

67715

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**YARI EKSENDE VERİLMİŞ OPERATÖR
KATSAYILI DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN
DİFERANSİYEL DENKLEMİN GREEN
FONKSİYONUNUN İNCELENMESİ**

Prof. Dr. Metin ARIK

Met. Arik

Prof. Dr. Yusuf AVCI

Prof. Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU

Yusuf Avcı Mehmet Bayramoğlu

Mat. Yük. Müh. FATMA İNCİ ALBAYRAK

F.B.E. Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında
Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

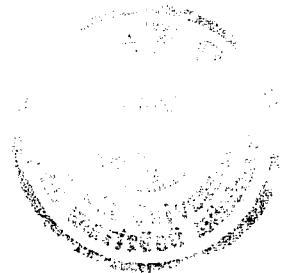
Tez Savunma Tarihi	: 8 Eylül 1997
Tez danışmanı	: Prof. Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU (Y.T.Ü.)
Jüri Üyeleri	: Prof. Dr. Metin ARIK (B.Ü.) Prof. Dr. Yusuf AVCI (İ.Ü.)

İSTANBUL, EYLÜL 1997

TEŞEKKÜR

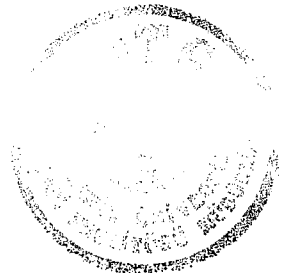
Çalışmalarım sırasında hiçbir zaman yardım ve desteğini esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca ilgisinden dolayı Sayın Prof. Tahir ŞİŞMAN'a ve manevi desteğinden dolayı tüm aile üyelerime ve Araştırma görevlisi arkadaşlarım Reşat KÖŞKER, Nilgün GÜLER, Kevser ÖZDEN, ve Öğr. Gör. Dr. Coşkun GÜLER'e teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	II
SUMMARY	III
1.0 GİRİŞ	
2.0 YARI EKSENDE Y^{IV} İFADESİNİN GREEN FONKSİYONU	
2.1 Ön Bilgiler	3
2.2 Kompakt Operatörlerin Bazı Sınıfları	5
3.0 YARI EKSENDE VERİLMİŞ DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN OPERATÖR KATSAYILI DİFERANSİYEL İFADE İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN GREEN FONKSİYONUNUN İNCELENMESİ	
3.1 Problemin Ortaya Konulması	17
3.2 Green Fonksiyonunun Türevleri	42
3.3 Green Fonksiyonunun Dördüncü Türevi	62
3.4 Green Fonksiyonunun Diferansiyel Denklemi Sağlaması	69
3.5 Sınır Koşulunun Sağlanması	70
SONUÇ	
KAYNAKLAR	
ÖZGEÇMİŞ	



ÖZET

H ayrılabilir Hilbert uzayı olmak üzere $L_2(0, \infty; H)$ Hilbert uzayında

$$y^{IV} + Q(x)y, \quad 0 < x < \infty$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0$$

$$y'''(0) - h_1 y''(0) = 0$$

sınır koşulları ile tanımlanan sınır değer probleminin Green fonksiyonu incelenmiştir. Burada $Q(x)$, $[0, \infty)$ 'dan alınmış her bir x değerinde H da kendine eş alttan sınırlı ve tersi kompakt olan operatör, h_1 ise keyfi kompleks sayıdır.



SUMMARY

Let H be separable Hilbert space. In $L_2(0, \infty, H)$ Hilbert space, Green function of boundary value problem defined by

$$y^{IV} + Q(x)y, \quad 0 < x < \infty$$

and

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0$$

$$y'''(0) - h_1 y''(0) = 0$$

is studied, where $Q(x)$ is an operator that is self adjoint and bounded below (for every x in $[0, \infty)$) and its invers is compact in H , h_1 is an arbitrary complex number.



1.0 GİRİŞ

Kendine eş adi diferansiyel operatörlerin spektral analizi, yani spektrumunun incelenmesi, öz fonksiyonlara göre açılım, ayrık spektrumun asimtotik davranışı v.s.'e ait problemlerin çözümü bitmiş sayılabilir. Operatör katsayılı diferansiyel ifadelerin spektral analizine ait çok sayıda çalışmalar yapılmasına rağmen bu tür operatörler için spektral analizi yapılması gereken çok sayıda problem vardır.

Bu tez çalışmasında yarı eksende verilmiş operatör katsayılı dördüncü mertebeden diferansiyel ifadenin Green fonksiyonu incelenmiştir. Diferansiyel denklemlerin Green fonksiyonlarının bulunması büyük öneme sahiptir. Bundan dolayı Green fonksiyonunun bulunmasına ait çok sayıda makale ve kitap vardır (Roach,1982), (Friedman,1956), (Levitan et. al. 1991), (Otelbayev,1990), (Coddington et. al,1955). Not edelim ki, M. Otelbayev (Otelbayev,1990)'in kitabında 1990 yılına kadar olan çalışmaların referansı verilmiştir. Adi diferansiyel denklemlerin spektral analizine ait son çalışmalardan T.C. Fulton ve S.A. Pruess (Fulton et.al, 1994)'in çalışmasını ve orada verilmiş referansları gösterelim.

H ayrılabilir Hilbert uzayı olsun; $H_1 = L_2(a,b,H)$ ($-\infty \leq a < b \leq \infty$) ile değerleri H 'ya ait kuvvetli ölçülebilir (Yosida,1980) ve

$$\int_a^b \|f(x)\|^2 dx < \infty$$

koşulunu sağlayan $f(x)$ fonksiyonlar kümesini gösterelim. H_1 'e ait $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonunun iç çarpımını

$$(f, g)_1 = \int_a^b (f(x), g(x)) dx$$

formülü ile tanımlarsak H_1 ayrılabilir Hilbert uzayı olur. Burada ve daha sonra $\|\cdot\|$ ve $(\cdot, \cdot)$ ile H da sırasıyla norm ve iç çarpım gösterilmiştir.

Yukarıda söz ettiğimiz gibi bu çalışmada biz $L_2(0,\infty;H)$ uzayında

$$y^{IV} + Q(x)y, \quad 0 < x < \infty \quad (1.1)$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0 \quad (1.2)$$

$$y'''(0) - h_1 y''(0) = 0 \quad (1.3)$$

sınır koşulları ile tanımlanan operatörün Green fonksiyonu incelenmiştir. Burada $Q(x)$, x 'in $[0, \infty)$ dan alınmış her bir değerinde H' 'da dönüşüm yapan kendine eş, alttan sınırlı ve tersi kompakt olan operatör, h_1 ise kompleks sayıdır.

Sınırsız operatör katsayılı kendine eş

$$-y'' + Q(x)y, \quad -\infty < x < \infty$$

Strum-Liouville diferansiyel ifadesi ile oluşturulan operatörün Green fonksiyonu ilk olarak B.M. Levitan (Levitan, 1968) tarafından incelenmiştir. Daha sonra 1969 yılında $L_2(-\infty, \infty; H)$ uzayında

$$(-1)^n y^{(2n)} + \sum_{j=2}^{2n} Q_j(x) y^{(2n-j)} \quad -\infty < x < \infty \quad (1.4)$$

ifadesi ile oluşturulan kendine eş operatörün Green fonksiyonunu ve spektrumunun asimtotik davranışını M.Bayramoğlu incelemiştir (Bayramoğlu, 1969). Burada $Q_j(x)$ $j=2, \dots, 2n$ H' 'da dönüşüm yapan kendine eş operatörlerdir.

1975 yılında $[0, \infty)$ yarı ekseninde verilmiş (1.4) ifadesi ve

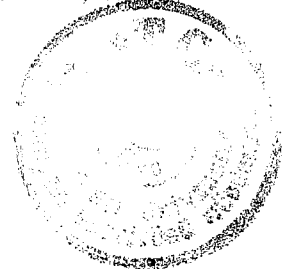
$$y^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, 2n \quad (1.5)$$

sınır koşulları ile oluşturulan operatörün Green fonksiyonu ve spektrumunun asimtotik davranışı G.I. Aslanov (Aslanov, 1975) tarafından incelenmiştir. Daha sonra B.I. Aliev ve M. Bayramoğlu'nun çalışmasında (Aliev et. al, 1981) (1.5) koşulları kendine eş

$$\sum_{i=0}^{2n-1} \alpha_{ji} y^{(i)}(0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1.6)$$

koşulları ile değiştirilerek karşılık gelen kendine eş operatörün Green fonksiyonu ve spektrumu incelenmiştir.

Bizim çalışmamızda (1.2), (1.3) sınır koşullarında h_1 kompleks sayı olduğundan dolayı ele aldığımız problem genelde kendine eş değildir. Operatör katsayılı diferansiyel denklemlerin incelenmesine ait G.A. Mişnayeovski (Mişnayeovski, 1976), K.CH. Boymatov (Boymatov, 1978), V.I. Gorbaçuk ve M.L. Gorbaçuk (Gorboçuk et. al, 1991), J. Saito (Saito, 1975), (Saito, 1975)'nin çalışmalarını gösterebiliriz.



2.0 YARI EKSENDE y^{IV} İFADESİNİN GREEN FONKSİYONUNUN İNCELENMESİ

2.1 ÖNBİLGİLER

H , Hilbert uzayı olsun. (a,b) aralığından alınmış her bir x sayısına $A(x)$ operatörü ($f(x) \in H$ vektörü) karşılık geliyorsa o zaman (a,b) aralığında operatör fonksiyon (vektör fonksiyon) veya operatör (vektör) değerli fonksiyon tanımlanmıştır denir. $A(x)$ x 'in her bir değerinde $(a < x < b)$ H 'da dönüşüm yapan lineer sınırlı operatör olsun.

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \|A(x + \Delta x) - A(x)\| = 0$ ise o zaman $A(x)$ operatör fonksiyonu (operatör değerli fonksiyon) x_0 noktasında süreklidır denir. Eğer $\forall u \in H$ için

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \|A(x_0 + \Delta x)u - A(x_0)u\| = 0$ ise o zaman $A(x)$ operatör fonksiyonu x_0 noktasında kuvvetli süreklidır denir. (a,b) aralığının her bir noktasında sürekli (kuvvetli sürekli) operatör fonksiyona (a,b) aralığında sürekli (kuvvetli sürekli) operatör fonksiyon denir. Benzer şekilde operatör fonksiyonun türevi (kuvvetli türevi) kavramları da verilir. Aynı şekilde vektör fonksiyonun (vektör değerli fonksiyonun) sürekliliği türetilirliği de tanımlanır. Matematik analizde olduğu gibi burada da operatör (vektör) fonksiyonun integrali kavramları da verilir.

H 'da tanımlanmış lineer A operatörünün tanım kümesini $D(A)$ ile gösterelim. A kendine eş operatör olsun.

Eğer $(Af, f) \geq \gamma(f, f)$, $((Af, f) \leq \nu(f, f))$, $f \in D(A)$ eşitsizliğini sağlayan $\gamma(\nu)$ sayısı varsa A γ ile (ν ile) alttan (üstten) sınırlıdır denir. Bu eşitsizlikler sembolik olarak $A \geq \gamma I$ ($A \leq \nu I$) şeklinde yazılır.

Burada I , H uzayında birim operatördür. Eğer $\gamma > 0$ ise o zaman A operatörüne pozitif tanımlı, $\gamma = 0$ ise pozitif operatör denir. A pozitif tanımlı operatör olsun. A^{-1} operatörü (A 'nın tersi) kompakt (tam sürekli) ise o zaman A 'nın spektrumu sadece

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty \quad (2.1)$$

özdeğerlerinden ibarettir. (Mikusinski et.al, 1990) Bu halde A^{-1} spektrumu

$$\frac{1}{\lambda_1} \geq \frac{1}{\lambda_2} \geq \dots \geq \frac{1}{\lambda_n} \geq \dots$$

sayılarından oluşur.

A tam ayrık spektruma sahip kendine eş operatör ve bunun

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$$

özdeğerlerine karşılık gelen tam ortonormal özvektörler sistemi $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ olsun.

((e_i, e_j)= δ_{ij}) Bu taktirde keyfi $f \in H$ elemanı

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k \quad (2.2)$$

şeklinde, $f \in D(A)$ ise

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} (Af, e_k) e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (f, e_k) e_k \quad (2.3)$$

şeklinde gösterilir.

(2.2) ve (2.3) eşitlikleri sırasıyla sembolik olarak

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} (., e_k) e_k \quad (2.4)$$

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (., e_k) e_k \quad (2.5)$$

şeklinde yazılır. (2.4) formülüne birimin, (2.5)'e ise A operatörünün spektral açılımı denir. (2.4) ve (2.5) formülleri yardımı ile $\varphi(\lambda)$ $[\gamma, \infty)$ da tanımlanmış keyfi sürekli fonksiyon olduğunda

$$\varphi(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\lambda_k) (., e_k) e_k$$

formülü ile A'nın fonksiyonu olarak isimlendirilen $\varphi(A)$ operatörü tanımlanır. $\varphi(A)$ operatörünün tanım kümesi

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(\lambda_k)|^2 |(f, e_k)|^2 < \infty$$

koşulunu sağlayan $f \in H$ elemanlarından oluşur. Bu taktirde $\varphi(A)f$ elemanı

$$\varphi(A)f = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\lambda_k) (f, e_k) e_k$$

ile tanımlanır. $\varphi(\lambda)$ reel değerli fonksiyon olduğunda $\varphi(A)$ kendine eş operatör, $\varphi(\lambda)$ kompleks değerli ise $\varphi(A)$ normal operatör olur. $\varphi(\lambda)$ sınırlı fonksiyon ise $\varphi(A)$ H 'da sınırlı operatör oluşturur. Ve bu halde

$$\|\varphi(A)\| = \sup_{\lambda \in S} |\varphi(\lambda)|$$

ile tanımlanır. Burada S , A operatörünün spektrumudur: $S = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots\}$

Örneğin bizim sık sık kullanacağımız e^{-A} ve $(A + \mu I)^{1/4}$ ($\mu > 0$ sayıdır) operatörleri

$$e^{-A} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k} (., e_k) e_k$$

$$(A + \mu I)^{1/4} = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + \mu)^{1/4} (., e_k) e_k$$

şeklindedir.

$$\|e^{-A}\| = \sup_{\lambda \in S} |e^{-\lambda}| = e^{-\lambda_1}$$

dır, burada λ_1 , A 'nın en küçük (ilk) özdeğeridir.

2.2 KOMPAKT OPERATÖRLERİN BAZI SINIFLARI

A , H uzayında tanımlanmış kompakt operatör olsun. AA^* operatörü H uzayında kendine eş pozitif operatördür. Bundan dolayı AA^* operatörünün spektrumu negatif olmayan özdeğerlerden ibarettir. AA^* ın pozitif özdeğerlerini $s_1^2 \geq s_2^2 \geq \dots \geq s_n^2 \geq \dots$ ile gösterelim. $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ sayılarına A operatörünün s -sayıları denir.

Eğer $\sum_{i=1}^{\infty} s_i$ serisi yakınsak ise A operatörüne çekirdek, $\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2$ serisi yakınsak ise A operatörüne Hilbert-Schmidt (kısa olarak, H-S) H-S tipli operatör denir. Eğer A pozitif operatör ise o zaman A 'nın s sayıları A 'nın özdeğerleri olur.

Çekirdek operatörler kümesi σ_1 ile H-S operatörler kümesi ise σ_2 ile gösterilir. σ_1 ve σ_2 kümeleri operatörlerin toplamı ve operatörün sayı ile çarpımı işlemine göre lineer uzay oluşturur. Eğer bu uzaylarda sırasıyla normu

$$A \in \sigma_1 \quad \text{iken} \quad \|A\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} s_i$$

$$A \in \sigma_2 \quad \text{iken} \quad \|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2 \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlarsak σ_1 ve σ_2 Banach uzayı oluştururlar(Kato,1980). H da tam sürekli operatörler kümesini σ_{∞} ile gösterelim. σ_{∞} un kendisi operatörün normuna göre, yani $A \in \sigma_{\infty}$ iken ,

$$\|A\| = \sup_{x \in H} \|Ax\|$$

şeklinde tanımlanırsa Banach uzayı oluşturur . Tanımlardan görüldüğü gibi $\sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \sigma_{\infty}$ dur.Sık sık kullanacağımız aşağıdaki bilinen eşitsizlikleri verelim (Kato, 1980).

A, H uzayında herhangi sınırlı lineer operatör olsun. $B \in \sigma_1$ olduğunda AB ve BA operatörleri de σ_1 'e ait olur ve

$$\|AB\|_1 \leq \|A\| \cdot \|B\|_1 \quad \|BA\|_1 \leq \|A\| \cdot \|B\|_1$$

dır. Eğer $B \in \sigma_2$ ise $AB \in \sigma_2$, $BA \in \sigma_2$ ve

$$\|AB\|_2 \leq \|A\| \cdot \|B\|_2 \quad \|BA\|_2 \leq \|A\| \cdot \|B\|_2$$

eşitsizlikleri sağlanır.

3.0 bölümünde yararlanacağımız

$$y^{IV} + \alpha^4 y \quad , \quad 0 \leq x < \infty \quad (2.6)$$

ifadesi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0 \quad (2.7)$$

$$y'''(0) - hy''(0) = 0 \quad (2.8)$$

sınır koşulları ile $L_2(0, \infty)$ Hilbert uzayında oluşturulan L_0 operatörünün Green fonksiyonu incelenmiştir.

Burada. $\alpha > 0$. h-reel sayıdır. Sözü edilen L_0 operatörünün tanım kümesi $D(L_0)$

$D(L_0) = \{y(x): y, y', y'', y''' \text{ } [0, \infty) \text{ aralığının her bir sonlu aralığında mutlak sürekli, } y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'''(0) - hy''(0) = 0, \quad y, y^{IV} \in L_2(0, \infty)\}$

şeklindedir. $y \in D(L_0)$ olduğunda L_0 'ın $y(x)$ 'e etkisi $L_0 y = y^{IV}$ ile tanımlanır. Böyle tanımlanmış L_0 operatörü $L_2(0, \infty)$ uzayında kendine eş pozitif operatördür. Bundan dolayı $\alpha > 0$ olduğunda $(L_0 + \alpha^4)^{-1}$ bütün $L_2(0, \infty)$ da tanımlanmış sınırlı operatördür. Diferansiyel operatörlerin spektral teorisinden (Naymark, 1969) $(L_0 + \alpha^4)^{-1}$ operatörünün integral operatör olduğu bellidir. Yani $f(x) \in L_2(0, \infty)$ keyfi eleman olduğunda

$$(L_0 + \alpha^4)^{-1} f = \int_0^{\infty} G(x, \xi, \alpha) f(\xi) d\xi$$

olur. $G(x, \xi, \alpha)$ çekirdeğine L_0 operatörünün Green fonksiyonu denir. Daha sonra (Bölüm 3.0) gerektiğinden dolayı $G(x, \xi, \alpha)$ nın açık ifadesini yani $(L_0 + \alpha^4)^{-1}$ operatörünün çekirdeğini bulalım. Bilindiği gibi $(L_0 + \alpha^4)^{-1}$ operatörünün bulunması f fonksiyonu $L_2(0, \infty)$ 'un keyfi elemanı olduğunda $(L_0 + \alpha^4)u = f$ denkleminin çözümüne dolayısıyla

$$y^{IV} + \alpha^4 y = f(x) \quad (2.9)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0 \quad (2.10)$$

$$y'''(0) - hy''(0) = 0 \quad (2.11)$$

sınır değer probleminin çözümüne indirgenir. Bu nedenle biz L_0 operatörünün Green fonksiyonunu bulmak için (2.9), (2.10) ve (2.11) probleminin çözümü ile uğraşacağız.

$f(x)$ $[0, \infty)$ aralığında tanımlanmış kompakt desteğe sahip, yani x 'in büyük değerlerinde $f(x) = 0$ olan herhangi fonksiyon olsun. $f(x)$ 'i bu şekilde seçerek; (2.9), (2.10), (2.11) problemini sabitin değişimi yöntemiyle çözelim. c_1, c_2, c_3, c_4 keyfi sabitler olmak üzere ;

$$y = c_1 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)x} + c_2 e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)x} + c_3 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)x} + c_4 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)x} \quad (2.12)$$

fonksiyonunun $y^{IV} + \alpha^4 y = 0$ denkleminin genel çözümü olduğu açıktır. c_1, c_2, c_3, c_4 x 'in fonksiyonu olsunlar (sabitin değişimi yöntemine göre), y 'nin ifadesinden

$$\begin{aligned}
y' = & c_1 \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} - c_2 \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} \\
& + c_3 \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)x} + c_4 \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)x} \\
& + c_1' e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} + c_2' e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} + c_3' e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)x} + c_4' e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)x}
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}
y'' = & c_1 \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \right]^2 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} + c_2 \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \right]^2 e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} \\
& + c_3 \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i) \right]^2 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)x} + c_4 \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i) \right]^2 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)x} \\
& + c_1' \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} - c_2' \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} \\
& + c_3' \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)x} + c_4' \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y''' = & c_1 \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \right]^3 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} - c_2 \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \right]^3 e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} \\
& + c_3 \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i) \right]^3 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)x} + c_4 \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i) \right]^3 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)x} \\
& + c_1' \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \right]^2 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} + c_2' \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \right]^2 e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} \\
& + c_3' \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i) \right]^2 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)x} + c_4' \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i) \right]^2 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)x}
\end{aligned}$$

$$y^{IV} = c_1 \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \right]^4 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} + c_2 \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \right]^4 e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x}$$



$$\begin{aligned}
& + c_3 \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i) \right]^4 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)x} + c_4 \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i) \right]^4 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)x} \\
& + c_1' \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \right]^3 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} - c_2' \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \right]^3 e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} \\
& + c_3' \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i) \right]^3 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)x} + c_4' \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i) \right]^3 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)x}
\end{aligned}$$

veya

$$c_1' e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} + c_2' e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} + c_3' e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)x} + c_4' e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)x} = 0$$

$$c_1' \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} - c_2' \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x}$$

$$+ c_3' \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)x} + c_4' \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)x} = 0$$

$$c_1' \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \right]^2 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} + c_2' \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \right]^2 e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x}$$

$$+ c_3' \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i) \right]^2 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)x} + c_4' \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i) \right]^2 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)x} = 0$$

$$c_1' \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \right]^3 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} - c_2' \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \right]^3 e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x}$$

$$+ c_3' \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i) \right]^3 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)x} + c_4' \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i) \right]^3 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)x} = f(x)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) & -\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) & \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i) & \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i) \\ \alpha^2 i & \alpha^2 i & -\alpha^2 i & -\alpha^2 i \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha^3 (-1+i) & -\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha^3 (-1+i) & -\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha^3 (1+i) & \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha^3 (1+i) \end{vmatrix} = -16\alpha^6$$

elde edilir.

$$c'_1 = e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)x} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) & \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \\ 0 & -\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) & \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) & \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \\ 0 & \alpha^2 i & -\alpha^2 i & -\alpha^2 i \\ f(x) & -\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha^3(-1+i) & -\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha^3(1+i) & \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha^3(1+i) \end{vmatrix}$$

$$c'_1 = 2\sqrt{2}\alpha^3(i+1)f(x)e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)x}$$

$$c_1 = -\frac{\sqrt{2}}{8}\alpha^{-3}(1+i) \int_0^x f(x)e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)x} dx + K_1$$

$$c'_2 = e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)x} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) & 0 & \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) & \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \\ \alpha^2 i & 0 & -\alpha^2 i & -\alpha^2 i \\ \alpha^3 \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1) & f(x) & -\alpha^3 \frac{\sqrt{2}}{2}(i+1) & \alpha^3 \frac{\sqrt{2}}{2}(i+1) \end{vmatrix}$$

$$c'_2 = -2\sqrt{2}\alpha^3(i+1)f(x)e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)x}$$

$$c_2 = -\frac{\sqrt{2}}{8}\alpha^{-3}(1+i) \int_0^x f(x)e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)x} dx + K_2$$

$$c'_3 = e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) & -\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) & 0 & \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \\ \alpha^2 i & \alpha^2 i & 0 & -\alpha^2 i \\ \alpha^3 \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1) & -\alpha^3 \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1) & f(x) & \alpha^3 \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \end{vmatrix}$$

$$c'_3 = -2\sqrt{2}\alpha^3(i-1)f(x)e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)x}$$

$$c_3 = \frac{\sqrt{2}}{8}\alpha^{-3}(i-1) \int_0^x f(x)e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)x} dx + K_3$$

$$c'_4 = e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)x} \begin{vmatrix} \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) & -\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) & \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) & 0 \\ \alpha^2 i & \alpha^2 i & -\alpha^2 i & 0 \\ \alpha^3 \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1) & -\alpha^3 \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1) & -\alpha^3 \frac{\sqrt{2}}{2}(i+1) & f(x) \end{vmatrix}$$

$$c'_4 = 2\sqrt{2}\alpha^3(i-1)f(x)e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)x}$$

$$c_4 = -\frac{\sqrt{2}}{8}\alpha^{-3}(i-1)\int_0^x f(x)e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)x} dx + K_4$$

Böylece c_1, c_2, c_3, c_4 katsayıları bulunmuş olur. $b>0$ herhangi sabit sayı olmak üzere $x>b$ iken $f(x)=0$ olduğunu varsayalım. Bu taktirde (2.12) denkleminin genel çözümü

$$\begin{aligned} y(x) = & \left[K_1 - \frac{\sqrt{2}}{8}\alpha^{-3}(i+1)\int_0^b f(s)e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)s} ds \right] e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)x} \\ & + \left[K_2 + \frac{\sqrt{2}}{8}\alpha^{-3}(i+1)\int_0^b f(s)e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)s} ds \right] e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)x} \\ & + \left[K_3 + \frac{\sqrt{2}}{8}\alpha^{-3}(i-1)\int_0^b f(s)e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)s} ds \right] e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)x} \\ & + \left[K_4 - \frac{\sqrt{2}}{8}\alpha^{-3}(i-1)\int_0^b f(s)e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)s} ds \right] e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)x} \end{aligned} \quad (2.13)$$

dir. Burada K_1, K_2, K_3, K_4 keyfî sabitlerdir.

$$\left| e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)x} \right| = e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty, \quad \left| e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)x} \right| = e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

olduğundan $y(x) \in L_2(0, \infty)$ olması için

$$K_1 = \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} (i+1) \int_0^b f(s) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)s} ds$$

$$K_3 = -\frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} (i-1) \int_0^b f(s) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)s} ds$$

olmalıdır. Böylece

$$\begin{aligned} y(x) = & \left[\frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} (i+1) \int_x^b f(s) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)s} ds \right] e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} \\ & + \left[K_2 + \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} (i+1) \int_0^x f(s) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)s} ds \right] e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} \\ & + \left[\frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} (i-1) \int_b^x f(s) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)s} ds \right] e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)x} \\ & + \left[K_4 - \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} (i-1) \int_0^x f(s) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)s} ds \right] e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)x} \end{aligned} \quad (2.14)$$

dir.

$$\begin{aligned} y'(x) = & \frac{1}{4} \alpha^{-2} i \int_x^b f(s) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)s} ds - K_2 \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} - \frac{1}{4} \alpha^{-2} i \int_0^x f(s) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)s} ds \\ & + \frac{1}{4} \alpha^{-2} i \int_b^x f(s) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)s} ds + K_4 \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)x} + \frac{1}{4} \alpha^{-2} i \int_0^x f(s) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)s} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(x) = & \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-1} (i-1) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} \int_x^b f(s) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)s} ds + K_2 \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \right]^2 e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} \\ & + \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-1} (i-1) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} \int_0^x f(s) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)s} ds + \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-1} (1+i) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)x} \int_b^x f(s) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)s} ds \\ & + K_4 \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i) \right]^2 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)x} - \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-1} (1+i) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)x} \int_0^x f(s) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)s} ds \end{aligned}$$

$$y'''(x) = -\frac{1}{4} e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x} \int_x^b f(s) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)s} ds - K_2 \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \right]^3 e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)x}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)x} \int_0^x f(s) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)s} ds + \frac{1}{4} e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)x} \int_b^x f(s) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)s} ds \\
& + K_4 \left[\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \right]^3 e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)x} + \frac{1}{4} e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)x} \int_0^x f(s) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)s} ds
\end{aligned}$$

$y'(0)=hy(0)$ olması için

$$\begin{aligned}
& \int_0^b \left[\left(\alpha^{-2} \frac{i}{4} - h \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3}(i+1) \right) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)s} + \left(-\alpha^{-2} \frac{i}{4} + h \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3}(i-1) \right) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)s} \right] f(s) ds \\
& = K_2 \left[h + \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(1+i) \right] + K_4 \left[h - \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(-1+i) \right]
\end{aligned}$$

$y'''(0) = hy''(0)$ olması için

$$\begin{aligned}
& \int_0^b \left[\left(-\frac{1}{4} - \frac{h}{\alpha} \frac{\sqrt{2}}{8} (i-1) \right) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)s} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{h}{\alpha} \frac{\sqrt{2}}{8} (1+i) \right) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)s} \right] f(s) ds \\
& = K_2 \left[h\alpha^2 i + \alpha^3 \frac{\sqrt{2}}{2} (i-1) \right] + K_4 \left[-h\alpha^2 i - \alpha^3 \frac{\sqrt{2}}{2} (i+1) \right]
\end{aligned}$$

olmalıdır. Buradan

$$\Delta = \begin{vmatrix} h + \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(i+1) & h - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \\ h\alpha^2 i + \alpha^3 \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1) & -h\alpha^2 i - \alpha^3 \frac{\sqrt{2}}{2}(i+1) \end{vmatrix} = \alpha^3 i(-2h^2 - 2h\alpha\sqrt{2} - 2\alpha^2)$$

$$b = \int_0^b \left[\left(-\frac{1}{4} - \frac{h}{\alpha} \frac{\sqrt{2}}{8} (i-1) \right) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)s} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{h}{\alpha} \frac{\sqrt{2}}{8} (1+i) \right) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)s} \right] f(s) ds$$

$$a = \int_0^b \left[\left(\alpha^{-2} \frac{i}{4} - h \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3}(i+1) \right) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)s} + \left(-\alpha^{-2} \frac{i}{4} + h \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3}(i-1) \right) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)s} \right] f(s) ds$$

olmak üzere

$$K'_2 = \begin{vmatrix} a & h - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \\ b & -h\alpha^2 i - \alpha^3 \frac{\sqrt{2}}{2}(i+1) \end{vmatrix} = \left(\left(-h\alpha^2 i - \alpha^3 \frac{\sqrt{2}}{2}(i+1) \right) a - \left(h - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \right) b \right)$$

$$K_2 = \frac{K'_2}{\Delta} = \frac{\left(-h\alpha^2 i - \alpha^3 \frac{\sqrt{2}}{2}(i+1) \right) a - \left(h - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \right) b}{\alpha^2 i(-2h^2 - 2h\alpha\sqrt{2} - 2\alpha^2)}$$

$$K'_4 = \begin{vmatrix} h + \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) & a \\ h\alpha^2 i + \alpha^3 \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1) & b \end{vmatrix} = \left(h + \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \right) b - \left(h\alpha^2 i + \alpha^3 \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1) \right) a$$

$$K_4 = \frac{K'_4}{\Delta} = \frac{\left(h + \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \right) b - \left(h\alpha^2 i + \alpha^3 \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1) \right) a}{\alpha^2 i(-2h^2 - 2h\alpha\sqrt{2} - 2\alpha^2)}$$

elde edilir. K_2 ve K_4 sabitleride (2.14) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y(x) = & \left(\frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3}(i+1) \int_x^b f(s) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)s} ds \right) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)x} \\ & + \left(\frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3}(i-1) \int_b^x f(s) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)s} ds \right) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)x} \\ & + \left(\frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3}(i+1) \int_0^x f(s) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)s} ds \right) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)x} \\ & - \left(\frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3}(i-1) \int_0^x f(s) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)s} ds \right) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)x} \\ & + \frac{\left(-h + \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \right)}{-\left(2h^2 - 2h\alpha\sqrt{2} - 2\alpha^2 \right)} \int_0^b \left(\alpha^{-2} \frac{i}{4} - h \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3}(i+1) \right) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(s+x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\alpha^{-2} \frac{i}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8} h \alpha^{-3} (i-1) \right) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} ((s+x)-i(s-x))} \Big] f(s) ds \\
& + \frac{\left(h \alpha^{-2} i + \alpha^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} (i+1) \right)}{-(2h^2 - 2h\alpha\sqrt{2} - 2\alpha^2)} \int_0^b \left[\left(-\frac{1}{4} - h \alpha^{-1} \frac{\sqrt{2}}{8} (i-1) \right) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)(s+x)} \right. \\
& + \left. \left(-\frac{1}{4} + h \alpha^{-1} \frac{\sqrt{2}}{8} (1+i) \right) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} ((s+x)-i(s-x))} \right] f(s) ds \\
& + \frac{\left(h \alpha^{-2} i - \alpha^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} (i-1) \right)}{-(2h^2 - 2h\alpha\sqrt{2} - 2\alpha^2)} \int_0^b \left[\left(-\frac{1}{4} - h \alpha^{-1} \frac{\sqrt{2}}{8} (i-1) \right) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} ((s+x)-i(x-s))} \right. \\
& + \left. \left(-\frac{1}{4} + h \alpha^{-1} \frac{\sqrt{2}}{8} (1+i) \right) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (s+x)(-1+i)} \right] f(s) ds \\
& + \frac{\left(-h - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (i+1) \right)}{-(2h^2 - 2h\alpha\sqrt{2} - 2\alpha^2)} \int_0^b \left[\left(\alpha^{-2} \frac{i}{4} - h \frac{\sqrt{2}}{8} \alpha^{-3} (i+1) \right) e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} ((s+x)-i(x-s))} \right. \\
& + \left. \left(-\alpha^{-2} \frac{i}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8} h \alpha^{-3} (i-1) \right) e^{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (s+x)(-1+i)} \right] f(s) ds
\end{aligned}$$

şeklini alır. Eğer biz

$$G(x, s, \alpha) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (s+x)}}{\alpha^2 + h\alpha\sqrt{2} - h^2} \cdot \frac{1}{8\alpha} \left[(\sqrt{2}h^2\alpha^{-2} - \sqrt{2} + 2h\alpha^{-1}) \cos \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (s+x) - (2h\alpha^{-1} - \sqrt{2}\alpha^{-2}h^2 + \sqrt{2}) \cdot \right. \\ \left. \sin \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (s+x) \right] + \frac{e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (s-x)} \sqrt{2}}{4\alpha^3} \left[\cos \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (x-s) + \sin \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (s-x) \right], & x < s \\ \frac{2e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (s+x)}}{\alpha^2 + h\alpha\sqrt{2} - h^2} \cdot \frac{1}{4\alpha} \left[(\sqrt{2}h^2\alpha^{-2} - \sqrt{2} + 2h\alpha^{-1}) \cos \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (s+x) - (2h\alpha^{-1} - \sqrt{2}\alpha^{-2}h^2 + \sqrt{2}) \cdot \right. \\ \left. \sin \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (s+x) \right] + \frac{e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (x-s)} \sqrt{2}}{4\alpha^3} \left[\cos \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (s-x) + \sin \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} (x-s) \right], & x > s \end{array} \right\}$$

$$= \frac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(s+x)}}{4\alpha^3(\alpha^2 + h\alpha\sqrt{2} - h^2)} \left[(\sqrt{2}h^2 - \sqrt{2}\alpha^{-2} + 2h\alpha) \cos \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha(x+s) + (\sqrt{2}h^2 - \sqrt{2}\alpha^{-2} - 2h\alpha) \right. \\ \left. \sin \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}(x+s) \right] + \frac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|x-s|}}{4\alpha^3} \sqrt{2} \left[\cos \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha(x-s) + \sin \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|x-s| \right] \quad 0 \leq x, s < \infty$$

dersek

$$y(x) = \int_0^{\infty} G(x, s, \alpha) f(s) ds \quad (2.15)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece biz $f(x)$ kompakt supporta sahip fonksiyon olduğunda (2.9)-(2.11) sınır değer probleminin çözümünün (2.15) şeklinde ifade edilebildiğini gösterdik.

Eğer $f(x) \in L_2(0, \infty)$ 'a ait keyfi fonksiyon ise o zaman (2.15) ile tanımlanan fonksiyonun (2.9)-(2.11) problemini sağladığı kolayca gösterilir. Not edelim ki, (2.15) integral operatörü Karleman tipli sınırlı integral operatördür. Yani,

$$\left(\int_0^{\infty} \left| \int_0^{\infty} G(x, s, \alpha) f(s) ds \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq c \left(\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{ve} \quad \int_0^{\infty} |G(x, s, \alpha)|^2 ds < \infty$$

dır.



3.0 YARI EKSENDE VERİLMİŞ 4. MERTEBEDEN OPERATÖR KATSAYILI DİFERANSİYEL İFADE İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN GREEN FONKSİYONUNUN İNCELENMESİ

3.1 PROBLEMİN ORTAYA KONULMASI

H ayrılabilir Hilbert uzayı olsun. $H_1=L_2(0,\infty,H)$ uzayında

$$y^{IV}+Q(x)y+\mu y \quad (3.1)$$

$$y'(0)-h_1 y(0)=0 \quad (3.2)$$

$$y'''(0)-h_1 y''(0)=0 \quad (3.3)$$

sınır değer problemini gözönüne alalım.

Burada h_1 keyfi kompleks sayı, $\mu>0$ reel sayıdır. $Q(x)$ x 'in $[0,\infty)$ dan alınmış her bir değerinde H Hilbert uzayında dönüşüm yapan operatör olmak üzere aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu varsayalım.

1) $Q(x)$ operatörleri $x \in [0,\infty)$ 'un her bir değerinde H Hilbert uzayında kendine eş operatörlerdir.

2) $Q(x)$ 'lerin tanım kümesi x 'den bağımsız olsun. Yani $D(Q(x))=D$ ve $\overline{D}=H$ olsun. Burada $\overline{D}$ kümesi D 'nin H 'da kapanmasıdır.

3) $Q(x)$ 'ler H 'da alttan bir ile sınırlı olsun

$$(Q(x)f, f) \geq (f, f), \quad f \in D$$

4) $Q^{-1}(x)$ x 'in $[0,\infty)$ dan alınmış her bir değerinde kompakttır (Tam süreklidir).

5) $|x - \xi| \leq 1$ olduğunda $\| [Q(\xi) - Q(x)] Q^{-a}(x) \| \leq A |x - \xi|$ olsun. Burada $A>0$

sabit ve $0 < a < \frac{5}{4}$.

$$\| Q^{-1/4}(x) Q^{1/4}(\xi) \| < c \quad \text{ve} \quad \| Q^{1/4}(x) Q^{-1/4}(\xi) \| < c, \quad c = \text{sbt}$$

$$6) |x - \xi| > 1 \text{ olduğunda } \left\| Q(\xi) e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}|x-\xi|Q^{\mu_4}(x)} \right\| < c, \quad c=sbt$$

$$7) F(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j(x)^{7/4}} < \infty \quad \text{ve} \quad \int_0^{\infty} F(x) dx < \infty \text{ olsun.}$$

Burada $\alpha_1(x) \geq \alpha_2(x) \geq \dots \geq \alpha_n(x) \geq \dots$ H'da tanımlanmış $Q(x)$ operatörünün özdeğerleridir.

Biz aşağıdaki özelliklere sahip x, η 'nın ($0 \leq x, \eta < \infty$) her bir değerinde H'da dönüşüm yapan sınırlı $G(x, \eta, \mu)$ operatör fonksiyonunun varlığını göstereceğiz.

1) $G(x, \eta, \mu)$ operatör fonksiyonunun kendisi ve ilk iki kısmi türevi x, η ($0 \leq x, \eta \leq \infty$) değişkenlerinin sürekli fonksiyonudur.

2) $\eta \neq x$ olduğunda $G(x, \eta, \mu)$ 'nın η 'ya göre üçüncü türevi sürekli dir.

$$3) \frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3}(x, x+0, \mu) - \frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3}(x, x-0, \mu) = I \quad (I - \text{birim operatör})$$

$$4) \eta \neq x \text{ olduğunda } \frac{\partial^4 G}{\partial \eta^4}(x, \eta, \mu) + G(x, \eta, \mu) Q(\eta) + \mu G(x, \eta, \mu) = 0$$

$$5) \frac{\partial G}{\partial \eta}(x, \eta, \mu) \Big|_{\eta=0} - h_1 G(x, \eta, \mu) \Big|_{\eta=0} = 0$$

$$\frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3}(x, \eta, \mu) \Big|_{\eta=0} - h_1 \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2}(x, \eta, \mu) \Big|_{\eta=0} = 0 \text{ koşullarını sağlıyor.}$$

$G(x, \eta, \mu)$ operatör değerli fonksiyonuna (3.1)-(3.3) sınır değer probleminin Green fonksiyonu denir.

İkinci bölümde bulduğumuz $G(x, s, \alpha)$ fonksiyonunun ifadesinde formal olarak $\alpha = \sqrt[4]{Q(\eta) + \mu I}$ yazarsak, η parametre iken

$$y^{IV} + Q(\eta) y + \mu y = f \quad (3.4)$$

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0 \quad (3.5)$$

$$y'''(0) - h_1 y''(0) = 0 \quad (3.6)$$

sınır değer probleminin Green fonksiyonunu $G(x, s, \sqrt[4]{Q(\eta) + \mu I})$ şeklinde elde ederiz.

$G(x, s, \sqrt[4]{Q(\eta) + \mu I})$ 'nin ifadesinde $\eta = x$ yazarak elde edilen fonksiyonu $g(x, s, \mu)$ ile gösterelim. Böylece

$$g(x, s; \mu) = \frac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha(s+x)}}{4\alpha^3(\alpha^2 + \sqrt{2}h\alpha - h^2)} \left[(\sqrt{2}h^2 - \sqrt{2}\alpha^2 + 2h\alpha) \cos \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha(x+s) \right. \\ \left. + (\sqrt{2}h^2 - \sqrt{2}\alpha^2 - 2h\alpha) \sin \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha(x+s) \right] + \frac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|x-s|}}{4\alpha^3} \sqrt{2} \left[\cos \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha(x-s) + \sin \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|x-s| \right] \\ 0 \leq x, s < \infty$$

olur. Burada $\alpha = (Q(x) + \mu I)^{1/4}$ operatör fonksiyonu ve $Q(x)$ 'in diğer operatör fonksiyonları $Q(x)$ operatörünün spektral açılım formülü ile tanımlanır. Örneğin

$$(Q(x) + \mu I)^{1/4} = \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j(x) + \mu)^{1/4} (\cdot, e_j) e_j$$

dir. Burada $e_1(x), e_2(x), \dots, e_n(x), \dots$ $Q(x)$ 'in sırasıyla, $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x), \dots$ özdeğerlerine karşılık gelen normalize edilmiş özvektörleridir. (3.1), (3.2), (3.3) probleminin Green fonksiyonu $G(x, \eta, \mu)$ 'yü, parametrik yöntemine göre

$$G(x, \eta, \mu) = g(x, \eta, \mu) - \int_0^{\infty} g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] G(\xi, \eta, \mu) d\xi \quad (3.7)$$

integral denkleminin çözümü olarak arayalım.

$$NA = \int_0^{\infty} g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] A(\xi, \eta, \mu) d\xi$$

Öncelikle (3.7) denkleminin çözümünü arayacağımız uzayların tanımını verelim.

X_1 ve X_2 uzayları:

$0 \leq x$, $\eta < \infty$ bölgesinde tanımlanmış, değerleri H' 'da lineer sınırlı operatörler olan ve $\int_0^\infty dx \int_0^\infty \|A(x, \eta)\|^2 d\eta < \infty$ koşulunu sağlayan $A(x, \eta)$ operatörler kümesini X_1 ile gösterelim. X_1 bir lineer uzay oluşturur. Bu uzayda $A(x, \eta)$ elemanının normunu,

$$\|A(x, \eta)\|_{x_1} = \left(\int_0^\infty dx \int_0^\infty \|A(x, \eta)\|^2 d\eta \right)^{1/2}$$

formülü ile tanımlarsak, X_1 bir Banach uzayı olur. X_2 ile $0 \leq x$, $\eta < \infty$ bölgesinde tanımlanmış ,değerleri H' 'da dönüşüm yapan Hilbert-Schmidt (H-S) tipli ve

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \|A(x, \eta)\|_2^2 d\eta < \infty$$

koşulunu sağlayan $A(x, \eta)$ operatörler kümesini gösterelim. Burada $\|A(x, \eta)\|_2$ $A(x, \eta)$ 'nın H-S normunu gösterir.

X_2 'de $A(x, \eta)$ 'nın normunu

$$\|A(x, \eta)\|_{x_2} = \left(\int_0^\infty dx \int_0^\infty \|A(x, \eta)\|_2^2 d\eta \right)^{1/2}$$

ile tanımlayalım. X_2 uzayı da bu norma göre Banach uzayıdır.

X_1 , X_2 ve sonra tanımlayacağımız diğer uzayların da Banach uzayı olduğu B. M. Levitan (Levitan, 1968) tarafından ispatlanmıştır.

(3.7) integral denklemini X_1 ve X_2 uzaylarında gözönüne alalım. Biz $\mu > 0$ büyük değerlerinde bu denklemin X_1 ve X_2 'de tek çözüme sahip olduğunu ve çözümün ardışık yaklaşma yöntemi ile bulunabileceğini göstereceğiz. Bunun için μ 'nın sözü edilen değerlerinde $g(x, \eta, \mu) \in X_1$ ve $g(x, \eta, \mu) \in X_2$



$$NA(x, \eta) = \int_0^{\infty} g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] A(\xi, \eta) d\xi \quad (3.8)$$

operatörünün X_1 ve X_2 'de büzen dönüşüm olduğunu göstermemiz yeterlidir.

LEMMA 3.1: $Q(x)$ operatör fonksiyonu (5)-(6) koşullarını sağlıyorsa $\mu > 0$ 'nın büyük değerlerinde N operatörü X_1 ve X_2 uzayında büzen operatördür.

İSPAT:

$$g(x, \eta, \mu) = \frac{1}{4} \alpha^{-3} (\alpha^2 + \sqrt{2} h \alpha - h^2)^{-1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha (\eta + x)} \left[(\sqrt{2} h^2 - \sqrt{2} \alpha^2 + 2 h \alpha) \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha (x + \eta) \right. \\ \left. + (\sqrt{2} h^2 - \sqrt{2} \alpha^2 - 2 h \alpha) \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha (x + s) \right] + \frac{1}{4} \alpha^{-3} \sqrt{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x - s|} \left[\cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha (x - s) + \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x - s| \right]$$

olduğu bellidir. Daha önce söylediğimiz gibi, $\alpha = \sqrt{Q(x) + \mu}$ α 'nın kendisi ve α 'nın diğer fonksiyonları spektral açılımla tanımlanır. $Q^{-1}(x)$ tam süreklidir. $Q(x)$ $\alpha_1(x) \leq \alpha_2(x) \leq \dots \leq \alpha_n(x) \leq \dots$ özdeğerlerine karşılık gelen normalize edilmiş özfonksiyonları önceden de olduğu gibi; $e_1(x), e_2(x), \dots, e_n(x), \dots$ ile gösterelim.

O zaman kendine eş kompakt operatörler teorisinin esas teoremine göre (spektral açılım teoremi);

$$f(Q(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} f(\alpha_k(x)) \cdot (e_k(x), e_k(x)) e_k(x) \quad (3.9)$$

şeklinde tanımlanır.

$$NA(x, \eta) = \int_0^{\infty} g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] A(\xi, \eta) d\xi$$

$$NA(x, \eta) = \int_0^{\infty} g_1(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] A(\xi, \eta) d\xi$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\infty} g_2(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] A(\xi, \eta) d\xi \\
& + \int_0^{\infty} g_3(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] A(\xi, \eta) d\xi \\
& + \int_0^{\infty} g_4(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] A(\xi, \eta) d\xi \\
& = N_1 A(x, \eta) + N_2 A(x, \eta) + N_3 A(x, \eta) + N_4 A(x, \eta)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Burada;

$$\begin{aligned}
g_1(x, \xi, \mu) &= \frac{1}{4} \alpha^{-3} \sqrt{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x - \xi|} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x - \xi| \\
g_2(x, \xi, \mu) &= \frac{1}{4} \alpha^{-3} \sqrt{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x - \xi|} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x - \xi| \\
g_3(x, \xi, \mu) &= \frac{1}{4} \alpha^{-3} (\alpha^2 + \sqrt{2} h \alpha - h^2)^{-1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha (\xi + x)} (\sqrt{2} h^2 - \sqrt{2} \alpha^2 + 2 h \alpha) \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha (x + \xi) \\
g_4(x, \xi, \mu) &= \frac{1}{4} \alpha^{-3} (\alpha^2 + \sqrt{2} h \alpha - h^2)^{-1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha (\xi + x)} (\sqrt{2} h^2 - \sqrt{2} \alpha^2 - 2 h \alpha) \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha (x + \xi)
\end{aligned}$$

dir.

Normun özelliğinden $\|N\| \leq \|N_1\| + \|N_2\| + \|N_3\| + \|N_4\|$ yazabiliriz. $\mu > 0$ büyük değerlerinde N_1, N_2, N_3 ve N_4 operatörlerinin normunun gözönüne alınan uzaylarda istenildiği kadar küçük olduğunu göstereceğiz. Bunun sonucunda μ 'nün büyük değerlerinde N operatörünün büzen operatör olduğu elde edilir.

$\|N_1\|, \|N_2\|, \|N_3\|, \|N_4\|$ 'leri ayrı ayrı sınırlandırılalım.

$$\begin{aligned}
N_1 A(x, \eta) &= \int_0^{\infty} g_1(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] A(\xi, \eta) d\xi \\
&= \int_{x - \xi \leq 1} g_1(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] A(\xi, \eta) d\xi + \int_{x - \xi > 1} g_1(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] A(\xi, \eta) d\xi \\
&= a_1 + a_2
\end{aligned}$$

$$\|N_1 A(x, \eta)\|_2 = \|a_1 + a_2\|_2 \leq \|a_1\|_2 + \|a_2\|_2$$

$$\|N_1 A(x, \eta)\|_2^2 \leq 2(\|a_1\|_2^2 + \|a_2\|_2^2)$$

$$\begin{aligned} \|a_1\|_2^2 &= \left\| \int_{|x-\xi| \leq 1} g_1(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] A(\xi, \eta) d\xi \right\|_2^2 \\ &\leq \left[\left\| \int_{|x-\xi| \leq 1} g_1(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] A(\xi, \eta) d\xi \right\|_2 \right]^2 \\ &\leq \left[\int_{|x-\xi| \leq 1} \|g_1(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right]^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} &\|g_1(x, \xi, \mu) Q^a(x) \cdot Q^{-a}(x) [Q(\xi) - Q(x)]\| \\ &\leq \|g_1(x, \xi, \mu) Q^a(x)\| \cdot \|Q^{-a}(x) [Q(\xi) - Q(x)]\| \leq c \left\| \alpha^{-3} e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x-\xi|} \cdot Q^a(x) \right\| \cdot |x-\xi| \end{aligned}$$

Bu eşitsizliği (3.11)'de gözönüne alalım.

$$\begin{aligned} \|a_1\|_2^2 &\leq c^2 \left[\int_{|x-\xi| \leq 1} \left\| \alpha^{-3} e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x-\xi|} \cdot Q^a(x) \right\| \cdot |x-\xi| \cdot \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right]^2 \\ &= \left[\int_{|x-\xi| \leq 1} |x-\xi|^{-\varepsilon} \left\| \alpha^{-3} e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x-\xi|} \cdot Q^a(x) \right\| \cdot |x-\xi|^{1+\varepsilon} \cdot \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right]^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\left\| \alpha^{-3} e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x-\xi|} Q^a(x) \right\| = \left\| \alpha^{1+\varepsilon} \alpha^{-4-\varepsilon} Q^a(x) e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x-\xi|} \right\| \leq \left\| \alpha^{-4-\varepsilon} Q^a(x) \right\| \cdot \left\| \alpha^{1+\varepsilon} e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x-\xi|} \right\| \quad (3.13)$$

$$\alpha^{-4-\varepsilon} Q^a(x) = (Q(x) + \mu I)^{-\frac{4+\varepsilon}{4}} \cdot Q^a(x)$$

$0 < a < \frac{5}{4}$ olduğundan $0 < \varepsilon < 1$ sayısını öyle seçelim ki

$$-a + \frac{4+\varepsilon}{4} = -a + 1 + \frac{\varepsilon}{4} = \zeta > 0$$

olacak şekilde

$$(Q(x) + \mu I)^{-\frac{4+\varepsilon}{4}} \cdot Q^a(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j(x) + \mu)^{-\frac{4+\varepsilon}{4}} \alpha_j^a(x) (\cdot, e_j(x)) \cdot e_j(x)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \left\| (Q(x) + \mu I)^{-\frac{4+\varepsilon}{4}} \cdot Q^a(x) \right\| &= (\alpha_1(x) + \mu)^{-\frac{4+\varepsilon}{4}} \cdot \alpha_1^a(x) \\ &\leq (\alpha_1(x) + \mu)^{-\frac{4+\varepsilon}{4}} (\alpha_1(x) + \mu)^a = (\alpha_1(x) + \mu)^{-\frac{4+\varepsilon}{4}+a} = \frac{1}{(\alpha_1(x) + \mu)^\zeta} = \frac{1}{\mu^\zeta} \\ &= O\left(\frac{1}{\mu^\zeta}\right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

veya

$$\left\| \alpha^{-4-\varepsilon} Q^a(x) \right\| = Q\left(\frac{1}{\mu^\zeta}\right)$$

olur. Son ifadeyi (3.13)'de gözönüne alırsak,

$$\left\| \alpha^{-3} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|x-\xi|} Q^a(x) \right\| \leq \frac{c}{\mu^\zeta} \left\| \alpha^{1+\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|x-\xi|} \right\| \quad (3.15)$$

olur. (3.15) ve (3.12)'den

$$\|a_1\|_2^2 \leq \frac{c^2}{\mu^{2\zeta}} \left[\int_{|x-\xi| \leq 1} |x-\xi|^{-\varepsilon} \left\| \alpha^{1+\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|x-\xi|} \right\| |x-\xi|^{1+\varepsilon} \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right]^2.$$

Burada

$$\left\| \alpha^{1+\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|x-\xi|} |x-\xi|^{1+\varepsilon} \right\| < C$$

ve

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1-\varepsilon} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1+\varepsilon} \alpha^{1+\varepsilon} |x-\xi|^{1+\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|x-\xi|} \leq C$$

olduğundan

$$\|a_1\|_2^2 \leq \frac{c^2}{\mu^{2\zeta}} \cdot c_1 \left[\int_{|x-\xi| \leq 1} |x-\xi|^{-\varepsilon} \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right]^2$$

veya

$$\|a_1\|_2^2 \leq \frac{c^2}{\mu^{2\zeta}} \left[\int_{|x-\xi| \leq 1} |x-\xi|^{-\varepsilon} \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right]^2 \quad (3.16)$$

olur.

$$\|a_1\|_{X_2}^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{c}{\mu^{2\zeta}} \left[\int_{|x-\xi| \leq 1} |x-\xi|^{-\varepsilon} \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right]^2 dx d\eta \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left\{ \int_{|x-\xi| \leq 1} |x-\xi|^{-\varepsilon} \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right\} dx \\ &= \int_0^\infty \left\{ \int_{|x-\xi'| \leq 1} |x-\xi'|^{-\varepsilon} \|A(\xi', \eta)\|_2 d\xi' \cdot \int_{|x-\xi| \leq 1} |x-\xi|^{-\varepsilon} \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right\} dx \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} \xi' - x = u' & \xi' = u' + x & d\xi' = du' \\ \xi - x = u & \xi = u + x & d\xi = du \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \leq \int_0^\infty \left\{ \int_{|u'| \leq 1} |u'|^{-\varepsilon} \|A(x+u', \eta)\|_2 du' \int_{|u| \leq 1} |u|^{-\varepsilon} \|A(x+u, \eta)\|_2 du \right\} dx \\ &= \int_{|u'| \leq 1} |u'|^{-\varepsilon} du' \int_{|u| \leq 1} |u|^{-\varepsilon} du \int_0^\infty \|A(x+u', \eta)\|_2 \|A(x+u, \eta)\|_2 dx \\ &\leq \int_{|u'| \leq 1} |u'|^{-\varepsilon} du' \int_{|u| \leq 1} |u|^{-\varepsilon} du \left(\int_0^\infty \|A(x+u', \eta)\|_2^2 dx \int_0^\infty \|A(x+u, \eta)\|_2^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \int_{|u'| \leq 1} |u'|^{-\varepsilon} du' \int_{|u| \leq 1} |u|^{-\varepsilon} du \left(\int_0^\infty \|A(x+u', \eta)\|_2^2 dx \int_0^\infty \|A(v+u, \eta)\|_2^2 dv \right)^{1/2} \end{aligned}$$



$$x + u' = v'$$

$$v + u = v''$$

$$dx = dv'$$

$$dv = dv''$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{|u'| \leq 1} |u'|^{-\varepsilon} du' \int_{|u| \leq 1} |u|^{-\varepsilon} du \left(\int_{u'}^{\infty} \|A(v', \eta)\|_2^2 dv' \int_u^{\infty} \|A(v'', \eta)\|_2^2 dv'' \right)^{1/2} \\
 &\leq \int_{|u'| \leq 1} |u'|^{-\varepsilon} du' \int_{|u| \leq 1} |u|^{-\varepsilon} du \left(\int_0^{\infty} \|A(v', \eta)\|_2^2 dv' \int_0^{\infty} \|A(v'', \eta)\|_2^2 dv'' \right)^{1/2} \\
 &= \int_{|u'| \leq 1} |u'|^{-\varepsilon} du' \int_{|u| \leq 1} |u|^{-\varepsilon} du \left(\int_0^{\infty} \|A(x, \eta)\|_2^2 dx \right) = c \int_0^{\infty} \|A(x, \eta)\|_2^2 dx. \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

(3.18) denklemindeki $\int_{|u'| \leq 1} |u'|^{-\varepsilon} du'$ ifadesini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 |u'|^{-\varepsilon} du' &= \int_{-1}^1 \frac{du'}{|u'|^\varepsilon} = \int_{-1}^0 |u'|^{-\varepsilon} du' + \int_0^1 |u'|^{-\varepsilon} du' = \int_{-1}^0 (-u')^{-\varepsilon} du' + \int_0^1 (u')^{-\varepsilon} du' \\
 &= 2 \int_0^1 (u')^{-\varepsilon} du' = \frac{2}{1-\varepsilon} \quad (0 < \varepsilon < 1)
 \end{aligned}$$

Böylece (3.18)'i (3.17)'de gözönüne alırsak.

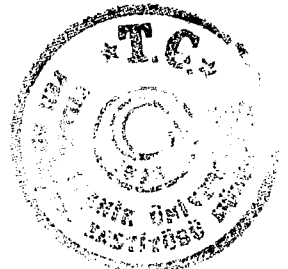
$$\|a_1\|_{x_2}^2 \leq \frac{c}{\mu^{2\varepsilon}} \int_0^\infty \int_0^\infty \|A(x, \eta)\|_2^2 dx d\eta = \frac{c}{\mu^{2\varepsilon}} \|A(x, \eta)\|_{x_2}^2$$

veya

$$\|a_1\|_{x_2} \leq \frac{c}{\mu^\varepsilon} \|A(x, \eta)\|_{x_2} \tag{3.19}$$

elde ederiz. $g_1(x, \xi, \mu)$ için a_2 'yi değerlendirelim.

$$\|a_2\|_2 = \left\| \int_{|x-\xi|>1} g_1(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] A(\xi, \eta) d\xi \right\|_2$$



$$\begin{aligned}
& \leq \int_{|x-\xi|>1} \|g_1(x, \xi, \mu)[Q(\xi) - Q(x)]A(\xi, \eta) d\xi\|_2 \\
& \leq \int_{|x-\xi|>1} \|g_1(x, \xi, \mu)[Q(\xi) - Q(x)]\| \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \\
& \leq \int_{|x-\xi|>1} \|g_1(x, \xi, \mu)Q(\xi)\| \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \\
& \quad + \int_{|x-\xi|>1} \|g_1(x, \xi, \mu)Q(x)\| \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \\
\|a_2\|_2^2 & \leq 2 \left[\int_{|x-\xi|\geq 1} \|g_1(x, \xi, \mu)Q(\xi)\| \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right]^2 + \left[\int_{|x-\xi|\geq 1} \|g_1(x, \xi, \mu)Q(x)\| \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right]^2 \\
& \leq c^2 \left[\int_{|x-\xi|\geq 1} \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|x-\xi|} \cdot Q(\xi) \right\| \cdot \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right]^2 + \left[\int_{|x-\xi|\geq 1} \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|x-\xi|} \cdot Q(x) \right\| \cdot \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right]^2 \\
& = c^2 \left[\int_{|x-\xi'|\geq 1} \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|x-\xi'|} \cdot Q(\xi') \right\| \cdot \|A(\xi', \eta)\|_2 d\xi' \right] \cdot \left[\int_{|x-\xi|\geq 1} \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|x-\xi|} \cdot Q(\xi) \right\| \cdot \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right] \\
& \quad + c^2 \left[\int_{|x-\xi'|\geq 1} \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|x-\xi'|} \cdot Q(x) \right\| \cdot \|A(\xi', \eta)\|_2 d\xi' \right] \cdot \left[\int_{|x-\xi|\geq 1} \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|x-\xi|} \cdot Q(x) \right\| \cdot \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right] \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Burada 6) koşulundan

$$\begin{aligned}
\left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|x-\xi'|} Q(\xi') \right\| & = \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(Q(x)+\mu l)^{1/4}|x-\xi'|} \cdot Q(\xi') \right\| \\
& \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}Q^{1/4}(x)|x-\xi'|} \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}Q^{1/4}(x)|x-\xi'| - \frac{\sqrt{2}}{2}(Q(x)+\mu l)^{1/4}|x-\xi'|} \cdot Q(\xi') \right\| \\
& \leq \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}Q^{1/4}(x)|x-\xi'| - \frac{\sqrt{2}}{2}(Q(x)+\mu l)^{1/4}|x-\xi'|} \right\| \cdot \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}Q^{1/4}(x)|x-\xi'|} \cdot Q(\xi') \right\| \\
& \leq c \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}Q^{1/4}(x)|x-\xi'| - \frac{\sqrt{2}}{2}(Q(x)+\mu l)^{1/4}|x-\xi'|} \right\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| e^{\frac{\sqrt{2}}{4} Q^{1/4}(x) |x-\xi'| - \frac{\sqrt{2}}{4} (Q(x)+\mu l)^{1/4} |x-\xi'| - \frac{\sqrt{2}}{4} (Q(x)+\mu)^{1/4} |x-\xi'|} \right\| \\
&= \left\| e^{\frac{\sqrt{2}}{4} Q^{1/4}(x) |x-\xi'| - \frac{\sqrt{2}}{4} (Q(x)+\mu l)^{1/4} |x-\xi'|} \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} (Q(x)+\mu)^{1/4} |x-\xi'|} \right\| \\
&\leq \left\| e^{\frac{\sqrt{2}}{4} Q^{1/4}(x) |x-\xi'| - \frac{\sqrt{2}}{4} (Q(x)+\mu l)^{1/4} |x-\xi'|} \right\| \cdot \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} (Q(x)+\mu)^{1/4} |x-\xi'|} \right\|
\end{aligned} \tag{3.21}$$

olur.

$e^{\frac{\sqrt{2}}{4} Q^{1/4}(x) |x-\xi'| - \frac{\sqrt{2}}{4} (Q(x)+\mu l)^{1/4} |x-\xi'|}$ nin özdeğerleri $\lambda_j = e^{\frac{\sqrt{2}}{4} \alpha_j^{1/4}(x) |x-\xi'| - \frac{\sqrt{2}}{4} (\alpha_j(x)+\mu)^{1/4} |x-\xi'|}$ ve

$$\begin{aligned}
\sup_j \lambda_j &= \sup_j e^{\frac{\sqrt{2}}{4} \alpha_j^{1/4}(x) |x-\xi'| - \frac{\sqrt{2}}{4} (\alpha_j(x)+\mu)^{1/4} |x-\xi'|} \leq \sup_j e^{\frac{\sqrt{2}}{4} (\alpha_j(x)+\mu)^{1/4} |x-\xi'| - \frac{\sqrt{2}}{4} (\alpha_j(x)+\mu)^{1/4} |x-\xi'|} \\
&= \sup_j e^0 = 1 \quad \text{olduğundan}
\end{aligned}$$

$$\left\| e^{\frac{\sqrt{2}}{4} Q^{1/4}(x) |x-\xi'| - \frac{\sqrt{2}}{4} (Q(x)+\mu)^{1/4} |x-\xi'|} \right\| \leq 1$$

elde edilir.

$$\left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} (Q(x)+\mu)^{1/4} |x-\xi'|} \right\| \leq e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} (\alpha_1(x)+\mu)^{1/4} |x-\xi'|} < e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} |x-\xi'|} \tag{3.22}$$

(3.22)'yi ve bir önceki eşitsizliği (3.21)'de gözönüne alırsak

$$\left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha_1(x) |x-\xi'|} Q(\xi') \right\| \leq c e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |x-\xi'|} \tag{3.23}$$

olduğu görülür.

(3.23)'ü (3.20)'de gözönüne alırsak,

$$\begin{aligned} \|a_2\|_2^2 &= c^2 \left[\int_{|x-\xi'| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |x-\xi'|} \cdot \|A(\xi', \eta)\|_2 d\xi' \right] \cdot \left[\int_{|x-\xi| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |x-\xi|} \cdot \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right] \\ &+ c^2 \left[\int_{|x-\xi'| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |x-\xi'|} \cdot \|A(\xi', \eta)\|_2 d\xi' \right] \cdot \left[\int_{|x-\xi| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |x-\xi|} \cdot \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right] \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\int_0^\infty \|a_2\|_2^2 dx \leq c^2 \left\{ \int_0^\infty \left[\int_{|x-\xi'| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |x-\xi'|} \cdot \|A(\xi', \eta)\|_2 d\xi' \right] \cdot \left[\int_{|x-\xi| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |x-\xi|} \cdot \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right] \right\} dx$$

$$+ c^2 \int_0^\infty \left\{ \left[\int_{|x-\xi'| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |x-\xi'|} \cdot \|A(\xi', \eta)\|_2 d\xi' \right] \cdot \left[\int_{|x-\xi| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |x-\xi|} \cdot \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right] \right\} dx$$

$$\xi' - x = u'$$

$$\xi' = u' + x$$

$$d\xi' = du'$$

$$\xi - x = u$$

$$\xi = u + x$$

$$d\xi = du$$

$$\int_0^\infty \|a_2\|_2^2 dx \leq \int_0^\infty c^2 \left\{ \left[\int_{|u'| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |u'|} \|A(u'+x, \eta)\| du' \right] \left[\int_{|u| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |u|} \|A(u+x, \eta)\| du \right] \right\} dx$$

$$+ c^2 \int_0^\infty \left\{ \left[\int_{|u'| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |u'|} \|A(u'+x, \eta)\| du' \right] \left[\int_{|u| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |u|} \|A(u+x, \eta)\| du \right] \right\} dx$$

$$= \int_{|u'| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |u'|} du' \int_{|u| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |u|} du \int_0^\infty \|A(u'+x, \eta)\|_2 \|A(x+u, \eta)\|_2 dx$$

$$+ \int_{|u'| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |u'|} du' \int_{|u| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |u|} du \int_0^\infty \|A(u'+x, \eta)\|_2 \|A(u+x, \eta)\|_2 dx$$

$$= 2 \left[\int_{|u'| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |u'|} du' \int_{|u| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |u|} du \left(\int_0^\infty \|A(u'+x, \eta)\|_2^2 dx \int_0^\infty \|A(x+u, \eta)\|_2^2 dx \right)^{1/2} \right]$$

$$= 2 \left[\int_{|u'| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |u'|} du' \int_{|u| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |u|} du \left(\int_0^\infty \|A(u'+x), \eta\|_2^2 dx \int_0^\infty \|A(v+u), \eta\|_2^2 dv \right)^{1/2} \right]$$

$$x+u'=v'$$

$$v+u=v''$$

$$dx=dv'$$

$$dv=dv''$$

$$= 2 \left[\int_{|u'| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |u'|} du' \int_{|u| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |u|} du \left(\int_{u'}^\infty \|A(v', \eta)\|_2^2 dv' \int_u^\infty \|A(v'', \eta)\|_2^2 dv'' \right)^{1/2} \right]$$

$$\leq 2 \left[\int_{|u'| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |u'|} du' \int_{|u| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |u|} du \left(\int_0^\infty \|A(v', \eta)\|_2^2 dv' \int_0^\infty \|A(v'', \eta)\|_2^2 dv'' \right)^{1/2} \right]$$

$$= 2 \left[\int_{|u'| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |u'|} du' \int_{|u| \geq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |u|} du \left(\int_0^\infty \|A(x, \eta)\|_2^2 dx \right) \right]$$

$$= 2 \left[\frac{4}{\sqrt{2}} \mu^{-1/4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \mu^{-1/4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4}} \left(\int_0^\infty \|A(x, \eta)\|_2^2 dx \right) \right]$$

veya

$$\int_0^\infty \|a_2\|_2^2 dx \leq 8\mu^{-1/2} \cdot e^{-\sqrt{2}\mu^{1/4}} \left(\int_0^\infty \|A(x, \eta)\|_2^2 dx \right) = \frac{c}{\mu^{1/2}} \int_0^\infty \|A(x, \eta)\|_2^2 dx$$

elde edilir. Böylece

$$\|a_2\|_{x_2}^2 \leq \frac{c}{\mu^{1/2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \|A(x, \eta)\|_2^2 dx d\eta = \frac{c}{\mu^{1/2}} \|A(x, \eta)\|_{x_2}^2$$

veya

$$\|a_2\|_{x_2} \leq \frac{c}{\mu^{1/4}} \|A(x, \eta)\|_{x_2}$$

olur.

g_3 'ün değerlendirilmesi:

$$g_3 = \frac{1}{4} \alpha^{-3} (\alpha^2 + \sqrt{2} h \alpha - h^2)^{-1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \mu^{1/4} \xi + x} (\sqrt{2} h^2 - \sqrt{2} \alpha^2 + 2 h \alpha) \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x + \xi|$$

$N_3 A'y_1$

$$\begin{aligned}
N_3 A(x, \eta) &= \int_0^\infty g_3(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] A(\xi, \eta) d\xi \\
&= \int_{|x-\xi| \leq 1} g_3(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] A(\xi, \eta) d\xi \\
&\quad + \int_{|x-\xi| > 1} g_3(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] A(\xi, \eta) d\xi = a_1 + a_2
\end{aligned}$$

şeklinde yazarsak

$$\|N_3 A(x, \eta)\|_2 = \|a_1 + a_2\|_2 \leq \|a_1\|_2 + \|a_2\|_2$$

olur.

$$\|N_3 A(x, \eta)\|_2^2 \leq 2(\|a_1\|_2^2 + \|a_2\|_2^2) \text{ olduğu açıktır. } \|a_1\|_2^2 \text{ 'yi sınırlandıralım.}$$

$$\begin{aligned}
\|a_1\|_2^2 &= \left\| \int_{|x-\xi| \leq 1} g_3(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] A(\xi, \eta) d\xi \right\|_2^2 \\
&\leq \left[\int_{|x-\xi| \leq 1} \|g_3(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right]^2 \\
&\leq \left[\int_{|x-\xi| \leq 1} \|g_3(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)]\| \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right]^2 \tag{3.24}
\end{aligned}$$

g_3 'ün ifadesini kullanırsak ,

$$\begin{aligned}
&\|g_3(x, \xi, \mu) Q^a(x) \cdot Q^{-a}(x) [Q(\xi) - Q(x)]\| \\
&\leq \|g_3(x, \xi, \mu) Q^a(x)\| \cdot \|Q^{-a}(x) [Q(\xi) - Q(x)]\| \\
&\leq c \left\| \frac{1}{4} \alpha^{-3} (\alpha^2 + \sqrt{2} h \alpha - h^2)^{-1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |\xi + x|} (\sqrt{2} h^2 - \sqrt{2} \alpha^2 + 2 h \alpha) \cdot Q^a(x) \right\| \cdot |x - \xi| \tag{3.25}
\end{aligned}$$

olur. (3.25)'ü (3.24)'de gözönüne alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\|a_1\|_2^2 &\leq c \left[\int_{|x-\xi| \leq 1} \left\| \frac{1}{4} \alpha^{-3} (\alpha^2 + \sqrt{2}h\alpha - h^2)^{-1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|\xi+x|} (\sqrt{2}h^2 - \sqrt{2}\alpha^2 + 2h\alpha) \cdot Q^a(x) \right\| \right. \\
&\quad \left. \cdot |x-\xi| \cdot \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right]^2 \\
&= \left[\int_{|x-\xi| \leq 1} |x-\xi|^{-\varepsilon} \left\| \frac{1}{4} \alpha^{-3} (\alpha^2 + \sqrt{2}h\alpha - h^2)^{-1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|\xi+x|} (\sqrt{2}h^2 - \sqrt{2}\alpha^2 + 2h\alpha) \cdot Q^a(x) \right\| \right. \\
&\quad \left. \cdot |x-\xi|^{1+\varepsilon} \cdot \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right]^2 \tag{3.26}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{4} \alpha^{-3} (\alpha^2 + \sqrt{2}h\alpha - h^2)^{-1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|\xi+x|} (\sqrt{2}h^2 - \sqrt{2}\alpha^2 + 2h\alpha) \cdot Q^a(x) \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{4} \alpha^{1+\varepsilon} \alpha^{-4-\varepsilon} (\alpha^2 + \sqrt{2}h\alpha - h^2)^{-1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|\xi+x|} (\sqrt{2}h^2 - \sqrt{2}\alpha^2 + 2h\alpha) \cdot Q^a(x) \right\| \\
&= \|\alpha^{-4-\varepsilon} Q^a(x)\| \cdot \left\| \frac{1}{4} \alpha^{1+\varepsilon} (\alpha^2 + \sqrt{2}h\alpha - h^2)^{-1} (\sqrt{2}h^2 - \sqrt{2}\alpha^2 + 2h\alpha) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|\xi+x|} \right\| \tag{3.27}
\end{aligned}$$

olduğu açıktır.

$$\alpha^{-4-\varepsilon} Q^a(x) = (Q(x) + \mu I)^{\frac{-4-\varepsilon}{4}} Q^a(x)$$

İfadesinde $0 < a < \frac{5}{4}$ iken $0 < \varepsilon < 1$ sayısını $-a + \frac{4+\varepsilon}{4} = -a + 1 + \frac{\varepsilon}{4} = \zeta > 0$

olacak şekilde seçelim. Bu takdirde,

$$(Q(x) + \mu I)^{\frac{-4-\varepsilon}{4}} Q^a(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j(x) + \mu)^{\frac{-4-\varepsilon}{4}} \alpha_j^a(x) (\cdot, e_j(x)) e_j(x)$$

$$\begin{aligned}
\left\| (Q(x) + \mu I)^{\frac{-4-\varepsilon}{4}} Q^a(x) \right\| &= (\alpha_1(x) + \mu I)^{\frac{-4-\varepsilon}{4}} \cdot \alpha_1^a(x) \\
&\leq (\alpha_1(x) + \mu I)^{\frac{-4-\varepsilon}{4}} (\alpha_1(x) + \mu)^a \\
&= (\alpha_1(x) + \mu I)^{\frac{-4-\varepsilon}{4} + a} = \frac{1}{(\alpha_1(x) + \mu)^\zeta} < \frac{1}{\mu^\zeta}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

olur. (3.28)'yi (3.27)'da yerine yazalım. O zaman (3.27)'nin sol tarafındaki ifade

$$\leq \frac{c}{\mu^\zeta} \left\| \frac{1}{4} \alpha^{1+\varepsilon} (\alpha^2 + \sqrt{2}h\alpha - h^2)^{-1} (\sqrt{2}h^2 - \sqrt{2}\alpha^2 + 2h\alpha) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|\xi+x|} \right\| \tag{3.29}$$

olur.

(3.29)'u (3.26)'da gözönüne alalım. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
\|a_1\|_2^2 &\leq \frac{c}{\mu^\zeta} \left[\int_{|x-\xi| \leq 1} |x-\xi|^{-\varepsilon} \left\| \frac{1}{4} |x-\xi|^{1+\varepsilon} \alpha^{1+\varepsilon} (\alpha^2 + \sqrt{2}h\alpha - h^2)^{-1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|\xi+x|} (\sqrt{2}h^2 - \sqrt{2}\alpha^2 + 2h\alpha) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|\xi+x|} \right\| \cdot \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right]^2
\end{aligned}$$

olur.

$\alpha > 0$, $\beta > 0$ iken $\alpha^\beta e^{-\alpha} \leq c$ olduğundan

$$\left\| \frac{1}{4} \alpha^{1+\varepsilon} (\alpha^2 + \sqrt{2}h\alpha - h^2)^{-1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|\xi+x|} (\sqrt{2}h^2 - \sqrt{2}\alpha^2 + 2h\alpha) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|\xi+x|} |x-\xi|^{1+\varepsilon} \right\|$$

sınırlı olduğu açıktır. Böylece,

$$\|a_1\|_2^2 \leq \frac{c}{\mu^\zeta} \left[\int_{|x-\xi| \leq 1} |x-\xi|^{-\varepsilon} \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right]^2$$

dir. Bu sınırlandırma (3.16) eşitsizliğine ulaştığından bundan sonra yapılan işlemler g_3 'ün a_1 'i için de geçerlidir. Dolayısıyla

$$\|a_1\|_{x_2} \leq \frac{c}{\mu^{\frac{1}{2}}} \|A(x, \eta)\|_{x_2}$$

olur.

$$g_3 = \frac{1}{4} \alpha^{-3} (\alpha^2 + \sqrt{2} h \alpha - h^2)^{-1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |\xi + x|} (\sqrt{2} h^2 - \sqrt{2} \alpha^2 + 2 h \alpha) \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x + \xi|$$

g_3 için a_2 'yi değerlendirelim.

$$\|a_2\|_2 = \left\| \int_{|x-\xi|>1} g_3(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] A(\xi, \eta) d\xi \right\|_2$$

$$\left(\text{kullanılan kořul: } |x - \xi| > 1 \text{ iken } \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} |x-\xi| Q^{1/4}(x)} \cdot Q(\xi) \right\| < c \quad c: \text{sbt} \right)$$

$$\leq \int_{|x-\xi|>1} \|g_3(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] A(\xi, \eta) d\xi\|_2$$

$$\leq \int_{|x-\xi|>1} \|g_3(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)]\| \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi$$

$$\leq \int_{|x-\xi|>1} \|g_3(x, \xi, \mu) \cdot Q(\xi)\| \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi + \int_{|x-\xi|>1} \|g_3(x, \xi, \mu) \cdot Q(x)\| \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi$$

$$\|a_2\|_2 \leq 2 \left[\int_{|x-\xi|>1} \|g_3(x, \xi, \mu) \cdot Q(\xi)\| \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right]^2 + \left[\int_{|x-\xi|>1} \|g_3(x, \xi, \mu) \cdot Q(x)\| \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right]^2$$

$$\left\| \alpha^{-3} (\alpha^2 + \sqrt{2} h \alpha - h^2)^{-1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |\xi + x|} (\sqrt{2} h^2 - \sqrt{2} \alpha^2 + 2 h \alpha) \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x + \xi| \right\| \leq c \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |\xi + x|} \right\|$$

olduğundan

$$\leq c^2 \left[\int_{|x-\xi|>1} \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |\xi-x|} Q(\xi') \right\| \cdot \|A(\xi', \eta)\|_2 d\xi' \right] \cdot \left[\int_{|x-\xi|>1} \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |\xi-x|} Q(\xi) \right\| \cdot \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right]$$

$$\begin{aligned}
& + c^2 \left[\int_{|x-\xi'| \geq 1} \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x-\xi'|} Q(x) \right\| \cdot \|A(\xi', \eta)\|_2 d\xi' \right] \cdot \left[\int_{|x-\xi| \geq 1} \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |\xi-x|} Q(x) \right\| \cdot \|A(\xi, \eta)\|_2 d\xi \right] \\
& \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x-\xi'|} \cdot Q(\xi') \right\| = \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} (Q(x)+\mu)^{1/4} |x-\xi'|} \cdot Q(\xi') \right\| \\
& = \left\| e^{+\frac{\sqrt{2}}{4} Q^{1/4}(x) |x-\xi'|} \cdot e^{+\frac{\sqrt{2}}{4} Q^{1/4}(x) |x-\xi'|} \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} (Q(x)+\mu)^{1/4} |x-\xi'|} \cdot Q(\xi') \right\| \\
& \leq \left\| e^{+\frac{\sqrt{2}}{4} Q^{1/4}(x) |x-\xi'| - \frac{\sqrt{2}}{2} (Q(x)+\mu)^{1/4} |x-\xi'|} \right\| \cdot \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} Q^{1/4}(x) |x-\xi'|} \cdot Q(\xi') \right\| \\
& \leq c \left\| e^{+\frac{\sqrt{2}}{4} Q^{1/4}(x) |x-\xi'| - \frac{\sqrt{2}}{2} (Q(x)+\mu)^{1/4} |x-\xi'|} \right\| \\
& = \left\| e^{\frac{\sqrt{2}}{4} Q^{1/4}(x) |x-\xi'| - \frac{\sqrt{2}}{4} (Q(x)+\mu)^{1/4} |x-\xi'|} \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} (Q(x)+\mu)^{1/4} |x-\xi'|} \right\| \\
& \leq \left\| e^{\frac{\sqrt{2}}{4} Q^{1/4}(x) |x-\xi'| - \frac{\sqrt{2}}{4} (Q(x)+\mu)^{1/4} |x-\xi'|} \right\| \cdot \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} (Q(x)+\mu)^{1/4} |x-\xi'|} \right\| \\
& \leq \sup_j e^{\frac{\sqrt{2}}{4} \alpha_j^{1/4} |x-\xi'| - \frac{\sqrt{2}}{4} (\alpha_j(x)+\mu)^{1/4} |x-\xi'|} \cdot \sup_j e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} (\alpha_j(x)+\mu)^{1/4} |x-\xi'|} \\
& \leq e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \mu^{1/4} |x-\xi'|}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bundan sonraki işlemler g_1 'in $\|a_2\|_2$ 'si ile aynıdır.

$\mu > 0$ büyük değerlerinde

$$\begin{aligned}
N &= N_1 + N_2 + N_3 + N_4 & \|N_1\| &= O\left(\frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}}\right) & \|N_2\| &= O\left(\frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}}\right) \\
& & \|N_3\| &= O\left(\frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}}\right) & \|N_4\| &= O\left(\frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}}\right) \\
& & \|N\| &= O\left(\frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}}\right)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bununla yukarıdaki lemma ispatlanmış olur.

Lemma 3.1'in ispatında olduğu gibi benzer şekilde N operatörünün $\mu > 0$ büyük değerlerinde X_1 uzayında büzen olduğu gösterilebilir. Şimdi $g(x, \xi, \mu)$ operatör fonksiyonunun X_1 ve X_2 uzaylarına ait olduğunu gösterelim. Bunun için $Q(x)$ operatör fonksiyonunun özdeğerlerinden oluşturulan $F(x) = \sum_{j=1}^{\infty} [\alpha_j(x)]^{-7/4}$ 'ün $L_1(0, \infty)$ 'a ait

olduğunu, yani $\int_0^{\infty} F(x) dx < \infty$ 'u gözönüne alacağız.

$$\|g\|_2 \leq \|g_1\|_2 + \|g_2\|_2 + \|g_3\|_2 + \|g_4\|_2 \quad \text{olduğu açıktır.}$$

Önce $g_4(x, \xi, \mu)$ operatör fonksiyonunun X_2 uzayına ait olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \|g_4(x, \xi, \mu)\|_2^2 &= \left\| \frac{1}{4} \alpha^{-3} \sqrt{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x-\xi|} \left[\sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x-\xi| \right] \right\|_2^2 \\ &\leq c \left\| \alpha^{-3} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x-\xi|} \right\|_2^2 = c \left\| (Q(x) + \mu)^{-3/4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} (Q(x) + \mu)^{1/4} |x-\xi|} \right\|_2^2 \\ &= c \sum_{j=1}^{\infty} \left[\alpha_j(x) + \mu \right]^{-3/2} \cdot e^{-\sqrt{2} (\alpha_j(x) + \mu)^{1/4} |x-\xi|} \end{aligned}$$

Buradan,

$$\int_0^{\infty} \|g_4(x, \xi, \mu)\|_2^2 d\xi \leq c \sum_{j=1}^{\infty} \left[\alpha_j(x) + \mu \right]^{-3/2} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{2} (\alpha_j(x) + \mu)^{1/4} |x-\xi|} d\xi \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{2} (\alpha_j(x) + \mu)^{1/4} |x-\xi|} d\xi &= \int_0^x e^{-\sqrt{2} (\alpha_j(x) + \mu)^{1/4} |x-\xi|} d\xi + \int_x^{\infty} e^{-\sqrt{2} (\alpha_j(x) + \mu)^{1/4} |x-\xi|} d\xi \\ &= e^{-\sqrt{2} (\alpha_j(x) + \mu)^{1/4} x} \int_0^x e^{\sqrt{2} (\alpha_j(x) + \mu)^{1/4} s} ds + e^{\sqrt{2} (\alpha_j(x) + \mu)^{1/4} x} \int_x^{\infty} e^{-\sqrt{2} (\alpha_j(x) + \mu)^{1/4} s} ds \\ &= e^{-\sqrt{2} (\alpha_j(x) + \mu)^{1/4} x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} (\alpha_j(x) + \mu)^{1/4}} e^{\sqrt{2} (\alpha_j(x) + \mu)^{1/4} s} \Big|_0^x \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + e^{\sqrt{2}(\alpha_j(x)+\mu)^{1/4}x} \cdot \frac{1}{-\sqrt{2}(\alpha_j(x)+\mu)^{1/4}} e^{-\sqrt{2}(\alpha_j(x)+\mu)^{1/4}s} \Big|_x^\infty \\
& = e^{-\sqrt{2}(\alpha_j(x)+\mu)^{1/4}x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}(\alpha_j(x)+\mu)^{1/4}} \left(e^{\sqrt{2}(\alpha_j(x)+\mu)^{1/4}x} - 1 \right) \\
& + e^{\sqrt{2}(\alpha_j(x)+\mu)^{1/4}x} \cdot \frac{1}{-\sqrt{2}(\alpha_j(x)+\mu)^{1/4}} \left(0 - e^{-\sqrt{2}(\alpha_j(x)+\mu)^{1/4}x} \right) \\
& = \frac{1}{\sqrt{2}(\alpha_j(x)+\mu)^{1/4}} \left(1 + e^{-\sqrt{2}(\alpha_j(x)+\mu)^{1/4}x} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}(\alpha_j(x)+\mu)^{1/4}} \\
& = \frac{1}{\sqrt{2}(\alpha_j(x)+\mu)^{1/4}} \cdot e^{-\sqrt{2}(\alpha_j(x)+\mu)^{1/4}x} \tag{3.31}
\end{aligned}$$

dir. (3.31)'i (3.30)'da gözönüne alalım.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \|g_4(x, s, \mu)\|_2^2 ds & \leq c \sum_{j=1}^\infty [\alpha_j(x) + \mu]^{-3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4}} e^{-\sqrt{2}(\alpha_j(x) + \mu)^{1/4}x} \\
& \leq \sum_{j=1}^\infty (\alpha_j(x) + \mu)^{-7/4} = F(x)
\end{aligned}$$

Böylece

$$\|g_4\|_{X_2}^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty \|g_4(x, s, \mu)\|_2^2 ds \leq c \int_0^\infty F(x) dx < \infty$$

olur.

Teorem 3.1: Eğer (5)-(6)-(7) koşulları sağlanıyorsa o zaman μ 'nın büyük değerlerinde (3.7) denkleminin X_1 ve X_2 uzaylarında çözümü vardır ve tektir. Bu çözüm ardışık yaklaşım yöntemi ile bulunabilir.



Çalışmamızı sürdürmek için gerekli olan H' 'da dönüşüm yapan sınırlı $A(x, \eta)$ operatörlerinin oluşturduğu diğer $X_3^{(P)}, X_2^S, X_4^S$ ve $X_5^{(P \geq 1, S \leq 0)}$ uzaylarının tanımını verelim. Bu uzaylarda norm sırasıyla

$$\|A(x, \eta)\|_{X_3^{(P)}} = \left(\sup_{0 < x < \infty} \int_0^\infty \|A(x, \eta)\|^P d\eta \right)^{1/P}$$

$$\|A(x, \eta)\|_{X_2^S} = \int_0^\infty dx \int_0^\infty \|A(x, \eta) Q^S(\eta)\|_2^2 d\eta$$

$$\|A(x, \eta)\|_{X_4^S} = \sup_{0 < x < \infty} \int_0^\infty \|A(x, \eta) Q^S(\eta)\| d\eta$$

$$\|A(x, \eta)\|_{X_5} = \sup_{0 < x < \infty} \sup_{0 < \eta < \infty} \|A(x, \eta)\|$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzaylar B.M. Levitan (Levitan, 1968) tarafından verilmiş ve bunların Banach uzayı oldukları ispatlanmıştır.

LEMMA 3.2: $Q(x)$ operatör fonksiyonu Lemma 3.1'in koşullarını sağlıyorsa $\mu > 0$ değerlerinde N operatörü $X_3^{(P)}, X_2^S, X_4^S$ ve X_5 uzaylarının herbirinde büzen operatördür.

Lemma 3.2'nin ispatı Lemma 3.1'e benzer şekilde yapılır. (3.7) denkleminin bu uzaylarda tek çözüme sahip olduğunu göstermek için g 'nin de bu uzaylara ait olduğunu göstermemiz yeterlidir.

(3.7) denkleminin $X_3^{(2)}, X_4^{(\pm 1/4)}, X_2^{(-S)}$ uzaylarında çözüme sahip olduğunu gösterelim. Bundan dolayı $g(x, \eta, \mu)$ 'nin $X_3^{(2)}, X_4^{(\pm 1/4)}, X_2^{(-S)}$ uzaylarına ait olduğunu göstermeliyiz.

Önce $g(x, \eta, \mu)$ 'nin $X_3^{(2)}$ 'ye ait yani:

$$\|g(x, \eta, \mu)\|_{X_3^{(2)}} = \left(\sup_{0 < x < \infty} \int_0^\infty \|g(x, \eta, \mu)\|^2 d\eta \right)^{1/2} < \infty$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\|g(x, \eta, \mu)\| &\leq \|g_1(x, \eta, \mu)\| + \|g_2(x, \eta, \mu)\| + \|g_3(x, \eta, \mu)\| + \|g_4(x, \eta, \mu)\| \\
&\leq c \left\| 2\alpha^{-3} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|x-\eta|} \right\| + c \left\| 2\alpha^{-3} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|\eta+x|} \right\| \\
&= c \left[\left\| \alpha^{-3} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|x-\eta|} \right\| + \left\| \alpha^{-3} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|\eta+x|} \right\| \right] \\
&(\alpha^{-3} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|x-\eta|} \text{ ve } \alpha^{-3} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|\eta+x|} \text{ 'in spektral açılımından}) \\
&\leq c(\alpha_1(x) + \mu)^{-3/4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_1(x)+\mu)^{1/4}|x-\eta|} + c_1(\alpha_1(x) + \mu)^{-3/4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_1(x)+\mu)^{1/4}|\eta+x|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|g(x, \eta, \mu)\|^2 &\leq c e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_1(x)+\mu)^{1/4}|x-\eta|} \\
\int_0^\infty \|g(x, \eta, \mu)\|^2 d\eta &\leq c \int_0^\infty e^{-\sqrt{2}(\alpha_1(x)+\mu)^{1/4}|x-\eta|} d\eta \\
&= c \int_0^x e^{-\sqrt{2}(\alpha_1(x)+\mu)^{1/4}(x-\eta)} d\eta + c \int_x^\infty e^{+\sqrt{2}(\alpha_1(x)+\mu)^{1/4}(x-\eta)} d\eta \\
&= c \frac{1}{\sqrt{2}(\alpha_1(x) + \mu)^{1/4}} e^{-\sqrt{2}(\alpha_1(x)+\mu)^{1/4}(x-\eta)} \Big|_0^x - c \frac{1}{\sqrt{2}(\alpha_1(x) + \mu)^{1/4}} e^{\sqrt{2}(\alpha_1(x)+\mu)^{1/4}(x-\eta)} \Big|_x^\infty \\
&= \frac{c}{\sqrt{2}(\alpha_1(x) + \mu)^{1/4}} [1 - e^{-\sqrt{2}(\alpha_1(x)+\mu)^{1/4}x} - (-1)] \\
&= \frac{c}{\sqrt{2}(\alpha_1(x) + \mu)^{1/4}} [2 - e^{-\sqrt{2}(\alpha_1(x)+\mu)^{1/4}x}] < \frac{c}{(\alpha_1(x) + \mu)^{1/4}} \\
\|g(x, \eta, \mu)\|_{X_4^{(1,2)}} &= \left(\sup_x \int_0^\infty \|g(x, \eta, \mu)\|^2 d\eta \right)^{1/2} \leq \sup_x \frac{c}{\sqrt{\alpha_1(x) + \mu}} < c
\end{aligned}$$

Şimdi $g(x, \eta, \mu)$ 'nin $X_4^{(1/4)}$ uzayına ait yani

$$\sup_{0 < x < \infty} \int_0^\infty \|g(x, \eta, \mu) \cdot Q^{1/4}(\eta)\| d\eta < \infty$$

olduğunu gösterelim

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \|g(x, \eta, \mu) \cdot Q^{1/4}(\eta)\| d\eta &= \int_{|x-\eta| \leq 1} \|g(x, \eta, \mu) \cdot Q^{1/4}(\eta)\| d\eta + \int_{|x-\eta| > 1} \|g(x, \eta, \mu) \cdot Q^{1/4}(\eta)\| d\eta \\ &= a(x) + b(x) \end{aligned}$$

$|x-\eta| \leq 1$ iken $\|Q^{-1/4}(x) \cdot Q^{1/4}(\eta)\| \leq c$ koşulundan

$$\begin{aligned} a(x) &= \int_{|x-\eta| \leq 1} \|g(x, \eta, \mu) \cdot Q^{1/4}(x) \cdot Q^{-1/4}(x) \cdot Q^{1/4}(\eta)\| d\eta \\ &\leq \int_{|x-\eta| \leq 1} \|g(x, \eta, \mu) \cdot Q^{1/4}(x)\| \cdot \|Q^{-1/4}(x) \cdot Q^{1/4}(\eta)\| d\eta \\ &\leq c \cdot c_1 \int_{|x-\eta| \leq 1} \left\| \alpha^{-3} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x-\eta|} \cdot Q^{1/4}(x) \right\| d\eta \\ &\leq c \int_{|x-\eta| \leq 1} \left\| \alpha^{-3} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x-\eta|} \cdot Q^{1/4}(x) \right\| d\eta \\ \alpha^{-3} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x-\eta|} Q^{1/4}(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j(x) + \mu)^{-3/4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} (\alpha_j(x) + \mu)^{1/4} |x-\eta|} \alpha_j^{1/4}(x) (\cdot, e_j) e_j \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \left\| \alpha^{-3} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x-\eta|} Q^{1/4}(x) \right\| &= \sup_j (\alpha_j(x) + \mu)^{-3/4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} (\alpha_j(x) + \mu)^{1/4} |x-\eta|} \alpha_j^{1/4}(x) \\ &\leq \sup_j (\alpha_j(x) + \mu)^{-1/2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} (\alpha_j(x) + \mu)^{1/4} |x-\eta|} \\ &\leq (\alpha_1(x) + \mu)^{-1/2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} (\alpha_1(x) + \mu)^{1/4} |x-\eta|} \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\left\| \alpha^{-3} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |x-\eta|} Q^{1/4}(x) \right\| \leq (\alpha_1(x) + \mu)^{-1/2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} (\alpha_1(x) + \mu)^{1/4} |x-\eta|}$$

$$\begin{aligned}
a(x) &\leq c \int_{|x-\eta| \leq 1} (\alpha_1(x) + \mu)^{-1/2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_1(x) + \mu)^{1/4}|x-\eta|} d\eta \\
&= c \cdot (\alpha_1(x) + \mu)^{-1/2} \int_{|x-\eta| \leq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_1(x) + \mu)^{1/4}|x-\eta|} d\eta \\
&\leq c(\alpha_1(x) + \mu)^{-1/2}
\end{aligned}$$

dır.

Yani $\sup_{0 \leq x < \infty} a(x) < \infty$ elde edilir.

$$b(x) = \int_{|x-\eta| > 1} \|g_1(x, \eta, \mu) Q^{1/4}(\eta)\| d\eta = \int_{|x-\eta| > 1} \left\| \alpha^{-3} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|x-\eta|} Q^{1/4}(\eta) \right\| d\eta$$

$$(|x-\eta| > 1 \text{ iken } \|Q(\eta) e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\eta)Q^{1/4}(x)}\| < c \text{ koşulundan})$$

$$\begin{aligned}
&\int_{|x-\eta| > 1} \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|x-\eta|} Q^{1/4}(\eta) \right\| d\eta \\
&= \int_{|x-\eta| > 1} \left\| e^{\frac{\sqrt{2}}{4}Q^{1/4}(x)|x-\eta|} \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}Q^{1/4}(x)|x-\eta|} \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(Q(x)+\mu)^{1/4}|x-\eta|} \cdot Q^{-1}(\eta) \cdot Q(\eta) \cdot Q^{1/4}(\eta) \right\| d\eta \\
&\leq \int_{|x-\eta| > 1} \left\| e^{\frac{\sqrt{2}}{4}Q^{1/4}(x)|x-\eta| - \frac{\sqrt{2}}{2}(Q(x)+\mu)^{1/4}|x-\eta|} \cdot Q^{-1}(\eta) \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}Q^{1/4}(x)|x-\eta|} \cdot Q(\eta) \right\| d\eta \\
&\leq c \int_{|x-\eta| > 1} \left\| e^{\frac{\sqrt{2}}{4}Q^{1/4}(x)|x-\eta| - \frac{\sqrt{2}}{2}(Q(x)+\mu)^{1/4}|x-\eta|} \right\| d\eta \quad \Rightarrow \quad \left\| e^{-3/4} \right\| d\eta \\
&\leq c \int_{|x-\eta| > 1} \left\| e^{\frac{\sqrt{2}}{4}Q^{1/4}(x)|x-\eta| - \frac{\sqrt{2}}{2}(Q(x)+\mu)^{1/4}|x-\eta|} \right\| d\eta \\
&= \int_{|x-\eta| > 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}|x-\eta|} d\eta < c \text{ olduğundan} \quad \sup_{0 \leq x < \infty} b(x) < \infty \text{ olur.}
\end{aligned}$$

Böylece aşağıdaki lemma ispatlanmış olur.

LEMMA 3.3: Eğer $Q(x)$ operatör fonksiyonu 1) 5) 6)' ya ek olarak $\|Q^{1/4}(x) Q^{-1/4}(\eta)\| \leq c$, $c = sbt$ koşulunu sağlıyorsa o zaman $g(x, \eta, \mu)$ operatör fonksiyonu $X_4^{(1/4)}$ uzayına aittir.

3.2 GREEN FONKSİYONUNUN TÜREVLERİ

$G(x, \eta, \mu)$ operatör fonksiyonunun $\frac{\partial^j G(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^j}$ ($j=1,2,3$) türevlerinin varolduğunu gösterelim. (3.7) eşitliğinin her iki yanının η 'ya göre formal olarak türevlerini alırsak,

$$\frac{\partial^j G(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^j} = \frac{\partial^j g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^j} - \int_0^\infty g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial^j G(\xi, \eta, \mu)}{\partial \eta^j} d\xi \quad (3.32)$$

olur.

$$M_j(x, \eta, \mu) = \frac{\partial^j g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^j} - \int_0^\infty g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] M_j(\xi, \eta, \mu) d\xi \quad (3.33)$$

İntegral denklemini veya

$$M_j(x, \eta, \mu) = \frac{\partial^j g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^j} - N M_j(\xi, \eta, \mu) \quad (j=1,2,3)$$

denklemini gözönüne alalım.

(3.33) integral denklemini $X_3^{(p)}$ ($p \geq 1$) Banach uzayında inceleyelim. Daha önceden $X_3^{(p)}$ 'de ($p \geq 1$ için) $\mu > 0$ 'ın büyük değerlerinde N 'nin büzen operatör olduğu gösterilmiştir. (Lemma 3.2). Bundan dolayı, $\frac{\partial^j g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^j}$ ($j=1,2,3$) operatör fonksiyonun $X_3^{(p)}$ uzayına ait olduğunu gösterirsek (3.33) denkleminin $\mu > 0$ büyük değerlerinde $X_3^{(p)}$ uzayında tek çözüme sahip olduğunu göstermiş oluruz.

$$\frac{\partial^j g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^j} = \frac{\partial^j g_1}{\partial \eta^j} + \frac{\partial^j g_2}{\partial \eta^j} + \frac{\partial^j g_3}{\partial \eta^j} + \frac{\partial^j g_4}{\partial \eta^j}$$

olduğunu gözönüne alarak, $\frac{\partial^j g_1}{\partial \eta^j}$ operatör fonksiyonunun $x_3^{(p)}$ uzayına ait olduğunu gösterelim. (diğer terimlerin de bu uzaya ait olduğu benzer şekilde gösterilir)

$$\frac{\partial g_1}{\partial \eta} = \begin{cases} \frac{1}{4} \alpha^{-2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta)} \cdot \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) - \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) \right) & x > \eta \\ -\frac{1}{4} \alpha^{-2} e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta)} \cdot \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) + \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) \right) & x < \eta \end{cases}$$

$$= \frac{1}{4} \alpha^{-2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha|x-\eta|} \cdot \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) - \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) \right)$$

$$\left\| \frac{\partial g_1}{\partial \eta} \right\|_{x_3^{(p)}} = \sup_x \int_x^\infty \left\| \frac{1}{4} \alpha^{-2} e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta)} \cdot \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) - \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) \right) \right\|^p d\eta$$

$$+ \sup_x \int_0^x \left\| -\frac{1}{4} \alpha^{-2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta)} \cdot \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) + \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) \right) \right\|^p d\eta$$

$$\left\| \frac{\partial g_1}{\partial \eta} \right\|_{x_3^{(p)}} = \left(\sup_{0 \leq x < \infty} \int_0^\infty \left\| \frac{\partial g_1(x, \eta, \mu)}{\partial \eta} \right\|^p d\eta \right)^{1/p} \leq \sup_{0 \leq x < \infty} \frac{C}{\alpha_1(x) + \mu} < \infty$$

$\frac{\partial g_1(x, \eta, \mu)}{\partial \eta}$ 'nin ifadesinden bir kez daha türev alırsak,

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial \eta^2} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{4} \alpha^{-1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta)} \cdot \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) - \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) \right) & x > \eta \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \alpha^{-1} e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta)} \cdot \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) + \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) \right) & x < \eta \end{cases}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \alpha^{-1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha|x-\eta|} \cdot \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha|x-\eta| - \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha|x-\eta| \right)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 g_1}{\partial \eta^2} \right\|_{x_3^{(p)}}^p &= \int_x^\infty \left\| \frac{\sqrt{2}}{4} \alpha^{-1} e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta)} \cdot \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) + \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) \right) \right\|^p d\eta \\ &+ \int_0^x \left\| \frac{\sqrt{2}}{4} \alpha^{-1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta)} \cdot \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) - \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) \right) \right\|^p d\eta \leq C \end{aligned}$$

yani

$$\left\| \frac{\partial^2 g_1}{\partial \eta^2} \right\|_{x_3^{(p)}}^p \leq C$$

dır.

$$\frac{\partial^3 g_1}{\partial \eta^3} = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta)} \cdot \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) - \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) \right) & x > \eta \\ -\frac{1}{4} e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta)} \cdot \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) + \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) \right) & x < \eta \end{cases}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^3 g_1}{\partial \eta^3} \right\|_{x_3^{(p)}}^p &= \int_x^\infty \left\| -\frac{1}{4} e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta)} \cdot \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) + \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) \right) \right\|^p d\eta \\ &+ \int_0^x \left\| \frac{1}{4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta)} \cdot \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) - \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) \right) \right\|^p d\eta \leq C \end{aligned}$$

veya

$$\left\| \frac{\partial^3 g_1}{\partial \eta^3} \right\|_{x_3^{(p)}}^p \leq C$$

dır. Böylece $\frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3} \in x_3^{(p)}$ ve bundan dolayı (Lemma 3.2'den) (3.33) denkleminin $x_3^{(p)}$ 'ye

ait tek çözüme sahip olduğu gösterilmiş olur.

(3.33) denkleminde $j=1$ alalım:

$$M_1(x, \eta, \mu) = \frac{\partial g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta} - \int_0^\infty g(x, \xi, \mu)[Q(\xi) - Q(x)]M_1(\xi, \eta, \mu)d\xi \quad (3.34)$$

(3.34) eşitliğini $[\eta, \infty)$ aralığı üzere integralleyelim.

$$\int_\eta^\infty M_1(x, s, \mu)ds = \int_\eta^\infty \frac{\partial g(x, s, \mu)}{\partial s} ds - \int_0^\infty g(x, \xi, \mu)[Q(\xi) - Q(x)] \left(\int_\eta^\infty M_1(\xi, s, \mu)ds \right) d\xi$$

veya

$$\int_\eta^\infty M_1(x, s, \mu)ds = -g(x, \eta, \mu) - \int_0^\infty g(x, \xi, \mu)[Q(\xi) - Q(x)] \left(\int_\eta^\infty M_1(\xi, s, \mu)ds \right) d\xi$$

dır. Bu denklem, (3.7) denklemi ile aynıdır. (3.7) denklemi tek çözüme sahip olduğundan dolayı;

$$G(x, \eta, \mu) = - \int_\eta^\infty M_1(x, s, \mu)ds \quad (3.35)$$

olur.

Eğer biz $M_1(x, s, \mu)$ operatör fonksiyonunun s 'e göre sürekli olduğunu gösterirsek $G(x, \eta, \mu)$ 'nin η 'ya göre türetilbilir olduğunu göstermiş oluruz ve (3.35)'den,

$$\frac{\partial G(x, \eta, \mu)}{\partial \eta} = M_1(x, \eta, \mu)$$

olur. Şimdi $M_1(x, \eta, \mu)$ 'nin η 'ya göre sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için (3.34) denklemini aşağıdaki şekilde yazalım.

$$\begin{aligned} M_1(x, \eta, \mu) - \frac{\partial g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta} &= - \int_0^\infty g(x, \xi, \mu)[Q(\xi) - Q(x)] \left[M_1(\xi, \eta, \mu) d\xi - \frac{\partial g(\xi, \eta, \mu)}{\partial \eta} d\xi \right] \\ &\quad - \int_0^\infty g(x, \xi, \mu)[Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial g(\xi, \eta, \mu)}{\partial \eta} d\xi \end{aligned} \quad (3.36)$$

Eğer,

$$L(x, \eta, \mu) = M_1(x, \eta, \mu) - \frac{\partial g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta} \quad (3.37)$$

ve

$$l(x, \eta, \mu) = - \int_0^{\infty} g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial g(\xi, \eta, \mu)}{\partial \eta} d\xi \quad (3.38)$$

dersek o zaman (3.36) denklemini

$$L(x, \eta, \mu) = l(x, \eta, \mu) - \int_0^{\infty} g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] L(\xi, \eta, \mu) d\xi \quad (3.39)$$

şeklinde yazılır.

$L(x, \eta, \mu)$ operatör fonksiyonunun η 'ya göre sürekliliğini gösterelim. Bunun için (3.39) integral denklemini X_5 uzayında gözönüne alalım. Bir daha hatırlatalım ki, X_5 uzayı H' da tanımlanmış ve

$$\|A\|_{X_5} = \sup_{0 \leq x < \infty} \sup_{0 \leq \eta < \infty} \|A(x, \eta)\| < \infty$$

özelliğine sahip $A(x, \eta)$ ($0 \leq x, \eta < \infty$) lineer sınırlı operatör değerli fonksiyonlardan ibarettir.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial g(x, \eta + h, \mu)}{\partial \eta} - \frac{\partial g}{\partial \eta}(x, \eta, \mu) \right\|_{X_5} = 0 \quad (3.40)$$

olduğunu gösterirsek o zaman $\frac{\partial g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta} \in X_5$, N operatörü X_5 'de büzen olduğundan

ve $l(x, \eta, \mu)$ ifadesinden $l(x, \eta, \mu) \in X_5$ ve $\lim_{h \rightarrow 0} \|l(x, \eta + h; \mu) - l(x, \eta; \mu)\|_{X_5} = 0$

sonucu çıkar. (3.39) denklemini X_5 uzayında gözönüne alarak

$L(x, \eta; \mu) = l(x, \eta; \mu) - NL(x, \eta, \mu)$ denklemini

$$L(x, \eta; \mu) = (I + N)^{-1} l(x, \eta; \mu) \quad (3.41)$$

şeklinde yazabiliriz.



Biz son ifadede $\mu > 0$ büyük değerlerinde N operatörünün X_5 uzayında büzen operatör (Lemma 3.2) olduğunu dikkate aldık. (3.41)'den

$$\|L(x, \eta; \mu)\|_{X_5} \leq \|(I + N)^{-1}\|_{X_5} \cdot \|l(x, \eta; \mu)\|_{X_5} \quad (3.42)$$

$$\|(I + N)^{-1}\|_{X_5} = C \text{ dersek son eşitsizlik}$$

$$\|L(x, \eta; \mu)\|_{X_5} \leq C \cdot \|l(x, \eta; \mu)\|_{X_5}$$

şeklini alır. Şimdi

$$\frac{\partial g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta} \in X_5 \quad \text{ve} \quad \lim_{h \downarrow 0} \left\| \frac{\partial g}{\partial \eta}(x, \eta + h, \mu) - \frac{\partial g}{\partial \eta}(x, \eta, \mu) \right\|_{X_5}$$

olduğunu gösterelim.

$$\frac{\partial^2 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^2} \text{ ifadesinden bu operatör fonksiyonun } X_5 \text{ uzayına ait, yani}$$

$$\left\| \frac{\partial^2 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^2} \right\|_{X_5} \leq C \text{ (c:const) olduğu kolayca gözükür. } h \geq 0 \text{ olmak üzere}$$

$$\frac{\partial g(x, \eta + h; \mu)}{\partial \eta} - \frac{\partial g(x, \eta; \mu)}{\partial \eta} = \int_{\eta}^{\eta+h} \frac{\partial^2 g(x, \eta; \mu)}{\partial \eta^2} d\eta$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial g(x, \eta + h; \mu)}{\partial \eta} - \frac{\partial g(x, \eta; \mu)}{\partial \eta} \right\| &\leq \int_{\eta}^{\eta+h} \left\| \frac{\partial^2 g(x, \eta; \mu)}{\partial \eta^2} \right\| d\eta, \\ &\leq C \int_{\eta}^{\eta+h} d\eta = ch \end{aligned}$$

yani

$$\left\| \frac{\partial g(x, \eta + h; \mu)}{\partial \eta} - \frac{\partial g(x, \eta; \mu)}{\partial \eta} \right\| \leq ch$$

dır. Böylece

$$\lim_{h \downarrow 0} \left\| \frac{\partial g(x, \eta + h; \mu)}{\partial \eta} - \frac{\partial g(x, \eta; \mu)}{\partial \eta} \right\|_{X_s} = 0$$

olur (Burada $h \downarrow 0$ yazılışı h 'nin azalarak sıfıra gittiğini gösterir). Bununla

$$l(x, \eta, \mu) \in X_s \text{ ve } \lim_{h \downarrow 0} \|l(x, \eta + h; \mu) - l(x, \eta; \mu)\|_{X_s} = 0$$

olduğunu göstermiş olduk.

(3.42)'e göre $h \geq 0$ iken

$$\|L(x, \eta + h; \mu) - L(x, \eta; \mu)\|_{X_s} \leq \|(I + N)^{-1}\|_{X_s} \cdot \|l(x, \eta + h; \mu) - l(x, \eta; \mu)\|_{X_s}$$

dır. Buradan

$$\lim_{h \downarrow 0} \|L(x, \eta + h; \mu) - L(x, \eta; \mu)\|_{X_s} \leq \|(I + N)^{-1}\|_{X_s} \cdot \lim_{h \downarrow 0} \|l(x, \eta + h; \mu) - l(x, \eta; \mu)\|_{X_s} = 0$$

yani

$$\lim_{h \downarrow 0} \|L(x, \eta + h; \mu) - L(x, \eta; \mu)\|_{X_s} = 0 \quad (3.43)$$

olur.

Diğer yandan

$$\|L(x, \eta + h; \mu) - L(x, \eta; \mu)\| \leq \|L(x, \eta + h; \mu) - L(x, \eta; \mu)\|_{X_s}$$

olduğundan H 'da dönüşüm yapan $L(x, \eta; \mu)$ operatör fonksiyonunun η değişkenine göre $[0, \infty)$ aralığında düzgün sürekliliği görülür.

(3.37)'deki $M_1(x, \eta, \mu)$ ifadesinden

$$M_1(x, \eta, \mu) = \frac{\partial g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta} + L(x, \eta, \mu)$$

olur. Buradan da $\frac{\partial g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta}$ ve $L(x, \eta, \mu)$ operatör fonksiyonları η 'ya göre sürekli

olduğunda, $M_1(x, \eta, \mu)$ operatör fonksiyonunda sürekliliği açıktır (H 'da).

$G(x, \eta; \mu) = - \int_{-\eta}^{\infty} M_1(x, \eta; \mu) d\eta$ eşitliğinden $G(x, \eta; \mu)$ 'nın η 'ya göre türetilebildiği

ve $\frac{\partial G(x, \eta, \mu)}{\partial \eta} = M_1(x, \eta, \mu)$ olduğu görülür.

(3.33) denkleminde $M_1(x, \eta; \mu)$ 'nün yerinde $\frac{\partial G(x, \eta, \mu)}{\partial \eta}$ 'yı yazalım:

$$\frac{\partial G(x, \eta, \mu)}{\partial \eta} = \frac{\partial g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta} - \int_0^{\infty} g(x, \xi; \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial G(\xi, \eta, \mu)}{\partial \xi} d\xi.$$

Formal olarak bu eşitliğin her iki yanının η 'ya göre türevini alalım. O zaman

$$\frac{\partial^2 G(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^2} - \int_0^{\infty} g(x, \xi; \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial^2 G(\xi, \eta, \mu)}{\partial \eta^2} d\xi \quad (3.44)$$

olur. Aşağıdaki

$$M_2(x, \eta, \mu) = \frac{\partial^2 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^2} - \int_0^{\infty} g(x, \xi; \mu) [Q(\xi) - Q(x)] M_2(\xi, \eta, \mu) d\xi$$

denklemini gözönüne alalım. Bu denklem görüldüğü gibi, $M_1(x, \eta, \mu)$ için olan

denklemdaki $\frac{\partial g}{\partial \eta}$ 'nın yerinde $\frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2}$ olmasıdır. Diğer yandan $\frac{\partial^2 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^2}$ operatör

fonksiyonu η 'ya göre süreklidir. Bundan dolayı $M_2(x, \eta, \mu)$ operatör fonksiyonu da η 'ya göre sürekli olacaktır. Bununla $M_1(x, \eta, \mu)$ için yaptığımız işlemleri $M_2(x, \eta, \mu)$ için

yazarsak $\frac{\partial^2 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^2}$ operatör fonksiyonunun η 'ya göre sürekli olduğunu elde ederiz.

Formal olarak (3.44) eşitliğinin her iki yanını η 'ya göre türetelim,

$$\frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3} = \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3} - \int_0^{\infty} g(x, \xi; \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3}(\xi, \eta, \mu) d\xi \quad (3.45)$$

ve

$$M_3(x, \eta, \mu) = \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3} - \int_0^{\infty} g(x, \xi; \mu) [Q(\xi) - Q(x)] M_3(x, \eta, \mu) d\xi \quad (3.46)$$

integral denklemini gözönüne alalım. $\frac{\partial^3 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3}$ nün ifadesinden

$$\left\| \frac{\partial^3 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3} \right\| \leq C \quad \text{dir. Bu ise} \quad \frac{\partial^3 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3} \in X_5 \quad \text{olduğunu gösterir.}$$

Böylece μ 'nün büyük değerlerinde (3.46) denklemi X_5 'de tek çözüme sahiptir. (3.46)'yı (η, ∞) aralığında η 'ya göre integralleyelim.

$$\int_{\eta}^{\infty} M_3(x, \eta, \mu) d\eta = -\frac{\partial^2 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^2} - \int_0^{\infty} g(x, \xi; \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \left(\int_{\eta}^{\infty} M_3(\xi, \eta, \mu) d\eta \right) d\xi \quad (3.47)$$

(3.47) denklemi (3.45) denklemdir. (3.45) tek çözüme sahip olduğundan

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} = - \int_{\eta}^{\infty} M_3(x, \eta, \mu) d\eta$$

olur. Eğer biz $M_3(x, \eta, \mu)$ operatör fonksiyonunun η 'ya göre ($\eta \neq x$) sürekli olduğunu gösterirsek, $\frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3}$ operatör fonksiyonunun da η 'ya göre ($\eta \neq x$) türeve sahip olduğunu elde etmiş oluruz. Birinci türevde olduğu gibi

$$L(x, \eta, \mu) = l(x, \eta, \mu) - \int_0^{\infty} g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] L(\xi, \eta, \mu) d\xi \quad (3.48)$$

dır. Burada

$$L(x, \eta, \mu) = M_3(x, \eta, \mu) - \frac{\partial^3 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3} \quad (3.49)$$

$$l(x, \eta, \mu) = - \int_0^{\infty} g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial^3 g(\xi, \eta, \mu)}{\partial \eta^3} d\xi \quad (3.50)$$

dır.

$L(x, \eta; \mu)$ operatör fonksiyonunun η 'ya göre sürekliliğini inceleyelim. (3.48)'den

$$(I+N)L=l$$

veya

$$L=(I+N)^{-1}l$$

yazabiliriz. Eğer biz $l(x, \eta, \mu)$ operatör fonksiyonu için

$$\lim_{h \downarrow 0} \|l(x, \eta + h; \mu) - l(x, \eta; \mu)\|_{x_s} = 0 \quad (3.51)$$

gösterirsek, $\|(I + N)^{-1}\|_{x_s} \leq C$ olduğundan $\lim_{h \downarrow 0} \|L(x, \eta + h; \mu) - L(x, \eta; \mu)\|_{x_s} = 0$ elde ederiz ki, bu da $L(x, \eta; \mu)$ operatör fonksiyonunun H uzayında η 'ya göre sürekli olduğu sonucunu verir.

Şimdi (3.51)'i ispatlayalım. Bunun için aşağıdaki Lemma'yı ispatlamalıyız.

LEMMA 3.4: Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı için $0 \leq h \leq \delta$ olduğunda

$\|l(x, \eta + h; \mu) - l(x, \eta; \mu)\|_{x_s} < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır.

İSPAT: Sabit tutulmuş $\delta > 0$ sayısı için $\xi > \delta$ olmak üzere $l(x, \eta + h; \mu) - l(x, \eta; \mu)$ farkını aşağıdaki şekilde yazalım.

$$\begin{aligned} l(x, \eta; \mu) - l(x, \eta + h; \mu) &= \int_0^{\eta - \xi} g(\xi, \eta, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \left[\frac{\partial^3 g(\xi, \eta + h, \mu)}{\partial \eta^3} - \frac{\partial^3 g(\xi, \eta, \mu)}{\partial \eta^3} \right] d\xi \\ &+ \int_{\eta - \xi}^{\eta + \xi} g(x, \eta, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \left[\frac{\partial^3 g(\xi, \eta + h, \mu)}{\partial \eta^3} - \frac{\partial^3 g(\xi, \eta, \mu)}{\partial \eta^3} \right] d\xi \\ &+ \int_{\eta + \xi}^{\infty} g(x, \eta, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \left[\frac{\partial^3 g(\xi, \eta + h, \mu)}{\partial \eta^3} - \frac{\partial^3 g(\xi, \eta, \mu)}{\partial \eta^3} \right] d\xi = J_1 + J_2 + J_3 \end{aligned}$$

Şimdi $\|J_1\|_{x_s}, \|J_2\|_{x_s}, \|J_3\|_{x_s}$ ifadelerini $h \downarrow 0$ iken sınırlandıralım. $\|J_1\|_{x_s}$ 'i gözönüne alalım. J_1 'de $\xi < s - \zeta$ veya $s - \xi < \zeta$ varsayalım.

$$\frac{\partial^3 g(\xi, \eta + h, \mu)}{\partial \eta^3} - \frac{\partial^3 g(\xi, \eta, \mu)}{\partial \eta^3} = \int_{\eta}^{\eta + h} \frac{\partial^4 g(\xi, s, \mu)}{\partial s^4} ds$$

olduğu açıktır. Buradan

$$\left\| \frac{\partial^3 g(\xi, \eta + h, \mu)}{\partial \eta^3} - \frac{\partial^3 g(\xi, \eta, \mu)}{\partial \eta^3} \right\| = \left\| \int_{\eta}^{\eta + h} \frac{\partial^4 g(\xi, s, \mu)}{\partial s^4} ds \right\| \leq \left\| \frac{\partial^4 g_1(\xi, s, \mu)}{\partial \eta^4} \right\|$$

dir. Spektral açılım formülünü kullanarak

$$\left\| \frac{\partial^4 g(\xi, s, \mu)}{\partial \eta^4} \right\| = \begin{cases} \sup_j (\alpha_j(s) + \mu)^{1/4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_j(s) + \mu)^{1/4}(s-\xi)} \cdot \left| \cos \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_j(s) + \mu)^{1/4}(s-\xi) - \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_j(s) + \mu)^{1/4}(s-\xi) \right|, & s > \xi \\ \sup_j (\alpha_j(s) + \mu)^{1/4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_j(s) + \mu)^{1/4}(s-\xi)} \cdot \left| \cos \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_j(s) + \mu)^{1/4}(s-\xi) + \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_j(s) + \mu)^{1/4}(s-\xi) \right|, & s < \xi \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} \frac{1}{s-\xi} \sup_j (s-\xi)(\alpha_j(s) + \mu)^{1/4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_j(s) + \mu)^{1/4}(s-\xi)} \cdot \left| \cos \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_j(s) + \mu)^{1/4}(s-\xi) - \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_j(s) + \mu)^{1/4}(s-\xi) \right|, & s > \xi \\ \frac{1}{s-\xi} \sup_j (\alpha_j(s) + \mu)^{1/4} (s-\xi) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_j(s) + \mu)^{1/4}(s-\xi)} \cdot \left| \cos \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_j(s) + \mu)^{1/4}(s-\xi) + \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_j(s) + \mu)^{1/4}(s-\xi) \right|, & s < \xi \end{cases}$$

$$\leq \frac{2}{|s-\xi|} = \frac{2}{\zeta}$$

elde ederiz. Böylece

$$\left\| \frac{\partial^3 g(x, \eta + h, \mu)}{\partial \eta^3} - \frac{\partial^3 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3} \right\| \leq 2 \int_{\eta}^{\eta+h} \frac{ds}{\zeta} = \frac{2h}{\zeta} < \frac{2\delta}{\zeta}$$

dir. Buradan Lemma 3.1'deki işlemlere benzer işlemler yaparsak;

$$\|J_1\|_{X_s} \leq \frac{C \cdot \delta}{\zeta}$$

elde ederiz.

$\|J_2\|_{X_s}$ ifadesini sınırlandıralım.

$$\|J_2\|_{X_s} \leq \sup_{0 < x < \infty} \sup_{0 < \eta < \infty} \int_{\eta-\zeta}^{\eta+\zeta} \|g(x, \xi, \mu)[Q(\xi) - Q(x)]\|_H d\xi$$

dir. Burada eğer

$$|x - \eta| > 1 \text{ ise}$$

$$|x - \xi| = |(x - \eta) + (\eta - \xi)| > 1 - \zeta$$

dır.

$$\left\| Q(\xi) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}|x-\xi|Q^{\frac{1}{2}}(x)} \right\| < C \text{ koşulundan } \|g(x, \xi, \mu)[Q(\xi) - Q(x)]\| \leq C \text{ bulunur.}$$

$$|x - \eta| \leq 1 \text{ ise}$$

$$|x - \xi| > 1 + \zeta$$

dır.

$$\|g(x, \xi, \mu)[Q(\xi) - Q(x)]\| \leq C|x - \zeta|^{-r} \quad (0 < r < 1)$$

$$\begin{aligned} \|J_2\|_{X_s} &\leq C \left| \int_{\eta-\zeta}^{\eta+\zeta} |x - \zeta|^{-r} d\xi \right| < C \left| \int_{\eta-\zeta}^{\eta+\zeta} 1 + \zeta|^{-r} d\xi \right| \\ &= C(1 + \zeta)^{-r} \int_{\eta-\zeta}^{\eta+\zeta} d\xi = 2C(1 + \zeta)^{1-r} \end{aligned}$$

(Levitan 1968) çalışmasında olduğu gibi benzer işlemlerle

$$\|J_2\|_{X_s} < C\zeta^{1-r}$$

olduğu bulunur. Böylece;

$$\|l(x, \eta + h; \mu) - l(x, \eta; \mu)\|_{X_s} \leq C \left(\zeta^{1-r} + \frac{\delta}{\zeta - \delta} \right) \quad (3.52)$$

dır. Buradan $\varepsilon > 0$ keyfi sayı olduğundan ζ 'yi $C\zeta^{1-r} < \frac{\varepsilon}{2}$ eşitsizliğinden ve $\delta > 0$ sayısını

$C \frac{\delta}{\zeta - \delta} < \frac{\varepsilon}{2}$ olmak üzere seçersek, (3.52)'den $\|l(x, \eta + h; \mu) - l(x, \eta; \mu)\|_{X_s} < \varepsilon$ elde edilir. Bununla $l(x, \eta; \mu)$ operatör fonksiyonunun η değişkenine göre sürekliliği ispatlanmış olur.

$L(x, \eta, \mu) = (I + N)^{-1}l(x, \eta; \mu)$ ve $\|(I + N)^{-1}\|_{X_s} < C$ olduğundan $L(x, \eta, \mu)$ operatör fonksiyonu da η 'ya göre süreklidir.

$L(x, \eta, \mu)$ (3.49) ifadesinden $M_3(x, \eta, \mu)$ 'nün η 'ya göre süreklilik noktaları $\frac{\partial^3 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3}$ operatör fonksiyonunun η 'ya göre süreklilik noktaları ile aynıdır.

$\frac{\partial^3 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3}$ operatör fonksiyonunun η 'nın x 'den farklı değerlerinde sürekli olduğunu gösterirsek $M_3(x, \eta, \mu)$ 'nin de η ($\eta \neq x$) değişkenine göre sürekli olduğunu göstermiş oluruz.

$\eta < x$ olduğunu varsayalım ve $x - \eta = t$ diyelim. $|h|$ küçük sayı olsun.

$$\left\| \frac{\partial^3 g(x, \eta + h, \mu)}{\partial \eta^3} - \frac{\partial^3 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3} \right\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad (3.53)$$

olduğunu gösterelim. Önce $\frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3}$ ifadesindeki $\frac{\partial^3 g_1(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3}$ teriminin (3.53) koşulunu sağladığını gösterelim.

$g_1(x, \eta, \mu)$ 'nin ifadesinden

$$\frac{\partial^3 g_1}{\partial \eta^3} = \frac{1}{4} \begin{cases} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{Q(x)+\mu}(x-\eta)} \cdot \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) - \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) \right), & x > \eta \\ -e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{Q(x)+\mu}(x-\eta)} \cdot \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) - \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) \right), & x < \eta \end{cases}$$

$\frac{\partial^3 g_1(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3}$ 'ün η 'ya göre sürekliliğini göstermek için bu ifadenin içerdiği her bir

terimin sürekli olduğunu göstermemiz yeterlidir. Önce $e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta)} \cdot \cos \alpha(x-\eta)$ 'nin η 'ya göre sürekliliğini gösterelim. Bunun için,

$$\left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta+h)} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta+h) - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta)} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) \right\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

olduğunu göstermeliyiz.

Spektral açılım formülünü kullanarak



$$\begin{aligned}
& \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha(x-\eta+h)} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta+h) - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha(x-\eta)} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) \right\| \\
&= \sup_{\|f\|=1} \left\| \left(e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha(t+h)} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(t+h) - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha(x-\eta)} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha t \right) f, f \right\| \\
&= \sup_{\|f\|=1} \left| \int_0^\infty e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+\mu)^{1/4}(t+h)} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} (\lambda+\mu)^{1/4} (t+h) - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+\mu)t} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} (\lambda+\mu)^{1/4} t d(E_\lambda f, f) \right| \\
&\leq \sup_{\|f\|=1} \int_0^\infty \left| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+\mu)^{1/4}(t+h)} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} (\lambda+\mu)^{1/4} (t+h) - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+\mu)t} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} (\lambda+\mu)^{1/4} t \right| d(E_\lambda f, f) \\
&\leq \sup_{\|f\|=1} \int_0^N \left| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+\mu)^{1/4}(t+h)} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} (\lambda+\mu)^{1/4} (t+h) - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+\mu)t} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} (\lambda+\mu)^{1/4} t \right| d(E_\lambda f, f) \\
&\quad + \sup_{\|f\|=1} \int_N^\infty \left| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+\mu)^{1/4}(t+h)} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} (\lambda+\mu)^{1/4} (t+h) - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+\mu)t} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} (\lambda+\mu)^{1/4} t \right| d(E_\lambda f, f) \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

yazalım.

$\varepsilon > 0$ herhangi sayı ve $|h| < t$ olsun. N sayısını öyle büyük seçelim ki, $\lambda + \mu > N$ iken

$$\left| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+\mu)^{1/4}(t+h)} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} (\lambda+\mu)^{1/4} (t+h) - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+\mu)t} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} (\lambda+\mu)^{1/4} t \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

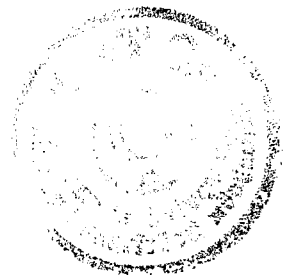
olsun. Böylece,

$$I_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \sup_{\|f\|=1} \int_0^\infty d(E_\lambda f, f) \leq \frac{\varepsilon}{2} \left[\sup_{\|f\|=1} (E_\infty f, f) - (E_1 f, f) \right]$$

veya

$$I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur.



I_2 'de seçilmiş olan N 'yi I_1 'de gözönüne alalım. O zaman $\lambda+\mu < N$ iken $h \rightarrow 0$ olduğunda

$$\begin{aligned}\gamma &= \left| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+\mu)^{1/4}(t+h)} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+\mu)^{1/4}(t+h) - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+\mu)^{1/4}t} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+\mu)^{1/4}t \right| \\ &= e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+\mu)^{1/4}t} \left| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+\mu)^{1/4}h} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+\mu)^{1/4}(t+h) - \cos \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+\mu)^{1/4}t \right| \rightarrow 0\end{aligned}$$

olur. Buradan $|h|$ 'nin küçük değerlerinde $\gamma < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Buradan I_2 'de olduğu gibi

$I_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ elde edilir. Böylece $|h|$ 'nin küçük değerlerinde $I_1 + I_2 < \varepsilon$ dur. Bu ise $\frac{\partial^3 g_1}{\partial \eta^3}$

operatör fonksiyonunun η ($\eta < x$) değişkenine göre sürekli olduğunu gösterir. $\eta > x$ iken

η değişkenine göre $\frac{\partial^3 g_1}{\partial \eta^3}$ 'ün sürekliliği benzer şekilde gösterilir. Bununla $\frac{\partial^3 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3}$

operatör fonksiyonunun η ($\eta \neq x$) değişkenine göre sürekliliği gösterilmiş olur. Böylece

$M_3(x, \eta, \mu)$ 'nün $\eta \neq x$ değerlerinde η 'ya göre sürekliliği ispatlandı. $\frac{\partial^2 G(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^2}$ 'nin

$M_3(x, \eta, \mu)$ ile integral ifadesinden $\eta \neq x$ iken $\frac{\partial^3 G(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3}$ türevinin varlığı ve

$$\frac{\partial^3 G(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3} = M_3(x, \eta, \mu) \quad (\eta \neq x) \text{ elde edilir.}$$

Şimdi $\eta = x$ değerlerinde $\frac{\partial^3 G(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3}$ 'yi inceleyelim:

$$M_3(x, \eta, \mu) - \frac{\partial^3 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3} = \frac{\partial^3 G(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3} - \frac{\partial^3 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3}$$

operatör fonksiyonu η 'ya göre sürekli olduğundan dolayı $\frac{\partial^3 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3}$ 'ün $\eta = x$

noktasındaki sıçrayışı (varsa) $\frac{\partial^3 G(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3}$ operatör fonksiyonunun sıçrayışı ile aynıdır.

Bundan dolayı $\frac{\partial^3 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3}$ $\eta=x$ değerinde sıçrayışa sahip olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$\frac{\partial^3 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3}$ 'ün içerdği son iki toplamın η 'nın bütün değerlerinde ($\eta=x$ de dahil olmak üzere) sürekli olduğu kolayca görülür. Bundan dolayı $\frac{\partial^3 g_1(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3}$ operatör fonksiyonunun $\eta=x$ değerinde sıçrayışını inceleyelim. $\frac{\partial^3 g_1(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3}$ 'ün içerdği birinci toplamı $g_1'(x, \eta, \mu)$ ile gösterelim.

$$\begin{aligned} g_1'(x, x+h, \mu) - g_1'(x, x-h, \mu) &= -\frac{1}{4} e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-x-h)} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-x-h) \\ &\quad - \frac{1}{4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-x+h)} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-x+h) \\ &= -\frac{1}{4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} h \alpha} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha h - \frac{1}{4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} h \alpha} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha h \\ &= -\frac{1}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} h \alpha} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha h \end{aligned}$$

Buradan

$$\left[g_1'(x, \eta, \mu) \Big|_{\eta=x+h} - g_1'(x, \eta, \mu) \Big|_{\eta=x-h} - \frac{I}{2} \right] \alpha^{-4} = -\frac{1}{2} \left[e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} h \alpha} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha h - I \right] \alpha^{-4}$$

olur. Son ifadeye $\alpha(x, \eta, h)$ diyelim ve $h \rightarrow 0$ iken $\alpha(x, \eta, h) \rightarrow 0$ olduğunu gösterelim. $Q(x)$ 'in spektral açılım formülünden

$$(\alpha(x, \eta, h)f, f) = -\frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{1}{\lambda + \mu} \left(e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} (\lambda + \mu)^{1/4} h} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} (\lambda + \mu)^{1/4} h - 1 \right) d(E_\lambda f, f)$$

buradan.

$$\begin{aligned}
|(\alpha(x, \eta, h)f, f)| &\leq \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{1}{\lambda + \mu} \left| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda + \mu)^{1/4}h} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda + \mu)^{1/4}h - 1 \right| d(E_\lambda f, f) \\
&\leq \frac{1}{2} \int_1^N \frac{1}{\lambda + \mu} \left| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda + \mu)^{1/4}h} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda + \mu)^{1/4}h - 1 \right| d(E_\lambda f, f) \\
&\quad + \int_N^\infty \frac{1}{\lambda + \mu} \left| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda + \mu)^{1/4}h} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda + \mu)^{1/4}h - 1 \right| d(E_\lambda f, f) \\
&\leq \frac{1}{2} \int_1^N \left| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda + \mu)^{1/4}h} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda + \mu)^{1/4}h \right| d(E_\lambda f, f) + \int_N^\infty \frac{1}{\lambda + \mu} d(E_\lambda f, f) \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ herhangi sayı olsun. N öyle büyük seçilsin ki $\lambda + \mu \geq N$ iken $\frac{1}{\lambda + \mu} < \frac{\varepsilon}{2}$

olsun. Bu taktirde $I_2 < \frac{\varepsilon}{2} \|f\|^2$ olur. Bundan sonra I_1 için (I_2 'de seçilen N 'yi kabul edersek) $\delta > 0$ öyle küçük seçelim ki $0 < h < \delta$ iken

$$\left| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda + \mu)^{1/4}h} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda + \mu)^{1/4}h - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olsun. Bu taktirde

$$I_1 < \frac{\varepsilon}{2} \|f\|^2$$

olacaktır. Dolayısıyla

$$I_1 + I_2 < \varepsilon$$

olur.

$\frac{\partial^3 g_1(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3}$ 'ün içerdiği ikinci toplamı g_1'' ile gösterelim:

$$g_1'' = \begin{cases} -\frac{1}{4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha(x-\eta)} \cdot \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) & x > \eta \\ -\frac{1}{4} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha(x-\eta)} \cdot \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) & x < \eta \end{cases}$$

g_1'' ifadesinden görüldüğü gibi bu operatör fonksiyon $\eta=x$ noktasında süreklidir. Bundan dolayı g_1'' sıçrama noktasına sahip değildir. Benzer şekilde $h \rightarrow 0$ iken

$$\left\| \left[\frac{\partial^3 g_2(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3} \Big|_{\eta=x+h} - \frac{\partial^3 g_2(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3} \Big|_{\eta=x-h} - \frac{1}{2} I \right] \alpha^{-4} \right\|_{x_5} \rightarrow 0$$

olduğu gösterilir. Böylece

$$\begin{aligned} & \left\| \left[\frac{\partial^3 (g_1 + g_2)}{\partial \eta^3} \Big|_{\eta=x+h} - \frac{\partial^3 (g_1 + g_2)}{\partial \eta^3} \Big|_{\eta=x-h} - I \right] \alpha^{-4} \right\|_{x_5} \\ & \leq \left\| \left[\frac{\partial^3 g_1}{\partial \eta^3} \Big|_{\eta=x+h} - \frac{\partial^3 g_1}{\partial \eta^3} \Big|_{\eta=x-h} - \frac{1}{2} I \right] \alpha^{-4} + \left[\frac{\partial^3 g_2}{\partial \eta^3} \Big|_{\eta=x+h} - \frac{\partial^3 g_2}{\partial \eta^3} \Big|_{\eta=x-h} - \frac{1}{2} I \right] \alpha^{-4} \right\|_{x_5} \\ & \leq \left\| \left[\frac{\partial^3 g_1}{\partial \eta^3} \Big|_{\eta=x+h} - \frac{\partial^3 g_1}{\partial \eta^3} \Big|_{\eta=x-h} - \frac{1}{2} I \right] \alpha^{-4} \right\| + \left\| \left[\frac{\partial^3 g_2}{\partial \eta^3} \Big|_{\eta=x+h} - \frac{\partial^3 g_2}{\partial \eta^3} \Big|_{\eta=x-h} - \frac{1}{2} I \right] \alpha^{-4} \right\|_{x_5} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bununla

$$\left\| \left[\frac{\partial^3 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3} \Big|_{\eta=x+h} - \frac{\partial^3 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3} \Big|_{\eta=x-h} - I \right] \alpha^{-4} \right\|_{x_6} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

olduğu, yani $\frac{\partial^3 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3}$ operatör fonksiyonunun $\eta=x$ noktasında sıçrayışa sahip olduğu gösterildi. Böylece $\frac{\partial^3 G(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^3}$ operatör fonksiyonu da $\eta=x$ noktasında sıçrayışa sahip ve

$$\left\| \left[\frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3} \Big|_{\eta=x+h} - \frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3} \Big|_{\eta=x-h} - I \right] \alpha^{-4} \right\|_{x_5} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

dır.

Şimdi bize gereken $g(x, \eta, \mu)$ operatör fonksiyonunun η 'ya göre dördüncü türevini inceleyelim. $g(x, \eta, \mu)$ ifadesinin içerdiği g_1 operatör fonksiyonu için:

$$\frac{\partial^4 g_1}{\partial \eta^4} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta)} \cdot \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) - \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) \right), & x > \eta \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta)} \cdot \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) + \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) \right), & x < \eta \end{cases}$$

dir. Aşağıdaki yardımcı Lemma'yı ispatlayalım.

LEMMA 3.5: $Q(x)$ operatör fonksiyonu (1), (3), (6) ve $|x - \eta| \leq 1$ iken $\|Q^{1/4}(x)Q^{-1/4}(\eta)\| \leq C$ koşullarını sağlıyorsa o zaman;

$$x \neq \eta \text{ iken } \frac{\partial^4 g(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^4} \in x_4^{(-1/4)}, \quad \sup_{0 \leq x < \infty} \int_0^\infty \left\| \frac{\partial^4 g_1(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^4} Q^{-1/4}(\eta) \right\| d\eta < \infty$$

dır.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left\| \frac{\partial^4 g_1(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^4} Q^{-1/4}(\eta) \right\| d\eta &= \int_{|x-\eta| \leq 1} \left\| \frac{\partial^4 g_1(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^4} Q^{-1/4}(\eta) \right\| d\eta \\ &+ \int_{|x-\eta| > 1} \left\| \frac{\partial^4 g_1(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^4} Q^{-1/4}(\eta) \right\| d\eta \\ &= a(x) + b(x) \end{aligned}$$

şeklinde yazalım.

$$a(x) = \int_{|x-\eta| \leq 1} \left\| (Q(x) + \mu)^{1/4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} (Q(x) + \mu)^{1/4} |x-\eta|} \cdot Q^{-1/4}(x) \cdot Q^{1/4}(x) \cdot Q^{-1/4}(\eta) \right\| d\eta$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_{|x-\eta| \leq 1} \left\| Q^{-1/4}(x) \cdot (Q(x) + \mu)^{1/4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(Q(x)+\mu)^{1/4}|x-\eta|} \right\| d\eta \\
&\leq C \int_{|x-\eta| \leq 1} \left\| (Q(x) + \mu)^{-1/4} \cdot (Q(x) + \mu)^{1/4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(Q(x)+\mu)^{1/4}|x-\eta|} \right\| d\eta \\
&= C \int_{|x-\eta| \leq 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(Q(x)+\mu)^{1/4}|x-\eta|} d\eta \leq \sup_{|x-\eta| \leq 1} \frac{C}{\alpha_1(x) + \mu} \leq C
\end{aligned}$$

Buradan, $\mu > 0$ iken

$$\sup_{0 \leq x < \infty} a(x) < \infty$$

olur.

$$\begin{aligned}
b(x) &= \int_{|x-\eta| > 1} \left\| \frac{\partial^4 g_1(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^4} Q^{-1/4}(\eta) \right\| d\eta = \int_{|x-\eta| > 1} \left\| \alpha e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|x-\eta|} \cdot Q^{-1/4}(\eta) \right\| d\eta \\
&= \int_{|x-\eta| > 1} \left\| (Q(x) + \mu)^{1/4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(Q(x)+\mu)^{1/4}|x-\eta|} \cdot Q^{-1/4}(\eta) \right\| d\eta \\
&\leq \int_{|x-\eta| > 1} \left\| (Q(x) + \mu)^{1/4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(Q(x)+\mu)^{1/4}|x-\eta|} \cdot Q^{-1/4}(\eta) \right\| d\eta \\
&= \left\| (Q(x) + \mu)^{1/4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(Q(x)+\mu)^{1/4}|x-\eta|} \right\| \left\| Q^{-1/4}(\eta) \right\| \\
&= \left\| (Q(x) + \mu)^{1/4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}(Q(x)+\mu)^{1/4}|x-\eta|} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}(Q(x)+\mu)^{1/4}|x-\eta|} Q^{-1/4}(\eta) \right\| \\
&\leq \left\| (Q(x) + \mu)^{1/4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}(Q(x)+\mu)^{1/4}|x-\eta|} \right\| \left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}(Q(x)+\mu)^{1/4}|x-\eta|} Q^{-1/4}(\eta) \right\| \\
&\leq c e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}(\alpha_1(x)+\mu)^{1/4}|x-\eta|}
\end{aligned}$$

Buradan

$$b(x) \leq c \int_{|x-\eta| > 1} e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}(\alpha_1(x)+\mu)^{1/4}|x-\eta|} d\eta$$

bulunur. Böylece



$$b(x) \leq c$$

olduğunu gözönüne alırsak

$$\sup_{0 \leq x < \infty} b(x) < \infty$$

elde edilir. Böylece $\frac{\partial^4 g_1}{\partial \eta^4} \in x_4^{(-1/4)}$ olduğu ispatlanmış oldu. $\frac{\partial^4 g_2}{\partial \eta^4}, \frac{\partial^4 g_3}{\partial \eta^4}, \frac{\partial^4 g_4}{\partial \eta^4}$

operatör fonksiyonlarında $x_4^{(-1/4)}$ uzayına ait olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

3.3 GREEN FONKSİYONUNUN DÖRDÜNCÜ TÜREVİ

Önce $G(x, \eta, \mu)$ Green fonksiyonunun $\frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3}$ türevinin X_3 uzayına ait, η değişkenine göre ($x \neq \eta$) sürekli olduğunu ve

$$\frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3} = \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3} - \int_0^\infty g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3}(\xi, \eta, \mu) d\xi \quad (3.54)$$

integral denklemini sağladığını gösterdik. (3.32) denklemini;

$$L(x, \eta, \mu) = l(x, \eta, \mu) - \int_0^\infty g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] L(x, \eta, \mu) d\xi \quad (3.55)$$

şeklinde yazalım. Burada

$$L(x, \eta, \mu) = \frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3} - \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3}$$

$$l(x, \eta, \mu) = - \int_0^\infty g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3}(\xi, \eta, \mu) d\xi$$

dir. (3.55) denkleminin formal olarak η 'ya göre türevini bulursak



$$\frac{\partial L}{\partial \eta} = \frac{\partial l}{\partial \eta} - \int_0^{\infty} g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial L}{\partial \eta}(\xi, \eta, \mu) d\xi$$

elde ederiz.

$$\frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3}(x, x+0, \mu) - \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3}(x, x-0, \mu) = I$$

özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\eta} \left(\int_0^{\eta} g(x, \xi, \mu) [Q(\eta) - Q(x)] \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3}(\xi, \eta, \mu) d\xi + \int_{\eta}^{\infty} g(x, \xi, \mu) [Q(\eta) - Q(x)] \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3}(\xi, \eta, \mu) d\xi \right) \\ &= \int_0^{\eta} g(x, \xi, \mu) [Q(\eta) - Q(x)] \frac{\partial^4 g}{\partial \eta^4}(\xi, \eta, \mu) d\xi + g(x, \eta-0, \mu) [Q(\eta) - Q(x)] \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3}(\eta-0, \eta, \mu) \\ &+ \int_{\eta}^{\infty} g(x, \xi, \mu) [Q(\eta) - Q(x)] \frac{\partial^4 g}{\partial \eta^4}(\xi, \eta, \mu) d\xi + g(x, \eta+0, \mu) [Q(\eta) - Q(x)] \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3}(\eta+0, \eta, \mu) \\ &\frac{\partial l}{\partial \eta} = g(x, \eta, \mu) [Q(\eta) - Q(x)] - \int_{\eta}^{\infty} g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial^4 g}{\partial \eta^4} d\xi = l_1(x, \eta, \mu) \end{aligned}$$

elde ederiz.

Eğer biz l_1 elemanının $x_4^{(-1/4)}$ 'e ait olduğunu gösterirsek, o zaman Lemma 3.2'ye göre

$$M(x, \eta, \mu) = l_1(x, \eta, \mu) - \int_0^{\infty} g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] M(\xi, \eta, \mu) d\xi$$

integral denkleminin çözümünde $x_4^{(-1/4)}$ 'e ait olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi $l_1(x, \eta, \mu) \in x_4^{(-1/4)}$ olduğunu gösterelim.

$l_1(x, \eta, \mu)$ operatör fonksiyonunu

$$\begin{aligned} l_1(x, \eta, \mu) &= g(x, \eta, \mu) [Q(\eta) - Q(x)] - \int_{x-\xi, \leq 1} g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial^4 g}{\partial \eta^4} d\xi \\ &- \int_{x-\xi, > 1} g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial^4 g}{\partial \eta^4} d\xi = J_1 + J_2 + J_3 \end{aligned}$$

şeklinde yazalım.

J_2 'yi gözönüne alalım.

$|\eta - \xi| \leq 1$ iken $\|Q^{1/4}(\eta) \cdot Q^{-1/4}(\xi)\| \leq C$ koşulunu kullanarak,

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{|x-\xi| \leq 1} g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial^4 g}{\partial \eta^4} Q^{-1/4}(\xi) d\xi \right\| \\
& \leq \int_{|\eta-\xi| \leq 1} \left\| g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \frac{\sqrt{2}}{4} \alpha e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |\xi - \eta|} \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |\xi - \eta| + \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |\xi - \eta| \right) Q^{-1/4}(\eta) \right\| d\xi \\
& \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \int_{|\eta-\xi| \leq 1} \left\| g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] e^{\frac{\sqrt{2}}{2} (Q(\xi) + \mu)^{1/4} |\xi - \eta|} \right\| \\
& \quad \left\| \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} (Q(\xi) + \mu)^{1/4} |\xi - \eta| + \sin \frac{\sqrt{2}}{2} (Q(\xi) + \mu)^{1/4} |\xi - \eta| \right) (Q(\xi) + \mu)^{1/4} Q^{-1/4}(\eta) \right\| d\xi \\
& \leq C \int_{|\eta-\xi| \leq 1} \left\| g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} (Q(\xi) + \mu)^{1/4} |\xi - \eta|} \right\| \\
& \quad \left\| \cos \frac{\sqrt{2}}{2} (Q(\xi) + \mu)^{1/4} |\xi - \eta| + \sin \frac{\sqrt{2}}{2} (Q(\xi) + \mu)^{1/4} |\xi - \eta| \right\| d\xi \\
& \leq C \int_{|\eta-\xi| \leq 1} \left\| g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} (Q(\xi) + \mu)^{1/4} |\xi - \eta|} \right\| d\xi
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

J_3 için değerlendirme yapalım.

$$\begin{aligned}
\|J_3 \cdot Q^{-1/4}(\eta)\| & \leq \int_{|\eta-\xi| > 1} \left\| g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \cdot \alpha e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} |\xi - \eta| \alpha} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |\xi - \eta| Q^{-1/4}(\eta) \right\| d\xi \\
& + \int_{|\eta-\xi| > 1} \left\| g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \cdot \alpha e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} |\xi - \eta| \alpha} \cdot \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |\xi - \eta| Q^{-1/4}(\eta) \right\| d\xi
\end{aligned}$$

$t \geq 0$ iken $t.e^{-t} \leq C$ olduğunu gözönüne alırsak, $|\xi - \eta| > 1$ iken spektral açılım formülünden

$$\left\| (Q(\xi) + \mu)^{1/4} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |\xi - \eta| e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} |\xi - \eta| (Q(\xi) + \mu)^{1/4}} \right\| \leq C$$

elde edilir. Aynı şekilde,

$$\left\| (Q(\xi) + \mu)^{1/4} \cdot \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |\xi - \eta| e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} |\xi - \eta| (Q(\xi) + \mu)^{1/4}} \right\| \leq C$$

olduğu görülür. Böylece

$$\left\| (J_2 + J_3) \cdot Q^{-1/4}(\eta) \right\|_H \leq C \int_0^\infty \left\| g(x, \xi, \mu) [(Q(\xi) - Q(x)) e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} |\xi - \eta| (Q(\xi) + \mu)^{1/4}}] \right\| d\xi$$

olur. Bu eşitsizliğin yardımı ile Lemma 3.1'in ispatına benzer şekilde işlemler yapılırsa $J_2 + J_3 \in x_4^{(-1/4)}$ olduğu görülür.

Şimdi $J_1 \in x_4^{(-1/4)}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left\| g(x, \eta, \mu) [Q(\eta) - Q(x)] Q^{-1/4}(\eta) \right\| d\eta &= \int_{|x-\eta| \leq 1} \left\| g(x, \eta, \mu) [Q(\eta) - Q(x)] Q^{-1/4}(\eta) \right\| d\eta \\ &\quad + \int_{|x-\eta| > 1} \left\| g(x, \eta, \mu) [Q(\eta) - Q(x)] Q^{-1/4}(\eta) \right\| d\eta \\ &\leq \int_{|x-\eta| \leq 1} \left\| (Q(x) + \mu)^{-1/4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} (Q(x) + \mu)^{1/4} |x-\eta|} [Q(\eta) - Q(x)] Q^{-1/4}(\eta) \right\| d\eta \\ &\quad + \int_{|x-\eta| > 1} \left\| (Q(x) + \mu)^{-1/4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} (Q(x) + \mu)^{1/4} |x-\eta|} [Q(\eta) - Q(x)] Q^{-1/4}(\eta) \right\| d\eta \\ &= a_1' + a_1'' \end{aligned}$$

$|x - \eta| \leq 1$ durumundaki koşuldan

$$a_1' \leq C \int_{|x-\eta| \leq 1} \left\| (Q(x) + \mu)^{-1/4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} (Q(x) + \mu)^{1/4} |x-\eta|} \right\| |x - \eta| d\eta$$

$$\leq C \int_{|x-\eta| \leq 1} |x-\eta| d\eta \leq C$$

olur. İkinci toplam olan a_1'' 'nün de sınırlı olduğu açıktır. $M(x, \eta, \mu) \in X_4^{(-1/4)}$ 'ün elemanıdır. $f \in D$ iken

$$\frac{\partial L}{\partial \eta}(f) = M(f) \quad (x \neq \eta) \text{ yani}$$

$$M(f) = l_1(f) - \int_0^\infty g(x, \xi, \mu)[Q(\xi) - Q(x)]M(f)d\xi \quad (3.56)$$

olduğunu gösterelim.

(3.56)'yı (η_0, η) aralığında integre edelim.

$$\begin{aligned} \int_{\eta_0}^{\eta} M(x, \eta, \mu)(f) d\eta &= \int_{\eta_0}^{\eta} l_1(x, \eta, \mu)(f) d\eta \\ &\quad - \int_0^\infty g(x, \xi, \mu)[Q(\xi) - Q(x)] \left\{ \int_{\eta_0}^{\eta} M(\xi, \eta, \mu)(f) d\eta \right\} d\xi \end{aligned} \quad (3.57)$$

(3.55) denkleminde

$$\begin{aligned} [L(x, \eta, \mu) - L(x, \eta_0, \mu)]f &= [l(x, \eta, \mu) - l(x, \eta_0, \mu)]f \\ &\quad - \int_0^\infty g(x, \xi, \mu)[Q(\xi) - Q(x)][L(\xi, \eta, \mu) - L(\xi, \eta_0, \mu)](f) d\xi \end{aligned} \quad (3.58)$$

elde edilir. Eğer biz

$$\int_{\eta_0}^{\eta} l_1(x, \eta, \mu)(f) d\eta = [l(x, \eta, \mu) - l(x, \eta_0, \mu)](f) \quad (3.59)$$

olduğunu gösterirsek. (3.57) ve (3.58) denklemlerinden,

$$\int_{\eta_0}^{\eta} M(x, \eta, \mu)(f) d\eta = [L(x, \eta, \mu) - L(x, \eta_0, \mu)](f)$$

elde ederiz. Buradan

$$M(x, \eta, \mu)(f) = \frac{\partial L}{\partial \eta}(f)$$

dir. Diğer yandan $M(x, \eta, \mu) \in X_4^{(-1/4)}$ olduğundan

$$L(x, \eta, \mu) = \frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3} - \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3} \text{ fonksiyonunun } x \neq \eta \text{ iken } \frac{\partial^4 G}{\partial \eta^4} \text{ türevinin varlığı ve } x_4^{(-1/4)}$$

uzayına ait olduğu sonucu elde edilir. Bu durumda

$$\int_{\eta_0}^{\eta} l_1(x, \eta, \mu)(f) d\eta = [l(x, \eta, \mu) - l(x, \eta_0, \mu)](f) \quad (3.60)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$l(x, \eta, \mu) = - \int_0^{\infty} g(x, \eta, \mu)[Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3}(\xi, \eta, \mu) d\xi$$

dir. (η_0, η) , $[0, \infty)$ aralığının keyfî alt aralığı olsun. Önce 5) koşulunu kullanarak $\bar{\eta} \in (\eta_0, \eta)$ iken $Q^{-1}(\eta).Q(\eta)$ operatörünün sınırlı olduğunu gösterelim.

$\eta > \bar{\eta}$ olsun. Bu halde $\eta = \bar{\eta} + k + r$ şeklinde gösterilebilir. Burada k tamsayı $0 < r < 1$ dir. Aşağıdaki yazılışın doğruluğu kolayca görülür.

$$Q^{-1}(\eta).Q(\bar{\eta}) = Q^{-1}(\eta).Q(\eta-1)Q^{-1}(\eta-1).Q(\eta-2)Q^{-1}(\eta-2)....Q(\bar{\eta}+r).Q(\bar{\eta}+r)Q(\bar{\eta})$$

Buradan ,

$$\|Q^{-1}(\eta).Q(\bar{\eta})\| \leq \|Q^{-1}(\eta).Q(\eta-1)\| \cdot \|Q^{-1}(\eta-1).Q(\eta-2)\| \dots \|Q^{-1}(\bar{\eta}+r).Q(\bar{\eta})\| \leq C$$

dir. Böylece

$$\|Q^{-1}(\eta).Q(\bar{\eta})\| \leq C$$

$$\begin{aligned} l(x, \eta, \mu) &= \int_{x-\xi \leq 1} g(x, \xi, \mu)[Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3}(\xi, \eta, \mu)(f) d\xi \\ &\quad - \int_{x-\xi > 1} g(x, \xi, \mu)[Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3}(\xi, \eta, \mu)(f) d\xi \\ &= a(x, \eta, \mu) + b(x, \eta, \mu) \text{ dir.} \end{aligned}$$

İntegral altında $g(x, \xi, \mu)$ çarpanı olduğundan dolayı $b(x, \eta, \mu)$ 'nin ifadesinde integral altı operatör fonksiyon sınırlıdır.

$$\frac{\partial^3 g_l}{\partial \eta^3} = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta)} \cdot \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) - \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) \right) & x > \eta \\ -\frac{1}{4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(\eta-x)} \cdot \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) + \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha(x-\eta) \right) & x < \eta \end{cases}$$

olduğunu gözönüne alırsak,

$$|x - \xi| > 1 \text{ iken } |x - \eta| > \delta > 0 \text{ olduğunda } \left\| Q(\xi) \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{4} (Q(\xi) + \mu)^{1/4} |x - \xi|} \right\| < C \text{ dir.}$$

$$\left\| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} (Q(x) + \mu)^{1/4} |x - \eta|} Q(x) \right\| < C$$

olduğu açıktır.

$|x - \eta| \rightarrow 0$ olsun. Bu durumda $g(x, \xi, \mu) \cdot Q(x) \cdot \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3}$ sınırlı operatör fonksiyon olduğu açıktır.

Şimdi $g(x, \xi, \mu) \cdot Q(\xi) \cdot \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3}$ ifadesini gözönüne alalım.

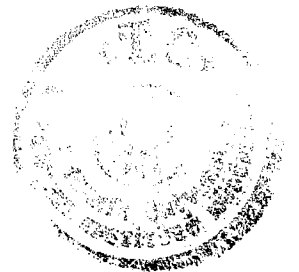
$f \in D$ olduğunda

$$f = Q^{-1}(\xi) [Q(\xi) \cdot Q^{-1}(\bar{\eta})] Q(\bar{\eta}) f$$

şeklinde yazılabilir.

$$\|Q(\xi) Q^{-1}(\bar{\eta})\| \leq C$$

olduğundan dolayı $b(x, \eta, \mu)$ 'nin η 'ya göre türevi sınırlı operatörlerde olduğu gibi integral altında yazılabilir. $|x - \xi| \leq 1$ durumunda $a(x, \eta; \mu)$ nün ifadesinde f elemanını özel olarak seçmekle. $a(x, \eta; \mu)$ nün de η 'ya göre türeve sahip olduğu ve türevin integral altında yazılabildiği gösterilebilir.



3.4 GREEN FONKSİYONUNUN DİFERANSİYEL DENKLEMİ SAĞLAMASI

$x \neq \eta$ olduğunda $G(x, \eta, \mu)$ 'nin

$$\frac{\partial^4 G}{\partial \eta^4} + G(x, \eta, \mu)[Q(\eta) + \mu I] = 0 \quad (3.61)$$

denklemini sağladığını gösterelim. $f \in D$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 G}{\partial \eta^4}(f) - g(x, \eta, \mu)[Q(x) + \mu I](f) &= g(x, \eta, \mu)[Q(\eta) - Q(x)](f) \\ &\quad - \int_0^\infty g(x, \xi, \mu)[Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial^4 G}{\partial \eta^4}(\xi, \eta, \mu)(f) d\xi \quad (3.62) \end{aligned}$$

veya

$$\frac{\partial^4 G}{\partial \eta^4}(f) = g(x, \eta, \mu)[Q(\eta) + \mu I](f) - \int_0^\infty g(x, \xi, \mu)[Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial^4 G}{\partial \eta^4}(\xi, \eta, \mu)(f) d\xi$$

olur. $[Q(\eta) + \mu I]f = h$ dersek, son denklem

$$\frac{\partial^4 G}{\partial \eta^4}[Q(\eta) + \mu I]^{-1}h = g(x, \eta, \mu)h - \int_0^\infty g(x, \xi, \mu)[Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial^4 G}{\partial \eta^4}[Q(\eta) + \mu I]^{-1}h d\xi$$

şeklini alır. Bu denklemi (3.7) denklemi ile karşılaştırsak;

$$\frac{\partial^4 G}{\partial \eta^4}[Q(\eta) + \mu I]^{-1}h = G(x, \eta, \mu)h \quad (3.63)$$

olduğu çıkar. Her sabit tutulmuş η için h elemanlar kümesinin H 'da her yerde yoğun olduğundan (3.63)'den (3.62) elde edilir.

3.5 SINIR KOŞULLARININ SAĞLANMASI

$G(x, \eta, \mu)$ operatör fonksiyonunun (5) koşullarını yani

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \eta}(x, \eta, \mu) \right|_{\eta=0} - h_1 \left. G(x, \eta, \mu) \right|_{\eta=0} = 0 \quad (3.64)$$

$$\left. \frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3}(x, \eta, \mu) \right|_{\eta=0} - h_1 \left. \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2}(x, \eta, \mu) \right|_{\eta=0} = 0 \quad (3.65)$$

sağladığını göstereceğiz.

$$G(x, \eta, \mu) = g(x, \eta, \mu) - \int_0^\infty g(x, \xi, \mu)[Q(\xi) - Q(x)]G(\xi, \eta, \mu)d\xi \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \eta}(x, \eta, \mu) = \frac{\partial g}{\partial \eta}(x, \eta, \mu) - \int_0^\infty g(x, \xi, \mu)[Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial G}{\partial \eta}(\xi, \eta, \mu)d\xi \quad (3.67)$$

(3.66) ve (3.67) denlemlerinden;

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial g}{\partial \eta}(x, \eta, \mu) - \int_0^\infty g(x, \xi, \mu)[Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial G}{\partial \eta}(\xi, \eta, \mu)d\xi \right|_{\eta=0} \\ & - h_1 \left[g(x, \eta, \mu) - \int_0^\infty g(x, \xi, \mu)[Q(\xi) - Q(x)]G(\xi, \eta, \mu)d\xi \right] \bigg|_{\eta=0} = 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

elde edilir. (3.68)'den:

$$\int_0^\infty g(x, \xi, \mu)[Q(\xi) - Q(x)] \left[\frac{\partial G}{\partial \eta}(\xi, \eta, \mu) - h_1 G(\xi, \eta, \mu) \right] \bigg|_{\eta=0} d\xi = 0 \quad (3.69)$$

yazılabilir.(3.69) homojen denklemi;

$$N \left[\frac{\partial G}{\partial \eta} - h_1 G \right] \bigg|_{\eta=0} = 0$$

şeklinde ifade edilebilir. $N, \mu > 0$ büyük değerlerinde büzen operatör olduğundan

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \eta} - h_1 G \right|_{\eta=0} = 0$$

elde edilir. Böylece birinci sınır koşulu sağlanmış olur.

$G(x, \eta, \mu)$ 'den η 'ya göre ikinci türev alalım,

$$\left. \frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3}(x, \eta, \mu) \right|_{\eta=0} = \left. \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3}(x, \eta, \mu) \right|_{\eta=0} - \int_0^\infty g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \left. \frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3}(\xi, \eta, \mu) d\xi \right|_{\eta=0} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3}(x, \eta, \mu) \right|_{\eta=0} - \int_0^\infty g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \left. \frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3}(\xi, \eta, \mu) d\xi \right|_{\eta=0} \\ & - h_1 \left[\left. \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2}(x, \eta, \mu) \right|_{\eta=0} - \int_0^\infty g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \left. \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2}(\xi, \eta, \mu) d\xi \right|_{\eta=0} \right] = 0 \quad (3.71) \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3}(x, \eta, \mu) \right|_{\eta=0} - h_1 \left. \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2}(x, \eta, \mu) \right|_{\eta=0} = 0$$

olduğunu gözönüne alırsak (3.71) denkleminde;

$$- \int_0^\infty g(x, \xi, \mu) [Q(\xi) - Q(x)] \left[\left. \frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3}(\xi, \eta, \mu) - h_1 \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2}(\xi, \eta, \mu) \right] \right|_{\eta=0} d\xi = 0 \quad (3.72)$$

elde edilir. (3.72) homojen denklemini

;

$$N \left[\left. \frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3} - h_1 \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} \right] \right|_{\eta=0} = 0$$

şeklinde ifade ederiz.

$N, \mu > 0$ büyük değerlerinde büzen operatör olduğundan;

$$\frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3}(x, \eta, \mu) - h_1 \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2}(x, \eta, \mu) = 0$$

olduğu görülür. Böylece ikinci sınır koşuluda sağlanmış olur.

$G(x, \eta, \mu)$ operatör fonksiyonunun Green fonksiyonunun bütün özelliklerini sağladığı gösterilmiş oldu. Not edelim ki, elde ettiğimiz $G(x, \eta, \mu)$ Green fonksiyonu Hilbert-Schmidt (H-S) tipli çekirdek operatör yani

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \|G(x, \eta, \mu)\|_2^2 dx d\eta < \infty \text{ dir. Bundan dolayı}$$

$$Af = \int_0^\infty G(x, \eta, \mu) f(\eta) d\eta$$

integral operatörü H uzayında H-S tipli operatördür.

Örnek 3.1: $H=C$ olsun. Bu taktirde göz önüne alınan problem $H_1=L_2(0, \infty)$ uzayında

$$y^{IV} + Q(x)y, \quad 0 < x < \infty$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0$$

$$y'''(0) - h_1 y''(0) = 0$$

sınır koşulları ile oluşturulan sınır değer probleminin incelenmesine indirgenir. Burada $Q(x)$, $[0, \infty)$ aralığında tanımlanmış reel değerli ve $Q(x) \geq 1$ koşulunu sağlayan fonksiyondur.

Örnek 3.2: $H=C^n$ olsun. Burada C^n , n boyutlu kompleks Euclid uzayıdır.

$$Q(x) = (q_{ij}(x))_{i,j=1}^n \text{ olsun. Bu taktirde incelediğimiz problem } L_2(0, \infty, C^n)$$

uzayında

$$y_i^{IV} + \sum_{j=1}^n q_{ij}(x) y_j, \quad 0 < x < \infty$$

$$y_i'(0) - h_1 y_i(0) = 0$$

$$y_i'''(0) - h_1 y_i''(0) = 0 \quad i=1,2,3,\dots,n$$

sınır değer probleminin Green fonksiyonunun incelenmesine indirgenir. Burada $q_{ij} = \bar{q}_{ji}(x)$ koşulunu sağlayan adi diferansiyel fonksiyonlardır.

Örnek 3.3 : $H=L_2$ olduğunda incelediğimiz problem $L_2(0,\infty,L_2)$ uzayında aşağıdaki sonsuz sistemin Green fonksiyonunun incelenmesine indirgenir.

$$y_i^{IV} + \sum_{j=1}^{\infty} q_{ij}(x)y_j,$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y_i'(0) - h_1 y_i(0) = 0$$

$$y_i'''(0) - h_1 y_i''(0) = 0$$

dir. Burada q_{ij} adi fonksiyonları örnek 3.2 'de olduğu gibi $q_{ij} = \bar{q}_{ji}(x)$ koşulunu sağlayan fonksiyonlardır.

Örnek 3.4:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x,y)u, \quad 0 < x < \infty, 0 < y < \pi \quad (1)$$

$$u_x(0,y) - h_1 u(0,y) = 0 \quad 0 < y < \pi \quad (2)$$

$$u_{xxx}(0,y) - h_1 u_{xx}(0,y) = 0 \quad 0 < y < \pi \quad (3)$$

$$u(x,0) = u(x,\pi) = 0 \quad (4)$$

sınır değer problemini gözönüne alalım. Burada $q(x,y) \in [0,\infty) \times [0,\pi]$ yarı şeritinde tanımlanmış reel değerli sürekli fonksiyon, h_1 kompleks sayıdır. (1)-(4) problemini operatör sınır değer problemi şeklinde yazalım. $H=L_2(0,\infty)$ olsun. Bu taktirde $H_1=L_2(0,\infty; L_2(0,\pi))$ olur.

$$-\frac{d^2}{dy^2} + q(x,y)$$

diferansiyel ifadesi ve (2)-(4) koşulları ile H 'da $Q(x)$ 'in tanım kümesi

$$D(Q(x)) = \left\{ (v(y): v'(y) \text{ } [0, \pi] \text{ mutlak sürekli, } v(0) = v(\pi) = 0 \text{ ve } v''(y) \in L_2(0, \pi)) \right\}$$

ve $v(y)$ 'ye etkisi

$$Q(x)v = -\frac{d^2 v}{dy^2} + q(x, y)v$$

ile tanımlansın. Böyle tanımlanmış $Q(x)$ operatörü x 'in $[0, \infty)$ ' dan alınmış her bir değerinde kendine eş , alttan sınırlı ve tersi tam sürekli operatördür. $q(x, y)$ 'e ek koşullar altında tez çalışmasında $Q(x)$ üzerine konulan bütün koşullar sağlatılabilir.

Böylece (1)-(4) sınır değer problemini

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + Q(x)u$$

$$u'(0) - h_1 u(0) = 0$$

$$u'''(0) - h_1 u''(0) = 0$$

H_1 de operatör sınır değer problemi şeklinde yazarsak (1)-(4) probleminin Green fonksiyonuna sahip olduğu sonucu elde edilir. Tez çalışmasında elde edilen sonuçlar diğer örneklere de (Kostyuçenko,1967) (Dolph,1961) uygulanabilir.

Sonuç

$H_1 = L_2(0, \infty; H)$, $[0, \infty)$ da tanımlanmış ve değerleri ayrılabilir H Hilbert uzayına ait kuvvetli ölçülebilir ve

$$\int_0^\infty \|f(x)\|_H^2 dx < \infty$$

özellğine sahip fonksiyonlar uzayı olsun. H_1 ' in kendisinde ayrılabilir Hilbert uzayı oluşturur. Bu tez çalışmasında H_1 uzayında

$$y^{IV} + Q(x)y, \quad 0 < x < \infty$$

diferansiyel ifadesi ve

$$\begin{aligned} y'(0) - h_1 y(0) &= 0 \\ y'''(0) - h_1 y''(0) &= 0 \end{aligned}$$

sınır koşulları ile oluşturulan sınır değer probleminin Green fonksiyonunun varlığı gösterilmiş ve özellikleri incelenmiştir. Burada $Q(x)$ x -in $[0, \infty)$ dan alınmış her bir değerinde H da dönüşüm yapan kendine eş alttan sınırlı ve tersi kompakt olan operatör, h_1 ise keyfi kompleks sayıdır.

KAYNAKLAR

- ALIEV, B. I. ve BAYRAMOĞLU, M.**, Operatör Katsayılı Yüksek Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemlerin Green Fonksiyonu, Izv. Akad. Nauk Azerb. SSR ser. Fiz-Tekhn. Math. Nauk 1981, V.2, No:4, 33-38 R(*)
- ASLANOV, G.I.**, Yarı Eksende Verilmiş Operatör Katsayılı Adi Diferansiyel Denklemlerin Özdeğerleri Sayısının Asimtotik Davranışı Dokl. Akad. Nauk Azerb. SSR 1976. 32. No:3 S. 3-7 (R)
- BAYRAMOĞLU, M.**, Operatör Katsayılı Adi Diferansiyel Denklemlerin Özdeğerlerinin Asimtotik Davranışı, "Fonksiyonel Analiz ve Uygulamaları" Sbornik, Bakü: Bilim, 1971, 144-166 (R)
- BOYMATOV, K.CH.**, Düzgün Olmayan Bölgelerde Operatör Katsayılı Diferansiyel Denklemlerin Spektral Asimtotu, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1978, 242, No:4, 749-752 R
- CODDINGTON, E.A. and LEVINSON, N.**, Theory of Ordinary Differential Equations. New York: McGraw-Hill, 1955
- DOLPH, C.L.**, Recent Developments in Some Non-Self-Adjoint Problems of Mathematical Physics, Bull. Amer. Math. Soc. 67 N1(1961) 1-69
- FRIEDMAN, B.**, Principles and Techniques of Applied Mathematics, Wiley, New York, 1956
- FULTON, T.C., PRUESS, S.A.**, Eigenvalue And Eigenfunction Asymptotics For Regular Sturm-Liouville Problems, J. Math. Anal. Appl.; 188(1994), 297-340
- GORBAÇUK, V.I., and GORBAÇUK, M.L.**, Boundary Value problems for Operator Differential Equations, Kluwer Academic Publishers Group, London, 1991
- KATO, T.**, Perturbation Theory For Linear Operators, Berlin-Heidelberg-New York; Springer-Verlag, 1980
- KOSTYUÇENKO A.G. ve LEVİTAN B.M.**, Sturm -Liouville Operatör Denkleminin Özdeğerlerinin Asimtotik Davranışı, Funks. Analiz ego pril ., I, Vip. I, 1967 ,86-96
- LEVITAN, B.M. and SARGSYAN, I.S.** Sturm-Liouville And Dirac Operators, Kluwer, Dordrechz, 1991
- LEVITAN, B.M.**, Operatör Katsayılı Sturm-Liouville Probleminin Green Fonksiyonunun İncelenmesi, Mat. Sb. 76 (118), No:2, 1968, 239-270 (R)
- MIKUSINKI, J. and DEBNATH, C.J.**, Introduction To Hilbert Space with Applications. Academic Press Inc., New York, 1990
- MİŞNAYEVSKİ, G.A.**, Sturm-Liouville Operatör Probleminin Green Fonksiyonu ve Özdeğerlerinin Asimtotik Davranışı, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1976, 203, No:4, 762-765(R)
- NAYMARK, M.A.**, Lineer Diferansiyel Operatörler, 1969, Nauka, Moskova (R)
- OTELBAYEV, M.**, Sturm-Liouville Operatörünün Spektrumunun Davranışı, Alma Ata: Bilim, 1990 (R)
- ROACH, G.F.**, Green Functions, Cambridge University Press, 1982

* R . kaynağın Rusça olduğunu gösterir.

SAITO, J., Spectral Theory For Second Order Differential Operators With Long Range Operator Valued Coefficients I. Limiting Absorption Principle Japon J. Math. New Ser 1(1975), pp 311-349

SAITO, J., Spectral Theory For Second Order Differential Operators With Long Range Operator Valued Coefficients II. Eigenfunction Expansions and the Shrödinger Operator with Long-Range Potentials, Japan J. Math. New Ser 1(1975) pp 351-382

YOSIDA, K., Functional Analysis, Berlin-Göttingen-Heidelberg; Springer-Verlag, 1980



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı :Fatma İnci Albayrak
Doğum Tarihi :27/06/1969
Doğum Yeri :Çal Denizli
İlk Öğretim :1974-1979 Denizli Kurtuluş ilkokulu
Orta Öğretim :1979-1982 Bakırköy 50. Yıl İncirlik Ortaokulu ,
1982-1985 Bakırköy Yahya Kemal Beyatlı Lisesi.
Lisans Öğretimi :1986-1990 Yıldız Teknik Üniversitesi Mühendislik
Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümü.
Yüksek Lisans Öğretimi :1990-1993 Y.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik
Mühendisliği Programı
Doktora Öğretimi :1993 yılında Y.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsünde Doktora
Öğrenimine Başladı.
Çalıştığı Yerler :1991-1992 Akbank Menkul Değerler Merkezi
1993 den Beri Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik
Mühendisliği Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak
çalışmaktadır.

Evli ve bir çocuk annesidir.

