(G_t) = geren_{\mathcal{L}.A.}\{e^{-tX} Y^j e^{tX} \mid j = 1, 2, \ldots, m\} \tag{2.15}$$

Lie cebirli bir Lie grubudur. $\diamond$

Lineer kontrol sistemlerinin bu sınıfı için Lie cebiri rank koşulunun anlamı :

$$boy.geren_{\mathcal{L}.A.}\{Y^j, ad(X)(Y^j), \ldots, ad^{q^2-1}(X)(Y^j) \mid j = 1, \ldots, m\} = boy(G) \tag{2.16}$$

dır.

2.1.3 Teorem : (Markus L., [9])

Eğer Σ, G üzerinde kontrol edilebilir ise, o taktirde Σ Lie cebiri rank koşulunu sağlar. $\diamond$

Bu kısımda, Teorem 2.1.1, 2.1.2 ve 2.1.3 ü genel lineer kontrol sistemlerine genişletiyoruz. Bundan başka, Teorem 2.3.7 de

$$boy.geren\{Y^j, ad(X)(Y^j), \ldots, ad^{q^2-1}(X)(Y^j) \mid j = 1, \ldots, m\} = boy(G) \quad (2.17)$$

ile verilen genel rank koşulunun Σ nın kontrol edilebilirliği için yeterli cebirsel bir koşul olduğunu gösteriyoruz. Özellikle, Kalman Teoremini Teorem 2.1.1 'i Abelian Lie gruplarına genelleştiriyoruz. Ancak, Lie cebiri rank koşulu kontrol edilebilirliği karakterize etmez. Bunu göstermek için 3-boyutlu basit bağlantılı sıfır güçlü (nilpotent) Heisenberg grubu üzerinde bir örnek vereceğiz.

2.2 Ön Bilgiler

Bu çalışma, Lie grupları üzerindeki dinamik sistemlerle ilgilidir. Vektör alanlarının iki farklı sınıfı olarak sonsuzküçük (infinitesimal) otomorfizmleri ve sağ-invariant vektör alanlarını gözönüne alıyoruz. Eğer G reel bağlantılı sonlu boyutlu bir Lie grubu ise,

$$[X, Y] = XY - YX, \quad X, Y \in \mathcal{X}(G) \quad (2.18)$$

olağan parantez ile G üzerinde global olarak tanımlı tüm analitik vektör alanların Lie cebirini $\mathcal{X}(G)$ ile, gösterelim. G bağlantılı olduğundan, G-otomorfizmlerin grubu olan $Aut(G)$ nin bir Lie grubu yapısına sahip olduğu, [5], sonucu çıkar. Gerçekten, $Aut(G)$ yi $L(G)$-otomorfizmlerinin lineer grubunun kapalı bir altgrubu ile özdeşlemek olanaklıdır. Eğer X tarafından üretilmiş

$$T = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}\} \quad (2.19)$$

akışı (flow) G-otomorfizmlerinin bir 1-parametreli altgrubu ise, tanımdan dolayı X, G nin bir sonsuzküçük (infinitesimal) otomorfizmidir. $Aut(L(G))$ nin Lie cebiri $L(G)$ üzerinde türevlerin cebiri olduğundan, [13], T nin $L(T)$ Lie cebiri $Der(L(G))$ nin bir altcebiri olarak görülebilir. Bu özdeşleme altında, her bir $Y, Z \in L(G)$ için

$$\omega([Y, Z]) = [\omega(Y), Z] + [Y, \omega(Z)] \quad (2.20)$$

olacak şekilde her bir $w \in L(T)$ dir. Diğer taraftan, her bir $Y \in L(G)$ elemanı $Y(e)$ ile belirlidir. Gerçekten

$$Y(g) = (R_g)_* Y_e, \quad g \in G \tag{2.21}$$

dir. Burada, R_g, G üzerinde g-sağ öteleme dönüşümünü gösteriyor ve $*$ türev anlamındadır.

G üzerinde bir Δ dağılımının her g durumu için $T_g G$ teğet uzayının bir altuzayının bir seçimi olduğunu belirtelim. Bir $Z \in \mathcal{X}(G)$ vektör alanı, eğer

$$Z(g) \in \Delta(g), \quad \forall g \in G \tag{2.22}$$

ise, Δ ya aittir. Bir Δ dağılımına, eğer $boy.\Delta(g)$ g den bağımsız ise, ***düzenli (regüler)*** dir, denir. Eğer $X \in \mathcal{X}(G)$ ve $i = 0, 1, 2, \ldots$ ise, aşağıdaki lineer dönüşümleri tümevarımla tanımlayacağız :

$$ad^i(X) : \mathcal{X}(G) \to \mathcal{X}(G) \tag{2.23}$$

$$ad^0(X) = Id \quad ve \quad i \geq 1 \quad için \quad ad^i(X) = [X, ad^{i-1}(X)] \tag{2.24}$$

dir.

Jacobi özdeşliği, $ad(X)$ in $Der(\mathcal{X}(G))$ ye ait olduğunu gösterir.

Bir Δ dağılımına :

a) Eğer

$$ad(X)(\Delta) \subset \Delta \tag{2.25}$$

ise, X-invariant ($ad(X)$-invariant) tır,

b) Eğer Δ her $X \in \Delta$ için X-invariant ise, ***dürevli (involutive)*** dir, denir.

Eğer Δ düzenli (regüler) ve dürevli (involutive) ise, Frobenius Teoreminden, [14], integrallenebilir olduğu sonucu çıkar. $In_\Delta(g)$ simgesi ile G de g noktasından geçen Δ nın maksimal integral manifoldunu gösterelim. Yani $In_\Delta(g)$

$$T_h In_\Delta(g) = \Delta(h), \quad \forall h \in In_\Delta(g) \tag{2.26}$$

olacak şekilde G nin en büyük bağlantılı daldırılmış (immersed) altmanifoldudur.

Δ, G üzerinde X-invariant integrallenebilir bir dağılım olsun. $X \in \mathcal{X}(G)$ vektör alanı tarafından üretilmiş $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ akışının (flow) integral manifoldları integral manifoldlar içine taşıdığı, yani $g \in G$ için

$$X_t(In_\Delta(g)) = In_\Delta(X_t(g)), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad ,[6], \tag{2.27}$$

olduğu sonucunu çıkaracağız. Son olarak, G nin bağlantılı Lie altgrupları ve $L(G)$ nin Lie altcebirleri arasında bir eşlemenin var olduğunu belirtelim. Bu eşleme altında, normal altgruplar idealler ile birleşmiştir, [13]. Eğer H, G nin bağlantılı bir Lie altgrubu ise, o taktirde her bir $h \in H$, $exp(tZ)$ şeklindeki elemanların bir sonlu çarpımıdır. Burada, Z, H nın $L(H)$ Lie cebirine aittir ve $t \in \mathbb{R}$ dır, [12].

2.3 Kontrol Edilebilirlik

Σ nın kontrol vektörleri tarafından üretilmiş olan $L(G)$ nin Lie altcebirini $\mathcal{H}$ ile göstereceğiz. Yani

$$\mathcal{H} = geren_{\mathcal{L}.A.}\{Y^1, \ldots, Y^m\} \tag{2.28}$$

dir. $L(G)$ nin her bir V altuzayı öteleme dönüşümü vasıtasıyla

$$\Delta_V(g) = (R_g)_* V, \quad g \in G \tag{2.29}$$

şeklinde tanımlı bir sağ-invariant Δ_V dağılımını üretir. Aşağıdaki temel sonucu verelim :

2.3.1 Yardımcı Teorem : X bir sonsuzküçük (infinitesimal) otomorfizm ise, o taktirde $L(G)$ her bir $i \geq 0$ için $ad^i(X)$-invarianttır.

İspat : Yardımcı Teoremi $i = 1$ için ispatlamak yeterlidir. $Y \in L(G)$ alalım. O zaman

$$[X, Y](e) = -Y_e X = -\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} X_{exp(sY)} \tag{2.30}$$

dir. Diğer taraftan,

$$[X, Y](g) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (X_{-t})_*(Y_{X_t(g)}) \tag{2.31}$$

$$= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} X_{-t} \circ Y_s \circ X_t(g) \tag{2.32}$$

$$= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} R_g \circ X_{-t}(expsY) \tag{2.33}$$

$$= -\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} (R_g)_* X_{exp(sY)} \tag{2.34}$$

$$= (R_g)_*[X,Y](e) \tag{2.35}$$

dir. Böylece, $[X,Y]$ $\mathcal{X}(G)$ de sağ-invariant bir vektör alanıdır. Sonuç olarak, $\forall Y \in L(G)$ için $[X,Y] \in L(G)$ dir. ◇

$\mathcal{H}$ yi kapsayan $L(G)$ nin en küçük $ad(X)$-invariant alt cebirini $\langle X \mid \mathcal{H}\rangle$ simgesi ile ve, sırasıyle $\mathcal{H}$ ve $\langle X|\mathcal{H}\rangle$ Lie cebirli G nin bağlantılı Lie altgruplarını da H ve $\langle X|H\rangle$ simgeleri ile göstereceğiz. $\Delta = \Delta_{\langle X|\mathcal{H}\rangle}$ nın bir dürevli (involutive) ve düzenli (regüler) dağılım olduğu açıktır. Frobenius Teoreminden dolayı, [14], Δ integrallenebilirdir. Eğer $In_\Delta(g)$ G deki g durumundan geçen Δ nın integral manifoldunu gösteriyorsa, o taktirde Δ nın $ad(X)$-invariant'lığı

$$X_t(In_\Delta(g)) = \mathrm{In}_\Delta(X_t(g)), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad, [6], \tag{2.36}$$

olmasını gerektirir. Δ sağ-invariant bir dağılım olduğundan

$$In_\Delta(g) = \langle X|H\rangle g, \quad \forall g \in G \tag{2.37}$$

dir. Özellikle, her bir reel t sayısı için

$$X_t(\langle X|H\rangle g) = \langle X|H\rangle X_t(g) \tag{2.38}$$

dir. Öte yandan, G nin e etkisiz elemanı T nin bir sabit noktasıdır. Buna göre,

$$X_t(\langle X|H\rangle) = \langle X|H\rangle, \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.39}$$

dir. Böylece, aşağıdaki önerme verilebilir :

2.3.2 Önerme : $\Sigma = (G, D)$, X bir sonsuzküçük (infinitesimal) otomorfizm olacak şekilde bir lineer kontrol sistemi olsun. O taktirde

$$X_t \in Aut(\langle X|H\rangle), \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.40}$$

dir. ◇

Önerme 2.3.2, $\langle X|H\rangle$ Lie grubunun T-invariant olduğunu gösterir. Yani

$$T \xrightarrow{\pi} Aut(\langle X|H\rangle) \tag{2.41}$$

kanonik tasviri ve

$$\langle X|H\rangle \times T \subset G \times Aut(G) \tag{2.42}$$

çarpım Lie grupları çarpımını gözönüne alınabilir. π nin bir

$$\langle X|H\rangle \times T \to \langle X|H\rangle \tag{2.43}$$

$$(g, X_t) \to X_t(g) \tag{2.44}$$

analitik etkiyi (action) ürettiği sonucu çıkar. Eğer $g_1, g_2 \in \langle X|H\rangle$ ve $X_{t_1}, X_{t_2} \in T$ ise,

$$(g_1, X_{t_1})(g_2, X_{t_2}) = (X_{t_1}(g_2)g_1, X_{t_1+t_2}) \tag{2.45}$$

çarpımının çarpım manifoldu üzerinde bir Lie grubu yapısı tanımladığı görülebilir. Gerçekten,

$$((g_1, X_{t_1}), (g_2, X_{t_2})) \to (g_1 \cdot X_{t_1-t_2}(g_2^{-1})) \tag{2.46}$$

uygulaması analitiktir. Bu yapı ile $\langle X|H\rangle \times T$ ye π ye göre $\langle X|H\rangle$ ile T nin yarı-direkt çarpımı denir, [13], ve bu grubu

$$S =: \langle X|H\rangle \otimes T \tag{2.47}$$

ile göstereceğiz.

$$(g_1, X_t)(g_2, Id)(g_1, X_t)^{-1} = (g_1 \cdot X_t(g_2) \cdot g_1^{-1}, Id) \tag{2.48}$$

formülü $\langle X|H\rangle$ nın S nin kapalı normal bir altgrubu olduğunu gösterir. Diğer taraftan,

$$\begin{array}{ccc} \langle X \mid \mathcal{H}\rangle & \xrightarrow{(X_t)_*} & \langle X \mid \mathcal{H}\rangle \\ exp \downarrow & & \downarrow exp \\ \langle X \mid H\rangle & \xrightarrow{X_t} & \langle X \mid H\rangle \end{array} \tag{2.49}$$

değişmeli şeması

$$T \to Aut(\langle X|\mathcal{H}\rangle) \tag{2.50}$$

uygulamasını üretir ve ρ ile gösterilen onun türevi $\langle X|\mathcal{H}\rangle$ de T nin $L(T)$ Lie cebirinin bir gösterilişidir. Yani

$$L(T) \xrightarrow{\rho} End(\langle X|\mathcal{H}\rangle), \tag{2.51}$$

$$\rho(L(T)) \subset Der(\langle X|\mathcal{H}\rangle) \tag{2.52}$$

olacak şekilde Lie cebirlerinin bir homomorfizmidir. Gerçekten, her bir $w \in L(T)$ için

$$\rho(w)(Y) = [w, Y], \quad \forall Y \in \langle X|\mathcal{H}\rangle \tag{2.53}$$

dir. ρ, $\langle X|\mathcal{H}\rangle \times L(T)$ Lie cebirlerin çarpımı üzerinde bir Lie cebiri yapısını kurmaya olanak sağlar. Gerçekten, eğer $Y_1, Y_2 \in \langle X|\mathcal{H}\rangle$ ve $w_1, w_2 \in L(T)$ ise,

$$[(Y_1, w_1), (Y_2, w_2)] = ([Y_1, Y_2] + \rho(w_1)(Y_2) - \rho(w_2)(Y_1), [w_1, w_2]) \tag{2.54}$$

parantezi iyi tanımlıdır ve bu çarpımı, ρ ya göre $\langle X|\mathcal{H}\rangle$ nın $L(T)$ ile yarı-direkt çarpımı adı verilen bir Lie cebirine dönüştürür, [13]. Bu Lie cebirini

$$s =: \langle X|\mathcal{H}\rangle \otimes L(T) \tag{2.55}$$

ile gösterelim. Aşağıda, bir lineer kontrol sistemin Lie cebirini karakterize edeceğiz.

2.3.3 Teorem : $\Sigma = (G, D)$, X sonsuzküçük (infinitesimal) bir otomorfizm olacak şekilde bir lineer kontrol sistemi olsun. O taktirde

$$L(\Sigma) \cong \langle X|\mathcal{H}\rangle \otimes L(T) \tag{2.56}$$

dir.

İspat : $L(T)$ bir Abelian cebir olduğundan,

$$[s, s] \subset \langle X|\mathcal{H}\rangle \tag{2.57}$$

elde edilir. Σ nın X sapan (drift) vektör alanının

$$w_{X_t} = (L_{X_t})_* w \tag{2.58}$$

ile $L(T)$ nin w doğurayını (generator) ürettiğini belirtelim. Burada

$$w = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} X_t \in L(T) \tag{2.59}$$

dir.

$$L(\Sigma) \to \langle X|\mathcal{H}\rangle \otimes L(T) \tag{2.60}$$

kanonik tasvirinin Lie cebirlerin bir izomorfizması olduğunu gerçekleştirmek için, D üzerinde elemanlar alıp ve dolayısıyla parantezi hesaplayalım. Bunun için $L(\Sigma)$ nın doğuraylarını, yani

$$L(\Sigma) = geren_{\mathcal{L}.A.}\{X + \sum_{j=1}^{m} u_j Y^j | j = 1, \ldots, m\}, \tag{2.61}$$

ve $X + Y^i$, $X + Y^j$ şeklindeki iki elemanı gözönüne almak yeterlidir. $\mathcal{X}(G)$ de parantezin ikililineer özeliği

$$[X + Y^i, X + Y^j] = [Y^i, Y^j] + [X, Y^j] + [Y^i, X] \tag{2.62}$$

olduğunu gösterir. Bundan ve s için parantez tanımından Teoremin doğru olduğu çıkar. $\diamond$

Lie grupların bir yarı-direkt çarpımının Lie cebirinin, grupların Lie cebirlerinin yarı-direkt çarpımı ile izomorfik olduğu bilinmektedir, [13]. Başka bir deyişle, bu özel hal için aşağıdaki sonucu verelim :

2.3.4 Sonuç : $\Sigma = (G, D)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. O taktirde

$$L(\Sigma) \cong L(\langle X|H\rangle \otimes T) \tag{1.63}$$

dir. $\diamond$

$\Sigma = (G, D)$ bir lineer kontrol sistemi olsun ve tümevarım yoluyle $ad(X)(\mathcal{H})$-dizisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım :

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} \tag{2.64}$$

$$\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_{i-1} + \mathrm{ad}^i(X)(\mathcal{H}), \quad i \in \mathbb{N}\ , \tag{2.65}$$

burada

$$ad^i(X)(\mathcal{H}) = \{[X, ad^{i-1}(X)(Y)] | Y \in \mathcal{H}\} \tag{2.66}$$

dir. Her bir i için $\Delta_{\mathcal{H}_i}$ dağılımı düzenli (regüler) dir. Gerçekten, Yardımcı Teorem 2.3.1, $\mathcal{H}_i$ nin $L(G)$ nin bir alt uzayı olduğunu gösterir. Özellikle, sonlu boyutlu Lie gruplarını gözönüne aldığımızdan ve $\mathcal{H} \neq 0$ olduğundan, $ad(X)(\mathcal{H})$-dizisi p de stabilize olacak şekilde, yani

$$\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_{p+q}, \quad \forall q \in \mathbb{N} \tag{2.67}$$

olacak şekilde en küçük bir p $0 \leq p < boy(G)$ tamsayısı vardır.

2.3.5 Teorem : $\Sigma = (G, D)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. Eğer Σ geçişli ise, o taktirde Σ Lie cebiri rank koşulunu sağlar.

İspat : Eğer Σ geçişli ise, o taktirde Uyarı 1.2.6 dan dolayı,

$$G_\Sigma(e) = \langle X|H \rangle = G \tag{2.68}$$

dir. Gerçekten, Σ bir analitik kontrol sistemi olduğundan, $g \in G$ noktasından geçen $L(\Sigma)$ nın integral manifoldu g nin yörüngesi ile çakışır. Yani $In_{L(\Sigma)}(e) = \langle X|H \rangle$ dir. Çünkü, $X_e = 0$ dır ve Önerme 2.3.2, her bir $g \in \langle X|H \rangle$ için

$$X_t(g) \in \langle X \mid H \rangle, \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.69}$$

olduğunu gösterir. Özellikle,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} X_t(g) \in T_g\langle X|H \rangle \tag{2.70}$$

dır. Sonuç olarak,

$$X_g \in (R_g)_*\langle X|\mathcal{H} \rangle \tag{2.71}$$

Yani

$$X_g \in \Delta_{\langle X|\mathcal{H} \rangle}(g), \quad \forall g \in \langle X|H \rangle \tag{2.72}$$

dır.

$$boy.geren_{\mathcal{L}.A.}\{Y^j, ad^i(X)(Y^j) | 0 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m\} = n \tag{2.73}$$

sonucu derhal çıkar. Böylece, Σ rank koşulunu sağlar. ◇

2.3.6 Uyarı : Özellikle, Teorem 2.3.5 Lie cebiri rank koşulunun Σ nın kontrol edilebilirliği için gerekli olduğunu gösterir. Gerçekten, $S_\Sigma(e) \subset G_\Sigma(e)$ dir.

Aşağıda, G nin e etkisiz elemanının Σ-ulaşılabilir (-accessibility) kümesinin kapanışı hakkında [4] den bir teorem vereceğiz.

2.3.7 Teorem : $\Sigma = (G, D)$, bağlantılı G Lie grubu üzerinde bir lineer kontrol sistemi olsun. O taktirde

$$\bigcup_{t\geq 0} X_t(H) \subset \overline{S_\Sigma(e)} \tag{2.74}$$

dir.

Ancak, Lie cebiri rank koşulu lineer kontrol sistemleri için kontrol edilebilirlik özeliğini karakterize etmez. Bir sonraki kısımda, bunu sıfır güçlü (nilpotent) basit bağlantılı bir Lie grubu olan Heisenberg grubu üzerinde bir örnekle gösteriyoruz (bakınız Örnek 2.4.3).

Kontrol edilebilirliğe bir yeter koşul elde etmek için aşağıda yeni bir cebirsel nesneyi kullanacağız. $\mathcal{H}p$, $\mathcal{H}$ yi içeren $L(G)$ nin $ad(X)$-invariant bir altuzayı olduğundan,

$$\mathcal{H}_i \subset \langle X|\mathcal{H}\rangle, \quad \forall i = 1, 2, \ldots \tag{2.75}$$

sonucu derhal çıkar. Özel olarak,

$$\mathcal{H}_{p-1} + ad^p(X)(\mathcal{H}) \subset \langle X|\mathcal{H}\rangle \tag{2.76}$$

elde edilir.

$$V = geren.\{Y^j, ad(X)(Y^j) \mid i = 0, 1, ..., p, \quad j = 1, ..., m\} \tag{2.77}$$

şeklinde tanımlı $L(G)$ nin V altuzayını gözönüne alalım. Eğer $boy(V) = boy(G)$ ise, Σ rank (ad-rank) koşulunu sağlıyor diyeceğiz.

Aşağıda, A.A. Agrachev et al., [1], a ait bir teorem vereceğiz.

2.3.8 Teorem : G bağlantılı bir Lie grubu ve $\Sigma = (G, D)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. Eğer Σ rank koşulunu sağlıyorsa, o taktirde Σ kontrol edilebilirdir.

İspat : $g(t, u)$ ile, $u \in \mathcal{U} \subset L_\infty([0, t], \mathbb{R}^k)$ kontrolü ve e başlangıç koşulu ile belirlenmiş

$$\dot{g} = X(g) + \sum_{j=1}^{m} u_j Y^j(g) \tag{2.78}$$

diferansiyel denkleminin çözümünü gösterelim. Her bir $t \geq 0$ için $E_t(u) = g(t, u)$ ile tanımlı

$$E_t : \mathcal{U} \rightarrow G \tag{2.79}$$

uç nokta tasvirini gözönüne alalım. Bu tasvir pürüzsüz (smooth) dür ve 0 daki $(F_t)_0$ türevi $u \equiv 0$ sabit kontrolünün bir B komşuluğunda tanımlıdır ve

$$(F_t)_0(u(\cdot)) = \int_0^t e^{(t-\tau)ad(X)} (\sum_{j=1}^{m} u_j(\tau) Y_e^j) d\tau, \quad [1], \tag{2.80}$$

ile verilir.

$$\langle w, (F_t)_0(u(\cdot))\rangle = 0, \quad \forall u(\cdot) \in B \tag{2.81}$$

olacak şekilde T_eG teğet uzayının T_e^*G dual uzayında bir w vektörünün varolduğunu kabul edeceğiz. Özellikle,

$$\int_0^t \sum_{j=1}^{m} \langle w, e^{(t-\tau)ad(X)}(Y_e^j)\rangle u_j(\tau) d\tau = 0 \tag{2.82}$$

dır. Son ifade, her bir parçalı sabit

$$u : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^k \tag{2.83}$$

fonksiyonu için doğru olduğundan,

$$\langle w, e^{(t-\tau)ad(X)} Y_e^j\rangle = 0, \quad \forall \tau \in [0, t] \tag{2.84}$$

elde edilir. Türetmeden dolayı, her bir $i \geq 0$ ve $j = 1, \ldots, m$ için

$$\langle w, ad^i(X) Y_e^j\rangle = 0 \tag{2.85}$$

elde edilir. Bu da, bizim rank koşulu kabulümüze aykırıdır. Dolayısıyla, $(F_t)_0$ lineer dönüşümü üzerinedir. Kapalı (Implicit) Teoreminden dolayı, [14], F_t tasvirinin, G deki e etkisiz elemanının bir U komşuluğu üzerinde, üzerine olduğu sonucuna varılır. Oysa, G bağlantılı bir Lie grubu olup, özellikle,

$$\bigcup_m U^m = G \tag{2.86}$$

dir.

$$S_\Sigma(e) = G \tag{2.87}$$

olduğu sonucu derhal çıkar ve sonuç olarak Σ kontrol edilebilirdir. $\diamond$

2.3.9 Sonuç : G Abelian bağlantılı bir Lie grubu ve $\Sigma = (G, D)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. O taktirde

$$\Sigma \quad kontrol \quad edilebilirdir \Leftrightarrow \Sigma \quad rank \quad koşulunu \quad sağlar. \tag{2.88}$$

İspat : Kabulden dolayı, G nin $L(G)$ Lie cebiri Abelian'dir.

$$\Theta = \{Y^j, ad^i(X)(Y^j) | 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq m\} \tag{2.89}$$

$L(G)$ nin bir altkümesi olduğundan,

$$geren_{\mathcal{L}.A.}(\Theta) = geren(\Theta) \tag{2.90}$$

olduğu sonucu çıkar. Teorem 2.3.5 ve Teorem 2.3.8 den dolayı, istenen sonuç elde edilir. $\diamond$

2.3.10 Uyarı :

i) Sonuç 2.3.9 dan dolayı, her bir

$$G = T^n \times \mathbb{R}^m, \quad n, m \in \mathbb{N} \tag{2.91}$$

Lie grubu için rank koşulu ile kontrol edilebilirlik özeliği kesinleştirilebilir. Burada, $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$, $(n - tane)$, bir Tor'dur.

ii) Σ vasıtasıyla $e \in G$ nin yörüngesinin $\langle X \mid H \rangle$ ile verildiğini biliyoruz.

iii) Etkisiz elemanın pozitif yörüngesi H yi içeren G nin en küçük T-invariant altgrubunda kapsanır. Dolayısıyla, eğer

$$geren(\Theta) = \langle X \mid \mathcal{H} \rangle \tag{2.92}$$

ise,

$$S_\Sigma(e) = \langle X \mid H \rangle \tag{2.93}$$

elde edilir.

iv) Özellikle, eğer G Abelian bağlantılı bir Lie grubu ise, daima Σ, yörüngeleri üzerinde kontrol edilebilir olacaktır.

$\Sigma = (G, D)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. Sistemin bu sınıfı genelleşir :

1. $\mathbb{R}^n$ üzerinde lineer kontrol sistemleri.

$\Sigma = (\mathbb{R}^n, D)$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir lineer kontrol sistemi olsun. Burada

$$D = \{A + Bu \mid u \in \mathbb{R}^n\} \tag{2.94}$$

dir. Sonuç 2.3.9 dan dolayı, aşağıdaki teoremi verelim :

2.3.11 Teorem : (Kalman et al , [7])

$$\Sigma \quad kontrol \quad edilebilirdir \Leftrightarrow rank(B \quad AB \quad A^2B \quad \dots A^{n-1}B) = n. \tag{2.95}$$

◇

Gerçekten, basit bir hesaplama her bir $i, j = 1, 2, \dots$ için,

$$[b_i, b_j] = 0 \tag{2.96}$$

ve

$$ad^i(A)(b_j) = (-1)^i Ab_j \tag{2.97}$$

olduğunu gösterir.

$$L \quad kontrol \quad edilebilirdir \Leftrightarrow$$

$$boy.geren\{b_1, \dots, b_p, Ab_1, \dots, Ab_p, \dots, A^{n-1}b_1, \dots, A^{n-1}b_m\} = n. \tag{2.98}$$

◇

2. Bir matris Lie grubu üzerinde lineer kontrol sistemi.

Markus [9] da, $GL_n(\mathbb{R})$ ın bir q^2-boyutlu G matris Lie altgrubu üzerinde ve

$$\dot{P} = X^*(P) + \sum_{j=1}^{m} u_j Y^j P \tag{2.99}$$

şeklindeki G üzerinde diferansiyel denklemlerin bir ailesi ile tanımlanmış bir dinamik ile Σ lineer kontrol sistemi kavramını veriyor. Burada, $X^*(P) = AP - PA$

ile tanımlı X^* sapan (drift) vektör alanına, tüm $n \times n$ reel matrislerin $M_n(\mathbb{R})$ Lie cebirindeki bir A elemanı ile üretiliyor ve her bir $j = 1, 2, \ldots, m$ için, Y^j sol çarpma ile tanımlanır ve aynı zamanda $M_n(\mathbb{R})$ nın elemanlarıdır. Bu durumda, her bir $t \in \mathbb{R}$ için,

$$X_t^*(P) = e^{tA} P e^{-tA}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.100}$$

akışı (flow) G nin bir otomorfizmidir. Sistemin bu sınıfı için yazar aşağıdaki sonuçları elde ediyor :

2.3.12 Teorem : (Markus L., [9])

G nin e etkisiz elemanının Σ-ulaşılabilir (-reachable) kümesi G de kapanışa sahiptir :

$$\bigcup_{0 \leq t} G_t \subset \overline{S_\Sigma(e)} \tag{2.101}$$

Burada

$$G_t = e^{tA} G_0 e^{-tA}, \tag{2.102}$$

$$L(G_t) = \text{geren}_{\mathcal{L}.A.}\{e^{-tA} Y^j e^{tA} | j = 1, 2, \ldots, m\} \tag{2.103}$$

Lie cebirli bir Lie grubudur. $\diamond$

Bu sonuç, Teorem 2.3.7 den elde edilir.

2.3.13 Teorem : (Markus L., [9])

Eğer Σ, G üzerinde kontrol edilebilir ise, o taktirde Σ Lie cebiri rank koşulunu sağlar. $\diamond$

Bu sonuç, Teorem 2.3.5 den elde edilir.

2.4 Örnekler

Bu kısımda, bazı örnekler veriyoruz. Kontrol edilebilirliği incelemek için Lie cebiri rank koşulu, Teorem 2.3.5 ve rank koşulu Teorem 2.3.8 i kullanıyoruz.

2.4.1) G, 3-boyutlu Heisenberg grubu olsun. Yani

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \tag{2.104}$$

ve Lie cebiri

$$L(G) = geren_{\mathcal{L}.A.}\left\{Y^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}. \tag{2.105}$$

Bu durumda, $[Y^1, Y^2] = Y^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dır.

$$D = \{X + uY^2 | u \in \mathbb{R}\} \tag{2.106}$$

ile $\Sigma = (G, D)$ lineer kontrol sistemini gözönüne alalım. Burada, X sonsuzküçük (infinitesimal) otomorfizmi

$$x = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \quad için \quad X(x) = x_2 Y^3 \tag{2.107}$$

ile tanımlıdır. Hesaplanırsa

$$\langle X|\mathcal{H}\rangle = geren_{\mathcal{L}.A.}\{Y^2, Y^3\} = geren\{Y^2, Y^3\} \tag{2.108}$$

çıkar. O zaman, Σ geçişli değildir. Gerçekten,

$$G_\Sigma(e) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x_2, x_3 \in \mathbb{R}\right\} \tag{2.109}$$

dir. Teorem 2.3.8, etkisiz elemanın yörüngesi üzerinde Σ vasıtasıyla üretilmiş $\Sigma_1 = (G_\Sigma(e), D)$ lineer kontrol sisteminin kontrol edilebilir olduğunu gösterir.

2.4.2) $G = SL_2(\mathbb{R})$, elemanları determinantı 1 olan matrislerden oluşan $GL_2(\mathbb{R})$ ın Lie altgrubu olsun. G nin $sl_2(\mathbb{R})$ Lie cebiri

$$L(G) = geren_{\mathcal{L}.A.}\left\{Y^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \tag{2.110}$$

ile verilir. Burada, $[Y^1, Y^2] = Y^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dir.

$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ matrisini ve A tarafından üretilmiş G nin (X_t) otomorfizmlerinin 1-parametreli grubunu, yani

$$X_t(g) = e^{tA} g e^{-tA}, \quad t \in \mathbb{R},\ g \in G \tag{2.111}$$

yi gözönüne alalım.

$$D = \{X + uY^2 | u \in \mathbb{R}\} \tag{2.112}$$

dinamikli $\Sigma = (G, D)$ lineer kontrol sistemi için

$$ad(X)(Y^2) = Y^3 \quad ve \quad ad^2(X)(Y^2) = Y^1 \tag{2.113}$$

elde edilir.

$$V = \langle X | \mathcal{H} \rangle = sl_2(\mathbb{R}) \tag{2.114}$$

olduğundan, o zaman Teorem 2.3.8 den dolayı, Σ kontrol edilebilirdir. Yani

$$S_\Sigma(e) = SL_2(\mathbb{R}) \tag{2.115}$$

dir.

2.4.3) $\mathbb{R}^2$ üzerinde, $u \in \mathcal{U}$ kısıtlanmayan parçalı sabit kontrollerle parametrelenmiş

$$\dot{x_1} = u \tag{2.116}$$

$$\dot{x_2} = x_1^2 \tag{2.117}$$

diferansiyel denklemlerin ailesi ile tanımlı $\mathcal{N}$ non-lineer kontrol sistemini gözönüne alalım. Kuşkusuz, $\mathcal{N}$ nin orijinden pozitif yörüngesi $\mathbb{R}^2$ değildir. Dolayısıyla, $\mathcal{N}$ kontrol edilemez.

Diğer taraftan, bu denklemler

$$(\dot{x_1, x_2}) = (p + uq)(x_1, x_2), \quad u \in \mathcal{U} \tag{2.118}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada, p ve q

$$p = x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad ve \quad q = u\frac{\partial}{\partial x_1} \tag{2.119}$$

ile tanımlı $\mathbb{R}^2$ üzerindeki vektör alanlarıdır.

$$[p, q] = -2ux_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \tag{2.120}$$

$$[q, [p, q]] = -2u^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \tag{2.121}$$

elde edilir. Özellikle,

$$geren_{\mathcal{L}.A}\{q, [p, q]\} \tag{2.122}$$

3-boyutlu sıfır güçlü (nilpotent) bir Lie cebiridir. Bu cebir,

$$\rho(p) = X^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(q) = Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.123}$$

şeklinde tanımlı gösteriliş ile $M_3(\mathbb{R})$ nin bir $L(G)$ altcebiri olarak gerçekleştirilebilir. Böylece, $L(G)$ ile birleşmiş G grubu bağlantılı ve basit bağlantılı Heisenberg Lie grubudur.

$$\dot{g} = ad(X^*)(g) + uY(g), \quad g \in G, \quad u \in \mathcal{U} \tag{2.124}$$

şeklinde verilen dinamiğe sahip bir $\Sigma = (G, D)$ lineer kontrol sistemi elde edilir. Gerçekten, $ad(X^*)$, G nin bir sonsuzküçük (infinitesimal) otomorfizmidir.
Σ nın Lie cebiri rank koşulunu sağladığı sonuç olarak çıkar. Gerçekten,

$$\rho[p, q] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.125}$$

dir. Fakat, Σ kontrol edilemez. Aksi taktirde,

$$S_\Sigma(e) = G \tag{2.126}$$

elde edilir. Böylece, gösteriliş vasıtasıyla verilen $\mathbb{R}^2$ üzerinde G nin non-lineer etkisinden (action) dolayı,

$$S_\Sigma(0,0) = S_\mathcal{N}(0,0) = \mathbb{R}^2 \tag{2.127}$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir.
Burada, Σ nın rank koşulunu sağlamadığı görülür. Gerçekten,

$$[p, [p, q]] = 0 \tag{2.128}$$

dır.

BÖLÜM III
LIE GRUPLARI ÜZERİNDE LİNEER KONTROL SİSTEMLERİNİN GÖZLENEBİLİRLİĞİ

3.1 Giriş

Bu bölümde, bir G Lie grubu üzerindeki gözlemeli bir Σ lineer kontrol sistemi için gözlenebilirlik problemini inceliyoruz ve Σ nın yerel ve global olarak gözlenebilirliğini karakterize etmek için cebirsel koşullar buluyoruz. G, $L(G)$ Lie cebirli bağlantılı bir Lie grubu olsun. Bu kısımda, G üzerinde bir Σ lineer kontrol sistemi aşağıdaki tarzda belirlenmiştir :

$$\Sigma = (G, D, h, V) \tag{3.1}$$

Burada, D

$$\dot{g}(t) = X(g(t)) + \sum_{j=1}^{m} u_j(t) Y^j(g(t)) \tag{3.2}$$

$$y = h(g) \in V, \quad u \in U \tag{3.3}$$

diferansiyel denklemlerin ailesi ile üretilen vektör alanlarının bir kümesidir. X vektör alanı G nin sonsuzküçük (infinitesimal) bir otomorfizmidir. $Y^1, ..., Y^m \in L(G)$ leri sağ-invariant vektör alanları olarak gözönüne alıyoruz ve u kısıtlanmayan parçalı sabit kontrollerin sınıfı olan U nun bir elemanı, yani $u \in U$ dur. V çıkış uzayı bir Lie grubudur ve çıkış tasviri

$$h : G \to V \tag{3.4}$$

Lie gruplarının bir homomorfizmidir. Bu çalışmada,

$$D = \{X + \sum_{j=1}^{m} u_j Y^j \mid u \in \mathbb{R}^m\} \tag{3.5}$$

ile verilen Σ nın dinamiği G üzerindeki tüm analitik vektör alanlarının Lie cebiri olan $\mathcal{X}(G)$ nin bir altkümesidir. Kontrol sistemlerinin bu türü, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki gözlemeli lineer hali kapsar. Bu kısımda, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki gözlenebilirlik sonuçlarını genel Lie gruplarına genişletmek istiyoruz. Burada amacımız, yerel gözlenebilirlik ve global gözlenebilirlik için gerek ve yeter cebirsel koşulları bulmaktır. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki lineer halde olduğu gibi, bu özeliklerin $Y^1, ..., Y^m$ kontrol vektörlerinden bağımsız olduğunu göstereceğiz. Dolayısıyla,

$$\Sigma = (G, X, h, V) \tag{3.6}$$

lineer kontrol sistemlerinde yani $u = 0$ ile incelemeye çalışacağız. G nin e etkisiz elemanının "ayırd edilemeyen " I denklik sınıfının kapalı Lie altgrup yapısını kullanacağız.

$$\Delta : g \in G \rightarrow \Delta(g) = (R_g)_* \mathcal{I} \tag{3.7}$$

şeklinde G üzerinde bir sağ-invariant dağılım tanımlayalım. Burada $\mathcal{I}$, I nın Lie cebiri ve R_g, G üzerindeki g ile sağ öteleme dönüşümüdür.

$\mathbb{R}^n$ üzerindeki lineer halde, $\mathbb{R}^n$ in $\mathcal{I}$ vektör altuzayının yerel ve global gözlenebilirliği karakterize ettiği bilinmektedir. Yerel gözlenebilirliği incelemek için Δ yı bilmenin yeterli olduğunu göstereceğiz. Ancak, global gözlenebilirliği belirlemek için X sapan (drift) vektör alanının 1-parametreli grubu tarafından üretilen etkiyle (action) sabit noktaların kümesini analiz etmek gereklidir. Ayrıca, etkisiz elemanın denklik sınıfını hesaplamak için G nin T^*G eş-teğet demeti üzerinde bir algoritma vereceğiz.

$\Sigma = (G, D, h, V)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. Σ, G üzerinde global difeomorfizmlerin

$$G_\Sigma = \{Z^1_{t_1} \circ Z^2_{t_2} \circ ... \circ Z^k_{t_k} \mid Z^i \in D, \quad t_i \in \mathbb{R}\} \tag{3.8}$$

grubunu ve

$$S_\Sigma = \{Z^1_{t_1} \circ Z^2_{t_2} \circ ... \circ Z^k_{t_k} \mid Z^i \in D, \quad t_i \geq 0\} \tag{3.9}$$

yarı-grubunu üretir.

I. Bölümde, Teorem 1.2.2 de, her bir $g \in G$ için $G_\Sigma(g)$ yörüngesinin diferansiyellenebilen bir manifold yapısına sahip olduğunu göstermiştik. Dolayısıyla, Σ yı yörüngeleri üzerine kısıtlamak olanaklıdır. Aşağıdaki özelikleri hatırlatalım :

i) $g_1, g_2 \in G$ elemanları, eğer

$$h \circ \varphi(g_1) = h \circ \varphi(g_2), \quad \forall \varphi \in S_\Sigma \tag{3.10}$$

ise, Σ vasıtasıyla "*ayırd edilemez*" dir,

ii) Eğer G nin "ayırd edilemeyen " hiç iki noktası yoksa Σ ya *gözlenebilirdir* ve eğer U daki her bir eleman g den "ayırd edilemeyen " olmayacak şekilde g nin bir U komşuluğu varsa, Σ ya $g \in G$ de *yerel gözlenebilirdir*, denir.

$$\tilde{\Sigma} = (\tilde{G}, \tilde{D}, \tilde{h}, V) \tag{3.11}$$

ile tanımlı Σ için bir $\tilde{\Sigma}$ minimal gerçekleştirmesi (realization) geçişli ve gözlenebilir bir sistemdir. Burada

$$\pi : G \to \tilde{G} \tag{3.12}$$

her $Z \in D$, π nin π_* türevi tarafından izdüşürülebilir olacak şekilde bir pürüzsüz (smooth), üzerine ve altdaldırma (submersion) dır. Bundan başka, $\pi_*(D) = \tilde{D}$ ve $\tilde{h} \circ \pi = h$ dır.

Aşağıdaki kısımda, esas olarak yerel ve global gözlenebilirlik için gerek ve yeter koşulları arayacağız. Önerme 3.2.1 den sonra, minimal gerçekleştirmeler (realizations) kolayca elde edileceklerdir.

3.2 Gözlenebilirlik

[4] deki $\gamma(t)$ çözümünün özel şekli Σ nın gözlenebilirlik özeliklerini incelemek için çok uygundur. " $\sim$ " ile "ayırd edilemeyen " denklik bağıntısını ve $\tilde{g}$ ile de $g \in G$ nin denklik sınıfını gösterelim. Ayrıca, $I = \tilde{e}$ dir.

$$\varphi = Z^1_{t_1} \circ Z^2_{t_2} \circ \ldots \circ Z^k_{t_k} \in G_\Sigma \tag{3.13}$$

olsun. Her bir $i = 1, 2, \ldots, k$ için ve her bir $g \in G$ için

$$Z^i_{t_i}(g) = X_{t_i}(\beta_i(t) \cdot g) \tag{3.14}$$

olacak şekilde diferansiyellenebilen bir

$$\beta_i : \mathbb{R} \to G \tag{3.15}$$

eğrisi vardır. h bir homomorfizm olduğundan, basit bir hesaplama

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow h(X_t(g_1)) = h(X_t(g_2)), \quad \forall t \geq 0 \tag{3.16}$$

$$\Leftrightarrow X_t(g_1 \cdot g_2^{-1}) \in Ker(h), \quad \forall t \geq 0 \tag{3.17}$$

olduğunu gösterir.

$$I = \{g \in G \mid X_t(g) \in Ker(h), \quad \forall t \geq 0\} \tag{3.18}$$

elde edilir. Bundan başka, her bir $g \in G$ için $\tilde{g} = Ig$ dir. Gerçekten,

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_2 \in Ig_1 \tag{3.19}$$

dir. $\mathbb{R}^n$ halinde olduğu gibi, yerel gözlenebilirlik ve gözlenebilirlik özelikleri için genel lineer kontrol sistemleri $Y^1, Y^2, ..., Y^m$ kontrol vektörlerinden bağımsızdırlar. Bu da, X de inceleme yapmamıza olanak sağlar. Bundan sonra sistemi

$$\Sigma = (G, X, h, V) \tag{3.20}$$

ile göstereceğiz ve aynı zamanda Σ ya G üzerinde bir lineer kontrol sistemi diyeceğiz. Eğer G bağlantılı ise, o taktirde G nin otomorfizm grubu olan $Aut(G)$ nin bir Lie grubu yapısına sahip olduğunu hatırlatalım, [5].

3.2.1 Önerme : $\Sigma = (G, X, h, V)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. O taktirde :

a) I, $Ker(h)$ nin normal kapalı bir Lie altgrubudur.

b) I, G_Σ-invarianttır.

İspat : a) Eğer $g_1, g_2 \in G$ ve $g_1 \sim e \sim g_2$ ise, o taktirde $g_1 \cdot g_2^{-1} \in I$ dir. Dolayısıyla I, G nin bir altgrubudur. Her bir $g \in G$, $l \in I$ ve $t \geq 0$ için

$$X_t(g \cdot l \cdot g^{-1}) \in Ker(h) \tag{3.21}$$

elde edilir. O zaman, $glg^{-1} \in I$ dır ve bu I nın G nin bir normal altgrubu olduğunu gösterir. I kapalıdır. Çünkü, g ye yakınsayan I da herhangi bir (g_n) dizisi alındığında, her bir sabit t için X_t nin sürekliliğinden dolayı $X_t(g_n) \to X_t(g)$ elde edilir. Çekirdek kapalı olduğundan $X_t(g) \in Ker(h)$ dir. Dolayısıyla, $g \in I$ dır. Özellikle, I, G nin bir Lie altgrubudur, [13].

b)

$$g \sim e \Rightarrow \varphi(g) \sim e, \quad \forall \varphi \in G_\Sigma \tag{3.22}$$

olduğunu ispatlamalıyız. Tanımdan dolayı, I, S_Σ-invarianttır ve I nın formundan dolayı

$$g \sim e \Rightarrow X_t(g) \in Ker(h), \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.23}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $u \equiv 0$ sabit kontrolü ile

$$X_t \in Aut(I), \quad \forall t \geq 0 \tag{3.24}$$

elde edilir. $\alpha(t) = X_t$ ile tanımlı

$$\alpha : \mathbb{R} \to Aut(G) \tag{3.25}$$

analitik eğrisi,

$$\alpha(\mathbb{R}^+) \subset Aut(I) \tag{3.26}$$

yi sağlar. $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}$ nin açık bir altkümesi olduğundan, analitikliğin standart argümanlarından dolayı

$$\alpha(\mathbb{R}) \subset Aut(I) \tag{3.27}$$

elde edilir. Böylece, I, G_Σ-invarianttır. $\diamond$

Aşağıda, Önerme 3.2.1 in bir cebirsel versiyonunu vereceğiz. $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{K}$ ile sırasıyle I ve $Ker(h)$ Lie gruplarının Lie cebirlerini gösterelim.

Önerme 3.2.1, I nın kullanışlı geometrik özeliklerini verir ve aynı zamanda daha sonra göreceğimiz gibi $I\backslash G$ Lie bölüm grubu tarafından Σ için minimal gerçekleştirme (realization) oluşturmaya olanak verir. Ancak, I yı oluşturmak için daha uygun cebirsel versiyonu bulmak gerekiyor.

3.2.2 Önerme : $\Sigma = (G, X, h, V)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. O taktirde, $\mathcal{I}$ $L(G)$ nin bir X-invariant altcebiridir. Yani

$$ad^i(X)(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}, \quad \forall i \geq 0 \tag{3.28}$$

dır.

İspat : Tanımdan dolayı, $ad^0(X)$, $L(G)$ üzerinde özdeşlik tasviridir.

$$ad^1(X)(Y) = [X, Y] \tag{3.29}$$

dir ve $i > 1$ için

$$ad^i(X)(Y) = ad^{i-1}(X)([X, Y]) \tag{3.30}$$

dir. Tümevarımdan dolayı, $i = 1$ için ispatlamak yeterlidir. Yardımcı Teorem 2.3.1 de $L(G)$ Lie cebirinin $\mathcal{X}(G)$ de $ad(X)$-invariant, yani

$$Y \in L(G) \Rightarrow [X, Y] \in L(G) \tag{3.31}$$

olduğunu göstermiştik. Diğer taraftan, Önerme 3.2.1 de, I nın T-invariant, yani

$$X_t : I \to I, \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.32}$$

olduğunu ispatlamıştık. Her bir $Y \in \mathcal{I}$ ve $s \in \mathbb{R}$ için $exp(sY) \in I$ dır. Burada,

$$X_{exp(sY)} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} X_t(exp(sY)) \in (R_{exp(sY)})_*(\mathcal{I}), \quad \forall s \in \mathbb{R} \tag{3.33}$$

dır. Bir önceki formülden ve parantez tanımından

$$[X, Y](e) \in \mathcal{I} \tag{3.34}$$

olduğu sonucu çıkar. Bu işlemin tekrar uygulanmasıyla

$$ad^i(X)(Y) \in \mathcal{I}, \quad \forall i \in \mathbf{Z}, \quad i \geq 0 \tag{3.35}$$

yazılmasına olanak verir ki bu da ispatı tamamlar. ◇

Bir sonraki adım, I nın Lie cebirini karakterize etmektir. Gerçekten, göreceğimiz gibi, $\mathcal{I}$, $\mathcal{K}$ da kapsanan en büyük X-invariant altcebirdir.

3.2.3 Önerme : $\Sigma = (G, X, h, V)$ bir lineer kontrol sistemi ve n, G nin boyutu olsun. O taktirde,

$$\mathcal{I} = \bigcap_{i=0}^{n-1} ad^{-i}(X)(\mathcal{K}) \tag{3.36}$$

dir.

İspat : Eğer h bire-bir ise, o taktirde $I = Ker(h)$ dir. Dolayısıyla, $\mathcal{K} \neq 0$ kabul edilebilir. Böylece, $\mathcal{K}$ üzerinde $ad^i(X)$-etkisi (action) ile üretilen $L(G)$ nin yeni elemanlarının sadece $i = (n-1)$-inci adıma kadar olması olanaklıdır. $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}$ olduğundan, Önerme 3.2.2 den dolayı,

$$\mathcal{F} =: \bigcap_{i=0}^{n-1} ad^{-i}(X)(\mathcal{K}) \subset \mathcal{I} \tag{3.37}$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir. Her bir $t \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki şema değişmelidir :

$$\begin{array}{ccc} L(G) & \xrightarrow{(X_t)_*} & L(G) \\ exp\downarrow & & \downarrow exp \\ G & \xrightarrow{X_t} & G \end{array} \tag{3.38}$$

Böylece, eğer $Y \in \mathcal{F}$ ise, her bir $s \in \mathbb{R}$ için

$$exp(X_t)_*(sY) = X_t(exp(sY)) \tag{3.39}$$

elde edilir. Standart Lie serisi açılımından dolayı

$$(X_t)_*(sY) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} ad^i(X)(sY) \tag{3.40}$$

dir. $Y \in \mathcal{F}$ hipotezine göre,

$$ad^i(X)(Y) \in \mathcal{K}, \quad \forall i \geq 0 \tag{3.41}$$

elde edilir. Özellikle,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} X_t(exp(sY)) = (X_t)_*(sY) \in \mathcal{K} \tag{3.42}$$

dir. O zaman her bir t ve s reel sayı çifti için

$$X_t(exp(sY)) \in Ker(h) \tag{3.43}$$

bulunur. Öte yandan,

$$Y \in \mathcal{I} \Leftrightarrow exp(sY) \in I \tag{3.44}$$

dır ve böylece ispat tamamlanır. ◊

$L(G)$ nin her $\mathcal{A}$ altcebiri, TG teğet demeti üzerinde

$$\Delta_{\mathcal{A}}(g) = (R_g)_*(\mathcal{A}), g \in G \tag{3.45}$$

ile tanımlı bir $\Delta_{\mathcal{A}}$ dağılımını (distribution) üretir. Her g durumu (state) için R_g, G nin bir difeomorfizmi olduğundan, $\Delta_{\mathcal{A}}$ dağılımı düzenli (regüler) dir. Yani, $\Delta_{\mathcal{A}}(g)$ nin boyutu $g \in G$ den bağımsızdır. Bundan başka, $\mathcal{A}$ bir altcebir olduğundan,

$$X, Y \in \Delta_{\mathcal{A}} \Rightarrow [X, Y] \in \Delta_{\mathcal{A}} \tag{3.46}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\Delta_{\mathcal{A}}$ dürevli (involutive) dir. Frobenious teoremi, [14], bu dağılımın integrallenebilirliğini pekiştirir ve bu durumda $g \in G$ noktasından geçen $\Delta_{\mathcal{A}}$ nın $In_{\Delta_{\mathcal{A}}}(g)$ integral manifoldu

$$In_{\Delta_{\mathcal{A}}}(g) = Ag \tag{3.47}$$

ile verilir. Burada A, $\mathcal{A}$ Lie cebirli G nin bağlantılı Lie alt grubudur. $\mathcal{I}$ tarafından üretilmiş $\Delta = \Delta_{\mathcal{I}}$ dağılımını gözönüne alalım ve bir G Lie grubu üzerinde bir Σ lineer kontrol sisteminin yerel gözlenebilirlik özeliği için aşağıdaki sonucu verelim.

3.2.4 Teorem : $\Sigma = (G, X, h, V)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. O taktirde,

$$\Sigma \quad yerel \quad gözlenebilirdir \Leftrightarrow \mathcal{I} = 0 \tag{3.48}$$

dir.

İspat : Eğer Δ sıfır (null) olmayan bir dağılım ise, o taktirde etkisiz elemandan geçen integral manifold $I = \tilde{e}$, G nin apaçık (trivial) bir altgrubu değildir. Bundan başka, her bir $g \in G$ ve g nin her bir U komşuluğu için

$$\tilde{g} \cap U = Ig \cap U \tag{3.49}$$

olduğundan I, g yi içeren G nin apaçık (trivial) bir altmanifoldu değildir. Σ nın yerel gözlenebilir olmadığı sonucuna varılır. Geriye $\mathcal{I} = 0$ ın gerekliğini ispatlamak kalıyor. Eğer $\mathcal{I} = 0$ ise, o taktirde I, G nin bir ayırtık (discrete) Lie altgrubudur. Sonuç olarak, her bir $g \in G$ için,

$$\bar{g} \cap U = \{g\} \tag{3.50}$$

olacak şekilde g nin bir U komşuluğu vardır ve böylece Σ yerel gözlenebilirdir. $\diamondsuit$

Kuşkusuz, yerel gözlenebilirlik gözlenebilirlik için gerekli bir koşuldur. Ancak, $\mathbb{R}^n$ haline aykırı, $\mathcal{I} = \{0\}$ koşulu I nın apaçık (trivial) altgrup olmasını gerektirmez. Gerçekten, $\mathbb{R}^n$ in hiç bir ayırtık (discrete) reel vektör altuzayı yoktur. Bundan başka, keyfi Lie grubu ayırtık (discrete) altgruplar kapsayabilir. Dolayısıyla, Σ nın gözlenebilirliğine global bir sonuç elde etmek için G nin özel bir altgrubu olan G üzerinde $T = (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$-etkisi (action) ile sabit noktaları incelemek gerekiyor. Daha kesin olarak, iyi tanımlı bir

$$\psi : \mathbb{R} \times G \to G \tag{3.51}$$

$$(t, g) \to \psi(t, g) = X_t(g) \tag{3.52}$$

etkisi (action) vardır. I, T-invariant olduğundan

$$\psi(\mathbb{R} \times I) \subset I \tag{3.53}$$

elde edilir. G üzerindeki T-etkisi (action) ile sabit noktaların kümesini

$$Fix(T) = \{g \mid X_t(g) = g, \quad \forall t \in \mathbb{R}\} \tag{3.54}$$

ile gösterelim. X, G nin bir sonsuzküçük (infinitesimal) otomorfizmi olduğundan, $Fix(T)$ nin G nin kapalı bir Lie altgrubu olduğu sonucu çıkar.

3.2.5 Teorem : $\Sigma = (G, X, h, V)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. O taktirde, Σ gözlenebilirdir $\Leftrightarrow$

a) $\mathcal{I} = 0$,

b) $Fix(T) \cap Ker(h) = \{e\}$ dir.

İspat : $(\Rightarrow)$ $I = \{e\}$ olduğunu varsayalım. O zaman $\mathcal{I}$ sıfır (null) olmalıdır. Eğer $g \in Ker(h)$ T-etkisi (action) ile bir sabit nokta ise,

$$X_t(g) \in Ker(h), \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.55}$$

dir ve sonuç olarak, $g = e$ dir.

($\Leftarrow$) Karşıt olarak, $\mathcal{I} = 0$, I nın $Ker(h)$ nin bir ayırtık (discrete) Lie altgrubu olduğunu gösterir. Burada, $g \in I$ alalım ve ψ nin $\mathbb{R} \times \{g\}$ ye kısıtlanışı olan $\psi|_{\mathbb{R}\times\{g\}}$ sürekli tasvirini gözönüne alalım. $\psi|_{\mathbb{R}\times\{g\}}$ nin tanım bölgesi bağlantılı olduğundan,

$$Im(\psi_g) = \{X_t(g) \mid t \in \mathbb{R}\} \tag{3.56}$$

de bağlantılıdır. Ancak, X_0, G nin özdeşlik tasviridir ve I, T-invarianttır. O zaman

$$g \in Im(\psi_g) \subset I \tag{3.57}$$

dir. I ayırtık (discrete) olduğundan,

$$\{g\} = Im(\psi_g) \tag{3.58}$$

elde edilir. Buradan, $g \in Fix(T)$ olduğu sonucu çıkar. Öte yandan, $I \subset Ker(h)$ olup, sonuç olarak $g = e$ dir ve Σ gözlenebilirdir. $\diamondsuit$

$\mathbb{R}^n$ üzerinde lineer kontrol sistemleri.

Σ, $\mathbb{R}^n$ üzerinde gözlemeli bir lineer kontrol sistemi, yani

$$\Sigma = (\mathbb{R}^n, D, h, \mathbb{R}^s) \tag{3.59}$$

olsun. Burada

$$D = \{A + Bu \mid u \in \mathbb{R}^m\}, \tag{3.60}$$

olup, A bir $n \times n$ reel sabit matris ve B

$$\phi(u_1, ..., u_m) = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i \tag{3.61}$$

ile tanımlı

$$\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \tag{3.62}$$

lineer dönüşümün matrisidir. V Lie grubu burada $\mathbb{R}^s$ dir ve

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s \tag{3.63}$$

çıkış tasviri bir $s \times n$ reel sabit C matrisi için

$$h(x) = Cx \tag{3.64}$$

ile verilir. $\mathbb{R}^n$ grubu bir vektör uzayı olduğundan, $I = \mathcal{I}$ ve $Ker(h) = \mathcal{K}$ nın $\mathbb{R}^n$ nin altuzaylarıdır. Özel olarak, aşağıdaki bilinen sonuçları, [6], genelleştirelim :

$$rank \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ . \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n. \tag{3.65}$$

i) Σ gözlenebilirdir $\Leftrightarrow$ Σ yerel gözlenebilirdir.

Bu özelik, Teorem 3.2.4 den ve

$$boy(\mathcal{I}) = 0 \Rightarrow I = \{0\} \tag{3.66}$$

gerçeğinden çıkar.

ii)

$$I = \bigcap_{i=1}^{n-1} Ker(C \cdot A^i). \tag{3.67}$$

Bu özelik de, Önerme 3.2.3 ün sonucu olarak bulunur. Gerçekten, I, $Ker(C)$ de kapsanan en büyük A-invariant altuzaydır. Özellikle, I, B den bağımsızdır.

Teorem 3.2.4 ve Teorem 3.2.5 de yer alan sonuçlar bir lineer kontrol sisteminin yerel ya da global gözlenebilir olmasının bilinmesi için bir ölçüt verir. Diğer taraftan, Önerme 3.2.3, Σ için minimal gerçekleştirmeyi (realization) oluşturmaya olanak sağlar. Gerçekten, I, G nin kapalı bir Lie altgrubudur. Özellikle, kapalı altgrup teoreminden dolayı, [14],

$$I \backslash G = \{Ig \mid g \in G\} \tag{3.68}$$

homojen uzayı oluşturulabilir. I normal olduğundan, o zaman $I \backslash G$ bir Lie grubudur. Bu manifoldun teğet uzayı

$$\mathcal{I} \backslash L(G) = \{\mathcal{I} + Y \mid Y \in L(G)\} \tag{3.69}$$

Lie cebiridir ve

$$\pi : G \to I\backslash G \tag{3.70}$$

kanonik izdüşümü aşağıdaki özeliği sağlar :

etkisiz elemanda π nin

$$\pi_* : \mathcal{G} \to \mathcal{I}\backslash\mathcal{G} \tag{3.71}$$

türevi bir üzerine altdaldırma (submersion) dır. Önerme 3.2.1 de, I nın G_Σ-invariant olduğunu ispatlamıştık. Buna göre, eğer $Z \in D$ ve $t \in \mathbb{R}$ ise, her $g_1, g_2 \in G$ için,

$$g_1 \sim g_2 \Rightarrow Z_t(g_1) \sim Z_t(g_2) \tag{3.72}$$

elde edilir. Z nin izdüşürülebilir olduğu sonucu çıkar. Yani, $\pi_*(Z)$ homojen uzay üzerinde iyi tanımlı bir vektör alanıdır ve

$$(\pi_* \circ Z)_t = \pi \circ Z_t \tag{3.73}$$

dir. Her bir $g \in G$ için h, Ig sağ eş kümeleri (cosets) üzerinde sabit olduğundan, aşağıdaki şema değişmeli olacak şekilde iyi tanımlı bir $\tilde{h}$ tasviri vardır :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & & V \\ & I\backslash G \arrow[ur, "\tilde{h}"'] & \end{tikzcd} \tag{3.74}$$

Böylece, aşağıdaki sonuca varılır.

3.2.6 Teorem : $\Sigma = (G, \mathcal{D}, h, V)$ geçişli bir lineer kontrol sistemi olsun. O taktirde, $u \in U$ parametreli

$$\dot{Ig} = \pi_*(X + \sum_{j=1}^{m} u_j Y^j)(Ig) \tag{3.75}$$

$$\tilde{y} = \tilde{h}(Ig) \tag{3.76}$$

değerlendirme (evolution) denklemleri ile belirli

$$\tilde{\Sigma} = (I\backslash G, \pi_*(D), \tilde{h}, V) \tag{3.77}$$

lineer kontrol sistemi Σ için bir minimal gerçekleştirme (realization) dir.

İspat : Yapısı gereği $\check{I} = \{I\}$ dır ve böylece $\tilde{\Sigma}$ gözlenebilirdir. Ancak hipotez gereği, Σ geçişlidir. Dolayısıyla

$$G = G_{\Sigma}(e) = < X \mid H > \tag{3.78}$$

dir. Diğer taraftan, eğer $Z \in D$ ise, o zaman

$$(\pi_* \circ Z)_t = \pi \circ Z_t, \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.79}$$

olup, bu da

$$G_{\tilde{\Sigma}}(I) = I \backslash G \tag{3.80}$$

olduğunu gösterir ve $\tilde{\Sigma}$ sistemi geçişlidir. Burada, $\tilde{h}$ Lie gruplarının bir homomorfizmidir ve

$$(\pi \circ X)_t \in Aut(I \backslash G), \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.81}$$

olur. Yani $\pi_*(X)$, durum uzayının sonsuzküçük (infinitesimal) bir otomorfizmidir. $\diamondsuit$

İlkel kontrol sisteminin aynı sınıfında minimal gerçekleştirme (realization) elde edilir. Özel olarak, Teorem 3.2.6 aşağıdaki özelikleri sağlar :

a) $\tilde{\mathcal{I}} = \mathcal{I}$

b) $Fix(\tilde{T}) \cap Ker(\tilde{h}) = I$

burada $\tilde{T} = \{Ig \mid (\pi \circ X)_t(Ig) = Ig \mid t \in \mathbb{R}\}$ dir.

3.2.7 Uyarı : $\Sigma = (G, D, h, V)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. Teorem 3.2.6, yörüngeleri üzerinde Σ için minimal gerçekleştirme (realization) oluşturmaya olanak sağlar.

3.3 Bir Algoritma

İkinci kısımda, bir lineer kontrol sisteminin gözlenebilirlik özeliklerinin esas olarak $e \in G$ etkisiz elemanının denklik sınıfının $\mathcal{I}$ Lie cebirine ve sapan (drift) vektör alanı X ile üretilmiş etki (action) tarafından sabit noktaların kümesine bağlı olduğunu görmüştük. Bu kısımda, $\mathcal{I}$ yı hesaplamaya olanak veren, T^*G eş-teğet demetinde sonlu bir sağ-invariant altuzaylar dizisi elde etmek için Isidori-algoritmasını, [6], kullanacağız. T^*G nin diferansiyellenebilen bir manifold yapısına sahip olduğu bilinmektedir, [14].

$$T^*G = \bigcup_{g\in G} T_g^*G \tag{3.82}$$

olduğunu hatırlatalım. Burada, her bir $g \in G$ için T_g^*G, T_gG teğet uzayının dual uzayıdır. G üzerinde bir w 1-diferansiyel formu diferansiyellenebilen bir

$$w : g \in G \to w_g \in T_g^*G \tag{3.83}$$

tasviridir. $\mathcal{X}^*(G)$ ile, G üzerindeki tüm 1-diferansiyel formların kümesini gösterelim. Her bir $g \in G$ için

$$< w, Z > (g) = w_g(Zg) \tag{3.84}$$

olacak şekilde bilinen bir ikililineer çift

$$\mathcal{X}^*(G) \times \mathcal{X}(G) \to \mathbb{R} \tag{3.85}$$

$$(w, Z) \to < w, Z > \tag{3.86}$$

vardır. Burada, X-invariant'lığının bir dual versiyonunu vermek gerekir. Tanım gereği, $L_X(w)$ ile gösterilen X vektör alanı doğrultusundaki w nın Lie türevi

$$L_X(w)(g) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (X_t)^* w_{X_t(g)} \tag{3.87}$$

1-diferansiyel formudur. Burada "geri çekme (pull back)" $(X_t)^*$

$$(X_t)^* w_g(v) = w_{X_t(g)}(X_t)_*(v), \quad v \in T_g(G) \tag{3.88}$$

ile tanımlıdır. G üzerindeki bir Θ eş-dağılımı

$$\Theta : g \in G \to \Theta(g) = T_g^*G \quad nin \quad altuzayı \tag{3.89}$$

ifadesi ile belirlidir. $X \in \mathcal{X}(G)$ olsun. Bir Θ eş-dağılımına, eğer

$$L_X(w) \in \Theta, \quad \forall w \in \Theta \tag{3.90}$$

ise, X-invariant'tır denir. Aşağıda bilinen formül elde edilir :
Eğer $X, Y \in \mathcal{X}(G)$ ve $w \in \mathcal{X}^*(G)$ ise, o taktirde

$$L_X < w, Y > = < L_X(w), Y > + < w, [X, Y] >, \quad [14], \tag{3.91}$$

dir. G üzerinde bir Δ dağılımı verildiğinde, ikililineer çift yoluyla bir ortogonal

$$\Delta^{\perp} = \{w \in \mathcal{X}^*(G) \mid < w, Z > = 0, \quad \forall Z \in \Delta\} \tag{3.92}$$

eş-dağılım birleştirilebilir. Diğer bir deyişle

$$\Delta^{\perp} = Ker(\Delta) \tag{3.93}$$

dır.

3.3.1 Uyarılar : $\Sigma = (G, X, h, V)$ bir lineer kontrol sistemi olsun.

i) $\mathcal{I}$ ile üretilen sağ-invariant $\Delta_{\mathcal{I}}$ dağılımı, yani

$$\Delta_{\mathcal{I}}(g) = (R_g)_*(\mathcal{I}), \quad g \in G, \tag{3.94}$$

sağ-invariant

$$\Delta_{\mathcal{I}}^{\perp}(g) = (R_{g^{-1}})^*(\mathcal{I}^{\perp}), \quad g \in G \tag{3.95}$$

eş-dağılımını üretir. Benzer şekilde, $\mathcal{K}$ Lie cebiri ile üretilen $\Delta_{\mathcal{K}}^{\perp}$ eş-dağılımı gözönüne alınır.

ii) $\Delta_{\mathcal{I}}^{\perp}$, X-invariant'tır. Gerçekten, $w \in \Delta_{\mathcal{I}}^{\perp}$ ve $Y \in \Delta_{\mathcal{I}}$ olsun. O zaman

$$< L_X(w), Y > = L_X < w, Y > - < w, [X, Y] > \tag{3.96}$$

elde edilir. $[X, Y] \in \Delta$ olduğundan, $L_X(w) \in \Delta^{\perp}$ bulunur.

iii) $\Delta_{\mathcal{I}}^{\perp}$, $\Delta_{\mathcal{K}}^{\perp}$ yı içeren en küçük X-invariat sağ-invariant eş-dağılımdır. Gerçekten, $\Delta_{\mathcal{I}}$, $\Delta_{\mathcal{K}}$ da kapsanan en büyük X-invariant dağılımdır ve

$$\Delta_{\mathcal{I}} \subset \Delta_{\mathcal{K}} \Rightarrow \Delta_{\mathcal{K}}^{\perp} \subset \Delta_{\mathcal{I}}^{\perp} \tag{3.97}$$

dır. Sonuçta, algoritma elde edilir. Aşağıdaki genel sonucu, [6], ispatlamak olanaklıdır.

M diferansiyellenebilen bir manifold olsun. $\tau_1, ..., \tau_q \in \mathcal{X}(M)$ vektör alanlarını gözönüne alalım ve Θ, M de bir eş-dağılım olsun.

$$< \tau_1, ..., \tau_q \mid \Theta > \tag{3.98}$$

ile Θ yı içeren en küçük τ_i-invariant, $i = 1, ..., q$, eş-dağılımı gösterelim. Aşağıdaki diziyi gözönüne alalım :

$$\Theta_0 = \Theta \tag{3.99}$$

$$\Theta_k = \Theta_{k-1} + \sum_{i=0}^{q} L_{\tau_i}(\Theta_{k-1}) \tag{3.100}$$

Dolayısıyla, aşağıdaki teoremi verelim :

3.3.2 Teorem : (Isidori A., [6])

Yukarıdaki algoritma ile üretilen $\Theta_0, \Theta_1, ...$ eş-dağılımları aşağıdaki özelikleri sağlar :

a) $\Theta_k \subset < \tau_1, ..., \tau_q \mid \Theta >, \quad \forall k \geq 0$.

b) Eğer

$$\Theta_{k^*} = \Theta_{k^*+1} \tag{3.101}$$

olacak şekilde bir k^* tamsayısı varsa, o taktirde

$$\Theta_{k^*} = < \tau_1, ..., \tau_q \mid \Theta > \tag{3.102}$$

dır. $\diamond$

Bu sonucu özel halimiz için kullanacağız.

3.3.3 Sonuç : $\Sigma = (G, X, h, V)$ bir lineer kontrol sistemi olsun.

$$\Theta_0 = \Delta_{\mathcal{K}}^{\perp} \tag{3.103}$$

$$\Theta_k = \Theta_{k-1} + L_X(\Theta_{k-1}) \tag{3.104}$$

algoritması $\Delta_{\mathcal{I}}^{\perp}$ ya yakınsaktır.

İspat : $boy.L(G) < \infty$ olduğundan, $(\Theta_k)_{k\geq 0}$ dizisi bir $k^* \leq n$ tamsayısı için stabilize edilmelidir. Diğer taraftan, $\Delta_{\mathcal{I}}^{\perp}$, $\Delta_{\mathcal{K}}^{\perp}$ yi kapsayan en küçük X-invariant sağ-invariant eş-dağılımdır. O zaman, Teorem 3.3.2 den

$$\Theta_{k^*} = \Delta_{\mathcal{I}}^{\perp} \tag{3.105}$$

dir. ◇

Özellikle, bu algoritma "flag" adı verilen sağ-invariant altuzayların sonlu bir

$$\mathcal{K}^{\perp} = \Theta_0(e) \subset \Theta_1(e) \subset ... \subset \Theta_{k^*}(e) = \mathcal{I}^{\perp} \tag{3.106}$$

dizisini verir.

Böylece, $\mathcal{I}$ yı bulmak için aşağıdaki algoritmayı gözönüne alabiliriz :

1. $Ker(h)$ nin hesaplanması,

2. $\mathcal{K}$ Lie altcebiri için bir $\mathcal{B} = \{Z^1, ..., Z^p\}$ tabanının seçilmesi,

3. $\mathcal{B}^{\perp} = \{w_1, ..., w_{n-p}\}$ $\mathcal{B}$-dual tabanının bulunması,

4. (Sonuç 3.3.3 kullanılarak) $\mathcal{I}^{\perp}$ için $ad(X)(\mathcal{B}^{\perp})$-birleşmiş (-associated) taban, yani

$$ad(X)(\mathcal{B}^{\perp}) = \{ad^i(X)(w_j) \mid 0 \leq i \leq k^*, 1 \leq j \leq n-p\} \tag{3.107}$$

bulunması, burada

$$ad^0(X) = Id \tag{3.108}$$

$$ad(X)(w) = L_X(w) \tag{3.109}$$

$$ad^i(X)(w) = ad(ad^{i-1}(X)(w)), \quad i \geq 1 \tag{3.110}$$

dir. Buna göre, aşağıdaki önermeyi elde ederiz :

3.3.4 Önerme :

a) $\mathcal{I} = geren(ad(X)(\mathcal{B}^{\perp}))^{\perp}$ dir.

b) I, $\mathcal{I}$ Lie cebirli Lie grubudur. ◇

3.4 Örnekler

3.4.1) G, 3-boyutlu Heisenberg grubu, yani

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \tag{3.111}$$

olsun. G nin Lie cebiri

$$L(G) = geren_{\mathcal{L.A.}} \left\{ Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{3.112}$$

ile veriliyor. Bu durumda,

$$[Y_1, Y_2] = Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.113}$$

dir.

$$X \left[\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = bY_3 \tag{3.114}$$

ile G üzerinde tanımlı sonsuzküçük (infinitesimal) X otomorfizmini ve aşağıdaki lineer kontrol sistemlerini gözönüne alalım :

a) $\Sigma = (G, X, \pi_2, \mathbb{R})$, burada

$$\pi_2 \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = b \tag{3.115}$$

dir.

$$Ker(h) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t & s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| t, s \in \mathbb{R} \right\} \tag{3.116}$$

$$\mathcal{B} = \{Y_1, Y_3\} \tag{3.117}$$

$$\mathcal{B}^{\perp} = \{w = Y_2^*\} \tag{3.118}$$

elde edilir. Basit bir hesaplama

$$[X, Y_1] = 0, \quad [X, Y_2] = Y_3, \quad [X, Y_3] = 0 \tag{3.119}$$

olduğunu gösterir.

$$L_X(w)(\cdot) = < w, [X, \cdot] > \tag{3.120}$$

olduğundan

$$L_X(w) = 0 \tag{3.121}$$

sonucu çıkar. O zaman, her $i = 0, 1, ...$ için

$$ad^i(X)(\mathcal{B}^\perp) \subset \mathcal{K}^\perp \tag{3.122}$$

dir. Sonuç olarak,

$$\mathcal{I} = \mathcal{K} \tag{3.123}$$

dır. Böylece, Σ yerel gözlenemezdir.

b) $\Sigma = (G, X, \pi, G/exp(\mathbb{R}Y_1))$, burada

$$\pi : G \to G/exp(\mathbb{R}Y_1) \tag{3.124}$$

kanonik izdüşümdür.

$$Ker(h) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \tag{3.125}$$

$$\mathcal{B} = \{Y_2\} \tag{126}$$

$$\mathcal{B}^\perp = \{w_1 = Y_1^*, w_2 = Y_3^*\} \tag{3.127}$$

elde edilir. Ancak,

$$L_X(w_2) = Y_2^* \tag{3.128}$$

dır. O taktirde,

$$ad(X)(\mathcal{B}^\perp) = L(G)^* = \mathcal{I}^\perp \tag{3.129}$$

olup, böylece

$$\mathcal{I} = 0 \tag{3.130}$$

elde edilir. Sonuç olarak, Σ yerel gözlenebilirdir. Diğer taraftan, eğer

$$g = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \tag{3.131}$$

ise,

$$exp(tX) \cdot g = g \cdot exp(tX) \Leftrightarrow b = 0 \qquad (3.132)$$

dolayısıyla

$$Fix(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, c \in \mathbb{R} \right\} \qquad (3.133)$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$Fix(T) \cap Ker(h) = \{e\} \qquad (3.134)$$

olup ve Σ global gözlenebilirdir.

3.4.2) Her bir $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\Sigma_n = (S^1, X, h, S^1) \qquad (3.135)$$

sistemini gözönüne alalım. Burada, $X = 0$ ve

$$h : S^1 \to S^1 \qquad (3.136)$$

çıkış tasviri,

$$h(Z) = nZ \qquad (3.137)$$

şeklinde tanımlıdır. Bu durumda,

$$I_n = \{Z \mid Z = \sqrt[n]{1}\} \qquad (3.138)$$

nin S^1 in bir ayırtık (discrete) altgrubu olduğu bulunur. I_n in Lie cebiri $\mathcal{I}_n$ apaçık (trivial) olduğundan, Teorem 3.2.5 den dolayı, $\forall n \in \mathbb{N}$ için Σ_n nin yerel gözlenebilir olduğu sonucu çıkarılabilir.

Diğer taraftan, $X_t = Id$, $\forall t \in \mathbb{R}$ olduğundan,

$$Fix(T) = S^1 \qquad (3.139)$$

olduğu sonucu çıkar, böylece her bir $n > 1$ için

$$\{e\} \underset{\neq}{\subset} Fix(T) \cap Ker(h) = Ker(h) \qquad (3.140)$$

dir. Sonuç olarak, eğer $n > 1$ ise, Σ_n gözlenemez.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Matematiksel bakış açısından kontrol sistemlerin yeni bir sınıfı olan Lie grupları üzerinde Σ lineer kontrol sistemlerini inceledik. Σ, sistemlerin en önemli ve iyi bilinen sınıfı olan $\mathbb{R}^n$ üzerinde L lineer kontrol sistemlerini genelleştirir. Esas olarak, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki L nin kontrol edilebilirliği ve gözlenebilirliği hakkındaki temel sonuçları keyfi bir G Lie grubu üzerindeki Σ ya genişletmek için topoloji, diferansiyel geometri, Lie grupları ve Lie cebirlerini kullandık. I. Bölümde, teori hakkındaki genel durumları gözden geçirdik. Bölüm II, Σ nın kontrol edilebilirliği hakkındaki yeni sonuçları içermektedir. III. Bölümdeki tüm sonuçlar orijinal olup, bu tezin kontrol sistem teoriye yaptığı katkıyı oluşturmaktadır.

Σ nın yerel ve global gözlenebilirliğini karakterize ettik ve aynı zamanda G nin etkisiz elemanının denklik sınıfının Lie cebirini hesaplamak için G nin eş-teğet demeti üzerinde bir algoritma verdik.

Bu tez, Kontrol Sistem Teoride yeni problemlerin ortaya çıkmasına neden olmaktadır. Özellikle, Lie grupların farklı sınıfları için Σ nın kontrol edilebilirliğinin incelenmesi, Σ için gözleyici oluşturulması problemi, ayrışım (decomposition) problemi vb. problemler, kontrol sistemlerinin bu yeni sınıfı için çok ilginç açık problemlerdir.

KAYNAKLAR

[1] **A.A. Agrachev, R.V. Gamkrelizde and A.V. Sarychev**, "*Local Invariant of Smooth Control Systems*", Acta Applicandae Mathematieac 14 (1989), 191-237.

[2] **V. Ayala**, "*Controllability of Nilpotent Systems*". Series Banach Publication, vol. 32, pp. 1-12, 1995, Institute of Mathematics, Polish Academy of Science.

[3] **V. Ayala and A.K. Hacıbekiroğlu**, "*Observability of Linear Control Systems on Lie Groups*". Pre-print No IC/95/2, International Centre for Theoretical Physics.

[4] **V. Ayala and J. Tirao**, "*Controllability of Linear Vector Fields on Lie Groups*". Pre-print No IC/94/310, International Centre for Theoretical Physics.

[5] **C. Chevalley**, "*Theorie des groupes de Lie*". Paris Hermann, 1951-55.

[6] **A. Isidori**, "*Nonlinear Control Systems : an introduction*". Springer Verlag, 1989.

[7] **R. Kalman, Y. Ho and K. Narendra**, "*Controllability of Linear Dynamical Systems*", Contrib. to Diff. Equations 1 (2), 1962, pp. 189-213.

[8] **Molher**, "*Bilinear Control Processes*", Mathematics in Science and Engineering, Vol. 106, Ac. Press New York and London, 1973.

[9] **L. Markus**, "*Controllability of Multi-Trajectories on Lie Groups*". Lecture Notes in Mathematics, 898.

[10] **H. Sussmann**, "*Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*". Trans. American Math. Soc., 180 (1973).

[11] **H. Sussmann**, "*Existence and Uniqueness of Minimal Realization of Nonlinear Systems*", Mathematical System Theory 10, pp.263-284 (1977).

[12] **H. Sussmann and V. Jurdevic**, "*Control Systems on Lie Groups*", Journal of Differential Equations 12, pp. 313-329 (1972).

[13] **V. Varadarajan**, "*Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations*", Prentice-Hall Inc. 1974.

[14] **F. Warner**, "*Foundations of differentiable Manifolds on Lie groups*", Scott Foreman and Company, Glenview Illinois, 1971.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Ayşe (Kara) Hacıbekiroğlu
Doğum Tarihi	: 06.05.1966
Doğum Yeri	: İstanbul
İlk Öğretim	: 1972-1977 Kültür Koleji
Orta Öğretim	: 1977-1980 Özel Çavuşoğlu Lisesi
Lise Öğretimi	: 1980-1983 Özel Çavuşoğlu Lisesi
Lisans Öğretimi	: 1983-1988 (Şubat) Marmara Üniversitesi, Fen-Ed. Fakültesi, Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Öğretimi	: 1988-1990 Y.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü
Göreve Başlama	: 1989 Y.T.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Topoloji Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi
Doktora Öğretimi	: 1991 Y.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü

Katıldığı Bilimsel Aktiviteler :

1. III. Diferansiyel Denklemler Sempozyumu, 26-28.Ekim.1989
Trakya Üniversitesi, Edirne-Türkiye

2. Advanced Workshop on Arithmetic Algebraic Geometry,
31.Ağustos-11.Eylül.1992, ICTP, Trieste-İtalya

3. Workshop on Representation Theory of Lie Groups,
15.Mart-2.Nisan.1993, ICTP, Trieste-İtalya

4. ICTP Mathematics Diploma Course Programme,
1993-1994, Trieste-İtalya

5. Araştırma Çalışması, 3.Kasım.1994-2.Şubat.1995, ICTP, Trieste-İtalya