YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL OPERATÖR DENKLEMİN GREEN FONKSİYONU VE ÖZDEĞERLERİNİN ASİMTOTİK İFADESİ

Seda KIZILBUDAK

F.B.E Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 6 Aralık 1999
Tez Danışmanı : Prof.Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU (Y.T.Ü)
Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Yusuf AVCI (İ.Ü)
: Prof.Dr. Gülseren AYDIN (M.S.Ü)

İSTANBUL, 1999

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR

Doktoramı yöneten ve çalışmalarımda yardımlarını esirgemeyen Sayın hocam Prof.Dr.Mehmet BAYRAMOĞLU'na en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca manevi tüm desteklerini esirgemeyen sevgili ablalarım Öğr.Gör.Dr.Zerrin OER , Öğr.Gör.Dr. Serpil ÖZTÜRK USLU , Öğr.Gör.Dr.Oya BAYKAL'a ,özellikle Arş.Gör.Dr. Ayten KOÇ ve Arş.Gör. Erhan ÇALIŞKAN olmak üzere tüm matematik bölümü araştırma görevlisi arkadaşlarıma,Arş.Gör.Murat ÇALIŞKAN'a ve herkesten çok benimle daima birlikte olan,maddi,manevi yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen annem Sevim KIZILBUDAK , babam Tayyar KIZILBUDAK ve tüm aileme çok teşekkür ederim.

Seda KIZILBUDAK

İstanbul, 1999

ÖZET

Dördüncü mertebeden diferansiyel operatör denklemin Green fonksiyonu ve özdeğerlerinin asimtotik ifadesi adlı çalışmamız iki bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm de

$$y^{iv} + \alpha^4 y = f(x) \quad , \quad 0 \leq x < \infty$$

$$y''(0) - ay'(0) = 0$$

$$y'''(0) - by(0) = 0$$

sınır değer probleminin Green fonksiyonu incelenmiş ve problemin çözümü bu Green fonksiyonu yardımıyla

$$y(x) = \int_0^\infty G(x, \xi, \alpha) f(\xi) d\xi$$

şeklinde gösterilmiştir.

İkinci bölümde ise H ayrılabilir Hilbert uzayı ve $Q(x)$, x in $[0, \infty)$ aralığından alınmış herbir değerinde tersi kompakt olan normal operatör,a,b herhangi reel sabitler olmak üzere ,$L_2(0, \infty; H)$ Hilbert uzayında

$$y''(0) - ay'(0) = 0$$

$$y'''(0) - by(0) = 0$$

sınır şartlarıyla verilen

$$y^{iv} + Q(x)y + \mu y \quad , \quad 0 \leq x < \infty$$

diferansiyel operatör denklemin Green fonksiyonu ve

$$y^{iv} + P(x)y'' + Q(x)y + \mu y = 0 \quad , \quad 0 \leq x < \infty$$

$$y''(0) - ay'(0) = 0$$

$$y'''(0) - by(0) = 0$$

sınır değer probleminin $Q(x) = Q^*(x)$,$Q(x) \geq I$, $P(x) = P^*(x)$, $\|P(x)Q^{\frac{-1}{4}+\epsilon}(x)\| < C$, $(C = const, \epsilon > 0)$ olması halinde özdeğerlerinin asimptotik ifadesi incelenmiştir.

ABSTRACT

Our thesis consists of two parts.

In the first part Green function of boundary value problem

$$y^{iv} + \alpha^4 y = f(x) \quad , \quad 0 \leq x < \infty$$

$$y''(0) - ay'(0) = 0$$

$$y'''(0) - by(0) = 0$$

was studied it is shown that the solution of the problem can be written

$$y(x) = \int_0^\infty G(x, \xi, \alpha) f(\xi) d\xi$$

by the help of this Green function.

In the second part in $L_2(0, \infty; H)$ space where H is seperable Hilbert space and $Q(x)$ whose inverse is compact,is normal operator where $\forall x \in [0, \infty)$,a,b are arbitrary real constants, Green function of the differantial operator equation

$$y^{iv} + Q(x)y + \mu y \quad , \quad 0 \leq x < \infty$$

are examined in the boundary conditions of

$$y''(0) - ay'(0) = 0$$

$$y'''(0) - by(0) = 0$$

Also the eigenvalues of asympthotic expression of

$$y^{iv} + P(x)y'' + Q(x)y + \mu y = f(x) \quad , \quad 0 \leq x < \infty$$

$$y''(0) - ay'(0) = 0$$

$$y'''(0) - by(0) = 0$$

the boundary value problems when $Q(x) = Q^*(x), Q(x) \geq I$, $P(x) = P^*(x)$, $\|P(x)Q^{\frac{-1}{4}+\epsilon}(x)\| < C$, $(C = const, \epsilon > 0)$.

1. GİRİŞ

Kendine eşlenik adi diferansiyel operatörlerin spektral analizine ait birçok çalışma yapılmıştır ve yapılmaktadır. Bu konuya ilişkin kaynaklar (Titchmarsch,1962,Levitan ve Sargasyan,1991,v.s.) olarak söylenebilir. Bu tür denklemler için genel teori oluşturulmuştur denilebilir. Sınırsız operatör katsayılı difernsiyel denklemlerin spektral analizi son 30 senede alınmıştır ve bu alanda çok sayıda sonuçlar alınmasına rağmen incelenmesi gereken daha çok problemler vardır.

Kısmi türevli diferansiyel denklemler,matematiksel fiziğin denklemleri,sonsuz sayıda diferansiyel denklemler sistemi operatör katsayılı diferansiyel denklemler şeklinde yazılabildiğinden böyle denklemler için sınır değer pobleminin incelenmesi büyük öneme sahiptir.

Bu çalışmada normal operatör katsayılı dördüncü mertebeden bir diferansiyel denklemin Green fonksiyonu ve operatörün kendine eş olması halinde özdeğerlerinin asimptotik ifadesi incelenmiştir. Sınır şartlarıyla verilmiş olan diferansiyel ifadelerin çözümünde Green fonksiyonları önemli yer tutmaktadır. Green fonksiyonunun incelenmesi aynı zamanda diferansiyel operatörün spektrumunun özelliği ve spektrumunun tam ayrık olması halinde özdeğerlerin asimtotik ifadesinin bulunmasına imkan sağlar.

H Hilbert uzayı olmak üzere bir $X = L_2(c,d;H)$ ile (c,d) , $(-\infty \leq c < d \leq \infty)$ aralığında tanımlanmış,değerleri H a ait kuvvetli ölçülebilir ve

$$\int_c^d \|f(x)\|^2 dx < \infty.$$

koşulunu sağlayan $f(x)$ fonksiyonlarından oluşsun.

$f_1(x)$ ve $f_2(x) \in X$ fonksiyonlarının iç çarpımı

$$< f_1(x), f_2(x) >_X = \int_c^d < f_1(x), f_2(x) > dx$$

şeklinde tanımlandığında X bir ayrılabilir Hilbert uzayı olur. Burada $\|.\|$ ve $< .,. >$ sırasıyla H uzayında normu ve iç çarpımı gösterir.

Bu çalışmamızda

$$y^{iv}+Q(x)y+\mu y \qquad , \qquad 0\leq x<\infty \tag{1.1}$$

$$y''(0)-ay'(0)=0 \tag{1.2}$$

$$y'''(0)-by(0)=0 \tag{1.3}$$

(1.1) diferansiyel ifadesi ve (1.2)-(1.3) sınır koşulları ile tanımlanmış olan operatörün Green fonksiyonu incelenmiştir. Burada $Q(x), x\in[0,\infty)$ aralığının herbir değerinde H Hilbert uzayında dönüşüm yapan, normal,tersi kompakt operatör, a,b ise herhangi reel sabitlerdir. Green fonksiyonunun özdeğerlerinin asimptotik ifadesi de ayrıca incelenmiştir.

İlk olarak (Levitan,1968) sınırsız operatör katsayılı kendine eşlenik

$$-y''+Q(x)y \qquad , \qquad x\in(-\infty,\infty)$$

diferansiyel ifadesiyle oluşturulan operatörün Green fonksiyonunu incelemiştir. Daha sonra ise (Bayramoğlu,1971) $Q_j(x)(j=2,\cdots,2n)$ ler H da dönüşüm yapan kendine eşlenik operatörler olmak üzere $L_2(-\infty,\infty;H)$ uzayında

$$(-1)y^{(2n)}+\sum_{j=2}^{2n}Q_j(x)y^{(2n-j)} \qquad -\infty<x<\infty$$

diferansiyel ifadesiyle oluşturulan kendine eşlenik operatörün Green fonksiyonunu ve spektrumunun asimptotik davranışı incelenmiştir.

Bu konuya ilişkin olarak daha öncede belirttiğimiz gibi birçok çalışma bulunmaktadır. [Abudov,1981;Aslanov,1976,1993;v.s.). Özdeğerlerin asimtotik davranışına ait 1979 yılına kadar çalışmaların geniş referansı (Kostyuçenko ve Sargasyan,1979) kitabında verilmiştir. 1990 yılına kadar olan çalışmalar ise (Levendorskii,1990) kitabında verilmiştir.

2. DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN BİR DİFERANSİYEL DENKLEMİN GREEN FONKSİYONUNUN İNCELENMESİ

2.1. Ön Bilgiler

H bir Hilbert uzayı olsun. H da bir A operatörünü gözönüne alalım ve tanım kümesinide $D(A)$ ile ifade edelim. A operatörü H uzayında yoğun kümede tanımlanmış kapalı operatör ve A^*,A nın eşleniği olmak üzere

$$AA^* = A^*A$$

koşulu sağlanıyorsa A operatörüne normal operatör denir.

A normal, spektrumu ayrık bir operatör olsun ve A^{-1} ters operatörü varolsun, yani 0 (sıfır) sayısı A nın özdeğeri olmasın. A nın özdeğerlerini

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots \leq |\lambda_n| \leq \cdots$$

ile bunlara karşılık gelen ortonormal özvektörlerini ise $e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$ ile gösterelim. Bu takdirde $\forall f \in H$ için

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} < f, e_k > e_k$$

formülü doğrudur ve $f \in D(A)$ durumunda ise

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < f, e_k > e_k \tag{2.1}$$

şeklindedir. (2.1) ifadesine A operatörünün spektral açılımı denir.

$$Ae_k = \lambda_k e_k$$

olduğu gözönüne alınmak suretiyle A operatörünün spektral açılımı sembolik olarak

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \cdot, e_k > e_k$$

şeklinde ifade edilir. Birim operatör ise

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} < ., e_k > e_k$$

şeklinde yazılır. Çalışmamızda e^{-A} ve $(A + \mu I)^{\frac{1}{4}}$, $(\mu > 0)$ operatörleri ile ilgileneceğiz. Bunlarda aşağıdaki gibi ifade edilecektir.

$$e^{-A} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k} < ., e_k > e_k$$

$$(A + \mu I)^{\frac{1}{4}} = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + \mu)^{\frac{1}{4}} < ., e_k > e_k$$

Burada $(\lambda_k + \mu)^{\frac{1}{4}}$ ile dört değerli $(\lambda + \mu)^{\frac{1}{4}}$fonksiyonunun $-\pi + \epsilon < arg(\lambda + \mu) < \pi - \epsilon$ koşuluyla tanımlanan dalı gösterilmektedir.

Eğer ϕ, A nın spektrumunu içeren herhangi bir bölgede tanımlanmışsa o zaman

$$\phi(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(\lambda_k) < ., e_k > e_k$$

olarak ifade edilir. Eşleniği ise

$$\phi^*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\phi(\lambda_k)} < ., e_k > e_k$$

şeklindedir. $\phi(A)$ operatörünün normu

$$\|\phi(A)\| = \sup_{\lambda_k \in \sigma(A)} | \phi(\lambda_k) |$$

dır.

Bir $A(t)$ operatör fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu operatör fonksiyonu (a,b) aralığında tanımlanmış, değerleri $B(H)$ a ait bir fonksiyon olsun. Burada $B(H)$, H da tanımlanmış lineer sınırlı operatörlerin Banach uzayıdır(Mikusinski,1990). Bu fonksiyonlar için limit, türev, süreklilik,integral vs.kavramları matematik analizdeki gibi tanımlanmaktadır.

$$\lim_{\Delta(t)\to 0} \|A(t+\Delta t) - A(t)\| \longrightarrow 0$$

sağlandığında $A(t)$ fonksiyonuna kuvvetli sürekli, $A'(t) \in B(H)$ olmak üzere

$$\lim_{\Delta(t)\to 0} \|\frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta(t)} - A'(t)\| \longrightarrow 0$$

ise de $A'(t)$ ye ,A fonksiyonunun t noktasındaki kuvvetli türevi denir.

$x \in D(A), \overline{D(A)} = H$ olsun,A operatörüde H Hilbert uzayında bir simetrik operatör olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} < Ax, x > &\geq \gamma < x, x > \\ < Ax, x > &\leq \beta < x, x > \end{aligned}$$

eşitsizliklerini sağlayan γ veya β sayıları varsa A operatörüne alttan sınırlı veya üstten sınırlıdır denir.

$$\begin{array}{llcll} \gamma > 0 \Longrightarrow A & pozitif & , & \beta < 0 \Longrightarrow A & negatif \\ \gamma = 0 \Longrightarrow A & nonnegatif & , & \beta = 0 \Longrightarrow A & nonpozitif \end{array}$$

operatördür denir.

A herhangi kompakt operatör olsun. Bu takdirde A^*A operatörü kendine-eşlenik nonnegatif operatördür. Bu operatörün sıfırdan farklı pozitif özdeğerleri

$$s_1^2 \geq s_2^2 \geq \cdots \geq s_n^2 \geq \cdots$$

ile gösterilir. $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$ pozitif sayılarına A operatörünün s-sayıları denir. $p \geq 1$ olmak üzere $\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p$ serisini gözönüne alalım. Bu seri yakınsak ise o takdirde A operatörü σ_p sınıfına aittir denir.(Kato,1980)

$p = 1 \qquad \Longrightarrow \sigma_1$ sınıfına çekirdek operatörler sınıfı ,

$p = 2$ $\Longrightarrow \sigma_2$ sınıfına (H-S tipli) Hilbert-Schimidt operatörler sınıfı ,

$p = \infty$ $\Longrightarrow \sigma_\infty$ sınıfına H da tam sürekli operatörler sınıfı denir.

$A \in B(H)$,$\mathcal{A} \in \sigma_1$ olmak üzere $A\mathcal{A}$ ve $\mathcal{A}A \in \sigma_1$ dir. Üstelik

$$\|A\mathcal{A}\|_1 \leq \|A\| \|\mathcal{A}\|_1 \qquad \|\mathcal{A}A\|_1 \leq \|\mathcal{A}\|_1 \|A\|$$

dir. $\mathcal{A} \in \sigma_2$ olduğunda da $A\mathcal{A}$ ve $\mathcal{A}A \in \sigma_2$dir ve

$$\|A\mathcal{A}\|_2 \leq \|A\| \|\mathcal{A}\|_2 \qquad \|\mathcal{A}A\|_2 \leq \|\mathcal{A}\|_2 \|A\|$$

olur.[Örneğin bu bilgiler,(Conway,J.B.,1990) in kitabında yer almaktadır.]

2.2 Dördüncü Mertebeden Verilen Bir Diferansiyel Denklemin Green Fonksiyonunun Bulunması

$$y^{iv} + \alpha^4 y = f(x) \quad , \quad 0 \leq x < \infty \tag{2.2}$$

$$y''(0) - ay'(0) = 0 \tag{2.3}$$

$$y'''(0) - by(0) = 0 \tag{2.4}$$

sınır değer probleminin $L_2(0,\infty)$ Hilbert uzayında Green fonksiyonunu inceleyelim.

Bu problemimizde a, b herhangi reel sabitler,$f(x) \in L_2(0,\infty)$,$\alpha > 0$ dır. Sabitin değişimi yöntemini kullanarak problemin çözümü

$$y(x) = \int_0^\infty G(x,\xi,\alpha) f(\xi) d\xi$$

şeklinde bulunur. Burada $y(x) \in L_2(0,\infty)$ yani

$$\int_0^\infty |\, y(x)\,|^2 dx < \infty$$

dir.

c_1, c_2, c_3, c_4 keyfi sabitler olmak üzere $y^{iv} + \alpha^4 y = 0$ homojen denkleminin çözümü

$$y(x) = c_1 e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(i+1)x} + c_2 e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(i-1)x} + c_3 e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(i+1)x} + c_4 e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(i-1)x} \tag{2.5}$$

şeklindedir. Sabitin değişimi yöntemini kullanarak (2.2) non homojen denklemin çözümü (2.5) şeklinde yazılır. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{-(i+1)\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} \int_0^x f(t) e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(i+1)t} dt + A_1 \\
c_2 &= \frac{-(i-1)\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} \int_0^x f(t) e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(i-1)t} dt + A_2 \\
c_3 &= \frac{(i+1)\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} \int_0^x f(t) e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(i+1)t} dt + A_3 \\
c_4 &= \frac{(i-1)\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} \int_0^x f(t) e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(i-1)t} dt + A_4
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada A_1, A_2, A_3 ve A_4 keyfi sabitlerdir. Böylece (2.5) eşitliğinde bu değerler yerine yazıldığında çözüm

$$\begin{aligned}
y(x) = {} & \frac{-(i+1)\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(i+1)x} \int_0^x f(t) e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(i+1)t} dt + A_1 e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(i+1)x} - \\
& - \frac{(i-1)\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(i-1)x} \int_0^x f(t) e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(i-1)t} dt + A_2 e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(i-1)x} + \\
& + \frac{(i+1)\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(i+1)x} \int_0^x f(t) e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(i+1)t} dt + A_3 e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(i+1)x} - \\
& - \frac{(i-1)\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(i-1)x} \int_0^x f(t) e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(i-1)t} dt + A_4 e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(i-1)x}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

olur. Şimdi (2.3),(2.4) koşullarını ve $y(x) \in L_2(0,\infty)$ koşulunu kullanarak A_1, A_2, A_3 ve A_4 sabitlerini bulmaya çalışalım. $x > c$ iken $f(x) = 0$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde $x > c$ iken (2.5) eşitliği

$$\begin{aligned}
y(x) = {} & \frac{-(i+1)\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(i+1)x} \int_0^c f(t) e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(i+1)t} dt + A_1 e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(i+1)x} - \\
& - \frac{(i-1)\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(i-1)x} \int_0^c f(t) e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(i-1)t} dt + A_2 e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(i-1)x} + \\
& + \frac{(i+1)\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(i+1)x} \int_0^c f(t) e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(i+1)t} dt + A_3 e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(i+1)x} - \\
& - \frac{(i-1)\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(i-1)x} \int_0^c f(t) e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(i-1)t} dt + A_4 e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(i-1)x}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

şeklini alır.

$$
\begin{array}{llll}
\mid e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(i+1)x} \mid = e^{\frac{\alpha}{2}x} \longrightarrow \infty & , & (x \longrightarrow \infty iken) \\
\mid e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)x} \mid = e^{\frac{\alpha}{2}x} \longrightarrow \infty & , & (x \longrightarrow \infty iken) \\
\mid e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(i-1)x} \mid = e^{\frac{-\alpha}{2}x} \longrightarrow 0 & , & (x \longrightarrow \infty iken) \\
\mid e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(i+1)x} \mid = e^{\frac{-\alpha}{2}x} \longrightarrow 0 & , & (x \longrightarrow \infty iken)
\end{array}
$$

dir. O halde $y(x) \in L_2(0,\infty)$ olması için

$$A_1 = \frac{(i+1)\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} \int_0^c f(t) e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(i+1)t} dt$$

$$A_4 = \frac{-(i-1)\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} \int_0^c f(t) e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(i-1)t} dt$$

olmalıdır. A_1 ve A_4 değerlerini (2.6) denkleminde yerine yazarsak ve (2.3)-(2.4) sınır koşullarını sağlamasını talep edersek ,A_2 ve A_3 değerleri bulunmak suretiyle;

$$
\begin{aligned}
y(x) = & \frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} \int_0^x \Bigg(2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x-t)} [cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(t-x)) - sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(t-x))] + \\
& +2Ae^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+t)} [cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(t+x)) - sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(t+x))] + \\
& +2Be^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+t)} [cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(t+x)) + sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(t+x))] + \\
& +Ce^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+t)} cos(t-x) \Bigg) f(t) dt + \\
& + \frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} \int_x^c \Bigg(2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x-t)} [cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(t-x)) - sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(t-x))] + \\
& +2Ae^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+t)} [cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(t+x)) - sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(t+x))] + \\
& +2Be^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+t)} [cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(t+x)) + sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(t+x))] + \\
& +Ce^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+t)} cos(t-x) \Bigg) f(t) dt
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

şeklinde istenen genel çözüm elde edilir. Eğer

$$G_0(x,t;\alpha)=\begin{cases}\frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}\Bigg(2e^{\frac{\alpha(t-x)}{\sqrt{2}}}\,[cos(\frac{\alpha(t-x)}{\sqrt{2}})-sin(\frac{\alpha(t-x)}{\sqrt{2}})]+\\ +2\,e^{\frac{-\alpha(t+x)}{\sqrt{2}}}\,[(A+B)cos(\frac{\alpha(t-x)}{\sqrt{2}})-(A-B)sin(\frac{\alpha(t-x)}{\sqrt{2}})]+\\ +C\,e^{\frac{-\alpha(t+x)}{\sqrt{2}}}cos(\frac{\alpha(t-x)}{\sqrt{2}})\Bigg), & x>t\ ;\\ \frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}\Bigg(2e^{\frac{-\alpha(t-x)}{\sqrt{2}}}\,[cos(\frac{\alpha(t-x)}{\sqrt{2}})+sin(\frac{\alpha(t-x)}{\sqrt{2}})]+\\ +2\,e^{\frac{-\alpha(t+x)}{\sqrt{2}}}\,[(A+B)cos(\frac{\alpha(t-x)}{\sqrt{2}})-(A-B)sin(\frac{\alpha(t-x)}{\sqrt{2}})]+\\ +C\,e^{\frac{-\alpha(t+x)}{\sqrt{2}}}cos(\frac{\alpha(t-x)}{\sqrt{2}})\Bigg), & x<t\end{cases}\tag{2.9}$$

olarak tanımlanırsa verilen sınır değer probleminin Green fonksiyonu bulunmuş olur. $G_0(x,\eta,\alpha)$ Green fonksiyonu aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir;

$$\begin{aligned}G_0(x,\eta,\alpha)=&\frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}\{2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}|x-\eta|}[cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x-\eta))+sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\mid x-\eta\mid)]+\\ &+2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}[(A+B)cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))-(A-B)sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))]+\\ &+ce^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}cos(\eta-x)\}\end{aligned}\tag{2.10}$$

(2.8)-(2.9)-(2.10) ifadelerindeki A,B,C değerleri sırasıyla

$$A=\frac{\alpha^4-ab}{\alpha^4+\alpha^3\sqrt{2}a-\alpha\sqrt{2}a-ab}$$

$$B=\frac{\sqrt{2}(\alpha^3a+\alpha b)}{\alpha^4+\alpha^3\sqrt{2}a-\alpha\sqrt{2}a-ab}$$

$$C=\frac{4(\alpha^4+ab)}{\alpha^4+\alpha^3\sqrt{2}a-\alpha\sqrt{2}a-ab}$$

şeklindedir. Şu halde verilen sınır şartlarıyla beraber diferansiyel denklemimizin çözümünü Green fonksiyonu yardımıyla

$$y(x)=\int_0^\infty G_0(x,\xi,\alpha)f(\xi)d\xi\tag{2.11}$$

şeklinde yazabiliriz. O halde $f(x)$, $L_2(0,\infty)$ a ait keyfi bir fonksiyon olduğunda (2.2)-(2.4) sınır değer probleminin çözümü bu son (2.11) eşitliğiyle ifade edilebilir.

(2.11) ifadesiyle belirttiğimiz integral operatörü Carleman tipli sınırlı integral operatördür. Yani

$$G_0(x,\xi,\alpha) = G_0(\xi,x,\alpha) \quad \text{ve} \quad \int_0^\infty |G_0(x,\xi,\alpha)|^2 d\xi < \infty$$

dir.

3. DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL OPERATÖR DENKLEMİN GREEN FONKSİYONU VE ÖZDEĞERLERİNİN ASİMPTOTİK İFADESİ

3.1 Green Fonksiyonunun İncelenmesi

$$y^{iv} + Q(x)y + \mu y = f(x) \quad , \quad 0 \leq x < \infty . \tag{3.1}$$

$$y''(0) - ay'(0) = 0 \tag{3.2}$$

$$y'''(0) - by(0) = 0 \tag{3.3}$$

(3.2)-(3.3) sınır şartlarıyla beraber (3.1) diferansiyel denklemini gözönüne alalım. H ayrılabilir Hilbert uzayı olsun. Burada $Q(x)$,her $x \in [0, \infty)$ değerinde H da tanımlanmış normal operatör, ($\mu > 0$) reel sayıdır. a, b de herhangi reel sabitlerdir.

$Q(x)$'in aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu varsayalım;

1) $Q(x), x \in [0, \infty)$ aralığının herbir değerinde H Hilbert uzayında normal operatördür,
2) $D[Q(x)] = D$ ve $\overline{D} = H$ olsun. Burada $\overline{D}, D$'nin H 'da kapanmasıdır,
3) $Q^{-1}, [0, \infty)$ aralığının herbir değerinde H uzayında kompakt(tam sürekli) operatördür,
4) $| x - \xi | \leq 1$ olduğunda;

$$\left\| [Q(\xi) - Q(x)] Q^{-a}(x) \right\| \leq c \mid x - \xi \mid$$

olsun. Burada $c > 0$, sabit ve $0 < a < \frac{5}{4}$.

$$\left\| [Q^{\frac{-1}{4}}(x) Q^{\frac{1}{4}}(\xi)] \right\| < c_1 \qquad (c_1 = sabit)$$

5) $| x - \xi | > 1$ olduğunda

$$\left\| Q(\xi) e^{\frac{-\sqrt{2}}{4} |x - \xi| Q^{\frac{1}{4}}(x)} \right\| < d \qquad (d = sabit)$$

6) $\omega_1(x), \omega_2(x), \cdots, \omega_n(x), \cdots$, $Q(x)$'in özdeğerleri olmak üzere

$1 \leq | \omega_1(x) | \leq | \omega_2(x) | \leq \cdots$

7)

$$F(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{| \omega_j(x) |^{\frac{7}{4}}} < \infty$$

ve

$$\int_0^{+\infty} F(x)dx < \infty$$

olsun.

8) Herbir $x \in [0, \infty)$ için $Q(x)$ in özdeğerleri

$0 \ \Lambda = \{\pi - \epsilon_0 < arg\lambda < \pi + \epsilon_0\}$, $(0 < \epsilon_0 < \pi)$

bölgesi dışında olsun.

(3.1)-(3.3) sınır değer probleminin Green fonksiyonu $G_0(x, \xi, \mu)$, x , ξ'nin $(0 \leq x,\ 0 < \xi < \infty)$ herbir değerinde H da dönüşüm yapan ve aşağıdaki özelliklere sahip bir fonksiyondur.

1) $G_0(x, \eta, \mu)$ ve ilk iki kısmi türevi x, η $(0 \leq x, \eta < \infty)$ değişkenlerinin sürekli fonksiyonudur.

2) $\eta \neq x$ iken $G_{0_\eta}'''(x, \eta, \mu)$ süreklidir.

3)

$$\frac{\partial^3 G_0(x, x+0, \mu)}{\partial \eta^3} - \frac{\partial^3 G_0(x, x-0, \mu)}{\partial \eta^3} = I$$

4) $\eta \neq x$ iken

$$\frac{\partial^4 G_0(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^4} + G_0(x, \eta, \mu)Q(\eta) + \mu G_0(x, \eta, \mu) = 0$$

5)

$$\left.\frac{\partial^2 G_0(x, \eta, \mu)}{\partial \eta^2}\right|_{\eta=0} - a\left.\frac{\partial G_0(x, \eta, \mu)}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = 0$$

$$\frac{\partial^3 G_0(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^3}\Big|_{\eta=0} - bG_0(x,\eta,\mu)\Big|_{\eta=0} = 0$$

Burada $G_0(x,\eta,\mu)$ fonksiyonunun varlığını gösterelim;daha önce bulduğumuz $G_0(x,\eta,\alpha)$ fonksiyonunun ifadesinde $\eta = x$ yazarak elde edilen operatör fonksiyonunu

$$g(x,s,\mu) = \frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}\{2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}|s-x|}[cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(s-x)) + sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \mid s-x \mid)]+$$
$$+2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(s+x)}[(A+B)cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(s+x)) - (A-B)sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(s+x))]+$$
$$+ce^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(s+x)}cos(x-s)\}$$

ile gösterelim. $\alpha = [Q(x)+\mu I]^{\frac{1}{4}}$ operatör fonksiyonu

$$\sqrt[4]{Q(x)+\mu I} = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt[4]{\omega_j(x)+\mu} < ., e_j > e_j \tag{3.4}$$

formülü ile tanımlanır. Burada $\omega_1(x), \omega_2(x), \cdots, \omega_j(x), \cdots$ $Q(x)$ in özdeğerleridir; $\sqrt[4]{\omega_j(x)+\mu}$ kökleri ise

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\epsilon}{4} < arg\sqrt[4]{\omega_j(x)+\mu} < \frac{\pi}{4} + \frac{\epsilon}{4}$$

koşulundan tanımlanır.

(2.2)-(2.4) sınır değer probleminin $G_0(x,\eta,\mu)$ Green fonksiyonunu

$$G_0(x,\eta,\mu) = g(x,\eta,\mu) - \int_0^{\infty} g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]G_0(\xi,\eta,\mu)d\xi \tag{3.5}$$

integral denkleminin çözümü şeklinde arayalım.Burada integral denklemin 2. teriminin seçilen uzayda büzen operatör ve 1. termininde bu uzayın elemanı olduğunu gösterirsek integral denklemin çözüme sahip olduğunu göstermiş oluruz.

İntegral denklemin 2. teriminin oluşturduğu operatörü N ile gösterelim;

$$NA = \int_0^{\infty} g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]A(\xi,\eta)d\xi \tag{3.6}$$

Burada $A(\xi,\eta)$ değerleri $B(H)$ a ait olan operatör değerli fonksiyondur.

Şimdi çözümünün Green fonksiyonunu vereceğini söylediğimiz (3.6) integral denklemin hangi uzaylarda çözümünü arayacağımızdan bahsedelim.

X_2 **Uzayı :**

$0 \leq x, \eta < \infty$ bölgesinde tanımlanmış ,değerleri H da dönüşüm yapan Hilbert-Schmidt $(H - S)$ tipli ve

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \|A(x,\eta)\|_2^2 d\eta < \infty$$

koşulunu sağlayan $A(x,\eta)$ operatörler kümesi. $A(x,\eta)$ nın normu

$$\|A(x,\eta)\|_{X_2} = \left(\int_0^\infty dx \int_0^\infty \|A(x,\eta)\|_2^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.7}$$

dir. Burada $\|.\|_2$ sembolü operatörün $H - S$ normunu gösterir.

$X_3^{(p)} (p \geq 1)$ **Uzayı :**

$0 \leq x, \eta < \infty$ bölgesinde tanımlanmış ,değerleri H da dönüşüm yapan,sınırlı,normu aşağıdaki şekilde tanımlanan $A(x,\eta)$ operatörler kümesi

$$\|A(x,\eta)\|_{X_3^{(p)}} = \left(\sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \|A(x,\eta)\|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.8}$$

$X_4^{(s)} (s = \frac{-1}{4})$ **Uzayı :**

$0 \leq x, \eta < \infty$ bölgesinde tanımlanmış ,değerleri H da dönüşüm yapan,sınırlı,normu aşağıdaki şekilde tanımlanan $A(x,\eta)$ operatörler kümesi

$$\|A(x,\eta)\|_{X_4^{(s)}} = \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \|A(x,\eta) Q^s(\eta)\| d\eta \tag{3.9}$$

X_5 Uzayı :

$0 \leq x, \eta < \infty$ bölgesinde tanımlanmış ,değerleri H da dönüşüm yapan,sınırlı,normu aşağıdaki şekilde tanımlanan $A(x,\eta)$ operatörler kümesi

$$\|A(x,\eta)\|_{X_5} = \sup_{0<x<\infty} \sup_{0<\eta<\infty} \|A(x,\eta)\| \tag{3.10}$$

Öncelikle N operatörünün X_2 uzayında büzen operatör olduğunu aşağıdaki yardımcı teorem ile verelim.

Yardımcı Teorem 3.1.1 :

$Q(x)$ operatör fonksiyonu (4)-(5) koşullarını sağlıyorsa $\mu > 0$ ın büyük değerlerinde N operatörü X_2 uzayında büzen operatördür.

İspat :

$$\begin{aligned} g(x,\eta,\mu) = & \frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}\{2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}|x-\eta|}[cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x-\eta)) + sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \mid x-\eta \mid)]+ \\ & +2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}[(A+B)cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)) - (A-B)sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))]+ \\ & +ce^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}cos(\eta - x)\} \end{aligned}$$

idi.

Bilindiği gibi $\alpha = \sqrt[4]{Q(x)+\mu I}$ dır. α nın kendisi ve α nın diğer fonksiyonları spektral açılımla tanımlanır. O halde spektral açılım teoremine göre $Q(x)$ in spektral açılımı ;

$$f(Q(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} f(\omega_k(x)) < ., e_k > e_k \tag{3.11}$$

şeklinde olacaktır. (3.5) eşitliği

$$NA = \int_0^\infty g(x,\xi,\mu)[Q(\xi) - Q(x)]A(\xi,\eta,\mu)d\xi$$

idi. Şimdi $g(x,\eta,\mu)$ nın eşitini burada yerine yazmak suretiyle bu ifadeyi inceleyelim.

$$NA = \int_0^\infty \frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}\{2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}|x-\eta|}[cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x-\eta)) + sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \mid x-\eta \mid)] +$$
$$+2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}[(A+B)cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)) - (A-B)sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))]+$$
$$+ce^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}cos(\eta - x)\}[Q(\xi) - Q(x)]A(\xi,\eta,\mu)d\xi$$

olacaktır.

$$g_1(x,\eta,\alpha) = \frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}\{2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}|x-\eta|}cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x-\eta))\}$$
$$g_2(x,\eta,\alpha) = \frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}\{2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}|x-\eta|}sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \mid x-\eta \mid)\}$$
$$g_3(x,\eta,\alpha) = \frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}\{2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}[(A+B)cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))]\}$$
$$g_4(x,\eta,\alpha) = \frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}\{2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}[(B-A)sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))]\}$$
$$g_5(x,\eta,\alpha) = \frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}\{ce^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\eta - x))\}$$

olsun. O halde

$$NA(x,\eta) = \int_0^{+\infty} g_1(x,\xi,\alpha)[Q(\xi) - Q(x)]A(\xi,\eta)d\xi +$$
$$+\int_0^{+\infty} g_2(x,\xi,\mu)[Q(\xi) - Q(x)]A(\xi,\eta)d\xi +$$
$$+\int_0^{+\infty} g_3(x,\xi,\mu)[Q(\xi) - Q(x)]A(\xi,\eta)d\xi +$$
$$+\int_0^{+\infty} g_4(x,\xi,\mu)[Q(\xi) - Q(x)]A(\xi,\eta)d\xi +$$
$$+\int_0^{+\infty} g_5(x,\xi,\mu)[Q(\xi) - Q(x)]A(\xi,\eta)d\xi$$

şeklinde yazabiliriz.

$$NA(x,\eta) = N_1A(x,\eta) + N_2A(x,\eta) + N_3A(x,\eta) + N_4A(x,\eta) + N_5A(x,\eta)$$

olur. Norm özelliğinden;

$\|N\| \leq \|N_1\| + \|N_2\| + \|N_3\| + \|N_4\| + \|N_5\|$

dir. $\mu > 0$ büyük değerlerinde N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 operatörlerinin gözönüne alınan uzayda istenildiği kadar küçük olduğunu göstereceğiz. Bunun sonucu olarak μ'nün büyük değerlerinde N operatörünün büzen operatör olduğunu göstermiş olacağız. Şimdi $\|N_1\|, \|N_2\|, \|N_3\|, \|N_4\|, \|N_5\|$ normlarını ayrı ayrı sınırlandıralım.

Örnek olarak N_2 operatörünü ele alalım.

$$N_2A(x,\eta) = \int_0^{+\infty} g_2(x,\xi,\mu)[Q(\xi) - Q(x)]A(\xi,\eta)d\xi \,.$$

$$N_2A(x,\eta) = \int\limits_{|x-\xi|\leq 1} g_2(x,\xi,\mu)[Q(\xi) - Q(x)]A(\xi,\eta)d\xi + \int\limits_{|x-\xi|>1} g_2(x,\xi,\mu)[Q(\xi) - Q(x)]A(\xi,\eta)d\xi \tag{3.12}$$

$$\Rightarrow \qquad N_2A(x,\eta) = D_1 + D_2 \tag{3.13}$$

$$\Rightarrow \qquad \|N_2A(x,\eta)\| = \|D_1 + D_2\| \leq \|D_1\| + \|D_2\|$$

$$\|N_2A(x,\eta)\|^2 \leq 2(\|D_1\|^2 + \|D_2\|^2)$$

dır.

$$\begin{aligned}
\|D_1\|^2 &= \Bigg\| \int\limits_{|x-\xi|\leq 1} g_2(x,\xi,\mu)[Q(\xi) - Q(x)]A(\xi,\eta)d\xi \Bigg\|^2 \\
&\leq \Bigg[\int\limits_{|x-\xi|\leq 1} \|g_2(x,\xi,\mu)[Q(\xi) - Q(x)]A(\xi,\eta)\| d\xi \Bigg]^2 \\
&\leq \Bigg[\int\limits_{|x-\xi|\leq 1} \|g_2(x,\xi,\mu)[Q(\xi) - Q(x)]\| \|A(\xi,\eta)\| d\xi \Bigg]^2
\end{aligned} \tag{3.14}$$

olur. Bu (3.14) ifadesindeki ilk normu gözönüne alalım.

$$\begin{aligned}
\|g_2(x,\xi,\mu)[Q(\xi) - Q(x)]\| &= \|g_2(x,\xi,\mu)Q^a(x)Q^{-a}(x)[Q(\xi) - Q(x)]\| \\
&\leq \|g_2(x,\xi,\mu)Q^a(x)\| \|Q^{-a}(x)[Q(\xi) - Q(x)]\|
\end{aligned}$$

$J = \|Q^{-a}(x)[Q(\xi) - Q(x)]\|$

olsun. J normu Q(x) için verilen 4. koşulun sonucu olarak;

$J = \|Q^{-a}(x)[Q(\xi) - Q(x)]\| \leq c \mid x - \xi \mid$

bulunur. O halde

$\|g_2(x,\xi,\mu)[Q(\xi) - Q(x)]\| \leq c\|g_2(x,\xi,\mu)Q^a(x)\| \mid x - \xi \mid$

olacaktır. g_2 yi yerine yazdığımızda;

$$\|g_2(x,\xi,\mu)Q^a(x)\| = \|\frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}\{2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}|x-\xi|} sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \mid x - t \mid)\}Q^a(x)\|$$

olur. Bu ifadede $sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \mid x - \xi \mid)$ teriminin üstel açılımını kullanırsak;

$$\begin{aligned}\|g_2(x,\xi,\mu)Q^a(x)\| &= \|\frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}|x-\xi|}\frac{(e^{\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}|x-\xi|}e^{\frac{-i\alpha}{\sqrt{2}}|x-\xi|})}{2i}Q^a(x)\| \\ &\leq c\|\frac{\alpha^{-3}}{2}(e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|} - e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1+i)|x-\xi|})Q^a(x)\|\end{aligned}$$

$$\|D_1\|^2 \leq c^2\left[\int\limits_{|x-\xi|\leq 1} \|\frac{\alpha^{-3}}{2}(e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|} - e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1+i)|x-\xi|})Q^a(x)\| \mid x - \xi \mid \|A(\xi,\eta)\| d\xi\right]^2$$

$$\begin{aligned}\|{D_1}^2\| \leq & c^2\left[\int\limits_{|x-\xi|} \{\|\alpha^{-3}e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|}Q^a(x)\| + \right. \\ & \left. + \|\alpha^{-3}e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1+i)|x-\xi|}Q^a(x)\|\} \mid x - \xi \mid \|A(x,\eta)\| d\xi\right]^2 \qquad (3.15)\end{aligned}$$

$\frac{\alpha^{-3}}{2}e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|}Q^a(x)$ ifadesini , α nın ve $Q(x)$ in spektral açılımlarını gözönüne alalım.

$$\alpha^{-3}e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|}Q^a(x) = \sum_{j=1}^{\infty}[\omega_j(x) + \mu]^{\frac{-3}{4}} e^{\frac{-[\omega_j(x)+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|}\omega_j^a(x) < ., e_j > e_j$$

$$\Longrightarrow \| \alpha^{-3} e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|} Q^{a}(x) \mid x-\xi \mid \|$$

$$= \sup_{j} \{ \mid [\omega_j(x)+\mu] \mid^{\frac{-3}{4}} \mid e^{\frac{-[\omega_j(x)+\mu]}{\sqrt{2}}^{\frac{1}{4}}(1-i)|x-\xi|} \mid \mid \omega_j(x) \mid^{a} \mid x-\xi \mid \}$$

$$= \sup_{\lambda \in S_\epsilon} \{ \mid [\lambda+\mu] \mid^{\frac{-3}{4}} \mid e^{\frac{-[\lambda+\mu]}{\sqrt{2}}^{\frac{1}{4}}(1-i)|x-\xi|} \mid \mid \lambda \mid^{a} \mid x-\xi \mid \}$$

olur. Burada $\mu > 0$ ve λ lar Λ'nın dışında olduğundan dolayı $\mid \lambda + \mu \mid$ ifadesini sınırlandırırsak ; $\mid BM \mid = \mu sin\epsilon_0 d \subset r. \lambda \in \Lambda$ ve $\mu > 0$ iken

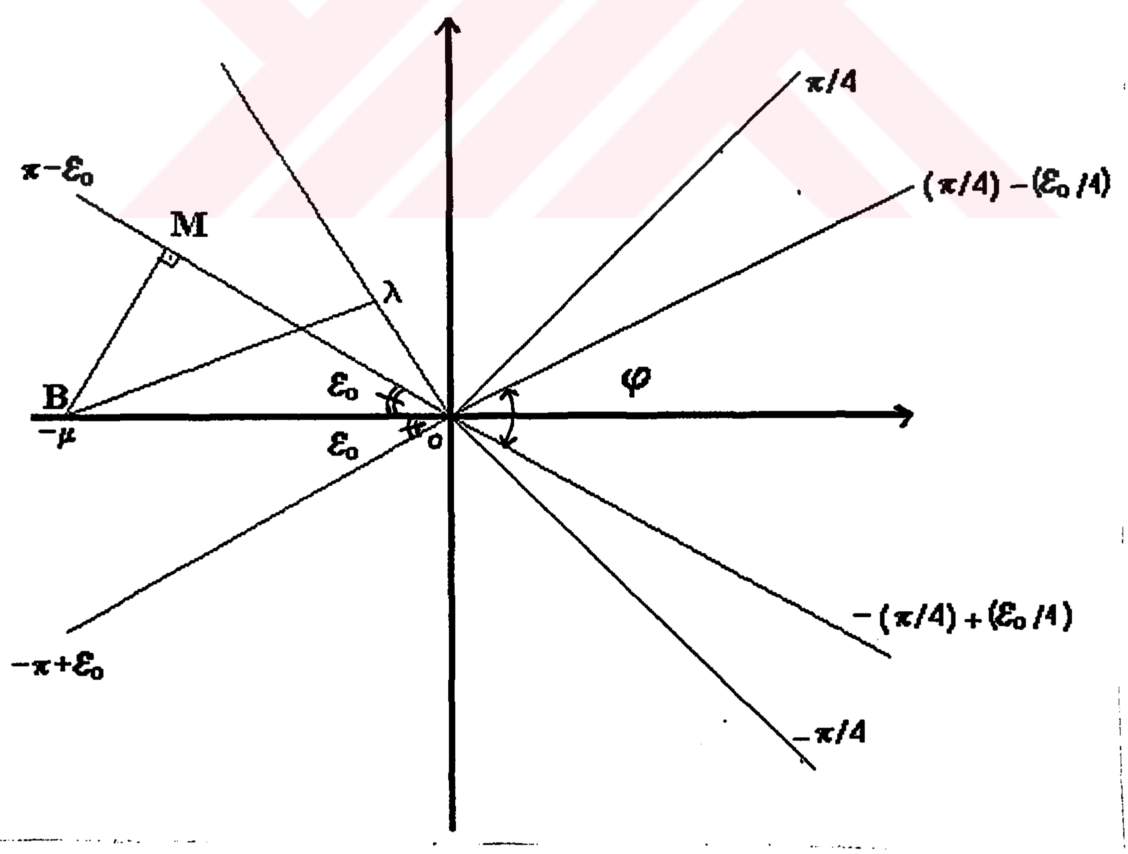
$$\Rightarrow \mid \lambda + \mu \mid \geq \mid BM \mid = \mu sin\epsilon_0$$

dır.

$-\pi + \epsilon_0 < arg(\lambda + \mu) < \pi - \epsilon_0$

O halde

$\frac{-\pi}{4} + \frac{\epsilon_0}{4} < arg(\lambda + \mu)^{\frac{1}{4}} < \frac{\pi}{4} - \frac{\epsilon_0}{4}$



Şekil 1

olur. Burada $arg(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}}=\varphi$ diyelim. Bu takdirde

$$\frac{-\pi}{4}+\frac{\epsilon_0}{4}<\varphi<\frac{\pi}{4}-\frac{\epsilon_0}{4}$$

olacaktır. Ve dolayısıyla

$$Re(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}}=|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}cos\varphi$$
$$Im(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}}=|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}sin\varphi$$

olur.

Ayrıca $(cos\varphi+sin\varphi)\geq m>0$ olduğu açıktır. Şimdi birde $cos\varphi-sin\varphi$ yi inceleyelim.

$$\begin{aligned}
(cos\varphi-sin\varphi) &= cos\varphi-cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)\\
&= -2sin\left(\frac{\varphi+\frac{\pi}{2}-\varphi}{2}\right)sin\left(\frac{\varphi-\frac{\pi}{2}+\varphi}{2}\right)\\
&= -2sin\frac{\pi}{4}sin(\varphi-\frac{\pi}{4})\\
&= 2sin\frac{\pi}{4}sin(\frac{\pi}{4}-\varphi)\\
&= 2\frac{\sqrt{2}}{2}sin(\frac{\pi}{4}-\varphi)\\
&= \sqrt{2}sin(\frac{\pi}{4}-\varphi)
\end{aligned}$$

φ nin en büyük değerini koyarsak $0<\epsilon_0<\pi$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
cos\varphi-sin\varphi &\geq \sqrt{2}sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\frac{\epsilon_0}{4})\\
&= \sqrt{2}sin\frac{\epsilon_0}{4}
\end{aligned}$$

olur. $sin\frac{\epsilon_0}{4}=m_0$ alırsak , o takdirde de $m_0>0$ olmak üzere

$$cos\varphi-sin\varphi\geq\sqrt{2}m_0$$

ve dolayısıyla $cos\varphi\pm sin\varphi\geq m>0$ olacaktır.

Şimdi tüm bu eşitsizlikleri gözönüne alırsak ;

$$\|\alpha^{-3} e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|} Q^a(x) \mid x-\xi \mid\|$$
$$= \sup_{\lambda\in S_\epsilon} \{| [\lambda+\mu] |^{\frac{-3}{4}} e^{\frac{-Re[\lambda+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}|x-\xi| + \frac{-Im[\lambda+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}|x-\xi|} | \lambda |^a \mid x-\xi \mid\}$$
$$\leq \sup_{\lambda\in S_\epsilon} \{| [\lambda+\mu] |^{\frac{-3}{4}} e^{\frac{-|[\lambda+\mu]|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} cos\varphi|x-\xi| + \frac{-|[\lambda+\mu]|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} sin\varphi|x-\xi|} | \lambda |^a \mid x-\xi \mid\}$$
$$= \sup_{\lambda\in S_\epsilon} \{| [\lambda+\mu] |^{\frac{-3}{4}} e^{\frac{-|[\lambda+\mu]|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} (cos\varphi + sin\varphi)|x-\xi|} | \lambda |^a \mid x-\xi \mid\}$$
$$\leq \sup_{\lambda\in S_\epsilon} \{| [\lambda+\mu] |^{\frac{-3}{4}} e^{\frac{-|[\lambda+\mu]|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} m|x-\xi|} | \lambda |^a \mid x-\xi \mid\}$$

$$= \sup_{\lambda\in S_\epsilon} \{| [\lambda+\mu] |^{\frac{1+\epsilon}{4}} | x-\xi |^{1+\epsilon} e^{\frac{-|[\lambda+\mu]|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} m|x-\xi|} | \lambda |^a | x-\xi |^{-\epsilon} | \lambda+\mu |^{\frac{-3}{4}-\frac{1+\epsilon}{4}}\}$$

bulunur. Burada $n > 0, \delta > 0, \gamma \geq 0$ olmak üzere $n^\gamma e^{-\delta n} \leq c$ özelliğine göre

$$n = | \lambda+\mu |^{\frac{1}{4}} | x-\xi | \quad , \quad \delta = \frac{m}{\sqrt{2}} \quad , \quad \gamma = 1+\epsilon$$

olarak seçtiğimizde;

$$\|\alpha^{-3} e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|} Q^a(x) \mid x-\xi \mid\| \leq c_1 \sup_{\lambda\in S_\epsilon} \{| \lambda+\mu |^{\frac{-3}{4}-\frac{1+\epsilon}{4}} | x-\xi |^{-\epsilon} | \lambda |^a\}$$

olacaktır. $0 < a < \frac{5}{4}$ koşulunu kullanarak $\epsilon < 1$ sayısını $\theta = a - 1 - \frac{\epsilon}{4} < 0$ olacak şekilde seçelim. Bu takdirde $| \lambda+\mu | \geq c_3 | \lambda |$ olduğu gözönüne alındığında

$$\begin{aligned}\|\alpha^{-3} e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|} Q^a(x) \mid x-\xi \mid\| &\leq c_1 \sup_{\lambda\in S_\epsilon} \{| \lambda+\mu |^{\frac{-3}{4}-\frac{1+\epsilon}{4}} | x-\xi |^{-\epsilon} | \lambda+\mu |^a\} \\ &= c_1 | x-\xi |^{-\epsilon} \sup_{\lambda\in S_\epsilon} \{| \lambda+\mu |^{\frac{-3}{4}-\frac{1+\epsilon}{4}+a}\} \\ &\leq c_1 | x-\xi |^{-\epsilon} \sup_{\lambda\in S_\epsilon} \{| \lambda+\mu |^\theta\}\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\|\alpha^{-3} e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|} Q^a(x) \mid x-\xi \mid\| \leq c_1 | x-\xi |^{-\epsilon} \mu^\theta$$

olarak elde edilir. Şimdi de (3.15) ifadesindeki ikinci normu gözönüne alalım ve benzer işlemleri tekrarlayalım.

$$\|\alpha^{-3} e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|} Q^a(x) \mid x-\xi \mid\|$$
$$= \sup_j \{| [\omega_j(x)+\mu] |^{\frac{-3}{4}} \mid e^{\frac{-[\omega_j(x)+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(1+i)|x-\xi|} \mid | \omega_j(x) |^a \mid x-\xi \mid\}$$
$$= \sup_{\lambda\in S_\epsilon} \{| [\lambda+\mu] |^{\frac{-3}{4}} \mid e^{\frac{-[\lambda+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(1+i)|x-\xi|} \mid | \lambda |^a \mid x-\xi \mid\}$$

$$\Rightarrow \|\alpha^{-3} e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|} Q^a(x) \mid x-\xi \mid\|$$
$$= \sup_{\lambda\in S_\epsilon} \{| [\lambda+\mu] |^{\frac{-3}{4}} e^{\frac{-Re[\lambda+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}|x-\xi| + \frac{Im[\lambda+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}|x-\xi|} | \lambda |^a \mid x-\xi \mid\}$$
$$\leq \sup_{\lambda\in S_\epsilon} \{| [\lambda+\mu] |^{\frac{-3}{4}} e^{\frac{-|[\lambda+\mu]|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} cos\varphi|x-\xi| + \frac{|[\lambda+\mu]|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} sin\varphi|x-\xi|} | \lambda |^a \mid x-\xi \mid\}$$
$$= \sup_{\lambda\in S_\epsilon} \{| [\lambda+\mu] |^{\frac{-3}{4}} e^{\frac{-|[\lambda+\mu]|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(cos\varphi - sin\varphi)|x-\xi|} | \lambda |^a \mid x-\xi \mid\}$$
$$\leq \sup_{\lambda\in S_\epsilon} \{| [\lambda+\mu] |^{\frac{-3}{4}} e^{\frac{-|[\lambda+\mu]|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} m|x-\xi|} | \lambda |^a \mid x-\xi \mid\}$$
$$= \sup_{\lambda\in S_\epsilon} \{| [\lambda+\mu] |^{\frac{1+\epsilon}{4}} \mid x-\xi \mid^{1+\epsilon} e^{\frac{-|[\lambda+\mu]|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} m|x-\xi|} | \lambda |^a | x-\xi |^{-\epsilon} | \lambda+\mu |^{\frac{-3}{4}-\frac{1+\epsilon}{4}}\}$$
$$\leq c_2 \sup_{\lambda\in S_\epsilon} \{| \lambda+\mu |^{\frac{-3}{4}-\frac{1+\epsilon}{4}} | x-\xi |^{-\epsilon} | \lambda+\mu |^a\}$$
$$= c_2 | x-\xi |^{-\epsilon} \sup_{\lambda\in S_\epsilon} \{| \lambda+\mu |^{\frac{-3}{4}-\frac{1+\epsilon}{4}+a}\}$$
$$\leq c_2 | x-\xi |^{-\epsilon} \sup_{\lambda\in S_\epsilon} \{| \lambda+\mu |^{\theta}\}$$

olur. O halde

$$\|\alpha^{-3} e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1+i)|x-\xi|} Q^a(x) \mid x-\xi \mid\| \leq c_3 | x-\xi |^{-\epsilon} \mu^\theta$$

olacaktır. Hesapladığımız bu iki normu (3.15) ifadesinde yerine yazarsak;

$$\|D_1\|^2 \leq c^2 \left[\int_{|x-\xi|\leq 1} [c_1 | x-\xi |^{-\epsilon} \mu^\theta + c_3 | x-\xi |^{-\epsilon} \mu^\theta] \|A(\xi,\eta)\| d\xi \right]^2$$

olur. $c^2[c_1 - c_3]^2 = C$ diyelim. O takdirde

$$\|D_1\|^2 \le C\mu^{2\theta}\left[\int\limits_{|x-\xi|\le 1} |x-\xi|^{-\epsilon}\|A(\xi,\eta)\|d\xi\right]^2$$

$$\Longrightarrow \|D_1\|^2_{X_2} \le \int_0^\infty\int_0^\infty C\mu^{2\theta}\left[\int\limits_{|x-\xi|\le 1} |x-\xi|^{-\epsilon}\|A(\xi,\eta)\|d\xi\right]^2 dxd\eta$$

dir. Bu son ifadeden

$$\int_0^\infty\left[\int\limits_{|x-\xi|\le 1} |x-\xi|^{-\epsilon}\|A(x,\xi)\|d\xi\right]^2 dx$$

integralini gözönüne alalım.

$$\int_0^\infty\left[\int\limits_{|x-\xi|\le 1} |x-\xi|^{-\epsilon}\|A(x,\xi)\|d\xi\right]^2 dx$$

$$= \int_0^\infty\left[\int\limits_{|x-\xi'|\le 1} |x-\xi'|^{-\epsilon}\|A(\xi',\eta)\|d\xi' \int\limits_{|x-\xi|\le 1} |x-\xi|^{-\epsilon}\|A(\xi,\eta)\|d\xi\right] dx$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi burada

$$\xi' - x = u' \Rightarrow \xi' = u' + x \quad , \quad d\xi' = du'$$

$$\xi - x = u \Rightarrow \xi = u + x \quad , \quad d\xi = du$$

değişken dönüşümlerini yapalım. O halde

$$\le \int_0^\infty\left[\int\limits_{|u'|\le 1} |u^I|^{-\epsilon}\|A(u'+x,\eta)\|du' \int\limits_{|u|\le 1} |u|^{-\epsilon}\|A(u+x,\eta)\|du\right] dx$$

$$= \int\limits_{|u'|\le 1} |u'|^{-\epsilon}du' \int\limits_{|u|\le 1} |u|^{-\epsilon}du \int_0^\infty \|A(u'+x,\eta)\|\|A(u+x,\eta)\|dx$$

olacaktır. Burada Hölder'in integral eşitsizliğine göre

$$\le \int\limits_{|u'|\le 1} |u'|^{-\epsilon}du' \int\limits_{|u|\le 1} |u|^{-\epsilon}du \left[\int_0^\infty \|A(u'+x,\eta)\|^2 dx \int_0^\infty \|A(u+x,\eta)\|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \int\limits_{|u'|\le 1} |u^I|^{-\epsilon}du' \int\limits_{|u|\le 1} |u|^{-\epsilon}du \left[\int_0^\infty \|A(u'+x,\eta)\|^2 dx \int_0^\infty \|A(u+v,\eta)\|^2 dv\right]^{\frac{1}{2}}$$

olur. Aşağıdaki değişken dönüşümlerini yaparsak ta;

$$x+u^{'}=v^{'} \quad , \quad dx=dv^{'} \quad , \quad v+u=v^{''} \quad , \quad dv=dv^{''}$$

$$= \int\limits_{|u^{'}|\leq 1} |\, u^{'} \,|^{-\epsilon} du^{'} \int\limits_{|u|\leq 1} |\, u \,|^{-\epsilon} du \left[\int_{u^{'}}^{\infty} \|A(v^{'},\eta)\|^{2} dv^{'} \int_{u}^{\infty} \|A(v^{''},\eta)\|^{2} dv^{''} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \int\limits_{|u^{'}|\leq 1} |\, u^{'} \,|^{-\epsilon} du^{'} \int\limits_{|u|\leq 1} |\, u \,|^{-\epsilon} du \left[\int_{0}^{\infty} \|A(v^{'},\eta)\|^{2} dv^{'} \int_{0}^{\infty} \|A(v^{''},\eta)\|^{2} dv^{''} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \int\limits_{|u^{'}|\leq 1} |\, u^{'} \,|^{-\epsilon} du^{'} \int\limits_{|u|\leq 1} |\, u \,|^{-\epsilon} du \left[\int_{0}^{\infty} \|A(x,\eta)\|^{2} dx \right].$$

$$= c_5 \int_{0}^{\infty} \|A(x,\eta)\|^{2} dx$$

olarak elde edilir. Bu denklemlerimizde geçen

$$\int\limits_{|u|\leq 1} |\, u \,|^{-\epsilon} du$$

integralinide aşağıdaki şekilde hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|u|\leq 1} |\, u \,|^{-\epsilon} du &= \int_{-1}^{1} |\, u \,|^{-\epsilon} du \\
&= \int_{-1}^{0} |\, u \,|^{-\epsilon} du + \int_{0}^{1} |\, u \,|^{-\epsilon} du \\
&= \int_{-1}^{0} |\, -u \,|^{-\epsilon} du + \int_{0}^{1} |\, u \,|^{-\epsilon} du \\
&= 2\int_{0}^{1} |\, u \,|^{-\epsilon} du \\
&= \frac{1}{1-\epsilon} \qquad ,(0<\epsilon<1).
\end{aligned}$$

O halde

$$\Longrightarrow \|D_1\|_{X_2}^{2} \leq C\mu^{2\theta} c_5 \|A(x,\eta)\|_{X_2}^{2}$$

ve dolayısıyla

$$\Longrightarrow \|D_1\| \leq C\mu^{\theta}\|A(x,\eta)\|_{X_2}$$

elde edilir. Benzer işlemler $\|D_2\|$ içinde yapılır.

$$\begin{aligned}
\|D_2\| &= \Big\| \int\limits_{|x-\xi|>1} g_2(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]A(\xi,\eta)d\xi \Big\| \\
&\leq \int\limits_{|x-\xi|>1} \|g_2(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]A(\xi,\eta)d\xi\| \\
&\leq \int\limits_{|x-\xi|>1} \|g_2(x,\xi,\mu)Q(\xi)\|\|A(\xi,\eta)\|d\xi + \\
&+ \int\limits_{|x-\xi|>1} \|g_2(x,\xi,\mu)Q(x)\|\|A(\xi,\eta)\|d\xi
\end{aligned}$$

Eşitsizliğin her iki tarafının karesini alalım.

$$\begin{aligned}
\|D_2\|^2 \leq 2&\Bigg[\int\limits_{|x-\xi|>1} \|g_2(x,\xi,\mu)Q(\xi)\|\|A(\xi,\eta)\|d\xi\Bigg]^2 + \\
&+\Bigg[\int\limits_{|x-\xi|>1} \|g_2(x,\xi,\mu)Q(x)\|\|A(\xi,\eta)\|d\xi\Bigg]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|D_2\|^2 \leq 2&\Bigg[\int\limits_{|x-\xi|>1} \|\alpha^{-3}[e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|} - e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1+i)|x-\xi|}]Q(\xi)\|\|A(\xi,\eta)\|d\xi\Bigg]^2 + \\
&+\Bigg[\int\limits_{|x-\xi|>1} \|\alpha^{-3}[e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|} - e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1+i)|x-\xi|}]Q(x)\|\|A(\xi,\eta)\|d\xi\Bigg]^2
\end{aligned}$$

Bu son denklemimizde α^{-3} terimi daima sınırlıdır. Çünkü $\alpha = \sqrt[4]{Q(x)+\mu}$ şeklinde tanımlamıştık ve $Q(x)$ 'in özdeğerleri olan $\omega_1, \cdots, \omega_n, \cdots$ lerin mutlak değerleri 1'den büyüktür. Bu nedenle α^{-3} terimine bir c sabiti olarak bakabiliriz. O halde

$$\begin{aligned}
\|D_2\|^2 \leq c^2\Bigg(&\Bigg[\int\limits_{|x-\xi|>1}\Big(\|e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|}Q(\xi)\| + \|e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1+i)|x-\xi|}Q(\xi)\|\Big)\|A(\xi,\eta)\|d\xi\Bigg]^2 + \\
&+\Bigg[\int\limits_{|x-\xi|>1}\Big(\|e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|}Q(x)\| + \|e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1+i)|x-\xi|}Q(x)\|\Big)\|A(\xi,\eta)\|d\xi\Bigg]^2\Bigg)
\end{aligned}$$

$$\|D_2\|^2 \leq c^2 \Bigg(\Bigg[\int\limits_{|x-\xi|>1} \Big(\|e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|} Q(\xi)\| + \|e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1+i)|x-\xi|} Q(\xi)\| \Big) \|A(\xi,\eta)\| d\xi \Bigg]^2$$

$$+ \Bigg[\int\limits_{|x-\xi^I|>1} \Big(\|e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi^I|} Q(\xi^I)\| + \|e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1+i)|x-\xi^I|} Q(\xi^I)\| \Big) \|A(\xi^I,\eta)\| d\xi^I \Bigg]^2 \Bigg)$$

$$+ c^2 \Bigg(\Bigg[\int\limits_{|x-\xi|>1} \Big(\|e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|} Q(x)\| + \|e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1+i)|x-\xi|} Q(x)\| \Big) \|A(\xi,\eta)\| d\xi \Bigg]^2 +$$

$$+ \Bigg[\int\limits_{|x-\xi^I|>1} \Big(\|e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi^I|} Q(x)\| + \|e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1+i)|x-\xi^I|} Q(x)\| \Big) \|A(\xi^I,\eta)\| d\xi^I \Bigg]^2 \Bigg)$$

olur. Bu son ifadelerde geçen üstel terimleri içeren normları sınırlandırmaya çalışalım. İlk olarak $\|e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|} Q(\xi)\|$ normunu gözönüne alalım.

$$\begin{aligned} e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|} Q(\xi) &= e^{\frac{-(Q(x)+\mu)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|} Q(\xi) \\ &= e^{\frac{-(Q(x)+\mu)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|} \quad e^{\frac{\sqrt{2}}{4}[Q(x)]^{\frac{1}{4}}|x-\xi|} \quad e^{\frac{-\sqrt{2}}{4}[Q(x)]^{\frac{1}{4}}|x-\xi|} \quad Q(\xi) \end{aligned}$$

Buradaki son iki terim $Q(x)$ için verilen 5.özelliğe göre aşağıdaki eşitsizliği sağlar;

$$\|e^{\frac{-\sqrt{2}}{4}[Q(x)]^{\frac{1}{4}}|x-\xi|} \quad Q(\xi)\| \leq C_1 \ ,$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned} \|e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|} Q(\xi)\| &\leq C_1 \|e^{\frac{-(Q(x)+\mu)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi| + \frac{\sqrt{2}}{4}[Q(x)]^{\frac{1}{4}}|x-\xi|}\| \\ &= C_1 \sup_{\lambda \in S_\epsilon} \quad | \, e^{\frac{-(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi| + \frac{\sqrt{2}}{4}[\lambda]^{\frac{1}{4}}|x-\xi|} \, | \\ &= C_1 \sup_{\lambda \in S_\epsilon} \left[e^{-\frac{Re(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}}|x-\xi|}{\sqrt{2}} - \frac{-Im(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}}|x-\xi|}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4} Re[\lambda]^{\frac{1}{4}}|x-\xi|} \right] \end{aligned}$$

olacaktır.

$$e^Z = e^{ReZ + iImZ} = e^{ReZ} e^{iImZ}$$

$$\Longrightarrow |e^Z| = |e^{ReZ}| \quad |e^{iImZ}| = e^{ReZ}$$

dır. Basitlik için $\frac{-\pi}{2} < arg\lambda < \frac{\pi}{2}$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$\frac{-\pi}{2} < arg\lambda < \frac{\pi}{2} \quad iken \quad \frac{-\pi}{2} < arg(\lambda+\mu) < \frac{\pi}{2}$$
$$\frac{-\pi}{8} < arg\lambda^{\frac{1}{4}} < \frac{\pi}{8} \quad iken \quad \frac{-\pi}{8} < arg(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}} < \frac{\pi}{8}$$

ve

$$Re(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}} = |\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}} cos\varphi$$
$$Im(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}} = |\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}} sin\varphi$$

$$\begin{aligned} Re\lambda^{\frac{1}{4}} &= |\lambda|^{\frac{1}{4}} cos\psi \\ &< |\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}} cos\varphi \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \psi < \varphi$$

şeklindedir. Bunun yanısıra $cos\varphi > 2sin\varphi$ olup olmadığını incelersek ;

$$sin2\varphi = 2sin\varphi cos\varphi \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2sin\varphi \leq \frac{\sqrt{2}}{2cos\varphi} < cos\varphi$$

dır. Buradan görüldüğü gibi istenen eşitsizlik elde edilmiştir. Ancak verilen aralıkta bunun sağlanıp sağlanmadığını araştıralım. Bunun için

$$tan\varphi < \frac{1}{2} \Longrightarrow tan\frac{\pi}{8} < \frac{1}{2}$$

eşitsizliğini sağlamaya çalışacağız.

$$\begin{aligned} \frac{sin\frac{\pi}{8}}{cos\frac{\pi}{8}} = \frac{\frac{1}{2}sin\frac{\pi}{4}}{cos^2\frac{\pi}{8}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{cos^2\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4cos^2\frac{\pi}{8}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2cos^2\frac{\pi}{8}+1-1} &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{cos\frac{\pi}{4}+1} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+1} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}}+1} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

bulunur ki buda eşitsizliğin sağlandığını gösterir öyle ki

$$\frac{\pi}{8} = \frac{3.14}{8} = 0.39 \qquad tan(0.39) = 0.414 < 0.5$$

dır. O halde

$$\|e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|}Q(\xi)\| \leq C_1 \sup_{\lambda\in S_\epsilon}\left[e^{\frac{-|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}|x-\xi|cos\varphi-\frac{|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}|x-\xi|sin\varphi+\frac{\sqrt{2}}{4}|\lambda|^{\frac{1}{4}}cos\psi|x-\xi|}\right]$$

olur. $\frac{-\pi}{8} < \varphi < \frac{\pi}{8}$ olmak üzere $\varphi = arg(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}}$ ve $\psi = arg(\lambda)^{\frac{1}{4}}$ idi. Bu aralıkta $2sin\varphi < cos\varphi$ dir, $sin\varphi < \frac{cos\varphi}{2}$ *ve* $cos\psi < cos\varphi$ olduğunu yukarıda incelemiştik. Ayrıca da

$$Re(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}} + Im(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}} < \tfrac{1}{2}Re(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}}$$

$$Re\lambda^{\frac{1}{4}} < |\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}cos\psi$$

$cos\varphi - 2sin\varphi \geq \delta_0$, $\delta_0 > 0$ olduğundan

$$\|e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x-\xi|}Q(\xi)\| \leq C_1 \sup_{\lambda\in S_\epsilon}\left[e^{\frac{-|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{2}}|x-\xi|cos\varphi(1+\delta_0)+\frac{\sqrt{2}}{4}|\lambda|^{\frac{1}{4}}cos\varphi|x-\xi|}\right]$$
$$\leq C_1 e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|x-\xi|}$$

dır. Diğer üstel terim içeren normda benzer şekilde hesaplanır ve

$$\|e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1+i)|x-\xi|}Q(\xi)\| \leq C_2 e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|x-\xi|}$$

olarak elde edilir. Böylece $\|D_2\|$ ifadesi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\Rightarrow \|D_2\|^2 \leq C^2\Bigg(\Bigg[\int\limits_{|x-\xi|>1}\{C_2e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|x-\xi|}+C_2e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|x-\xi|}\}\|A(\xi,\eta)\|d\xi\Bigg]$$
$$\Bigg[\int\limits_{|x-\xi'|>1}\{C_2e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|x-\xi'|}+C_2e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|x-\xi'|}\}\|A(\xi',\eta)\|d\xi'\Bigg]\Bigg)+$$
$$+C^2\Bigg(\Bigg[\int\limits_{|x-\xi|>1}\{C_2e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|x-\xi|}+C_2e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|x-\xi|}\}\|A(\xi,\eta)\|d\xi\Bigg]$$
$$\Bigg[\int\limits_{|x-\xi'|>1}\{C_2e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|x-\xi'|}+C_2e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|x-\xi'|}\}\|A(\xi',\eta)\|d\xi'\Bigg]\Bigg)$$

$$\Rightarrow \|D_2\|^2 \leq C^2 \left[\int\limits_{|x-\xi|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|x-\xi|} \|A(\xi,\eta)\| d\xi \right] \left[\int\limits_{|x-\xi'|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|x-\xi'|} \|A(\xi',\eta)\| d\xi' \right] +$$

$$+ C^2 \left[\int\limits_{|x-\xi|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|x-\xi|} \|A(\xi,\eta)\| d\xi \right] \left[\int\limits_{|x-\xi'|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|x-\xi'|} \|A(\xi',\eta)\| d\xi^I \right]$$

Eşitsizliğin her tarafının 0 dan ∞ a integralini alalım.

$$\Rightarrow \int_0^\infty \|D_2\|^2 \leq C^2 \int_0^\infty \left(\left[\int\limits_{|x-\xi|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|x-\xi|} \|A(\xi,\eta)\| d\xi \right] \right.$$

$$\left. \left[\int\limits_{|x-\xi'|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|x-\xi'|} \|A(\xi',\eta)\| d\xi^I \right] \right) dx +$$

$$+ C^2 \int_0^\infty \left(\left[\int\limits_{|x-\xi|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|x-\xi|} \|A(\xi,\eta)\| d\xi \right] \right.$$

$$\left. \left[\int\limits_{|x-\xi'|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|x-\xi^I|} \|A(\xi',\eta)\| d\xi' \right] \right) dx$$

olur. Burada da aşağıdaki gibi değişken dönüşümlerini yapalım.

$\xi' - x = u' \Longrightarrow \xi' = u' + x \quad , \quad d\xi' = du'$

$\xi - x = u \Longrightarrow \xi = u + x \quad , \quad d\xi = du$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \|D_2\|^2 \leq C^2 \int_0^\infty \left(\left[\int\limits_{|u|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|u|} \|A(u+x,\eta)\| du \right] \left[\int\limits_{|u'|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|u'|} \|A(u'+x,\eta)\| du' \right] \right)$$

$$+ C^2 \int_0^\infty \left(\left[\int\limits_{|u|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|u|} \|A(u+x,\eta)\| du \right] \left[\int\limits_{|u'|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|u'|} \|A(u'+x,\eta)\| du' \right] \right)$$

$$= C^2 \left(\int\limits_{|u|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|u|} du \int\limits_{|u'|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|u'|} du' \right) \left(\int_0^\infty \|A(u+x,\eta)\| \|A(u'+x,\eta)\| dx \right) \cdot$$

$$+ C^2 \left(\int\limits_{|u|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|u|} du \int\limits_{|u'|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|u'|} du' \right) \left(\int_0^\infty \|A(u+x,\eta)\| \|A(u'+x,\eta)\| dx \right)$$

$$= C^2\Bigg[\Bigg(\int_{|u|>1} e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|u|}du \int_{|u'|>1} e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|u'|}du'\Bigg) \cdot$$

$$\Bigg(\int_0^\infty \|A(u+x,\eta)\|^2 dx \int_0^\infty \|A(u'+x,\eta)\|^2 dx\Bigg)^2\Bigg]$$

$$= C^2\Bigg[\Bigg(\int_{|u|>1} e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|u|}du \int_{|u'|>1} e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|u'|}du'\Bigg)$$

$$\Bigg(\int_0^\infty \|A(u+v,\eta)\|^2 dv \int_0^\infty \|A(u'+x,\eta)\|^2 dx\Bigg)^2\Bigg]$$

Şimdi de şu değişken dönüşümlerini yaparsak ;

$$u' + x = v'' \quad \Longrightarrow du' = dv' \quad ; \quad u + v = v'' \quad \Longrightarrow du = dv''$$

$$= C^2\Bigg[\Bigg(\int_{|u|>1} e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|u|}du \int_{|u'|>1} e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|u'|}du'\Bigg)\Bigg(\int_u^\infty \|A(v'',\eta)\|^2 dv'' \int_{u'}^\infty \|A(v',\eta)\|^2 dv'\Bigg)^{\frac{1}{2}}\Bigg]$$

$$\leq C^2\Bigg[\Bigg(\int_{|u|>1} e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|u|}du \int_{|u'|>1} e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|u'|}du'\Bigg)\Bigg(\int_0^\infty \|A(v'',\eta)\|^2 dv'' \int_0^\infty \|A(v',\eta)\|^2 dv'\Bigg)^{\frac{1}{2}}\Bigg]$$

$$= C^2\Bigg[\Bigg(\int_{|u|>1} e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|u|}du \int_{|u'|>1} e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|u'|}du'\Bigg)\Bigg(\int_0^\infty \|A(x,\eta)\|^2 dx\Bigg)\Bigg]$$

$$= C^2\Bigg[\Bigg(\int_1^\infty e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|u|}du \int_1^\infty e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|u'|}du'\Bigg)\Bigg(\int_0^\infty \|A(x,\eta)\|^2 dx\Bigg)\Bigg]$$

$$= C^2\Bigg[\Bigg(\frac{-1}{\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}} e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|u|}\Big|_1^\infty\Bigg)\Bigg(\frac{-1}{\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}} e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|u'|}\Big|_1^\infty\Bigg)\Bigg(\int_0^\infty \|A(x,\eta)\|^2 dx\Bigg)\Bigg]$$

$$= C^2\Bigg[\Bigg(\frac{-1}{\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}}(0 - e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}})\Bigg)\Bigg(\frac{-1}{\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}}(0 - e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}})\Bigg)\Bigg(\int_0^\infty \|A(x,\eta)\|^2 dx\Bigg)\Bigg]$$

$$= 2C^2\Bigg(\frac{-1}{\delta_0^2\mu^{\frac{1}{2}}} e^{-2\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}}\Bigg)\Bigg(\int_0^\infty \|A(x,\eta)\|^2 dx\Bigg)\Bigg]$$

$$\Longrightarrow \int_0^\infty \|D_2\|^2 \leq \frac{C}{\delta_0^2\mu^{\frac{1}{2}}}\int_0^\infty \|A(x,\eta)\|^2 dx \tag{3.16}$$

olarak elde ederiz. Böylece N_2 operatörünün X_2 uzayında büzen olduğunu göstermiş olduk. Aynı işlemler diğer operatörler için yani N_1, N_3, N_4, N_5 operatörleri içinde aynıdır. O halde $\mu > 0$ ın büyük değerlerinde $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5$ olduğundan N

operatörü X_2 uzayında büzen operatördür. Biz N_2 operatörü için $\|N_2\| = O\left[\frac{1}{\mu}\right]$ elde ettik. Bu sonucu diğer operatörler içinde elde ederiz.

$$\|N_1\| = O\left[\frac{1}{\mu}\right], \|N_3\| = O\left[\frac{1}{\mu}\right], \|N_4\| = O\left[\frac{1}{\mu}\right], \|N_5\| = O\left[\frac{1}{\mu}\right]$$

Böylelikle yardımcı teoremimiz ispatlanmış olur.

Şimdi Green fonksiyonunun bu X_2 uzayında varolduğunu göstermemiz için bu uzayın bir elemanı olduğunu yani bu uzaya ait olduğunu göstermeye çalışalım.

Bunun için $g(x,\xi,\mu)$ in $g_4(x,\xi,\mu)$ elemanını gözönüne alalım ve X_2 uzayına ait olduğunu gösterelim;

$$\begin{aligned}
\left\|g_4(x,\eta,\mu)\right\|^2 &= \left\|\frac{\alpha^{-3}}{2\sqrt{2}}\{e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}[(B-A)sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))]\}\right\|^2 \\
&\leq C\left\|\frac{\alpha^{-3}}{2\sqrt{2}}\{e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))\}\right\|^2 \\
&= C\left\|\frac{\alpha^{-3}}{2\sqrt{2}}e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}\frac{e^{\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}-e^{\frac{-i\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}}{2i}\right\|^2 \\
&= C\left\|\frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}(e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\eta)}-e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1+i)(x+\eta)})\right\|^2 \\
&\leq C\left(\left\|\frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\eta)}\right\|^2+\left\|\frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1+i)(x+\eta)}\right\|^2\right)
\end{aligned}$$

Bu son eşitsizlikteki ilk normu gözönüne alalım.

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\eta)}\right\|^2 &= \left\|\frac{1}{4\sqrt{2}}[Q(x)+\mu I]^{\frac{-3}{4}}e^{\frac{-[Q(x)+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\xi)}\right\|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty}[\omega_j(x)+\mu]^{\frac{-3}{2}}e^{[\sqrt{2}Re[\omega_j(x)+\mu]^{\frac{1}{4}}-\sqrt{2}Im[\omega_j(x)+\mu]^{\frac{1}{4}}](x+\xi)} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{-3}{2}}e^{-\sqrt{2}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{1}{4}}(cos\varphi+sin\varphi)(x+\xi)} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{-3}{2}}e^{-\sqrt{2}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{1}{4}}m(x+\xi)}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Diğer norm ise

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1+i)(x+\eta)}\right\|^2 &= \left\|\frac{1}{4\sqrt{2}}[Q(x)+\mu]^{\frac{-3}{4}}e^{\frac{-[Q(x)+\mu I]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(1+i)(x+\xi)}\right\|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty}[\omega_j(x)+\mu]^{\frac{-3}{2}}e^{[-\sqrt{2}Re[\omega_j(x)+\mu]^{\frac{1}{4}}+\sqrt{2}Im[\omega_j(x)+\mu]^{\frac{1}{4}}](x+\xi)} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{-3}{2}}e^{-\sqrt{2}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{1}{4}}(cos\varphi-sin\varphi)(x+\xi)} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{-3}{2}}e^{-\sqrt{2}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{1}{4}}m(x+\xi)}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \left\|g_4(x,\eta,\mu)\right\|^2 \leq C\sum_{j=1}^{\infty}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{-3}{2}}e^{-\sqrt{2}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{1}{4}}m(x+\xi)}
$$

olacaktır. Bu son eşitsizliğin her iki tarafını 0 dan ∞ a integre edelim.

$$
\int_0^{\infty}\left\|g_4(x,\eta,\mu)\right\|^2 d\xi \leq C\sum_{j=1}^{\infty}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{-3}{2}}\int_0^{\infty}e^{-\sqrt{2}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{1}{4}}m(x+\xi)}d\xi
$$

$$
\int_0^{\infty}e^{-\sqrt{2}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{1}{4}}m(x+\xi)}d\xi
$$

integralini hesaplayalım.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty}e^{-\sqrt{2}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{1}{4}}m(x+\xi)}d\xi &= e^{-\sqrt{2}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{1}{4}}mx}\int_0^{\infty}e^{-\sqrt{2}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{1}{4}}m\xi}d\xi \\
&= -e^{-\sqrt{2}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{1}{4}}mx}\frac{1}{\sqrt{2}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{1}{4}}m}e^{-\sqrt{2}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{1}{4}}m\xi}\Big|_0^{\infty} \\
&= -e^{-\sqrt{2}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{1}{4}}mx}\frac{1}{\sqrt{2}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{1}{4}}m}(0-1) \\
&= \frac{e^{-\sqrt{2}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{1}{4}}mx}}{\sqrt{2}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{1}{4}}m}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \int_0^{\infty}\left\|g_4(x,\eta,\mu)\right\|^2 d\xi &\leq C\sum_{j=1}^{\infty}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{-3}{2}}\frac{e^{-\sqrt{2}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{1}{4}}mx}}{\sqrt{2}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{1}{4}}m} \\
&\leq C\sum_{j=1}^{\infty}|\omega_j(x)+\mu|^{\frac{-7}{4}} \\
&\leq C\sum_{j=1}^{\infty}|\omega_j(x)|^{\frac{-7}{4}}
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow \left\|g_4(x,\eta,\mu)\right\|^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty \left\|g_4(x,s,\mu)\right\|^2 ds \leq C \int_0^\infty F(x)dx < \infty$$

Başlangıçta verdiğimiz $Q(x)$ in 7.özelliğine göre bu şekilde elde edilir. Yani $Q(x)$ operatör fonksiyonumuzun özdeğerlerinden oluşan

$$F(x) = \sum_{j=1}^{\infty} |\omega_j(x)|^{\frac{-7}{4}}$$

in $L_2(0,\infty)$ a ait olduğunu ve

$$\int_0^\infty F(x)dx < \infty$$

olduğunu gözönüne alarak

$$\|g\|_{X_2} \leq \|g_1\|_{X_2} + \|g_2\|_{X_2} + \|g_3\|_{X_2} + \|g_4\|_{X_2} + \|g_5\|_{X_2}$$

in X_2 uzayına ait olduğunu gösterdik. Burada g fonksiyonunun X_2 uzayına ait olduğunu ve Yardımcı Teorem 3.1.1 ile de N operatörünün bu uzayda büzen olduğunu gösterdik ve dolayısıyla da aşağıda vereceğimiz Teorem 3.1.1 nde ispatını elde etmiş olduk.

Teorem 3.1.1 :

Eğer (4)-(5)-(6)-(7) koşulları sağlanıyorsa o zaman μ nün büyük değerlerinde (3.5) integral denkleminin

$$G(x,\eta,\mu) = g(x,\eta,\mu) - \int_0^\infty g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]G(\xi,\eta,\mu)d\xi$$

çalışmalarımızda gözönüne alacağımız H da dönüşüm yapan sınırlı $A(x,\eta)$ operatörlerinin oluşturduğu $X_2, X_3^{(p)}, X_4^{(s)}, X_5$ uzaylarının herbirinde çözümü var ve tektir. Bu çözüm ardışık yaklaşım yöntemi ile bulunabilir. [Bu uzaylar (Levitan,B.M.,1968) tarafından verilmiş ve bu uzayların Banach uzayı oldukları ispatlanmıştır.]

Yardımcı Teorem 3.1.2 :

$Q(x)$ operatör fonksiyonu (4)-(5) koşullarını sağlıyorsa $\mu > 0$ ın büyük değerlerinde N operatörü $X_3^{(p)}, X_4^{(s)}, X_5$ uzaylarının herbirinde büzen operatördür.

İspat :

N_3 operatörünün $X_4^{(\frac{-1}{4})}$ uzayında büzen olduğunu gösterelim.

$$g_3(x,\eta,\alpha) = \frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}\{2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}[(A+B)cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))]\}$$

ifadesini gözönüne alalım.

$$\begin{aligned}
N_3A(x,\xi) &= \int_0^\infty g_3(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]A(\xi,\eta)d\xi \\
&= \int\limits_{|x-\xi|\le 1} g_3(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]A(\xi,\eta)d\xi + \\
&+ \int\limits_{|x-\xi|>1} g_3(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]A(\xi,\eta)d\xi \\
&= D_1 + D_2 \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \|N_3A(x,\xi)\| = \|D_1 + D_2\| \le \|D_1\|\|D_2\|$$

Şimdi $\|D_1\|$ normunu sınırlandırmaya çalışalım.

$$\|D_1\| = \left\| \int\limits_{|x-\xi|\le 1} g_3(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]A(\xi,\eta)d\xi \right\|$$

$$\|D_1\| \le \int\limits_{|x-\xi|\le 1} \|g_3(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]A(\xi,\eta)\|d\xi$$

$$\|D_1\|_{X_4^{(\frac{-1}{4})}} \le \sup_{0<x<\infty}\int_0^\infty \left[\int\limits_{|x-\xi|\le 1} \|g_3(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta)A(\xi,\eta)\|d\xi\right]d\eta$$

$$\le \sup_{0<x<\infty}\int_0^\infty \left[\int\limits_{|x-\xi|\le 1} \|g_3(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\|\|Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta)A(\xi,\eta)\|d\xi\right]d\eta. \qquad (3.18)$$

olur. Buradaki ilk normu inceleyelim.

$$\begin{aligned}\|g_3(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\| &= \|g_3(x,\xi,\mu)Q^a(x)Q^{-a}(x)[Q(\xi)-Q(x)]\| \\ &\leq \|g_3(x,\xi,\mu)Q^a(x)\|\|Q^{-a}(x)[Q(\xi)-Q(x)]\|. \qquad (3.19)\end{aligned}$$

$Q(x)$ için verilen 4. özelliğe göre (3.18) eşitsizliği

$$\begin{aligned}\|g_3(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\| &\leq \|g_3(x,\xi,\mu)Q^a(x)C\|\| \\ &\leq C\Big\|\frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}\{2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}[(A+B)cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))]\}Q^a(x)|x-\xi|\Big\| \\ &\leq C_1\Big\|\alpha^{-3}e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}\frac{e^{\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}+e^{\frac{-i\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}}{2}Q^a(x)|x-\xi|\Big\| \\ &\leq C_2\Big\|\alpha^{-3}e^{\frac{-(1-i)\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}Q^a(x)|x-\xi|\Big\|+ \\ &\quad +\Big\|\alpha^{-3}e^{\frac{-(1+i)\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}Q^a(x)|x-\xi|\Big\|\end{aligned}$$

şeklinde olacaktır. Şimdi $\Big\|\alpha^{-3}e^{\frac{-(1-i)\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}Q^a(x)|x-\xi|\Big\|$ normu nedir hesaplamaya çalışalım.

$$\alpha^{-3}e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)|x+\xi|}Q^a(x) = \sum_{j=1}^{\infty}[\omega_j(x)+\mu]^{\frac{-3}{4}}e^{\frac{-[\omega_j(x)+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\xi)}\omega_j^a(x) < .,e_j > e_j$$

$$\begin{aligned}&\Big\|\alpha^{-3}e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\xi)}Q^a(x)|x-\xi|\Big\| \\ &= \sup_j\{\big|[\omega_j(x)+\mu]\big|^{\frac{-3}{4}}\big|e^{\frac{-[\omega_j(x)+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\xi)}\big|\big|\omega_j(x)\big|^a\big|x-\xi\big|\} \\ &\leq \sup_{\lambda\in S_\epsilon}\{\big|[\lambda+\mu]\big|^{\frac{-3}{4}}\big|e^{\frac{-[\lambda+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\xi)}\big|\big|\lambda\big|^a\big|x-\xi\big|\} \\ &= \sup_{\lambda\in S_\epsilon}\{\big|[\lambda+\mu]\big|^{\frac{-3}{4}}\big|e^{-[\frac{Re(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}+\frac{Im(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}](x+\xi)}\big|\big|\lambda\big|^a\big|x-\xi\big|\} \\ &\leq \sup_{\lambda\in S_\epsilon}\{\big|[\lambda+\mu]\big|^{\frac{-3}{4}}e^{\frac{-[\lambda+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}cos\varphi(x+\xi)-\frac{[\lambda+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}sin\varphi(x+\xi)}\big|\lambda\big|^a\big|x-\xi\big|\} \\ &= \sup_{\lambda\in S_\epsilon}\{\big|[\lambda+\mu]\big|^{\frac{-3}{4}}e^{\frac{-[\lambda+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(cos\varphi+sin\varphi)(x+\xi)}\big|\lambda\big|^a\big|x-\xi\big|\} \\ &\leq \sup_{\lambda\in S_\epsilon}\{\big|[\lambda+\mu]\big|^{\frac{-3}{4}}e^{\frac{-[\lambda+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}m(x+\xi)}\big|\lambda\big|^a\big|x-\xi\big|\} \\ &\leq \sup_{\lambda\in S_\epsilon}\{\big|[\lambda+\mu]\big|^{\frac{-3}{4}}e^{\frac{-[\lambda+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}m(x+\xi)}\big|\lambda\big|^a(x+\xi)\} \\ &= \sup_{\lambda\in S_\epsilon}\{\big|[\lambda+\mu]\big|^{\frac{1+\epsilon}{4}}(x+\xi)^{1+\epsilon}e^{\frac{-[\lambda+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}m(x+\xi)}\big|[\lambda+\mu]\big|^{\frac{-3}{4}-\frac{1+\epsilon}{4}}(x+\xi)^{-\epsilon}\big|\lambda\big|^a\}\end{aligned}$$

Burada da yine daha önce olduğu gibi

$$n = |\lambda + \mu|^{\frac{1}{4}}(x+\xi) \quad , \quad \delta = \frac{m}{\sqrt{2}} \quad , \quad \gamma = 1 + \epsilon$$

olarak seçmek üzere $n^{\gamma} e^{-n\delta} \leq c$ özelliğinden faydalanırsak;

$$\|\alpha^{-3} e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\xi)} Q^{a}(x)|x-\xi|\| \leq \sup_{\lambda \in S_\epsilon} \{ |[\lambda+\mu]|^{\frac{-3}{4} - \frac{1+\epsilon}{4}} (x+\xi)^{-\epsilon} |\lambda|^{a} \}$$

olur. Yine $0 < a < \frac{5}{4}; \epsilon < 1$ olmak üzere $a - 1 - \frac{\epsilon}{4}$ olacak şekilde seçelim. Bu takdirde $|\lambda + \mu| \geq c|\lambda|$ olduğu gözönüne alınmak suretiyle;

$$\begin{aligned}
\|\alpha^{-3} e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\xi)} Q^{a}(x)|x-\xi|\| &\leq c_4 \sup_{\lambda \in S_\epsilon} \{ |[\lambda+\mu]|^{\frac{-3}{4} - \frac{1+\epsilon}{4}} (x+\xi)^{-\epsilon} |\lambda+\mu|^{a} \} \\
&= c_4 (x+\xi)^{-\epsilon} \sup_{\lambda \in S_\epsilon} \{ |[\lambda+\mu]|^{\frac{-3}{4} - \frac{1+\epsilon}{4} + a} \} \\
&\leq c_4 (x+\xi)^{-\epsilon} \sup_{\lambda \in S_\epsilon} \{ |[\lambda+\mu]|^{\theta} \} \\
&\leq c_4 (x+\xi)^{-\epsilon} \mu^{\theta} \quad , \quad (\theta = a - 1 - \frac{\epsilon}{4} < 0).
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\|\alpha^{-3} e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1+i)(x+\xi)} Q^{a}(x)|x-\xi|\| \leq c_4 (x+\xi)^{-\epsilon} \mu^{\theta}$$

olduğu gösterilebilir.

O halde bu son elde ettiğimiz eşitsizliklere göre (3.18) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \int_0^\infty & \left[\int_{|x-\xi| \leq 1} \|g_3(x,\xi,\mu)[Q(\xi) - Q(x)]\| \|A(\xi,\eta)\| d\xi \right] \|Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta)\| d\eta \\
&= \int_0^\infty \left[\int_{|x-\xi| \leq 1} [c_4 (x+\xi)^{-\epsilon} \mu^{\theta} + c_4 (x+\xi)^{-\epsilon} \mu^{\theta}] \|A(\xi,\eta)\| d\xi \right] \|Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta)\| d\eta \\
&\leq c_5 \mu^{\theta} \int_0^\infty \left[\int_{|x-\xi| \leq 1} (x+\xi)^{-\epsilon} \|A(\xi,\eta)\| d\xi \right] \|Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta)\| d\eta \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

şeklinde olacaktır. Bu son ifadedeki

$$\int_{|x-\xi|\leq 1} (x+\xi)^{-\epsilon} \|A(\xi,\eta)\| d\xi$$

integralini gözönüne alalım ;

$$\int_{|x-\xi|\leq 1} (x+\xi)^{-\epsilon} \|A(\xi,\eta)\| d\xi \leq \int_{|x-\xi|\leq 1} \left|(x+\xi)^{-\epsilon}\right| \|A(\xi,\eta)\| d\xi$$

$(x \geq 0 \quad , \quad 0 < \xi < \infty$ olduğundan)

$\xi - x = u \quad \Longrightarrow \xi = u + x \quad , \quad d\xi = du$ değişken dönüşümünü yaparsak;

$$\int_{|u|\leq 1} |u|^{\epsilon} \|A(u+x,\eta)\| du$$

olur. Bu integrali (3.20) ifadesinde yerine yazalım. O halde

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left[\int_{|x-\xi|\leq 1} \|g_3(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\| \|A(\xi,\eta)\| d\xi \right] \|Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta)\| d\eta \\
&\leq c_5 \mu^\theta \int_0^\infty \left[\int_{|u|\leq 1} |u|^{\epsilon} \|A(u+x,\eta)\| du \right] \|Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta)\| d\eta \\
&\leq c_5 \mu^\theta \int_{|u|\leq 1} |u|^{\epsilon} du \int_0^\infty \|A(u+x,\eta) Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta)\| d\eta \\
&\leq c_5 \mu^\theta \frac{1}{1-\epsilon} \int_0^\infty \|A(u+x,\eta) Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta)\| d\eta \\
&\leq c_5 \mu^\theta \frac{1}{1-\epsilon} \quad \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \|A(u+x,\eta) Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta)\| d\eta
\end{aligned}$$

olur. Burada da $u + x = v \Longrightarrow x = v - u$ dersek,

$$\begin{aligned}
&\leq c_5 \mu^\theta \frac{1}{1-\epsilon} \sup_{0<v-u<\infty} \int_0^\infty \|A(v,\eta) Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta)\| d\eta \\
&\leq c_5 \mu^\theta \frac{1}{1-\epsilon} \sup_{0<v<\infty} \int_0^\infty \|A(v,\eta) Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta)\| d\eta \\
&\leq c_6 \|A(v,\eta)\|_{X_4^{(\frac{-1}{4})}}
\end{aligned}$$

olacaktır. O halde

$$\Longrightarrow \|D_1\|_{X_4^{(\frac{-1}{4})}} \leq c_6 \|A(v,\eta)\|_{X_4^{(\frac{-1}{4})}}$$

olarak elde ederiz. Benzer işlemlerle $\|D_2\|_{X_4^{(\frac{-1}{4})}}$ normunu inceleyelim.

$$D_2 = \int\limits_{|x-\xi|>1} g_3(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]A(\xi,\eta)d\xi \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\left\|D_2\right\| &= \left\| \int\limits_{|x-\xi|>1} g_3(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]A(\xi,\eta)d\xi \right\| \\
&\leq \int\limits_{|x-\xi|>1} \left\| g_3(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]A(\xi,\eta)\right\| d\xi \Longrightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\|D_2\right\|_{X_4^{(\frac{-1}{4})}} &\leq \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \left[\int\limits_{|x-\xi|>1} \left\| g_3(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta)A(\xi,\eta)\right\| d\xi \right] d\eta \\
&\leq \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \left[\int\limits_{|x-\xi|>1} \left\| g_3(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\right\| \left\| Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta)A(\xi,\eta)\right\| d\xi \right] d\eta \\
&\leq \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \left[\int\limits_{|x-\xi|>1} \left\| g_3(x,\xi,\mu)Q(\xi)\right\| \left\| Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta)A(\xi,\eta)\right\| d\xi \right] d\eta + \\
&+ \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \left[\int\limits_{|x-\xi|>1} \left\| g_3(x,\xi,\mu)Q(x)\right\| \left\| Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta)A(\xi,\eta)\right\| d\xi \right] d\eta \\
&\leq \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \left[\int\limits_{|x-\xi|>1} \left\| \frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} \{2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}[(A+B)cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))]\}Q(\xi)\right\| \right. \\
&\qquad \left. \left\| Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta)A(\xi,\eta)\right\| d\xi \right] d\eta + \\
&+ \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \left[\int\limits_{|x-\xi|>1} \left\| \frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} \{2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}[(A+B)cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))]\}Q(x)\right\| \right. \\
&\qquad \left. \left\| Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta)A(\xi,\eta)\right\| d\xi \right] d\eta
\end{aligned}$$

$$\leq \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \Bigg[\int\limits_{|x-\xi|>1} \Big\| \frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} \{ 2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)} (A+B) \frac{e^{\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}(x+\xi)} + e^{\frac{-i\alpha}{\sqrt{2}}(x+\xi)}}{2} \} Q(\xi) \Big\|$$

$$\Big\| Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta) A(\xi,\eta) \Big\| d\xi \Bigg] d\eta +$$

$$+ \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \Bigg[\int\limits_{|x-\xi|>1} \Big\| \frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} \{ 2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)} (A+B) \frac{e^{\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}(x+\xi)} + e^{\frac{-i\alpha}{\sqrt{2}}(x+\xi)}}{2} \} Q(x) \Big\|$$

$$\Big\| Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta) A(\xi,\eta) \Big\| d\xi \Bigg] d\eta$$

$$\leq C \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \Bigg[\int\limits_{|x-\xi|>1} \Big\| \{ e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\xi)} + e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1+i)(x+\xi)} \} Q(\xi) \Big\| \Big\| Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta) A(\xi,\eta) \Big\| d\xi \Bigg] d\eta +$$

$$+ \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \Bigg[\int\limits_{|x-\xi|>1} \Big\| \{ e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\xi)} + e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1+i)(x+\xi)} \} Q(x) \Big\| \Big\| Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta) A(\xi,\eta) \Big\| d\xi \Bigg] d\eta$$

Burada $C = \| \frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}(A+B) \|$ olarak aldık.Ve α^{-3} ün sınırlı olduğu dikkate alındı.

$$\leq C \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \Bigg[\int\limits_{|x-\xi|>1} \Big\| e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\xi)} Q(\xi) \Big\| \Big\| Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta) A(\xi,\eta) \Big\| d\xi \Bigg] d\eta +$$

$$+ \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \Bigg[\int\limits_{|x-\xi|>1} \Big\| e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1+i)(x+\xi)} Q(\xi) \Big\| \Big\| Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta) A(\xi,\eta) \Big\| d\xi \Bigg] d\eta +$$

$$+ \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \Bigg[\int\limits_{|x-\xi|>1} \Big\| e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\xi)} Q(x) \Big\| \Big\| Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta) A(\xi,\eta) \Big\| d\xi \Bigg] d\eta +$$

$$+ \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \Bigg[\int\limits_{|x-\xi|>1} \Big\| e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1+i)(x+\xi)} Q(x) \Big\| \Big\| Q^{(\frac{-1}{4})}(\eta) A(\xi,\eta) \Big\| d\xi \Bigg] d\eta \qquad (3.21)$$

Şimdi bu (3.21) eşitsizliğinin ikinci yanındaki ilk terimin

$$\Big\| e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\xi)} Q(\xi) \Big\|$$

normunu hesaplayalım.

$$e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\xi)} Q(\xi) = e^{\frac{-[Q(x)+\mu I]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\xi)} Q(\xi)$$

$$= e^{\frac{-[Q(x)+\mu I]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\xi)} e^{\frac{\sqrt{2}}{4} Q^{\frac{1}{4}}(x)|x-\xi|} e^{\frac{-\sqrt{2}}{4} Q^{\frac{1}{4}}(x)|x-\xi|} Q(\xi)$$

$Q(x)$ için verdiğimiz 5.özelliği kullandığımızda

$$\left\|e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\xi)}Q(\xi)\right\| \leq c\left\|e^{\frac{-[Q(x)+\mu I]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\xi)+\frac{\sqrt{2}}{4}Q^{\frac{1}{4}}(x)|x-\xi|}\right\|$$

$$\leq \sup_{j}\left\{\left|e^{\frac{-[\omega_j(x)+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\xi)+\frac{\sqrt{2}}{4}\omega_j^{\frac{1}{4}}(x)|x-\xi|}\right|\right\}$$

$$\leq \sup_{\lambda\in S_\epsilon}\left\{\left|e^{\frac{-[\lambda+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\xi)+\frac{\sqrt{2}}{4}\lambda^{\frac{1}{4}}|x-\xi|}\right|\right\}$$

$$\leq \sup_{\lambda\in S_\epsilon}\left\{\left|e^{\frac{-Re[\lambda+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(x+\xi)-\frac{Im[\lambda+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(x+\xi)\frac{\sqrt{2}}{4}\lambda^{\frac{1}{4}}|x-\xi|}\right|\right\}$$

$$\leq \sup_{\lambda\in S_\epsilon}\left\{\left|e^{\frac{|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}cos\varphi(x+\xi)-\frac{|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}sin\varphi(x+\xi)+\frac{\sqrt{2}}{4}\lambda^{\frac{1}{4}}cos\psi|x-\xi|}\right|\right\}$$

$$\leq \sup_{\lambda\in S_\epsilon}\left\{\left|e^{\frac{|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{2}}(1+\delta_0)(x+\xi)+\frac{\sqrt{2}}{4}\lambda^{\frac{1}{4}}cos\varphi(x+\xi)}\right|\right\}$$

$$\leq ce^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}(x+\xi)}$$

olacaktır. Burada daha önce olduğu gibi $\frac{-\pi}{8} < \varphi < \frac{\pi}{8}$ olmak üzere $\varphi = arg(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}}$, $\psi = arg\lambda^{\frac{1}{4}}$ olduğundan bu aralıkta $2sin\varphi < cos\varphi$ ve dolayısıyla $sin\varphi < \frac{cos\varphi}{2}$ ve $cos\psi < cos\varphi$ olduğu gözönüne alınmıştır. Eşitsizliğin ikinci terimi bu işlemlere benzer olarak $ce^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}(x+\xi)}$ şeklinde elde edilir.

Şimdi de (3.21) eşitsizliğinin 4.terimini gözönüne alalım ve ilk normu hesaplayalım.

$$\left\|e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(1+i)(x+\xi)}Q(x)\right\| = \sup_{j}\left|e^{\frac{-[\omega_j(x)+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(1+i)(x+\xi)}\omega_j(x)\right|$$

$$\leq \sup_{\lambda\in S_\epsilon}\left|\lambda\right| \quad \left|e^{\frac{-[\lambda+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(1+i)(x+\xi)}\right|$$

$$\leq \sup_{\lambda\in S_\epsilon}\left|\lambda\right| \quad e^{\left(\frac{-Re[\lambda+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}+\frac{Im[\lambda+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}\right)(x+\xi)}$$

$$\leq \sup_{\lambda\in S_\epsilon}\left|\lambda\right| \quad e^{\frac{-|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}cos\varphi(x+\xi)+\frac{Im|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}sin\varphi(x+\xi)}$$

$$\leq C\sup_{\lambda\in S_\epsilon}e^{\frac{(x+\xi)}{\sqrt{2}}\delta_0|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}}$$

$$\leq Ce^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}(x+\xi)}$$

olarak elde edilir. (3.21) deki 3.terim içinde benzer işlemler yapılabilir. O halde

$$\Rightarrow \left\|D_2\right\| \leq C_1 \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \left[\int_{|x-\xi|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}(x+\xi)} \left\|Q^{\frac{-1}{4}}(\eta) A(\xi,\eta)\right\| d\xi \right] d\eta$$

$$\leq C_1 \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \left[\int_{|x-\xi|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}(x+\xi)} \left\|A(\xi,\eta)\right\| d\xi \right] \left\|Q^{\frac{-1}{4}}(\eta)\right\| d\eta \qquad (3.22)$$

Şimdi bu son ifadedeki

$$\int_{|x-\xi|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}(x+\xi)} \left\|A(\xi,\eta)\right\| d\xi$$

integralini inceleyelim.

$$\int_{|x-\xi|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}(x+\xi)} \left\|A(\xi,\eta)\right\| d\xi \leq \int_{|x-\xi|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|x-\xi|} \left\|A(\xi,\eta)\right\| d\xi$$

dir. $\xi - x = u$ değişken dönüşümünü yapacak olursak $\xi = u + x$ ve $d\xi = du$ olmak üzere

$$\int_{|x-\xi|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|x-\xi|} \left\|A(\xi,\eta)\right\| d\xi \leq c \int_{|u|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|u|} \left\|A(u+x,\eta)\right\| du$$

olur. Bu elde ettiğimizi (3.22) ifadesinde yerine yazalım ;

$$\left\|D_2\right\| \leq C_1 \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \left[\int_{|u|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|u|} \left\|A(u+x,\eta)\right\| du \right] \left\|Q^{\frac{-1}{4}}(\eta)\right\| d\eta$$

$$\leq C_1 \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \left[\int_{|u|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|u|} du \right] \left\|A(u+x,\eta) Q^{\frac{-1}{4}}(\eta)\right\| d\eta$$

olur. Şimdi

$$\int_{|u|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|u|} du$$

integralini hesaplayalım.

$$
\begin{aligned}
\int_{|u|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|u|} du &= \int_1^{\infty} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}} u} du \\
&= \frac{-1}{\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}} u} \Big|_1^{\infty} \\
&= \frac{-1}{\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}} (0 - e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}}) \\
&\leq \frac{C}{\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}}
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur. O halde $u + x = v$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \left\|D_2\right\| &\leq \frac{C_2}{\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}} \sup_{0<v-u<\infty} \int_0^{\infty} \left\|A(v,\eta) Q^{\frac{-1}{4}}(\eta)\right\| d\eta \\
&\leq \frac{C_3}{\mu^{\frac{1}{4}}} \left\|A(v,\eta)\right\|_{X_4^{(\frac{-1}{4})}}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Böylece N_3 operatörünün $X_4^{(\frac{-1}{4})}$ uzayında büzen operatör olduğu görülmektedir. Aynı işlemler diğer operatörler için yani N_1, N_2, N_4, N_5 operatörleri içinde aynıdır.

O halde $\mu > 0$ ın büyük değerlerinde $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5$ olduğundan N operatörü $X_4^{(\frac{-1}{4})}$ uzayında büzen operatördür. $X_3^{(p)}, X_4^{(s)}, X_5$ uzaylarında da N operatörünün büzen olduğu benzer şekilde gösterilebilir. Böylece bu yardımcı teoremimizde ispatlanmış olur.

g fonksiyonunun da bu uzaylara yani $X_3^{(p)}, X_4^{(s)}, X_5$ ait olduğu daha önce X_2 uzayına ait olduğunu gösterdiğimiz şekilde kolayca gösterilebilir.

3.2 Green Fonksiyonunun Türevleri

Şimdi verilen uzaylarda tek olduğunu gösterdiğimiz $G(x, \eta, \mu)$ Green fonksiyonunun Green fonksiyonu olma özelliklerini sağladığını göstermeye çalışacağız. Öncelikle Green fonksiyonunun 1.,2. ve 3. mertebe türevlerinin varolduğunu gösterelim.

$$G(x,\eta,\mu) = g(x,\eta,\mu) - \int_0^\infty g(x,\xi,\mu)[Q(\xi) - Q(x)]G(\xi,\eta,\mu)d\xi$$

olarak belirlemiştik. Buradan η ya göre türev alalım ;

$$\frac{\partial G(x,\eta,\mu)}{\partial\eta} = \frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta} - \int_0^\infty g(x,\xi,\mu)[Q(\xi) - Q(x)]\frac{\partial G(\xi,\eta,\mu)}{\partial\eta}d\xi$$

ve tekrar bu ifadeden η ya göre türev alırsak ;

$$\frac{\partial^2 G(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^2} = \frac{\partial^2 g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^2} - \int_0^\infty g(x,\xi,\mu)[Q(\xi) - Q(x)]\frac{\partial^2 G(\xi,\eta,\mu)}{\partial\eta^2}d\xi$$

olacaktır. İşleme bu şekilde devam edersek n.türev ;

$$\frac{\partial^n G(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^n} = \frac{\partial^n g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^n} - \int_0^\infty g(x,\xi,\mu)[Q(\xi) - Q(x)]\frac{\partial^n G(\xi,\eta,\mu)}{\partial\eta^n}d\xi$$

olacaktır. Burada

$$\frac{\partial^n G(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^n} = E_n(x,\eta,\mu)$$

şeklinde ifade edersek, bu son ifade

$$E_n(x,\eta,\mu) = \frac{\partial^n g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^n} - \int_0^\infty g(x,\xi,\mu)[Q(\xi) - Q(x)]E_n(x,\eta,\mu)d\xi \quad (3.23)$$

ya da daha önce N operatörü ile ifade ettiğimiz gibi ;

$$E_n(x,\eta,\mu) = \frac{\partial^n g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^n} - NE_n(x,\eta,\mu) \qquad , \qquad (n = 1,2,3)$$

olur.

Bu integral denklemi $X_3^{(1)}$ uzayında inceleyelim. Bunun için $\mu > 0$ değerlerinde $p = 1$ için N in $X_3^{(1)}$ de büzen operatör olduğunu gösterelim. O halde N_1 operatörünü gözönüne alalım ve bu uzayda büzen olduğunu göstermeye çalışalım.

$g_1(x,\eta,\alpha) = \frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}\{2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}|x-\eta|}cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x-\eta))\}$

idi.

$$N_1A(x,\xi) = \int_0^\infty \left[\frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}\{2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}|x-\eta|}cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x-\eta))\}[Q(\xi)-Q(x)]A(\xi,\eta)\right]d\xi$$
$$= \int\limits_{|x-\xi|\le 1} \left[\frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}\{2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}|x-\eta|}cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x-\eta))\}[Q(\xi)-Q(x)]A(\xi,\eta)\right]d\xi +$$
$$+ \int\limits_{|x-\xi|> 1} \left[\frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}\{2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}|x-\eta|}cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x-\eta))\}[Q(\xi)-Q(x)]A(\xi,\eta)\right]d\xi$$

$$\left\|N_1A(x,\xi)\right\| \le \left\|\int\limits_{|x-\xi|\le 1} \left[\frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}\{2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}|x-\eta|}cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x-\eta))\}[Q(\xi)-Q(x)]A(\xi,\eta)\right]d\xi\right\| +$$
$$+ \left\|\int\limits_{|x-\xi|> 1} \left[\frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}\{2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}|x-\eta|}cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x-\eta))\}[Q(\xi)-Q(x)]A(\xi,\eta)\right]d\xi\right\|$$
$$\le \|D_1\| + \|D_2\|$$

$$\Rightarrow \|D_1\| = \left\|\int\limits_{|x-\xi|\le 1} \left[\frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}}\{2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}|x-\eta|}cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x-\eta))\}[Q(\xi)-Q(x)]A(\xi,\eta)\right]d\xi\right\| +$$
$$\le \int\limits_{|x-\xi|\le 1} \left\|\frac{\alpha^{-3}}{2\sqrt{2}}e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}|x-\eta|}\left(\frac{e^{\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}|x-\eta|}+e^{\frac{-i\alpha}{\sqrt{2}}|x-\eta|}}{2}\right)Q^a(x)Q^{-a}(x)[Q(\xi)-Q(x)]A(\xi,\eta)\right]\right\|d\xi$$

$Q(x)$ için verilen 4.özellik kullanılmak suretiyle bu son ifade ,

$$\|D_1\| \le C \int_{|x-\xi|\le 1} \Big[\Big\| \frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} e^{\frac{-(1-i)\alpha}{\sqrt{2}}|x-\eta|} Q^a(x) \Big\|$$

$$+ \Big\| \frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} e^{\frac{-(1+i)\alpha}{\sqrt{2}}|x-\eta|} Q^a(x) \Big\| \Big] \Big| x-\xi \Big| \Big\| A(\xi,\eta) \Big\| d\xi$$

$$\le C \int_{|x-\xi|\le 1} \Big[\Big\| \frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} e^{\frac{-(1-i)\alpha}{\sqrt{2}}|x-\eta|} Q^a(x)(x-\xi) \Big\|$$

$$+ \Big\| \frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} e^{\frac{-(1+i)\alpha}{\sqrt{2}}|x-\eta|} Q^a(x)(x-\xi) \Big\| \Big] \Big\| A(\xi,\eta) \Big\| d\xi$$

olarak bulunur. Bu son ifadedeki normların değerlerini daha önce yardımcı teoremlerimizi ispatlarken hesaplamıştık. Bulduğumuz o değerleri burada yerine yazarsak;

$$\|D_1\| \le C\mu^{\theta} \Big[\int_{|x-\xi|\le 1} \Big| x-\xi \Big|^{-\epsilon} \Big\| A(\xi,\eta) \Big\| d\xi \Big]$$

olarak elde edilir. O halde

$$\|D_1\|_{X_3^{(1)}} \le C\mu^{\theta} \sup_{0<x<\infty} \int_0^{\infty} \Big[\int_{|x-\xi|\le 1} \Big| x-\xi \Big|^{-\epsilon} \Big\| A(\xi,\eta) \Big\| d\xi \Big] d\eta$$

olacaktır. Şimdi

$$\int_{|x-\xi|\le 1} \Big| x-\xi \Big|^{-\epsilon} \Big\| A(\xi,\eta) \Big\| d\xi$$

integralini hesaplayalım . $\xi - x = u \quad \Longrightarrow \quad d\xi = du$ olmak üzere

$$\int_{|x-\xi|\le 1} \Big| x-\xi \Big|^{-\epsilon} \Big\| A(\xi,\eta) \Big\| d\xi = \int_{|u|\le 1} |u|^{-\epsilon} \Big\| A(u+x,\eta) \Big\| du$$

dir. Şu halde

$$\Rightarrow \|D_1\|_{X_3^{(1)}} \leq C\mu^\theta \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \left[\int_{|u|\leq 1} |u|^{-\epsilon} \Big\|A(u+x,\eta)\Big\| du \right] d\eta$$

$$\leq C\mu^\theta \int_{|u|\leq 1} \Big|u\Big|^{-\epsilon} \sup_{0<x<\infty} \left[\int_0^\infty \Big\|A(u+x,\eta)\Big\| du \right] d\eta$$

olur. Burada da $u + x = v$ olarak aldığımızda ;

$$\Rightarrow \|D_1\|_{X_3^{(1)}} \leq C\mu^\theta \frac{1}{1-\epsilon} \sup_{0<x<\infty} \left[\int_0^\infty \Big\|A(u+x,\eta)\Big\| du \right] d\eta$$

$$\leq C_1\mu^\theta \Big\|A(u+x,\eta)\Big\|_{X_3^{(1)}}$$

olarak elde edilir.

$$\Big\|D_2\Big\| = \Big\| \int_{|x-\xi|>1} \left[\frac{\alpha^{-3}}{4\sqrt{2}} \{2e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}|x-\eta|} cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x-\eta))\}[Q(\xi) - Q(x)]A(\xi,\eta) \right] d\xi \Big\|$$

olduğundan D_1 için yaptığımız işlemlere benzer olan işlemler D_2 içinde yapıldığında

$$\Big\|D_2\Big\| \leq C \int_{|x-\xi|>1} e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|x-\xi|} \Big\|A(\xi,\eta)\Big\| d\xi$$

olacaktır. $X_3^{(1)}$ deki normu ise ;

$$\Big\|D_2\Big\|_{X_3^{(1)}} \leq C \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \left[\int_{|x-\xi|>1} e^{-\delta_0\mu^{\frac{1}{4}}|x-\xi|} \Big\|A(\xi,\eta)\Big\| d\xi \right] d\eta$$

şeklinde olacaktır.

$\xi - x = u \quad \Rightarrow \quad \xi = x + u \quad \Rightarrow \quad d\xi = du$ değişken dönüşümlerini yaptığımızda ise

$$
\begin{aligned}
\left\|D_2\right\|_{X_3^{(1)}} &\leq C \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \left[\int\limits_{|u|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|u|} \left\|A(u+x,\eta)\right\| du \right] d\eta \\
&\leq C \int\limits_{|u|>1} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}|u|} du \sup_{0<x<\infty} \left[\int_0^\infty \left\|A(u+x,\eta)\right\| d\eta \right] \\
&\leq C \int_1^\infty e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}} u} du \sup_{0<x<\infty} \left[\int_0^\infty \left\|A(u+x,\eta)\right\| d\eta \right] \\
&\leq C \left(\frac{-1}{\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}} u} \right)\Big|_1^\infty \sup_{0<x<\infty} \left[\int_0^\infty \left\|A(u+x,\eta)\right\| d\eta \right] \\
&\leq C \left(\frac{-1}{\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}} (0 - e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}}) \right) \sup_{0<x<\infty} \left[\int_0^\infty \left\|A(v,\eta)\right\| d\eta \right] \\
&\leq C \frac{-1}{\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}} e^{-\delta_0 \mu^{\frac{1}{4}}} \sup_{0<x<\infty} \int_0^\infty \left\|A(v,\eta)\right\| d\eta \\
&\leq \frac{C}{\mu^{\frac{1}{4}}} \left\|A(v,\eta)\right\|_{X_3^{(1)}}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir yani

$$
\left\|D_2\right\|_{X_3^{(1)}} \leq \frac{C}{\mu^{\frac{1}{4}}} \left\|A(v,\eta)\right\|_{X_3^{(1)}}
$$

dir.

N_1 operatörü $\mu > 0$ ın büyük değerlerinde $X_3^{(1)}$ uzayında büzen operatördür. N_2, N_3, N_4 ve N_5 operatörlerininde bu uzayda büzen olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

Şimdi de $\frac{\partial^n g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^n}$ ifadesinin bu uzaya ait olduğunu göstermeye çalışalım ve böylece (3.23) ifadesinin $\mu > 0$ ın büyük değerlerinde $X_3^{(1)}$ uzayında tek çözüme sahip olduğunu gösterelim.

$$\frac{\partial g_1(x,\eta,\alpha)}{\partial\eta} = \frac{\alpha^{-2}}{4}e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}|x-\eta|}\left[cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x-\eta))+sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x-\eta))\right]$$

$$\frac{\partial g_2(x,\eta,\alpha)}{\partial\eta} = \frac{\alpha^{-2}}{4}e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}|x-\eta|}\left[sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\mid x-\eta\mid))+cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x-\eta))\right]$$

$$\frac{\partial g_3(x,\eta,\alpha)}{\partial\eta} = \frac{-\alpha^{-2}}{4}(A+B)e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}\left[cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))+sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))\right]$$

$$\frac{\partial g_4(x,\eta,\alpha)}{\partial\eta} = \frac{-\alpha^{-2}}{4}(B-A)e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}\left[sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))+cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))\right]$$

$$\frac{\partial g_5(x,\eta,\alpha)}{\partial\eta} = \frac{-\alpha^{-2}}{8}ce^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}\left[cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\eta-x))+sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\eta-x))\right]$$

dir.

$$E_1(x,\eta,\mu) = \frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta} - NE_1(x,\eta,\mu)$$

$$\begin{aligned} E_n(x,\eta,\mu) &= \frac{\partial^n G(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^n} \\ &= \frac{\partial^n g_1(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^n}+\frac{\partial^n g_2(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^n}+\frac{\partial^n g_3(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^n}+\frac{\partial^n g_4(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^n}+\frac{\partial^n g_5(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^n} \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} E_1(x,\eta,\mu) &= \frac{\partial G(x,\eta,\mu)}{\partial\eta} \\ &= \frac{\partial g_1(x,\eta,\mu)}{\partial\eta}+\frac{\partial g_2(x,\eta,\mu)}{\partial\eta}+\frac{\partial g_3(x,\eta,\mu)}{\partial\eta}+\frac{\partial g_4(x,\eta,\mu)}{\partial\eta}+\frac{\partial g_5(x,\eta,\mu)}{\partial\eta} \end{aligned}$$

olduğunu gözönüne almak suretiyle $\frac{\partial^n g_4(x,\eta,\alpha)}{\partial\eta^n}$ ifadesinin bu uzaya ait olduğunu gösterelim.

$$\frac{\partial g_4(x,\eta,\mu)}{\partial\eta} = \frac{-\alpha^{-2}}{4}(B-A)e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}\left[sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))+cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))\right]$$

$$\left\|\frac{\partial g_4(x,\eta,\mu)}{\partial\eta}\right\|_{X_3^{(1)}} = \sup_x \int_0^\infty \left\|\frac{\alpha^{-2}}{4}(B-A)e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}[sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))+cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))]\right\|d\eta$$

$$= \sup_x \int_0^x \left\|\frac{\alpha^{-2}}{4}(B-A)e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}[sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))+cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))]\right\|d\eta+$$

$$+\sup_x \int_x^\infty \left\|\frac{\alpha^{-2}}{4}(B-A)e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}[sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))+cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))]\right\|d\eta$$

$$\le \sup_x \int_0^x \left\|\frac{\alpha^{-2}}{4}(B-A)e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))\right\|d\eta+$$

$$+\sup_x \int_0^x \left\|\frac{\alpha^{-2}}{4}(B-A)e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))\right\|d\eta+$$

$$+\sup_x \int_x^\infty \left\|\frac{\alpha^{-2}}{4}(B-A)e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))\right\|d\eta+$$

$$+\sup_x \int_x^\infty \left\|\frac{\alpha^{-2}}{4}(B-A)e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))\right\|d\eta$$

$$\left\|\tfrac{\alpha^{-2}}{4}(B-A)e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}cos(\tfrac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))\right\|$$

Normunu gözönüne alalım ve hesaplayalım.

$$\left\|\frac{\alpha^{-2}}{4}(B-A)e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))\right\| \le C\left\|\frac{\alpha^{-2}}{4}e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}\frac{(e^{\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}+e^{\frac{-i\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)})}{2}\right\|$$

$$\le C\left\|\frac{\alpha^{-2}}{8}e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\eta)}\right\|+C\left\|\frac{\alpha^{-2}}{8}e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1+i)(x+\eta)}\right\|$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{\alpha^{-2}}{8}e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\eta)}\right\| = \left\|[Q(x)+\mu]^{\frac{-1}{2}}e^{-\frac{[Q(x)+\mu]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\eta)}\right\|$$

$$\le \sup_{\lambda+\mu\in S_\epsilon} |\lambda+\mu|^{\frac{-1}{2}}\left|e^{-\frac{(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\eta)}\right|$$

$$\le \sup_{\lambda+\mu\in S_\epsilon} \{|\lambda+\mu|^{\frac{-1}{2}}e^{-[Re\frac{(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}+Im\frac{(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}](x+\eta)}\}$$

$$\le \sup_{\lambda+\mu\in S_\epsilon} \{|\lambda+\mu|^{\frac{-1}{2}}e^{-\frac{|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(cos\varphi+sin\varphi)(x+\eta)}\}$$

$$\le \sup_{\lambda+\mu\in S_\epsilon} \{|\lambda+\mu|^{\frac{-1}{2}}e^{-\frac{|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}m(x+\eta)}\} \qquad ,m>0$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{\alpha^{-2}}{8}e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)(x+\eta)}\right\| \le \sup_{\lambda+\mu\in S_\epsilon} \{|\lambda+\mu|^{\frac{-1}{2}}e^{-\frac{|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}m(x+\eta)}\}$$

Burada $X_3^{(1)}$ uzayında tanımlanan normu ele alırsak ;

$$\Rightarrow \sup_{0<x<\infty}\left(\sup_{\lambda+\mu\in S_\epsilon}|\lambda+\mu|^{\frac{-1}{2}}e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}x}\int_0^\infty e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}}\eta}d\eta\right)$$
$$= \sup_{0<x<\infty}\left(\sup_{\lambda+\mu\in S_\epsilon}|\lambda+\mu|^{\frac{-1}{2}}e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}x}\left[\frac{-\sqrt{2}}{m|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}}e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}\eta}\Big|_0^\infty\right]\right)$$
$$= \sup_{0<x<\infty}\left(\sup_{\lambda+\mu\in S_\epsilon}|\lambda+\mu|^{\frac{-1}{2}}e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}x}\left[\frac{-\sqrt{2}}{m|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}}(0-1)\right]\right)$$
$$= \sup_{0<x<\infty}\left(\sup_{\lambda+\mu\in S_\epsilon}|\lambda+\mu|^{\frac{-1}{2}}e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}x}(\frac{\sqrt{2}}{m})|\lambda+\mu|^{\frac{-1}{4}}\right)$$
$$\leq \sup_{0<x<\infty}\frac{\sqrt{2}}{m}e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}x}\mu^{\frac{-1}{4}}$$
$$\leq C_1$$

$\frac{\partial g_4(x,\eta,\alpha)}{\partial\eta}$ ifadesinden bir kez daha türev alalım ;

$$\frac{\partial^2 g_4(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^2} = \frac{-\alpha^{-1}}{2\sqrt{2}}(B-A)e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}\left[sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))\right]$$

Bu ifade içinde birinci türev için yaptığımız işlemlere benzer işlemler yaparsak;

$$\frac{\partial^2 g_4(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^2}_{X_3^{(1)}} = \sup_x\int_0^\infty\left\|\frac{-\alpha^{-1}}{2\sqrt{2}}(B-A)e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}\left[sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))\right]\right\|d\eta$$

$$\left\|\frac{\partial^2 g_4(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^2}\right\|_{X_3^{(1)}} \leq C_2$$

dir. Tekrar türev alırsak da;

$$\frac{\partial^3 g_4(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^3} = \frac{1}{4}(B-A)e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta)}\left[cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))-sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+\eta))\right]$$

şeklindedir ve benzer şekilde $\left\|\frac{\partial^3 g_4(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^3}\right\|_{X_3^{(1)}} \leq C_3$ olduğu görülür. Böylece $\frac{\partial^3 g_4(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^3}$ ün $X_3^{(1)}$ e ait olduğu açıktır. O halde (3.23) denkleminin $X_3^{(1)}$ e ait tek çözüme sahip olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi (3.23) denkleminde $n = 1$

$$\Rightarrow E_1(x,\eta,\mu) = \frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta} - \int_0^{\infty} g(x,\xi,\mu)[Q(\xi) - Q(x)]E_1(x,\eta,\mu)d\xi \tag{3.24}$$

bu eşitliğin her iki yanını $[\eta,\infty)$ aralığında integralleyelim ;

$$\int_{\eta}^{\infty} E_1(x,\eta,\mu)d\eta = \int_{\eta}^{\infty} \frac{\partial g(x,s,\mu)}{\partial s}ds - \\ - \int_0^{\infty} g(x,\xi,\mu)[Q(\xi) - Q(x)]\left[\int_{\eta}^{\infty} E_1(x,\eta,\mu)ds\right]d\xi \tag{3.25}$$

$$\Rightarrow \int_{\eta}^{\infty} E_1(x,\eta,\mu)d\eta = -g(x,\eta,\mu) \\ - \int_0^{\infty} g(x,\xi,\mu)[Q(\xi) - Q(x)]\left[\int_{\eta}^{\infty} E_1(x,\eta,\mu)ds\right]d\xi \tag{3.26}$$

Bu elde ettiğimiz denklem başlangıçta problemimizin Green fonksiyonunun tek çözüm olduğu integral denklem ile aynıdır. O halde

$$\Rightarrow G(x,\eta,\mu) = -\int_{\eta}^{\infty} E_1(x,s,\mu)ds \tag{3.27}$$

dir.

Eğer $E_1(x,s,\mu)$ fonksiyonunun s değişkenine göre sürekli olduğunu gösterebilirsek son eşitliğimiz olan (3.27) deki $G(x,\eta,\mu)$ fonksiyonunda η ya göre türetilebileceğini dolayısıyla türevlerinde sürekli olduğunu göstermiş olacağız.

$$\frac{\partial G(x,\eta,\mu)}{\partial \eta} = E_1(x,\eta,\mu)$$

dir.

Şimdi $E_1(x,\eta,\mu)$ nün η ya göre sürekliliğini inceleyelim ;

$$E_1(x,\eta,\mu)-\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta}=-\int_0^\infty g(x,\eta,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]E_1(\xi,\eta,\mu)d\xi$$

$$\Rightarrow E_1(x,\eta,\mu)-\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta}=-\int_0^\infty g(x,\eta,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta}d\xi$$
$$-\int_0^\infty g(x,\eta,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\left[E_1(\xi,\eta,\mu)-\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta}\right]d\xi$$

$$E_1(x,\eta,\mu)-\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta}=\mathcal{D}(x,\eta,\mu)$$

olsun . O halde

$$\mathcal{D}(x,\eta,\mu)=-\int_0^\infty g(x,\eta,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta}d\xi$$
$$-\int_0^\infty g(x,\eta,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\mathcal{D}(\xi,\eta,\mu)d\xi$$

dir.Bu eşitliğin ikinci tarafının ilk teriminide aşağıdaki şekilde ifade edersek ;

$$\mathcal{M}(x,\eta,\mu)=-\int_0^\infty g(x,\eta,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta}d\xi \tag{3.28}$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}(x,\eta,\mu)=\mathcal{M}(x,\eta,\mu)-\int_0^\infty g(x,\eta,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\mathcal{D}(\xi,\eta;\mu)d\xi \tag{3.29}$$

olur. $\mathcal{D}(x,\eta,\mu)$ nün η ya göre sürekliliğini inceleyelim. Bunun için (3.29) denklemini X_5 uzayında gözönüne alalım. X_5 uzayı H da tanımlanmış , $0<x,\eta<\infty$ bölgesinde tanımlı,değerleri H da dönüşüm yapan ,sınırlı ,normu (3.10) ifadesi ile tanımlanan $A(x,\eta)$ operatörler kümesidir.

$$\lim_{\Delta\eta\to 0}\left\|\frac{\partial g(x,\eta+\Delta\eta,\mu)}{\partial \eta}-\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta}\right\|_{X_5}=0$$

olduğunu gösterirsek o zaman $\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta}\in X_5$ olacaktır ve N operatörü X_5 de büzen olduğundan ve de $\mathcal{M}(x,\eta,\mu)$ den $\mathcal{M}(x,\eta,\mu)\in X_5$,

$$\lim_{\Delta\eta\to 0}\left\|\mathcal{M}(x,\eta+\Delta\eta,\mu)-\mathcal{M}(x,\eta,\mu)\right\|_{X_5}=0$$

olduğu görülür.

$$\mathcal{M}(x,\eta,\mu)=-\int_0^\infty g(x,\eta,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta}d\xi$$

denklemini X_5 uzayında gözönüne alalım. O halde

$$\mathcal{D}(x,\eta,\mu)=\mathcal{M}(x,\eta,\mu)-N\mathcal{D}(x,\eta,\mu)$$

ifadesi aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$\mathcal{D}(x,\eta,\mu)=(I+N)^{-1}\mathcal{M}(x,\eta,\mu) \tag{3.30}$$

N operatörünün X_5 uzayında büzen operatör olduğunu Yardımcı Teorem 3.1.2 den biliyoruz. (3.30) dan

$$\left\|\mathcal{D}(x,\eta,\mu)\right\|_{X_5}\le\left\|(I+N)^{-1}\right\|_{X_5}\left\|\mathcal{M}(x,\eta,\mu)\right\|_{X_5}$$

$$\left\|(I+N)^{-1}\right\|_{X_5}=C$$

olsun. O halde

$$\left\|\mathcal{D}(x,\eta,\mu)\right\|_{X_5}\le C\left\|\mathcal{M}(x,\eta,\mu)\right\|_{X_5}$$

olur. Şimdi $\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta}\in X_5$ ve

$$\lim_{\Delta\eta\to 0}\left\|\frac{\partial g(x,\eta+\Delta\eta,\mu)}{\partial\eta}-\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta}\right\|_{X_5}=0$$

olduğunu göstermeye çalışalım.

$\frac{\partial^2 g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^2}$ den bu fonksiyonun X_5 uzayına ait olduğu kolayca gözükür. Çünkü

$$\left\|\frac{\partial^2 g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^2}\right\|_{X_5}=\sup_{0<x<\infty}\sup_{0<\eta<\infty}\left\|\frac{\partial^2 g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^2}\right\|\leq C \qquad ,(C:sabit)$$

şeklindedir. $\Delta\eta\geq 0$ olmak üzere

$$\frac{\partial g(x,\eta+\Delta\eta,\mu)}{\partial\eta}-\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta}=\int_{\eta}^{\eta+\Delta\eta}\frac{\partial^2 g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^2}d\eta$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial g(x,\eta+\Delta\eta,\mu)}{\partial\eta}-\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta}\right\| &\leq \int_{\eta}^{\eta+\Delta\eta}\left\|\frac{\partial^2 g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^2}\right\|d\eta\\ &\leq C\int_{\eta}^{\eta+\Delta\eta}d\eta\\ &= C\Delta\eta\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{\partial g(x,\eta+\Delta\eta,\mu)}{\partial\eta}-\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta}\right\|\leq C\Delta\eta$$
$$\Rightarrow \lim_{\Delta\eta\to 0}\left\|\frac{\partial g(x,\eta+\Delta\eta,\mu)}{\partial\eta}-\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta}\right\|=\lim_{\Delta\eta\to 0}C\Delta\eta=0$$

olur. Şu halde $\mathcal{M}(x,\eta,\mu)\in X_5$ ve

$$\lim_{\Delta\eta\to 0}\left\|\mathcal{M}(x,\eta+\Delta\eta,\mu)-\mathcal{M}(x,\eta,\mu)\right\|=0$$

olduğunu göstermiş olduk. $\mathcal{M}(x,\eta,\mu) \in X_5$ olduğu açıktır. $M = N\frac{\partial g}{\partial \eta}$ şeklinde yazılabilir. O halde

$$\left\|\frac{\partial g(x,\eta+\Delta\eta,\mu)}{\partial\eta} - \frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta}\right\|_{X_5} \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \left\|\mathcal{M}(x,\eta+\Delta\eta,\mu) - \mathcal{M}(x,\eta,\mu)\right\|_{X_5} \le \left\|N\right\| \left\|\frac{\partial g}{\partial\eta}\right\|$$
$$\Rightarrow \mathcal{M}(x,\eta,\mu) \in X_5$$

dir.

$$\left\|\mathcal{D}(x,\eta+\Delta\eta,\mu) - \mathcal{D}(x,\eta,\mu)\right\|_{X_5} \le \left\|(I+N)^{-1}\right\|_{X_5}\left\|\mathcal{M}(x,\eta+\Delta\eta,\mu) - \mathcal{M}(x,\eta,\mu)\right\|_{X_5}$$

olduğundan $\Delta\eta \to 0$ için limite geçersek ;

$$\lim_{\Delta\eta\to 0}\left\|\mathcal{D}(x,\eta+\Delta\eta,\mu) - \mathcal{D}(x,\eta,\mu)\right\|_{X_5} = 0$$

dir.

$$\left\|\mathcal{D}(x,\eta+\Delta\eta,\mu) - \mathcal{D}(x,\eta,\mu)\right\| \le \left\|\mathcal{D}(x,\eta+\Delta\eta,\mu) - \mathcal{D}(x,\eta,\mu)\right\|_{X_5}$$

olduğundan H da dönüşüm yapan $\mathcal{D}(x,\eta,\mu)$ operatör fonksiyonu η ya göre $[0,\infty)$ aralığında düzgün süreklidir.

$$E_1(x,\eta,\mu) = \frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta} - \mathcal{D}(x,\eta,\mu)$$

idi. Bu eşitliğin ikinci yanındaki iki fonksiyonunda η ya göre sürekli olduklarını gösterdiğimize göre $E_1(x,\eta,\mu)$ fonksiyonuda H da süreklidir. O halde

$$G(x,\eta,\mu) = -\int_{\eta}^{\infty} E_1(x,\eta,\mu)d\eta$$

ifadesinden $G(x,\eta,\mu)$ nün türetilebileceği açıktır . Dolayısıyla

$$\frac{\partial G(x,\eta,\mu)}{\partial \eta} = E_1(x,\eta,\mu)$$

olduğu görülür.

Şimdi benzer şekilde 2. ve 3. türevlerinde η ya göre sürekli olduklarını göstermeye çalışalım. (3.23) ifadesinde $E_1(x,\eta,\mu)$ nün yerine eşiti olan $\frac{\partial G(x,\eta,\mu)}{\partial \eta}$ yı yazalım ;

$$\frac{\partial G(x,\eta,\mu)}{\partial \eta} = \frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta} - \int_0^{\infty} g(x,\eta,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\frac{\partial G(x,\eta,\mu)}{\partial \eta}d\xi \qquad (3.31)$$

Bu ifadenin her iki yanını η ya göre türetirsek ;

$$\frac{\partial^2 G(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^2} - \int_0^{\infty} g(x,\eta,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\frac{\partial^2 G(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^2}d\xi \qquad (3.32)$$

olur.

$$\frac{\partial^2 G(x,\eta+\Delta\eta,\mu)}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 G(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^2} = \int_{\eta}^{\eta+\Delta\eta} \frac{\partial^3 g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^3}d\eta$$

olduğundan

$$\left\|\frac{\partial^2 G(x,\eta+\Delta\eta,\mu)}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 G(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^2}\right\|_{X_5} \leq \int_{\eta}^{\eta+\Delta\eta} \left\|\frac{\partial^3 g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^3}\right\|_{X_5} d\eta \leq C_1\Delta\eta$$

$$\Longrightarrow \lim_{\Delta\eta\to 0}\left\|\frac{\partial^2 G(x,\eta+\Delta\eta,\mu)}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 G(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^2}\right\| = \lim_{\Delta\eta\to 0} C_1\Delta\eta = 0$$

olur. (3.23) denklemine göre

$$E_2(x,\eta,\mu) = \frac{\partial^2 g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^2} - \int_0^\infty g(x,\eta,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]E_2(x,\eta,\mu)d\xi \tag{3.33}$$

olduğu açıktır. Buradan görüldüğü gibi

$$E_2(x,\eta,\mu) = \frac{\partial^2 g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^2} - \mathcal{D}(x,\eta,\mu)$$

dir. Dolayısıyla $E_2(x,\eta,\mu)$ nün de H da sürekli olduğu kolayca görülmektedir. Şimdi de (3.32) eşitliğinden tekrar η ya göre türev alalım , o zaman

$$\frac{\partial^3 G(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^3} = \frac{\partial^3 g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^3} - \int_0^\infty g(x,\eta,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\frac{\partial^3 G(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^3}d\xi \tag{3.34}$$

ve dolayısıyla

$$E_3(x,\eta,\mu) = \frac{\partial^3 g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^3} - \int_0^\infty g(x,\eta,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]E_3(x,\eta,\mu)d\xi \tag{3.35}$$

dır. (3.34) ve (3.35) ifadelerine göre 1. ve 2. türev için yaptığımız işlemlere benzer işlemler yaptığımız takdirde

$$\left\|\frac{\partial^3 g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^3}\right\|_{X_5} \le C_2$$

olduğundan

$$\frac{\partial^3 g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^3} \in X_5$$

dir. O halde (3.34) denklemi X_5 uzayında tek çözüme sahiptir. (3.35) denklemini gözönüne alalım ve η dan ∞ a integre edelim ;

$$\int_{\eta}^{\infty} E_3(x,\eta,\mu)d\eta = -\frac{\partial^2 g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^2} - $$
$$- \int_0^{\infty} g(x,\eta,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\left[\int_{\eta}^{\infty} E_3(x,\eta,\mu)d\eta\right]d\xi \tag{3.36}$$

(3.36) denklemi (3.32) ifadesi ile aynıdır. (3.34) denklemi X_5 de tek çözüme sahip olduğundan dolayı ,

$$\frac{\partial^2 G(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^2} = -\int_{\eta}^{\infty} E_3(x,\eta,\mu)d\eta$$

dir. Eğer $E_3(x,\eta,\mu)$ nün η ya göre $(\eta \neq x)$ için sürekli olduğunu gösterebilirsek $\frac{\partial^2 G(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^2}$ nin de $(\eta \neq x)$ için η ya göre türeve sahip olduğunu göstermiş oluruz. Daha önce 1. türevde olduğu gibi

$$\mathcal{D}(x,\eta,\mu) = \mathcal{M}(x,\eta,\mu) - \int_0^{\infty} g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\mathcal{D}(\xi,\eta,\mu)d\xi \tag{3.37}$$

$$\mathcal{D}(x,\eta,\mu) = E_3(x,\eta,\mu) - \frac{\partial^3 g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^3} \tag{3.38}$$

ve

$$\mathcal{M}(x,\eta,\mu) = \int_0^{\infty} g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\frac{\partial^3 g(\xi,\eta,\mu)}{\partial\eta^3}d\xi$$

olsun.$\mathcal{D}(x,\eta,\mu)$ operatör fonksiyonunun η ya göre sürekliliğini inceleyelim. (3.37) ifadesine göre ;

$$(I+N)\mathcal{D} = \mathcal{M}$$

veya

$$\mathcal{D} = (I+N)^{-1}\mathcal{M}$$

olacaktır. Eğer $\mathcal{M}(x,\eta,\mu)$ denkleminin

$$\lim_{\Delta\eta\to 0}\left\|\mathcal{M}(x,\eta+\Delta\eta,\mu)-\mathcal{M}(x,\eta,\mu)\right\|_{X_5}=0 \tag{3.39}$$

eşitliğini sağladığını gösterirsek $\left\|(I+N)^{-1}\right\|_{X_5}\le C$ olarak daha önce belirttiğimizden

$$\lim_{\Delta\eta\to 0}\left\|\mathcal{D}(x,\eta+\Delta\eta,\mu)-\mathcal{D}(x,\eta,\mu)\right\|_{X_5}=0 \tag{3.40}$$

olarak elde ederiz. Böylece $\mathcal{D}(x,\eta,\mu)$ fonksiyonunun H da η ya göre sürekliliğini elde etmiş oluruz. Bunun için (3.39) ifadesinin varlığını göstermeye çalışalım ;

$\delta>0$ sayısı için $\xi>\delta$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(x,\eta+\Delta\eta,\mu)-\mathcal{M}(x,\eta,\mu) &= \int_0^\infty g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)] \\
&\quad \left[\frac{\partial^3 g(\xi,\eta+\Delta\eta,\mu)}{\partial\eta^3}-\frac{\partial^3 g(\xi,\eta,\mu)}{\partial\eta^3}\right]d\xi \\
= \int_0^{\eta-x} g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]&\left[\frac{\partial^3 g(\xi,\eta+\Delta\eta,\mu)}{\partial\eta^3}-\frac{\partial^3 g(\xi,\eta,\mu)}{\partial\eta^3}\right]d\xi+ \\
+\int_{\eta-x}^{\eta+x} g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]&\left[\frac{\partial^3 g(\xi,\eta+\Delta\eta,\mu)}{\partial\eta^3}-\frac{\partial^3 g(\xi,\eta,\mu)}{\partial\eta^3}\right]d\xi+ \\
+\int_{\eta+x}^{\infty} g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]&\left[\frac{\partial^3 g(\xi,\eta+\Delta\eta,\mu)}{\partial\eta^3}-\frac{\partial^3 g(\xi,\eta,\mu)}{\partial\eta^3}\right]d\xi \\
=\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2+\mathcal{L}_3&
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edelim. Şimdi bu terimlerin herbirini X_5 de $\Delta\eta\to 0$ için sınırlandıralım. Öncelikle ilk terimi gözönüne alalım. Yani $\left\|\mathcal{L}_1\right\|_{X_5}$ in sınırlılığını inceleyelim. $\mathcal{L}_1$ için $\xi<s-\varrho$ veya $s-\xi>\varrho$ varsayalım.

$$\frac{\partial^3 G(x,\eta+\Delta\eta,\mu)}{\partial\eta^3}-\frac{\partial^3 G(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^3}=\int_\eta^{\eta+\Delta\eta}\frac{\partial^4 g(x,s,\mu)}{\partial s^4}ds\,.$$

olduğu açıktır. Buradan

$$\left\|\frac{\partial^3 G(x,\eta+\Delta\eta,\mu)}{\partial\eta^3}-\frac{\partial^3 G(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^3}\right\| = \int_\eta^{\eta+\Delta\eta}\left\|\frac{\partial^4 g(x,s,\mu)}{\partial\eta^4}\right\|ds \leq \left\|\frac{\partial^4 g_2(x,s,\mu)}{\partial\eta^4}\right\|$$

dir.

$$\frac{\partial^4 g_2(x,s,\mu)}{\partial\eta^4} = \begin{cases} -\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\ e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(s-\xi)}\ sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(s-\xi))\ , & \xi > s\ ; \\ -\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\ e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(s-\xi)}\ sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(s-\xi))\ , & \xi < s \end{cases}$$

$$\left\|\frac{\partial^4 g_2(x,s,\mu)}{\partial\eta^4}\right\| = \begin{cases} \left\|-\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\ e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(s-\xi)}\ sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(s-\xi))\right\|, & \xi > s\ ; \\ \left\|-\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\ e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(s-\xi)}\ sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(s-\xi))\right\|, & \xi < s \end{cases}$$

dir. Burada spektral açılım formülünü kullanmak suretiyle bu normları hesaplayalım.

$$\left\|\frac{\partial^4 g_2(x,s,\mu)}{\partial\eta^4}\right\| \leq \begin{cases} \sup\limits_{\lambda\in S_\epsilon} |\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}\ e^{\frac{|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(s-\xi)}\ \left|\ sin(\frac{|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(s-\xi))\right|, & \xi > s\ ; \\ \sup\limits_{\lambda\in S_\epsilon} |\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}\ e^{\frac{-|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(s-\xi)}\ \left|\ sin(\frac{|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(s-\xi))\right|, & \xi < s \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} \left[1/|s-\xi|\right]\ \sup\limits_{\lambda\in S_\epsilon} |s-\xi|\ |\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}\ e^{\frac{|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(s-\xi)}\ \left|\ sin(\frac{|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(s-\xi))\right|, & \xi > s\ ; \\ \left[1/|s-\xi|\right]\ \sup\limits_{\lambda\in S_\epsilon} |s-\xi|\ |\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}\ e^{\frac{-|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(s-\xi)}\ \left|\ sin(\frac{|\lambda+\mu|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(s-\xi))\right|, & \xi < s \end{cases}$$

$$\leq \frac{2}{|s-\xi|} = \frac{2}{\varrho}$$

olarak elde ederiz. Bu durumda

$$\left\|\frac{\partial^3 G(x,\eta+\Delta\eta,\mu)}{\partial\eta^3}-\frac{\partial^3 G(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^3}\right\| \leq 2\int_\eta^{\eta+\Delta\eta}\frac{ds}{\varrho} = \frac{2\Delta\eta}{\varrho} < \frac{2\zeta}{\varrho}$$

olur. Burada daha önce Yardımcı Teorem 3.1.1 de olduğu gibi benzer işlemlerle ;

$$\left\|\mathcal{L}_1\right\|_{X_5} \leq \frac{C\zeta}{\varrho}$$

olarak elde ederiz. $\left\|\mathcal{L}_2\right\|_{X_5}$ ifadesini sınırlandırırsak da

$$\left\|\mathcal{L}_2\right\|_{X_5} \leq \sup_{0<x<\infty} \sup_{0<\eta<\infty} \int_{\eta-x}^{\eta+x} \left\|g(x,\eta,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\right\|_H d\xi$$

dir. Burada $|x-\eta| > 1$ ve $|x-\eta| \leq 1$ için ayrı ayrı inceleme yapıldığında (Levitan 1968) ve (Albayrak 1997) çalışmalarında olduğu gibi benzer işlemlerle ;

$$\left\|\mathcal{L}_2\right\|_{X_5} < C\varrho^{1-r} \qquad (0 < r < 1)$$

olarak bulunur. $\left\|\mathcal{L}_3\right\|_{X_5}$ de benzer şekilde sınırlandırılır. Böylece $\varepsilon > 0$ keyfi sayı olmak üzere $C\varrho^{1-r} < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $\frac{C\zeta}{\varrho-\zeta} < \frac{\varepsilon}{2}$ olarak seçildiğinde ;

$$\left\|\mathcal{M}(x,\eta+\Delta\eta,\mu) - \mathcal{M}(x,\eta,\mu)\right\|_{X_5} < \varepsilon$$

şeklinde elde edilir. Böylece $\mathcal{M}(x,\eta,\mu)$ operatör fonksiyonunun η değişkenine göre sürekliliği ispatlanmış olur.

$$\mathcal{D}(x,\eta,\mu) = (I+N)^{-1}\mathcal{M}(x,\eta,\mu)$$

olduğundan ve $\left\|(I+N)^{-1}\right\|_{X_5} < C$ olduğundan $\mathcal{D}(x,\eta,\mu)$ operatör fonksiyonunundа η ya göre sürekli olduğu görülür. (3.38) ifadesinden $\mathcal{M}(x,\eta,\mu)$ nün η ya göre süreklilik noktalarının $\frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3}$ fonksiyonunun η ya göre süreklilik noktaları ile aynı olduğu görülür.

$\frac{\partial^3 g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^3}$ operatör fonksiyonunun $\eta \neq x$ olduğunda sürekli olduğunu gösterirsek $E_3(x,\eta,\mu)$ nün de η ya göre sürekli olduğunu göstermiş oluruz. $\eta < x$ olduğunda $\eta - x = \tau$ diyelim ve $|\epsilon_1|$ bir küçük sayı olsun.

$$\left|\frac{\partial^3 g(x,\eta+\epsilon_1,\mu)}{\partial \eta^3} - \frac{\partial^3 g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^3}\right| \longrightarrow 0 \qquad (\epsilon_1 \to 0)$$

olduğunu göstermeye çalışalım .

$$\frac{\partial^3 g_2(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^3} = \begin{cases} (-1/4)\ -e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\eta-x)} \left[cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\eta - x)) - sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\eta - x)) \right], & x > \eta\ ; \\ (1\ /\ 4) \quad e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(\eta-x)} \left[cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\eta - x)) + sin(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\eta - x)) \right], & x < \eta \end{cases}$$

O halde bu türevin sürekliliğini göstermek için buradaki tüm terimlerin sürekliliğini incelememiz gerekir. Bu yüzden öncelikle

$$\left\| e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(\eta-x+\epsilon_1)} cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\eta - x + \epsilon_1)) - e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(\eta-x)} cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\eta - x)) \right\| \longrightarrow 0 \quad (\epsilon_1 \to 0) \quad (3.41)$$

olduğunu göstermeliyiz.

Yardımcı Teorem 3.2.1 :

A kompakt normal operatör ise sıfır özdeğer olmamak üzere A nın $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \geq \cdots$ (sıfırdan farklı) özdeğerlerine karşılık gelen $e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$ özvektörleri H da tam ortonormal sistem oluşturur. Yani $x \in H$ keyfi elemanı spektral açılım olarak

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$$

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k) e_k$$

dir.

Özel olarak $A = A^*$ ve $A > 0$ olsun. O halde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq \cdots$ ve

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0$$

dir. Bunların birbirinden farklı olanlarını $\nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_n > \cdots$ ile gösterelim. Bu özdeğerlerin herbirine birden fazla özvektör karşılık gelebilir.

ν_1 e karşılık gelen özvektörler ;$e_{\nu_1}^{(1)}, e_{\nu_1}^{(2)}, \cdots, e_{\nu_1}^{(n_1)}, \cdots$

ν_2 e karşılık gelen özvektörler ; $e_{\nu_2}^{(1)}, e_{\nu_2}^{(2)}, \cdots, e_{\nu_2}^{(n_2)}, \cdots$

....

ν_k e karşılık gelen özvektörler ;$e_{\nu_n}^{(1)}, e_{\nu_n}^{(2)}, \cdots, e_{\nu_n}^{(n_k)}, \cdots$

olur.

Bu özvektörlere karşılık izdüşüm operatörleri de $P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots$ olsun. O halde

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} P_k x$$

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k P_k x$$

$$E_\lambda = \sum_{\lambda_k < \lambda} P_k$$

dır.

$$x \in H : Ix = \sum_{k=1}^{\infty} P_k x = \int_0^{\infty} dE_\lambda x \qquad , \qquad x \in D(A) : Ax = \int \lambda dE_\lambda x$$

olacaktır. Bu formüller sembolik olarak sırasıyla;

$$I = \int dE_\lambda \qquad\qquad A = \int \lambda dE_\lambda$$

şeklinde yazılır.

Operatörümüz normal operatör ise yani $AA^* = A^*A$ ise o zaman

$$Ax = \int\int_{\sigma(A)} (m+in) dE_{m,n} x = \sum \underbrace{(m+in)}_{=\lambda_k} x$$

$$(Ax, x) = \int\int_{\sigma(A)} (m+in) d(E_{m,n}x, x)$$

$$\|A\| = \sup_{|x|=1} \left|(Ax, x)\right| = \sup_{|x|=1} \int\int_{\sigma(A)} \sqrt{m^2+n^2} d(E_{m,n}x, x)$$

$$f(A)x = \int\int_{\sigma(A)} f(m+in)dE_{m,n}x$$

olacaktır.

Şimdi bu spektral açılım formülünü kullanmak suretiyle (3.41) ifadesinin sağlandığını gösterelim .

$$\left\| e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(\eta-x+\epsilon_1)} cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\eta-x+\epsilon_1)) - e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(\eta-x)} cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\eta-x)) \right\| =$$

$$= \sup_{\|h\|=1} \left| \left(\left[e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}(\eta-x+\epsilon_1)} cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\eta-x+\epsilon_1)) - e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\eta-x)} cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\eta-x)) \right] h, h \right) \right|$$

$$= \sup_{\|h\|=1} \left| \int\int_{\sigma(Q)} \left[e^{\frac{-(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(\eta-x+\epsilon_1)} cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\eta-x+\epsilon_1)) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - e^{\frac{(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(\eta-x)} cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\eta-x)) \right] d(E_\lambda h, h) \right|$$

Burada $\lambda = m + in$ şeklinde kompleks bir sayıdır ve $\eta - x = \tau$ dersek

$$= \sup_{\|h\|=1} \left| \int\int_{\sigma(Q)} \left[e^{\frac{-(m+in+\mu)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(u+\epsilon_1)} cos(\frac{(m+in+\mu)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(u+\epsilon_1)) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - e^{\frac{(m+in+\mu)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}u} cos(\frac{(m+in+\mu)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}u) \right] d(E_{m,n}h, h) \right|$$

$$\leq \sup_{\|h\|=1} \int\int_{\sigma(Q)} \left| \left[e^{\frac{-(m+in+\mu)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(u+\epsilon_1)} cos(\frac{(m+in+\mu)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(u+\epsilon_1)) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - e^{\frac{(m+in+\mu)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}u} cos(\frac{(m+in+\mu)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}u) \right] \right| d(E_{m,n}h, h)$$

$$= L$$

$\epsilon > 0$ herhangi bir sayı ve $|\epsilon_1| < u$ olsun. O halde $m + in + \mu > N(m,n)$ olacak şekilde öyle bir büyük $N(m,n)$ sayısı seçelim ki

$$\left\| \left[e^{\frac{-(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(\eta-x+\epsilon_1)} cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\eta-x+\epsilon_1)) - e^{\frac{(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}(\eta-x)} cos(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\eta-x)) \right] \right\| < \frac{\epsilon}{2}$$

olsun. Bu takdirde

$$L \leq \frac{\epsilon}{2} \sup_{\|h\|=1} \int \int_{\sigma(Q)} d(E_{m,n}h, h)$$
$$\leq \frac{\epsilon}{2} \left[\sup_{\|h\|=1} \left((E_{m,\sigma(Q)}h, h) - (E_{n,\sigma(Q)}h, h) \right) \right]$$

$\Longrightarrow L < \frac{\epsilon}{2}$

olur. Böylece $|\epsilon_1|$ in küçük değerlerinde $L < \epsilon$ olacaktır. Bu ise bize $\frac{\partial^3 g_2}{\partial \eta^3}$ ün $\eta < x$ iken sürekli olduğunu gösterir. $\eta > x$ iken sürekliliği ise benzer şekilde gösterilebilir. Böylece $\eta \neq x$ iken $\frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3}$ ün sürekli olduğu gösterilmiş olur. O halde $E_3(x, \eta, \mu)$ nün $\eta \neq x$ için η ya göre sürekliliği ispatlanmış oldu. $E_3(x, \eta, \mu)$ nün integral ifadesinden $\eta \neq x$ iken $\frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3}$ türevinin de varolduğu ve

$$\frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3} = E_3(x, \eta, \mu)$$

olduğu elde edilir. $\eta = x$ için $\frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3}$ incelendiğinde ;

$$E_3(x, \eta, \mu) - \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3} = \frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3} - \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3}$$

fonksiyonu η ya göre sürekli olduğundan $\frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3}$ ün $\eta = x$ deki sıçrayışı ile bu noktada $\frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3}$ in sıçrayışı ile aynıdır.

$\frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3}$ in $\eta = x$ deki sıçrayışı (Albayrak 1997) çalışmasındakine benzer şekilde gösterilebilir. Yani $\frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3}$ operatör fonksiyonu $\eta = x$ noktasında

$$\left\| \left[\frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3}\Big|_{\eta=x+\epsilon_1} - \frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3}\Big|_{\eta=x-\epsilon_1} - I \right] \alpha^{-4} \right\|_{X_5} \to 0 \qquad (\epsilon_1 \to 0)$$

dir.

3.3 Green Fonksiyonunun Dördüncü Türevi

$$\frac{\partial^3 G}{\partial\eta^3} = \frac{\partial^3 g}{\partial\eta^3} - \int_0^\infty g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\frac{\partial^3 G(\xi,\eta,\mu)}{\partial\eta^3}d\xi$$

ifadesini birinci türevde olduğu gibi

$$\mathcal{D}(x,\eta,\mu) = \mathcal{M}(x,\eta,\mu) - \int_0^\infty g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\mathcal{D}(x,\eta,\mu)d\xi \qquad (3.42)$$

şeklinde yazalım. O halde

$$\mathcal{D}(x,\eta,\mu) = \frac{\partial^3 G}{\partial\eta^3} - \frac{\partial^3 g}{\partial\eta^3}$$

$$\mathcal{M}(x,\eta,\mu) = -\int_0^\infty g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\frac{\partial^3 g(\xi,\eta,\mu)}{\partial\eta^3}d\xi$$

dir. (3.42) denklemini η ya göre türetelim ;

$$\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\eta} = \frac{\partial\mathcal{M}}{\partial\eta} - \int_0^\infty g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\eta}d\xi .$$

olur. Burada $\frac{\partial^3 g(\xi,\eta,\mu)}{\partial\eta^3}$ ün sıçrayışını kullanırsak ;

$$\frac{\partial\mathcal{M}}{\partial\eta} = g(x,\eta,\mu)[Q(\xi)-Q(x)] - \int_\eta^\infty g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\frac{\partial^4 g}{\partial\eta^4}d\xi = \mathcal{M}_1(x,\eta,\mu)$$

olarak elde ederiz.

Eğer $\mathcal{M}_1$ in $X_4^{(\frac{-1}{4})}$ e ait olduğunu gösterirsek o zaman

$$\mathcal{F}(x,\eta,\mu) = \mathcal{M}_1(x,\eta,\mu) - \int_0^\infty g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\mathcal{F}(\xi,\eta,\mu)d\xi \qquad (3.43)$$

integral denkleminin çözümününde $X_4^{(\frac{-1}{4})}$ e ait olduğu gösterilmiş olur. $\mathcal{M}_1$ in $X_4^{(\frac{-1}{4})}$ e ait olduğu dolayısıyla (3.43) ifadesininde bu uzaya ait olduğu [LEVITAN,B.M.,1968] çalışmasındaki gibi gösterilebilir.

3.4 Green Fonksiyonunun Diferansiyel Denklemi Sağlaması

$\eta \neq x$ olduğunda $G(x,\eta,\mu)$ nün

$$\frac{\partial^4 G}{\partial \eta^4}+G(x,\eta,\mu)[Q(\eta)+\mu I]=0 \tag{3.44}$$

denklemini sağladığını gösterelim. $f \in D$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^4 G}{\partial \eta^4}(f)-g(x,\eta,\mu)[Q(x)-\mu I](f)=g(x,\eta,\mu)[Q(\eta)-Q(x)](f)-\\&-\int_0^\infty g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\frac{\partial^4 G(\xi,\eta,\mu)}{\partial \eta^4}(f)d\xi\end{aligned} \tag{3.45}$$

veya

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 G}{\partial \eta^4}(f)&=g(x,\eta,\mu)[Q(\eta)+\mu I](f)-\\&\quad-\int_0^\infty g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\frac{\partial^4 G(\xi,\eta,\mu)}{\partial \eta^4}(f)d\xi\end{aligned} \tag{3.46}$$

olur. $[Q(\eta)+\mu I](f)=h$ dersek bu son ifademiz

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^4 G}{\partial \eta^4}[Q(\eta)+\mu I]^{-1}h=g(x,\eta,\mu)-\\&-\int_0^\infty g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\frac{\partial^4 G(\xi,\eta,\mu)}{\partial \eta^4}[Q(\eta)+\mu I]^{-1}hd\xi\end{aligned} \tag{3.47}$$

olur. Bu ifadeyi (3.5) ile karşılaştırırsak;

$$\frac{\partial^4 G}{\partial \eta^4}[Q(\eta)+\mu I]^{-1}h = G(x,\eta,\mu)h \tag{3.48}$$

elde ederiz. O halde her sabit tutulmuş η için h elemanlar kümesi Hda heryerde yoğun olduğundan (3.48) den (3.46) bulunur.

3.5 Green Fonksiyonunun Sınır Şartlarını Sağlaması

$G(x,\eta,\mu)$ operatör fonksiyonunun başlangıçta da verdiğimiz aşağıdaki (5) şartlarını sağladığını gösterelim .

$$\left.\frac{\partial^2 G(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^2}\right|_{\eta=0} - a\left.\frac{\partial G(x,\eta,\mu)}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^3 G(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^3}\right|_{\eta=0} - bG(x,\eta,\mu)\Big|_{\eta=0} = 0$$

(3.5) ifadesini ve onun η ya göre 1. ve 2. türevlerini gözönüne alalım.

$$G(x,\eta,\mu) = g(x,\eta,\mu) - \int_0^\infty g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]G(\xi,\eta,\mu)d\xi$$

$$\frac{\partial G(x,\eta,\mu)}{\partial \eta} = \frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta} - \int_0^\infty g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\frac{\partial G(\xi,\eta,\mu)}{\partial \eta}d\xi \tag{3.49}$$

$$\frac{\partial^2 G(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^2} - \int_0^\infty g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\frac{\partial^2 G(\xi,\eta,\mu)}{\partial \eta^2}d\xi \tag{3.50}$$

Bu son iki denklemden ;

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\partial^2 g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^2}\right|_{\eta=0} - \int_0^\infty g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\frac{\partial^2 G(\xi,\eta,\mu)}{\partial \eta^2}d\xi\Big|_{\eta=0} - \\ &- a\left[\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta} - \int_0^\infty g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\frac{\partial G(\xi,\eta,\mu)}{\partial \eta}d\xi\right]\Big|_{\eta=0} = 0\end{aligned} \tag{3.51}$$

olur. Buradan ;

$$\int_0^{\infty} g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]G(\xi,\eta,\mu)\left[\frac{\partial^2 G(\xi,\eta,\mu)}{\partial\eta^2} - a\frac{\partial G(\xi,\eta,\mu)}{\partial\eta}\right]\Big|_{\eta=0} d\xi = 0 \tag{3.52}$$

yazabiliriz . Bu homojen ifadeyi aşağıdaki şekilde de ifade edebiliriz.

$$N\left[\frac{\partial^2 G(\xi,\eta,\mu)}{\partial\eta^2} - a\frac{\partial G}{\partial\eta}\right]\Big|_{\eta=0} = 0$$

N operatörümüzün $\mu > 0$ büyük değerlerinde büzen operatör olduğundan

$$\frac{\partial^2 G(\xi,\eta,\mu)}{\partial\eta^2} - a\frac{\partial G}{\partial\eta}\Big|_{\eta=0} = 0$$

elde ederiz. Şu halde ilk şartımız sağlanmış olur. (3.49) den bir kez daha η ya göre türev alalım ;

$$\frac{\partial^3 G(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^3} = \frac{\partial^3 g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^3} - \int_0^{\infty} g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\frac{\partial^3 G(\xi,\eta,\mu)}{\partial\eta^3}d\xi \tag{3.53}$$

(3.53) ve $G(x,\eta,\mu)$ ifadesinden ;

$$\frac{\partial^3 g(x,\eta,\mu)}{\partial\eta^3}\Big|_{\eta=0} - \int_0^{\infty} g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\frac{\partial^3 G(\xi,\eta,\mu)}{\partial\eta^3}d\xi\Big|_{\eta=0} -$$
$$- b\left[g(x,\eta,\mu)\Big|_{\eta=0} - \int_0^{\infty} g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]G(\xi,\eta,\mu)d\xi\Big|_{\eta=0}\right] = 0 \tag{3.54}$$

Buradan da ilk şartın sağlanmasında olduğu gibi

$$-\int_0^{\infty} g(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]\left[\frac{\partial^3 G(\xi,\eta,\mu)}{\partial\eta^3} - bG(\xi,\eta,\mu)\right]\Big|_{\eta=0} d\xi = 0 \tag{3.55}$$

olarak elde ederiz. Bu ifadenin homojen hali de ;

$$N\left[\frac{\partial^3 G(\xi,\eta,\mu)}{\partial\eta^3} - bG(\xi,\eta,\mu)\right]\Bigg|_{\eta=0} = 0$$

şeklindedir. O halde N $\mu > 0$ ın büyük değerlerinde büzen operatör olduğundan

$$\frac{\partial^3 G(\xi,\eta,\mu)}{\partial\eta^3} - bG(\xi,\eta,\mu) = 0$$

olarak ikinci sınır şartının da sağlandığı görülür.

Böylece elde ettiğimiz Hilbert-Schimidt tipli çekirdek operatör olan $G(x,\eta,\mu)$ Green fonksiyonumuzun Green fonksiyonunun bütün özelliklerini sağladığını göstermiş olduk. Eğer $Q(x) = Q^*(x)$ ise o zaman $G(x,\xi,\mu) = G(\xi,x,\mu)$ olduğu [LEVİTAN,B.M.,1968] çalışmasında olduğu gibi gösterilebilir. $G(x,\xi,\mu)$ operatör fonksiyonunun

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \|G(x,\xi,\mu)\|^2 dx d\xi < \infty$$

koşulu sağlandığından dolayı (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin oluşturduğu operatörün spektrumunun saf ayrık olduğu sonucu çıkar.

3.6 Özdeğerlerin Asimtotik İfadesi

Bu bölümde

$$y^{iv} + P(x)y'' + Q(x)y + \mu y = 0 \tag{3.56}$$

$$y''(0) - ay'(0) = 0 \tag{3.57}$$

$$y'''(0) - by(0) = 0 \tag{3.58}$$

sınır değer probleminin özdeğerler sayısının asimtotik ifadesi bulunmaktadır.

Burada $Q^*(x) = Q(x)$,$Q(X) \geq I$,$P^*(x) = P(x)$ ve $\|P(x)Q^{\frac{-1}{4}+\epsilon}(x)\| < C$, $C = const$, $\epsilon > 0$ sabit sayılardır.

(3.56) denkleminin sağ tarafı ve (3.56)-(3.58) koşulları ile oluşturulan L operatörünün Green fonksiyonu $G_1(x,\xi;\mu)$ yü

$$G_1(x,\eta;\mu) = G(x,\eta;\mu) - \int_0^\infty G(x,\xi;\mu)\rho(\xi,\eta)d\xi \tag{3.59}$$

integral denkleminin çözümü şeklinde arayalım. Burada $G(x,\xi,\mu)$, $P(x) = 0$ iken (3.56)-(3.58) sınır değer probleminin Green fonksiyonu ,$\rho(\xi,\eta)$ ise bulunması gereken operatör değerli fonksiyondur. $G_1(x,\xi;\mu)$ yü (3.56) denkleminde yazarsak ve $G(x,\xi;\mu)$ operatör fonksiyonunun $P(x) = 0$ iken (3.56) denklemini sağladığını ve $\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}$ ün $x = \xi$ noktasında sıçrayışa sahip olduğunu gözönüne alırsak $\eta \neq x$ iken $\rho(x,\eta)$ ya göre aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\rho(x,\eta) + P(x)\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - P(x)\int_0^\infty \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,\xi;\mu)\rho(\xi,\eta)d\xi = 0 \tag{3.60}$$

$P(x)$ kapalı operatör ve integral altı ifade sınırlı operatör olduğundan dolayı (3.60) da $P(x)$ integral altında yazılabilir. $P(x)$ integral altında yazarsak ve

$$P(x)\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -K(x,\eta;\mu)$$

dersek (3.60) denklemi

$$\rho(x,\eta) = K(x,\eta;\mu) - \int_0^\infty K(x,\xi;\mu)\rho(\xi,\eta)d\xi \tag{3.61}$$

şeklini alır. Bu denklemi $X_3^{(2)}$ uzayında gözönüne alalım. Yardımcı Teorem 3.1.1 ve Yardımcı Teorem 3.1.2 den $x \neq \eta$ ve $\mu \to \infty$ iken

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x,\eta;\mu) \sim \frac{-\Big(Q(x)+\mu I\Big)^{\frac{-1}{4}}}{4}&\Big\{(i\alpha_1)^2 e^{i\alpha_1(Q(x)+\mu I)^{\frac{1}{4}}|x-\eta|}+\\ &+(i\alpha_2)^2 e^{i\omega_2(Q(x)+\mu I)^{\frac{1}{4}}|x-\eta|}\Big\}sign(x-\eta)\end{aligned} \tag{3.62}$$

olduğu görülür. Burada α_1 ve $\alpha_2, \sqrt[4]{-1}$ in üst yarı düzlemdeki kökleridir. (3.62) ve $P(x)$ üzerine konulan

$\|P(x)Q^{\frac{-1}{4}+\epsilon}(x)\| < C \qquad , \qquad (\epsilon > 0, C = sabit)$

koşulunu gözönüne alarak $\|K(x,\eta;\mu)\|_H$ hesaplayalım;

$$\begin{aligned}\|K(x,\eta;\mu)\|_H &\leq C\Big\|P(x)\Big(Q(x)+\mu I\Big)^{\frac{-1}{4}}\Big[(i\alpha_1)^2 e^{i\alpha_1(Q(x)+\mu I)^{\frac{1}{4}}|x-\eta|} \\ &\quad + (i\alpha_2)^2 e^{i\alpha_1(Q(x)+\mu I)^{\frac{1}{4}}|x-\eta|}\Big]\Big\| \\ &= C\Big\|P(x)\Big(Q(x)+\mu I\Big)^{\frac{-1}{4}+\epsilon}\Big(Q(x)+\mu I\Big)^{-\epsilon}\Big[(i\alpha_1)^2 e^{i\alpha_1(Q(x)+\mu I)^{\frac{1}{4}}|x-\eta|}+ \\ &\qquad + (i\alpha_2)^2 e^{i\alpha_2(Q(x)+\mu I)^{\frac{1}{4}}|x-\eta|}\Big]\Big\| \\ &\leq \Big\{\Big\|\int_1^\infty (\lambda+\mu)^{-\epsilon} e^{i\alpha_1(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}}|x-\eta|} dE_\lambda\Big\| + \Big\|\int_1^\infty (\lambda+\mu)^{-\epsilon} e^{i\alpha_2(\lambda+\mu)^{\frac{1}{4}}|x-\eta|} dE_\lambda\Big\| \\ &\leq C\mu^{-\epsilon} e^{-Im\alpha_1|x-\eta|}\end{aligned}$$

burada $Im\,\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dir. Böylece

$\|K(x,\eta;\mu)\|_H \leq \frac{C}{\mu^\epsilon} e^{-Im\alpha_1|x-\eta|} \qquad , \qquad (\epsilon > 0)$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \|K(x,\eta;\mu)\|_H^2 d\eta &\leq \frac{C^2}{\mu^{2\epsilon}}\int_0^\infty e^{-2Im\alpha_1|x-\eta|}d\eta \\ &= \frac{C^2}{\mu^{2\epsilon}}\Big(\int_0^x e^{-2Im\alpha_1|x-\eta|}d\eta + \int_x^\infty e^{-2Im\alpha_1|x-\eta|}d\eta\Big) \\ &\leq \frac{C}{\mu^{2\epsilon}}\end{aligned}$$

ve

$$\|K(x,\eta;\mu)\|_{X_3^{(2)}} = \sup_{0\leq x<\infty}\Big(\int_0^\infty \|K(x,\eta;\mu)\|_H^2 d\eta\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\mu^\epsilon}$$

olduğu elde edilir. Bu ise $K(x,\eta;\mu) \in X_3^{(2)}$ olduğunu ve $\mu \to \infty$ halinde $\|K(x,\eta;\mu)\|_{X_3^{(2)}}$ normunun sıfıra yaklaştığı görülür. Buna göre μ nün büyük değerlerinde (3.61) denklemi $X_3^{(2)}$ uzayına ait tek $\rho(x,\eta)$ çözümüne sahiptir. (3.59) ifadesindeki integral operatör $\mu > 0$ ın büyük değerlerinde büzen olduğundan dolayı $\mu \to \infty$ iken

$$G_1(x,\eta;\mu) = G(x,\eta;\mu)[1+o(1)] \qquad (3.63)$$

dir. Burada $o(1)$ operatör değerli fonksiyon olmak üzere $\mu \to \infty$ iken $\|o(1)\| \to 0$ dır. $G(x,\eta;\mu)$,$H-S$ tipli operatör olduğundan (3.63) e göre $G_1(x,\eta;\mu)$ de $H-S$ tipli operatördür. Yani

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \|G_1(x,\eta;\mu)\|_{H-S}^2 dx d\eta < \infty$$

dir. (3.62) ve (3.63) den $\mu \to \infty$ iken

$$G_1(x,\eta;\mu) = K(x,\eta;\mu)[1+o(1)] \tag{3.64}$$

elde edilir. Burada

$$K(x,\eta;\mu) = \frac{(Q(x)+\mu I)^{\frac{-3}{4}}}{4i}\left[\alpha_1 e^{i\alpha_1(Q(x)+\mu I)^{\frac{1}{4}}|x-\eta|} + \alpha_2 e^{i\alpha_2(Q(x)+\mu I)^{\frac{1}{4}}|x-\eta|}\right][1+o(1)] \tag{3.65}$$

dir.

$$y^{iv} + P(x)y'' + Q(x)y + \mu y$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y''(0) - ay'(0) = 0$$

$$y'''(0) - by(0) = 0$$

sınır koşulları verilmişti. $G_1(x,\eta,\mu)$,$H-S$ tipli operatör olduğundan dolayı (3.56)-(3.58) sınır değer problemine karşılık gelen L operatörünün spektrumu sadece özdeğerlerden ibarettir. Bu özdeğerleri

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n \le \cdots$$

ile bunlara karşılık gelen ortonormalize edilmiş özfonksiyonlarını ise

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_n(x), \cdots$$

ile gösterelim. $\lambda > 0$ herhangi sayı olsun. $N(\lambda)$ ile λ yı aşmayan $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$

özdeğerlerinin sayısını gösterelim:

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1.$$

Bu bölümde $\lambda \to \infty$ iken $N(\lambda)$ nın asimtotik davranışı incelenmiştir.

Yukarıda belirttiğimiz gibi $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots$ problemimizin özdeğerleri ve bunlara karşılık gelen özfonksiyonlar $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_n(x), \cdots$ idi. Bu takdirde

$$L\psi_n = \lambda_n \psi_n$$

$$\Rightarrow L\psi_n + \mu\psi_n = \lambda_n\psi_n + \mu\psi_n$$

$$\Rightarrow (L+\mu)\psi_n = (\lambda_n + \mu)\psi_n$$

$$\Rightarrow \psi_n(x) = (\lambda_n + \mu)(L+\mu)^{-1}\psi_n$$

$$\Rightarrow \psi_n = (\lambda_n + \mu) \int_0^\infty G_1(x, \xi; \mu)\psi_n(\xi)d\xi \tag{3.66}$$

şeklinde yazılabilir. $\mu \to \infty$ iken (3.64)de (3.65) gözönüne alınırsa (3.66) eşitliği

$$\Rightarrow \psi_n \sim (\lambda_n + \mu) \int_0^\infty K(x, \xi; \mu)\psi_n(\xi)d\xi.$$

$$\Rightarrow \frac{\psi_n}{\lambda_n + \mu} \sim \int_0^\infty K(x, \xi; \mu)\psi_n(\xi)d\xi.$$

şeklinde yazılır. N herhangi doğal sayı olmak.üzere,

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\|\psi_n(x)\|^2}{(\lambda_n + \mu)^2}$$

olsun. Buradan

$$\int_0^\infty S_N(x)dx = \sum_{n=1}^{N} \frac{\int_0^\infty \|\psi_n(x)\|^2}{(\lambda_n + \mu)^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2}$$

[BAYRAMOGLU,M.,1971] çalışmasında (sayfa 164-165)olduğu gibi benzer işlemler yaparsak,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} \sim \frac{1}{8} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{(\omega_j(x) + \mu)^{\frac{7}{4}}} \quad , \tag{3.67}$$

elde ederiz.

[Titchmarsh ın §22.34.3] çalışmasında elde edilen

$$\int_0^\infty \frac{N(\lambda)d\lambda}{(\lambda+\mu)^3} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda+\mu)^2}$$

formülünü kullanırsak,(3.67) ifadesi

$$\int_0^\infty \frac{N(\lambda)d\lambda}{(\lambda+\mu)^3} \sim \frac{1}{16}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^\infty \frac{dx}{(\omega_j(x)+\mu)^{\frac{7}{4}}} \tag{3.68}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi keyfi $t > 0$ iken

$$\frac{C_1}{t^{\frac{7}{4}}}\sum_j \int_{w_j(x)\leq t} dt \leq \sum_j \int_{w_j(x)\geq t} \frac{dx}{[w_j(x)]^{\frac{7}{4}}} \leq \frac{C_2}{.t^{\frac{7}{4}}}\sum_j \int_{w_j(x)\leq t} dt \tag{3.69}$$

olacak şekilde C_1, C_2 sabitlerinin olduğunu varsayalım.Bu koşulu kullanarak [KOSTYUCHENKO,A.G. and LEVITAN,B.M.,1967] olduğu gibi Titchmarsh'ın [Titchmarsh §22.34.3] Tauber tipli teoreminden $\lambda \to \infty$ iken

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{4})}\sum_j \int_{w_j(x)<\lambda} [\lambda - w_j(x)]^{\frac{1}{4}} dx$$

olduğu elde edilir.

ÖRNEK :

$H = l_2$ olsun.

$$Q(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1(x) & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \alpha_2(x) & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n(x) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$a_i x^k + a \leq \alpha_i(x) \leq A_i x^k + b$$

olsun. Burada $a > 0$, $b > 0$ sabitler , $k > \frac{4}{7}$, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i^{1/k}} < \infty$,
$0 < C_1 \leq \frac{A_i}{a_i} \leq C_2$, C_1 =sabit , C_2 =sabit.

$Q(x)$ in 1)-8) ve (3.69) koşullarını sağladığı [KOSTÇUYENKO-LEVİTAN,(1967)]gösterilmiştir.

Bu takdirde

$$\frac{d^4u}{dx^4}+Q(x)u = \lambda u \tag{1}$$

$$u''(0)-au'(0) = 0 \tag{2}$$

$$u'''(0)-bu(0) = 0 \tag{3}$$

sınır değer probleminin özdeğerleri sayısı için

$$N(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{4})} \sum_j \int_{w_j(x)<\lambda} [\lambda-w_j(x)]^{\frac{1}{4}} dx[1+o(1)] \tag{4}$$

asimtotik formülü doğrudur. (1)-(3) problemi sonsuz sistem şeklinde yazılabilir. Eğer sistemin içerdiği skaler sınır değer probleminin λ yı aşmayan özdeğerler sayısını sırasıyla $N_1(\lambda), N_2(\lambda), \cdots$ ile gösterirsek;

$$N(\lambda) = N_1(\lambda) + N_2(\lambda) + \cdots + N_k(\lambda) + \cdots \tag{5}$$

olacaktır. Burada $\lambda \to \infty$ iken

$$N_k(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{4})} \int_{\omega_k(x)<\lambda} [\lambda-\omega_k(x)]^{\frac{1}{4}} dx[1+o(1)] \qquad ,(k = 1, 2, \cdots) \tag{6}$$

dır. (5)-(6) dan (4) ün doğruluğu görülmemektedir.

4. SONUÇ

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olmak üzere $L_2(0,\infty;H)$ uzayında

$$y^{iv}+Q(x)y+\mu y \quad , \quad 0\leq x<\infty$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y''(0)-ay'(0)=0$$

$$y'''(0)-by(0)=0$$

sınır şartlarıyla oluşturulan sınır değer probleminin Green fonksiyonunun varlığı gösterilmiş ve özellikleri incelenmiştir.Burada $Q(x), x\in[0,\infty)$ aralığının herbir değerinde H Hilbert uzayında dönüşüm yapan,tersi kompakt normal operatör, a,b ise herhangi reel sabitlerdir.Ayrıca son kısımda $Q(x)$ ve $P(x)$ kendine eş operatörler olmak üzere

$$y^{iv}+P(x)y''+Q(x)y+\mu y=0$$

$$y''(0)-ay'(0)=0$$

$$y'''(0)-by(0)=0$$

sınır değer probleminin spektrumunun ayrık olduğu ve özdeğerleri sayısının asimptotik ifadesi elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Abudov,A.A.,(1981),"Yarı Eksende Verilmiş Operatör Katsayılı Diferansiyel Denklemin Green Fonksiyonu",Izv.AN Azerb.SSR,ser.fiz-tekn.imatem,nauk,No.2 , 10-25 (R)

Albayrak,F.İ.,(1997),"Operatör Katsayılı Dördüncü Mertebeden Diferansiyel Denklemin Green Fonksiyonunun İncelenmesi",Doktora Tez Çalışması,İstanbul

Aliev,B.I ve Bayramoğlu,M.,(1981),"Operatör Katsayılı Yüksek Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemlerin Green Fonksiyonu",Izv.Akad.NaukAzerb.SSR ser.Fiz Tekhn. Math.Nauk , V.2 ,No:4, 33-38 (R)

Aslanov,G.I.,(1976),"Yarı Eksende Verilmiş Operatör Katsayılı Adi Diferansiyel Denklemlerin Özdeğerleri Sayısının Asimptotik Davranışı", Dokl.Akad.Nauk Azerb.SSR ,32, No:3 S. 3-7 (R)

Aslanov,G.I.,(1993),"Hilbert Uzaylarında Operatör Katsayılı Diferansiyel Denklemler Üzerine",Mat.zametki,t.53,vıp.3,153-155

Bayramoğlu,M.,(1971),"Operatör Katsayılı Adi Diferansiyel Denklemlerin Özdeğerlerinin Asimtotik Davranışı","Fonksiyonel Analiz ve Uygulamaları" Sbornik, Bakü:Bilim, 144-166 (R)

Boymatov,K.Ch.,(1973),"Operatör Diferansiyel Denklemin Spektrumunun Asimtotu" , Ysp.mat.nauku ,No.5,t.28 , 207-208

Coddington,E.A.-Levinson,N.,(1955),"Theory of Ordinary Differantial Equations", New York :McGraw-Hill

Conway,J.B.,(1990),"A Course ın Functional Analysis"Graduate texts in Mathematics 2nd Ed.New York :Springer-Verlag,XVI

Fulton,T.C.-Pruess,S.A.,(1994), "Eigenvalue and Eigenfunction Asymtotics For Regular Sturm-Liouville Problems",J.Math.Anal.Appl.;188,297-340

Gorbaçuk,V.I.-Goraçuk,M.L.,(1972)," Operatör Katsayılı Sturm-Liouville Denklemi İçin Bazı Sınır Değer Problemleri" , Ykv.Mat.Journ.,24,No.3,291-305

Kato,T.,(1980),"Perturbation Theory For Linear Operators",Berlin-Heidelberg-New York ;Springer-Verlag

Kleyman,E.G.,(1977),"Normal Operatör Katsayılı Sturm-Liouville Denkleminin Green Fonksiyonu Üzerine",Vestnik,Mosk.Univ.,No:5,47-53 ,(R)

Kostyuçenko A.G.-Levitan B.M.,(1967),"Sturm-Liouville Operatör Denkleminin Özdeğerlerinin Asimtotik Davranışı",Funks.Analiz ego pril.,Vip.I,86-96

Kostyuçenko,A.G.-Sargsyan,I.S.,(1979),"Distribustions of Eigenvalue" , Mosk., Nauko

Levendorskii,S.Z.,(1990),"Asymptotic Distribution of Eigenvalues of Differential Operators",Kluwer Academic Dordrecht

Levitan,B.M.,(1968),"Operatör Katsayılı Sturm-Liouville Probleminin Green Fonksiyonunun
İncelenmesi",Mat.Sb.76(118),No:2,239-270 ,(R)

Levitan,B.M.-Sargsyan,I.S.,(1991),"Sturm-Liouville and Dirac Operators",Kluzeer Dordrechz

Mikusinski,J.-Debnath,C.J.,(1990),"Introduction To Hilbert Space With Applications",Acaden Press Inc.,New York

Otelbayev,M.,(1990),"Sturm-Liouville Operatörünün Spektrumunun Sınırlandırılması" , Alma-Ata ,"Gılım"

Oer,Z.,(1997),"Operatör Katsayılı Sturm-Liouville Denkleminin Green Fonksiyonu ve Ayrılma Probleminin İncelenmesi",Doktora Tez Çalışması,İstanbul

Öztürk,S.,(1998),"Sonlu ve Sonsuz Aralıklarda Verilmiş Sturm-Liouville Operatör Denkleminin Bazı Spektral Özellikleri",Doktora Tez Çalışması ,İstanbul

Titchmarsh,E.C.,(1962),"Eigenfunctions Expansions Associated With Second Order Differantial Equations",2nd ed.,Vol.I,Oxford Univ.Press,London

Titchmarsh,E.C.,(1958),"Eigenfunctions Expansions Associated With Second Order Differantial Equations",2nd ed.,Vol.II,Oxford Univ.Press,London

Stakgold,I.,(1998),"Green's Functions And Boundary Value Problems" , John-Wiley & Sons,New York

Yosida,K.,(1980),"Functional Analysis",Berlin-Göttingen-Heidelberg;Springer-Verlag

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	29.03.1972	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1984-1989	Özel Yıldız Lisesi
Lisans	1989-1993	Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	1993-1995	Yıldız Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
Doktora	1995-1999	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
Çalıştığı kurum	1995-Devam ediyor	YTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi