

768475

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LOKAL OLMAYAN PARABOLİK SINIR DEĞER FARK  
PROBLEMLERİNİN İYİ KONUMLANMIŞLIĞI

Öğr. Gör. İbrahim KARATAY

FBE Matematik Anabilimdalı Matematik Programında Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi: 30 Kasım 2004

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Akın TAŞDİZEN (YTÜ)

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ziya SOYUÇOK (YTÜ)

: Prof. Dr. Ehliman ADIGÜZELOV (YTÜ)

: Prof. Dr. Gülseren AYDIN (MSÜ)

: Prof. Dr. Veli ŞAHMUROV (İÜ)

İSTANBUL, 2004

## İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ .....	iv
KISALTMA LİSTESİ .....	v
ŞEKİL LİSTESİ .....	vi
ÇİZELGE LİSTESİ .....	vii
ÖNSÖZ .....	viii
ÖZET .....	ix
ABSTRACT .....	x
1. GİRİŞ .....	1
2. PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ .....	10
2.1 Pozitif Operatörler, Kesirli Uzaylar ve Analitik Yarı Gruplar .....	10
2.2 Bir $E$ Banach Uzayında Lokal Olmayan Sınır Değer Problemi .....	17
3. BİRİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU AŞIKAR OLMAYAN FARK ŞEMALARININ İYİ KONUMLANMIŞLIĞI .....	22
3.1 Fark Problemi .....	22
3.2 Ağ Fonksiyonlarının Oluşturduğu Sonlu Boyutlu Banach Uzayları .....	24
3.3 Ağ Fonksiyonlarının Oluşturduğu Sonsuz Boyutlu Banach Uzayları .....	26
3.4 Operatör Denklemi .....	27
3.5 Fark Şemalarının Kararlılığı .....	27
3.6 Fark Probleminin İyi konumlanmışlığı .....	28
3.7 Uygulamalar .....	37
4. İKİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMALARININ İYİ KONUMLANMIŞLIĞI .....	45
4.1 İkinci Basamaktan Doğruluklu Aşıkare Olmayan Fark Şemaları .....	45
4.2 İyileştirilmiş Crank-Nicholson Fark Şemaları .....	50
4.3 Uygulamalar .....	59
5. SAYISAL ANALİZ .....	61
5.1 Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şemaları .....	61
5.1.1 Yöntem .....	61
5.1.2 Algoritma .....	65
5.1.3 Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şemaları için Matlab Programı .....	66
5.1.4 Gerçek Çözümler ve Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şemaları ile Yaklaşık	

	Çözümler.....	70
5.2	Crank-Nicholson Fark Şemaları .....	70
5.2.1	Yöntem .....	70
5.2.2	Algoritma.....	74
5.2.3	Crank-Nicholson Fark Şemaları için Matlab Programı .....	74
5.2.4	Gerçek Çözümler ve CNFŞ ile Yaklaşık Çözümler .....	78
5.3	İyileştirilmiş Crank-Nicholson Fark Şemaları.....	78
5.3.1	Yöntem .....	78
5.3.2	Algoritma.....	82
5.3.3	İyileştirilmiş Crank-Nicholson Fark Şemaları için Matlab Programı.....	83
5.3.4	Gerçek Çözümler ve İyileştirilmiş Crank-Nicholson Fark Şemaları ile Yaklaşık Çözümler.....	87
5.4	İkinci Basamaktan Doğruluklu Aşık Olmayan Fark Şemaları .....	87
5.4.1	Yöntem .....	87
5.4.2	Algoritma.....	92
5.4.3	İkinci Basamaktan Doğruluklu Aşık Olmayan Fark Şemaları için Matlab Programı .....	92
5.4.4	Gerçek Çözümler Ve İkinci Basamaktan Doğruluklu Aşık Olmayan Fark Şemaları İle Yaklaşık Çözümler.....	96
6.	SONUÇLAR.....	97
	KAYNAKLAR.....	98
	ÖZGEÇMİŞ.....	101

## SİMGE LİSTESİ

- $C(E)$   $C(E) = C([0,1], E)$ , değerleri  $E$  Banach uzayından olan ve  $[0,1]$  aralığında tanımlanan sürekli fonksiyonların oluşturduğu Banach uzayı.
- $C^{\alpha,\alpha}(E)$   $C^{\alpha,\alpha}(E) = C^{\alpha,\alpha}([0,1], E)$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  

$$\|\varphi\|_{C^{\alpha,\alpha}(E)} = \|\varphi\|_{C(E)} + \sup_{0 \leq t < t+\tau \leq 1} \frac{\|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)\|_E}{\tau^\alpha} (t+\tau)^\alpha$$
normuyla verilen  $[0,1]$  aralığı üzerinde tanımlanmış  $E$  uzayından değer alan düzgün  $\varphi(t)$  fonksiyonları kümesinin tamlanması ile elde edilen ağırlıklı Hölder uzayı.
- $C_\tau(E)$   $C(\tau, E) = C(E(\tau))$  ağ fonksiyonları uzayında  $\varphi^\tau \in E(\tau)$  için  $\|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E)} = \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k\|_E$  normu ile verilen Banach uzayı.
- $C_\tau^{\alpha,\alpha}(E)$   $C(\tau, E) = C(E(\tau))$  ağ fonksiyonları uzayında  $\varphi^\tau \in E(\tau)$  ve  $0 < \alpha < 1$  için  

$$\|\varphi^\tau\|_{C_\tau^{\alpha,\alpha}(E)} = \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E)} + \max_{1 \leq k < k+r \leq N} \|\varphi_{k+r} - \varphi_k\|_E (k+r)^\alpha r^{-\alpha}$$
,
normuyla verilen ağırlıklı Hölder uzayı.
- $C_\tau^\alpha(E)$   $0 < \alpha < 1$  olmak üzere,  

$$\|\varphi^\tau\|_{C_\tau^\alpha(E)} = \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E)} + \max_{1 \leq k < k+r \leq N} \|\varphi_{k+r} - \varphi_k\|_E (r\tau)^{-\alpha}$$
normuyla verilen Hölder uzayı.
- $E_\alpha$   $0 < \alpha < 1$  ve  $A$  kuvvetli pozitif bir operatör olmak üzere  

$$\|v\|_{E_\alpha} = \sup_{\lambda > 0} \|\lambda^{1-\alpha} A \exp(-\lambda A) v\|_E + \|v\|_E$$
normu sonlu olan bütün  $v \in E$  elemanlarının oluşturduğu kesirli uzay.
- $E_\alpha'$   $0 < \alpha < 1$  ve  $A$  kuvvetli pozitif bir operatör olmak üzere  

$$\|v\|_{E_\alpha'} = \sup_{\lambda > 0} \lambda^\alpha \|A(\lambda + A)^{-1} v\|_E$$
normu sonlu olan bütün  $v \in E$  elemanlarının oluşturduğu kesirli uzay.
- $F\{u\}$   $u$  fonksiyonunun Fourier dönüşümü.
- $\phi(A)$  Kuvvetli pozitif  $A$  operatörünün spektral açısı.
- Gamma  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{(1-\alpha)} e^{-t} dt$ .
- $\Gamma$   $S_1(\phi) = \{\rho e^{i\phi} : 0 \leq \rho \leq \infty\}$ ,  $S_2(\phi) = \{\rho e^{-i\phi} : 0 \leq \rho \leq \infty\}$  ışınları ve  $r$  yarıçaplı çember yayı ile oluşturulan çevrel çizgi.
- $L(u)$   $u$  fonksiyonunun Laplace dönüşümü.
- $\Omega$   $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \forall x_k \in \mathbb{R}, 0 < x_k < 1, 1 \leq k \leq n\}$  ile verilen açık birim küp.  $S$ , bu küpün sınırları ve  $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$ .
- $\Omega^+$   $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \forall x_k \in \mathbb{R}, 0 < x_k < \infty, 1 \leq k \leq n\}$  ile verilen açık küme.  $S^+$ , bu kümenin sınırları ve  $\overline{\Omega}^+ = \Omega^+ \cup S^+$ .
- $\sigma(A)$   $A$  operatörünün spektrumu.

## KISALTMA LİSTESİ

CNFŞ	Crank-Nicholson fark şemaları
G	Gerçek çözümler
İBDAOFS	İkinci basamaktan doğruluklu aşikar olmayan fark şemaları
Y	Yaklaşık çözümler



## ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Spektrum açısı ve $\Gamma$ çevrel çizgisi .....	10
Şekil 5.1 Gerçek çözümler. ....	69
Şekil 5.2 Birinci basamaktan doğruluklu fark şemaları. ....	69
Şekil 5.3 Crank-Nicholson fark şemaları. ....	77
Şekil 5.4 İyileştirilmiş Crank Nicholson fark şemaları. ....	86
Şekil 5.5 İkinci basamaktan doğruluklu fark şemaları. ....	95



## ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 5.1 N=20, M=10 verilerek oluşturulan ağ noktaları için gerçek çözümler ve birinci basamaktan doğruluklu yaklaşık çözümler .....	70
Çizelge 5.2 N=20, M=10 verilerek oluşturulan ağ noktaları için gerçek çözümler ve Crank-Nicholson yaklaşık çözümleri .....	78
Çizelge 5.3 N=20, M=10 verilerek oluşturulan ağ noktaları için gerçek çözümler ve iyileştirilmiş Crank-Nicholson yaklaşık çözümleri .....	87
Çizelge 5.4 N=20, M=10 verilerek oluşturulan ağ noktaları için gerçek çözümler ve ikinci basamaktan doğruluklu yaklaşık çözümler .....	96
Çizelge 5.5 Bağlı Hatalar .....	96



## ÖNSÖZ

Bu tez çalışması sırasında yaptığı değerli katkılar için danışman hocam Prof. Dr. Akın Taşdizen'e sonsuz teşekkür ederim.

Bu çalışma sırasında benden hiç bir yardımı esirgemeyen, değerli tavsiyeleriyle yol gösteren Türkmen-Türk Üniversitesi ve Fatih Üniversitesi hocası Prof. Dr. Allaberen Ashyralyev'e ve İsrail Hebrew Üniversitesi'nden Prof. Dr. Pavel E. Sobolevskii'ye teşekkür ederim.





## ÖZET

Pek çok, parabolik denklemler için lokal olmayan sınır değer problemi, bir  $E$  Banach uzayında, kuvvetli pozitif bir  $A$  operatörü ile,

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad u(0) = \alpha u(\lambda) + \varphi, \quad 0 < \lambda \leq 1$$

sınır değer problemine indirgenebilir.

Bu araştırmada, yukarıdaki soyut lokal olmayan sınır değer problemlerinin çeşitli fark şemaları ile çözümlerinin, kararlılık kestirimleri, hemen hemen kararlılık kestirimleri ve koersiv kararlılık kestirimleri elde edildi. Bu soyut sonuçlarla, parabolik denklemler için lokal olmayan sınır değer probleminin, çeşitli fark şemaları ile çözümlerinin, çeşitli Banach uzaylarındaki kararlılık kestirimleri, hemen hemen kararlılık kestirimleri ve koersiv kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

Bu teorik sonuçlar bir model problem için yapılan sayısal inceleme sonuçları ile desteklenmiştir.

**Anahtar kelimeler:** Lokal olmayan sınır değer problemi, parabolik denklemler için lokal olmayan sınır değer problemi, yarıgrup, kuvvetli pozitif operatörler, fark şemaları, kararlılık, koersiv kararlılık, hemen hemen koersiv kararlılık, birinci basamaktan doğruluk, ikinci basamaktan doğruluk, iyi konumlanmışlık.

## ABSTRACT

It is known that various nonlocal boundary value problem for the parabolic equations can be reduced to the boundary value problem

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t) \quad (0 \leq t \leq 1), u(0) = \alpha u(\lambda) + \varphi, 0 < \lambda \leq 1$$

for differential equation in a Banach space  $E$  with a strongly positive operator  $A$ .

In the present work the first and second order of accuracy difference schemes for approximately solving this abstract nonlocal boundary value problem are presented. The stability estimates, almost coercive stability estimates and coercive stability estimates for the solution of these difference schemes are obtained. In application, this abstract results is used to obtain the stability, coersive stability and almost coersive stability estimates for this difference schemes for a nonlocal boundary value problem for parabolic differential equations.

The theoretical statements for the solution of this difference schemes are supported by the results of numerical experiments.

**Keywords:** Nonlocal boundary value problem, nonlocal boundary value problem for parabolic differential equations, semigroup, strongly positive operators, difference schemes, stability, coercive stability, almost coercive stability, first order accuracy, second order accuracy, well-posedness.

## 1. GİRİŞ

Parabolik tipteki diferansiyel denklemler, ısı akışı, füzyon süreci ve diğer pek çok fiziksel alanda karşımıza çıkmaktadır. Bu tip denklemlerle fiziksel olayların modelleri ifade edilebilir.

**Tanım 1.1.** Her veri kümesi için problemin yalnızca bir çözümü varsa ve bu çözüm, veri kümesiyle sürekli bağlantılıysa, bu probleme iyi konumlanmış (*well-posed*) problem denir. Yani, bir problemin iyi konumlanmış olması, verilerdeki küçük değişimlerin çözümlerde de küçük değişimler oluşturması demektir.

Bu çalışmamızda lokal olmayan parabolik sınır değer problemlerinin iyi konumlanmışlığını inceleyeceğiz. Bu çalışmanın asıl amacı, lokal olmayan parabolik sınır değer problemleri için fark şemalarının, iyi konumlanmışlığını, araştırmak ve kurgulamaktır.

Lokal olmayan parabolik sınır değer problemlerinin *analitik* çözümlerini elde etmek için, *Laplace dönüşüm yöntemi*, *Fourier dönüşüm yöntemi* veya *değişkenlerine ayırma yöntemi* kullanılmaktadır. Ancak bu yöntemler sabit katsayılı olmayan denklemlerde kullanılabilen yöntemler değildir. Oysaki fark şemaları yöntemi, sabit katsayılı olmayan denklemlere de uygulanabilen bir yöntemdir. Şimdi bu yöntemleri örneklerle gösterelim.

### Örnek 1.1.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + (1 - 2t^2) \sin(x), & 0 < t < 1, 0 < x < \pi, \\ u(0, x) = u(1, x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

lokal olmayan parabolik sınır değer problemini ele alalım.

(1.1) probleminin çözümünü bulmak için değişkenlerine ayırma yöntemini kullanabiliriz.

Problemi çözmek için  $u(t, x)$  fonksiyonunu  $u(t, x) = v(t, x) + w(t, x)$  şeklinde iki kısma ayıralım. Şöyle ki

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v, & 0 < t < 1, 0 < x < \pi, \\ v(0, x) = v(1, x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ v(t, 0) = v(t, \pi) = 0, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (1.2)$$

ve

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w + (1 - 2t^2) \sin(x), & 0 < t < 1, 0 < x < \pi, \\ w(0, x) = w(1, x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ w(t, 0) = w(t, \pi) = 0, & 0 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (1.3)$$

Burada önce problem (1.2)'nin çözümünü bulmalıyız. Değişkenlerine ayırma yöntemi gereğince  $v(t, x) = T(t)X(x) \neq 0$  olarak kabul edelim. Türevler alınıp denklemde yerine yazılırsa

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x) - T(t)X(x)$$

elde edilir. Buradan,

$$T'(t)X(x) + T(t)X(x) = T(t)X''(x)$$

bulunur ve dolayısıyla da

$$\frac{T'(t) + T(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

ifadesi elde edilir.

Problemde verilen sınır koşulları kullanılarak

$$X(0) = X(\pi) = 0$$

bulunur.

Eğer  $\lambda \geq 0$ , ise

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, X(0) = X(\pi) = 0$$

sınır değer probleminin sadece  $X(x) = 0$  aşıkâr çözümüne sahip olduğu kolaylıkla gösterilebilir. O halde geriye  $\lambda < 0$  durumu kalır. Bu sınır değer probleminin aşıkâr olmayan çözümleri

$$X_k(x) = \sin kx, k = 1, 2, \dots$$

şeklindedir.

İkinci eşitliği ve  $\lambda = -k^2$  ifadelerini kullanarak

$$T'(t) + (1 + k^2)T(t) = 0$$

diferansiyel denklemini elde ederiz.

Bu birinci dereceden lineer diferansiyel denklemin analitik çözümü,

$$T_k(t) = C_k e^{-(1+k^2)t}$$

şeklindedir.

Böylece

$$v(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-(1+k^2)t} \sin kx$$

bulunur.

$v(1, x) = v(0, x)$  lokal olmayan sınır koşulunu kullanarak

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-(1+k^2)} \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin kx$$

denklemini elde ederiz.

Bu son denklemden

$$C_k e^{-(1+k^2)} = C_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

bulunur.

Böylece

$$C_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

elde edilir.

Bu sonuçtan da  $v(t, x) \equiv 0$  bulunur.

Şimdide problem (1.3)'ün çözümünü araştıralım.

$$w(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin kx,$$

olsun. Buradan

$$w_t - w_{xx} + w = \sum_{k=1}^{\infty} (A'_k(t) + k^2 A_k(t) + A_k(t)) \sin kx = (1 - 2t^2) \sin x$$

bulunur.

$k \neq 1$  için  $A'_k(t) + (1 + k^2)A_k(t) = 0$  olmalıdır. Bu ifadeden

$$A_k(t) = A_k(0)e^{-(1+k^2)t}$$

elde edilir.

Periyodiklik koşulu olan

$$A_k(1) = A_k(0)$$

eşitliği yardımıyla bütün  $k \neq 1$  için  $A_k(0) = 0$  ve de  $A_k(t) = 0$  bulunur.

$k = 1$  için  $A'_1(t) + 2A_1(t) = 1 - 2t^2$  eşitliği gerçekleşir. Bu denklemden de

$$A_1(t) = e^{-2t} A_1(0) + \int_0^t e^{-2(t-s)} (1 - 2s^2) ds$$

elde ederiz.

$A_1(0) = A_1(1)$  koşulundan,

$$A_1(0) = \frac{1}{1 - e^{-2}} \int_0^1 e^{-2(1-s)} (1 - 2s^2) ds$$

buluruz.

O halde,

$$A_1(t) = e^{-2t} \frac{1}{1 - e^{-2}} \int_0^1 e^{-2(1-s)} (1 - 2s^2) ds + \int_0^t e^{-2(t-s)} (1 - 2s^2) ds = t(1-t).$$

Sonuç olarak,

$$w(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin kx = t(1-t) \sin x$$

buluruz. Böylece

$$u(t, x) = v(t, x) + w(t, x) = 0 + t(1-t)\sin x = t(1-t)\sin x$$

buluruz.

Yukarıda kullandığımız değişkenlerine ayırma yöntemi ile aşağıdaki

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \sum_{r=1}^n \alpha_r \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_r^2} + \delta u(t, x) = f(t, x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{\Omega}, \quad 0 < t < T, \\ u(0, x) = u(T, x) + \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ u(t, x) = 0, \quad x \in S, \quad 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

lokal olmayan *çok boyutlu* parabolik sınır değer probleminin çözümü de elde edilebilir.

Bu son denklemde,  $f(t, x)$  ( $t \in [0, T], x \in \bar{\Omega}$ ),  $\varphi(x) \in \bar{\Omega}$  verilmiş düzgün (*smooth*) fonksiyonlar ve  $\alpha_r, \delta > 0$  'dır.  $\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \forall x_k \in \mathbb{R}, 0 < x_k < 1, 1 \leq k \leq n\}$ ,  $\mathbb{R}^n$  Öklit uzayında açık birim küptür.  $S$  bu küpün sınırlarını göstermektedir ve  $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$  'dir.

Bununla beraber, değişkenlerine ayırma yöntemi, yalnızca, denklemin tüm katsayılarının sabit olması durumunda kullanılabilir. Oysaki fark şemaları yöntemi katsayıların sabitler olmadığı durumlarda da kullanılabilen bir yöntemdir.

### Örnek 1.2.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + (3 - 4x^2)e^{-x^2}, \quad 0 < t < 1, \quad -\infty < x < \infty, \\ u(0, x) = u(1, x), \quad -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (1.4)$$

lokal olmayan parabolik sınır değer problemini ele alalım.

Bu problemin çözümünü bulmak için Fourier dönüşümü metodunu kullanalım.

Önce,

$$u_t = u_{xx} - u + (3 - 4x^2)e^{-x^2}$$

denkleminde eşitliğin her iki yanının Fourier dönüşümünü alalım. Buradan

$$\mathbf{F}\{u_t\} = \mathbf{F}\{u_{xx}\} - \mathbf{F}\{u\} + \mathbf{F}\{(3 - 4x^2)e^{-x^2}\}$$

buluruz. Bu son ifadeden ve Fourier dönüşüm özelliklerinden

$$(\mathbf{F}\{u(t, x)\})_t = (is)^2 \mathbf{F}\{u(t, x)\} - \mathbf{F}\{u(t, x)\} + \mathbf{F}\{(3 - 4x^2)e^{-x^2}\}$$

elde ederiz.

Denklemlerde  $\mathbf{F}\{u(t, x)\} = v(t, s)$  dönüşümünü kullanırsak

$$v_t(t, s) + (s^2 + 1)v(t, s) = \mathbf{F}\{(3 - 4x^2)e^{-x^2}\}$$

buluruz.

Buradaki son diferansiyel denklemi çözersek,

$$v(t, s) = ce^{-(s^2+1)t} + \frac{1}{s^2 + 1} \mathbf{F}\{(3 - 4x^2)e^{-x^2}\}$$

elde ederiz.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\{(3 - 4x^2)e^{-x^2}\} &= \mathbf{F}\{e^{-x^2}\} + \mathbf{F}\{(2 - 4x^2)e^{-x^2}\} = \mathbf{F}\{e^{-x^2}\} - \mathbf{F}\{(e^{-x^2})''\} \\ &= (1 + s^2)\mathbf{F}\{e^{-x^2}\}, \end{aligned}$$

eşitliğinden,  $v(t, s) = ce^{-(s^2+1)t} + \mathbf{F}\{e^{-x^2}\}$  elde ederiz.

$v(0, s) = v(1, s)$ , koşulundan

$$ce^{-(s^2+1)0} + \mathbf{F}\{e^{-x^2}\} = ce^{-(s^2+1)1} + \mathbf{F}\{e^{-x^2}\}$$

olur. Bu son eşitlikten

$$c(e^{-(s^2+1)1} - e^{-(s^2+1)0}) = 0$$

bulunur. Dolayısıyla  $c = 0$  olur.

Böylece,

$$v(t, s) = \mathbf{F}\{e^{-x^2}\}$$

elde edilir. Bu son denkleme ters Fourier dönüşümü uygularsak

$$u(t, x) = \mathbf{F}^{-1}\{\mathbf{F}\{e^{-x^2}\}\}$$

olur. Lokal olmayan sınır değer problemi (1.4) ün analitik çözümü  $u(t, x) = e^{-x^2}$  'dir.



Aynı yöntemle,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|r|=2m} a_r \frac{\partial^{|r|} u}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} + \delta u(t, x) = f(t, x), \\ 0 < t < T, \quad x, r \in \mathbb{R}^n, \quad |r| = r_1 + \dots + r_n, \\ u(0, x) = u(T, x) + \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$2m$ -mertebeli çok boyutlu lokal olmayan parabolik sınır değer problemlerinin çözümleri de bulunabilir. Burada  $a_r, \delta > 0$  ve  $f(t, x)$  ( $t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^n$ ),  $\varphi(x) \in \mathbb{R}^n$  verilmiş düzgün fonksiyonlardır.

Bu Fourier dönüşüm yöntemi denklemin sadece sabit katsayılı olduğu durumlarda uygulanabilen bir yöntemdir. Katsayılar sabit olmadığı zaman bu metot geçerli değildir.

Bir diğer klasik yöntem olan *Laplace dönüşümü* yöntemini bir problem üzerinde gösterelim.

### Örnek 1.3.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u - 2e^{-x} + 1, \quad 0 < t < 1, \quad 0 < x < \infty, \\ u(0, x) = u(1, x) = 0, \quad 0 < x < \infty, \\ u(t, 0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (1.5)$$

lokal olmayan parabolik sınır değer problemini ele alalım.

$$u_t = u_{xx} - u - 2e^{-x} + 1$$

denkleminin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulayalım. O zaman

$$L\{u_t\} = L\{u_{xx}\} - L\{u\} + L\{-2e^{-x} + 1\}$$

olur. Böylece

$$(L\{u(t, x)\})_t = s^2 L\{u(t, x)\} - su(t, 0) - u_x(t, 0) - L\{u(t, x)\} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s}$$

elde edilir.

$$L\{u(t, x)\} = v(t, s)$$

dönüşümünü kullanarak

$$v_t(t, s) = s^2 v(t, s) - v(t, s) + \frac{1-s}{s(s+1)}$$

elde ederiz.

Denklemleri düzenleyerek,

$$v_t(t, s) + (1-s^2)v(t, s) = \frac{1-s}{s(s+1)}$$

elde ederiz. Bu son adi diferansiyel denklemi çözerek

$$v(t, s) = ce^{(-1+s^2)t} + \frac{1}{s(s+1)^2}$$

elde ederiz.

Problemde verilen  $v(0, s) = v(1, s)$  sınır koşulu kullanılarak,

$$ce^{(-1+s^2)0} + \frac{1}{s(s+1)^2} = ce^{(-1+s^2)1} + \frac{1}{s(s+1)^2}$$

yazılır. Buradan da  $c(e^{(-1+s^2)} - 1) = 0$ . Bu son eşitlikten  $c = 0$  elde edilir. Böylece

$$v(t, s) = \frac{1}{s(s+1)^2}.$$

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2},$$

eşitliğinden yararlanıp, ters Laplace dönüşümü uygularsak

$$\begin{aligned} u(t, x) &= L^{-1}\{v(t, s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} \\ &= 1 - e^{-x} - xe^{-x} = 1 - (1+x)e^{-x}. \end{aligned}$$

Böylece (1.5) lokal olmayan sınır değer probleminin çözümü

$$u(t, x) = 1 - (1+x)e^{-x}$$

olur.

Laplace dönüşümü yöntemini kullanarak,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \sum_{r=1}^n \alpha_r \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_r^2} + \delta u(t, x) = f(t, x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{\Omega}^+, \quad 0 < t < T, \\ u(0, x) = u(T, x) + \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}^+, \\ u(t, x) = 0, \quad x \in S^+, \quad 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

genel lokal olmayan çok boyutlu parabolik sınır değer probleminin çözümü de elde edilebilir.

Burada  $\alpha_r > 0$ ,  $\delta > 0$  ve  $f(t, x)$  ( $t \in [0, T]$ ,  $x \in \overline{\Omega}^+$ ),  $\varphi(x) \in \overline{\Omega}^+$  verilmiş düzgün fonksiyonlardır.  $\Omega^+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \forall x_k \in \mathbb{R}, 0 < x_k < \infty, 1 \leq k \leq n\}$  şeklinde bir açık küme,  $S^+$  da bu kümenin sınırları ve  $\overline{\Omega}^+ = \Omega^+ \cup S^+$  'dır.

Laplace dönüşüm yöntemi de denklemin sadece sabit katsayılı olduğu durumlarda uygulanabilen bir yöntemdir.

Problemlerde verilen sınır bilgileri veya sınır koşulları o problemin iyi konumlanmış olup olmamasını etkiler. Örneğin, parabolik denklemlerde *iyi konumlanmış* olan pek çok problem, bir  $E$  Banach uzayında,  $A$  kuvvetli pozitif operatörlü

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t), \quad 0 < t \leq 1, \\ u(0) = u_0, \quad u_0 \in D(A) \end{cases} \quad (1.6)$$

başlangıç değer problemi ile formüle edilebilir. Bu problemle bağlantılı olan

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t), \quad 0 \leq t < 1, \\ u(1) = u_1, \quad u_1 \in D(A) \end{cases} \quad (1.7)$$

problemi iyi konumlanmış olmayabilir. Fakat bu iki problemden üretilen

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t), \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) + \mu, \quad \mu \in D(A) \end{cases} \quad (1.8)$$

lokal olmayan sınır değer problemi, (1.6) problemi gibi iyi konumlanmış olabilir.

## 2. PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

### 2.1 Pozitif Operatörler, Kesirli Uzaylar ve Analitik Yarı Gruplar

Bu bölümde, pozitif operatörlerle ilgili temel kavramları, kesirli uzay (fractional space), bir problemin çözümlerinin kararlılığı, bir problemin çözümlerinin koersiv kararlılığı tanımlarını vereceğiz.

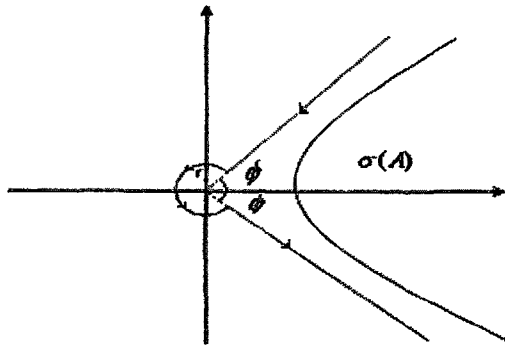
**Tanım 2.1.** Bir  $E$  Banach uzayında etkiyen  $A$  operatörünün  $\sigma(A)$  spektrumu,  $S_1(\phi) = \{\rho e^{i\phi} : 0 \leq \rho < \infty\}$ ,  $S_2(\phi) = \{\rho e^{-i\phi} : 0 \leq \rho < \infty\}$  ışınlarının oluşturduğu  $0 < 2\phi < \pi$  açısı içinde kalıyorsa ve  $(\lambda I - A)^{-1}$  rezolvent operatörünün normu,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{E \rightarrow E} \leq \frac{M(\phi)}{1 + |\lambda|} \quad (2.1)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu  $A$  operatörüne *kuvvetli pozitif operatör* denir.

Bu şekildeki  $\phi$  açılarının en küçüğüne, *kuvvetli pozitif  $A$  operatörünün spektral açısı* denir ve  $\phi(A)$  veya  $\phi(A, E)$  ile gösterilir.

Spektrum  $\sigma(A)$  kapalı bir küme olduğu için,  $S_1(\phi(A))$  ve  $S_2(\phi(A))$  ışınlarının oluşturduğu bölgenin içinde kalır ve bu sektörün tepe noktasının  $\sigma(A)$  spektrumunu kesmeyen komşulukları mutlaka vardır.



Şekil 2.1 Spektrum açısı ve  $\Gamma$  çevrel çizgisi

$S_1(\phi)$  ışını,  $r$  yarıçaplı merkezci çember yayı ve  $S_2(\phi)$  ışını kullanılarak oluşturulan

$$\Gamma = \Gamma(\phi, r) = \{\rho e^{i\phi} : r \leq \rho < \infty\} \cup \{r e^{iq} : \phi \leq q < 2\pi - \phi\} \cup \{\rho e^{-i\phi} : -r \leq \rho < \infty\}$$

yoluna  $\Gamma$  çevrel çizgisi denir. Eğer  $r = 0$  ise,  $\Gamma$  çevrel çizgisi,  $\Gamma = S_1(\phi) \cup S_2(\phi)$  şeklindedir.

Burada  $\phi = \phi(A) < \pi/2$ 'dir.

**Tanım 2.2.**  $E$  bir Banach uzayı ve  $U(t)$ ,  $t \geq 0$ , bu uzayda etkiyen sınırlı lineer operatörlerin bir ailesi olsun. Eğer

- $U(t + \tau) = U(t)U(\tau) = U(\tau)U(t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $\tau \geq 0$ ;  $U(0) = I$ ,
- Her bir  $v_0 \in E$  için  $U(t)v_0$ , ( $t \geq 0$ ) sürekli bir fonksiyondur,

koşulları sağlanıyorsa bu  $U(t)$ ,  $t \geq 0$  ailesine *kuvvetli sürekli yarı grup* denir.

Eğer,  $U(t)$  bir kuvvetli sürekli yarı grup ise, normu, herhangi sınırlı  $[0, T]$  aralığında, düzgün sınırlıdır ve

$$\|U(t)\|_{E \rightarrow E} \leq M e^{wt}, \quad t \geq 0, \quad w = \ln \|U(1)\|, \quad (2.2)$$

Yani,  $t \rightarrow \infty$  için kuvvetli sürekli yarı grubun normu üstel fonksiyondan daha hızlı artmaz (Krasnosel'skii, Zabreiko, Pustyl'nik ve Sobolevskii, 1966).

**Tanım 2.3.**  $v_0 \in E$  için

$$U'(0)v_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \Delta t^{-1} [U(\Delta t) - I]v_0$$

formülüyle tanımlanan ve sağ yöndeki limitin var olduğu durumdaki  $U'(0)$  operatörüne,  $U(t)$  *yarı grubunun üretici* denir.

**Lemma 2.1.** (Krasnosel'skii, Zabreiko, Pustyl'nik, ve Sobolevskii, 1966) Bir yarı grubun üretici olan  $U'(0)$  operatörünün tanım kümesi  $E$  de yoğundur ve bazı  $w \in \mathbb{R}$  için,  $Re \mu > w$  şeklindeki kompleks  $\mu$  sayıları için  $\mu I - U'(0)$  operatörünün sınırlı tersi vardır. Dolayısıyla da  $U'(0)$  operatörü kapalı bir operatördür.

**Teorem 2.1.** [Hille-Pihilips-Miadare teoremi]  $B$  operatörü bir  $E$  kompleks Banach uzayında etkiyen ve her yerde yoğun bir tanım kümesine sahip bir operatör olsun.  $B$  operatörünün,

(2.2) eşitsizliğini sağlayan, kuvvetli sürekli bir yarı grubun üretici olması için gerek ve yeter koşul, reel kısmı  $w$ 'dan büyük olan her  $\lambda$  için

$$\|(\lambda I - B)^{-n}\|_{E \rightarrow E} \leq M(Re\lambda - w)^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

eşitsizliğini gerçekleyecek şekilde bir  $w$  sayısının varolmasıdır.

$E$  Banach uzayının reel uzay olması durumunda, (2.3) eşitsizliği reel  $\lambda > w$  elemanları için gerçekleşmelidir.

**Tanım 2.4.**  $U(t)$ , bir  $E$  kompleks Banach uzayında etkiyen kuvvetli sürekli yarı grup olsun. Eğer,  $U(t)$  'den,  $0 \leq t < \infty$  yarı doğrusundan devamlı (continuation yaparak) bazı

$$S_\alpha = \{z : |\arg z| < \alpha, \quad 0 < |z| < \infty\}, \quad 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

bölgesinde analitik, ve bu  $\overline{S_\alpha}$  kapanış bölgesinde kuvvetli sürekli olan, bir  $U(z)$  operatör fonksiyonu elde edilebiliyorsa,  $U(t)$  yarı grubu *analitiktir* denir.

Bir  $E$  kompleks Banach uzayında etkiyen analitik yarı grupların üreticileri, rezolventlerine göre şöylece karakterize edilirler.

**Teorem 2.2.** [Lyosida-Solomiaach teoremi]  $B$  operatörü, tanım kümesi yoğun olan ve  $E$  kompleks Banach uzayında etkiyen bir operatör olsun.  $B$  'nin bir analitik yarı grubun üretici olması için gerek ve yeter koşul  $Re\lambda \geq w$  ve  $|\lambda| \geq \tau$  şeklindeki  $\lambda$  kompleks sayıları için:

- $\lambda$ ,  $B$  'nin rezolvent kümesine aittir,
- $\|(\lambda I - B)^{-1}\|_{E \rightarrow E} \leq M |\lambda|^{-1}$ ,

koşulları sağlanacak şekildeki  $w$  ve  $\tau > 0$  sayılarının var olmasıdır.

**Teorem 2.3.** (Krein, 1966)

$f(z)$ ,  $\Gamma$  çevrel çizgisi tarafından sınırlandırılmış bölgede analitik ve bazı  $\varepsilon > 0$  sayıları için

$$|f(z)| \leq M|z|^{-\varepsilon} \quad (2.4)$$

kestirimini gerçekleyen bir fonksiyon olsun. Bu durumda,  $A$  kuvvetli pozitif operatörünün bir fonksiyonu olan

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(z-A)^{-1} dz \quad (2.5)$$

Cauchy-Riesz integrali, yakınsaktır ve sınırlı lineer bir operatördür. Ve eğer  $f(z)$  fonksiyonu orjinde sürekli ise (2.5) formülündeki  $\Gamma$  çevrel çizgisinde  $r=0$  olarak alınır dolayısıyla da  $\Gamma = S_1(\phi) \cup S_2(\phi)$  şeklindedir.  $A$  sınırlı bir operatör ise  $f(A)$  integrali,  $f(z)$  fonksiyonunun analitik olduğu bölgede  $\Gamma$  çevrel çizgisinin seçiminden bağımsızdır. Ayrıca, eğer  $f(z)$  fonksiyonu lineer ise  $f(A)$  operatörü de lineerdir ve  $f(z)$  fonksiyonu çarpansal ise  $f(A)$  operatörü de çarpansaldır.

Örneğin,  $f(z) = z^{-\alpha}$ , ( $\alpha > 0$ ) fonksiyonu ile  $A^{-\alpha}$  sınırlı operatörü tanımlanır. Bu durumda  $\Gamma$  yolu  $r > 0$  olarak seçilir. Kuvvetli pozitif  $A$  operatörünün herhangi bir kuvveti için çarpansallık özelliği  $A^{-(\alpha+\beta)} = A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-\beta}A^{-\alpha}$ . Bu özellikten ( $\alpha + \beta$  tamsayı iken)  $A^{-\alpha}x = 0$  denkleminin tek çözümü  $x = 0$  olur. Böylece, bu kuvvetli pozitif operatörün,  $A^{\alpha} = (A^{-\alpha})^{-1}$  pozitif kuvvetleri de tanımlanmış olur. Eğer  $A$  sınırsız ise,  $A^{\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ) operatörleri de sınırsızdır ve  $D(A^{\alpha})$  tanım kümeleri yoğundur.  $\beta < \alpha$  için  $D(A^{\alpha}) \subset D(A^{\beta})$ .

Bir başka örnek olarak  $f(z) = e^{-tz}$  fonksiyonunu ele alalım. Her hangi  $t > 0$  için bu fonksiyon  $|z| \rightarrow \infty$  iken  $z^{-\alpha}$  fonksiyonundan çok daha hızlı sıfıra gider. Yani, (2.4) eşitsizliğini sağlar. Ve değerleri  $\Gamma$  tarafından çevrelenmiş herhangi bir bölgenin içinde yer alır. Bu nedenle, (2.5) formülü, kuvvetli pozitif bir  $A$  operatöründen  $\exp\{-tA\}$  fonksiyonu tanımlamak için kullanılabilir.

$\exp\{-tA\}$  operatör fonksiyonu,

$$\exp\{-(t_1 + t_2)A\} = \exp\{-t_1A\} \exp\{-t_2A\}, \quad t_1, t_2 > 0$$

yarı grup özelliğini sağlar (Krein, 1966).

Bazı  $\alpha > 0$  ve  $t > 0$  için  $\Psi(z) = z^{\alpha}e^{-tz}$  fonksiyonunu ele alalım. Her hangi  $t > 0$  için bu fonksiyon  $|z| \rightarrow \infty$  iken  $z^{-\alpha}$  fonksiyonundan çok daha hızlı sıfıra gittiğinden,  $\Psi(z)$  fonksiyonu

$$\Psi(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^{\alpha} e^{-tz} (z-A)^{-1} dz$$

operatör fonksiyonunu tanımlar.

Şimdide,  $\exp\{-tA\}$  operatörünün  $E$  uzayını  $D(A^{\alpha})$  içine resmettiğini ve  $A^{\alpha} \exp\{-tA\} = \Psi(A)$  olduğunu gösterelim:  $x$ ,  $E$  uzayının herhangi bir elemanı olsun. Çarpansallık özelliğinden, (2.5) yardımıyla

$$A^{-\alpha} \Psi(A) x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-tz} (z-A)^{-1} x dz = \exp\{-tA\} x, \quad (2.6)$$

elde edilir. Bu da iddiamızı ispatlar. Buradan da

$$A^{\alpha} \exp\{-tA\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^{\alpha} e^{-tz} (z-A)^{-1} dz \quad (2.7)$$

formülünü buluruz. (2.6) formülünde  $\Gamma$  yolu  $r$  yarıçaplı merkezli çember yayı da içermektedir. Çünkü  $z^{-\alpha}$  fonksiyonuna karşılık gelen  $A^{-\alpha}$  operatörü uygulanmıştır. (2.7) formülündeki integrali alınan fonksiyon ise  $z=0$  noktasında sürekli olduğu için,  $r \rightarrow 0$  olarak, bazı  $0 < \phi < \pi/2$  için

$$A^{\alpha} \exp\{-tA\} = \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\infty}^0 \rho^{\alpha} e^{i\alpha\phi} e^{-t\rho e^{i\phi}} (\rho e^{i\phi} - A)^{-1} e^{i\phi} d\rho + \int_0^{\infty} \rho^{\alpha} e^{-i\alpha\phi} e^{-t\rho e^{-i\phi}} (\rho e^{-i\phi} - A)^{-1} e^{-i\phi} d\rho \right]$$

formülünü elde ederiz. (2.1) eşitsizliği yardımıyla

$$\|A^{\alpha} \exp\{-tA\}\|_{E \rightarrow E} \leq \frac{M(\phi)}{\pi} \int_0^{\infty} \rho^{\alpha-1} e^{-t\rho \cos\phi} d\rho = \frac{M(\phi) \Gamma(\alpha)}{\pi (\cos\phi)^{\alpha}} t^{-\alpha} \quad (2.8)$$

kestirimi bulunur.

Özel olarak,  $\alpha = 0$  için

$$\|\exp\{-tA\}\|_{E \rightarrow E} \leq \frac{M(\phi)}{\pi} \quad (2.9)$$

kestirimini elde ederiz.

Aşağıdaki teoremden (2.8) eşitsizliğinin,  $t \rightarrow +\infty$  için üstel olarak azalan bir çarpanla kesinleştirilebildiğini, yani



$$\|A^\alpha \exp\{-tA\}\|_{E \rightarrow E} \leq M e^{-\delta t} t^{-\alpha}$$

kestirimini elde ediyoruz.

**Teorem 2.4.** (Krein, 1966)  $A$ , bir  $E$  Banach uzayında etkiyen kuvvetli pozitif bir operatör ve  $\delta$  yeterince küçük pozitif bir sayı ise  $A - \delta$  operatörü de kuvvetli pozitif bir operatördür ve spektrum açılırları için  $\phi(A - \delta) \leq \phi(A)$  eşitsizliği vardır.

**İspat:**  $\lambda$ ,  $A$  operatörünün regüler bir noktası ve keyfi  $y \in E$  için  $\lambda x - (A - \delta)x = y$  denklemini ele alalım.  $\lambda x - Ax = z$  yazarsak  $z + \delta(\lambda - A)^{-1}z = y$  buluruz.  $\lambda \in \rho(A)$  için

$$\|\delta(\lambda - A)^{-1}\|_{E \rightarrow E} \leq \delta M(\phi)$$

olduğundan dolayı,  $\delta \leq [2M(\phi)]^{-1}$  için denklemin tek bir  $z$  çözümü vardır ve  $\|z\|_E \leq 2\|y\|_E$  'dir.

Denklemin  $x$  'e göre çözümü de tektir ve

$$\|(\lambda - (A - \delta))^{-1} y\|_E = \|x\|_E = \|(\lambda - A)^{-1} z\|_E \leq M(\phi) [|\lambda| + 1]^{-1} \|z\|_E \leq 2M(\phi) [|\lambda| + 1]^{-1} \|y\|_E.$$

Bu da  $\lambda - (A - \delta)$  operatörünün  $0 < \delta \leq [2M(\phi)]^{-1}$  için tersinin var ve sınırlı olduğu ve

$$\|[\lambda - (A - \delta)]^{-1}\|_{E \rightarrow E} \leq 2M(\phi) [|\lambda| + 1]^{-1}$$

eşitsizliğinin gerçekleştiği anlamına gelir. Böylece  $\phi(A - \delta) \leq \phi(A)$  elde edilmiş olur.

Böylece,  $A - \delta$  operatörünün de kuvvetli pozitif bir operatör olduğu gösterilmiş oldu. (2.9) kestirimini kullanarak

$$\|\exp\{-(A - \delta)t\}\|_{E \rightarrow E} \leq \frac{2M(\phi)}{\pi}$$

kestirimini buluruz. Böylece

$$\|\exp\{-At\}\|_{E \rightarrow E} \leq \frac{2M(\phi)}{\pi} e^{-\delta t} \tag{2.10}$$

kestirimini elde ederiz.

Kabul edelim ki  $t > 1$  olsun. O zaman yarı grup özelliğinden,

$$\exp\{-tA\} = \exp\{-A\} \exp\{-(t-1)A\}$$

olur. (2.8) kestiriminde  $t=1$  yazarsak ve (2.10) kestirimini kullanarak,

$$\|A^\alpha \exp\{-tA\}\|_{E \rightarrow E} \leq \frac{M(\phi)}{\pi(\cos\phi)^\alpha} \frac{2M(\phi)}{\pi} e^{-\delta(t-1)}$$

elde ederiz. Yani  $t > 1$  için

$$\|A^\alpha \exp\{-tA\}\|_{E \rightarrow E} \leq M_1(\phi) e^{-\delta t}$$

kestirimi ispatlanmış olur.  $0 < t \leq 1$  olması durumunda, (2.8) kestirimi yine geçerlidir. Bu iki kestirim bir araya getirilerek, bazı  $\tilde{M}(\phi) > 0$  ve  $\delta > 0$  için

$$\|A^\alpha \exp\{-tA\}\|_{E \rightarrow E} \leq \tilde{M}(\phi) e^{-\delta t} t^{-\alpha} \quad (2.11)$$

elde edilir.

**Teorem 2.5.** (Krein, 1966)  $E$  bir Banach uzayı,  $A$  bu uzayda etkiyen kuvvetli pozitif bir operatör ve  $U(t) = \exp\{-tA\}$ , ( $t > 0$ ) ile verilen operatör ailesi olsun. Bu durumda

$$U'(t) = \frac{d}{dt} \exp\{-tA\} = -A \exp\{-tA\}, t > 0 \quad (2.12)$$

olur.  $U(t)$  fonksiyonunun operatör normuna göre her mertebeden sürekli türevi vardır ve

$$\lim_{t \rightarrow +0} U(t) = I, \quad \lim_{t \rightarrow +0} U'(t) = -A \text{ 'dır.}$$

Şimdi,  $U(t) = \exp\{-tA\}$  ( $t > 0$ ), fonksiyonunu  $t = 0$ 'da  $U(0) = I$  olarak genişletelim.

$t_1, t_2 > 0$  için  $\exp\{-(t_1 + t_2)A\} = \exp\{-t_1A\} \exp\{-t_2A\}$  eşitliğini de kullanarak

$U(t) = \exp\{-tA\}$  operatör ailesinden kuvvetli sürekli bir yarı grup elde ederiz.

$U(t) = \exp\{-tA\}$  kuvvetli sürekli yarı grubu, (2.8) kestirimini sağladığı için analitik bir yarı gruptur (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994).

**Tanım 2.5.**  $A$  bir  $E$  Banach uzayında etkiyen kuvvetli pozitif bir operatör ve  $0 < \alpha < 1$  olmak üzere

$$\|v\|_{E_\alpha} = \sup_{\lambda>0} \|\lambda^{1-\alpha} A \exp(-\lambda A)v\|_E \quad (2.13)$$

normu sonlu olan bütün  $v \in E$  elemanlarının oluşturduğu uzaya,  $E_\alpha(E, A)$  kesirli uzayı denir.

$E'_\alpha(E, A)$  kesirli uzayı da

$$\|v\|_{E'_\alpha} = \sup_{\lambda>0} \lambda^\alpha \|A(\lambda + A)^{-1}v\|_E \quad (2.14)$$

normu sonlu olan bütün  $v \in E$  elemanlarının oluşturduğu uzay olarak tanımlanır.

## 2.2 Bir $E$ Banach Uzayında Lokal Olmayan Sınır Değer Problemi

$E$  bir Banach uzayı,  $A$  bu uzayda etkiyen kuvvetli pozitif bir operatör olsun. Bu  $E$  Banach uzayında

$$v'(t) + Av(t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad v(0) = v(\lambda) + \mu, \quad 0 < \lambda \leq 1 \quad (2.15)$$

lokal olmayan sınır değer problemini ele alalım.

Bu problemde,  $v(t)$  bilinmeyen fonksiyon,  $f(t)$  verilmiş bir fonksiyon ve  $\mu \in E$  'dir. Bu  $v(t)$  ve  $f(t)$  fonksiyonları,  $E$  de değer alan,  $[0, 1]$  aralığında tanımlanmış fonksiyonlardır.

$v(t)$  fonksiyonunun türevi,  $\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - v'(t) \right\|_E = 0$  şeklindeki  $v'(t)$  fonksiyonu olarak tanımlanır.

Değerleri  $E$  Banach uzayından olan ve  $[0,1]$  aralığında tanımlanan, sürekli  $\varphi(t)$  fonksiyonları uzayında

$$\|\varphi\|_{C(E)} = \max_{0 \leq t \leq 1} \|\varphi(t)\|_E$$

normuyla verilen Banach uzayını  $C(E)$  ile gösterelim.

**Tanım 2.6.** Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa,  $v(t)$  fonksiyonu, (2.15) probleminin  $C(E)$  uzayında bir çözümdür denir:

- $v(t)$ ,  $[0,1]$  aralığında türevi sürekli bir fonksiyondur.
- $v(t)$ , her  $t \in [0,1]$  için  $D = D(A)$  kümesinin bir elemanıdır ve  $Av(t)$  fonksiyonu  $[0,1]$  aralığında süreklidir.
- $v(t)$  fonksiyonu, (2.15) problemini ve  $v(0) = v(\lambda) + \mu$  lokal olmayan sınır

koşulunu gerçeklemektedir.

(2.15) probleminin bir çözümü demekle, (2.15) probleminin  $C(E) = C([0,1], E)$  uzayında bir çözümünü kastedeceğiz. Problemin bir  $v(t)$  çözümü varsa  $v'(t) \in C(E)$  ve  $Av(t) \in C(E)$  olduğundan  $f(t) = v'(t) + Av(t) \in C(E)$ ,  $\mu = v(0) - v(1) \in C(E)$  olur.

$C(E) \times D$  normlu uzayını,  $f(t) \in C(E)$  ve  $\mu \in D(A)$  çiftlerinden,  $\|(f(t), \mu)\|_{C(E) \times D} = \|f\|_{C(E)} + \|\mu\|_D$  normu ile verilen uzay olarak tanımlayalım.

**Tanım 2.7.** Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, (2.15) problemi,  $C(E)$  uzayında *iyi konumlanmış* denir:

- Herhangi  $f(t) \in C(E)$  ve  $\mu \in D$  için, (2.15) probleminin *tek çözümü* vardır. Yani  $v(t) = v(t; f(t), \mu)$  çözüm fonksiyonu,  $C(E) \times D$  den  $C(E)$  uzayına giden ve (2.15) probleminin  $C(E)$  uzayındaki bir çözümünü veren, iyi tanımlanmış, toplamsal bire bir operatördür.
- Bu  $v(t; f(t), \mu)$  operatörü, sürekli bir operatördür.

Ayrıca, (2.15) problemindeki denklem ve sınır koşulu lineer olduğu için,  $v(t) = v(t; f(t), \mu)$  çözüm fonksiyonu da lineerdir. Öte yandan, lineer bir operatörün, sürekli olması ile sınırlı olması, birbirini gerektirir. Bu yüzden,  $v(t; f(t), \mu)$  operatörünün *sürekliliğini* göstermekle, *sınırlılığını* göstermek aynıdır.  $v(t; f(t), \mu)$  operatörünün *sınırlı* olması,  $M$  sabit bir sayı olmak üzere

$$\|v(t; f(t), \mu)\|_{C(E)} \leq M \| (f(t), \mu) \|_{C(E) \times D} = M [ \|f\|_{C(E)} + \|\mu\|_D ]$$

kestiriminin sağlanması demektir. Bu kestirime problemin *kararlılık kestirimi* denir. Bir problemin çözümleri, kararlılık kestirimini sağlıyorsa *bu problem kararlıdır* denir. Görüldüğü gibi problemin kararlı olması, problemin iyi konumlanmış olması için yeterli koşul değildir. Ayrıca, problemin çözümlerinin,  $C(E)$  uzayında bir çözüm olma, koşullarını da sağlaması gerekir ki problem iyi konumlanmış olsun.

**Tanım 2.8.**  $v' \in C(E)$ ,  $Av \in C(E)$ ,  $f \in C(E)$ ,  $\mu \in D(A)$  olsun.  $M_C$  ( $1 \leq M_C < \infty$ ),  $\mu$  ve  $f(t)$  ye bağlı olmayan bir sayı olmak üzere;

$$\|v'\|_{C(E)} + \|Av\|_{C(E)} \leq M_C [ \|f\|_{C(E)} + \|A\mu\|_D ] \quad (2.16)$$

kestirimine (2.15) probleminin  $C(E)$  uzayında koersiv kararlılık kestirimi denir. Eğer, (2.15) problemi için koersiv kararlılık kestirimi gerçekleşiyorsa (2.15) problemi koersiv kararludur denir.

Tanım 2.7. ve Tanım 2.8. birleştirilerek, bir problemin iyi konumlanmış olmasının gerek ve yeter koşulunun koersiv kararlılık kestiriminin gerçekleşmesi olduğu elde edilir.

Kuvvetli pozitif bir  $A$  operatörü için koersiv eşitsizliği gerçekleşiyorsa,  $-A$  operatörünün ürettiği  $\exp\{-sA\}$ , ( $s \geq 0$ ) yarı grubu analitik bir yarı gruptur (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994). Lemma 2.1'den, bu  $A$  operatörünün,  $C(E)$  uzayında kapalı bir operatör olduğu elde edilir.

**Tanım 2.9.** Eğer  $v(t)$  fonksiyonu (2.15) probleminin  $C(E)$  uzayında bir çözümü ise ve  $v'(t)$ ,  $Av(t)$  fonksiyonları  $F(E)$  uzayına aitse bu  $v(t)$  fonksiyonuna (2.15) probleminin  $F(E)$  uzayında da bir çözümdür denir.

**Tanım 2.10.**  $C(E)$  uzayındaki tanıma benzer olarak, aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa, (2.15) problemi,  $F(E)$  uzayında iyi konumlanmış bir problemdir denir.

- 1) Her hangi  $f \in F(E)$  ve  $\mu \in D(A)$  için (2.15) probleminin  $F(E)$  uzayında tek çözümü vardır. Yani  $v(t; f(t), \mu)$ ,  $F(E) \times D(A)$  den  $F(E)$  uzayına giden ve (2.15) probleminin  $F(E)$  uzayındaki bir çözümünü veren lineer bir operatördür.
- 2) Bu  $v(t; f(t), \mu)$ , sürekli bir operatördür.

Burada  $F(E) \times D(A)$  ifadesi

$$\|(f(t), \mu)\|_{F(E) \times D(A)} = \|f\|_{F(E)} + \|\mu\|_{D(A)}$$

normunun tanımlandığı,  $(f(t), \mu)$ ,  $f(t) \in F(E)$  ve  $\mu \in D(A)$  çiftleriyle elde edilen normlu uzaydır.

$C(E)$  uzayındaki tanımlara benzer olarak, (2.15) probleminin çözümleri için

$$\|v(t; f(t), \mu)\|_{F(E)} \leq M [\|f\|_{F(E)} + \|\mu\|_{D(A)}]$$

kestirimi sağlanıyorsa, (2.15) problemi  $F(E)$  uzayında kararludur denir.

Eğer,

$$\|v\|_{F(E)} + \|Av\|_{F(E)} \leq M \left[ \|f\|_{F(E)} + \|A\mu\|_{D(A)} \right]$$

kestirimi sağlanıyorsa (2.15) problemi  $F(E)$  uzayında koersiv karardır denir. (2.15) probleminin,  $F(E)$  uzayında koersiv kararlı olması, problemin bu  $F(E)$  uzayında iyi konumlanmış olmasının gerek ve yeter koşuludur.

**Tanım 2.11.**  $0 < \alpha < 1$  olmak üzere,

$$\|\varphi\|_{C^{\alpha,\alpha}(E)} = \|\varphi\|_{C(E)} + \sup_{0 \leq t < t+\tau \leq 1} \frac{\|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)\|_E}{\tau^\alpha} (t+\tau)^\alpha$$

normuyla verilen  $[0,1]$  aralığı üzerinde tanımlanmış  $E$  uzayından değer alan düzgün  $\varphi(t)$  fonksiyonları kümesinin tamlanması ile elde edilen Banach uzayına  $C^{\alpha,\alpha}(E)$  ağırlıklı Hölder uzayı denir.

**Tanım 2.12.**  $0 < \alpha < 1$  olmak üzere,

$$\|\varphi\|_{C^\alpha(E)} = \|\varphi\|_{C(E)} + \sup_{0 \leq t < t+\tau \leq 1} \frac{\|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)\|_E}{\tau^\alpha}$$

normuyla verilen  $[0,1]$  aralığı üzerinde tanımlanmış  $E$  uzayından değer alan düzgün  $\varphi(t)$  fonksiyonları kümesinin tamlanması ile elde edilen Banach uzayına  $C^\alpha(E)$  Hölder uzayı denir.

Aşağıdaki teoremlerde, (2.15) lokal olmayan sınır değer probleminin,  $C^{\alpha,\alpha}(E)$  ağırlıklı Hölder uzayı ve  $C(E_\alpha)$  kesirli uzayında koersiv kararlı olduğu,  $C^\alpha(E)$  Hölder uzayında ise  $A\mu + f(\lambda) - f(0) \in E_\alpha$  koşuluyla koersiv kararlı olduğu ifade edilmiştir.

**Teorem 2.6.** (Ashyralyev ve Hanalyev, 1996)  $\mu \in D(A)$ ,  $f(t) \in C_0^{\alpha,\alpha}(E)$  olsun.  $A$  operatörü de  $E$  Banach uzayında etkiyen kuvvetli pozitif bir operatör olsun. Bu durumda, (2.15) problemi,  $C^{\alpha,\alpha}(E)$  ağırlıklı Hölder uzayında iyi konumlanmıştır. Bu (2.15) sınır değer probleminin  $C^{\alpha,\alpha}(E)$  uzayındaki  $v(t)$  çözümleri,

$$\|v\|_{C^{\alpha,\alpha}(E)} + \|Av\|_{C^{\alpha,\alpha}(E)} \leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C^{\alpha,\alpha}(E)} + M \|A\mu\|_E$$

koersiv kararlılık kestirimini sağlar. Bu ifadede  $M$  değeri  $\alpha$ ,  $\mu$  ve  $f(t)$ 'den bağımsızdır.

**Teorem 2.7.** (Ashyralyev ve Hanalyev, 1998)  $A$ , bir  $E$  Banach uzayında etkiyen kuvvetli pozitif bir operatör ve  $f(t) \in C(E_\alpha)$  ( $0 < \alpha < 1$ ) olsun. Bu durumda, (2.15) sınır değer probleminin  $C(E_\alpha)$  kesirli uzayındaki  $v(t)$  çözüm fonksiyonu

$$\|v'\|_{C(E_\alpha)} + \|Av\|_{C(E_\alpha)} \leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C(E_\alpha)} + M \|A\mu\|_{E_\alpha}$$

koersiv kararlılık kestirimini sağlar. Bu ifadede  $M$  değeri  $\alpha$ ,  $\mu$  ve  $f(t)$ 'den bağımsızdır.

**Teorem 2.8.** (Ashyralyev, Hanalyev ve Sobolevskii, 2001)  $A$ , bir  $E$  Banach uzayında etkiyen kuvvetli pozitif bir operatör ve  $A\mu + f(\lambda) - f(0) \in E_\alpha$ ,  $f(t) \in C^\alpha(E)$  ( $0 < \alpha < 1$ ) olsun. Bu durumda, (2.15) sınır değer problemi  $C^\alpha(E)$  Hölder uzayında iyi konumlanmıştır. (2.15) lokal olmayan sınır değer probleminin  $C^\alpha(E)$  Hölder uzayındaki  $v(t)$  çözümü

$$\|v'\|_{C^\alpha(E)} + \|Av\|_{C^\alpha(E)} + \|v'\|_{C(E_\alpha)} \leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C^\alpha(E)} + \frac{M}{\alpha} \|A\mu + f(\lambda) - f(0)\|_{E_\alpha}$$

koersiv kararlılık kestirimini sağlar. Bu ifadede  $M$  değeri  $\alpha$ ,  $\mu$  ve  $f(t)$ 'den bağımsızdır.

### 3. BİRİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU AŞIKAR OLMAYAN FARK ŞEMALARININ İYİ KONUMLANMIŞLIĞI

#### 3.1 Fark Problemi

(2.15) lokal olmayan sınır değer problemine karşılık gelen

$$(u_k - u_{k-1})/\tau + Au_k = \varphi_k, \quad 1 \leq k \leq N, \quad u_0 = u_{\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \rfloor} + \mu, \quad 0 < \lambda \leq 1 \quad (3.1)$$

fark problemini ele alalım. Burada  $N$  sabit bir tamsayı,  $\tau = \frac{1}{N}$ ,  $u^\tau = \{u_k\}_1^N$  bilinmeyen ve  $\varphi^\tau = \{\varphi_k\}_1^N$  verilmiş ağ fonksiyonlardır. Bu ağ fonksiyonları, değer kümeleri  $E$  Banach uzayının alt kümesi olan fonksiyonlardır. Burada  $\varphi^\tau$  fonksiyonu  $f(t)$  fonksiyonuna bir tür yaklaşım fonksiyonu olarak alınır.

Örneğin,  $f(t) \in C(E)$  için,  $\varphi^\tau = \{f(t_k)\}_1^N$ ,  $t_k = k\tau$ ,  $k = 1, \dots, N$  olarak alınabilir.

**Tanım 3.1.** (3.1) fark problemine, (2.15) lokal olmayan sınır değer probleminin yaklaşık çözümleri için *birinci basamaktan doğruluklu aşikar olmayan fark şemaları* veya *Rothe fark şemaları* denir

**Tanım 3.2.** Sabit bir  $\tau$  ile elde edilen  $u^\tau$  ağ fonksiyonunun  $u_k \in D(A)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), bileşenleri, (3.1) denklem sistemini sağlıyorsa,  $u^\tau$  ağ fonksiyonu, (3.1) fark probleminin bir çözümlüdür denir.

**Teorem 3.1.**  $A$ , bir  $E$  Banach uzayında etkiyen kuvvetli pozitif bir operatör olsun. Bu durumda, tüm  $E$  uzayında tanımlı ve sınırlı  $(I + \tau A)^{-1} = R(\tau A)$  operatörü vardır ve  $T = (I - R^{\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \rfloor}(\tau A))^{-1}$  operatörü de sınırlı bir operatördür.

**İspat:**  $A$  kuvvetli pozitif bir operatör olduğundan  $\exp\{-tA\}$ ,  $t > 0$  yarı grubunun normu üstel olarak azalma kestirimini sağlamaktadır. Dolayısıyla

$$R^k(\tau A) = (I + \tau A)^{-k} = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty t^{k-1} \exp(-t) \exp(-\tau t A) dt, \quad k \geq 1,$$

formülünden

$$\|R^k(\tau A)\|_{E \rightarrow E} = \|(I + \tau A)^{-k}\|_{E \rightarrow E} \leq \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty t^{k-1} \exp(-t) \|\exp(-\tau t A)\|_{E \rightarrow E} dt \leq \frac{M}{(1 + \delta\tau)^k}$$



elde edilir. Buradan da

$$T = (I - R^{[\frac{\lambda}{\tau}]}(\tau A))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} R^{k[\frac{\lambda}{\tau}]}(\tau A)$$

ve

$$\begin{aligned} \|T\|_{E \rightarrow E} &= \|(I - R^{[\frac{\lambda}{\tau}]}(\tau A))^{-1}\|_{E \rightarrow E} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|R^{k[\frac{\lambda}{\tau}]}(\tau A)\|_{E \rightarrow E} \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{(1 + \delta\tau)^{k[\frac{\lambda}{\tau}]}} \\ &\leq \frac{M_1}{1 - (1 + \delta\tau)^{-[\frac{\lambda}{\tau}]}} \\ &\leq M_2(\lambda) \end{aligned} \quad (3.2)$$

elde edilir. Böylece  $(I - R^{[\frac{\lambda}{\tau}]}(\tau A))^{-1}$  operatörünün sınırlılığı gösterilmiş oldu.

Şimdi de, (3.1) probleminin çözümü için bir formül bulmaya çalışalım. Bunun için önce

$$(u_k - u_{k-1})/\tau + Au_k = \varphi_k, \quad 1 \leq k \leq N, \quad N\tau = 1, \quad u_0 - \text{biliniyor} \quad (3.3)$$

başlangıç-değer problemini ele alalım. Herhangi  $\varphi^r$  ve  $u_0$  için (3.3) probleminin çözümü vardır ve

$$u_k = R^k(\tau A)u_0 + \sum_{i=1}^k R^{k-i+1}(\tau A)\varphi_i\tau$$

olur. Bu formülden ve  $u_0 = u_{[\frac{\lambda}{\tau}]} + \mu$  lokal olmayan sınır koşulundan

$$(I - R^{[\frac{\lambda}{\tau}]}(\tau A))u_0 = \sum_{i=1}^{[\frac{\lambda}{\tau}]} R^{[\frac{\lambda}{\tau}] - i + 1}(\tau A)\tau\varphi_i + \mu$$

elde ederiz.

$T = (I - R^{[\frac{\lambda}{\tau}]}(\tau A))^{-1}$  operatörünün varlığı dolayısıyla da

$$u_0 = T \left[ \sum_{i=1}^{[\frac{\lambda}{\tau}]} R^{[\frac{\lambda}{\tau}] - i + 1}(\tau A)\tau\varphi_i + \mu \right] \quad (3.4)$$

yazarız.

O halde, herhangi  $\varphi^\tau$  ve  $\mu$  için (3.1) probleminin çözümü vardır ve

$$u_k = R^k(\tau A)(I - R^{[\frac{\Delta}{\tau}]}(\tau A))^{-1} \mu + (I - R^{[\frac{\Delta}{\tau}]}(\tau A))^{-1} \sum_{i=1}^{[\frac{\Delta}{\tau}]} R^{k+[\frac{\Delta}{\tau}]-i+1}(\tau A) \tau \varphi_i + \sum_{i=1}^k R^{k-i+1}(\tau A) \varphi_i \tau \quad (3.5)$$

$$= w_k + g_k, \quad k = 1, \dots, N$$

formülü gerçekleşmektedir. Bu formülde  $w^\tau = \{w_k\}_1^N$  homojen problemin çözümüdür;

$$(w_k - w_{k-1})/\tau + Aw_k = 0, \quad k = 1, \dots, N, \quad w_0 = w_{[\frac{\Delta}{\tau}]} + \mu, \quad (3.6)$$

ve  $g^\tau = \{g_k\}_1^N$  homojen olmayan problemin çözümüdür;

$$(g_k - g_{k-1})/\tau + Ag_k = \varphi_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad g_0 = g_{[\frac{\Delta}{\tau}]}. \quad (3.7)$$

### 3.2 Ağ Fonksiyonlarının Oluşturduğu Sonlu Boyutlu Banach Uzayları

$E(\tau)$  ile sabit bir  $\tau = 1/N$  için  $\varphi^\tau$  ağ fonksiyonları uzayını gösterelim. Bu  $E(\tau)$  uzayı,  $E$ 'nin elemanlarının sıralı  $N$ -lilerinden oluşan bir vektör uzayıdır. Bu  $E(\tau)$  uzayı üzerinde, çok çeşitli normlar tanımlanabilir, yani bu uzay, normlu vektör uzayıdır. Örneğin,

$E(\tau)$  vektör uzayında

$$\|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E)} = \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k\|_E$$

normu ile  $C_\tau(E)$  normlu uzayı tanımlanır.

$C_\tau^{\alpha, \alpha}(E)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , uzayı ise

$$\|\varphi^\tau\|_{C_\tau^{\alpha, \alpha}(E)} = \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E)} + \max_{1 \leq k < k+r \leq N} \|\varphi_{k+r} - \varphi_k\|_E (k+r)^\alpha r^{-\alpha}$$

normuyla verilen ağırlıklı Hölder uzayıdır.

$C_\tau^\alpha(E)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , uzayı da

$$\|\varphi^\tau\|_{C_\tau^\alpha(E)} = \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E)} + \max_{1 \leq k < k+r \leq N} \|\varphi_{k+r} - \varphi_k\|_E (r\tau)^{-\alpha}$$

normuyla verilen Hölder uzayıdır.

Üstelik,  $E$  uzayı tam uzay olduğundan dolayı  $C_r(E)$ ,  $C_r^{\alpha,\alpha}(E)$  ve  $C_r^\alpha(E)$  uzayları sadece normlu uzaylar değil aynı zamanda Banach uzayları olurlar.

**Tanım 3.3.**  $\|\cdot\|_1$  ve  $\|\cdot\|_2$  bir vektör uzayında tanımlı iki norm ve  $\varphi$  bu uzayın herhangi bir elemanı olsun. Eğer,

$$0 < \delta_1 \leq \frac{\|\varphi\|_1}{\|\varphi\|_2} \leq \delta_2 < \infty, \varphi \neq 0$$

olacak şekilde  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  sayıları varsa bu  $\|\cdot\|_1$  ve  $\|\cdot\|_2$  normları *denk normlardır* denir.

Sonlu boyutlu bir vektör uzayında tanımlanmış farklı normlar, birbirlerine denktirler. O halde herhangi bir *sabit*  $\tau=1/N$  için  $C_r(E)$ ,  $C_r^{\alpha,\alpha}(E)$  ve  $C_r^\alpha(E)$  uzayları denk uzaylardır. Dolayısıyla yukarıdaki eşitsizliği sağlayan  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  sayıları vardır. Ancak bu sayılar  $N=1/\tau$  sayısına bağlıdır. Bu nedenle, normların denk olduğunu kullanarak bu uzaylardan birinde verilen bir kararlılık kestiriminden, diğer uzayda bir kararlılık kestirimi elde edilemez. Bu yüzden, bu uzayların her birinde iyi konumlanmış olmayı ayrı ayrı incelememiz gerekmektedir.

Sabit bir  $\tau > 0$  için, lineer (3.1) problemi herhangi  $\mu \in E$  ve  $\varphi^\tau \in E(\tau)$  için teklikle çözülebilir olduğundan,  $u^\tau$  çözümleri  $E(\tau)$  uzayında etkiyen,  $u^\tau(\varphi, \mu)$  şeklinde lineer bir operatör tanımlar.

Eğer  $u^\tau(\varphi, \mu)$  lineer operatörü sürekli ise (3.1) problemi  $E(\tau)$  uzayında iyi konumlanmış bir problemdir.  $u^\tau(\varphi, \mu)$  lineer olduğundan dolayı,  $u^\tau(\varphi, \mu)$  operatörünün sınırlılığı ile sürekliliği birbirini gerektirir. O halde (3.1) probleminin iyi konumlanmış olması için gerek ve yeter koşul,  $u^\tau(\varphi, \mu)$  çözüm operatörünün sınırlılığı, yani

$$\|u^\tau(\varphi, \mu)\|_{E(\tau)} \leq M[\|\mu\|_E + \|\varphi^\tau\|_{E(\tau)}]$$

kararlılık kestiriminin gerçekleşmesidir. Bu eşitsizlikte  $M$  değeri  $\mu$  ve  $\varphi^\tau$  değerlerinden bağımsızdır. Fakat,  $\tau$ 'ya bağlı olabilir.

Örneğin,  $E(\tau)$  uzayı  $C_r(E)$ ,  $C_r^{\alpha,\alpha}(E)$ , uzaylarından biri olmak üzere,  $R(\tau A)$  operatörünün sınırlılığı, (3.5) formülü ve  $\|(I - R^{l+1})^{-1}\|_{E \rightarrow E} \leq M$  eşitsizliği yardımıyla (3.1) probleminin,

$C_\tau(E)$ ,  $C_\tau^{\alpha,\alpha}(E)$  uzaylarında iyi konumlanmışlığı elde edilir.

### 3.3 Ağ Fonksiyonlarının Oluşturduğu Sonsuz Boyutlu Banach Uzayları

$E(\tau)$ ,  $0 < \tau \leq \tau_0$ , uzayı yardımıyla  $\varphi = \{\varphi^\tau\}$ ,  $0 < \tau \leq \tau_0$  ağ fonksiyonlarının  $\varepsilon(E)$  diziler uzayını oluşturalım. Bu  $\varepsilon(E)$  sonsuz boyutlu bir vektör uzayıdır. Her  $0 < \tau \leq \tau_0$  için  $E(\tau)$  uzayı bir Banach uzayı olsun.  $\varphi = \{\varphi^\tau\}$  dizisi ile

$$\|\varphi\| = \sup_{0 < \tau \leq \tau_0} \|\varphi^\tau\|_{E(\tau)}$$

sayı dizisini oluşturalım.

Sayı dizileri uzayındaki herhangi bir norm  $\varepsilon(E)$  uzayında bir norm tanımlar. Aşağıda, sınırlı sayı dizileri uzayındaki normu kullanacağız.

$C(E) = C(\varepsilon(E))$  uzayı,  $\varphi = \{\varphi^\tau\}$  elemanları için

$$\|\varphi\|_{C(E)} = \sup_{0 < \tau \leq \tau_0} \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E)}$$

normunun tanımlandığı uzayıdır ve bu uzay sonsuz boyutludur.

$C^{\alpha,\alpha}(E) = C^{\alpha,\alpha}(\varepsilon(E))$  uzayı da  $\varphi = \{\varphi^\tau\}$  elemanları için sonlu

$$\|\varphi\|_{C^{\alpha,\alpha}(E)} = \sup_{0 < \tau \leq \tau_0} \|\varphi^\tau\|_{C_\tau^{\alpha,\alpha}(E)}$$

normuyla verilen ağırlıklı Hölder uzayıdır.

$C^\alpha(E) = C^\alpha(\varepsilon(E))$  uzayı da  $\varphi = \{\varphi^\tau\}$  elemanları için

$$\|\varphi\|_{C^\alpha(E)} = \sup_{0 < \tau \leq \tau_0} \|\varphi^\tau\|_{C_\tau^\alpha(E)}$$

normu sonlu olan elemanların oluşturduğu Hölder uzayıdır.

Sabit  $\tau$  durumunun aksine bu uzaylar aynı uzaylar değildirler. Aslında, tam olarak

$$C^\alpha(E) \subset C^{\alpha,\alpha}(E) \subset C(E)$$

şeklindedir.

### 3.4 Operatör Denklemi

(3.1) fark problemini  $E(\tau)$  uzayında bir operatör probleme dönüştürelim. Bunun için, önce,  $u^\tau = (u_0, u_1, \dots, u_N)$  vektörlerinin uzayı  $E \times E(\tau)$  uzayında etkiyen bir  $D$  operatörünü  $v^\tau = Du^\tau, v_k = (u_k - u_{k-1})/\tau, k = 1, 2, \dots, N, u_0 = u_{[\frac{t}{\tau}]} + \mu$

olarak tanımlayalım. Sonrada  $E \times E(\tau)$  den  $E(\tau)$  uzayına,  $\Pi(u_0)$  devam (continuation) operatörünü

$$\Pi(u_0)(u_1, u_2, \dots, u_N) = (u_0, u_1, \dots, u_N) \quad (3.8)$$

kuralıyla tanımlayalım. Bu durumda (3.1) fark problemi

$$D\Pi(u_0)u^\tau + Au^\tau = \varphi^\tau$$

şeklinde bir operatör probleme dönüşür. Bu problemde  $Au^\tau$  ve  $\varphi^\tau$

$$Au^\tau = \{Au_1, Au_2, \dots, Au_N\}, \varphi^\tau = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$$

biçimindedir.

(3.1) problemini  $\varepsilon(E)$  uzayında bir operatör problem olarak ele alabiliriz. Bunun için  $\varepsilon(E)$  uzayında etkiyen  $\bar{D}$ ,  $\bar{\Pi}$  ve  $\bar{A}$  operatörlerini, sırasıyla  $D$ ,  $\Pi$  ve  $A$  operatörlerine benzer olarak tanımlayabiliriz. Böylece  $\varepsilon(E)$  uzayında

$$\bar{D}\bar{\Pi}(u_0)u + \bar{A}u = \varphi \quad (3.9)$$

operatör problemini elde ederiz.

### 3.5 Fark Şemalarının Kararlılığı

(3.1) operatör problemi, her hangi  $\mu \in E$  ve  $\varphi \in \varepsilon(E)$  için teklikle çözülebilir. Bu teklikle çözülebilirlik, (3.1) probleminin her  $0 < \tau \leq \tau_0$  için  $E(\tau)$  uzayında teklikle çözülebilirliği demektir. (3.1) probleminin (3.5) formuna göre çözümü,  $\varepsilon(E) \times E$  'den  $\varepsilon(E)$  'ye lineer  $u(\varphi, \mu)$  operatörünü tanımlar.

**Tanım 3.4.**  $\varepsilon(E)$  uzayı,  $C(E)$ ,  $C^{\alpha, \alpha}(E)$  ve  $C^\alpha(E)$  uzaylarından biri olmak üzere, eğer  $u(\varphi, \mu)$  operatörü  $\varepsilon(E) \times E$  'den  $\varepsilon(E)$  'ye sürekli ise, o zaman (3.1) problemi,  $\varepsilon(E)$  Banach uzayında karardır denir. Bu uzaylarda lineer  $u(\varphi, \mu)$  operatörünün sürekliliği yerine,

sınırlılığını, yani  $u(\varphi, \mu)$  operatörünün bu uzaylarda kararlılık kestirimlerini gerçekleştirdiğini göstermek aynıdır.

Bu nedenle, (3.1) probleminin çözümlerinin  $C(E)$ ,  $C^{\alpha, \alpha}(E)$  ve  $C^\alpha(E)$  uzaylarında kararlı olduğunu göstermek için,  $F_\tau(E)$  uzayı  $C_\tau(E)$ ,  $C_\tau^{\alpha, \alpha}(E)$  veya  $C_\tau^\alpha(E)$  uzaylarından biri ve  $0 < \tau \leq \tau_0$  olmak üzere

$$\|u^\tau\|_{F_\tau(E)} \leq M \left[ \|\mu\|_E + \|\varphi^\tau\|_{F_\tau(E)} \right]$$

kararlılık kestiriminin gerçekleştirildiğini göstermek yeterlidir. Bu kestirimdeki  $M$  değeri,  $\mu$ ,  $\varphi$  ve  $\tau$  dan bağımsız olmalıdır.

**Teorem 3.2.**  $\tau$  yeterince küçük pozitif bir sayı olsun. O zaman (3.1) sınır değer problemi  $C_\tau(E)$  ve  $C_\tau^\alpha(E)$  uzaylarında kararlıdır.

**İspat:** (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994)'te,

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + Au_k = \varphi_k, \quad 1 \leq k \leq N, \quad N\tau = 1, \quad u_0 - \text{biliniyor}$$

(3.3) başlangıç değer fark probleminin  $C_\tau(E)$  ve  $C_\tau^\alpha(E)$  uzaylarında kararlı olduğu;

$$\|u^\tau\|_E \leq M[\|u_0\|_E + \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E)}], \quad \|u^\tau\|_E \leq M[\|u_0\|_E + \|\varphi^\tau\|_{C_\tau^\alpha(E)}]$$

verilmiştir. Ayrıca, (3.4) formülünden

$$\|u_0\|_E \leq M[\|\mu\|_E + \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E)}], \quad \|u_0\|_E \leq M[\|\mu\|_E + \|\varphi^\tau\|_{C_\tau^\alpha(E)}]$$

kestirimleri elde edilir. Bu kestirimlerden

$$\|u^\tau\|_E \leq M[\|\mu\|_E + \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E)}], \quad \|u^\tau\|_E \leq M[\|\mu\|_E + \|\varphi^\tau\|_{C_\tau^\alpha(E)}]$$

istenilen kararlılık kestirimleri bulunur.

### 3.6 Fark Probleminin İyi konumlanmışlığı

(3.1) problemini,  $C(E)$  Banach uzayında bir operatör problem olarak ele alalım. Eğer,  $u \in C(E)$  fonksiyonu, (3.1) problemini sağlıyor,  $\overline{D\Pi}(u_0)u$  ve  $\overline{A}u$  elemanları da herhangi  $F(E)$  uzayına aitse,  $u \in C(E)$  fonksiyonu, (3.1) probleminin bu  $F(E)$  uzayında da bir çözümdür denir. Eğer, (3.1) probleminin,  $F(E)$  uzayında bir çözümü varsa  $\varphi \in F(E)$  ve

$\mu \in D(A)$  olur.

**Tanım 3.5.** Aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa, (3.1) problemi,  $F(E)$  uzayında iyi konumlanmıştır denir;

1. Herhangi  $\mu \in D(A)$  ve  $\varphi \in F(E)$  için (3.1) probleminin  $F(E)$  uzayında tek çözümü vardır.
2. (3.1) problemi  $F(E)$  uzayında kararlıdır.

(3.1) probleminin  $F(E)$  uzayında iyi konumlanmış olması için gerek ve yeter koşul bu problemin  $F_\tau(E)$  uzayında,  $0 < \tau \leq \tau_0$  olan  $\tau$ 'lar için düzgün olarak iyi konumlanmış olmasıdır. Ayrıca, (3.1) probleminin  $F_\tau(E)$  uzayında iyi konumlanmış olmasının gerek ve yeter koşulu da,  $M$  değeri  $\mu$ ,  $\varphi^\tau$  ve  $\tau$ 'dan bağımsız olmak üzere

$$\|\{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N\|_{F_\tau(E)} + \|\{Au_k\}_1^N\|_{F_\tau(E)} \leq M[\|A\mu\|_E + \|\varphi^\tau\|_{F_\tau(E)}] \quad (3.10)$$

koersiv kararlılık kestirimidir (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994).

(3.1) probleminin çözümleri için

$$\|\{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N\|_{F_\tau(E)} \leq M[\|A\mu\|_E + \|\varphi^\tau\|_{F_\tau(E)}],$$

$$\|\{Au_k\}_1^N\|_{F_\tau(E)} \leq M[\|A\mu\|_E + \|\varphi^\tau\|_{F_\tau(E)}]$$

kestirimlerinin her birinden (3.10) kestirimi elde edilebilir. Bu nedenle, (3.1) probleminin koersiv kararlılığının gerek ve yeter koşulu bu kestirimlerden herhangi birinin gerçekleşmesidir.

Herhangi genel  $E$  uzayı ve kuvvetli pozitif  $A$  operatörü için, (2.15) lokal olmayan sınır değer problemi,  $C(E)$  sürekli fonksiyonlar uzayında iyi konumlanmış değildir (Ashyralyev, Hanalyev ve Sobolevskii, 2001). Dolayısıyla (3.1) problemi,  $C_\tau(E)$  ağ fonksiyonları uzayında iyi konumlanmış değildir. O halde (3.1) probleminin  $C_\tau(E)$  uzayındaki norma göre iyi konumlanmışlığı  $\tau > 0$  için düzgün değildir. Bu da

$$\|u^\tau\|_{C_\tau(E)} = \|\{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N\|_{C_\tau(E)} + \|\{Au_k\}_1^N\|_{C_\tau(E)}$$

koersiv normunun  $\tau \rightarrow +0$  için  $\infty$ 'a gitmesi demektir. Öte yandan, bir kestirimde normun sonsuza gitmesi demek kestirimin kestirim olma özelliğini kaybetmesi demektir. Ancak, yine

de, normun  $\infty$ 'a doğru hangi miktarda büyüdüğünü göstermesi açısından oldukça önemlidir.

**Teorem 3.3.**  $\tau$  yeterince küçük bir sayı olsun. (3.1) fark probleminin çözümleri için

$$\|u^\tau\|_{K_\tau(E)} \leq M \left[ \min \left\{ \ln \frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \|A\|_{E \rightarrow E}| \right\} \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E)} + \|A\mu\|_E \right]$$

*hemen hemen koersiv kararlılık kestirimi sağlanır.* Burada  $M$  değeri  $\mu$ ,  $\varphi^\tau$  ve  $\tau$ 'dan bağımsızdır.

**İspat:** (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994)'te (3.3) başlangıç değer fark probleminin çözümleri için  $\tau$  yeterince küçük pozitif bir sayı olmak üzere

$$\|u^\tau\|_{K_\tau(E)} \leq M \left[ \min \left\{ \ln \frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \|A\|_{E \rightarrow E}| \right\} \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E)} + \|Au_0\|_E \right]$$

*hemen hemen koersiv kararlılık kestirimini gerçekleştirdiği verilmiştir.* Bu kestirim ve -aşağıda ispatlayacağımız-

$$\|Au_0\|_E \leq M \left[ \|A\mu\|_E + \min \left\{ \ln \frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \|A\|_{E \rightarrow E}| \right\} \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E)} \right] \quad (3.11)$$

kestirimi kullanılarak teoremin ispatı tamamlanır.

Şimdi, (3.11) kestirimini ispatlayalım.  $T = (I - R^{\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \rfloor})^{-1}$  olmak üzere,

$$u_0 = T \left\{ \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \rfloor} R^{\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \rfloor - j + 1} \varphi_j \tau + \mu \right\} \quad (3.4)$$

formülünden

$$Au_0 = T \left\{ \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \rfloor} A R^{\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \rfloor - j + 1} \varphi_j \tau + A\mu \right\} \quad (3.12)$$

elde ederiz. O halde,

$$\|Au_0\|_E \leq \|T\|_{E \rightarrow E} \left\{ \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \rfloor} \|AR^{\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \rfloor - j + 1}\|_{E \rightarrow E} \|\varphi_j\|_E \tau + \|A\mu\|_E \right\}$$

elde ederiz.  $\tau$  yeterince küçük bir sayı olmak üzere

$$\|T\|_{E \rightarrow E} \leq M(\lambda) \quad (3.2)$$



kestirimini kullanarak

$$\|Au_0\|_E \leq M_1 \left[ \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \rfloor} \|AR^{\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \rfloor - j + 1}\|_{E \rightarrow E} \tau \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E)} + \|A\mu\|_E \right] \quad (3.13)$$

elde ederiz. Ayrıca,

$$\|(I + \tau A)^{-k}\|_{E \rightarrow E} \leq M(1 + \delta\tau)^{-k}, \quad \|A(I + \tau A)^{-k}\|_{E \rightarrow E} \leq \frac{M}{k\tau}, \quad k \geq 1$$

kestirimleri kullanılarak,

$$\|AR^s(\tau A)\|_{E \rightarrow E} \leq M \min\left\{\frac{1}{s\tau}, \|A\|_{E \rightarrow E}\right\}$$

kestirimi elde edilir.

$$J = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \rfloor} \|AR^{\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \rfloor - j + 1}\|_{E \rightarrow E} \tau \text{ ile gösterelim.}$$

$$J = \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \rfloor} \|AR^s\|_{E \rightarrow E} \tau = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \rfloor} \|AR^{\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \rfloor - j + 1}\|_{E \rightarrow E} \tau \text{ olur.}$$

$$\text{Eğer } \|A\|_{E \rightarrow E} > N \text{ ise, } J \leq M \sum_{s=1}^N \frac{\tau}{s\tau} \leq M \int_{s=1}^{\|A\|_{E \rightarrow E}} \frac{ds}{s} \leq M |\ln \|A\|_{E \rightarrow E}| \text{ olur.}$$

$$\text{Eğer } \|A\|_{E \rightarrow E} \leq 1 \text{ ise, } J \leq M \sum_{s=1}^N \|A\|_{E \rightarrow E} \tau \leq M \|A\|_{E \rightarrow E} \leq M \text{ kestirimi bulunur.}$$

Son olarak, eğer,  $1 \leq \|A\|_{E \rightarrow E} \leq N$  ise; bu durumda

$$\begin{aligned} J &\leq M \left\{ \sum_{s=1}^{\lfloor N \|A\|_{E \rightarrow E}^{-1} \rfloor} \|A\|_{E \rightarrow E} \tau + \sum_{s=\lfloor N \|A\|_{E \rightarrow E}^{-1} \rfloor}^N \frac{\tau}{s\tau} \right\} \\ &\leq M \left\{ 1 + \int_{\|A\|_{E \rightarrow E}^{-1}}^1 \frac{ds}{s} \right\} = M(1 + \ln \|A\|_{E \rightarrow E}) \end{aligned}$$

kestirimi elde edilir.

Tüm bunlardan, her üç durumda da geçerli olan  $J \leq M \{1 + |\ln \|A\|_{E \rightarrow E}|\}$  kestirimini elde

ederiz.

Ayrıca,  $J = \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{1}{\tau} \rfloor} \|AR^s\|_{E \rightarrow E} \tau \leq \sum_{s=1}^N \frac{M}{s\tau} \tau \leq M \int_1^N \frac{1}{s} ds = M \ln N = M \ln \frac{1}{\tau}$  elde edilir.

Bulduğumuz bu kestirimler kullanılarak

$$J = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{1}{\tau} \rfloor} \|AR^{\lfloor \frac{1}{\tau} \rfloor - j + 1}\|_{E \rightarrow E} \tau \leq M \min \left\{ \ln \frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \|A\|_{E \rightarrow E}| \right\} \quad (3.14)$$

elde edilir. (3.13) ve (3.14)'ten (3.11) eşitsizliğini elde ederiz. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

$E'_\alpha = E'_\alpha(A, E)$  sembolü ile  $v \in E$  için

$$\|v\|_{E'_\alpha} = \sup_{\lambda > 0} \lambda^\alpha \|A(\lambda + A)^{-1}v\|_E$$

normu sonlu olan elemanlarının oluşturduğu kesirli uzayı gösterelim.

**Teorem 3.4.**  $\tau$  yeterince küçük bir sayı olsun. (3.1) probleminin çözümleri için

$$\|Au^\tau\|_{C_\tau(E'_\alpha)} \leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E'_\alpha)} + M \|A\mu\|_{E'_\alpha}$$

koersiv kararlılık kestirimi gerçekleşir. Bu eşitsizlikteki  $M$  değeri,  $\mu$ ,  $\varphi_k$ ,  $1 \leq k \leq N$ ,  $\alpha$  ve  $\tau$  değerlerinden bağımsızdır.

**İspat:** (3.12) formülünden

$$Au_0 = T \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{1}{\tau} \rfloor} AR^{\lfloor \frac{1}{\tau} \rfloor - j + 1} \varphi_j \tau + TA\mu = Av_0 + TA\mu$$

elde ederiz. Burada  $Av_0 = T \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{1}{\tau} \rfloor} AR^{\lfloor \frac{1}{\tau} \rfloor - j + 1} \varphi_j \tau$  olur.

Şimdi, her bir terimin  $E'_\alpha = E'_\alpha(A, E)$  uzayındaki normu için kestirimler bulalım. (3.2) kestiriminden

$$\|TA\mu\|_{E'_\alpha} \leq \|T\|_{E \rightarrow E} \|A\mu\|_{E'_\alpha} \leq M \|A\mu\|_{E'_\alpha} \quad (3.15)$$

elde ederiz. Şimdi de  $E'_\alpha$  normuna göre  $Av_0$  terimi ile ilgili kestirim yazalım.

$A(\lambda + A)^{-1} R^{[\frac{\lambda}{\tau}] - j + 1}$  operatörü için Cauchy-Riesz integral formülünden,

$$\lambda^\alpha A(\lambda + A)^{-1} AR^{[\frac{\lambda}{\tau}] - j + 1} \varphi_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_1 \cup S_2} \frac{z\lambda^\alpha}{(1+z)^{[\frac{\lambda}{\tau}] - j + 1}} \frac{1}{\lambda\tau + z} A(z - \tau A)^{-1} \varphi_j dz$$

elde edilir. Bu formülde  $S_1 = \{\rho e^{i\psi}, 0 \leq \rho < \infty\}$  ve  $S_2 = \{\rho e^{i\psi}, 0 \leq \rho < \infty\}$ ,  $0 \leq \psi < \frac{\pi}{2}$ . O halde

$$\lambda^\alpha A(\lambda + A)^{-1} Av_0 = \frac{T}{2\pi i} \int_{S_1 \cup S_2} \sum_{j=1}^{[\frac{\lambda}{\tau}]} \frac{z\lambda^\alpha}{(1+z)^{[\frac{\lambda}{\tau}] - j + 1}} \frac{1}{\lambda\tau + z} A(z - \tau A)^{-1} \varphi_j dz$$

bulunur.

$z = \rho e^{\pm i\psi}$ , ve  $|\psi| < \frac{\pi}{2}$ , olduğu için,  $A$  operatörünün kuvvetli pozitif bir operatör olduğundan

$$\left| \left( \frac{z}{\tau} \right)^\alpha \right| \left\| A \left( \frac{z}{\tau} - A \right)^{-1} \varphi_j \right\|_E \leq M \left( \frac{\rho}{\tau} \right)^\alpha \left\| A \left( \frac{\rho}{\tau} + A \right)^{-1} \varphi_j \right\|_E,$$

$$\frac{1}{|\lambda\tau + z|} \leq \frac{M}{\lambda\tau + \rho}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

O halde,

$$\| \lambda^\alpha A(\lambda + A)^{-1} Av_0 \|_E \leq M \| T \|_{E \rightarrow E} \int_0^\infty \sum_{j=1}^{[\frac{\lambda}{\tau}]} \frac{\rho^{1-\alpha}}{(1 + 2\rho \cos \psi + \rho^2)^{\frac{[\frac{\lambda}{\tau}] - j + 1}{2}}} \frac{(\tau\lambda)^\alpha}{\lambda\tau + \rho} d\rho \| \varphi^\tau \|_{C_r(E'_\alpha)}$$

olur. Bu son kestirimde, (3.2) eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} \| Av_0 \|_{E'_\alpha} &= \| \lambda^\alpha A(\lambda + A)^{-1} Av_0 \|_E \\ &\leq M_1 \int_0^\infty \frac{\rho^{1-\alpha}}{(1 + 2\rho \cos \psi + \rho^2)} \left[ 1 - \frac{1}{(1 + 2\rho \cos \psi + \rho^2)^{\frac{1}{2}}} \right]^{-1} \frac{(\tau\lambda)^\alpha}{\lambda\tau + \rho} d\rho \| \varphi^\tau \|_{C_r(E'_\alpha)} \\ &\leq \frac{M_1}{\cos \psi} \int_0^\infty \frac{(\tau\lambda)^\alpha}{\rho^\alpha (\lambda\tau + \rho)} d\rho \| \varphi^\tau \|_{C_r(E'_\alpha)} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{M(\psi)}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E'_\alpha)} \quad (3.16)$$

elde ederiz. (3.15) ve (3.16) kestirimlerinden

$$\|Au_0\|_{E'_\alpha} \leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E'_\alpha)} + M \|A\mu\|_{E'_\alpha} \quad (3.17)$$

elde ederiz.

Ayrıca, (3.3) başlangıç değer fark problemi  $C(E'_\alpha)$  uzayında iyi konumlanmıştır,  $\tau$  yeterince küçük bir sayı olmak üzere

$$\|Au^\tau\|_{C(E'_\alpha)} \leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E'_\alpha)} + M \|Au_0\|_{E'_\alpha} \quad (3.18)$$

koersiv kararlılık kestirimi gerçekleşmektedir (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994). Bu (3.17) ve (3.18) kestirimleri ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\|Au^\tau\|_{C(E'_\alpha)} \leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E'_\alpha)} + M \|A\mu\|_{E'_\alpha}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 3.5.**  $\tau$  yeterince küçük bir sayı olsun. (3.1) sınır değer problemi,  $C_\tau^{\alpha,\alpha}(E)$  ağırlıklı Hölder uzayında koersiv kararlıdır.

**İspat:** (3.12) formülünü kullanarak

$$Au_0 = Av_0 + TA\mu$$

yazarız. Bu eşitlikte

$$Av_0 = T \left\{ \sum_{j=1}^{[\frac{\lambda}{\tau}]} AR^{[\frac{\lambda}{\tau}] - j + 1} (\varphi_j - \varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}]}) \tau \right\} + \varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}]}. \quad (3.19)$$

Şimdi de, her bir terimin normu için kestirimler elde etmeye çalışalım. (3.2) yardımıyla

$$\|TA\mu\|_E \leq \|T\|_{E \rightarrow E} \|A\mu\|_E \leq M \|A\mu\|_E \quad (3.20)$$

elde ederiz.

(3.19) formülü ve (3.2) kestirimi kullanılarak

$$\begin{aligned} \|Av_0\|_E &\leq \|T\|_{E \rightarrow E} \left\{ \sum_{j=1}^{[\frac{1}{\tau}]} \|AR^{[\frac{1}{\tau}] - j + 1}\|_{E \rightarrow E} \|\varphi_j - \varphi_{[\frac{1}{\tau}]}\|_E \tau \right\} + \|\varphi_{[\frac{1}{\tau}]}\|_E \\ &\leq M \left\{ \sum_{j=1}^{[\frac{1}{\tau}]} \frac{\tau}{(([\frac{1}{\tau}] - j + 1)\tau)^{1-\alpha} (j\tau)^\alpha} + 1 \right\} \|\varphi^\tau\|_{C_r^{\alpha,\alpha}(E)} \leq \frac{M_1}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau\|_{C_r^{\alpha,\alpha}(E)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Üçgen eşitsizliği, (3.20) ve bu son eşitsizlik kullanılarak

$$\|Au_0\|_E \leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau\|_{C_r^{\alpha,\alpha}(E)} + M \|A\mu\|_E \quad (3.21)$$

kestirimi bulunur.

Ayrıca, (3.3) başlangıç değer fark problemi,  $C_r^{\alpha,\alpha}(E)$  ağırlıklı Hölder uzayında iyi konumlanmıştır;

$$\|Au^\tau\|_{C_r^{\alpha,\alpha}(E)} \leq M \left[ \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau\|_{C_r^{\alpha,\alpha}(E)} + \|Au_0\|_E \right] \quad (3.22)$$

koersiv kararlılık kestirimi gerçekleştirilmektedir (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994).

Üçgen eşitsizliği ve (3.21), (3.22) kestirimleri kullanılarak

$$\|Au^\tau\|_{C_r^{\alpha,\alpha}(E)} \leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau\|_{C_r^{\alpha,\alpha}(E)} + M \|A\mu\|_E$$

koersiv kararlılık kestirimi elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi de,  $F_\tau(E)$  uzayı olarak

$$\|\varphi^\tau\|_{C^\alpha(\tau,E)} = \|\varphi^\tau\|_{C(\tau,E)} + \max_{1 \leq k \leq k+r \leq N} \|\varphi_{k+r} - \varphi_k\|_E (r\tau)^{-\alpha}$$

normuyla verilen  $C_r^\alpha(E) = C^\alpha(\tau, E)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , Hölder uzayını alalım. (2.15) problemi

$C^\alpha(E)$  uzayında iyi konumlanmış değildir. Bu nedenle (3.1) probleminin çözümleri için

$$\|\{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N\|_{F_\tau(E)} + \|\{Au_k\}_1^N\|_{F_\tau(E)} \leq M[\|A\mu\|_E + \|\varphi^\tau\|_{F_\tau(E)}]$$

koersiv kararlılık kestirimi gerçekleştirilmez. Fakat aşağıdaki teoremden  $A\mu + \varphi_{[\frac{1}{\tau}]} - \varphi_1 \in E'_\alpha$

koşuluyla, (3.1) probleminin  $C_r^\alpha(E)$  Hölder uzayında koersiv kararlı olduğu elde edilmiştir.

**Teorem 3.6.**  $\tau$  yeterince küçük bir sayı ve  $A\mu + \varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}]} - \varphi_0 \in E'_\alpha$  olsun. Bu durumda (3.1) problemi  $C_r^\alpha(E)$  Hölder uzayında iyi konumlanmıştır.  $C_r^\alpha(E)$  uzayında (3.1) lokal olmayan sınır değer probleminin çözümleri için

$$\|Au^\tau\|_{C_r^\alpha(E)} \leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau\|_{C_r^\alpha(E)} + M \|A\mu + \varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}]} - \varphi_1\|_{E'_\alpha}$$

koersiv kararlılık kestirimi sağlar. Bu eşitsizlikteki  $M$  değeri,  $\mu$ ,  $\varphi_k$ ,  $1 \leq k \leq N$ ,  $\alpha$  ve  $\tau$  değerlerinden bağımsızdır.

**İspat:** (3.12) formülünü kullanarak,

$$Au_0 - \varphi_1 = T \sum_{j=1}^{[\frac{\lambda}{\tau}]} AR^{[\frac{\lambda}{\tau}] - j + 1} (\varphi_j - \varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}]}) \tau + (TA\mu + \varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}]} - \varphi_1) \quad (3.23)$$

elde edilir.

Şimdi de, her bir terimin normu için kestirimler elde etmeye çalışalım. (3.2) yardımıyla

$$\|TA\mu + \varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}]} - \varphi_1\|_{E'_\alpha} \leq M \|A\mu + \varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}]} - \varphi_1\|_{E'_\alpha} + \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau\|_{C_r^\alpha(E)} \quad (3.24)$$

elde ederiz.

Ayrıca, (3.2) kestirimi kullanılarak

$$\begin{aligned} \left\| T \left\{ \sum_{j=1}^{[\frac{\lambda}{\tau}]} AR^{[\frac{\lambda}{\tau}] - j + 1} (\varphi_j - \varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}]}) \tau \right\} \right\|_{E'_\alpha} &\leq \|T\|_{E \rightarrow E} \left\| \sum_{j=1}^{[\frac{\lambda}{\tau}]} AR^{[\frac{\lambda}{\tau}] - j + 1} (\varphi_j - \varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}]}) \right\|_{E'_\alpha \rightarrow E'_\alpha} \tau \\ &\leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau\|_{C_r^\alpha(E)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Üçgen eşitsizliği, (3.24) ve bu son eşitsizlik kullanılarak

$$\|Au_0 - \varphi_1\|_{E'_\alpha} \leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau\|_{C_r^\alpha(E)} + M \|A\mu + \varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}]} - \varphi_1\|_{E'_\alpha} \quad (3.25)$$

kestirimi bulunur.

Ayrıca, (3.3) başlangıç değer fark probleminin çözümleri için

$$\| Au^\tau \|_{C_\tau^\alpha(E)} \leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \| \varphi^\tau \|_{C_\tau^\alpha(E)} + M \| Au_0 - \varphi_1 \|_{E'_\alpha} \quad (3.26)$$

koersiv kararlılık kestirimi gerçekleşmektedir (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994).

Üçgen eşitsizliği ve (3.25), (3.26) kestirimleri kullanılarak

$$\| Au^\tau \|_{C_\tau^\alpha(E)} \leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \| \varphi^\tau \|_{C_\tau^\alpha(E)} + M \| A\mu + \varphi_{[\frac{1}{\tau}]} - \varphi_0 \|_{E'_\alpha}$$

koersiv kararlılık kestirimi elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

(3.26) kestiriminde  $\tau \rightarrow 0$  için limite geçilirse, düzgün fonksiyonlar uzayında, (2.15) sınır değer probleminin *koşullu* iyi konumlanmışlığı elde edilir.

Şimdi de, çok noktada sınır koşulu ile verilen

$$\begin{cases} v'(t) + Av(t) = f(t), & (0 \leq t \leq 1), \\ v(0) = \sum_{i=1}^p c_i v(\lambda_i) + \mu, & 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p \end{cases}$$

genel sınır değer problemini ele alalım. Eğer,

$$I - \sum_{i=1}^p c_i e^{-\lambda_i A}$$

operatörünün  $E$  uzayında sınırlı tersi varsa, bu genel sınır değer problemine karşılık gelen

$$\begin{cases} \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + Au_k = \varphi_k, & \varphi_k = f(t_k), \quad 1 \leq k \leq N, \quad N\tau = 1, \\ u_0 = \sum_{i=1}^p c_i u_{[\frac{\lambda_i}{\tau}]} + \mu \end{cases}$$

birinci basamaktan doğruluklu Rothe fark şemalarının çözümleri için de bu bölümdeki yaklaşımlar kullanılarak aynı sonuçlar elde edilir.

### 3.7 Uygulamalar

#### Örnek 3.1.

$a(x)$ ,  $f(t, x)$  verilmiş yeterince düzgün fonksiyonlar,  $\delta = \text{sabit} > 0$  ve  $a(x) \geq 0$  olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta u = f(t, x), & 0 < t < 1, \quad 0 < x < 1, \\ u(0, x) = u(\lambda, x) + \varphi(x), & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < \lambda \leq 1, \\ u(t, 0) = u(t, 1), \quad u_x(t, 0) = u_x(t, 1), & 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (3.27)$$

parabolik denklemler için lokal olmayan sınır değer problemini ele alalım.

$\varphi^h(x) = \{\varphi^n\}_1^{M-1}$  ağ fonksiyonları uzayında

$$\|\varphi^h\|_{C_h} = \max_{1 \leq n \leq M-1} |\varphi^n|,$$

$$\|\varphi^h\|_{C_h^\beta} = \|\varphi^h\|_{C_h} + \max_{1 \leq n < n+r < M} \frac{|\varphi^{n+r} - \varphi^n|}{(r\tau)^\beta}$$

normlarının verildiği Banach uzaylarını, sırasıyla,  $C_h$ ,  $C_h^\beta$  ile gösterelim.

(3.27) lokal olmayan sınır değer problemine karşılık gelen fark problemini oluşturalım;

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}(u_k^n - u_{k-1}^n) - a^n \frac{1}{h^2}(u_k^{n+1} - 2u_k^n + u_k^{n-1}) + \delta u_k^n = \varphi_k^n, \\ \varphi_k^n = f(t_k, x_n), \quad a^n = a(x_n), \quad t_k = k\tau, \quad x_n = nh, \\ 1 \leq k \leq N, \quad 1 \leq n \leq M-1, \quad N\tau = 1, \quad Mh = 1, \\ u_0^n = u_{[\frac{\lambda}{h}]}^n + \varphi^n, \quad 0 \leq n \leq M, \quad 0 < \lambda \leq 1 \\ u_k^0 = u_k^M, \quad u_k^1 - u_k^0 = u_k^M - u_k^{M-1}, \quad 0 \leq k \leq N. \end{cases} \quad (3.28)$$

Ayrıca,

$$A_h^x u^h(x) = \{-a^n D_h^2 u^n + \delta u^n\}_1^{M-1}, \quad (3.29)$$

$$D_h^2 u^n = \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{h^2}, \quad 1 \leq n \leq M-1$$

operatörlerini tanımlayalım.

$\varphi^0 = \varphi^M$ ,  $\varphi^1 - \varphi^0 = \varphi^M - \varphi^{M-1}$  koşullarını sağlayan  $\varphi^h(x) = \{\varphi^n\}_0^M$  ağ fonksiyonları üzerinde etkiliyen  $A_h^x u^h(x)$  fark operatörü  $C_h$  ve  $C_h^\beta$  uzaylarında kuvvetli pozitif bir operatördür



(Ashyralyev ve Kendirli, 2000; Ashyralyev ve Kendirli, 2001a; Ashyralyev ve Kendirli, 2001b).

O halde (3.28) fark problemini, (3.1) soyut sınır değer problemine dönüştürebiliriz. Bu bölümde ispatladığımız teoremlerle, (3.28) probleminin çözümleri için aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

**Teorem 3.7.**  $\tau$  yeterince küçük bir sayı olsun. (3.28) fark probleminin çözümleri aşağıdaki kestirimleri sağlar;

$$a) \quad \| (u^h)^\tau \|_{C_\tau^\alpha(C_h^\beta)} \leq M_1 [\| (\varphi^h)^\tau \|_{C_\tau^\alpha(C_h^\beta)} + \| \varphi^h \|_{C_h^\beta}], \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad \beta \geq 0,$$

$$b) \quad \left\| \left\{ \frac{1}{\tau} (u_k^n - u_{k-1}^n) \right\}_1^{M-1} \right\|_{C_\tau(C_h)} + \left\| \left\{ D_h^2 u_k^n \right\}_1^{M-1} \right\|_{C_\tau(C_h)}$$

$$\leq M_1 \left[ \ln \frac{1}{\tau + h} \| (\varphi^h)^\tau \|_{C_\tau(C_h)} + \| \{ D_h^2 \varphi^n \}_1^{M-1} \|_{C_h} \right],$$

$$c) \quad \left\| \left\{ \frac{1}{\tau} (u_k^n - u_{k-1}^n) \right\}_1^{M-1} \right\|_{C_\tau(C_h^\beta)} + \left\| \left\{ D_h^2 u_k^n \right\}_1^{M-1} \right\|_{C_\tau(C_h^\beta)}$$

$$\leq \frac{M_1}{\beta(1-\beta)} \left[ \| (\varphi^h)^\tau \|_{C_\tau(C_h^\beta)} + \| \{ D_h^2 \varphi^n \}_1^{M-1} \|_{C_h^\beta} \right], \quad 0 < \beta < 1,$$

$$d) \quad \left\| \left\{ \frac{1}{\tau} (u_k^n - u_{k-1}^n) \right\}_1^{M-1} \right\|_{C_\tau^\alpha(C_h^\beta)} + \left\| \left\{ D_h^2 u_k^n \right\}_1^{M-1} \right\|_{C_\tau^\alpha(C_h^\beta)}$$

$$\leq \frac{M_1}{\alpha(1-\alpha)} \left[ \| (\varphi^h)^\tau \|_{C_\tau^\alpha(C_h^\beta)} + \| \{ D_h^2 \varphi^n \}_1^{M-1} \|_{C_h^\beta} \right], \quad 0 < \alpha < 1, \quad \beta \geq 0.$$

Burada  $M_1$  değeri  $(\varphi^h)^\tau$ ,  $\varphi^h$ ,  $\alpha$  ve  $\beta$  değerlerinden bağımsızdır.

### Örnek 3.2.

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < x_k < 1, 1 \leq k \leq n\}$$

$n$ -boyutlu Öklit uzayında açık birim küp ve bu küpün sınırları  $S$  olsun.  $\alpha_r(x)$ , ( $x \in \Omega$ ) ve  $f(t, x)$  ( $t \in (0, 1)$ ,  $x \in \Omega$ ) fonksiyonları bilinen düzgün fonksiyonlar,  $\delta > 0$  ve  $\alpha_r(x) > 0$  olmak üzere,  $[0, 1] \times \Omega$  uzayında,

$$\begin{cases} \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} - \sum_{r=1}^n \alpha_r(x) \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x_r^2} + \delta v(t, x) = f(t, x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \quad 0 < t < 1, \\ v(0, x) = v(\lambda, x) + \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad 0 < \lambda \leq 1, \\ v(t, x) = 0, \quad x \in S, \quad 0 \leq r \leq n \end{cases} \quad (3.30)$$

karma tipteki *çok boyutlu* parabolik denklemler için sınır değer problemini ele alalım.

$C_{01}^\beta(\bar{\Omega})$  ( $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,  $x \in \Omega$ ) sembolü ile sürekli fonksiyonlar uzayının

$$\|f\|_{C_{01}^\beta(\bar{\Omega})} = \|f\|_{C(\bar{\Omega})} + \sup_{x \in \bar{\Omega}_h} |f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n)| \times \prod_{k=1}^n h_k^{-\beta_k} x_k^{\beta_k} (1 - x_k - h_k)^{\beta_k}$$

normu sonlu olan elemanlarının oluşturduğu Banach uzayını gösterelim. Bu ifadede ki  $C(\bar{\Omega})$ ,

$$\|f\|_{C(\bar{\Omega})} = \max_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|$$

normunun tanımlandığı,  $\bar{\Omega}_h$  üzerinde tanımlanmış bütün sürekli fonksiyonların oluşturduğu uzaydır.

$S$  bölgesinde  $u = 0$  koşulunu sağlayan ve tanım kümesi  $C_{01}^{2+\beta}(\bar{\Omega})$  olan ve  $C_{01}^\beta(\bar{\Omega})$  uzayında etkiyen

$$A^x u = - \sum_{r=1}^n \alpha_r(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_r^2} + \delta u(x)$$

operatörü kuvvetli pozitif bir operatördür (Amann, 1995; Anosov ve Sobolevskii, 1972).

$$\bar{\Omega}_h = \{x = x_j = (h_1 j_1, \dots, h_n j_n), j = (j_1, \dots, j_n), 0 \leq j_r \leq N_r, h_r N_r = 1, r = 1, \dots, n\},$$

$\Omega_h = \bar{\Omega} \cap \Omega, S_h = \bar{\Omega} \cap S$  olarak tanımlayalım.

$\bar{\Omega}_h$  üzerinde tanımlanan ağ fonksiyonları  $\varphi^h(x) = \{\varphi(h_1 j_1, \dots, h_n j_n)\}$  uzayında

$$\|\varphi^h\|_{C(\bar{\Omega}_h)} = \max_{x \in \bar{\Omega}_h} \|\varphi^h(x)\|,$$

$$\|\varphi^h\|_{C_{01}^\beta(\overline{\Omega}_h)} = \|\varphi^h\|_{C(\overline{\Omega}_h)} + \sup_{\substack{x \in \overline{\Omega}_h, \\ 0 < x_{j_r} < x_{j_r} + \Delta y_{j_r}, \\ \Delta y_{j_r} = m_{j_r} h_r, \\ 1 \leq r \leq n, \\ m_{j_r} = 1, 2, \dots}} \left\{ \left| \varphi(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) - \varphi(x_{j_1} + \Delta y_{j_1}, \dots, x_{j_n} + \Delta y_{j_n}) \right| \right. \\ \left. \times \prod_{r=1}^n (\Delta y_{j_r})^{-\beta_r} x_{j_r}^{\beta_r} (1 - x_{j_r} - \Delta y_{j_r})^{\beta_r} \right\}$$

$$(0 < \beta_r < 1, 1 \leq r \leq n),$$

$$\|\varphi^h\|_{L_p(\overline{\Omega}_h)} = \left( \sum_{x \in \overline{\Omega}_h} |\varphi^h(x)|^p h_1 \cdots h_n \right)^{\frac{1}{p}} (1 \leq p < \infty)$$

normları ile verilen Banach uzaylarını, sırasıyla,  $C(\overline{\Omega}_h)$ ,  $C_{01}^\beta(\overline{\Omega}_h)$  ve  $L_p(\overline{\Omega}_h)$  ile gösterelim.

$A_h^x$  fark operatörünü,

$$A_h^x \varphi^h(x) = \left\{ - \sum_{r=1}^n a_r(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) D_{h_r}^2 \varphi(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) + \delta \varphi(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) \right\}_1^{M-1} \quad (3.31)$$

şeklinde tanımlayalım. Burada

$$D_{h_r}^2 \varphi(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) = \frac{1}{h_r^2} (\varphi(x_{j_1}, \dots, x_{j_{r-1}}, x_{j_r}, x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n}) \\ - 2\varphi(x_{j_1}, \dots, x_{j_{r-1}}, x_{j_r}, x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n}) + \varphi(x_{j_1}, \dots, x_{j_{r-1}}, x_{j_{r-1}}, x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n}))$$

$$x = (x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) \in \overline{\Omega}_h, 1 \leq r \leq n$$

olarak tanımlanmıştır ve  $\varphi^h(x) = 0$ ,  $(x \in S_h)$  şeklindeki fonksiyonlar uzayında etkiyen bir operatördür.

$A_h^x$  eliptik fark operatörü  $C_{01}^\beta(\overline{\Omega}_h)$ ,  $C(\overline{\Omega}_h)$ ,  $L_p(\overline{\Omega}_h)$  uzaylarında kuvvetli pozitif bir operatördür (Sobolevskii, 1971; Alibekov ve Sobolevskii, 1977; Alibekov, ve Sobolevskii, 1979).

O halde (3.30) problemine karşılık olarak,

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}[u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)] + A_h^x u_k^h(x) = \varphi_k^h(x), \varphi_k^h(x) = \{f(t_k, x)\}, x \in \overline{\Omega}_h, 1 \leq k \leq N, \\ u_0^h(x) = u_{[\frac{x}{\tau}]}^h(x) + \varphi^h(x), x \in \overline{\Omega}_h, 0 < \lambda \leq 1 \end{cases} \quad (3.32)$$

fark şemaları elde edilir.

Bu bölümde ispatladığımız teoremlerle, (3.32) probleminin çözümleri için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Teorem 3.8.**  $\tau$  yeterince küçük bir sayı olsun. (3.32) fark probleminin çözümleri için aşağıdaki kararlılık eşitsizlikleri gerçekleşir;

- a)  $\| \{u_k^h(x)\}_1^N \|_{C_\tau^\alpha(C_{01}^\beta(\overline{\Omega}_h))} \leq M_1 [\| \{\varphi_k^h(x)\}_1^N \|_{C_\tau^\alpha(C_{01}^\beta(\overline{\Omega}_h))} + \| \varphi^h(x) \|_{C_{01}^\beta(\overline{\Omega}_h)}],$   
 $0 \leq \alpha < 1, \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n), \beta_r \geq 0, 1 \leq r \leq n,$
- b)  $\| \{u_k^h(x)\}_1^N \|_{C_\tau^\alpha(L_p(\overline{\Omega}_h))} \leq M_1 [\| \{\varphi_k^h(x)\}_1^N \|_{C_\tau^\alpha(L_p(\overline{\Omega}_h))} + \| \varphi^h(x) \|_{L_p(\overline{\Omega}_h)}],$   
 $0 \leq \alpha < 1, 1 \leq p < \infty,$
- c)  $\| \left\{ \frac{1}{\tau}(u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)) \right\}_1^N \|_{C_\tau(C(\overline{\Omega}_h))} + \sum_{r=1}^n \| \{D_{h_r}^2 u_k^h(x)\}_1^N \|_{C_\tau(C(\overline{\Omega}_h))}$   
 $\leq M_1 \left[ \ln \frac{1}{\tau + |h|} \| \{\varphi_k^h(x)\}_1^N \|_{C_\tau(C(\overline{\Omega}_h))} + \sum_{r=1}^n \| \{D_{h_r}^2 \varphi^h(x)\} \|_{C(\overline{\Omega}_h)} \right], |h| = h_1 + \dots + h_n,$
- d)  $\| \left\{ \frac{1}{\tau}(u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)) \right\}_1^N \|_{C_\tau^\alpha(C_{01}^\beta(\overline{\Omega}_h))} + \sum_{r=1}^n \| \{D_{h_r}^2 u_k^h(x)\}_1^N \|_{C_\tau^\alpha(C_{01}^\beta(\overline{\Omega}_h))}$   
 $\leq M(\alpha, \beta) \left[ \| \{\varphi_k^h(x)\}_1^N \|_{C_\tau^\alpha(C_{01}^\beta(\overline{\Omega}_h))} + \sum_{r=1}^n \| \{D_{h_r}^2 \varphi^h(x)\} \|_{C_{01}^\beta(\overline{\Omega}_h)} \right],$   
 $0 < \alpha < 1, \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n), \beta_r > 0, 1 \leq r \leq n.$

Bu eşitsizliklerdeki  $M_1$  değeri  $\{\varphi_k^h(x)\}_1^N, \varphi^h(x), \alpha, p, \beta$  değerlerinden bağımsızdır ve  $M(\alpha, \beta)$  ifadesi de  $\{\varphi_k^h(x)\}_1^N, \varphi^h(x)$  değerlerinden bağımsızdır.

### Örnek 3.3.

$a_r(x), f(t, x)$  fonksiyonları bilinen, yeterince düzgün fonksiyonlar,  $\delta > 0$  olmak üzere,  $\{0 \leq t \leq 1, x \in \mathbb{R}^n\}$  bölgesinde,

$$\begin{cases} \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \sum_{|\tau|=2m} a_\tau(x) \frac{\partial^{|\tau|} v(t, x)}{\partial x_1^{\tau_1} \dots \partial x_n^{\tau_n}} + \delta v(t, x) = f(t, x), (0 \leq t \leq 1), \\ v(0, x) = v(\lambda, x) + \varphi(x), 0 < \lambda \leq 1, x \in \mathbb{R}^n, |\tau| = \tau_1 + \dots + \tau_n \end{cases} \quad (3.33)$$

2m-mertebeli çok boyutlu parabolik diferansiyel denklemler için lokal olmayan sınır değer problemini ele alalım.

$B(\xi) = \sum_{|\tau|=2m} a_\tau(x) (i\xi)^{\tau_1} \dots (i\xi)^{\tau_n}$  sembolü ile verilen

$$B^x = \sum_{|\tau|=2m} a_\tau(x) \frac{\partial^{|\tau|}}{\partial x_1^{\tau_1} \dots \partial x_n^{\tau_n}} \quad (3.34)$$

operatörü,  $\mathbb{R}^n$  uzayında tanımlanmış fonksiyonlar uzayında etkiyen ve  $\xi \neq 0$  için

$$0 < M_1 |\xi|^{2m} \leq (-1)^M B(\xi) \leq M_2 |\xi|^{2m} < \infty$$

eşitsizliğini sağlayan bir diferansiyel operatör olsun. Bu operatör yardımıyla

$$A^x = B^x + \delta I$$

diferansiyel operatörünü tanımlayalım.

$\mathbb{R}_h^n$  ( $0 \leq h \leq h_0$ ) ağ uzayını, koordinatları

$$x_k = m_k h, m_k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, 1 \leq k \leq n$$

şeklindeki,  $\mathbb{R}^n$  uzayındaki bütün noktaların oluşturduğu uzay olarak tanımlayalım.

$u^h(x)$  ağ fonksiyonları uzayında,

$$\|u^h\|_{C(\mathbb{R}_h^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}_h^n} |u^h(x)|,$$

$$\|u^h\|_{L_p(\mathbb{R}_h^n)} = \left( \sum_{x \in \mathbb{R}_h^n} |u^h(x)|^p h^n \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u^h\|_{C^\beta(\mathbb{R}_h^n)} = \|u^h\|_{C(\mathbb{R}_h^n)} + \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R}_h^n, \\ x \neq y}} \frac{|u^h(x) - u^h(y)|}{|x - y|^\beta}, 0 \leq \beta < 1$$

normlarıyla verilen uzayları, sırasıyla,  $C(\mathbb{R}_h^n)$ ,  $L_p(\mathbb{R}_h^n)$ ,  $C^\beta(\mathbb{R}_h^n)$  olarak tanımlayalım.

$A^x$  diferansiyel operatörünü,  $C(\mathbb{R}_h^n)$ ,  $L_p(\mathbb{R}_h^n)$ ,  $C^\beta(\mathbb{R}_h^n)$  Banach uzaylarında etkiyen ve  $0 \leq h \leq h_0$  için düzgün kuvvetli pozitif bir operatör olan  $A_h^x$  fark operatörü ile değiştirerek, (3.33) probleminde

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}[u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)] + A_h^x u_k^h(x) = \varphi_k^h(x), \varphi_k^h(x) = \{f(t_k, x)\}, x \in \mathbb{R}_h^n, 1 \leq k \leq N, \\ u_0^h(x) = u_{[\frac{x}{\tau}]}^h(x) + \varphi^h(x), x \in \mathbb{R}_h^n, 0 < \lambda \leq 1 \end{cases} \quad (3.34)$$

fark şemalarını elde ederiz. Bu  $A_h^x$  fark operatörü,  $C(\mathbb{R}_h^n)$ ,  $L_p(\mathbb{R}_h^n)$ ,  $C^\beta(\mathbb{R}_h^n)$  uzaylarında kuvvetli pozitif bir operatördür (Smirnitskii ve Sobolevskii, 1981; Smirnitskii ve Sobolevskii, 1982; Ashyralyev ve Sobolevskii, 1987).

Bu bölümde ispatladığımız teoremlerle, (3.34) lokal olmayan sınır değer probleminin çözümlerinin,

3.  $C_\tau^\alpha(C^\beta(\mathbb{R}_h^n))$  ( $0 \leq \beta \leq 1/2m$ ,  $0 \leq \alpha < 1$ ),  $C_\tau(L_p(\mathbb{R}_h^n))$  ( $1 \leq p < \infty$ ) normlarına göre kararlılık,
4.  $C_\tau(C(\mathbb{R}_h^n))$  normuna göre  $\ln(1/(\tau + h))$  çarpanlı, *hemen hemen koersiv* kararlılık,
5.  $C_\tau(C^\beta(\mathbb{R}_h^n))$  ve  $C_\tau^\alpha(C^\beta(\mathbb{R}_h^n))$ , ( $0 < \beta < 1/2m$ ),  $0 < \alpha < 1$ ) normlarına göre de koersiv kararlılık

kestirimleri elde edilir.

#### 4. İKİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMALARININ İYİ KONUMLANMIŞLIĞI

Bu bölümde, (2.15) lokal olmayan sınır değer probleminin yaklaşık çözümleri için ikinci basamaktan doğruluklu *aşık ar olmayan* fark şemalarının ve *iyileştirilmiş* Crank-Nicholson fark şemalarının kararlılığını inceleyeceğiz. Ve çeşitli Banach uzaylarında, bu fark şemalarının iyi konumlanmışlığını göstereceğiz.

Genel olarak (2.15) probleminin yaklaşık çözümleri için Crank-Nicholson fark şemalarının kararlılık ve koersiv kararlılık kestirimleri elde edilememiştir. Herhangi bir  $E$  Banach uzayında *homojen* parabolik Cauchy problemleri için Crank-Nicholson fark şemalarının kararlılığı pek çok araştırmacı tarafından ele alınmıştır. Sobolevskii, (1978) tarafından Crank-Nicholson fark şemalarının *hemen hemen koersiv kararlılığı* ispatlanmıştır. [Alibekov ve Sobolevskii, (1977)] ve [Alibekov ve Sobolevskii, (1979)] araştırmalarında, tek bir yer değişkenine sahip problemler için daha kesin kestirimler elde edilebilmiştir. [Ashyralyev, (1991)] araştırmasında, herhangi bir kuvvetli pozitif  $A$  operatörü ve herhangi  $E_{\alpha,p}(D(A) \subset E_{\alpha,p} \subset E)$  *kesirli Banach uzayı* için, Crank-Nicholson fark şemalarıyla çözümlerin koersiv kararlılığı gösterilmiştir. Bu çalışmalardan da çok boyutlu parabolik denklemlerin *Hölder uzaylarında*, Crank-Nicholson fark şemalarıyla çözümlerinin daha kesin kararlılık kestirimleri elde edilmiştir. Daha sonraları herhangi bir Banach uzayında, kuvvetli pozitif özel operatörler için daha kesin kestirimler elde edilmiştir (Crouzeix, Larsson, Piskarev ve Thomée, 1993).

##### 4.1 İkinci Basamaktan Doğruluklu Aşık Ar Olmayan Fark Şemaları

###### Tanım 4.1.

$$\begin{cases} \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + A(I + \frac{\tau A}{2})u_k = (I + \frac{\tau A}{2})\varphi_k, \\ \varphi_k = f(t_k - \frac{\tau}{2}), t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N, N\tau = 1, \\ u_0 = (I - (\lambda - [\frac{\lambda}{\tau}]\tau)A)u_{[\frac{\lambda}{\tau}]} + \mu + (\lambda - [\frac{\lambda}{\tau}]\tau)\varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}]}, \tau \leq \lambda, \\ u_0 = (I - \lambda A)u_0 + \mu + \lambda\varphi_1, \lambda < \tau \end{cases} \quad (4.1)$$

fark şemalarına, (2.15) lokal olmayan sınır değer probleminin yaklaşık çözümleri için *ikinci basamaktan doğruluklu aşık ar olmayan fark şemaları* denir.

(4.1) probleminden

$$u_k = D^k u_0 + \sum_{j=1}^{[\frac{k}{\tau}]} D^{[\frac{k}{\tau}] - j + 1} (I + \frac{\tau}{2} A) \varphi_j \tau, \quad D = (I + \tau A + \frac{(\tau A)^2}{2})^{-1}, \quad 1 \leq k \leq \left[ \frac{\lambda}{\tau} \right] \quad (4.2)$$

formülü elde edilir. Problemdaki sınır koşulları yardımıyla

$$u_0 = \frac{1}{\lambda} A^{-1} \mu + A^{-1} \varphi_1, \quad \lambda < \tau, \quad (4.3)$$

$$u_0 = T \left\{ (I - (\lambda - [\frac{\lambda}{\tau}] \tau) A) \sum_{j=1}^{[\frac{\lambda}{\tau}]} D^{[\frac{\lambda}{\tau}] - j + 1} (I + \frac{\tau}{2} A) \varphi_j \tau + (\lambda - [\frac{\lambda}{\tau}] \tau) \varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}]} + \mu \right\}, \quad \tau \leq \lambda,$$

$$T = (I - (I - (\lambda - [\frac{\lambda}{\tau}] \tau) A) D^{[\frac{\lambda}{\tau}]})^{-1}, \quad D = (I + \tau A + \frac{(\tau A)^2}{2})^{-1},$$

bulunur. (4.2), (4.3) formüllerinden,  $u_k$  'nın  $\varphi$  ve  $\mu$  'ye göre, teklikle çözülebilirliği ve lineerliği elde edilir.

**Lemma 4.1.** (Ashyralyev, 1987; Ashyralyev, 1988)

$$v'(t) + Av(t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad v(0) = v_0 \quad (4.4)$$

*başlangıç değer* probleminin yaklaşık çözümleri için

$$\begin{cases} \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + A(I + \frac{\tau A}{2})u_k = (I + \frac{\tau A}{2})\varphi_k, \\ \varphi_k = f(t_k - \frac{\tau}{2}), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad N\tau = 1, \quad u_0 = v_0 \end{cases} \quad (4.5)$$

ikinci basamaktan doğruluklu aşikar olmayan fark şemaları,

$$\|u^\tau\|_{C_\tau(E)} \leq M \left[ \|u_0\|_E + \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E)} \right] \quad (4.6)$$

ve

$$\|u^\tau\|_{C_\tau^\alpha(E)} \leq M \left[ \|u_0\|_E + \|\varphi^\tau\|_{C_\tau^\alpha(E)} \right] \quad (4.7)$$

kararlılık kestirimlerini gerçeklemektedir.

**Teorem 4.1.**  $\tau$  yeterince küçük bir sayı olsun. (4.1) fark şemaları  $C_\tau(E)$  ve  $C_\tau^\alpha(E)$  uzaylarında kararlıdır.



**İspat.**

[Ashyralyev, (1983)] ve [Ashyralyev, (1985)] makalelerinde,

$$\| (k\tau A)^\alpha D^k \|_{E \rightarrow E} \leq M, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, k \geq 1, \quad (4.8)$$

$$\| D^k - \exp\{-t_k A\} \|_{E \rightarrow E} \leq \frac{M\tau^2}{t_k^2}, \quad k \geq 1, \quad (4.9)$$

$$\| (I - \exp\{-\lambda A\})^{-1} \|_{E \rightarrow E} \leq M(\lambda) \quad (4.10)$$

kestirimleri ispatlanmıştır. Bu kestirimler ve

$$\begin{aligned} T - (I - \exp\{-\lambda A\})^{-1} &= (I - \exp\{-\lambda A\})^{-1} \\ &\quad \times (I - (I - (\lambda - [\frac{\lambda}{\tau}] \tau) A) D^{[\frac{\lambda}{\tau}]})^{-1} ((I - (\lambda - [\frac{\lambda}{\tau}] \tau) A) D^{[\frac{\lambda}{\tau}]} - \exp\{-\lambda A\}) \end{aligned}$$

formülünden,

$$\| T \|_{E \rightarrow E} \leq M(\lambda) \quad (4.11)$$

elde edilir.

(4.3) formülündeki terimlerin normları için (4.8)-(4.11) kestirimleri kullanılarak

$$\| u_0 \|_E \leq M \left[ \| \mu \|_E + \| \varphi^\tau \|_{C_\tau(E)} \right] \quad (4.12)$$

kestirimi bulunur.

(4.6) ve (4.12) kestirimlerinden

$$\| u^\tau \|_{C_\tau(E)} \leq M \left[ \| \mu \|_E + \| \varphi^\tau \|_{C_\tau(E)} \right]$$

kararlılık kestirimi elde edilir. Bu da (4.1) sınır değer fark probleminin  $C_\tau(E)$  uzayında kararlı olması demektir. Aynı yöntemle (4.1) sınır değer fark probleminin  $C_\tau^\alpha(E)$  Hölder uzayında da kararlı olduğu ispatlanır.

**Teorem 4.2.**  $\tau$  yeteri kadar küçük bir pozitif sayı olsun. Bu durumda, (4.1) fark şemaları,

$$\left\| \{ \tau^{-1}(u_k - u_{k-1}) \}_1^N \right\|_{C_\tau(E)} + \left\| \left\{ A \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) u_k \right\}_1^N \right\|_{C_\tau(E)}$$

$$\leq M[\min\{\ln \frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \|A\|\}\|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E)} + \|A\mu\|_E],$$

hemen hemen koersiv kararlılık kestirimini gerçeklemektedir. Bu kestirimde  $M$  değeri,  $\varphi^\tau$ ,  $\mu$  ve  $\tau$ 'dan bağımsızdır.

**İspat:** (4.1) fark şemaları için (4.3) formüllerinden

$$Au_0 = \frac{1}{\lambda}\mu + \varphi_1, \quad \lambda < \tau,$$

$$Au_0 = T\{(I - (\lambda - [\frac{\lambda}{\tau}]\tau)A)\sum_{j=1}^{[\frac{\lambda}{\tau}]} D^{[\frac{\lambda}{\tau}-j+1]} A(I + \frac{\tau}{2}A)\varphi_j\tau + (\lambda - [\frac{\lambda}{\tau}]\tau)A\varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}]} + A\mu\}, \quad \tau \leq \lambda$$

formülleri elde edilir. (4.8)-(4.11) kestirimleri yardımıyla

$$\|Au_0\|_E \leq M\left[\min\{\ln \frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \|A\|\}\|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E)} + \|A\mu\|_E\right]$$

kestirimi elde edilir. Ayrıca (4.4) fark şemaları için

$$\begin{aligned} & \|\{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N\|_{C_\tau(E)} + \|\{A(I + \frac{\tau A}{2})u_k\}_1^N\|_{C_\tau(E)} \\ & \leq M[\min\{\ln \frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \|A\|\}\|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E)} + \|Au_0\|_E] \end{aligned}$$

kestirimi gerçekleştirilmektedir (Ashyralyev, 1987). Bu son iki kestirimden, üçgen eşitsizliği ile

$$\begin{aligned} & \|\{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N\|_{C_\tau(E)} + \|\{A(I + \frac{\tau A}{2})u_k\}_1^N\|_{C_\tau(E)} \\ & \leq M[\min\{\ln \frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \|A\|\}\|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E)} + \|A\mu\|_E] \end{aligned}$$

hemen hemen koersiv kararlılık kestirimi elde edilir.

**Teorem 4.3.**  $\tau$  yeterince küçük bir sayı olmak üzere, (4.1) sınır değer problemi  $C_\tau(E_\alpha)$  ve  $C_\tau^\alpha(E)$  uzaylarında koersiv kararlıdır.

**İspat:**

[Ashyralyev ve Sobolevskii, (1982)] makalesinde ispatlanan

$$\|A^\alpha(D^{k+n} - D^k)\|_{E \rightarrow E} \leq \frac{M\tau^\beta}{t_k^{\alpha+\beta}}, \quad 1 \leq k < k+n \leq N, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

kestirimi ve (4.8)-(4.11) kestirimleri kullanılarak,

$$Au_0 = \frac{1}{\lambda} \mu + \varphi_1, \quad \lambda < \tau,$$

$$Au_0 = (I + (I - (\lambda - \tau)A))A^{-1}(\lambda + \frac{\tau^2 A}{2})^{-1} A\mu + \varphi_1, \quad \tau \leq \lambda < 2\tau,$$

$$Au_0 = T\{(I - (\lambda - [\frac{\lambda}{\tau}]\tau)A) \sum_{j=1}^{[\frac{\lambda}{\tau}]-1} D^{[\frac{\lambda}{\tau}-j+1]} \tau A(I + \frac{\tau A}{2})(\varphi_j - \varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}]}) + A\mu\} + \varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}]}, \quad 2\tau \leq \lambda$$

formüllerinden

$$\|Au_0\|_{E_\alpha} \leq M\left[\frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E_\alpha)} + \|A\mu\|_{E_\alpha}\right], \quad (4.13)$$

$$\|Au_0\|_E \leq M\left[\frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau\|_{C_\tau^\alpha(E)} + \|A\mu\|_E\right]$$

kestirimleri elde edilir.

Ayrıca, [Ashyralyev, (1987)] ve [Ashyralyev, (1988)] makalelerinde

$$\|\{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N\|_{C_\tau^\alpha(E)} + \|\{A(I + \frac{\tau A}{2})u_k\}_1^N\|_{C_\tau^\alpha(E)} \leq M\left[\frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau\|_{C_\tau^\alpha(E)} + \|Au_0\|_E\right], \quad (4.14)$$

$$\|\{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N\|_{C_\tau(E_\alpha)} + \|\{A(I + \frac{\tau A}{2})u_k\}_1^N\|_{C_\tau(E_\alpha)} \leq M\left[\frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E_\alpha)} + \|Au_0\|_{E_\alpha}\right]$$

kararlılık kestirimleri verilmiştir. (4.13), (4.14) kestirimlerinden, (4.1) fark şemalarının,  $C_\tau(E_\alpha)$  ve  $C_\tau^\alpha(E)$  uzaylarında koersiv kararlı olduğu bulunur.

Not düşelim ki, eğer,  $I - \sum_{i=1}^p c_i e^{-\lambda_i A}$  operatörünün  $E$  de sınırlı tersi varsa, bu bölümdeki

yaklaşımlar kullanılarak, çok noktada sınır koşulu ile verilen,

$$v'(t) + Av(t) = f(t), \quad (0 \leq t \leq 1), \quad v(0) = \sum_{i=1}^p c_i v(\lambda_i) + \mu, \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$$

genel lokal olmayan sınır değer probleminin, ikinci basamaktan doğruluklu aşikar olmayan fark şemaları ile yaklaşık çözümleri için de aynı sonuçlar elde edilir.

Dikkat edilirse, (4.1) denklemindeki ikinci basamaktan doğruluklu aşikar olmayan fark şemaları  $A$  ve  $A^2$  operatörleri ile üretilmiştir. Bir sonraki bölümde, sadece  $A$  operatörü ile üretilmiş olan ve ikinci basamaktan doğruluklu olan *iyileştirilmiş* Crank Nicholson fark şemalarını ele alacağız.

## 4.2 İyileştirilmiş Crank-Nicholson Fark Şemaları

### Tanım 4.2.

(2.15) sınır değer probleminin yaklaşık çözümleri için, bir  $A$  operatörü ile üretilmiş, ikinci basamaktan doğruluklu,

$$\begin{cases} \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + \frac{A}{2}(u_k + u_{k-1}) = \varphi_k, \varphi_k = f(t_k - \frac{\tau}{2}), t_k = k\tau, 2 \leq k \leq N, N\tau = 1, \\ \frac{u_1 - u_0}{\tau} + Au_1 = \varphi_1, \quad \varphi_1 = f(\frac{\tau}{2}), \\ u_0 = (I - (\lambda - [\frac{\lambda}{\tau}]\tau)A) \frac{1}{2}(u_{[\frac{\lambda}{\tau}]} + u_{[\frac{\lambda}{\tau}]+1}) + \mu + (\lambda - [\frac{\lambda}{\tau}]\tau)\varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}]+1}, \tau \leq \lambda, \quad \frac{\lambda}{\tau} \notin Z^+, \\ u_0 = u_{\frac{\lambda}{\tau}} + \mu, \quad \tau \leq \lambda, \quad \frac{\lambda}{\tau} \in Z^+, \\ u_0 = (I - \lambda A)u_0 + \mu + \lambda\varphi_1, \quad \lambda < \tau \end{cases} \quad (4.15)$$

fark şemalarına, iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemaları denir. Burada  $Z^+ = \{0, 1, \dots, n, \dots\}$ .

Bu (4.15) fark şemalarından  $u_k$ 'nin her  $\varphi$ ,  $\mu$  için teklikle çözülebilirliği ve lineerliği elde edilir. Ayrıca, (4.15) fark şemalarından,

$$u_0 = \frac{1}{\lambda} A^{-1} \mu + A^{-1} \varphi_1, \quad \lambda < \tau, \quad (4.16)$$

$$u_0 = \frac{I + \tau A}{\lambda} A^{-1} \mu + A^{-1} \varphi_1, \quad \tau \leq \lambda < 2\tau, \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} u_0 = T \left\{ \left( I - (\lambda - [\frac{\lambda}{\tau}]\tau)A \right) \left[ B^{[\frac{\lambda}{\tau}]-1} RC \varphi_1 \tau + \sum_{j=2}^{[\frac{\lambda}{\tau}]} B^{[\frac{\lambda}{\tau}]-j} C^2 \varphi_j \tau + \frac{\tau C}{2} \varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}]+1} \right] \right. \\ \left. + \mu + (\lambda - [\frac{\lambda}{\tau}]\tau)\varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}]+1} \right\}, \quad T = (I - (I - (\lambda - [\frac{\lambda}{\tau}]\tau)A)B^{[\frac{\lambda}{\tau}]-1} RC)^{-1}, 2\tau \leq \lambda, \frac{\lambda}{\tau} \notin Z^+, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$u_0 = T \left\{ B^{\frac{\lambda}{\tau}-1} R \varphi_1 \tau + \sum_{j=2}^{\lambda} B^{\frac{\lambda}{\tau}-j} C \varphi_j \tau + \mu \right\}, \quad T = (I - B^{\frac{\lambda}{\tau}-1} R)^{-1}, \quad 2\tau \leq \lambda, \frac{\lambda}{\tau} \in Z^+, \quad (4.19)$$

$$B = \left( I - \frac{\tau A}{2} \right) C, \quad C = \left( I + \frac{\tau A}{2} \right)^{-1}, \quad R = (I + \tau A)^{-1}$$

formülleri elde edilir.

**Teorem 4.4.**  $\tau$  yeterince küçük pozitif bir sayı olsun. (4.15) fark şemaları  $C_\tau(E)$  ve  $C_\tau^\alpha(E)$  uzaylarında kararlıdır.

**İspat:** [Ashyralyev, (1983)] ve [Ashyralyev, (1985)] makalelerinde verilen

$$\| (k\tau A)^\alpha B^k C \|_{E \rightarrow E} \leq M, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \quad k \geq 1, \quad (4.20)$$

$$\| B^{k-1} R - \exp\{-t_k A\} \|_{E \rightarrow E} \leq \frac{M\tau}{t_k}, \quad k \geq 1 \quad (4.21)$$

kestirimleri kullanılarak

$$T - \left( I - \exp\left\{-\left(\lambda + \frac{\tau}{2}\right)A\right\} \right)^{-1} = \left( I - \exp\left\{-\left(\lambda + \frac{\tau}{2}\right)A\right\} \right)^{-1} T \\ \times \left( \left( I - \left( \lambda - \left[ \frac{\lambda}{\tau} \right] \tau \right) A \right) B^{\left[ \frac{\lambda}{\tau} \right]-1} R C - \exp\left\{-\left(\lambda + \frac{\tau}{2}\right)A\right\} \right), \quad \frac{\lambda}{\tau} \notin Z^+,$$

$$T - \left( I - \exp\{-\lambda A\} \right)^{-1} = \left( I - \exp\{-\lambda A\} \right)^{-1} \times \left( I - B^{\frac{\lambda}{\tau}-1} R \right)^{-1} \left( B^{\frac{\lambda}{\tau}-1} R - \exp\{-\lambda A\} \right), \quad \frac{\lambda}{\tau} \in Z^+$$

formüllerinden,

$$\| T \|_{E \rightarrow E} \leq M(\lambda) \quad (4.22)$$

kestirimi bulunur.

(4.20), (4.21) ve (4.22) kestirimleri yardımıyla

$$\| u_0 \|_E \leq M \left[ \| \mu \|_E + \| \varphi^\tau \|_{C_\tau(E)} \right] \quad (4.23)$$

elde edilir. Aynı yöntemle

$$\| u_0 \|_E \leq M \left[ \| \mu \|_E + \| \varphi^\tau \|_{C_\tau^\alpha(E)} \right] \quad (4.24)$$

elde edilir.

Öte yandan, (4.4) başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümleri için

$$\begin{cases} \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + \frac{A}{2}(u_k + u_{k-1}) = \varphi_k, \quad \varphi_k = f(t_k - \frac{\tau}{2}), \\ t_k = k\tau, \quad 2 \leq k \leq N, \quad N\tau = 1, \\ \frac{u_1 - u_0}{\tau} + Au_1 = \varphi_1, \quad \varphi_1 = f(\frac{\tau}{2}), \quad u_0 = \text{verilmiş} \end{cases} \quad (4.25)$$

1-iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemaları  $C_\tau(E)$  ve  $C_\tau^\alpha(E)$  uzaylarında kararlıdır,

$$\|u^\tau\|_{C_\tau(E)} \leq M \left[ \|u_0\|_E + \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E)} \right] \quad (4.26)$$

$$\|u^\tau\|_{C_\tau^\alpha(E)} \leq M \left[ \|u_0\|_E + \|\varphi^\tau\|_{C_\tau^\alpha(E)} \right] \quad (4.27)$$

kestirimleri vardır (Ashyralyev, 1989a).

(4.23), (4.26) kestirimlerinden

$$\|u^\tau\|_{C_\tau(E)} \leq M \left[ \|\mu\|_E + \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E)} \right]$$

elde edilir. (4.24), (4.27) kestirimlerinden de

$$\|u^\tau\|_{C_\tau^\alpha(E)} \leq M \left[ \|\mu\|_E + \|\varphi^\tau\|_{C_\tau^\alpha(E)} \right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 4.5.**  $\tau$  yeterince küçük, pozitif bir sayı olsun. Bu durumda (4.15) fark probleminin çözümleri için

$$\begin{aligned} & \|\{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N\|_{C_\tau(E)} + \|Au_1\|_E + \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{A}{2}(u_k + u_{k-1}) \right\|_E \\ & \leq M \left[ \min \left\{ \ln \frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \|A\|_{E \rightarrow E}| \right\} \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E)} + \|A\mu\|_E \right] \end{aligned}$$

hemen hemen koersiv kararlılık kestirimi gerçekleşir. Bu eşitsizlikte  $M$  değeri,  $\varphi^\tau, \mu$  ve  $\tau$ 'dan bağımsızdır.

**İspat.**

(4.25) başlangıç değer fark probleminin çözümleri için

$$\| \{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N \|_{C_r(E)} + \| Au_1 \|_E + \max_{2 \leq k \leq N} \| \frac{A}{2}(u_k + u_{k-1}) \|_E \quad (4.28)$$

$$\leq M[\min \left\{ \ln \frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \| A \|_{E \rightarrow E}| \right\} \| \varphi^r \|_{C_r(E)} + \| ARu_0 \|_E]$$

hemen hemen koersiv kararlılık kestirimi sağlanır (Ashyralyev, Piskarev ve Weis, 2002).

Ayrıca, (4.16)-(4.19) formüllerinden

$$ARu_0 = \frac{1}{\lambda} R\mu + R\varphi_1, \lambda < \tau, \quad (4.29)$$

$$ARu_0 = \frac{1}{\lambda} \mu + R\varphi_1, \tau \leq \lambda < 2\tau, \quad (4.30)$$

$$ARu_0 = T \left\{ (I - (\lambda - [\frac{\lambda}{\tau}]\tau)A) [AB^{[\frac{\lambda}{\tau}-1]} R^2 C \varphi_1 \tau \right. \quad (4.31)$$

$$+ \sum_{j=2}^{[\frac{\lambda}{\tau}]} AB^{[\frac{\lambda}{\tau}-j]} RC^2 \varphi_j \tau + AR \frac{\tau C}{2} \varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}+1]} \left. \right\} + AR\mu$$

$$+ (\lambda - [\frac{\lambda}{\tau}]\tau) AR \varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}+1]}, \quad 2\tau \leq \lambda, \quad \frac{\lambda}{\tau} \notin Z^+,$$

$$ARu_0 = T \left\{ B^{\frac{\lambda}{\tau}-1} AR^2 \varphi_1 \tau + \sum_{j=2}^{\frac{\lambda}{\tau}} AB^{\frac{\lambda}{\tau}-j} RC \varphi_j \tau + AR\mu \right\}, \quad 2\tau \leq \lambda, \quad \frac{\lambda}{\tau} \in Z^+ \quad (4.32)$$

formülleri elde edilir. Bu formüllerden (4.8), (4.9), (4.10) kestirimleri kullanılarak

$$\| ARu_0 \|_E \leq M \left[ \| A\mu \|_E + \min \left\{ \ln \frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \| A \|_{E \rightarrow E}| \right\} \| \varphi^r \|_{C_r(E)} \right] \quad (4.33)$$

elde edilir. Bu son kestirim ve (4.28) birleştirilerek ispat tamamlanır.

[Ashyralyev, Piskarev ve Weis, (2002)] makalesinde, (4.25) başlangıç değer fark probleminin çözümleri için

$$\| \varphi^r \|_{L_{p,r}(E)} = \left( \sum_{1 \leq k \leq N} \| \varphi_k \|_E^p \tau \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (4.34)$$

normuyla verilen  $L_{p,r}(E)$  uzayında, hemen hemen koersiv kararlılık kestirimi ispatlanmıştır.

Bu makale ve buradaki yaklaşım birlikte kullanılarak,  $L_{p,\tau}(E)$  uzayında (4.1) ve (4.15) fark problemlerinin  $L_{p,\tau}(E)$  uzayında hemen hemen koersiv kararlılık kestirimleri elde edilir.

**Teorem 4.6.**  $\tau$  yeterince küçük bir sayı olmak üzere, (4.15) lokal olmayan sınır değer fark problemi,  $C_\tau(E'_\alpha)$  kesirli uzayında koersiv kararlıdır.

**İspat:** (4.25) başlangıç değer problemleri için 1-iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemaları,

$$\left\| \left\{ \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right\}_1^N \right\|_{C_\tau(E'_\alpha)} + \| Au_1 \|_{E'_\alpha} + \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{A}{2} (u_k + u_{k-1}) \right\|_{E'_\alpha} \leq M \left[ \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E'_\alpha)} + \|RAu_0\|_{E'_\alpha} \right] \quad (4.35)$$

koersiv kararlılık kestirimini gerçeklemektedir (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1984). (4.20), (4.21), (4.22), (4.23) formülleri ve (4.8)-(4.11) kestirimleri ile

$$\| RAu_0 \|_{E'_\alpha} \leq M \left[ \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E'_\alpha)} + \|A\mu\|_{E'_\alpha} \right] \quad (4.36)$$

kestirimi bulunur.

(4.35), (4.36) kestirimleri ve üçgen eşitsizliği kullanılarak, (4.15) fark probleminin,  $C_\tau(E'_\alpha)$  kesirli uzayındaki çözümleri için

$$\left\| \left\{ \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right\}_1^N \right\|_{C_\tau(E'_\alpha)} + \| Au_1 \|_{E'_\alpha} + \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{A}{2} (u_k + u_{k-1}) \right\|_{E'_\alpha} \leq M \left[ \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau\|_{C_\tau(E'_\alpha)} + \|A\mu\|_{E'_\alpha} \right]$$

koersiv kararlılık kestirimi elde edilir. Böylece ispat biter.

**Teorem 4.7.**  $\tau$  yeterince küçük bir sayı olsun. (4.15) fark probleminin  $C_r^{\alpha,\alpha}(E)$  ağırlıklı Hölder uzayındaki çözümleri için

$$\| \{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N \|_{C_r^{\alpha,\alpha}(E)} \leq M \left[ \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left\| \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) \varphi^\tau \right\|_{C_r^{\alpha,\alpha}(E)} + \|A\mu\|_E \right] \quad (4.37)$$

koersiv kararlılık kestirimi gerçekleştirilmektedir. Burada  $M$  değeri  $\varphi^\tau$ ,  $\mu$ ,  $\tau$  ve  $\alpha$  değerlerinden bağımsızdır.

**İspat:**

$$B = \left( I - \frac{\tau A}{2} \right) C, \quad C = \left( I + \frac{\tau A}{2} \right)^{-1}, \quad R = \left( I + \tau A \right)^{-1} \quad \text{olmak üzere,}$$



$$\| (B^{k+n} - B^k)C \|_{E \rightarrow E} \leq \frac{M\tau^\beta}{t_k^\beta}, \quad 1 \leq k < k+n \leq N, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad (4.38)$$

$$\| A(B^{k+n} - B^k)C^3 \|_{E \rightarrow E} \leq \frac{M\tau^\beta}{t_k^{1+\beta}}, \quad 1 \leq k < k+n \leq N, \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad (4.39)$$

kestirimleri gerçekenmektedir (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1981).

(4.31) ve (4.32) formüllerinden

$$ARu_0 = T\{(I - (\lambda - [\frac{\lambda}{\tau}]\tau)A)[AB^{[\frac{\lambda}{\tau}] - 1}CR^2(\varphi_1 - \varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}] + 1})\tau + A \sum_{j=2}^{[\frac{\lambda}{\tau}]} B^{[\frac{\lambda}{\tau}] - j} RC^2\tau \quad (4.40)$$

$$\times (\varphi_j - \varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}] + 1})] + AR\mu\} + R\varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}] + 1}, \quad 2\tau \leq \lambda, \quad \frac{\lambda}{\tau} \notin Z^+,$$

$$ARu_0 = T\{[AB^{\frac{\lambda}{\tau} - 1}R^2(\varphi_1 - \varphi_{\frac{\lambda}{\tau}})\tau + A \sum_{j=2}^{\frac{\lambda}{\tau}} B^{\frac{\lambda}{\tau} - j} RC\tau(\varphi_j - \varphi_{\frac{\lambda}{\tau}})] + AR\mu\} + R\varphi_{\frac{\lambda}{\tau}}, \quad (4.41)$$

$$2\tau \leq \lambda, \quad \frac{\lambda}{\tau} \in Z^+$$

elde edilir. (4.8), (4.9), (4.10), (4.38), (4.39) kestirimleri yardımıyla

$$\| ARu_0 \|_{E_\alpha} \leq M \left[ \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left\| \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) \varphi^\tau \right\|_{C_r^{\alpha,\alpha}(E)} + \| A\mu \|_E \right] \quad (4.42)$$

kestirimi bulunur. Başlangıç değer problemleri için (4.25) iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemalarının,  $C_r^{\alpha,\alpha}(E)$  ağırlıklı Hölder uzayında iyi konumlanmışlığı ile ilgili [Ashyralyev ve Sobolevskii, (1981)] makalesinde verilen soyut teorem ve (4.42) kestirimi birleştirilerek (4.15) probleminin çözümleri için (4.37) koersiv kararlılık kestirimi bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Not edelim ki (4.37) kestirimi, problem (4.1)'in  $C_r^{\alpha,\alpha}(E)$  uzayındaki çözümleri için yazılacak olan koersiv kararlılık kestiriminden daha *zayıftır*. Yine de bu tür kestirimler uygulamalarda çok önemlidirler. Örneğin,  $\left\| \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) \varphi^\tau \right\|_{C_r^{\alpha,\alpha}(E)} = \left\| \varphi^\tau \right\|_{C_r^{\alpha,\alpha}(E)} = o(\tau^2)$  şeklindeki  $\varphi^\tau = \{\varphi_k\}_1^N$  ağ fonksiyonları için zayıflık ortadan kalkar. Yani, yer değişkenlerine göre yeterince düzgün ağ fonksiyonları için çözümler normal koersiv kararlıdır.

**Lemma 4.2.** Eğer, *homojen* parabolik başlangıç-değer problemlerinin

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + \frac{A}{2}(u_k + u_{k-1}) = 0, \quad 1 \leq k \leq N, \quad N\tau = 1, \quad u_0 = \text{verilmiş} \quad (4.43)$$

Crank-Nicholson fark şeması,  $C_\tau(E)$  uzayında kararlı ise

$$\|B^k\|_{E \rightarrow E} \leq M, \quad 1 \leq k \leq N, \quad B = \left(I - \frac{\tau A}{2}\right) \left(I + \frac{\tau A}{2}\right)^{-1} \quad (4.44)$$

kestirimi geręeklenir ve  $M$  değeri  $\tau$ 'dan bağımsızdır.

**İspat:** Eğer, (4.43) fark şemaları  $C_\tau(E)$  uzayında kararlı ise  $\|(u_k)_1^N\|_{C_\tau(E)} \leq M \|u_0\|_E$  yazılır.

Ayrıca (4.43) fark şemalarından  $u_k = B^k u_0$  formülü elde edilir. Bu formül ve kestirimden

$$\|(B^k u_0)_1^N\|_{C_\tau(E)} \leq M \|u_0\|_E$$

elde edilir. Buradan da

$$\|B^k\|_{E \rightarrow E} \leq M, \quad (1 \leq k \leq N) \text{ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.}$$

$$\|\varphi\|_{\tilde{C}_\tau^{\alpha,\alpha}(E)} = \|\varphi\|_{C_\tau(E)} + \max_{1 \leq k < k+2r \leq N} \|\varphi_{k+2r} - \varphi_k\|_E \frac{(k\tau)^\alpha}{(2r\tau)^\alpha} \quad (4.45)$$

normunun tanımlandığı Banach uzayını  $\tilde{C}_\tau^{\alpha,\alpha}(E)$  ile gösterelim.

**Teorem 4.8.**  $\tau$  yeterince küçük bir sayı olsun. Eğer, homojen parabolik denklemler için başlangı değer probleminin Crank-Nicholson fark şeması,  $C_\tau(E)$  uzayında kararlı ise bu durumda, (4.15) fark probleminin çözümleri için

$$\|\{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N\|_{\tilde{C}_\tau^{\alpha,\alpha}(E)} \leq M \left[ \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau\|_{C_\tau^{\alpha,\alpha}(E)} + \|A\mu\|_E \right], \quad (4.46)$$

$$\|\{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N\|_{\tilde{C}_\tau^{\alpha,\alpha}(E)} \leq M \left[ \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi^\tau\|_{\tilde{C}_\tau^{\alpha,\alpha}(E)} + \|A\mu\|_E \right] \quad (4.47)$$

koersiv kararlılık kestirimleri geręeklenmektedir. Burada  $M$  değeri  $\varphi^\tau$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$  ve  $\tau$ 'dan bağımsızdır.

**İspat:**

$[\lambda/\tau]$ 'nin tek veya çift olması,  $\lambda/\tau$ 'nin tamsayı olup olmaması durumları irdelenerek, (4.15) fark şemalarından

$$ARu_0 = \frac{1}{\lambda} R\mu + R\varphi_1, \lambda < \tau,$$

$$ARu_0 = \frac{1}{\lambda} \mu + R\varphi_1, \tau \leq \lambda < 2\tau,$$

$$ARu_0 = T\{(I - (\lambda - 2m\tau)A)[AB^{2m-1}R^2C(\varphi_1 - \varphi_{2m+1})\tau + A\sum_{j=2}^m B^{2m-2j+1}RC^2\tau(\varphi_{2j-1} - \varphi_{2m+1})]\} \\ + \{(I - (\lambda - 2m\tau)A)(AB^{2m-1}R\tau C + C - B^{2m-1}) + (\lambda - 2m\tau)A\}R\varphi_{2m+1} + AR\mu\},$$

$$[\frac{\lambda}{\tau}] = 2m, m = 1, \dots, 2\tau \leq \lambda, \frac{\lambda}{\tau} \notin Z^+,$$

$$ARu_0 = T\{(I - (\lambda - (2m-1)\tau)A)[AB^{2m-2}R^2C(\varphi_1 - \varphi_{2m-1})\tau \\ + A\sum_{j=2}^{m-1} B^{2m-1-2j}C^2\tau R(\varphi_{2j} - \varphi_{2m}) + A\sum_{j=2}^m B^{2m-2j}RC^2\tau(\varphi_{2j-1} - \varphi_{2m-1}) \\ + (AB^{2m-2}RC\tau + (I - B^{2m-2}))R\varphi_{2m-1}\} + AR\mu \\ + \{(I - (\lambda - (2m-1)\tau)A)(C - B^{2m-1}) + (\lambda - (2m-1)\tau)A\}R\varphi_{2m}\}$$

$$2\tau \leq \lambda, [\frac{\lambda}{\tau}] = 2m-1, m = 1, \dots, \frac{\lambda}{\tau} \notin Z^+,$$

$$ARu_0 = T\{[AB^{2m-1}R^2(\varphi_1 - \varphi_{2m-1})\tau + A\sum_{j=2}^{m-1} B^{2m-2j}RC\tau(\varphi_{2j} - \varphi_{2m}) \\ + (I - B^{2m-2})R\varphi_{2m} + A\sum_{j=2}^m B^{2m-2j+1}C\tau R(\varphi_{2j-1} - \varphi_{2m-1}) \\ + (AB^{2m-1}R\tau + C^{-1}(B - B^{2m-1}))R\varphi_{2m-1}]\} + AR\mu\}, 2\tau \leq \lambda,$$

$$\frac{\lambda}{\tau} = 2m, m = 1, \dots, \frac{\lambda}{\tau} \in Z^+,$$

$$ARu_0 = T\{[AB^{2m-2}R^2(\varphi_1 - \varphi_{2m-1})\tau + A\sum_{j=2}^{m-2} B^{2m-1-2j}RC\tau(\varphi_{2j} - \varphi_{2m-2})$$

$$+C^{-1}(B - B^{2m-3})R\varphi_{2m-2} + A \sum_{j=2}^m B^{2m-2j} RC\tau(\varphi_{2j-1} - \varphi_{2m-1})$$

$$+(AB^{2m-2}R\tau + C^{-1}(I - B^{2m-2}))R\varphi_{2m-1}] + AR\mu\}, \quad 2\tau \leq \lambda,$$

$$\frac{\lambda}{\tau} = 2m - 1, m = 1, \dots, \frac{\lambda}{\tau} \in Z^+$$

formüllerini elde edilir.

Ayrıca, [Ashyralyev ve Sobolevskii, (1981)] makalesinden

$$\| (B^{k+2n} - B^k)C \|_{E \rightarrow E} \leq \frac{M\tau}{k\tau}, \quad 1 \leq k < k + 2n \leq N, \quad (4.48)$$

$$\| A(B^{k+2n} - B^k)C^2 \|_{E \rightarrow E} \leq \frac{M\tau^\beta}{(k\tau)^{1+\beta}}, \quad 1 \leq k < k + n \leq N, \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad (4.49)$$

kestirimlerinin gerçekleştiği bilinmektedir.

(4.8)-(4.11), (4.20)-(4.22), (4.44), (4.48), (4.49) kestirimleri ve  $ARu_0$  formüllerinden

$$\| ARu_0 \|_E \leq M \left[ \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \| \varphi^r \|_{\tilde{C}_\tau^{\alpha,\alpha}(E)} + \| A\mu \|_E \right], \quad (4.50)$$

$$\| ARu_0 \|_E \leq M \left[ \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \| \varphi^r \|_{C_\tau^{\alpha,\alpha}(E)} + \| A\mu \|_E \right] \quad (4.51)$$

kestirimleri elde edilir.

Bu son iki kestirim ve [Ashyralyev ve Sobolevskii, (1981)], [Ashyralyev ve Sobolevskii, (1982)] makalelerindeki (4.25) başlangıç değer fark probleminin yaklaşık çözümleri için Crank-Nicholson fark şemalarının  $C_r^{\alpha,\alpha}(E)$  ve  $\tilde{C}_r^{\alpha,\alpha}(E)$  uzaylarında iyi konumlanmışlığı ile ilgili soyut teoremlerden (4.15) probleminin çözümleri için (4.46) ve (4.47) kestirimleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

[Ashyralyev, (1989a)] makalesinde başlangıç değer problemleri için  $r$ -iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemalarının kararlılık kestirimleri ispatlanmıştır. (2.15) lokal olmayan sınır değer probleminin yaklaşık çözümleri için, bir  $A$  operatörünün ürettiği,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + \frac{A}{2}(u_k + u_{k-1}) = \varphi_k, \varphi_k = f(t_k - \frac{\tau}{2}), \\ t_k = k\tau, r+1 \leq k \leq N, N\tau = 1, \\ \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + Au_k = \varphi_k, \varphi_k = f(t_k - \frac{\tau}{2}), \\ t_k = k\tau, 1 \leq k \leq r, \\ u_0 = (I - (I - (\lambda - [\frac{\lambda}{\tau}]\tau)A) \frac{1}{2}(u_{[\frac{\lambda}{\tau}]} + u_{[\frac{\lambda}{\tau}]+1}) \\ + \mu + (\lambda - [\frac{\lambda}{\tau}]\tau)\varphi_{[\frac{\lambda}{\tau}]}, \tau \leq \lambda, \frac{\lambda}{\tau} \notin Z^+, \\ u_0 = u_{[\frac{\lambda}{\tau}]} + \mu, \tau \leq \lambda, \frac{\lambda}{\tau} \in Z^+, \\ u_0 = (I - \lambda A)u_0 + \mu + \lambda\varphi_1, \lambda < \tau \end{array} \right.$$

ikinci basamaktan doğruluklu  $r$ -iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemaları için de, bu bölümdeki yaklaşımlarla benzer sonuçlar elde edilir (Ashyralyev ve Karatay, 2003).

### 4.3 Uygulamalar

#### Örnek 4.1.

$a(x), f(t, x)$  fonksiyonları, yeterince düzgün fonksiyonlar ve  $\delta = \text{sabit} > 0, a(x) \geq 0$  olmak üzere,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta u = f(t, x), 0 < t < 1, 0 < x < 1, \\ u(0, x) = u(1, x) + \varphi(x), 0 \leq x \leq 1, \\ u(t, 0) = u(t, 1), \\ u_x(t, 0) = u_x(t, 1), 0 \leq t \leq 1 \end{array} \right. \quad (4.52)$$

lokal olmayan parabolik sınır değer problemini ele alalım.

(4.52) probleminin, ağ fonksiyonlarıyla oluşturulan  $C_h$  ve  $C_h^\beta$  uzaylarında, kuvvetli pozitif

$$A_h^\alpha u^h(x) = \{-a^n D_h^2 u^n + \delta u^n\}_1^{M-1}, D_h^2 u^n = \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{h^2}, 1 \leq n \leq M-1$$

operatörü ile (4.1) ve (4.15) fark şemaları elde edilir. Bu bölümde ispatladığımız teoremlerden, (4.52) probleminin ikinci basamaktan doğruluklu fark şemalarının,

- $C_\tau^\alpha(C_h^\beta)$  ( $0 \leq \beta \leq 1, 0 \leq \alpha < 1$ ) normuna göre kararlılık,

- $C_\tau(C_h)$  normuna göre  $\ln(1/(\tau + h))$  çarpanlı hemen hemen koersiv kararlılık,
- $C_\tau(C_h^\beta)$  ile  $C_\tau^\alpha(C_h^\beta)$  ( $0 < \beta < 1, 0 < \alpha < 1$ ) normlarına göre de koersiv kararlılık

kestirimleri elde edilir.

#### Örnek 4.2.

$\bar{\Omega} = \Omega \cup S$ ,  $\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) : x \in \mathbb{R}^n, 0 < x_k < 1, 1 \leq k \leq n\}$   $n$  boyutlu Öklit uzayında açık birim küp ve  $S$  bu küpün sınırları olsun.  $\alpha_r(x)$ ,  $f(t, x)$  yeterince düzgün fonksiyonlar ve  $\delta > 0$  olmak üzere,  $[0, 1] \times \Omega$  'da

$$\begin{cases} \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} - \sum_{r=1}^n \alpha_r(x) \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x_r^2} + \delta v(t, x) = f(t, x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \quad 0 < t < 1, \\ v(0, x) = v(\lambda, x) + \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad 0 < \lambda \leq 1, \\ v(t, x) = 0, \quad x \in S, \quad 0 \leq r \leq n \end{cases} \quad (4.53)$$

karma tipteki *çok boyutlu* parabolik denklemler için sınır değer problemini ele alalım.

3.2. örnekte yapıldığı gibi, (4.53) probleminin yaklaşık çözümleri için (3.31) formülünde verilen kuvvetli pozitif  $A_h^x$  operatörü ile ikinci basamaktan doğruluklu (4.1) ve (4.15) fark şemaları elde edilir. Bu bölümde ispatladığımız teoremlerden, (4.53) probleminin yaklaşık çözümleri için ikinci basamaktan doğruluklu (4.1) ve (4.15) fark şemalarının

- $C_\tau^\alpha(C_h^\beta)$  ( $0 \leq \beta \leq 1/2m, 0 \leq \alpha < 1$ ) normuna göre, kararlılık,
- $C_\tau(C_h)$  normuna göre,  $\ln(1/(\tau + h))$  çarpanlı koersiv kararlılık,
- $C_\tau(C_h^\beta)$  ve  $C_\tau^\alpha(C_h^\beta)$  ( $0 < \beta < 1/2m, 0 < \alpha < 1$ ) normlarına göre de koersiv kararlılık

kestirimleri elde edilir.

## 5. SAYISAL ANALİZ

### 5.1 Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şemaları

#### 5.1.1 Yöntem

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = e^{-t(1-t)} \sin(\pi x)[-1 + \pi^2 + 2t], \\ (0 < x < 1, \quad 0 < t < 1), \\ u(0,x) = u(1,x) + \rho(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ \rho(x) = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

parabolik denklemler için lokal olmayan sınır değer problemini ele alalım. Bu problemin tam çözümü

$$u(t,x) = \sin(\pi x)e^{-t(1-t)}$$

şeklindedir.

(5.1) probleminin yaklaşık çözümleri için

$$[0,1]_\tau \times [0,1]_h = \{(t_k, x_n) : t_k = k\tau, \quad 0 \leq k \leq N, \quad N\tau = 1, \quad x_n = nh, \quad 0 \leq n \leq M, \quad Mh = 1\}$$

eş parçalı ağ uzayını (uniform grid space) ele alalım.

Soyut parabolik diferansiyel denklemler için  $t$  ye göre birinci basamaktan doğruluklu aşikar olmayan fark şemaları yöntemini kullanarak, (5.1) probleminin yaklaşık çözümleri için  $t$  ye göre birinci basamaktan doğruluklu ve  $x$  e göre ikinci basamaktan doğruluklu

$$\begin{cases} \frac{U_n^k - U_n^{k-1}}{\tau} - \frac{U_{n+1}^k - 2U_n^k + U_{n-1}^k}{h^2} = f(t_k, x_n), \quad 1 \leq k \leq N, \quad 1 \leq n \leq M-1, \\ f(t,x) = e^{-t(1-t)} \sin(\pi x)[-1 + \pi^2 + 2t], \\ U_0^k = U_M^k = 0, \quad 0 \leq k \leq N, \\ U_n^0 - U_n^N = \rho(x_n), \quad 1 \leq n \leq M-1, \\ \rho(x_n) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

fark şemaları elde edilir.

Böylece,  $(N+1) \times (M+1)$  boyutlu, doğrusal denklem sistemi elde edilmiş olur. Bu doğrusal denklem sistemini düzenleyerek matris formunda yazalım. Şöyle ki;

$$\begin{cases} \left(-\frac{1}{h^2}\right)U_{n+1}^k + \left(-\frac{1}{\tau}\right)U_n^{k-1} + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2}\right)U_n^k + \left(-\frac{1}{h^2}\right)U_{n-1}^k = f(t_k, x_n), \\ 1 \leq k \leq N-1, \quad 1 \leq n \leq M-1, \\ U_0^k = U_M^k = 0, \quad 0 \leq k \leq N, \\ U_n^0 - U_n^N = \rho(x_n), \quad 1 \leq n \leq M-1. \end{cases}$$

Buradan da,

$$\begin{cases} AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n, \quad 1 \leq n \leq M-1, \\ U_0 = \vec{0}, \quad U_M = \vec{0}. \end{cases} \quad (5.3)$$

matris denklemini elde ederiz.

Son denklemde

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^0 \\ \varphi_n^1 \\ \varphi_n^2 \\ \dots \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1} \quad \text{ve} \quad \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

$$\varphi_n^0 = \rho(x_n), \quad 1 \leq n \leq M-1,$$

$$\varphi_n^k = f(t_k, x_n), \quad 1 \leq k \leq N, \quad 1 \leq n \leq M-1 \text{ şeklindedir.}$$

Ayrıca,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$



$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 \\ b & c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b & c \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$a = \left( -\frac{1}{h^2} \right),$$

$$b = \left( -\frac{1}{\tau} \right),$$

$$c = \left( \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} \right).$$

ve  $C = A$  şeklindedir.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$U_s = \begin{bmatrix} U_s^0 \\ U_s^1 \\ U_s^2 \\ U_s^3 \\ \dots \\ U_s^{N-1} \\ U_s^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times (1)}, \quad s = n-1, n, n+1.$$

Bu son matris denkleminin çözümü için, iyileştirilmiş Gauss eliminasyon yöntemini kullanalım.

Matris denkleminin

$$U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = M-1, \dots, 2, 1, 0,$$

formunda bir çözümünü araştıralım. Bu son denklemden  $j=1, \dots, M-1$ ,  $\alpha_j$ 'ler,  $(N+1) \times (N+1)$  boyutlu kare matrisler ve  $\beta_j$ 'ler,  $(N+1) \times 1$  boyutlu sütun matrislerdir.

$U_0 = 0 = \alpha_1 U_1 + \beta_1$  olduğundan dolayı,

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

elde edilir.

$U_s = \alpha_{s+1}U_{s+1} + \beta_{s+1}$ , ( $s = n, n-1$ ) eşitlikleri ve  $AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n$ , matris denklemini yardımıyla,

$$[A + B\alpha_{n+1} + C\alpha_n\alpha_{n+1}]U_{n+1} + [B\beta_{n+1} + C\alpha_n\beta_{n+1} + C\beta_n] = D\varphi_n$$

elde ederiz.

Bu son denklemden

$$\begin{cases} A + B\alpha_{n+1} + C\alpha_n\alpha_{n+1} = 0, \\ B\beta_{n+1} + C\alpha_n\beta_{n+1} + C\beta_n = D\varphi_n, \\ 1 \leq n \leq M-1 \end{cases}$$

olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= -(B + C\alpha_n)^{-1}A, \\ \beta_{n+1} &= (B + C\alpha_n)^{-1}(D\varphi_n - C\beta_n), n = 1, 2, 3, \dots, M-1. \end{aligned}$$

formülleri bulunmuş olur.  $\alpha_n$  ve  $\beta_n$  değerleri hesaplandıktan sonra

$$\begin{aligned} U_M &= \vec{0} = [0]_{(N+1) \times 1}, \\ U_n &= \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = M-1, \dots, 2, 1, \end{aligned}$$

$U_n$  sütun matrisleri, yani çözümler elde edilmiş olur.

### 5.1.2 Algoritma

- Zaman artış miktarı  $\tau = \frac{1}{N}$  ve mesafe artış miktarı  $h = \frac{1}{M}$  verilir.
- Birinci basamaktan doğruluklu fark şemaları yöntemiyle fark denklemleri oluşturularak matris formunda düzenlenir;

$$AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n, \quad 1 \leq n \leq M-1.$$

- $A, B, C$  ve  $D$  matrisleri oluşturulur.
- Kare matris  $\alpha_1$ , sütun matris  $\beta_1$  tanımlanır.
- $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{M-1}$  ve  $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{M-1}$  değerleri

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= -(B + C\alpha_n)^{-1}A, \\ \beta_{n+1} &= (B + C\alpha_n)^{-1}(D\varphi_n - C\beta_n), n = 1, 2, 3, \dots, M-1. \end{aligned}$$

formülleri ile hesaplanır.

- $U_M = \vec{0}$  alınır.
- $U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = M-1, \dots, 2, 1$

formülüyle  $U_n$  'ler hesaplanmış olur.

Şimdide,  $N$  ve  $M$  değerleri verildiğinde elde edilen ağ üzerinde, (5.1) probleminin sayısal çözümlerini, yukarıdaki algoritma ile bulan bir matlab programı verelim.

### 5.1.3 Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şemaları için Matlab Programı

```

function [table,es,p]=EulerRotherMethod(N,M)

% Computes numerical solution of the equation by using the Euler Rother Method.

% Ut-Uxx=ftx(t,x);

% U(0,x)= aaa u(1,x) + rox(x) : boundary condition

% A U(n+1)+B U(n)+C U(n-1)= fii(:,n);

% f(t,x,a), rox(x), exact(t,x) are given sub functions.

% INPUT: N, M step numbers:

if nargin<1;    N= 10 ; M= 10 ; end; close; close;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%1

tau=1/N; h=1/M;  aaa=1;

%u(0)=aaa.u(1)+alx(x);

v = -1/(h^2);

for i=2:N+1;  A(i,i)=v;  end ;

alfa =(1/tau)+2/(h^2);

for i=2:N+1;  B(i,i)=alfa;  end;

beta = - 1/ tau ;

for i=1:N;  B(i+1,i)= beta ;  end;

B(1,1)=1; B(1,N+1)=-aaa ;  C=A;

for i=1:N+1;  D(i,i)=1;  end ;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%2

alpha{1} = zeros(N+1,N+1) ;

betha{1} = zeros(N+1,1) ;

'fii(:,j) :j-th column matrix' ;

```



```

table=[es;p];table(1:2:end,:)=es; table(2:2:end,:)=p;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%8
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
GRAPH OF THE SOLUTION %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

q=min(min(table));

w=max(max(table));

figure; surf(es);

title('EXACT SOLUTION');

view(-60,16);

set(gca,'ZLim',[q w]);

rotate3d; figure;

surf(p);

title('EULER YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ'); rotate3d ;view(-60,16);

set(gca,'ZLim',[q w]);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%9
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
SUB FUNCTIONS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function rx=rox(x)

E=exp(1);

rx=0;

function estx=exact(t,x)

E=exp(1);

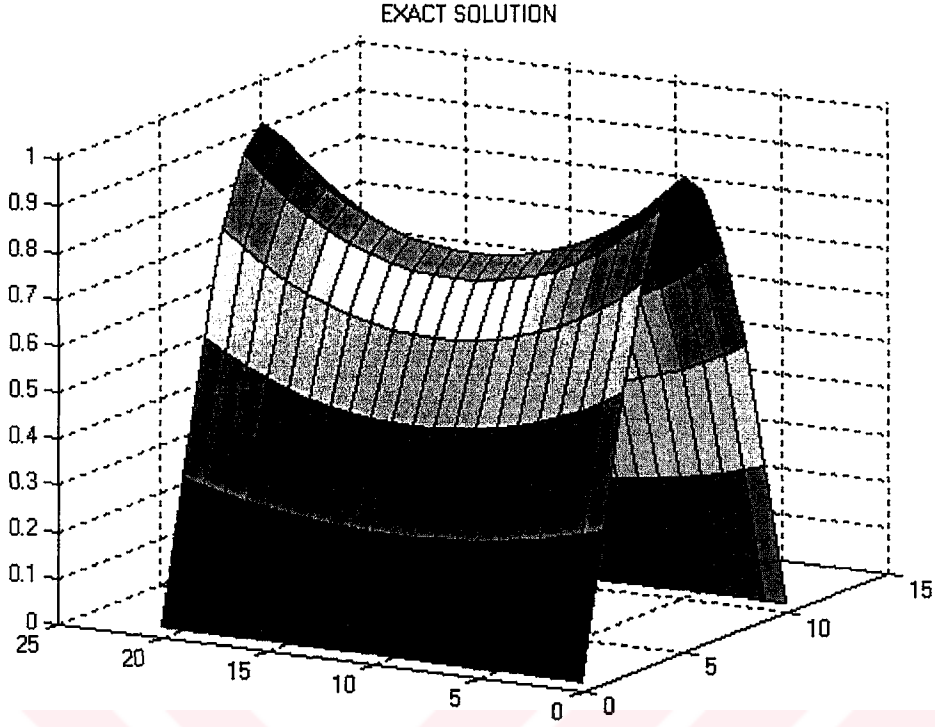
estx=E^((-1 + t)*t)*sin(pi*x);

function ftx=f(t,x)

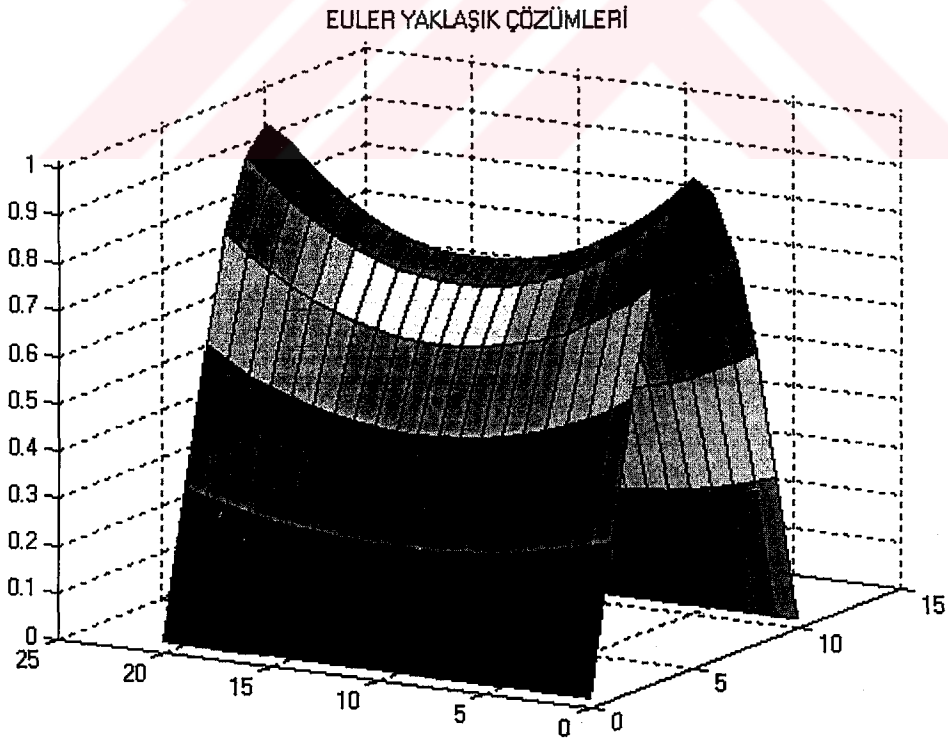
E=exp(1);

ftx=E^((-1 + t)*t)*(-1 + pi^2 + 2*t)*sin(pi*x);

```



Şekil 5.1 Gerçek çözümler.



Şekil 5.2 Birinci basamaktan doğruluklu fark şemaları.

### 5.1.4 Gerçek Çözümler ve Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şemaları ile Yaklaşık Çözümler

Çizelge 5.1  $N=20$ ,  $M=10$  verilerek oluşturulan ağ noktaları için gerçek çözümler ve birinci basamaktan doğruluklu yaklaşık çözümler

$u(t,x)$		$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$	$x=0.6$	$x=0.7$	$x=0.8$	$x=0.9$	$x=1$
$t=0$	G	0.000	0.309	0.588	0.809	0.951	1.000	0.951	0.809	0.588	0.309	0.000
	Y	0.000	0.313	0.596	0.820	0.964	1.014	0.964	0.820	0.596	0.313	0.000
$t=0.1$	G	0.000	0.282	0.537	0.739	0.869	0.914	0.869	0.739	0.537	0.282	0.000
	Y	0.000	0.287	0.546	0.751	0.883	0.928	0.883	0.751	0.546	0.287	0.000
$t=0.2$	G	0.000	0.263	0.501	0.689	0.810	0.852	0.810	0.689	0.501	0.263	0.000
	Y	0.000	0.267	0.509	0.700	0.823	0.866	0.823	0.700	0.509	0.267	0.000
$t=0.3$	G	0.000	0.251	0.476	0.656	0.771	0.811	0.771	0.656	0.476	0.251	0.000
	Y	0.000	0.254	0.484	0.666	0.783	0.823	0.783	0.666	0.484	0.254	0.000
$t=0.4$	G	0.000	0.243	0.462	0.636	0.748	0.787	0.748	0.636	0.462	0.243	0.000
	Y	0.000	0.247	0.469	0.646	0.759	0.798	0.759	0.646	0.469	0.247	0.000
$t=0.5$	G	0.000	0.241	0.458	0.630	0.741	0.779	0.741	0.630	0.458	0.241	0.000
	Y	0.000	0.244	0.464	0.639	0.751	0.790	0.751	0.639	0.464	0.244	0.000
$t=0.6$	G	0.000	0.243	0.462	0.636	0.748	0.787	0.748	0.636	0.462	0.243	0.000
	Y	0.000	0.246	0.469	0.645	0.758	0.797	0.758	0.645	0.469	0.246	0.000
$t=0.7$	G	0.000	0.251	0.476	0.656	0.771	0.811	0.771	0.656	0.476	0.251	0.000
	Y	0.000	0.254	0.483	0.665	0.781	0.821	0.781	0.665	0.483	0.254	0.000
$t=0.8$	G	0.000	0.263	0.501	0.689	0.810	0.852	0.810	0.689	0.501	0.263	0.000
	Y	0.000	0.267	0.508	0.699	0.821	0.864	0.821	0.699	0.508	0.267	0.000
$t=0.9$	G	0.000	0.282	0.537	0.739	0.869	0.914	0.869	0.739	0.537	0.282	0.000
	Y	0.000	0.286	0.545	0.749	0.881	0.926	0.881	0.749	0.545	0.286	0.000
$t=1$	G	0.000	0.309	0.588	0.809	0.951	1.000	0.951	0.809	0.588	0.309	0.000
	Y	0.000	0.313	0.596	0.820	0.964	1.014	0.964	0.820	0.596	0.313	0.000

## 5.2 Crank-Nicholson Fark Şemaları

### 5.2.1 Yöntem

(5.1) lokal olmayan sınır değer problemini şimdi de Crank-Nicholson fark şemaları yöntemiyle çözelim.

Soyut parabolik denklemler için Crank-Nicholson fark şemalarını kullanarak, (5.1) lokal olmayan sınır değer probleminin  $t$  ve  $x$ 'e göre ikinci basamaktan doğruluklu,



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{U_n^k - U_n^{k-1}}{\tau} - \frac{1}{2} \left[ \frac{U_{n+1}^k - 2U_n^k + U_{n-1}^k}{h^2} + \frac{U_{n+1}^{k-1} - 2U_n^{k-1} + U_{n-1}^{k-1}}{h^2} \right] = f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), \\ 1 \leq k \leq N, \quad 1 \leq n \leq M-1, \\ U_0^k = U_M^k = 0, \quad 0 \leq k \leq N, \\ U_n^0 - U_n^N = \rho(x_n), \quad 0 \leq n \leq M, \\ f(t, x) = e^{-t(1-t)} \sin(\pi x) [-1 + \pi^2 + 2t], \\ \rho(x) = 0. \end{array} \right.$$

fark şemalarını elde ederiz.

Buradan da,  $(N+1) \times (M+1)$  lineer denklem sistemi elde ederiz. Bu sistemi matris formunda yazalım. Yukarıdaki denklem sistemini yeniden düzenlersek

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( -\frac{1}{2h^2} \right) U_{n+1}^{k-1} + \left( \frac{-1}{2h^2} \right) U_{n+1}^k + \left( -\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2} \right) U_n^{k-1} + \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2} \right) U_n^k \\ + \left( -\frac{1}{2h^2} \right) U_{n-1}^{k-1} + \left( \frac{-1}{2h^2} \right) U_{n-1}^k = f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), \\ 1 \leq k \leq N-1, \quad 1 \leq n \leq M-1, \\ U_0^k = U_M^k = 0, \quad 0 \leq k \leq N, \\ U_n^0 - U_n^N = \rho(x_n), \quad 0 \leq n \leq M \end{array} \right.$$

elde ederiz. Bu denklem sisteminden

$$\left\{ \begin{array}{l} AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n, \quad 1 \leq n \leq M-1, \\ U_0 = 0, \quad U_M = 0 \end{array} \right. \quad (5.4)$$

matris denklemi elde edilir. Bu denklemde

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^0 \\ \varphi_n^1 \\ \varphi_n^2 \\ \vdots \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1},$$

$$\varphi_n^0 = \rho(x_n), \quad 1 \leq n \leq M-1.$$

$$\varphi_n^k = f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), \quad 1 \leq k \leq N, \quad 1 \leq n \leq M-1.$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 \\ z & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & y & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & y & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & z & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & z & y \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$x = \left( -\frac{1}{2h^2} \right),$$

$$y = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2},$$

$$z = -\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2},$$

ve  $C = A$ .

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$U_s = \begin{bmatrix} U_s^0 \\ U_s^1 \\ U_s^2 \\ U_s^3 \\ \dots \\ U_s^{N-1} \\ U_s^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times (1)}, \quad s = n-1, n, n+1.$$

Bu son matris denkleminin çözümü için, iyileştirilmiş Gauss eliminasyon yöntemini kullanalım. Matris denkleminin

$$U_n = \alpha_{n+1} U_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = M-1, \dots, 2, 1, 0,$$

formunda bir çözümünü arayalım. Bu son denklemden  $\alpha_j$ 'ler,  $(N+1) \times (N+1)$  boyutlu kare matrisler ve  $\beta_j$ 'ler,  $(N+1) \times 1$  boyutlu sütun matrislerdir,  $j = 1, \dots, M-1$ .

$U_0 = 0 = \alpha_1 U_1 + \beta_1$  olduğundan dolayı,

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}.$$

Ayrıca  $U_s = \alpha_{s+1} U_{s+1} + \beta_{s+1}$ , ( $s = n, n-1$ ) eşitlikleri ve  $AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n$ , matris denklemini yardımıyla,

$$[A + B\alpha_{n+1} + C\alpha_n \alpha_{n+1}]U_{n+1} + [B\beta_{n+1} + C\alpha_n \beta_{n+1} + C\beta_n] = D\varphi_n$$

elde ederiz.

Bu son denklemden

$$\begin{cases} A + B\alpha_{n+1} + C\alpha_n \alpha_{n+1} = 0, \\ B\beta_{n+1} + C\alpha_n \beta_{n+1} + C\beta_n = D\varphi_n, \\ 1 \leq n \leq M-1. \end{cases}$$

olarak alınırsa

$$\alpha_{n+1} = -(B + C\alpha_n)^{-1}A,$$

$$\beta_{n+1} = (B + C\alpha_n)^{-1}(D\varphi_n - C\beta_n), n = 1, 2, 3, \dots, M-1.$$

formülleri bulunmuş olur.  $\alpha_n$  ve  $\beta_n$  değerleri hesaplandıktan sonra

$$U_M = \vec{0} = [0]_{(N+1) \times 1},$$

$$U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = M-1, \dots, 2, 1,$$

formülleriyle de  $U_n$  sütun matrisleri, yani çözümler elde edilmiş olur.

### 5.2.2 Algoritma

- Zaman artış miktarı  $\tau = \frac{1}{N}$  ve mesafe artış miktarı  $h = \frac{1}{M}$  verilir
- Crank-Nicholson fark şemaları ile fark denklemleri oluşturularak matris formunda düzenlenir;

$$AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n, \quad 1 \leq n \leq M-1.$$

- $A, B, C$  ve  $D$  matrisleri girilir.
- Kare matris  $\alpha_1$ , sütun matris  $\beta_1$  tanımlanır.
- $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{M-1}$  ve  $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{M-1}$  değerleri

$$\alpha_{n+1} = -(B + C\alpha_n)^{-1}A,$$

$$\beta_{n+1} = (B + C\alpha_n)^{-1}(D\varphi_n - C\beta_n), n = 1, 2, 3, \dots, M-1.$$

formülleri ile hesaplanır.

- $U_M = \vec{0}$  alınır.
- $U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = M-1, \dots, 2, 1$

formülüyle  $U_n$  'ler hesaplanmış olur.

### 5.2.3 Crank-Nicholson Fark Şemaları için Matlab Programı

```
function [table,es,p]=cranknicholsonmethod(N,M)
```

```
% Computes numerical solution of the equation
```

```
% Ut-Uxx=fx(t,x);
```

```
% U(0,x)= aaa u(1,x) + rox(x) : boundary condition
```

```

% A U(n+1)+B U(n)+C U(n-1)= fii(:,n);

% f(t,x,a), rox(x), exact(t,x) are given sub functions.

% INPUT: N, M step numbers:

if nargin<1; N= 10 ; M= 10 ; end; close;close;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%1

tau=1/N; h=1/M;   aaa=1; %u(0)=aaa.u(1)+alx(x)

x = -1/(2*(h^2)); for i=2:N+1; A(i,i)=x; end;

for i=1:N;   A(i+1,i)= x ; end;

y = (1/ tau) + 1/(h^2);   z = -(1/tau) + 1/(h^2);

for i=2:N+1; B(i,i)= y ; end;

for i=1:N;   B(i+1,i)= z ; end;

B(1,1)=1;   B(1,N+1)=-aaa ;   C=A;

for i=1:N+1; D(i,i)=1 ; end;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% 2

alpha{1} = zeros(N+1,N+1);   betha{1} = zeros(N+1,1);

for j=1:M;   x=j*h; for k=1:N+1; t=(k-1)*tau ; fii( k, j; j ) = f(t,x); 'right side function ';
end;   fii(1,j;j)=rox(x); 'given sub function '; end;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%3

'alpha(:,j) : j. alpha and betha(:,j) :j-th betha';

for j=1:M-1; Q=inv(B+C*alpha{j});

alpha{j+1} = - Q*A ;   betha{j+1} = Q*(D*( fii(:,j))-C* betha{j})); end;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%4

'COMPUTE U(n)'; U( N+1,M:M ) = 0;   % U(M)=0 ;

for z = M-1:-1:1 ; U(:,z) = alpha{z+1}* U(:,z+1) + betha{z+1}; end;

```

```

for z = 1:M ; p(:,z+1)=U(:,z); 'U(0)=0'; end;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%5

'OBTAIN THE GRID VALUES OF EXACT SOLUTION OF THIS PDE' ;

for j=1:M+1; for k=1:N+1;

t=(k-1)*tau;

x=(j-1)*h;

es(k,j) = exact(t,x);

end; end;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%6

'ERROR ANALYSIS' ;

maxes=max(max(es)) ;

maxapp=max(max(p)) ;

maxerror=max(max(abs(es-p)));

relativeerror=max(max((abs(es-p)))/max(max(abs(p)) ));

cevap = [maxes,maxapp,maxerror,relativeerror]

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%7

table=[es;p];

table(1:2:end,:)=es;

table(2:2:end,:)=p;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%8

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

'GRAPH OF THE SOLUTION %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%'

q=min(min(table)); w=max(max(table));

figure;surf(es); title('GERÇEK DEĞERLER'); view(-60,16);

set(gca,'ZLim',[q w]);

```

```

rotate3d; figure; surf(p);

title('CN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ');

rotate3d ;view(-60,16); set(gca,'ZLim',[q w]);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%SUB FUNCTIONS%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function rx=rox(x)

E=exp(1); rx=0;

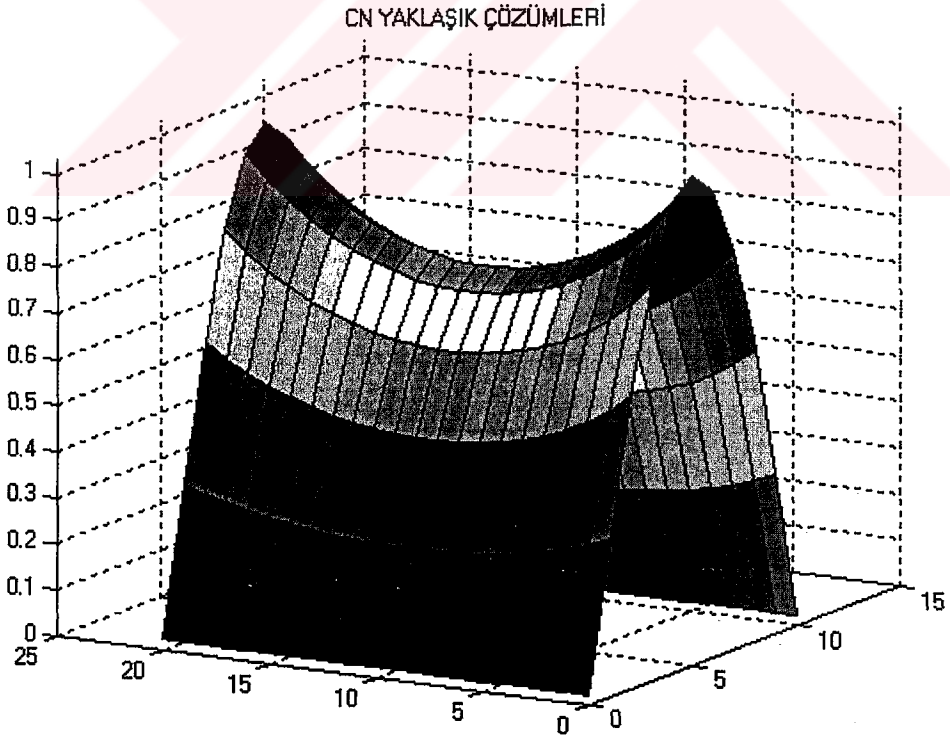
function estx=exact(t,x)

E=exp(1); estx=E^((-1 + t)*t)*sin(pi*x);

function fitx=f(t,x)

E=exp(1); fitx=E^((-1 + t)*t)*(-1 + pi^2 + 2*t)*sin(pi*x);

```



Şekil 5.3 Crank-Nicholson fark şemaları.

### 5.2.4 Gerçek Çözümler ve CNFŞ ile Yaklaşık Çözümler

Çizelge 5.2 N=20, M=10 verilerek oluşturulan ağ noktaları için gerçek çözümler ve Crank-Nicholson yaklaşık çözümleri

u(t,x)	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7	x=0.8	x=0.9	x=1	
t=0	G	0.000	0.309	0.588	0.809	0.951	1.000	0.951	0.809	0.588	0.309	0.000
	Y	0.000	0.319	0.607	0.836	0.982	1.033	0.982	0.836	0.607	0.319	0.000
t=0.1	G	0.000	0.282	0.537	0.739	0.869	0.914	0.869	0.739	0.537	0.282	0.000
	Y	0.000	0.285	0.542	0.746	0.877	0.922	0.877	0.746	0.542	0.285	0.000
t=0.2	G	0.000	0.263	0.501	0.689	0.810	0.852	0.810	0.689	0.501	0.263	0.000
	Y	0.000	0.264	0.502	0.690	0.812	0.853	0.812	0.690	0.502	0.264	0.000
t=0.3	G	0.000	0.251	0.476	0.656	0.771	0.811	0.771	0.656	0.476	0.251	0.000
	Y	0.000	0.251	0.477	0.657	0.772	0.812	0.772	0.657	0.477	0.251	0.000
t=0.4	G	0.000	0.243	0.462	0.636	0.748	0.787	0.748	0.636	0.462	0.243	0.000
	Y	0.000	0.244	0.465	0.639	0.752	0.790	0.752	0.639	0.465	0.244	0.000
t=0.5	G	0.000	0.241	0.458	0.630	0.741	0.779	0.741	0.630	0.458	0.241	0.000
	Y	0.000	0.243	0.462	0.636	0.747	0.786	0.747	0.636	0.462	0.243	0.000
t=0.6	G	0.000	0.243	0.462	0.636	0.748	0.787	0.748	0.636	0.462	0.243	0.000
	Y	0.000	0.246	0.469	0.645	0.758	0.797	0.758	0.645	0.469	0.246	0.000
t=0.7	G	0.000	0.251	0.476	0.656	0.771	0.811	0.771	0.656	0.476	0.251	0.000
	Y	0.000	0.255	0.485	0.668	0.785	0.825	0.785	0.668	0.485	0.255	0.000
t=0.8	G	0.000	0.263	0.501	0.689	0.810	0.852	0.810	0.689	0.501	0.263	0.000
	Y	0.000	0.269	0.512	0.705	0.829	0.872	0.829	0.705	0.512	0.269	0.000
t=0.9	G	0.000	0.282	0.537	0.739	0.869	0.914	0.869	0.739	0.537	0.282	0.000
	Y	0.000	0.290	0.552	0.760	0.894	0.940	0.894	0.760	0.552	0.290	0.000
T=1	G	0.000	0.309	0.588	0.809	0.951	1.000	0.951	0.809	0.588	0.309	0.000
	Y	0.000	0.319	0.607	0.836	0.982	1.033	0.982	0.836	0.607	0.319	0.000

### 5.3 İyileştirilmiş Crank-Nicholson Fark Şemaları

#### 5.3.1 Yöntem

(5.1) lokal olmayan sınır değer problemini, şimdi de *iyileştirilmiş* Crank-Nicholson fark şemaları yöntemini kullanarak çözmeye çalışalım.

(5.1) lokal olmayan parabolik sınır değer problemine karşılık gelen 1-iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemaları yöntemini kullanarak,



$$\begin{cases}
U_n^0 - U_n^N = \rho(x_n), & 1 \leq n \leq M-1, & \rho(x) = 0 \\
\left[ \frac{U_n^k - U_n^{k-1}}{\tau} - \frac{U_{n+1}^k - 2U_n^k + U_{n-1}^k}{h^2} \right] = f(t_1, x_n), & k=1, & 1 \leq n \leq M-1, \\
\frac{U_n^k - U_n^{k-1}}{\tau} - \frac{1}{2} \left[ \frac{U_{n+1}^k - 2U_n^k + U_{n-1}^k}{h^2} + \frac{U_{n+1}^{k-1} - 2U_n^{k-1} + U_{n-1}^{k-1}}{h^2} \right] = f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), \\
2 \leq k \leq N, & 1 \leq n \leq M-1, \\
U_0^k = U_M^k = 0, & 0 \leq k \leq N, \\
f(t, x) = e^{-t(1-t)} \sin(\pi x) [-1 + \pi^2 + 2t],
\end{cases}$$

elde edilir.

$(N+1) \times (M+1)$  boyutlu, lineer denklem sistemi elde edilir. Sistem yeniden düzenlenirse

$$\begin{cases}
U_n^0 - U_n^N = \rho(x_n), \\
\left( -\frac{1}{h^2} \right) U_{n+1}^1 + \left( -\frac{1}{\tau} \right) U_n^0 + \left( \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} \right) U_n^1 + \left( -\frac{1}{h^2} \right) U_{n-1}^1 = f(t_1, x_n), \\
1 \leq n \leq M-1. \\
\left( -\frac{1}{2h^2} \right) U_{n+1}^{k-1} + \left( \frac{-1}{2h^2} \right) U_{n+1}^k + \left( -\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2} \right) U_n^{k-1} + \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2} \right) U_n^k \\
+ \left( -\frac{1}{2h^2} \right) U_{n-1}^{k-1} + \left( \frac{-1}{2h^2} \right) U_{n-1}^k = f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), \\
2 \leq k \leq N, & 1 \leq n \leq M-1, \\
U_0^k = U_M^k = 0, & 0 \leq k \leq N,
\end{cases}$$

bulunur.

Böylece,

$$\begin{cases}
AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n, & 0 \leq n \leq M, \\
U_0 = 0, U_M = 0.
\end{cases} \quad (5.5)$$

matris denklemi elde edilir. Bu denklemde,

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^0 \\ \varphi_n^1 \\ \varphi_n^2 \\ \dots \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1},$$

$$\varphi_n^0 = \rho(x_n), 1 \leq n \leq M-1.$$

$$\varphi_n^1 = f(t_1, x_n), 1 \leq n \leq M-1,$$

$$\varphi_n^k = f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n), 2 \leq k \leq N, 1 \leq n \leq M-1.$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{h^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{\tau} & \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & y & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & y & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & z & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & z & y \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)},$$

$$x = \left( -\frac{1}{2h^2} \right),$$

$$y = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2},$$

$$z = -\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2},$$

ve  $C = A$  dir. Ayrıca,

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)},$$

$$U_s = \begin{bmatrix} U_s^0 \\ U_s^1 \\ U_s^2 \\ U_s^3 \\ \dots \\ U_s^{N-1} \\ U_s^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times (1)}, \quad s = n-1, n, n+1.$$

Bu son matris denkleminin çözümü için, iyileştirilmiş Gauss eliminasyon yöntemini kullanalım. Matris denkleminin

$$U_n = \alpha_{n+1} U_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = M-1, \dots, 2, 1, 0$$

formunda bir çözümünü araştıralım. Bu son denklemden  $\alpha_j$ 'ler,  $(N+1) \times (N+1)$  boyutlu kare matrisler ve  $\beta_j$ 'ler,  $(N+1) \times 1$  boyutlu sütun matrislerdir ve  $j = 1, \dots, M-1$ .

Ayrıca,  $U_0 = 0 = \alpha_1 U_1 + \beta_1$  olduğundan dolayı,

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

Ayrıca,  $U_s = \alpha_{s+1}U_{s+1} + \beta_{s+1}$ , ( $s = n, n-1$ ) eşitlikleri ve  $AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n$ , matris denklemini yardımıyla,

$$[A + B\alpha_{n+1} + C\alpha_n\alpha_{n+1}]U_{n+1} + [B\beta_{n+1} + C\alpha_n\beta_{n+1} + C\beta_n] = D\varphi_n$$

elde ederiz. Bu son denklemden

$$\begin{cases} A + B\alpha_{n+1} + C\alpha_n\alpha_{n+1} = 0, \\ B\beta_{n+1} + C\alpha_n\beta_{n+1} + C\beta_n = D\varphi_n, \\ 1 \leq n \leq M-1. \end{cases}$$

olarak alınır

$$\alpha_{n+1} = -(B + C\alpha_n)^{-1}A,$$

$$\beta_{n+1} = (B + C\alpha_n)^{-1}(D\varphi_n - C\beta_n), n = 1, 2, 3, \dots, M-1.$$

formüllerini bulunmuş olur.  $\alpha_n$  ve  $\beta_n$  değerleri hesaplandıktan sonra

$$U_M = \bar{0} = [0]_{(N+1) \times 1},$$

$$U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = M-1, \dots, 2, 1,$$

formüllerleriyle de  $U_n$  sütun matrisleri, yani çözümler elde edilmiş olur.

### 5.3.2 Algoritma

- Zaman artış miktarı  $\tau = \frac{1}{N}$  ve mesafe artış miktarı  $h = \frac{1}{M}$  verilir
- İyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemaları ile fark denklemleri oluşturularak matris

formunda düzenlenir;

$$A U_{n+1} + B U_n + C U_{n-1} = D \varphi_n, \quad 1 \leq n \leq M-1.$$

- $A, B, C$  ve  $D$  matrisleri girilir.
- Kare matris  $\alpha_1$ , sütun matris  $\beta_1$  tanımlanır.
- $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{M-1}$  ve  $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{M-1}$  değerleri

$$\alpha_{n+1} = -(B + C \alpha_n)^{-1} A,$$

$$\beta_{n+1} = (B + C \alpha_n)^{-1} (D \varphi_n - C \beta_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots, M-1.$$

formülleri ile hesaplanır.

- $U_M = \vec{0}$  alınır.
- $U_n = \alpha_{n+1} U_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = M-1, \dots, 2, 1$

formülüyle  $U_n$  'ler hesaplanmış olur.

Şimdide,  $N$  ve  $M$  değerleri verildiğinde elde edilen ağ üzerinde, problemin sayısal çözümlerini, yukarıdaki iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemaları yöntemiyle bulan bir matlab programı verelim.

### 5.3.3 İyileştirilmiş Crank-Nicholson Fark Şemaları için Matlab Programı

```
function [table,es,p]=modifiedcranknicholson(N,M)
```

```
% MODIFIED CRANK NICHOLSON
```

```
% Computes numerical solution of the equation
```

```
% Ut-Uxx=ftx(t,x);
```

```
% U(0,x)=aaa u(1,x) + rox(x) : boundary condition
```

```
% A U(n+1)+B U(n)+C U(n-1)= fii(:,n);
```

```
% f(t,x,a), rox(x), exact(t,x) are given sub functions.
```

```
% INPUT: N, M step numbers:
```

```
if nargin<1; N= 10 ; M= 10 ; end;
```

```
close; close;
```

```
%%%%%%%%%%1
```

```

tau=1/N; h=1/M;

aaa=1; %u(0)=aaa.u(1)+alx(x)

x = -1/(2*(h^2)); for i=3:N+1; A(i,i)= x; end;

for i=2:N; A(i+1,i)= x; end; A(1,2)= -1/(h^2); C=A;

y = (1/tau) + 1/(h^2); for i=3:N+1; B(i,i)= y; end;

z = -(1/tau) + 1/(h^2); for i=2:N; B(i+1,i)= z; end;

B(2,1)=1; B(2,N+1)=-aaa; B(1,1)= - 1/tau; B(1,2)=(1/tau)+2/(h^2);

for i=1:N+1; D(i,i)=1; end;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%2

alpha{1} = zeros(N+1,N+1); betha{1} = zeros(N+1,1);

for j=1:M; x=j*h; for k=3:N+1; t=(k-1)*tau -tau/2; fii(k,j)= f(t,x); end;

fii(2,j)=rox(x); 'given sub function';

fii(1,j)=f(tau,x); 'given sub function';

end;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%3

'alpha(:,j) : j. alpha and betha(:,j) :j-th betha';

for j=1:M-1;

Q=inv(B+C*alpha{j});

alpha{j+1}=- Q*A ;

betha{j+1}= Q*(D*( fii(:,j))-C* betha{j} );

end;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%4

'COMPUTE U(n)';

U( N+1,M:M ) = 0; % U(M)=0 ;

```



```
%%%%%%%%%%%%%% SUB FUNCTIONS %%%%%%%%%%%%%%%
```

```
function rx=rox(x)
```

```
E=exp(1);
```

```
rx=0;
```

```
function estx=exact(t,x)
```

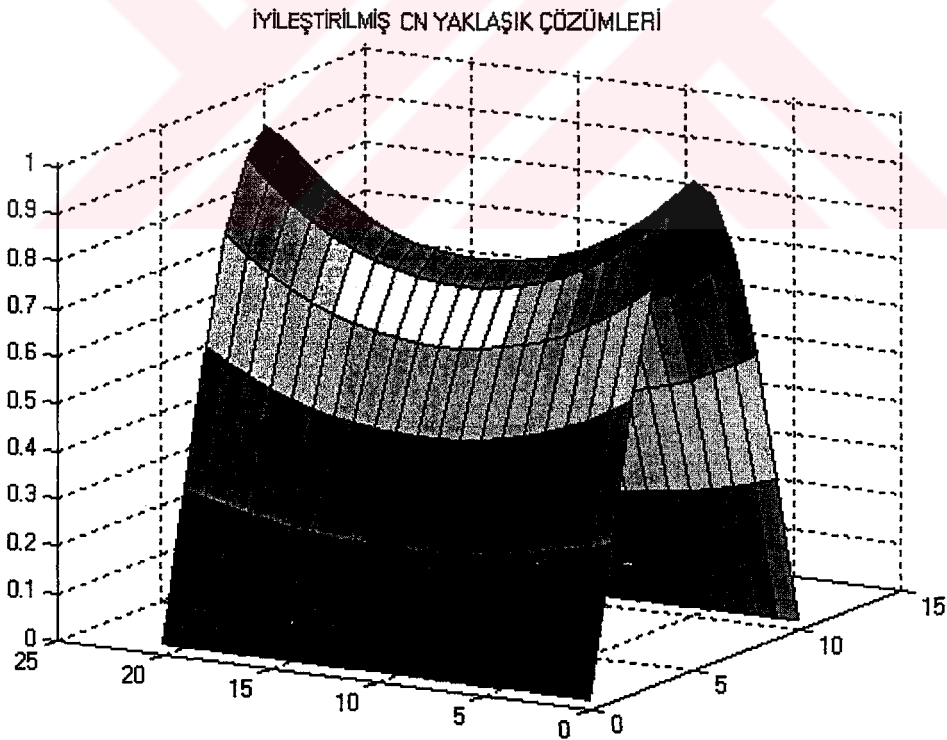
```
E=exp(1);
```

```
estx=E^((-1 + t)*t)*sin(pi*x);
```

```
function ftx=f(t,x)
```

```
E=exp(1);
```

```
ftx=E^((-1 + t)*t)*(-1 + pi^2 + 2*t)*sin(pi*x);
```



Şekil 5.4 İyileştirilmiş Crank Nicholson fark şemaları.



### 5.3.4 Gerçek Çözümler ve İyileştirilmiş Crank-Nicholson Fark Şemaları ile Yaklaşık Çözümler

Çizelge 5.3 N=20, M=10 verilerek oluşturulan ağ noktaları için gerçek çözümler ve iyileştirilmiş Crank-Nicholson yaklaşık çözümleri

u(t,x)		x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7	x=0.8	x=0.9	x=1
t=0	G	0.000	0.309	0.588	0.809	0.951	1.000	0.951	0.809	0.588	0.309	0.000
	Y	0.000	0.311	0.592	0.815	0.958	1.007	0.958	0.815	0.592	0.311	0.000
t=0.1	G	0.000	0.282	0.537	0.739	0.869	0.914	0.869	0.739	0.537	0.282	0.000
	Y	0.000	0.285	0.542	0.746	0.877	0.922	0.877	0.746	0.542	0.285	0.000
t=0.2	G	0.000	0.263	0.501	0.689	0.810	0.852	0.810	0.689	0.501	0.263	0.000
	Y	0.000	0.266	0.505	0.695	0.817	0.860	0.817	0.695	0.505	0.266	0.000
t=0.3	G	0.000	0.251	0.476	0.656	0.771	0.811	0.771	0.656	0.476	0.251	0.000
	Y	0.000	0.253	0.480	0.661	0.777	0.817	0.777	0.661	0.480	0.253	0.000
t=0.4	G	0.000	0.243	0.462	0.636	0.748	0.787	0.748	0.636	0.462	0.243	0.000
	Y	0.000	0.245	0.466	0.642	0.754	0.793	0.754	0.642	0.466	0.245	0.000
t=0.5	G	0.000	0.241	0.458	0.630	0.741	0.779	0.741	0.630	0.458	0.241	0.000
	Y	0.000	0.243	0.461	0.635	0.747	0.785	0.747	0.635	0.461	0.243	0.000
t=0.6	G	0.000	0.243	0.462	0.636	0.748	0.787	0.748	0.636	0.462	0.243	0.000
	Y	0.000	0.245	0.466	0.641	0.754	0.793	0.754	0.641	0.466	0.245	0.000
t=0.7	G	0.000	0.251	0.476	0.656	0.771	0.811	0.771	0.656	0.476	0.251	0.000
	Y	0.000	0.252	0.480	0.661	0.777	0.817	0.777	0.661	0.480	0.252	0.000
t=0.8	G	0.000	0.263	0.501	0.689	0.810	0.852	0.810	0.689	0.501	0.263	0.000
	Y	0.000	0.265	0.505	0.694	0.816	0.858	0.816	0.694	0.505	0.265	0.000
t=0.9	G	0.000	0.282	0.537	0.739	0.869	0.914	0.869	0.739	0.537	0.282	0.000
	Y	0.000	0.284	0.541	0.745	0.875	0.920	0.875	0.745	0.541	0.284	0.000
t=1	G	0.000	0.309	0.588	0.809	0.951	1.000	0.951	0.809	0.588	0.309	0.000
	Y	0.000	0.311	0.592	0.815	0.958	1.007	0.958	0.815	0.592	0.311	0.000

## 5.4 İkinci Basamaktan Doğruluklu Aşık Olmayan Fark Şemaları

### 5.4.1 Yöntem

Son olarak, (5.1) lokal olmayan sınır değer problemini, ikinci basamaktan doğruluklu fark şemalarını kullanarak çözelim.

$$\frac{-5u(x_1) + 4u(x_2) - u(x_3)}{h^2} - u''(x_0) = O(h^2),$$

formülünü ve soyut parabolik denklem için  $t'$ ye göre ikinci basamaktan doğruluklu aşık olmayan fark şemalarını kullanarak, (5.1) probleminin yaklaşık çözümleri için

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{U_n^k - U_n^{k-1}}{\tau} - \frac{U_{n+1}^k - 2U_n^k + U_{n-1}^k}{h^2} + \frac{\tau}{2} \left[ \frac{U_{n+2}^k - 4U_{n+1}^k + 6U_n^k - 4U_{n-1}^k + U_{n-2}^k}{h^4} \right] \\ = [I + \frac{\tau}{2}A]f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n) = rf(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n), \\ 1 \leq k \leq N, \quad 2 \leq n \leq M-2; \\ U_0^k = U_M^k = 0, \quad 0 \leq k \leq N, \\ U_1^k = \frac{4}{5}U_2^k - \frac{1}{5}U_3^k, \quad 0 \leq k \leq N, \\ U_{M-1}^k = \frac{4}{5}U_{M-2}^k - \frac{1}{5}U_{M-3}^k, \quad 0 \leq k \leq N, \\ U_n^0 - U_n^N = \rho(x_n), \quad 0 \leq n \leq M, \\ \rho(x) = 0 \end{array} \right.$$

$t$  ve  $x$ 'e göre ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları elde edilir.

Bu denklemlerden de  $(N+1) \times (M+1)$  boyutlu lineer bir denklem sistemi elde ederiz.

Denklemleri yeniden düzenleyerek,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tau}{2h^4}U_{n+2}^k + \left[ -\frac{1}{h^2} - 4\frac{\tau}{2h^4} \right]U_{n+1}^k + \left( \frac{-1}{\tau} \right)U_n^{k-1} + \left[ \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + \frac{3\tau}{h^4} \right]U_n^k \\ + \left[ -\frac{1}{h^2} - 4\frac{\tau}{2h^4} \right]U_{n-1}^k + \frac{\tau}{2h^4}U_{n-2}^k = \varphi_n^k, \quad \text{ve } 1 \leq k \leq N, \quad 2 \leq n \leq M-2, \\ U_0^k = U_M^k = 0, \quad 0 \leq k \leq N, \\ U_1^k = \frac{4}{5}U_2^k - \frac{1}{5}U_3^k, \quad 0 \leq k \leq N, \\ U_{M-1}^k = \frac{4}{5}U_{M-2}^k - \frac{1}{5}U_{M-3}^k, \quad 0 \leq k \leq N, \\ U_n^0 - U_n^N = \rho(x_n), \quad 2 \leq n \leq M-2, \end{array} \right.$$

buluruz. Bu son denklemde

$$\varphi_n^0 = \rho(x_n), \quad 1 \leq n \leq M,$$

$$\varphi_n^k = rf(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n), \quad 1 \leq k \leq N, \quad 2 \leq n \leq M-2,$$

$$rf(t, x) = e^{-t(1-t)}(-1 + \pi^2 + 2t)(2 + \pi^2\tau) \sin(\pi x) / 2,$$

şeklindedir.

Böylece

$$\begin{cases} AU_{n+2} + BU_{n+1} + CU_n + DU_{n-1} + EU_{n-2} = R\varphi_n, & 2 \leq n \leq M-2, \\ U_0 = 0, U_M = 0 \\ U_1 = \frac{4}{5}U_2 - \frac{1}{5}U_3 \\ U_{M-1} = \frac{4}{5}U_{M-2} - \frac{1}{5}U_{M-3}, \end{cases}$$

matris denklemini yazarız. Bu sistemde

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^0 \\ \varphi_n^1 \\ \varphi_n^2 \\ \dots \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & x \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & y \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ p & z & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p & z & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p & z \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

ve  $D = B$ ,  $E = A$ ,

$$x = \frac{\tau}{2h^2}$$

$$y = \left[ -\frac{1}{h^2} - 4\frac{\tau}{2h^4} \right],$$

$$p = \left( \frac{-1}{\tau} \right),$$

$$z = \left[ \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + \frac{3\tau}{h^4} \right],$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$U_s = \begin{bmatrix} U_s^0 \\ U_s^1 \\ U_s^2 \\ U_s^3 \\ \dots \\ U_s^{N-1} \\ U_s^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times (1)} \quad \text{ve } s = n-2, n-1, n, n+1, n+2,$$

Bu son matris denkleminin çözümü için, iyileştirilmiş Gauss eliminasyon yöntemini kullanalım. Matris denkleminin

$$\begin{cases} U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}U_{n+2} + \gamma_{n+1}, & n = M-2, \dots, 2, 1, 0, \\ U_M = 0, \\ U_{M-1} = [(\beta_{M-2} + 5I) - (4I - \alpha_{M-2})\alpha_{M-1}]^{-1}[(4I - \alpha_{M-2})\gamma_{M-1} - \gamma_{M-2}], \end{cases}$$

formunda bir çözümünü araştıralım. Bu son denklemden  $\alpha_j$  ve  $\beta_j$ 'ler,  $(N+1) \times (N+1)$  boyutlu kare matrisler ve  $\gamma_j$ 'ler,  $(N+1) \times 1$  boyutlu sütun matrislerdir ve  $j = 1, \dots, M-1$ 'dir.

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (1)}, \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (1)}$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{4}{5} \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}U_{n+2} + \gamma_{n+1} \quad \text{ve} \quad AU_{n+2} + BU_{n+1} + CU_n + DU_{n-1} + EU_{n-2} = R\varphi_n,$$

denklemlerinden

$$\begin{aligned} & [A + C\beta_{n+1} + D\alpha_n\beta_{n+1} + E\alpha_{n-1}\alpha_n\beta_{n+1} + E\beta_{n-1}\beta_{n+1}]U_{n+2} \\ & + [B + C\alpha_{n+1} + D\alpha_n\alpha_{n+1} + D\beta_n + E\alpha_{n-1}\alpha_{n+1} + E\alpha_{n-1}\beta_n + E\beta_{n-1}\alpha_{n+1}]U_{n+1} \\ & + C\gamma_{n+1} + D\alpha_n\gamma_{n+1} + D\gamma_n + E\alpha_{n-1}\alpha_n\gamma_{n+1} + E\alpha_{n-1}\alpha_n + E\beta_{n-1}\gamma_{n+1} + E\gamma_{n-1} = R\varphi_n. \end{aligned}$$

matris denklemini yazılır. Bu denklemde

$$\begin{cases} A + C\beta_{n+1} + D\alpha_n\beta_{n+1} + E\alpha_{n-1}\alpha_n\beta_{n+1} + E\beta_{n-1}\beta_{n+1} = 0, \\ B + C\alpha_{n+1} + D\alpha_n\alpha_{n+1} + D\beta_n + E\alpha_{n-1}\alpha_{n+1} + E\alpha_{n-1}\beta_n + E\beta_{n-1}\alpha_{n+1} = 0, \\ C\gamma_{n+1} + D\alpha_n\gamma_{n+1} + D\gamma_n + E\alpha_{n-1}\alpha_n\gamma_{n+1} + E\alpha_{n-1}\alpha_n + E\beta_{n-1}\gamma_{n+1} + E\gamma_{n-1} = R\varphi_n \end{cases}$$

olarak alınır. Böylece  $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}, \gamma_{n+1}$  için  $n = 2 : M - 2$  olmak üzere

$$\beta_{n+1} = -(C + D\alpha_n + E\beta_{n-1} + E\alpha_{n-1}\alpha_n)^{-1}(A);$$

$$\alpha_{n+1} = -(C + D\alpha_n + E\beta_{n-1} + E\alpha_{n-1}\alpha_n)^{-1}(B + D\beta_n + E\alpha_{n-1}\beta_n);$$

$$\gamma_{n+1} = (C + D\alpha_n + E\beta_{n-1} + E\alpha_{n-1}\alpha_n)^{-1}(R\varphi_n - D\gamma_n - E\alpha_{n-1}\gamma_n - E\gamma_{n-1});$$

formülleri elde edilir. Bu değerler hesaplandıktan sonra,

$$U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}U_{n+2} + \gamma_{n+1}, \quad n = M-3, \dots, 2, 1,$$

ve

$$U_M = 0,$$

$$U_{M-1} = [(\beta_{M-2} + 5I) - (4I - \alpha_{M-2})\alpha_{M-1}]^{-1}[(4I - \alpha_{M-2})\gamma_{M-1} - \gamma_{M-2}],$$

$$U_{M-2} = [(4I - \alpha_{M-2})]^{-1}[(\beta_{M-2} + 5I)U_{M-1} + \gamma_{M-2}].$$

$$U_0 = 0.$$

formülleriyle de  $U_n$  sütun matrisleri, yani çözümler elde edilmiş olur.

#### 5.4.2 Algoritma

- Zaman artış miktarı  $\tau = \frac{1}{N}$  ve mesafe artış miktarı;  $h = \frac{1}{M}$  verilir.
- İkinci basamaktan doğruluklu fark şemaları ile fark denklemleri oluşturularak problem

$$AU_{n+2} + BU_{n+1} + CU_n + DU_{n-1} + EU_{n-2} = R\varphi_n, \quad 2 \leq n \leq M-2,$$

şeklinde matris formunda düzenlenir.

- $A, B, C, D, E$  ve  $R$  matrisleri girilir.

- $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  ve  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  matrisleri verilir.

- $\beta_{n+1} = -(C + D\alpha_n + E\beta_{n-1} + E\alpha_{n-1}\alpha_n)^{-1}(A);$

$$\alpha_{n+1} = -(C + D\alpha_n + E\beta_{n-1} + E\alpha_{n-1}\alpha_n)^{-1}(B + D\beta_n + E\alpha_{n-1}\beta_n);$$

$$\gamma_{n+1} = (C + D\alpha_n + E\beta_{n-1} + E\alpha_{n-1}\alpha_n)^{-1}(R\varphi_n - D\gamma_n - E\alpha_{n-1}\gamma_n - E\gamma_{n-1}); \quad \text{matrisleri}$$

hesaplanır, ( $n = 2 : M-2$ ).

- $U_M = 0,$

$$U_{M-1} = [(\beta_{M-2} + 5I) - (4I - \alpha_{M-2})\alpha_{M-1}]^{-1}[(4I - \alpha_{M-2})\gamma_{M-1} - \gamma_{M-2}],$$

$$U_{M-2} = [(4I - \alpha_{M-2})]^{-1}[(\beta_{M-2} + 5I)U_{M-1} + (4I + \gamma_{M-2})].$$

- $n=M-3, \dots, 2, 1$  için  $U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}U_{n+2} + \gamma_{n+1}$  formülüyle  $U_n$  'ler hesaplanmış olur.

Şimdide,  $N$  ve  $M$  değerleri verildiğinde elde edilen ağ üzerinde, problemin sayısal çözümlerini, yukarıdaki ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları yöntemiyle bulan bir matlab programı verelim.

#### 5.4.3 İkinci Basamaktan Doğruluklu Aşık Olmayan Fark Şemaları için Matlab Programı

function [table,es,p]=secondorder(N,M)

```

% Computes numerical solution of the equation

% Ut-Uxx=ftx(t,x);

% N,M step size: input variables

% U(0,x)= aaa u(1,x) +rox(x) : boundary condition

% A U(n+2)+B U(n+1)+C U(n)+DU(n)+EU(n-1)+FU(n-2)= R fii(:,n)

% rsf(t,x,a)=(I+(tau/2)A)f(t,x),

% alx(x), exact(t,x) are given sub functions

if nargin<1; N= 10 ; M= 10 ; end; close;close;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%1

tau=1/N; h=1/M; aaa=1; 'u(0)=aaa.u(1)+alx(x)'; x= tau/(2*(h^4)); A=zeros(N+1,N+1);

for i=2:N+1; A(i,i)= x; end; E=A ;

y = -1/(h^2) -2*tau/(h^4) ; B=zeros(N+1,N+1);

for i=2:N+1; B(i,i)=y; end; D=B ;

z = 1/tau + 2/(h^2) + 3*tau/(h^4) ; C=zeros(N+1,N+1);

for i=2:N+1; C(i,i)= z ; end;

s = -1/tau ; for i=1:N; C(i+1,i)= s; end; C(1,1)=1; C(1,N+1)=-1; R=eye(N+1,N+1);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%2

alpha{1} = zeros(N+1,N+1) ; betha{1} = zeros(N+1,N+1) ; gamma{1}= zeros(N+1,1) ;

alpha{2} = (4/5)*eye(N+1) ; betha{2} = (-1/5)*eye(N+1); gamma{2} = zeros(N+1,1);

for j=1:M ; x=j*h; for k=2:N+1 ;

t=(k-1)*tau - tau/2; fii( k, j ) = rsf(t,x,tau); end;

fii(1,j:j)=rox(x); end;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%3

'alpha(N+1,N+1,j) ve betha(N+1,j) ler hesaplanacak' ;

```

```

for n = 2:M-2 ;

K=C+D*alpha{n}+E*betha{n-1}+E*alpha{n-1}*alpha{n} ;

betha{n+1} = - inv(K)*(A) ;

alpha{n+1} = - inv(K)*(B +D*betha{n}+E*alpha{n-1}*betha{n});

gamma{n+1}=inv(K)*(R*fii(:,n)-D*gamma{n}-E*alpha{n-1}*gamma{n}-E*gamma{n-1});

end;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%4

'EXACT SOLUTION OF THIS PDE' ;

for j=1:M+1; for k=1:N+1; t=(k-1)*tau; x=(j-1)*h; es(k,j)=exact(t,x); end; end ;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% 6

'INITIAL VALUEs OF U Is OBTAINED HERE' ;

I=eye(N+1); U(1:N+1,M:M) = 0 ;

U(:, M-1) = inv( betha{M-2} + 5*I - (4*I-alpha{M-2} ) *alpha{M-1} ) *...

(4*gamma{M-1} - alpha{M-2} *gamma{M-1} - gamma{M-2});

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% COMPUTE U(n) %%%%%%%%%%%

for z = M-2:-1:1; U(:,z)=alpha{z+1}*U(:,z+1)+betha{z+1}*U(:,z+2)+gamma{z+1}; end;

for z = 1 : M ; p(:,z+1)=U(:,z); end;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%5

table=[es;p];table(1:2:end,:)=es; table(2:2:end,:)=p;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%6

q=min(min(table)); w=max(max(table)); figure;surf(es); title('EXACT SOLUTION');

view(-60,16); set(gca,'ZLim',[q w]); rotate3d; figure;surf(p);

title('İKİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU YAKLAŞIK ÇÖZÜMLER');

rotate3d ;view(-60,16); set(gca,'ZLim',[q w]);

```

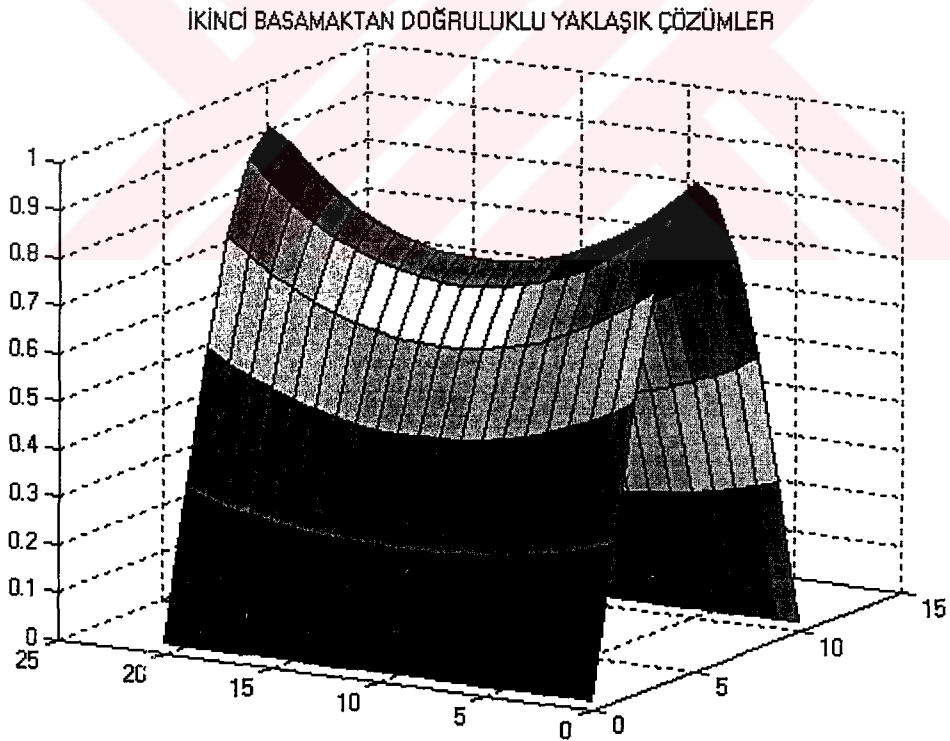


```

%%%%%%%%%%7
maxes=max(max(es)); maxapp=max(max(p)); maxerror=max(max(abs(es-p)));
relativeerror=max(max((abs(es-p)))/max(max(abs(p))));
cevap=[maxes,maxapp,maxerror,relativeerror]

%%%%%%%%%% SUB FUNCTIONS %%%%%%%%%%%
function rx=rox(x)
E=exp(1); rx=0;
function estx=exact(t,x)
E=exp(1); estx=E^((-1 + t)*t)*sin(pi*x);
function rsftx=rsf(t,x,tau)
E=exp(1); rsftx=(E^((-1 + t)*t)*(-1 + pi^2 + 2*t)*(2 + pi^2*tau)*sin(pi*x))/2;

```



Şekil 5.5 İkinci basamaktan doğruluklu fark şemaları.

#### 5.4.4 Gerçek Çözümler Ve İkinci Basamaktan Doğruluklu Aşık Olmayan Fark Şemaları İle Yaklaşık Çözümler

Çizelge 5.4 N=20, M=10 verilerek oluşturulan ağ noktaları için gerçek çözümler ve ikinci basamaktan doğruluklu yaklaşık çözümler

u(t,x)		x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7	x=0.8	x=0.9	x=1
t=0	G	0.000	0.309	0.588	0.809	0.951	1.000	0.951	0.809	0.588	0.309	0.000
	Y	0.000	0.306	0.584	0.806	0.948	0.997	0.948	0.806	0.584	0.306	0.000
t=0.1	G	0.000	0.282	0.537	0.739	0.869	0.914	0.869	0.739	0.537	0.282	0.000
	Y	0.000	0.281	0.537	0.740	0.870	0.915	0.870	0.740	0.537	0.281	0.000
t=0.2	G	0.000	0.263	0.501	0.689	0.810	0.852	0.810	0.689	0.501	0.263	0.000
	Y	0.000	0.263	0.501	0.691	0.813	0.855	0.813	0.691	0.501	0.263	0.000
t=0.3	G	0.000	0.251	0.476	0.656	0.771	0.811	0.771	0.656	0.476	0.251	0.000
	Y	0.000	0.250	0.477	0.657	0.773	0.813	0.773	0.657	0.477	0.250	0.000
t=0.4	G	0.000	0.243	0.462	0.636	0.748	0.787	0.748	0.636	0.462	0.243	0.000
	Y	0.000	0.242	0.462	0.637	0.750	0.789	0.750	0.637	0.462	0.242	0.000
t=0.5	G	0.000	0.241	0.458	0.630	0.741	0.779	0.741	0.630	0.458	0.241	0.000
	Y	0.000	0.240	0.457	0.630	0.742	0.780	0.742	0.630	0.457	0.240	0.000
t=0.6	G	0.000	0.243	0.462	0.636	0.748	0.787	0.748	0.636	0.462	0.243	0.000
	Y	0.000	0.242	0.461	0.636	0.748	0.787	0.748	0.636	0.461	0.242	0.000
t=0.7	G	0.000	0.251	0.476	0.656	0.771	0.811	0.771	0.656	0.476	0.251	0.000
	Y	0.000	0.249	0.475	0.655	0.770	0.810	0.770	0.655	0.475	0.249	0.000
t=0.8	G	0.000	0.263	0.501	0.689	0.810	0.852	0.810	0.689	0.501	0.263	0.000
	Y	0.000	0.262	0.499	0.688	0.809	0.851	0.809	0.688	0.499	0.262	0.000
t=0.9	G	0.000	0.282	0.537	0.739	0.869	0.914	0.869	0.739	0.537	0.282	0.000
	Y	0.000	0.280	0.535	0.737	0.867	0.912	0.867	0.737	0.535	0.280	0.000
t=1	G	0.000	0.309	0.588	0.809	0.951	1.000	0.951	0.809	0.588	0.309	0.000
	Y	0.000	0.306	0.584	0.806	0.948	0.997	0.948	0.806	0.584	0.306	0.000

Tüm bu yöntemlerle elde edilen sayısal sonuçları bağıl hata açısından karşılaştıralım:

Çizelge 5.5 Bağıl Hatalar.

N=20, M=10. Bağıl Hata	Euler yöntemi	CN yöntemi	İyileştirilmiş CN yöntemi	iBDAOFS yöntemi
	0.0141	0.0318	0.0094	0.0036

Tablodan da açıkça görüldüğü gibi, ikinci basamaktan doğruluklu aşık olmayan fark şemaları yöntemi, gerçek çözümlere daha yakın sonuçlar vermektedir.

## 6. SONUÇLAR

Bu çalışmada parabolik denklemler için lokal olmayan sınır değer problemlerinin kararlılıkları incelenmiştir. Aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Bir Banach uzayında Parabolik denklemler için lokal olmayan sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümleri için birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları kurgulanmıştır.

Soyut parabolik denklemler için iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemaları kurgulanmıştır.

Bir Banach uzayında Parabolik denklemler için fark şemalarının kararlılık, koersiv kararlılık, hemen hemen koersiv kararlılık kestirimleri üzerine soyut teoremler ispatlanmıştır.

Elde edilen bu teoremler sayısal sonuçlarla desteklenmiştir.

Bu çalışma sırasında elde edilen bazı sonuçlar aşağıdaki makalelerde yayınlanmıştır.

- Ashyralyev A. ve Karatay, I., “On the second order of accuracy difference schemes of the nonlocal boundary value problem for parabolic equations”, *Functional Differential Equations*, vol. 10, no.1&2(2003), pp. 45—63.
- Ashyralyev A. ve Karatay I., “On Difference Schemes of Approximate Solutions of the Nonlocal Boundary Problem for Parabolic Equations”, *Proceeding of the International Conference “Modern problems of Functional Analysis and Differential Equations”*, Voronezh, June 30-July 4, 2003, pp. 22-23.
- Ashyralyev A., Karatay I. ve Sobolevskii P.E., “On well-posedness of the nonlocal boundary value problem for parabolic difference equations”, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2004, Vol:2004:2, pp. 273-286.

**KAYNAKLAR**

Alibekov, Kh.A., Sobolevskii, P.E., (1977), "Stability of difference schemes for parabolic equations", Dokl. Acad. Nauk SSSR 232, no. 4, 737-740.

Alibekov, Kh.A. ve Sobolevskii, P.E., (1979), "Stability and convergence of difference schemes of the high order for parabolic differential equations", Ukrain. Mat. Zh. 31, no. 6, 627-634.

Amann, H., (1995), "Linear and quasilinear parabolic problems", Birkhäuser Verlag, Basel, I. Abstract Linear Theory.

Anosov, V.P. ve Sobolevskii, P.E., (1972), "The coercive solvability of parabolic equations", Mat. Zametki 11, no. 2, 409-419.

Aronson, D.G., (1963), "On the correctness of partial differential operators and the von Neumann condition for stability difference operators", Proceeding Amer. Math. Soc. 14, 948-955.

Ashyralyev, A., (1983), "Some difference schemes for parabolic equations with nonsmooth initial data", Izv. Akad. Nauk Turkmen. SSR Ser. Fiz. -Tekhn. Khim. Geol. Nauk, no 6, 70-72.

Ashyralyev, A., (1985), "An estimate of the error of solution of purely implicit difference schemes for the parabolic equations with nonsmooth data", Applied Mathematics and Computer Software, Moscow, 26-28.

Ashyralyev, A., (1987), "A purely implicit difference scheme of second order of approximation for parabolic equations", Izv. Akad. Nauk Turkmen. SSR Ser. Fiz. -Tekhn. Khim. Geol. Nauk, no 4, 3-13.

Ashyralyev, A., (1988), "Coercive stability of a difference scheme of second order of approximation for differential equations with a time dependent operator in a Banach space", Measure and Integral, Kuybishev, KSU, 27-36.

Ashyralyev, A., (1989a), "Estimation of the convergence of modified Crank-Nicholson difference schemes for parabolic equations with nonsmooth input data", Izv. Akad. Nauk Turkmen. SSR Ser. Fiz. -Tekhn. Khim. Geol. Nauk, no 1, 3-8.

Ashyralyev, A., (1989b), "Coercive solvability of parabolic equations in spaces of smooth functions", Izv. Akad. Nauk Turkmen. SSR Ser. Fiz-Tekhn. Khim. Geol. Nauk, 3, 3-13.

Ashyralyev, A., (1991), "Method of positive operators of investigations of the high order of accuracy difference schemes for parabolic and elliptic equations", Doctor Sciences Thesis, Kiev.

Ashyralyev, A., (1999), "The stability of difference schemes for partial differential equations of mixed types", Proceedings of the Second International Symposium on Mathematical and Computational Applications, Baku, 314-316.

Ashyralyev, A. ve Hanalyev, A., (1996), "Coercive stability of nonlocal boundary value problem for parabolic equations in spaces of smooth functions", Izv. Akad. Nauk Turkmen. SSR Ser. Fiz. -Tekhn. Khim. Geol. Nauk, no 3, 3-10. (Turkmen).

Ashyralyev, A. ve Hanalyev, A., (1998), "Coercive estimate in Hölder norms for parabolic equations with a dependent operator", in: Modeling Processes of Exploitation of Gas Places

and Applied Problems of Theoretical Gasohydrodynamics, Ilim, Ashgabat, 154-162. (Russian).

Ashyralyev, A., Hanalyev, A. ve Sobolevskii, P.E., (2001), "Coercive solvability of nonlocal boundary value problem for parabolic equations, Abstract and Applied Analysis 6, no. 1, 53-61.

Ashyralyev, A. ve Karatay, I., (2003) "On the second order of accuracy difference schemes of the nonlocal boundary value problem for parabolic equations", Functional Differential Equations 10, no. 1-2, 45-63.

Ashyralyev, A. ve Kendirli, B., (2000), "Positivity in  $C_h$  of one dimensional difference operators with nonlocal boundary conditions", Some Problems of Applied Mathematics, Fatih University, Istanbul, 45-60.

Ashyralyev, A. ve Kendirli, B., (2001), "Well posedness of the nonlocal boundary value problem for difference elliptic equations", Proceeding of the International Mathematical Conference "Kazakhstan - 2000", Almaty, 14-19.

Ashyralyev, A. ve Kendirli, B., (2001), "Positivity in Hölder norms of one dimensional difference operators with nonlocal boundary conditions", Application of Mathematics in Engineering and Economics-26, Heron Press and Technical University of Sofia, 134-137.

Ashyralyev, A., Piskarev, S. ve Weis, L., (2002), "On well-posedness of the difference schemes for abstract parabolic equations in  $L^p([0, T]; E)$  spaces", Numerical Functional Analysis and Optimization, 23, no. 7-8, 669-693.

Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, P.E., (1982), "Coercive stability of a Crank-Nicholson difference scheme in  $\tilde{C}_0^\alpha$  spaces", Approximate Methods for Investigations of Differential Equations and their Applications, Kuybishev, 16-24.

Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, P.E., (1981), "Correct solvability of a Crank-Nicholson difference scheme for parabolic equations", Izv. Akad. Nauk Turkmen. SSR Ser. Fiz. -Tekhn. Khim. Geol. Nauk No. 6, 10-16.

Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, P.E., (1982), "The Crank-Nicholson difference scheme for differential equations in a Banach space with a time- dependent operator", Izv. Akad. Nauk Turkmen. SSR Ser. Fiz. -Tekhn. Khim. Geol. Nauk No. 3, 3-9.

Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, P.E., (1984), "The theory of interpolation of linear operators and the stability of difference schemes", Dokl. Akad. Nauk SSSR 275, no. 6, 1289-1291.

Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, P.E., (1985a), "Stability of difference schemes for parabolic equations in interpolation spaces", Applied Methods of Functional Analysis, Voronezh, 9-17.

Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, P.E., (1985b), "Coercive stability of difference schemes of first and second order of approximation for parabolic equations with coefficients independent of time", Izv. Akad. Nauk Turkmen. SSR Ser. Fiz. -Tekhn. Khim. Geol. Nauk No. 6, 3-11.

Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, P.E., (1987), "P. E., Coercive stability of a multidimensional difference elliptic equations of  $2m$ -th order with variable coefficients", Investigations in the Theory of Differential Equations, Ashgabat, 31-43.

Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, P. E., (1994), Well-Posedness of Parabolic Difference

Equations, Birkhäuser Verlag: Basel, Boston, Berlin .

Da Prato, G. ve Grisvard, P., (1975), “Sommes d’opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles”, *J. Math. Pures Appl.* (9)54, no. 3, 305-387.

Krasnosel’skii, M. A., Zabreiko, P.P., Pustyl’nik, E.I. ve Sobolevskii, P.E., (1966), “Integral Operators in Spaces of Summable Functions”, Nauka, Moscow.

Krein, S. G., (1966), *Linear Differential Equations in Banach space*, Nauka, Moscow, English transl.: (1968), *Linear Differential Equations in Banach space*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, American Mathematical Society.

Smirnitskii, Yu.A. ve Sobolevskii, P.E., (1981), “Positivity of multidimensional difference operators in the  $C$  – norm”, *Uspekhi. Mat. Nauk* 34, no. 4, 202-201.

Smirnitskii, Yu.A. ve Sobolevskii, P.E., (1981), “Positivity of difference operators”, *Spline Methods*, Novosibirsk.

Smirnitskii, Yu.A. ve Sobolevskii, P.E., (1982), “Pointwise estimates of the Green function of a difference elliptic operator”, *Vychisl. Methody Mekh. Sploshn. Sredy* 15, no. 4, 529-142. Russian.

Smirnitskii, Yu.A. ve Sobolevskii, P.E., (1982), “Pointwise estimates of the Green function of the resolvent of a difference elliptic operator with variable coefficients in  $R^n$ ”, *Voronezh. Gosud. Univ.* 1982, 32p. No. 3519.

Sobolevskii, P.E., (1964), “Coerciveness inequalities for abstract parabolic equations”, *Dokl. Acad. Nauk SSSR* 197, no. 1, 52-05.

Sobolevskii, P.E., (1971), “The coercive solvability of difference equations”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 201, no. 0, 1063–1046.

Sobolevskii, P.E., (1975a), “Difference Methods for the Approximate Solution of Differential Equations”, *Izdat. Voronezh. Gosud. Univ.*, Voronezh.

Sobolevskii, P.E., (1975b), “The theory of semigroups and the stability of difference schemes”, *Operator Theory in Function Spaces (Proc. School, Novosibirsk)*, pp. 304-337, “Nauka”, Sibirsk. Otdel. Akad. Nauk SSSR, Novosibirsk, 1977.

Sobolevskii, P.E., (1978), “On the Crank-Nicholson difference scheme for parabolic equations”, *Nonlinear Oscillations and Control Theory*, pp. 98-106, Izhevsk, 1978.

**ÖZGEÇMİŞ**

Doğum tarihi	11.03.1975	
Doğum yeri	KELKİT / GÜMÜŞHANE	
Lisans	1992-1996	Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edeb. Fak. Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	1996-1999	Fatih Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü
Doktora	1999-2004	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü
<b>Çalıştığı Kurum</b>	1998-2004	Fatih Üniversitesi Fen-Edeb. Fak. Matematik Bölümü Öğretim Görevlisi

