

YILDIZ TEKNİK UNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Çok İçer. Öng. Şer. Çat. Ucu.
Oluşan Ger. Şid. Fak. Belir.

Doktora Tezi

Arzu Turan

2005

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE VE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Yer No (DDC): R 209/268

Kayıt No : 3128
Geldiği Yer : Fen Bilim Enst.
Tarih : 05.06.06
Fiyat : 4.10
Fatura No :
Ayniyat No : 1-6
Ek :

KİTİMLER

SİMGE LİSTESİ

SEKİL LİSTESİ

YABANCI LİSTESİ

ÖNSÖZ

ÖZET

XI-82

ÇATLAK İÇEREN ÖNGERİLMELİ ŞERİTTE ÇATLAK UCUNDA OLUŞAN GERİLME ŞİDDETİ FAKTÖRÜNÜN BELİRLENMESİ

Mat. Yük. Müh. Arzu TURAN

F.B.E Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında
Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi: 16 Aralık 2005

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Nazmiye YAHNIOĞLU (YTÜ)

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV (YTÜ)

: Prof. Dr. R. Faruk YÜKSELER (YTÜ)

: Prof. Dr. Mehmet BAKIOĞLU (İTÜ)

: Prof. Dr. Esin İNAN (Işık Ü.)

İSTANBUL, 2005

Yahnioğlu
AKBAROV
Yukseker
Bakioğlu
Inan

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ.....	vi
TABLO LİSTESİ.....	vii
ÖNSÖZ.....	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xi
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Tez Konusuna Ait Genel Bilgiler.	1
1.2 Tez Konusuna Ait Araştırmaların Kısa Özeti.....	3
1.3 Konunun Gerekliliği ve Güncelliği.....	5
1.4 Yapılan Araştırmanın Amaçları.....	6
2. ÇATLAK İÇEREN ÖNGERİLMELİ ŞERİT-LEVHADA KIRILMA PARAMETRELERİNİN BELİRLENMESİ	8
2.1 Öngerilme Olmadığı Durum.....	8
2.1.1 Problemin Matematiksel Formülasyonu	8
2.1.2 Problemin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Modellenmesi	10
2.2 Öngerilme Olduğu Durum	14
2.2.1 Ele Alınan Problemin Matematiksel Modeli	14
2.2.2 Nonlineer Alan Denkleminin Lineerleştirilmesi.....	16
2.2.3 Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Modelleme	19
2.3 Kırılma Parametrelerinin Bulunması	25
3. SAYISAL SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRİLMESİ	27
3.1 Enine İzotrop Şerit-Levha.....	27
3.1.1 K_I Mod Değerleri	28
3.1.2 K_{II} Mod Değerleri.....	35
3.2 Ortotrop Şerit-Levha.....	38
3.2.1 K_I Mod Değerleri	38
4. SONLU ŞEKİL DEĞİŞTİRME DURUMUNDA ÇATLAK İÇEREN ÖNGERİLMELİ ŞERİT-LEVHADA KIRILMA PARAMETRELERİNİN BELİRLENMESİ.....	46
4.1 Problemin Formülasyonu.....	46
4.2 Problemin Varyasyonel Formülasyonu	51
4.3 Sayısal Sonuçlar.....	54
5. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME.....	63

KAYNAKLAR.....	65
EKLER	69
Ek 1 Lineer Elastik Kırılma Parametreleri	70
Ek 2 Gerilme Şiddeti Faktörünün Belirlenmesi Yöntemleri	72
Ek 3 Öngerilmeli Ortamlar İçin Kırılma Parametreleri.....	75
ÖZGEÇMİŞ.....	82

G_{12}	Şerit levha'nın Ox_1x_2 düzlemindeki kayma modülü
h	Şerit levha'nın yitkacılığı
h_a	Çatlığın şerit levha'nın alt yüzeyine olan uzaklığı
h_b	Çatlığın şerit levha'nın üst yüzeyine olan uzaklığı
K	Kütlelik (Stiffness) matrisi
K_x	Kırılma tekiğiği
K_I	Gerilme şiddeti faktörü (I.Mod)
K_{II}	Gerilme şiddeti faktörü (II.Mod)
K_{III}	Gerilme şiddeti faktörü (III.Mod)
l	x_1 doğrultusunda şerit levha'nın uzunluğu
l, l_0	Çatlak uzunluğu
L^2	Çatlığın bulunduğu geometrik bölge
N	Şekil fonksiyonları matrisi
P	Çatlığın üst ve alt yüzeyine normal doğrultusunda ekle eden düzgün yayılı kuvvetin yoğunluğu
q	Şerit levha'nın kayma için kenarından ekle eden düzgün yayılı çekme (basıncı) kuvvetinin yoğunluğu
O	Kirchoff teorisi
r	Düzgün yüklenmiş ekle eden kuvveti gösteren vektör
S	Lagrange şekil değiştirme fonksiyonu
u_1, u_2	Sırasıyla Ox_1 ve Ox_2 doğrultusundaki yer değiştirmeler
$u_1^{(0)}$	Çatlak içermeyen şerit levha'nın kayma için kenarından düzgün yayılı çekme (basıncı) vektörüne karşılık gelen düzlemde oluşan bu yer değiştirme
$u_1^{(1)}$	Çatlak içermeyen öngerilmeli şerit levha'nın çatlığın üst ve alt yüzeyine yayılı düzgün çekme (basıncı) vektörüne karşılık gelen düzlemde oluşan bu yer değiştirme
U	Toplam elastik şekil değiştirme enerjisi
x_1, x_2	Buysku global Lagrange koordinatları
x_1	Çatlığın $x_1 = 0$ düzleminde olan uzaklığı
α, β	İrrotal alanın sırasıyla Ox_1 ve Ox_2 doğrultusundaki yarı vektörleri
$\lambda_0 = 0$	Kayma için sınır koşulu
τ_{ij}	Şekil değiştirme enerjisi bileşenleri
σ_1, σ_2	Sırasıyla tensör ve güçlendirici malzemenin bir kompozit içerisindeki hacim oranları
λ_1, λ_2	Sırasıyla matris ve güçlendirici malzemenin kompozit içerisindeki Lame katsayıları

SİMGE LİSTESİ

a	Düğüm noktalarında bilinmeyen yerdeğiştirmeleri gösteren vektör
A_{ij}	Çok katlı kompozit malzemenin normalize edilmiş mekanik özellikleri
D	Malzeme sabitlerini içeren matris
E_1, E_2, E_3	Elastisite (Young) modülleri
G	Enerji boşalma oranı
G_c	Kritik enerji boşalma oranı
G_{12}	Şerit-levhanın Ox_1x_2 düzlemindeki kayma modülü
h	Şerit-levha'nın yüksekliği
h_A	Çatlağın şerit levha'nın alt yüzeyine olan uzaklığı
h_U	Çatlağın şerit levha'nın üst yüzeyine olan uzaklığı
K	Rijidlik (Stiffness) matrisi
K_C	Kırılma tokluğu
K_I	Gerilme şiddeti faktörü (I.Mod)
K_{II}	Gerilme şiddeti faktörü (II.Mod)
K_{III}	Gerilme şiddeti faktörü (III.Mod)
l	x_1 doğrultusundaki şerit-levha'nın uzunluğu
a, l_0	Çatlak uzunluğu
L^{\pm}	Çatlağın bulunduğu geometrik bölge
N	Şekil fonksiyonları matrisi
p	Çatlağın üst ve alt yüzeyine normal doğrultuda etki eden düzgün yayılı kuvvetin yoğunluğu
q	Şerit-levha'nın karşılıklı iki kenarından etki eden düzgün yayılı çekme (basınç) kuvvetinin yoğunluğu
Q	Kirchoff tansörü
r	Düğüm noktalarına etki eden kuvveti gösteren vektör
S	Lagrange şekil değiştirme tansörü
u_1, u_2	Sırasıyla Ox_1 ve Ox_2 doğrultusundaki yerdeğiştirme
$u_i^{(0)}$	Çatlak içeren şerit-levha'nın karşılıklı iki kenarından düzgün yayılı q çekme (basınç) yükü ile çekildiğinde oluşan ön yerdeğiştirme
$u_i^{(1)}$	Çatlak içeren öngerilmeli şerit-levha'nın çatlağın üst ve alt yüzeyine normal doğrultuda etki eden ilave düzgün yayılı kuvvet (basınç) etkisinde oluşan yerdeğiştirme
U	Toplam elastik şekil değiştirme enerjisi
x_1, x_2	Boyutlu global Lagrange koordinatları
x_L	Çatlağın $x_1 = 0$ düzlemine olan uzaklığı
α, β	Sonlu Elemanın sırasıyla Ox_1 ve Ox_2 doğrultusundaki yarı uzunlukları
$\delta_{ij} = \delta_i^j$	Kronecker sembolü
ϵ_{ij}	Şekil değiştirme tansörü bileşenleri
η_1, η_2	Sırasıyla matris ve güçlendirici malzemelerinin kompozit içerisindeki hacim oranları
λ_1, λ_2	Sırasıyla matris ve güçlendirici malzemelerinin kompozit içerisindeki Lamé sabitleri

μ_1, μ_2	Sırasıyla matris ve güçlendirici malzemelerinin kompozit içerisindeki kayma modülleri	Sayfa
ν_1, ν_2	Sırasıyla matris ve güçlendirici malzemelerinin kompozit içerisindeki Poisson oranları	3
σ_{ij}	Gerilme tansörü bileşenleri	9
γ	Yüzey enerjisi	11
Π	Toplam potansiyel enerji	11
Şekil 2.4	Çatık ucunda a) standart, b) tekil üçgeni ucunda elemanların nodullarını gösteren geometri	12
Şekil 2.5	Ela alümin yapı elemanının geometri ve yüklenme durumu a) yükler, b) karşılıklı kenarlarından çekimler, c) d) yüklenmesine ilave olarak çatık yüzeylerinin açılmasına yönelik yüklenme, d) d) yüklenmesine ilave olarak çatık yüzeylerinin birbiriyle paralel kaymasına yönelik yüklenme	15
Şekil 2.6	Ela alümin çubuğu bölgesinin herit bağımlı bölgeye dönüştürülmesi	23
Şekil 3.1	Çatık ξ koordinatı için $(v_{1,0} - v_{2,0}) 10^3$ yerleşimlerinin $x_2 - C$ 'ye göre grafiği	30
Şekil 3.2	$b/c = 0,20$, $E_2/E_1 = 0,2/E_1 = 0,5$, $G_{12} = E_1 = 0,01$, $\nu_{12}/2' = 0,35$ için q_1/E_1 gerilmeleri için $(v_{1,0} - v_{2,0})$ yerleşimlerinin $x_2/2C$ 'ye göre grafiği	34
Şekil 4.1	Ela alümin çubuklarının geometri	47
Şekil 4.2	Çubuk bölgesinin çubuk bağımlı bölgeye dönüştürülmesi	52
Şekil Ek 1.1	Asıl model ve yüklenme durumu	70
Şekil Ek 2.1	Ela alümin çubuğu geometri ve yüklenme durumu	72
Şekil Ek 3.1	Çatık ucunda tekil üçgeni ucunda elemanlar	73
Şekil Ek 3.1	Ela alümin çubuğu geometri ve I. Mod yüklenme durumu	75
Şekil Ek 3.2	Ela alümin çubuğu geometri ve II. Mod yüklenme durumu	77

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1.1	Öngerilmenin ve çatlak kenarlarındaki ek yüklemenin şematik gösterimi.....3
Şekil 2.1	a) Problem 1, b) Problem 2 durumunda ele alınan şerit-levhanın geometrisi ve yüklenme durumu 9
Şekil 2.2	Sonlu eleman geometrisi ve nodlarının konumu 11
Şekil 2.3	Çatlak ucunda a) standart, b) tekil sonlu eleman ağı 11
Şekil 2.4	Çatlak ucunda a) standart, b) tekil üçgen sonlu elemanların nodlarının konumu 12
Şekil 2.5	Ele alınan yapı elemanının geometri ve yüklenme durumu a) yüksüz, b) karşılıklı kenarlarından çekilmesi, c) (b) yüklemesine ilave olarak çatlak yüzeylerinin açılmasına yönelik yüklenme, d) (b) yüklemesine ilave olarak çatlak yüzeylerinin birbirine paralel kaymasına yönelik yüklenme 15
Şekil 2.6	Ele alınan çözüm bölgesinin basit bağımlı bölgeye dönüştürülmesi 23
Şekil 3.1	Farklı \tilde{q} öngerilmesi için $(v _{\tilde{q} \neq 0} - v _{\tilde{q} = 0})10^3$ yerdeğiştirmesinin x_1 / ℓ 'ye göre grafiği 30
Şekil 3.2	$h/\ell = 0,20$, $E_2/E_1 = E_3/E_1 = 0,5$, $G_{12}/E_1 = 0,02$, $\ell_0/2\ell = 0,15$ iken farklı q/E_1 öngerilmesi için $(v _{\tilde{q} \neq 0} - v _{\tilde{q} = 0})$ yerdeğiştirmesinin x_1 / ℓ 'e göre grafiği. 45
Şekil 4.1	Ele alınan şerit-levhanın geometrisi 47
Şekil 4.2	Çözüm bölgesinin basit bağımlı bölgeye dönüştürülmesi 52
Şekil Ek 1.1	Asal modlar ve yüklenme durumu 70
Şekil Ek 2.1	Ele alınan cismin geometrisi ve yüklenme durumu 72
Şekil Ek 2.2	Çatlak ucu bölgesinde tekil üçgen sonlu elemanlar 73
Şekil Ek 3.1	Ele alınan cisimde öngerilme ve I. Mod yüklenme durumu 75
Şekil Ek 3.2	Ele alınan cisimde öngerilme ve II. Mod yüklenme durumu 79

TABLO LİSTESİ

		Sayfa
Tablo 3.1	$E_2/E_1 = 1, h/\ell = 0,20, h_u/\ell = h_A/\ell$ durumunda elde edilen SIF değerleri	29
Tablo 3.2	$E_2/E_1 = 1, h/\ell = 0,20, h_u/\ell = h_A/\ell$ durumunda SIF ve $(\partial U/\partial \ell_0)/p\ell$ değerlerine sonlu eleman sayısının etkisi.....	29
Tablo 3.3	$h/\ell = 0,20, h_U/\ell = h_A/\ell$ durumunda ön-çekme (pay) ve ön-basınç (payda) gerilmesinin $K_I/K_{I\infty}$ 'a etkisi	32
Tablo 3.4	$h/\ell = 0,20, \ell_0/2\ell = 0,04$ iken farklı h_u/ℓ değerlerinde, ön-çekme (pay) /ön-basınç (payda) gerilmesinin $(\partial U/\partial \ell_0)/P\ell$ değerine etkisi	33
Tablo 3.5	$h/\ell = 0,20, \ell_0/2\ell = 0,10$ iken farklı h_u/ℓ değerlerinde, ön-çekme (pay) /ön-basınç (payda) gerilmesinin $(\partial U/\partial \ell_0)/P\ell$ değerine etkisi.....	34
Tablo 3.6	$h/\ell = 0,20, h_U/\ell = h_A/\ell$ durumunda ön-çekme (pay) ve ön-basınç (payda) gerilmesinin $K_{II}/K_{II\infty}$ 'a etkisi	36
Tablo 3.7	$h/\ell = 0,20, \ell_0/2\ell = 0,16$ iken farklı h_u/ℓ değerlerinde, ön çekme (pay) /ön basınç (payda) gerilmesinin $(\partial U/\partial \ell_0)/P\ell$ değerine etkisi.....	37
Tablo 3.8	$h/\ell = 0,20, \ell_0/2\ell = 0,24$ iken farklı h_u/ℓ değerlerinde, ön çekme (pay) /ön basınç (payda) gerilmesinin $(\partial U/\partial \ell_0)/P\ell$ değerine etkisi.....	38
Tablo 3.9	$h/\ell = 0,20, \ell_0/2\ell = 0,15, E_2/E_1 = E_3/E_1 = 0,5, G_{12}/E_1 = 0,01, h_U/\ell = h_A/\ell$ durumunda I. mod SIF ve $(\partial U/\partial \ell_0)/p\ell$ değerlerine sonlu eleman sayısının etkisi	40
Tablo 3.10	$h/\ell = 0,20, \ell_0/2\ell = 0,15, E_2/E_1 = E_3/E_1 = 0,5, G_{12}/E_1 = 0,01, h_U/\ell = h_A/\ell$ durumunda I. mod SIF ve $(\partial U/\partial \ell_0)/p\ell$ değerlerine $\Delta \ell_0/\ell$ 'in etkisi.....	40
Tablo 3.11	$h/\ell = 0,20, h_U/\ell = h_A/\ell$ için farklı $\ell_0/2\ell, G_{12}/E_1, E_2/E_1 = E_3/E_1$ değerlerinde \tilde{q} 'in SIF'e etkisi.....	42
Tablo 3.12	$h/\ell = 0,20, E_2/E_1 = 0,5, h_U/\ell = h_A/\ell, \ell_0/2\ell = 0,20, G_{12}/E_1 = 0,01$ iken farklı E_3/E_1 değerlerinde \tilde{q} 'in SIF'e etkisi.....	44
Tablo 3.13	$h/\ell = 0,20, E_3/E_1 = 0,5, h_U/\ell = h_A/\ell, \ell_0/2\ell = 0,20, G_{12}/E_1 = 0,01$ iken farklı E_2/E_1 değerlerinde \tilde{q} 'in SIF'e etkisi	44
Tablo 4.1	$h/\ell = 0,20$ ve $h'_A = h'/2$ iken farklı çatlak uzunluklarında (farklı $\ell_0/2\ell$) ön-çekme gerilmesinin $K_I/K_{I\infty}$ (SIF)'a etkisi	56
Tablo 4.2	$h/\ell = 0,15$ ve $h'_A = h'/2$ iken farklı çatlak uzunluklarında (farklı $\ell_0/2\ell$) ön-çekme gerilmesinin $K_I/K_{I\infty}$ (SIF)'a etkisi.....	56
Tablo 4.3	$h/\ell = 0,10$ ve $h'_A = h'/2$ iken farklı çatlak uzunluklarında (farklı $\ell_0/2\ell$) ön-çekme gerilmesinin $K_I/K_{I\infty}$ (SIF)'a etkisi.....	57
Tablo 4.4	$h/\ell = 0,20$ ve $h'_A \neq h'/2$ iken farklı çatlak uzunluklarında (farklı $\ell_0/2\ell$) ön-çekme gerilmesinin $\gamma\mu/K_{I\infty}^2$ 'a etkisi.....	57
Tablo 4.5	$h/\ell = 0,15$ ve $h'_A \neq h'/2$ iken farklı çatlak uzunluklarında (farklı $\ell_0/2\ell$) ön-çekme gerilmesinin $\gamma\mu/K_{I\infty}^2$ 'a etkisi.....	58

Tablo 4.6	$h/\ell = 0,10$ ve $h'_A \neq h'/2$ iken farklı çatlak uzunluklarında (farklı $\ell_0/2\ell$) önbasınç gerilmesinin $\gamma\mu/K_{I\infty}^2$ 'a etkisi.....	58
Tablo 4.7	$h/\ell = 0,20$ ve $h'_A = h'/2$ iken farklı çatlak uzunluklarında (farklı $\ell_0/2\ell$) önbasınç gerilmesinin $K_I/K_{I\infty}$ (SIF)'a etkisi.....	59
Tablo 4.8	$h/\ell = 0,15$ ve $h'_A = h'/2$ iken farklı çatlak uzunluklarında (farklı $\ell_0/2\ell$) önbasınç gerilmesinin $K_I/K_{I\infty}$ (SIF)'a etkisi.....	60
Tablo 4.9	$h/\ell = 0,10$ ve $h'_A = h'/2$ iken farklı çatlak uzunluklarında (farklı $\ell_0/2\ell$) önbasınç gerilmesinin $K_I/K_{I\infty}$ (SIF)'a etkisi.....	60
Tablo 4.10	$h/\ell = 0,20$ ve $h'_A \neq h'/2$ iken farklı çatlak uzunluklarında (farklı $\ell_0/2\ell$) önbasınç gerilmesinin $\gamma\mu/K_{I\infty}^2$ 'a etkisi.....	60
Tablo 4.11	$h/\ell = 0,15$ ve $h'_A \neq h'/2$ iken farklı çatlak uzunluklarında (farklı $\ell_0/2\ell$) önbasınç gerilmesinin $\gamma\mu/K_{I\infty}^2$ 'a etkisi.....	61
Tablo 4.12	$h/\ell = 0,10$ ve $h'_A \neq h'/2$ iken farklı çatlak uzunluklarında (farklı $\ell_0/2\ell$) önbasınç gerilmesinin $\gamma\mu/K_{I\infty}^2$ 'a etkisi.....	62

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında benden yardımlarını esirgemeyen değerli hocam ve danışmanım Doç. Dr. Nazmiye YAHNIOĞLU'na saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışmanın gerçekleşmesinde büyük emeği geçen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV'a çok teşekkür ederim.

Benden hiçbir zaman maddi ve manevi desteklerini eksik etmeyen, beni bu günlere getiren anneme ve babama ayrıca bu tezin tamamlanmasında desteğinden dolayı ağabeyime teşekkürü bir borç bilirim.

Arzu TURAN

Eylül 2005

ÖZET

Bu çalışmada, anizotrop şerit-levhadaki makro çatlak uçlarında oluşan kırılma parametrelerine öngerilmenin etkisi, farklı geometrik ve malzeme parametreleri için incelenmiştir. İncelemeler Üç Boyutlu Lineerize Edilmiş Elastisite Teorisi çerçevesinde düzlem şekil değiştirme durumunda yapılmıştır. Ele alınan sınır değer problemleri, sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla sayısal olarak çözülmüştür. Sonlu elemanlar yöntemi modellemesinde; çatlak ucu bölgesinde altı nodlu tekil üçgen sonlu elemanlar, geri kalan kısımda dokuz nodlu standart dikdörtgen sonlu elemanlar kullanılmıştır. Kırılma parametreleri, enerji yöntemi kullanılarak belirlenmiştir.

Tez'de, kırılma parametresi olarak gerilme şiddeti faktörü (K) ve enerji boşalma oranı (G) kullanılmıştır. Çatlak şerit-levhanın merkezinde konumlandığında gerilme şiddeti faktörü (K), bunun dışındaki konumları için enerji boşalma oranı (G) belirlenmiştir. Enine izotrop malzeme için gerilme şiddeti faktörü (K)'nin 1. ve 2. mod değerleri, ortotrop malzeme için ise 1. mod değerleri ele alınmıştır. Bu durumlarda, ön şekil değiştirmelerin küçük olduğu ve lineer elastisite teorisi çerçevesinde belirlenebileceği kabul edilmiştir. Ayrıca ön şekil değiştirmenin sonlu olduğu durumlarda, mekanik bağıntıları harmonik tipli potansiyelle verilen hiperelastik malzemeler göz önüne alınmıştır. Ele alınan problemlerde ön şekil değiştirme durumu, Guz (1991)'de verilen kabulleri sağlayacak şekilde seçilmiştir.

Çok sayıda yeni sayısal sonuçları elde etmek için gerekli algoritma ve programlar FTN77'de tarafımızdan yapılmıştır. Ön şekil değiştirmenin göz önüne alınmadığı özel durumlarda bu sonuçlar uygun bilinen sonuçlar ile uzlaşmaktadır.

Yapılan araştırmalar, pek çok özel durumda Kırılma Mekanikliği için ilk teşebbüsleri oluşturmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Gerilme şiddeti faktörü, çatlak, enerji boşalma oranı, öngerilme, tekil sonlu eleman, harmonik tipli potansiyel, sonlu elemanlar yöntemi.

ABSTRACT

In this study, the influence of the initial stress to the fracture parameters at a macro-crack tips in the anisotropic plate-strip is investigated for various regarding geometrical and mechanical parameters. The investigations are made within the framework of the Three-Dimensional Linearized Theory of Elasticity in the plane-strain state. Corresponding boundary value problems are solved numerically by employing FEM. Under FEM modeling the zone containing the crack tips the triangle singular with six-nodes are used; for the remaining zone of the strip the standard rectangular finite elements with nine-nodes are employed. The fracture parameters are determined by energy method.

In the thesis under fracture parameter the SIF- Stress Intensity Factor (K) as well as the ERR- Energy Release Rate (G) is understood. For the cases where the crack location in the strip is symmetric with respect to the strip center the SIF, but in the other cases the ERR is determined. Values of the 1-st and 2-nd modes of SIF are determined for the transversal isotropic material, but for the orthotropic material values of the 1-st mode of SIF are considered. In these cases it is assumed that the initial strains are small and can be determined in framework of linear theory of elasticity. The cases where the initial strains are finite ones are also considered for hyper elastic material the mechanical relations for which are given by harmonic type potential. The initial strain state in the considered problems is selected so that the suppositions described by Guz (1991) are satisfied.

The algorithm and programmes which are used for obtaining numerous new numerical results are composed by the author in FTN77. In particular cases, i.e. in the cases where the initial strains are absent, these results coincide with the corresponding well-known results.

The presented investigations are the first attempts for Fracture Mechanics in many particular cases.

Keywords: Stress Intensity Factor, crack, energy release rate, initial stress, singular finite element, harmonic type potential, finite elements method.

1. GİRİŞ

1.1 Tez Konusuna Ait Genel Bilgiler

Birçok kaynakta örneğin Vardar (1988), Parton (1992), vb.'de gösterildiği gibi, mühendislik yapılarının dizaynında göz önünde bulundurulması gereken önemli iki unsur vardır. Bunlardan birincisi muhtemel dış yükler etkisinde yapının keyfi noktasında gerilmenin (veya şekil değiştirmenin) doğrultusu ve büyüklüğünün bilinmesi, ikincisi; yapının her bir bileşeni için kullanılacak uygun malzeme ve buna ait kırılma kriterinin seçimidir. Yapı elemanının dizaynında yaygın şekilde kullanılan yaklaşımlar, uygulanan gerilmenin, belirli bir kritik değerden -örneğin, malzemenin akma gerilmesinin bir sabit (güvenlik katsayısı) ile çarpımından- küçük kalması doğrultusunda, yapı elemanlarının kesit alanlarının belirlemesine yöneliktirler. Bu yaklaşımlar, çeşitli geometrik ve malzeme süreksizlikleri, örneğin çatlak, yarık vb. gibi kusurları, içermeyen düşük ve orta mukavemetli cisimler için yeterlidir. Fakat malzemenin içerisinde kaçınılmaz olarak bulunabilen ve malzemenin mekaniğine etki gösteren kusurlara karşı özellikle hassas olan yüksek mukavemetli (gevrek) malzemeler için bu kriterler yeterli değildir.

Cisimlerdeki kırılmanın, bu cismin içerdiği çatlaklar nedeniyle olabileceği hipotezi 1920'li yıllarda Griffith tarafından öne sürülmüştür (Erdoğan, 2000). Griffith'e kadar cismin kırılması, mukavemet kriterlerine göre değerlendirilmekteydi. Griffith, elips formunda boşluk içeren yapı elemanlarına ait Inglis (1913)'in çözümlerinden yararlanarak, elips çatlığa dönüştürüldüğünde, çatlak uçlarında gerilmenin sonsuza gittiğini belirlemiştir. Gerilmenin sonlu bir yüklemde, yapıda çatlak olması durumunda, sonsuza gitmesi, mukavemet kriterlerine göre bir çelişki oluşturmakta idi. Bu sonuçları değerlendirerek Griffith, mukavemet kriterlerinin yapıda çatlak olması durumunda, kırılmayı belirlemede yeterli olamayacağını, dolayısıyla yeni mukavemet kriterlerinin geliştirilmesine ihtiyaç olduğunu ortaya atmış ve çalışmalarını bu doğrultuda sürdürmüştür. Griffith'in bu alandaki deneysel ve teorik çalışmaları ile elde ettiği sonuçlar, kendisinden sonraki araştırmacılara önemli katkılar sağlamış ve kırılma konusuna yeni bir bakış açısı kazandırmıştır (Griffith, 1921,1924).

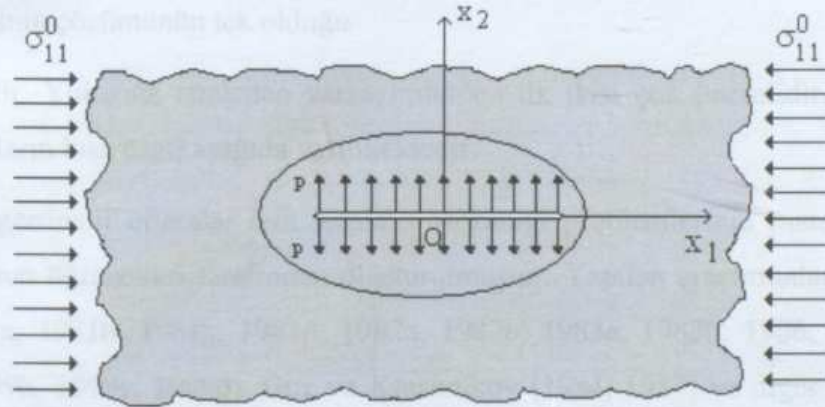
Griffith'in sonsuz izotrop ortamda bulunan çatlaklar için yapıdaki toplam elastik enerjiden yola çıkarak, çatlak ilerlemesi için verdiği kriter, kendisinden sonra Irwin (1957,1960,1962) tarafından, çatlak ucunda plastik bölgenin oluşumunun tespit edilmesi ile yeniden düzenlenmiştir. Ayrıca çatlak ucu bölgesinde gerilme ve yer değiştirme dağılımlarının farklı yüklemeler için Westergaard (1939) tarafından elde edilmesi, Irwin ve diğer pek çok araştırmacının çalışmalarına yol gösterici olmuştur. Kırılmaya ait araştırmalar sonraları, sonlu

ve anizotrop ortamlar için statik ve dinamik durumda çatlakların incelenmesi şeklinde çok yönlü olarak genişlemiştir. Bu çalışmalar neticesinde, bu hayli karmaşık olayı açıklayabilmek, kontrol altına alabilmek veya yönetebilmek amacına yönelik çok sayıda araştırma yapılmış ve yapılmaktadır. 1970'li yıllara kadar bulunan sonuçlara ait bilgiler 7 ciltlik "Fracture: An Advanced Treatise, Ed. H Liebowitz, 1968" kitaplarında verilmektedir. Daha sonraki araştırmaların sonuçlarını içeren bilgiler Cherepanov (1979), Kaninen ve Popelar (1985), Anderson (1991), Gdoutos (1993), Solecki ve Conant (2003) kaynaklarında verilmektedir.

Yukarıda verilen kaynakların incelenmesinden görüldüğü gibi, Kırılma Mekaniği problemleri Lineer Elastik Kırılma Mekaniği (LEKM) ve Lineer Olmayan Kırılma Mekaniği (LOKM) olmak üzere ikiye ayrılabilir. LEKM çerçevesindeki araştırmalar gevrek malzemeler örneğin, cam, seramik ve yüksek mukavemetli metaller vb. için geçerlidir ve bu durumda, kırılma tek bir parametre (örneğin *Gerilme şiddeti faktörü (Stress Intensity Factors-SIF)*) ile temsil edilebilir. LOKM sünek malzemeler örneğin, çimento tipli malzemeler, düşük mukavemetli metaller vb. için geçerlidir. Bu malzemelerin çatlak ucu bölgesinde plastik şekil değiştirme (malzeme özelliğinin non-lineer olması) meydana gelir. Bu bölgenin ihmal edilemeyecek büyüklükte olması durumunda, kırılmanın incelenmesinde LEKM yeterli olmaz ve Lineer Olmayan Kırılma Mekaniği kullanılır (Cotterell ve Mai, 1996). Günümüzde özellikle gevrek ve quasi-gevrek ortamlara ait Kırılma Mekaniği çok geliştirilmiş ve geliştirilmektedir. Fakat 80'li yıllara kadar çatlak içeren öngerilmeli ortamlar için hemen hemen hiçbir araştırma yapılmamıştır. Oysa öngerilme, birçok yapı elemanlarında göz ardı edilemeyecek boyutlarda olup, bu elemanların mekanik davranışlarına ve kırılmasına önemli etki göstermektedir.

Ele alınan tez, Lineer Kırılma Mekaniği çerçevesinde öngerilmeli malzemedan hazırlanmış makro çatlak içeren anizotrop yapı elemanının kırılmasını temsil eden kırılma parametrelerine (gerilme şiddeti faktörü (K) veya enerji boşalma oranı (energy release rate-G)), çeşitli geometrik ve malzeme parametreleri ile öngerilmenin etkisinin incelenmesine aittir. Ele alınan yapı elemanın boyutları, Ox_3 doğrultusunda sonsuz, diğer iki eksen doğrultusunda sonlu olarak kabul edilmiştir (şerit-levha). Yapı elemanındaki öngerilmenin; ilave yükleme yapılmadan önce, levhanın karşılıklı iki kenarından, çatlak kenarlarına paralel olacak şekilde etkiyen, düzgün yayılı yük etkisinde olduğu kabul edilecektir. Çatlak ucunda gerilme birikimini oluşturan ilave yükleme ise, çatlak yüzeyine normal veya teğet doğrultuda etkiyen iki ayrı yükleme olarak göz önüne alınacaktır. Her bir ilave yükleme durumu için incelemeler ayrı ayrı yapılacaktır. Yapı elemanında öngerilme olmadığı durumda, ele alınan sınır değer problemlerinin matematiksel modeli Lineer Elastisite Teorisi çerçevesinde yapılmıştır. Ancak,

sonlu/sonsuz elastik ortamda, çatlak boyunca etki gösteren σ_{11}^0 öngerilmesinin (Şekil 1.1), çatlağın kenarlarına etki eden şiddeti p olan ilave yüklemeye sonucunda çatlak civarında oluşan gerilme ve yer değiştirme durumuna katkısı, süperpozisyon ilkesinin geçerli olmadığı durumlar için, Lineer Elastisite Teorisi çerçevesinde göz önüne alınamamaktadır. σ_{11}^0 gerilmelerinden dolayı, Şekil 1.1'de gösterilen çatlak civarında hiçbir gerilme birikimi oluşmaz. Ancak, uygulamada σ_{11}^0 öngerilmesinin çatlak civarındaki yer değiştirme ve gerilme dağılımına etkisinin olduğu kuşkusuzdur. Söz konusu etkinin göz önüne alınması, daha gelişmiş matematiksel model olan Lineerize Edilmiş (Doğrusallaştırılmış) Elastisite Teorisi çerçevesinde mümkündür. Dolayısıyla tez çerçevesinde ele alınan sınır değer problemleri yapı elemanında öngerilme olmadığı durumda Lineer Elastisite Teorisi çerçevesinde, öngerilme olduğu durumda Lineerize Edilmiş Elastisite Teorisi çerçevesinde matematiksel olarak modellenmiştir. Sonraki kısımda, bu modellemenin gerektirdiği koşullar ve bu alanda yapılan araştırmaların kısa özeti verilecektir. Ele alınan tez, incelenen problemlerin matematiksel modelinin oluşturulması, çözümü ve çözümünde kullanılan yöntemin geliştirilmesi açısından bu alandaki ilk teşebbüsleri oluşturmaktadır.



Şekil 1.1 Öngerilmenin ve çatlak kenarlarındaki ek yüklemenin şematik gösterimi

1.2 Tez Konusuna Ait Araştırmaların Kısa Özeti

Gevrek malzemelerin kırılması veya çatlak ilerlemesi problemleri bütünüyle kırılma parametrelerinin belirlenmesine dayanır. Pek çok kitapta kapalı formda verilen kırılma parametrelerinin ifadeleri, sayısal çözüm yöntemleri yardımıyla iki veya üç boyutlu gerçek problemlere uygulanabilmiştir (Chen ve Hasebe, 1988; Tan ve Gao, 1990; Wang, 1996; Gosz vd., 1998; Guangwei vd., 1998; Wang ve Chen, 1998; Chau ve Wang, 1999; Gorbatiikh ve Kachanov, 2000; Thomas vd., 2000; Guz ve Guz, 2003; Tsang vd., 2003; Guz, 2004; Okado vd., 2005 ve diğerleri). Literatürdeki çalışmaların hemen hemen hepsi Lineer Elastisite

Teorisi çerçevesinde, sayısal yöntemlerin Kırılma Mekaniği problemlerine uygulanabilmesi tekniklerinin geliştirilmesi veya çeşitli malzeme veya geometrik süreksizlikler ile çatlaklar arasındaki etkileşimlerin kırılma parametrelerine etkisinin belirlenmesi şeklinde verilebilir.

Literatürde öngerilmeli yapı elemanlarında kırılma parametrelerinin belirlenmesine ait çok az çalışma mevcuttur. Bu alandaki Kırılma Mekaniği problemleri, çatlak içeren gevrek ortamlar için Lineerize Edilmiş Elastisite Teorisinden yararlanılarak aşağıdaki varsayımlar çerçevesinde yapılmıştır.

1. Öngerilme olması durumunda çatlak içeren cismin çatlağın olduğu düzlemde ve buna paralel düzlemlerde hiçbir gerilme oluşmayacak biçimde yüklendiği,
2. Söz konusu cisimde ilave yükmeden (öngerilmeyi oluşturan yüklemeye nazaran ek yükmeden) ortaya çıkan gerilme ve yer değiştirmelerin, öngerilme ve ön yer değiştirmelerden çok çok küçük olduğu, örneğin Şekil 1.1'de verilen durum göz önüne alınırsa bu koşulun $p \ll \sigma_{11}^0$ şeklinde olduğu,
3. Ele alınan cisimde öngerilmenin çatlağın yakın civarında homojen yayıldığı,
4. Yukarıdaki varsayımlar çerçevesinde yapılan matematiksel modellemeye karşı gelen sınır değer probleminin çözümünün tek olduğu

kabul edilmektedir. Yukarıda sıralanan varsayımlardan ilk ikisi çok önemlidir. Bu konuda yapılan araştırmaların kısa özeti aşağıda verilmektedir.

Çatlak içeren öngerilmeli ortamlar için Kırılma Mekaniği problemlerinin matematiksel alt yapısı Guz ve onun öğrencileri tarafından oluşturulmuştur. Yapılan araştırmaların sonuçları Guz (1980, 1981a, 1981b, 1981c, 1981d, 1982a, 1982b, 1983a, 1983b, 1986, 1992, 1996, 1998, 1999a, 1999b, 1999c, 1999d), Guz ve Klushnikov (1984, 1987) ve diğer makalelerde verilmektedir. Bu araştırmaların geniş biçimde açıklaması Guz (1991) kitabında yer almaktadır. Guz (2000) makalesinde söz konusu araştırmaların özeti yapılmıştır. Yukarıda bahsedilen makale ve kitaplarda elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

- a) Öngerilmeli malzemeler için Lineer Elastik Kırılma Mekaniği'nin iki ve üç boyutlu uygun problemlerinin matematiksel formülasyonu, çözüm yöntemleri ve öngerilmelerin etkisini göz önüne alabilen kırılma kriterlerinin geliştirilmesini içeren temelleri oluşturulmuştur.
- b) Araştırmalar, Üç Boyutlu Lineerize Edilmiş Elastisite Teorisi çerçevesinde düzlem problemleri için kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisi, üç boyutlu problemler için ise potansiyeller teorisi kullanılarak yapılmıştır.

- c) Çok sayıda iki ve üç boyutlu statik ve dinamik test problemleri çözülmüştür.
- d) Statik ve dinamik yükleme altında öngerilmeli kırılma parametrelerine etkileri incelenmiştir.
- e) Bulunan sonuçlarda, öngerilmeler ihmal edildiğinde uygun klasik sonuçlar elde edilmiştir.

Bütün bu araştırmalar mikro çatlak içeren cisimler yani, çatlağın olduğu ortamın geometrik boyutları, çatlak boyutuna göre sonsuz kabul edilen cisimler için yapılmıştır. Nitelik açısından yeni olan ve uygun iki boyutlu problemler için elde edilen en önemli sonuçlar aşağıda verilmektedir:

I. Eğer çatlak kenarlarında yer değiştirmeleri kısıtlayan sınır koşulu verilmemişse yani sadece kuvvetlere göre sınır koşulu varsa o zaman çatlak boyunca etki eden öngerilme, gerilme şiddeti faktörünün değerine hiçbir etki göstermez; bu durumda öngerilme sadece çatlak kenarlarındaki yer değiştirmelere ve gerilmelere etki eder.

II. Çatlak boyunca etki eden ön-basınç gerilmesinin değeri, malzemesi çatlak içeren cismin malzemesinden olan yarı düzlemin yüzeysel stabilite kaybına karşı gelen basınç gerilmesine yaklaştıkça çatlak civarındaki gerilme ve yer değiştirmeler mutlak değerce hızlı bir biçimde büyür yani, "rezonans" tipli bir olay meydana gelir.

Yukarıda yapılan özetlemeden ve diğer literatür araştırmalarından görüldüğü gibi bu tezde yapılan araştırmalara kadar, makro çatlak içeren öngerilmeli cisimler (yani, çatlak içeren cismin geometrik boyutları çatlak uzunluğu ile aynı mertebede olduğu durumlar) için yukarıda sıralanan 1-4 koşulları çerçevesinde hiç bir araştırma yapılmamıştır.

Bilindiği üzere plak, şerit, kabuk vb. yapı elemanlarında çeşitli nedenlerle makro çatlaklar oluşabilmektedir. Bu tür çatlakların, yukarıda sıralanan 1-4 koşullarını sağlayan öngerilmeli yapı elemanının mekanik davranışlarına ve kırılmasına etkisinin incelenmesi, teorik ve uygulama açısından çok önem taşımaktadır. Yapılan literatür araştırmalarından da görüldüğü gibi bu tür incelemeler şimdiye kadar yapılmamıştır. Dolayısıyla, tezde yapılan araştırmalar öngerilmeli yapı elemanlarının Kırılma Mekanikğinde ilk teşebbüsleri oluşturmaktadır.

1.3 Konunun Gerekliği ve Güncelliği

Tezde yapılan çalışmaların konusu; öngerilmeli anizotrop şerit-levha biçiminde olan yapı elemanlarının içerdiği makro çatlağın uç noktalarında, çeşitli dış yüklemeler etkisinde oluşan kırılma parametrelerine, geometrik ve malzeme parametreleri ile çatlak boyunca tesir eden öngerilmeli etkisinin teorik incelenmesidir. Konu, hem makro çatlak içeren anizotrop yapı elemanlarında kırılma parametrelerinin belirlenmesi hem yapıda öngerilmeli ele

alınabilmesi ile öngerilmeli kırılma parametrelerine etkisinin belirlenmesi hem de sayısal incelemelerde kullanılan sonlu elemanlar yöntemi'nin geliştirilmesi açısından çok gerekli ve günceldir.

Tez konusu, mühendislik uygulamalarında kullanılan mevcut kırılma ile ilgili standartların geliştirilmesi açısından da önemlidir. Çünkü, bu standartlar basit durumlar için elde edilmiş ve farklı durumlara uygulanabilmesi için pek çok düzeltme katsayısına ihtiyaç duyulmakta ve ampirik ifadeler içermektedir. Uygulamada kullanılan bu standartların daha gerçekçi temellere dayandırılması, bu konuda teorik çalışmaların geliştirilmesine bağlıdır. Ayrıca kırılma konusundaki bilgi birikiminin yeni malzemelerin (örneğin, "Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme (Functionally Graded Materials)") geliştirilmesinde araştırmacılara yol gösterici olması, bu konudaki araştırmaların önemini gösteren diğer bir etmendir.

Kırılma olayı; çatlak uzunluğuna, yapının geometrisine, malzeme özelliklerine, ortam etkileri ve yükleme tipine bağlı olan çok karmaşık bir olaydır. Kırılma olayını açıklamaya yönelik pek çok hipotez öne sürülmüştür. Fakat bunlar yinede kırılma olayının nedeni ve mekanizmasını tam olarak açıklayamamaktadır. Bu hipotezlerin teorik açıdan incelenmesi ve geliştirilmesi dolayısıyla, malzemelerin mukavemetinin yeterli ve daha gerçekçi belirlenebilmesi için çok gereklidir. Bu açıdan da tezde yapılan araştırmalar, Kırılma Mekanikliği alanındaki incelemelerin sürekliliği ve güvenilirliğinin sağlanmasına katkıda bulunmaktadır.

Sonuç olarak, tezde yapılan araştırmalar, Kırılma Mekanikliği çerçevesinde öngerilmeli anizotrop şerit-levhada kırılma parametrelerinin belirlenmesinde ilk teşebbüsleri oluşturması ve yukarıda verilen pek çok nedenden dolayı gerekli ve günceldir.

1.4 Yapılan Araştırmanın Amaçları

Bu çalışmada yapılan araştırmaların amaçları aşağıda özetlenmiştir:

1. Çatlak içeren kenarlarından basit mesnetli öngerilmeli sonlu anizotrop şerit-levhanın Lineer Elastik Kırılma Mekanikliği ve Lineerize Edilmiş Elastisite Teorisi çerçevelerinde, düzlem şekil değiştirme durumunda kırılma parametrelerinin belirlenmesine yönelik matematiksel modelin ve bu modele ait formülasyonun belirlenmesi,
2. Kırılma parametrelerinin belirlenebilmesi için, farklı dış kuvvetler altında ele alınan enine izotrop ve ortotrop öngerilmeli şerit-levhada oluşan yer değiştirme yayılımının

2. belirlenmesine yönelik sonlu eleman modellemesi, algoritma ve programların oluşturulması,
3. Sonlu elemanlar yöntemi modellemesinde çatlak ucu civarında, gerilmelerin $1/\sqrt{r}$ tekilliğine sahip olabilmesi için tekil üçgen sonlu elemanların geliştirilmesi,
4. Ele alınan anizotrop şerit-levhada gerilme şiddeti faktörü, enerji boşalma oranının belirlenebilmesine ait formülasyon, algoritma ve programların yazılması,
5. Gerilme şiddeti faktörü I. ve II. temel modlarının belirlenebilmesi için matematiksel model, algoritma ve programların oluşturulması,
6. Çatlak içeren öngerilmeli sonlu anizotrop şerit-levhada, dış yükler etkisinde çatlak ucunda oluşan I. ve II. mod gerilme şiddeti faktörü değerlerine öngerilmelinin etkisini gösteren sayısal sonuçların elde edilmesi ve yorumlanması,
7. Büyük şekil değiştirme yapabilen öngerilmeli izotrop şerit-levhanın kırılma parametrelerinin belirlenebilmesi için matematiksel formülasyon, sonlu eleman modeli, algoritma ve programların oluşturulması ve elde edilen sayısal sonuçların açıklanması olarak verilebilir.

2.1 Öngerilmeli Olmazlığı Durumu

2.1.1 Problemin Matematiksel Formülasyonu

Öngerilmeli olmazlığı durumunda, ele alınan problemler dördüncü derejeli diferansiyel denklemlerle matematiksel olarak ifade edilebilir. Şekil 2.1a'da, çatlaklı üst ve alt yüzeylerin yerel koordinatlarında çatlak ucu ve çatlak sırtına zayıflayan dördüncü derece kuvvetli (Problem 1; Şekil 2.1b) de ise, çatlaklı üst ve alt yüzeylerin çatlak doğrusundan farklı olarak dördüncü derece kuvvetli (Problem 2) çatlaklı şerit-levha yapılmaktadır. Şerit-levha $0 \leq x \leq L$ ve $0 \leq y \leq h$ koordinat alanı ve şerit-levhanın geometrik boyutları Şekil 2.1a ve Şekil 2.1b'ye gösterilmiştir gibi olabilir. Belirtilen ki, $x_1 = -L/2$ ye göre problemi simetrik görülmektedir. Şekil 2.1a ve Şekil 2.1b' de şerit-levhanın $0 \leq x \leq L$ ve $0 \leq y \leq h$ bölgesini kapsayan kısımlı gösterilmiştir. ($h = h_1 + h_2$)

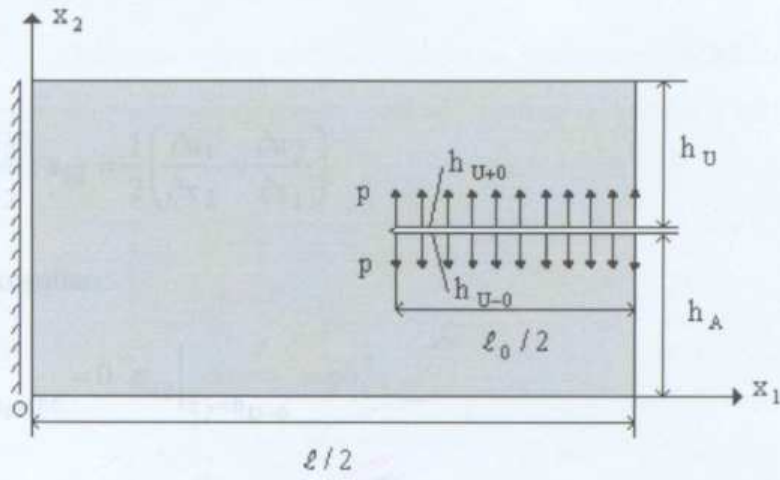
2. ÇATLAK İÇEREN ÖNGERİLMELİ ŞERİT-LEVHADA KIRILMA PARAMETRELERİNİN BELİRLENMESİ

Bu bölümde incelenen problemler, düzlem şekil değiştirme durumunda karşılıklı iki kenarına düzgün yayılı ön-çekme veya ön-basınç kuvveti etki eden ve $x_1 = \ell/2$ 'ye göre simetrik bir çatlak içeren şerit-levhaya aittirler (Şekil 2.1a veya Şekil 2.1b). Şerit-levhanın; kenarlarından çatlak doğrultusunda yerdeğiştirme yapabilecek ve çatlığa dik doğrultuda yerdeğiştirme yapamayacak şekilde mesnetlendiği, daha sonra çatlığın alt ve üst yüzeylerine ilave normal veya teğet doğrultuda düzgün yayılı yüklerin etki ettiği farzedilmektedir. Ön şekil değiştirmelerin çok çok küçük olduğu kabul edilerek öngerilmeler Klasik Lineer Elastisite Teorisi çerçevesinde, çatlak kenarlarına etki eden yüklemekten dolayı oluşan gerilme -şekil değiştirme durumu aynı zamanda çatlak uçlarında oluşan gerilme şiddeti faktörü ve enerji boşalma oranı ise Üç Boyutlu Lineerize Edilmiş Elastisite Teorisi çerçevesinde belirlenmektedir. Yukarıda söylenenleri göz önüne alarak tezin bu bölümünde, öngerilme olduğu ve öngerilme olmadığı durumlarda problemin formülasyonu, sonlu eleman modellemesi ve kırılma parametrelerinin belirlenmesi ele alınmaktadır. Ele alınan problemlerin formülasyonlarının oluşturulması ve incelenmesi, ilk kez tarafımızdan yapılmaktadır.

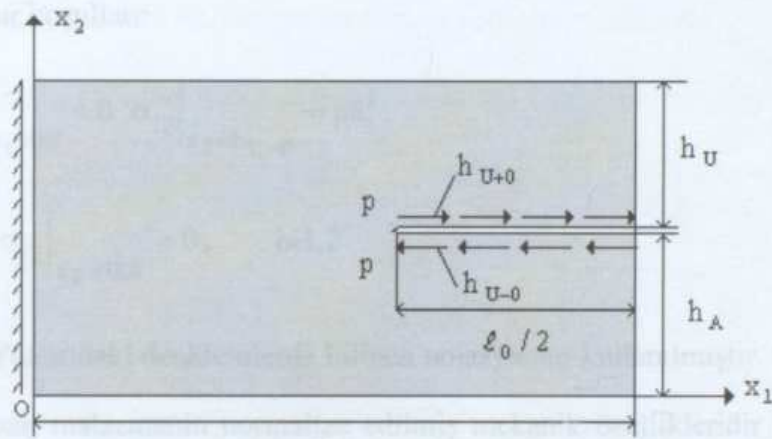
2.1 Öngerilme Olmadığı Durum

2.1.1 Problemin Matematiksel Formülasyonu

Öngerilme olmadığı durumda, ele alınan problemler düzlem şekil değiştirme durumunda, aşağıdaki şekilde matematiksel olarak ifade edilebilir. Şekil 2.1a'da, çatlığın üst ve alt yüzeylerine normal doğrultuda etki eden ve çatlığı açılmaya zorlayan düzgün yayılı p kuvveti (Problem 1); Şekil 2.1b'de ise, çatlığın üst ve alt yüzeylerine çatlak doğrultusunda etki eden düzgün yayılı p kuvveti (Problem 2) etkisindeki anizotrop şerit-levha verilmektedir. Şerit-levhaya bağlı Ox_1x_2 koordinat takımı ve şerit-levhanın geometrik boyutlarının Şekil 2.1a ve Şekil 2.1b'de gösterildiği gibi olduğu kabul edilsin. Belirtelim ki, $x_1 = \ell/2$ 'ye göre problem simetrisi göz önüne alınarak, Şekil 2.1a ve Şekil 2.1b 'de şerit-levhanın $\Omega = \{0 \leq x_1 \leq \ell/2, 0 \leq x_2 \leq h\}$ bölgesini kapsayan kısmı gösterilmiştir. ($h = h_A + h_U$)

 $l/2$

(a)

 $l/2$

(b)

Şekil 2.1 a) Problem 1, b) Problem 2 durumunda ele alınan şerit-levhanın geometrisi ve yükleme durumu

Şerit-levhanın kapsadığı tüm bölgede geçerli olan denge denklemleri:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2 \quad (2.1)$$

bünye denklemleri:

$$\sigma_{11} = A_{11}\epsilon_{11} + A_{12}\epsilon_{22}; \quad (2.2)$$

$$\sigma_{22} = A_{12}\epsilon_{11} + A_{22}\epsilon_{22};$$

$$\sigma_{12} = 2A_{66}\epsilon_{12}$$

geometrik bağıntılar:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (2.3)$$

Problem 1 için sınır koşulları:

$$\begin{aligned} u_2 \Big|_{x_1=0;\ell} &= 0, \quad \sigma_{1i} \Big|_{x_1=0;\ell} = 0, \quad \sigma_{i2} \Big|_{x_2=h_{U-0}} = p\delta_i^2, \\ \sigma_{i2} \Big|_{x_2=h_{U+0}} &= -p\delta_i^2, \quad \sigma_{i2} \Big|_{x_2=0;h} = 0, \quad i=1,2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

ve Problem 2 için sınır koşulları:

$$\begin{aligned} u_2 \Big|_{x_1=0;\ell} &= 0, \quad \sigma_{1i} \Big|_{x_1=0;\ell} = 0, \quad \sigma_{i2} \Big|_{x_2=h_{U-0}} = p\delta_i^1, \\ \sigma_{i2} \Big|_{x_2=h_{U+0}} &= -p\delta_i^1, \quad \sigma_{i2} \Big|_{x_2=0;h} = 0, \quad i=1,2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

şeklinde verilebilir. Yukarıdaki denklemlerde bilinen notasyonlar kullanılmıştır. (2.2) 'de A_{ij} 'ler çok katlı kompozit malzemenin normalize edilmiş mekanik özellikleridir (Akbarov ve Guz, 2000). Ayrıca $\delta_i^j = \delta_{ij}$ Kronecker sembolü, x_i 'ler Lagrange koordinatlarıdır. Böylece ele alınan sınır değer problemlerinin matematiksel formülasyonu Problem 1 için (2.1)-(2.4), Problem 2 için (2.1)-(2.3), (2.5) denklemleriyle ifade edilmektedir.

2.1.2 Problemin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Modellenmesi

Tez kapsamında yerdeğiştirme esaslı sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Sonlu eleman modellemesi için çözüm bölgesinde toplam potansiyel enerjiyi ifade eden fonksiyonel

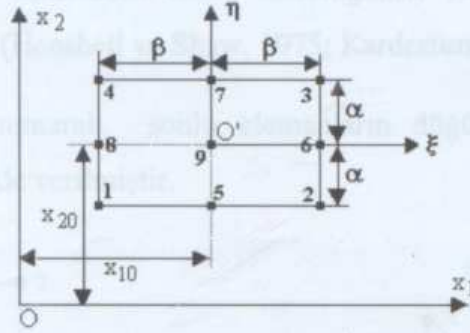
$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_{\Omega'} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega' - \int_{L^+} p_i u_i dS + \int_{L^-} p_i u_i dS \quad (2.6)$$

kullanılacaktır. (2.6)'da, $\Omega' = \Omega - (L^+ \cup L^-)$, $\Omega = \{0 < x_2 < h; 0 < x_1 < \ell\}$,

$L^\pm = \{\ell - \ell_0)/2 < x_1 < (\ell + \ell_0)/2; x_2 = h_{U\pm 0}\}$ dir. Ω' çözüm bölgesi (Şekil 2.1a veya b)

sonlu M adet Ω_k sonlu elemanına ayrıştırılır (burada $\Omega' = \bigcup_{k=1}^M \Omega_k$ dir). Geometriye uygun

olarak çatlak ucunu içeren bölgede üçgen sonlu elemanlar ve bunun haricindeki bölgelerde dikdörtgen şeklinde sonlu elemanlar seçilmiştir. Normalize edilmiş koordinat takımında dikdörtgen sonlu eleman ve düğüm noktaları Şekil 2.2'de verilmiştir.



Şekil 2.2 Sonlu eleman geometrisi ve nodlarının konumu

Seçilen düğüm noktası (nod) 'ndaki ikinci dereceden standart Lagrange şekil fonksiyonları:

$$N_1 = \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta); N_2 = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta); N_3 = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta);$$

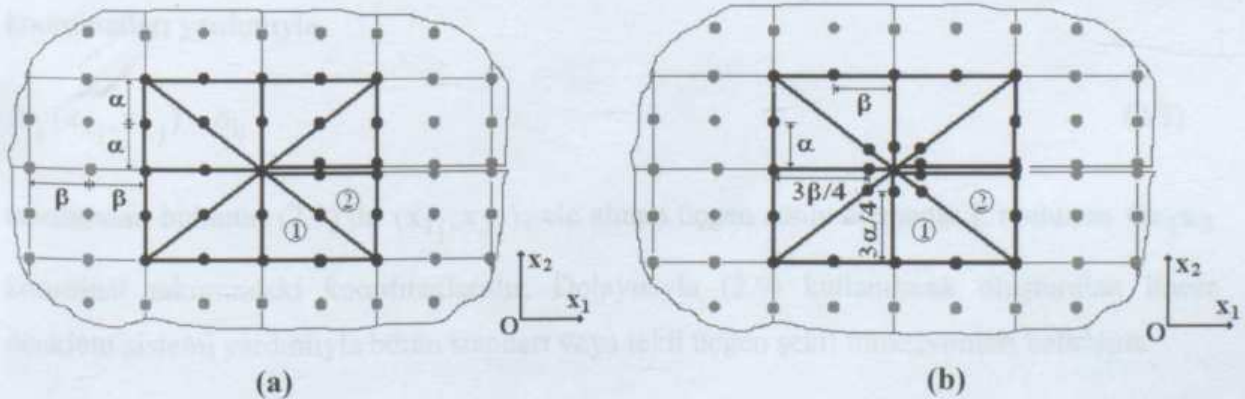
$$N_4 = \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta); N_5 = \frac{1}{4}(\xi^2 - 1)(\eta^2 - \eta); N_6 = -\frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - 1);$$

$$N_7 = -\frac{1}{2}(\xi^2 - 1)(\eta^2 + \eta); N_8 = -\frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - 1); N_9 = (\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1) \quad (2.7)$$

olur (Zienkiewicz ve Taylor, 1989, 1991). Burada Ox_1x_2 global koordinat takımı ile $O'\xi\eta$

yerel koordinat takımı arasındaki dönüşüm $\xi = \frac{x_1 - x_{10}}{\beta}$ ve $\eta = \frac{x_2 - x_{20}}{\alpha}$ ilişkisi ile

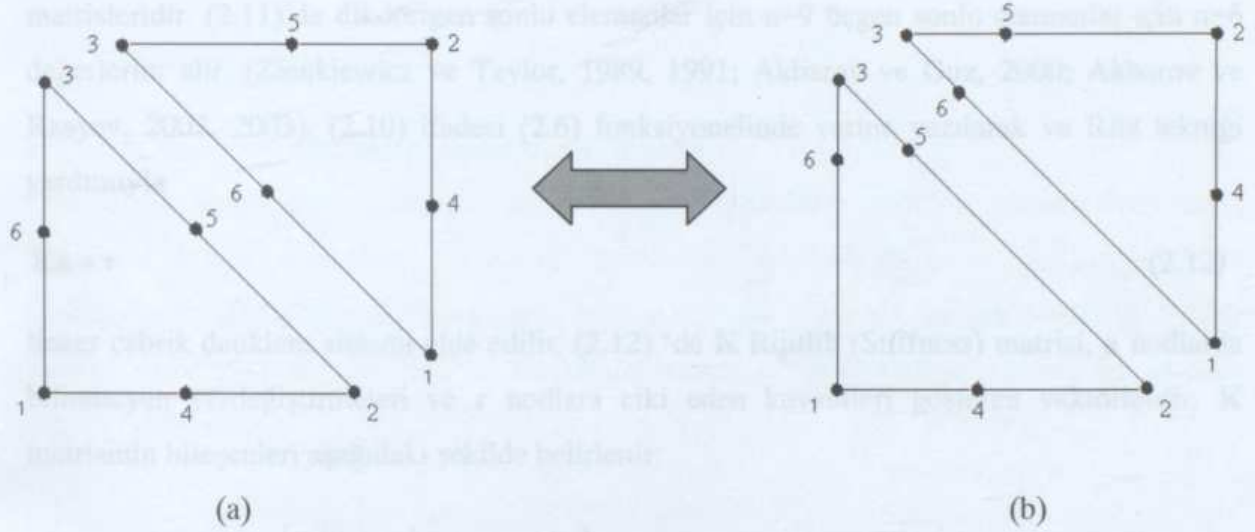
sağlanmaktadır.



Şekil 2.3 Çatlak ucunda a) standart, b) tekil sonlu eleman ağı

Çatlak ucunu içeren bölgenin ayrıklaştırılmasında standart üçgen sonlu elemanlar (Şekil 2.3a) ile tekil üçgen sonlu elemanların (Şekil 2.3b) her ikisi de kullanılmış olup buna ait sonlu eleman ağı Şekil 2.3'de gösterilmektedir. Tekil sonlu elemanlar, çatlak ucuna yakın olan nodlar buldukları standart konumdan kenar uzunluğunun $1/4$ 'ü oranında çatlak ucuna yaklaştırılarak elde edilmiştir (Henshell ve Shaw, 1975; Kardestuncer ve Norrie, 1987).

Çatlak ucunda ① ve ② numaralı sonlu elemanların düğüm noktalarının (nodların) numaralandırılması Şekil 2.4 de verilmiştir.



Şekil 2.4 Çatlak ucunda a) standart, b) tekil üçgen sonlu elemanların nodlarının konumu

Üçgen sonlu elemanların nodlarında tanımlı şekil fonksiyonlarının genel koordinatlardaki ifadesi

$$N_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y + d_i x^2 + e_i xy + f_i y^2 \quad (2.8)$$

dir. (2.8)'deki bilinmeyen katsayılar her sonlu elemandaki nodlar için bu nodların koordinatları yardımıyla,

$$N_i(x_{1j}, x_{2j}) = \delta_{ij} \quad (2.9)$$

tanımından bulunur. (2.9)'da (x_{1j}, x_{2j}) , ele alınan üçgen sonlu elemanın j . nodunun Ox_1x_2 koordinat takımındaki koordinatlarıdır. Dolayısıyla (2.9) kullanılarak oluşturulan lineer denklem sistemi yardımıyla bütün standart veya tekil üçgen şekil fonksiyonları belirlenir.

Her bir sonlu elemanda aranan yerdeğiştirme fonksiyonu, yöntem gereği polinom şeklinde kabul edilir. Yani,

$$\mathbf{u}^k \approx \mathbf{N}^k \mathbf{a}^k, \quad k=1,2,\dots,M \quad (2.10)$$

burada,

$$\left(\mathbf{a}^k \right)^T = \left\{ u_{11}^k, u_{21}^k, u_{12}^k, u_{22}^k, \dots, u_{1n-1}^k, u_{2n-1}^k, u_{1n}^k, u_{2n}^k \right\} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{N}^k = \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_1^k & 0 & \dots & \mathbf{N}_n^k & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_1^k & \dots & 0 & \mathbf{N}_n^k \end{Bmatrix}$$

matrisleridir. (2.11)'de dikdörtgen sonlu elemanlar için $n=9$ üçgen sonlu elemanlar için $n=6$ değerlerini alır. (Zienkiewicz ve Taylor, 1989, 1991; Akbarov ve Guz, 2000; Akbarov ve Rzayev, 2002, 2003). (2.10) ifadesi (2.6) fonksiyonelinde yerine yazılarak ve Ritz tekniği yardımıyla

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{r} \quad (2.12)$$

lineer cebrik denklem sistemi elde edilir. (2.12) 'de \mathbf{K} Rijitlik (Stiffness) matrisi, \mathbf{a} nodlarda bilinmeyen yerdeğiştirmeleri ve \mathbf{r} nodlara etki eden kuvvetleri gösteren vektörlerdir. \mathbf{K} matrisinin bileşenleri aşağıdaki şekilde belirlenir:

$$\mathbf{K} = \sum_{k=1}^M \mathbf{K}^k, \quad \mathbf{K}^k = \begin{Bmatrix} K_{11}^k & K_{12}^k & \dots & K_{1n}^k \\ K_{21}^k & K_{22}^k & \dots & K_{2n}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1}^k & K_{n2}^k & \dots & K_{nn}^k \end{Bmatrix}; \quad K_{ij}^k = \iint_{\Omega_k} (\mathbf{B}_j^k)^T \mathbf{D}^k \mathbf{B}_i^k d\Omega_k, \quad \begin{matrix} i, j = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, M \end{matrix}$$

$$\mathbf{D}^k = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2A_{66} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_i^k = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i^k}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i^k}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_i^k}{\partial x_2} & \frac{\partial N_i^k}{\partial x_1} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

dır. \mathbf{D} matrisinin bileşenleri olan A_{ij} değerleri çok katlı kompozit malzemeye ait normalize edilmiş elastik sabitlerdir.

(2.12) denkleminin çözülmesi sonucunda her bir düğüm noktasında aranan yerdeğiştirmeler bulunur. Bu değerler yardımıyla (2.2) ve (2.3) denklemleri kullanılarak her bir düğüm noktasında gerilme değerleri

$$\sigma = DBa \quad (2.14)$$

formülünden belirlenir. Burada,

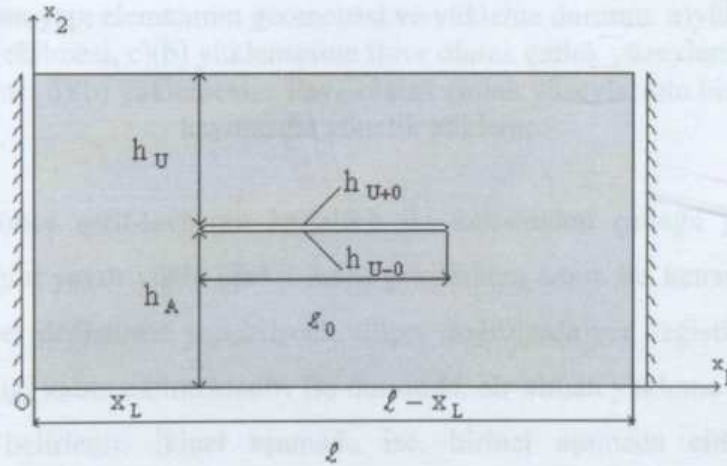
$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

dir.

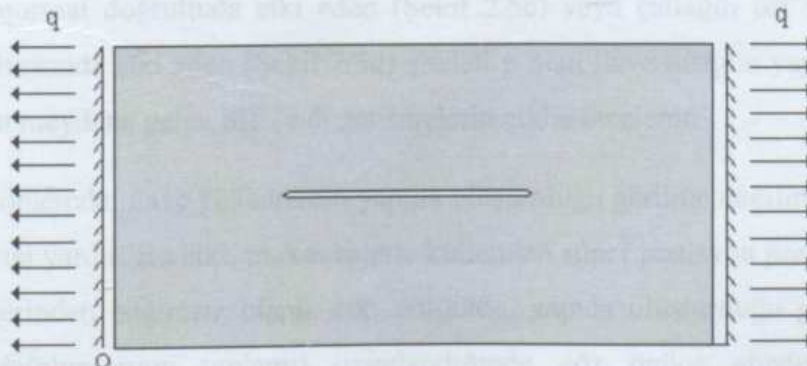
2.2 Öngerilme Olduğu Durum

2.2.1 Ele Alınan Problemin Matematiksel Modeli

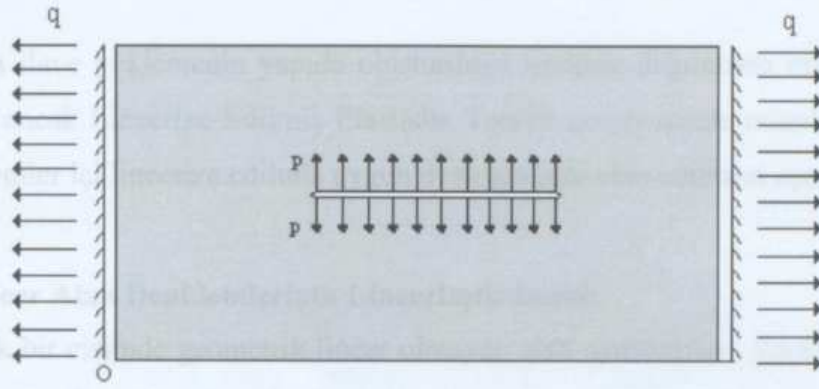
Burada ele alınan cismin öngerilmeli anizotrop malzemeden yapılmış olması durumunda Kısım 2.1'de verilen problemler tekrar ele alınacaktır. Şerit-levhanın geometrisi Şekil 2.5a'da verilmektedir. Problemin çözüm bölgesi olan geometrik bölge Ω ile işaret edilsin. Çatlak içeren öngerilmeli şerit-levhaya ait ele alınan problemin matematiksel modeli iki aşamalı olarak verilecektir.



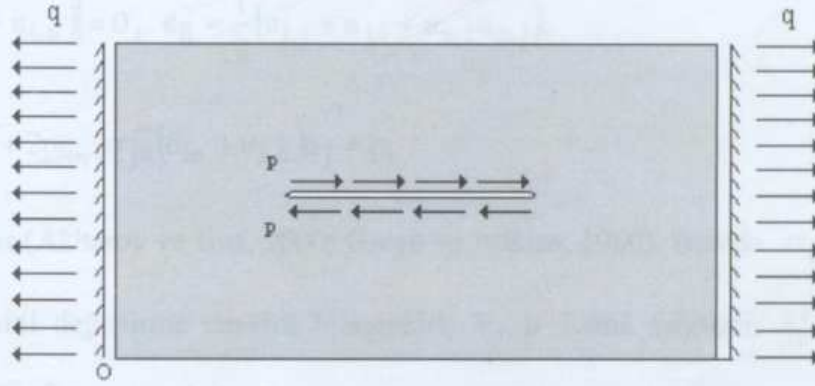
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 2.5 Ele alınan yapı elemanının geometrisi ve yükleme durumu: a) yüksüz, b) karşılıklı kenarlarından çekilmesi, c) (b) yüklemesine ilave olarak çatlak yüzeylerinin açılmasına yönelik yükleme, d) (b) yüklemesine ilave olarak çatlak yüzeylerinin birbirine paralel kaymasına yönelik yükleme

Birinci aşamada, önce şerit-levhanın karşılıklı iki kenarından çatlakla paralel doğrultuda şiddeti q olan düzgün yayılı yük (Şekil 2.5b) çekildikten sonra bu kenarlardaki noktaların yatay doğrultuda yer değiştirme yapabilecek, düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde mesnetlendiği kabul edilmektedir. Bu durumda, ele alınan yükleme için yapıda oluşan gerilme yayılımı belirlenir. İkinci aşamada ise, birinci aşamada elde edilen gerilme (öngerilme) değerlerinin de işlemlere dahil edildiği formülasyonda, çatlakın üst ve alt yüzeylerine normal doğrultuda etki eden (Şekil 2.5c) veya çatlakın üst ve alt yüzeylerine çatlak doğrultusunda etki eden (Şekil 2.5d) şiddeti p olan ilave düzgün yayılı yük nedeniyle, çatlak ucunda meydana gelen SIF 'e öngerilmelerin etkisi incelenir.

Ele alınan problemde, ilave yüklemenin yapıda oluşturduğu gerilme dağılımına, öngerilmenin doğrudan etkisi vardır. Bu etki, mukavemette kullanılan süper pozisyon prensibi (yani, her bir yükleme diğerinden bağımsız olarak etki ettiğinde, yapıda oluşturduğu gerilme veya şekil değiştirme dağılımlarının toplamı) uygulandığında göz önüne alınamaz. Bu nedenle

öngerilmenin ilave yüklemenin yapıda oluşturduğu gerilme dağılımına etkisinin göz önüne alınabilmesi ancak Lineerize Edilmiş Elastisite Teorisi çerçevesinde mümkündür. Tezde ele alınan problemler için lineerize edilmiş uygun denklemlerin elde edilmesi aşağıda verilmiştir.

2.2.2 Nonlinear Alan Denklemlerinin Lineerleştirilmesi:

Lineer elastik bir cisimde geometrik lineer olmayan alan denklemleri, küçük şekil değiştirme halinde izotrop ve homojen ortamlar için;

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{jn} (\delta_i^n + u_{i,n}) \right] = 0, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{n,i} u_{n,j}),$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \sigma_{jn} (\delta_{in} + u_{i,n}) n_j = p_i \quad (2.16)$$

şeklinde yazılır (Akbarov ve Guz, 2000; Green ve Adkins, 1960). Burada σ_{ij} ve ε_{ij} , sırasıyla gerilme ve şekil değiştirme tansörü bileşenleri; λ , μ Lamé sabitleri; $\delta_i^j = \delta_{ij}$ Kronecker

sembölü $(\cdot)_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\cdot)$ ve x_i 'ler Lagrange koordinatlarıdır. (2.16) eşitliklerinde

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(0)}, \quad \varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(0)}, \quad u'_i = u_i^{(1)} + u_i^{(0)} \quad (2.17)$$

yazılarak, $p \ll q$ olduğuna göre (Kısım 1.2),

$$\sigma_{ij}^{(1)} \ll \sigma_{ij}^{(0)}, \quad \varepsilon_{ij}^{(1)} \ll \varepsilon_{ij}^{(0)}, \quad u_i^{(1)} \ll u_i^{(0)} \quad (2.18)$$

eşitsizliklerinin sağlandığı kabul edilecektir. $\sigma_{ij}^{(0)}$, $\varepsilon_{ij}^{(0)}$, $u_i^{(0)}$ büyüklükleri için klasik lineer

elastisite teorisinin alan denklemlerinin sağlandığı kabul edilecektir. Burada $\sigma_{ij}^{(1)}$, $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ ve $u_i^{(1)}$ 'ler çatlak yüzeylerindeki şiddeti p olan düzgün yayılı yüklemekten dolayı yapıda oluşan

gerilme, şekil değiştirme tansörü ile yerdeğiştirme vektörü bileşenleridir. $\sigma_{ij}^{(0)}$, $\varepsilon_{ij}^{(0)}$ ve $u_i^{(0)}$

'ler ise, şerit-levha kenarlarından çatlak doğrultusunda düzgün yayılı q yükü ile çekildiğinde ve bu kenarlarından düşey doğrultuda yerdeğiştirme yapamayacak şekilde tutturulduğunda yapıda oluşan gerilme, şekil değiştirme tansörü ile yerdeğiştirme vektörü bileşenlerini göstermektedir. (2.17) eşitliği (2.16)'da kullanılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\sigma_{jn}^{(1)} + \sigma_{jn}^{(0)} \right) \left(\delta_i^n + u_{i,n}^{(1)} + u_{i,n}^{(0)} \right) \right] = 0 \quad (2.19)$$

bulunur. (2.18) kabulleri ve $u_{i,n}^{(0)} \ll 1$, $\delta_{in} + u_{i,n}^{(0)} \approx \delta_{in}$ eşitsizlikleri (2.19)'da göz önüne alınırsa,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{jn}^{(0)} \left(\delta_i^n + u_{i,n}^{(0)} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{jn}^{(1)} \delta_i^n + \sigma_{jn}^{(1)} u_{i,n}^{(1)} + \sigma_{jn}^{(1)} u_{i,n}^{(0)} + \sigma_{jn}^{(0)} u_{i,n}^{(1)} \right) = 0 \quad (2.20)$$

eşitliği ve $\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{jn}^{(0)} \left(\delta_i^n + u_{i,n}^{(0)} \right) \right] \approx \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} = 0$ olduğu göz önüne alınırsa, (2.20) den,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{jn}^{(1)} u_{i,n}^{(1)} + \sigma_{jn}^{(1)} u_{i,n}^{(0)} + \sigma_{jn}^{(0)} u_{i,n}^{(1)} \right) = 0 \quad (2.21)$$

eşitliği elde edilir. Burada, diğerlerine göre bir merteye küçük $(\sigma_{jn}^{(1)} u_{i,n}^{(1)})$ terimler ihmal edilirse,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{jn}^{(1)} \left(\delta_i^n + u_{i,n}^{(0)} \right) + \sigma_{jn}^{(0)} u_{i,n}^{(1)} \right) = 0 \quad (2.22)$$

bulunur ve incelenen durumda $\delta_{in} + u_{i,n}^{(0)} \approx \delta_{in}$ olduğu için,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ji}^{(1)} + \sigma_{jn}^{(0)} u_{i,n}^{(1)} \right) = 0 \quad (2.23)$$

eşitliği elde edilir. (2.16)'nın ikinci eşitliğinde (2.17) yardımıyla,

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(u_{i,j}^{(1)} + u_{j,i}^{(1)} \right) \quad (2.24)$$

ile verilen lineerleştirilmiş geometrik ilgiler ve

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \lambda \varepsilon_{kk}^{(1)} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^{(1)} \quad (2.25)$$

ile verilen Hooke kanunları yazılabilir. Burada, basitlik için izotrop ortamlara ait olan Hooke kanunu verilmiştir. Ancak söylenenler anizotrop ortamlar için de aynen geçerlidir. Şimdi ele alınan problemin birinci aşamadaki (bu aşamaya ait büyüklükler üst indis (0) ile işaret edilsin)

ve ikinci aşamadaki (bu aşamaya ait büyüklükler üst (1) indisi ile işaret edilsin) alan denklemleri ve sınır koşullarını ayrı ayrı ele alalım.

1. aşama; Bu aşamada, şerit-levhanın $x_1 = 0; \ell$ sınırlarına çatlak doğrultusunda uygulanan çekme kuvvetinin yapıda oluşturduğu gerilme yayılımının, çatlak olması veya olmaması durumlarında aynı olduğu göz önüne alınarak, yapıdaki öngerilmelerin yayılımı çatlak olmadığı durumda elde edilmiştir. Buna göre öngerilmelerin belirlenmesinde kullanılan alan denklemleri ve sınır koşulları (Şekil 2.5b) aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} = 0, \quad \sigma_{11}^{(0)} = A_{11}\varepsilon_{11}^{(0)} + A_{12}\varepsilon_{22}^{(0)}, \quad \sigma_{22}^{(0)} = A_{12}\varepsilon_{11}^{(0)} + A_{22}\varepsilon_{22}^{(0)},$$

$$\sigma_{12}^{(0)} = 2A_{66}\varepsilon_{12}^{(0)}, \quad \varepsilon_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i} \right), \quad (2.25)$$

$$\sigma_{11}^{(0)} \Big|_{x_1=0} = \sigma_{11}^{(0)} \Big|_{x_1=\ell} = q, \quad \sigma_{i2}^{(0)} \Big|_{\substack{x_2=0;h \\ x_1 \in (0,\ell)}} = 0, \quad u_2^{(0)} \Big|_{x_1=0;\ell} = 0, \quad i,j=1,2 \quad (2.26)$$

Burada $h = h_A + h_U$ dur.

2.aşama; Bu aşamada ele alınan problemlerin matematiksel formülasyonu aşağıda verilmiştir:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{ji}^{(1)} + \sigma_{in}^{(0)} u_{i,n} \right] = 0,$$

$$\sigma_{11}^{(1)} = A_{11}\varepsilon_{11}^{(1)} + A_{12}\varepsilon_{22}^{(1)}, \quad \sigma_{22}^{(1)} = A_{12}\varepsilon_{11}^{(1)} + A_{22}\varepsilon_{22}^{(1)}, \quad \sigma_{12}^{(1)} = 2A_{66}\varepsilon_{12}^{(1)},$$

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i} \right), \quad u_2^{(1)} \Big|_{x_1=0;\ell} = 0, \quad \sigma_{ii}^{(1)} \Big|_{x_1=0;\ell} = 0, \quad \sigma_{i2}^{(1)} \Big|_{\substack{x_2=0;h \\ x_1 \in (0,\ell)}} = 0 \quad (2.27)$$

Problem 1 için;

$$\sigma_{i2}^{(1)} \Big|_{\substack{x_2=h \\ x_1 \in ((\ell-\ell_0)/2, (\ell+\ell_0)/2)}} = \pm p \delta_i^2, \quad (2.28)$$

Problem 2 için;

$$\sigma_{i2}^{(1)} \Big|_{\substack{x_2 = h_{U \pm 0} \\ x_1 \in ((\ell - \ell_0)/2, (\ell + \ell_0)/2)}} = \pm p \delta_i^1 \quad (2.29)$$

dır. (2.27)'nin ilk denkleminde verilen $\sigma_{in}^{(0)}$ 'lar 1.aşamada ele alınan yükleme durumunda yapıda oluşan öngerilmelerdir. Yukarıda matematiksel formülasyonu verilen problemlerin çözümü için kullanılan sonlu elemanlar ile modelleme sonraki kısımda ele alınacaktır.

2.2.3 Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Modelleme

1.aşama: (2.26) ile verilen problemin sonlu eleman formülasyonu, ele alınan çözüm bölgesinde toplam potansiyel enerjiyi ifade eden

$$\Pi_0 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega'} \sigma_{ij}^{(0)} \varepsilon_{ij}^{(0)} dx_1 dx_2 - \int_0^h qu_i \Big|_{x_1=0} dx_2 + \int_0^h qu_i \Big|_{x_1=\ell} dx_2 \quad (2.30)$$

fonksiyoneli yardımıyla ve Ritz tekniği kullanılarak Kısım 2.1.2'de verildiği şekilde yapılacaktır.

2. aşama: (2.27)'de verilen denklemlerde basitlik açısından bazı tanımlar kabul edilmiştir.

Bunlar,

$$T_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \sigma_{12}^{(0)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} = \omega_{1111} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \omega_{1122} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{1112} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2}; \quad (2.34)$$

$$T_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(1)} + \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \sigma_{12}^{(0)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} = \omega_{1212} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{1222} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{1221} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1};$$

$$T_{21}^{(1)} = \sigma_{21}^{(1)} + \sigma_{21}^{(0)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \sigma_{22}^{(0)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} = \omega_{2112} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{2121} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \omega_{2111} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1};$$

$$T_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(1)} + \sigma_{21}^{(0)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \sigma_{22}^{(0)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} = \omega_{2211} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \omega_{2222} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{2221} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} \quad (2.31)$$

olsun. (2.31)'de,

$$\omega_{1111} = A_{11} + \sigma_{11}^{(0)}, \quad \omega_{1122} = A_{12}, \quad \omega_{1112} = \sigma_{12}^{(0)}, \quad \omega_{1212} = A_{66},$$

$$\omega_{1222} = \sigma_{12}^{(0)}, \quad \omega_{1221} = A_{66} + \sigma_{11}^{(0)}, \quad \omega_{2112} = A_{66} + \sigma_{22}^{(0)}, \quad \omega_{2121} = A_{66},$$

$$\omega_{2111} = \sigma_{12}^{(0)}, \omega_{2211} = A_{12}, \omega_{2222} = A_{22} + \sigma_{22}^{(0)}, \omega_{2221} = \sigma_{12}^{(0)} \quad (2.32)$$

dir. (2.30)'da $\sigma_{ij}^{(0)}$ 'lar 1.aşamada bulunan öngerilme değerleridir. Yeni tanımlara göre (2.27) denge denklemleri ve sınır koşulları,

$$\frac{\partial T_{11}^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}^{(1)}}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial T_{12}^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}^{(1)}}{\partial x_2} = 0;$$

$$u_2|_{x_1=0;\ell} = 0; \quad T_{li}^{(1)}|_{x_1=0;\ell} = 0;$$

$$T_{2i}^{(1)}|_{x_2=0;h} = 0;$$

$$T_{2i}^{(1)}|_{\substack{x_2=h_{U\pm 0} \\ x_1 \in \left[\frac{(\ell-\ell_0)}{2}, \frac{(\ell+\ell_0)}{2} \right]}} = -p\delta_i^2, \quad i=1,2 \quad (2.33)$$

olur. (2.33) sınır değer probleminin sonlu eleman formülasyonu için,

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \int_{\Omega'} T_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_1 dx_2 - \int_{L^+} p u_2|_{L^+} dx_1 + \int_{L^-} p u_2|_{L^-} dx_1 \quad (2.34)$$

fonksiyoneli kullanılacaktır. Burada

$$T_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{in}^{(0)} \frac{\partial u_j}{\partial x_n} = \omega_{ijnm} \frac{\partial u_n}{\partial x_m};$$

$$\Omega = \{0 < x_1 < \ell; 0 < x_2 < h\}, \quad i, j, n, m=1,2;$$

$$\Omega' = \Omega - (L^+ \cup L^-); \quad (2.35)$$

$$L^\pm = \{(\ell - \ell_0)/2 < x_1 < (\ell + \ell_0)/2; x_2 = h_{U\pm 0}\}$$

dır. Bu fonksiyonelin birinci varyasyonelinin sıfıra eşitliğinden (2.33) (veya (2.27))'de verilen denge denklemleri ve gerilmelere göre sınır koşulları elde edilmektedir. Buna göre,

$$\delta \Pi_1 = \frac{1}{2} \delta \iint_{\Omega'} \left(T_{11}^{(1)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + T_{12}^{(1)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + T_{21}^{(1)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + T_{22}^{(1)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 - \int_{L^+} p \delta u_2 \Big|_{L^+} dx_1 + \int_{L^-} p \delta u_2 \Big|_{L^-} dx_1 = 0 \quad (2.36)$$

alınır. (2.36)'daki katlı integral için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \iint_{\Omega'} \left(T_{11}^{(1)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + T_{12}^{(1)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + T_{21}^{(1)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + T_{22}^{(1)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \\ & \frac{1}{2} \iint_{\Omega'} \left[\omega_{1111} \left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \right)^2 + \omega_{1122} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{1112} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \omega_{1212} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \right. \\ & \omega_{1222} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \omega_{1221} \left(\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} \right)^2 + \omega_{2112} \left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} \right)^2 + \omega_{2121} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \\ & \left. \omega_{2111} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{2211} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{2222} \left(\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right)^2 + \omega_{2221} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right] dx_1 dx_2 \quad (2.37) \end{aligned}$$

yazılabilir. (2.37) 'nin varyasyoneli,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \delta \iint_{\Omega'} (\cdot) dx_1 dx_2 = \frac{1}{2} \delta \iint_{\Omega'} \left(T_{11}^{(1)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + T_{12}^{(1)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + T_{21}^{(1)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + T_{22}^{(1)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \\ & \iint_{\Omega'} \left[\omega_{1111} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \omega_{2111} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \omega_{1122} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \omega_{1112} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \omega_{2211} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right] \delta \left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \right) + \\ & \left[\omega_{2222} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \omega_{2221} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \omega_{2211} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \omega_{1222} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \omega_{1122} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \right] \delta \left(\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right) + \\ & \left[\frac{1}{2} \omega_{1112} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \omega_{1212} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \omega_{2112} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \omega_{2121} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \omega_{2111} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \right] \delta \left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} \right) + \end{aligned}$$

$$\left[\frac{1}{2} \omega_{1212} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{1221} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \omega_{1222} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \omega_{2121} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \omega_{2221} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right] \delta \left(\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} \right) \Bigg\} dx_1 dx_2 \quad (2.38)$$

olur. (2.38)'de,

$$\omega_{ijnm} = \omega_{mnji} \quad (2.39)$$

olduğu göz önüne alınarak (Guz, 2000), (2.38) ifadesi düzenlenirse:

$$\frac{1}{2} \delta \iint_{\Omega'} (\cdot) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega'} \left\{ \left[\omega_{1111} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \omega_{1112} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{1122} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right] \delta \left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \right) + \right.$$

$$\left[\omega_{2222} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{2221} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \omega_{2211} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \right] \delta \left(\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right) +$$

$$\left[\omega_{2111} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \omega_{2121} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \omega_{2112} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} \right] \delta \left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} \right) +$$

$$\left. \left[\omega_{1212} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{1221} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \omega_{1222} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right] \delta \left(\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} \right) \right\} dx_1 dx_2 =$$

$$\iint_{\Omega'} \left(T_{11}^{(1)} \delta \left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \right) + T_{12}^{(1)} \delta \left(\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} \right) + T_{21}^{(1)} \delta \left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} \right) + T_{22}^{(1)} \delta \left(\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right) \right) dx_1 dx_2 =$$

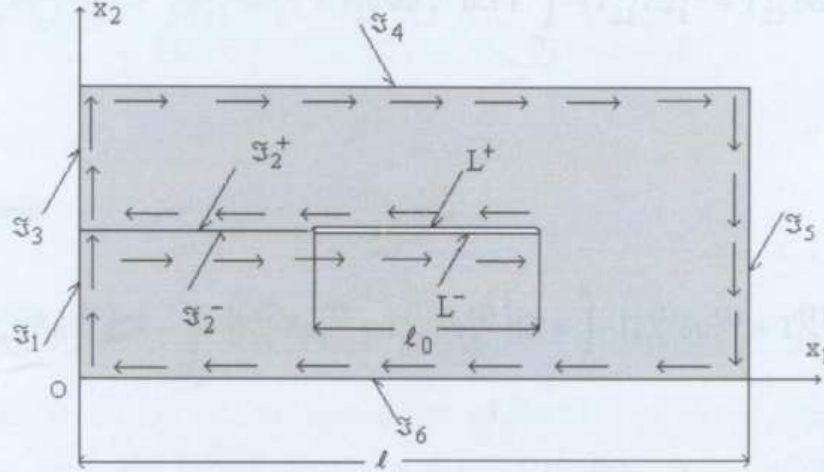
$$\iint_{\Omega'} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(T_{11}^{(1)} \delta u_1^{(1)} \right) - \frac{\partial T_{11}^{(1)}}{\partial x_1} \delta u_1^{(1)} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(T_{22}^{(1)} \delta u_2^{(1)} \right) - \frac{\partial T_{22}^{(1)}}{\partial x_2} \delta u_2^{(1)} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(T_{21}^{(1)} \delta u_1^{(1)} \right) - \right.$$

$$\left. \frac{\partial T_{21}^{(1)}}{\partial x_2} \delta u_1^{(1)} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(T_{12}^{(1)} \delta u_2^{(1)} \right) - \frac{\partial T_{12}^{(1)}}{\partial x_1} \delta u_2^{(1)} \right] dx_1 dx_2 =$$

$$\iint_{\Omega'} \left[- \left(\frac{\partial T_{11}^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}^{(1)}}{\partial x_2} \right) \delta u_1^{(1)} - \left(\frac{\partial T_{12}^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}^{(1)}}{\partial x_2} \right) \delta u_2^{(1)} \right] dx_1 dx_2 + \iint_{\Omega'} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(T_{11}^{(1)} \delta u_1 + T_{12}^{(1)} \delta u_2 \right) + \right.$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(T_{22}^{(1)} \delta u_2^{(1)} + T_{21}^{(1)} \delta u_1^{(1)} \right) dx_1 dx_2 \quad (2.40)$$

olur.



Şekil 2.6 Ele alınan çözüm bölgesinin basit bağımlı bölgeye dönüştürülmesi

(2.40) ifadesinde altı çizili integrale Gauss integral formülünü uygulanabilmesi için çatlak içeren şerit-levhanın kapsadığı bölge Şekil 2.6'da gösterildiği gibi basit bağımlı bölgeye dönüştürülür. (2.40)'da altı çizili terim için,

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(T_{11}^{(1)} \delta u_1 + T_{12}^{(1)} \delta u_2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(T_{22}^{(1)} \delta u_2 + T_{21}^{(1)} \delta u_1 \right) \right] dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\mathfrak{S}} \left[\left(T_{11}^{(1)} \delta u_1 + T_{12}^{(1)} \delta u_2 \right) n_1 + \left(T_{21}^{(1)} \delta u_1 + T_{22}^{(1)} \delta u_2 \right) n_2 \right] d\mathfrak{S} \end{aligned} \quad (2.41)$$

(2.41)'de,

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2^- \cup L^- \cup L^+ \cup \mathfrak{S}_2^+ \cup \mathfrak{S}_3 \cup \mathfrak{S}_4 \cup \mathfrak{S}_5 \cup \mathfrak{S}_6 \quad (2.42)$$

dir. (2.41)'de n_1 ve n_2 , \mathfrak{S} sınırının dış birim normal vektörünün bileşenleridir. Şekil 2.6'dan \mathfrak{S}_1 ve \mathfrak{S}_3 için $n_1 = -1$, $n_2 = 0$; \mathfrak{S}_5 için $n_1 = 1$, $n_2 = 0$; \mathfrak{S}_4 için $n_1 = 0$, $n_2 = 1$ \mathfrak{S}_6 için $n_1 = 0$, $n_2 = -1$; L^+ ve \mathfrak{S}_2^+ için $n_1 = 0$, $n_2 = -1$; L^- ve \mathfrak{S}_2^- için $n_1 = 0$, $n_2 = 1$ dir. (2.41) yeniden ele alınırsa,

$$\int_{\mathfrak{S}_1} \left(T_{11}^{(1)} \delta u_1 + T_{12}^{(1)} \delta u_2 \right) d\mathfrak{S} + \int_{\mathfrak{S}_2^-} \left(T_{21}^{(1)} \delta u_1 + T_{22}^{(1)} \delta u_2 \right) d\mathfrak{S} + \int_{L^-} \left(T_{21}^{(1)} \delta u_1 + T_{22}^{(1)} \delta u_2 \right) d\mathfrak{S} +$$

$$\begin{aligned}
& \int_{L^+} -\left(T_{21}^{(1)}\delta u_1^{(1)} + T_{22}^{(1)}\delta u_2^{(1)}\right)d\mathfrak{I} + \int_{\mathfrak{I}_2^+} -\left(T_{21}^{(1)}\delta u_1^{(1)} + T_{22}^{(1)}\delta u_2^{(1)}\right)d\mathfrak{I} + \int_{\mathfrak{I}_3} -\left(T_{11}^{(1)}\delta u_1^{(1)} + T_{12}^{(1)}\delta u_2^{(1)}\right)d\mathfrak{I} + \\
& \int_{\mathfrak{I}_4} \left(T_{21}^{(1)}\delta u_1^{(1)} + T_{22}^{(1)}\delta u_2^{(1)}\right)d\mathfrak{I} + \int_{\mathfrak{I}_5} \left(T_{11}^{(1)}\delta u_1^{(1)} + T_{12}^{(1)}\delta u_2^{(1)}\right)d\mathfrak{I} + \int_{\mathfrak{I}_6} -\left(T_{21}^{(1)}\delta u_1^{(1)} + T_{22}^{(1)}\delta u_2^{(1)}\right)d\mathfrak{I}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

dır. (2.43) eşitliğinde,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathfrak{I}_1} -\left(T_{11}^{(1)}\delta u_1^{(1)} + T_{12}^{(1)}\delta u_2^{(1)}\right)d\mathfrak{I} + \int_{\mathfrak{I}_3} -\left(T_{11}^{(1)}\delta u_1^{(1)} + T_{12}^{(1)}\delta u_2^{(1)}\right)d\mathfrak{I} = \int_0^h -\left(T_{11}^{(1)}\delta u_1^{(1)} + T_{12}^{(1)}\delta u_2^{(1)}\right)\Big|_{x_1=0} dx_2 \\
& \int_{\mathfrak{I}_2^-} \left(T_{21}^{(1)}\delta u_1^{(1)} + T_{22}^{(1)}\delta u_2^{(1)}\right)d\mathfrak{I} - \int_{\mathfrak{I}_2^+} \left(T_{21}^{(1)}\delta u_1^{(1)} + T_{22}^{(1)}\delta u_2^{(1)}\right)d\mathfrak{I} = 0; \\
& \int_{L^-} \left(T_{21}^{(1)}\delta u_1^{(1)} + T_{22}^{(1)}\delta u_2^{(1)}\right)d\mathfrak{I} = \int_{\ell/2-\ell_0/2}^{\ell/2+\ell_0/2} \left(T_{21}^{(1)}\delta u_1^{(1)} + T_{22}^{(1)}\delta u_2^{(1)}\right)\Big|_{x_2=h_{U-0}} dx_1; \\
& \int_{L^+} -\left(T_{21}^{(1)}\delta u_1^{(1)} + T_{22}^{(1)}\delta u_2^{(1)}\right)d\mathfrak{I} = - \int_{\ell/2+\ell_0/2}^{\ell/2-\ell_0/2} \left(T_{21}^{(1)}\delta u_1^{(1)} + T_{22}^{(1)}\delta u_2^{(1)}\right)\Big|_{x_2=h_{U+0}} dx_1; \\
& \int_{\mathfrak{I}_4} \left(T_{21}^{(1)}\delta u_1^{(1)} + T_{22}^{(1)}\delta u_2^{(1)}\right)d\mathfrak{I} = \int_0^\ell \left(T_{21}^{(1)}\delta u_1^{(1)} + T_{22}^{(1)}\delta u_2^{(1)}\right)\Big|_{x_2=h} dx_1; \\
& \int_{\mathfrak{I}_5} \left(T_{11}^{(1)}\delta u_1^{(1)} + T_{12}^{(1)}\delta u_2^{(1)}\right)d\mathfrak{I} = \int_0^h \left(T_{11}^{(1)}\delta u_1^{(1)} + T_{12}^{(1)}\delta u_2^{(1)}\right)\Big|_{x_1=\ell} dx_2; \\
& \int_{\mathfrak{I}_6} -\left(T_{21}^{(1)}\delta u_1^{(1)} + T_{22}^{(1)}\delta u_2^{(1)}\right)d\mathfrak{I} = \int_0^\ell -\left(T_{21}^{(1)}\delta u_1^{(1)} + T_{22}^{(1)}\delta u_2^{(1)}\right)\Big|_{x_2=0} dx_1
\end{aligned} \tag{2.44}$$

dır. (2.44) ifadeleri (2.43) eşitliğinde yerine yazılıp (2.33) sınır koşulları ve $\delta u_2^{(1)}\Big|_{x_1=0;\ell} = 0$

olduğu göz önüne alınırsa (2.36) ifadesi,

$$\delta\Pi_1 = \iint_{\Omega'} \left[- \left(\frac{\partial T_{11}^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}^{(1)}}{\partial x_2} \right) \delta u_1^{(1)} - \left(\frac{\partial T_{12}^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}^{(1)}}{\partial x_2} \right) \delta u_2^{(1)} \right] dx_1 dx_2 + \int_0^h T_{11}^{(1)} \delta u_1^{(1)} \Big|_{x_1=0} dx_2 +$$

dir. Burada T_{ij} ve $u_i^{(k)}$ (2.35) de verildiği gibidir. ℓ_0 çatlak uzunluğudur. Problem 1 ve

$$\int_0^h T_{11}^{(1)} \delta u_1^{(1)} \Big|_{x_1=\ell} dx_2 + \int_{\ell/2-\ell_0/2}^{\ell/2+\ell_0/2} \left((T_{22}^{(1)} + p) \delta u_2^{(1)} + T_{21}^{(1)} \delta u_1^{(1)} \right) \Big|_{x_2=h_{U-0}} dx_1 +$$

$$\int_{\ell/2-\ell_0/2}^{\ell/2+\ell_0/2} \left(-(T_{22}^{(1)} + p) \delta u_2^{(1)} - T_{21}^{(1)} \delta u_1^{(1)} \right) \Big|_{x_2=h_{U+0}} dx_1 = 0 \quad (2.45)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak $\delta u_i^{(1)}$ 'ler keyfi olduğundan, bu büyüklüklerin katsayılarının sıfıra eşitliğinden, (2.33) 'de verilen sınır değer problemine ait denge denklemleri ve gerilmelere göre sınır koşulları elde edilir. Sonlu eleman formülasyonunda kullanılan Rijitlik matrisinin elemanları için formül (2.13)'de verilen $K_{ij}^{(k)}$ matrisinin elemanlarının ifadesi:

$$K_{ij}^{(k)}(1,1) = \omega_{1111} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \omega_{1112} \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \omega_{2112} \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} + \omega_{2111} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \frac{\partial N_i}{\partial x_2},$$

$$K_{ij}^{(k)}(1,2) = \omega_{1122} \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \omega_{2121} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \frac{\partial N_i}{\partial x_2},$$

$$K_{ij}^{(k)}(2,1) = \omega_{2211} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} + \omega_{1212} \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \frac{\partial N_i}{\partial x_1},$$

$$K_{ij}^{(k)}(2,2) = \omega_{2222} \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} + \omega_{2221} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} + \omega_{1221} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} + \omega_{1222} \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \frac{\partial N_i}{\partial x_2},$$

$$i, j, k=1,2 \quad (2.46)$$

olarak bulunur.

2.3 Kırılma Parametrelerinin Bulunması

Bu kısımda ele alınan şerit-levhanın malzemesinin öngerilmeli anizotrop olduğu durumda, kırılma parametrelerinin (K veya G) bulunmasında kullanılacak bazı formüller verilecektir. Şekil 2.1a (veya şekil 2.1b)'de gösterildiği gibi yapısında makro çatlak bulunan öngerilmeli anizotrop şerit-levhanın, çatlağın kenarlarına etkiyen normal doğrultuda (veya çatlağa paralel doğrultuda) düzgün yayılı kuvvet etkisinde oluşan yüzey enerjisi,

$$U(\ell_0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega'} T_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_1 dx_2 \quad (2.47)$$

dir. Burada T_{ij} ve Ω' , (2.35)'de verildiği gibidir. ℓ_0 çatlak uzunluğudur. Problem 1 ve Problem 2 için çatlak ucunda oluşan gerilme şiddeti faktörü K_I ve K_{II} ;

$$K_I^2 (\gamma_2^{(1)} \mu_2 \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_2^{(2)} \mu_1 \gamma_{21}^{(1)}) = -2i \frac{\partial U}{\partial \ell_0} (\mu_2 \gamma_{21}^{(2)} - \mu_1 \gamma_{21}^{(1)}), \quad i = \sqrt{-1} \quad (2.48)$$

$$K_{II}^2 (\gamma_1^{(1)} - \gamma_1^{(2)}) = -2i \frac{\partial U}{\partial \ell_0} (\mu_2 \gamma_{21}^{(2)} - \mu_1 \gamma_{21}^{(1)}) \quad (2.49)$$

formülleriyle belirlenir (Guz, 1991). (2.48) ve (2.49)'de $\frac{\partial U}{\partial \ell_0}$, enerji boşalma oranı diğer bir deyişle G parametresi ve diğer işaretlemeler Ek 3'de (E3.5)'de verildiği gibidir.

3. SAYISAL SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRİLMESİ

Bu bölümde, Bölüm 2’de ele alınan problemlerin tarafımızdan yapılan algoritma ve programlar yardımıyla elde edilen sayısal sonuçları verilmektedir. Bu sayısal sonuçlar yapı elemanının enine izotrop veya ortotrop olması durumuna göre iki başlık altında toplanmıştır. Her iki durumda da asal gerilme şiddeti faktörleri K_I, K_{II} ve enerji boşalma oranı G ’ye problem parametrelerinin (öngerilme, geometrik ve malzeme özellikleri vb.) etkisini gösteren çok sayıda sayısal sonuç aşağıda tablo ve grafik olarak verilmiştir.

3.1 Enine İzotrop Şerit-Levha

Bu kısımda ele alınan şerit-levhanın malzemesinin, $x_2 = 0$ düzlemine paralel olacak şekilde yerleştirilen ve birbirini tekrarlayan farklı iki izotrop levhadan oluşan kompozit malzeme olduğu kabul edilecektir. Belirtelim ki, tez kapsamında aksi belirtilmediği sürece kompozit malzemenin bileşenlerinden güçlendirici levhaya ait büyüklükler alt indis “2”, matris malzemesine ait büyüklükler alt indis “1” ile gösterilecektir. Buna göre matris (güçlendirici) malzemesine ait elastik sabitler: E_1 (E_2) Young modülü; ν_1 (ν_2) Poisson sabiti; λ_1 (λ_2) Lamé sabiti ve μ_1 (μ_2) kayma modülü olsun. Dolayısıyla, ele alınan çok katlı kompozit için eşdeğer homojen anizotrop malzemenin elastik sabitleri olan ve Kısım 2.1.1’de (2.2) bünye denklemlerinde verilen A_{ij} normalize edilmiş mekanik sabitlerin açık ifadeleri (Christensen, 1979),

$$A_{66} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \eta_2 + \mu_2 \eta_1}, \quad A_{12} = \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 - \eta_1 \eta_2 (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1) - (\lambda_2 + 2\mu_2)}{(\lambda_1 + 2\mu_1)\eta_2 + (\lambda_2 + 2\mu_2)\eta_1},$$

$$A_{11} = (\lambda_1 + 2\mu_1)\eta_1 + (\lambda_2 + 2\mu_2)\eta_2 - \eta_1 \eta_2 \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + 2\mu_1)\eta_2 + (\lambda_2 + 2\mu_2)\eta_1},$$

$$A_{22} = (\lambda_1 + 2\mu_1)\eta_1 + (\lambda_2 + 2\mu_2)\eta_2 - \eta_1 \eta_2 \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1) - (\lambda_2 + 2\mu_2)}{(\lambda_1 + 2\mu_1)\eta_2 + (\lambda_2 + 2\mu_2)\eta_1} \quad (3.1)$$

şeklinde verilebilir. Burada,

$$\eta_1 = 1 - \eta_2, \quad \lambda_k = \frac{E_k \nu_k}{(1 + \nu_k)(1 - 2\nu_k)}, \quad \mu_k = \frac{E_k}{2(1 + \nu_k)}, \quad k=1,2 \quad (3.2)$$

dir. (3.1) ile (3.2)’de η_2 (η_1), kompozit malzeme içerisindeki güçlendirici (matris) malzemenin hacim oranını göstermektedir.

3.1.1 K_I Mod Değerleri

Bu kısımda, Kısım 2.1.1'de verilen Problem 1 için (2.2) bağıntılarının açık ifadeleri (3.1) şeklinde alınarak, öngerilme olmadığı (olduğu) durumda Kısım 2.1.2 (Kısım 2.1.3)'de verilen sonlu elemanlar modellemesi ile elde edilen sayısal sonuçlar verilmektedir. Bu kısımda verilen bütün hesaplamalarda bazı problem parametrelerinin değerleri $v_1 = v_2 = 0,3$, $\eta_1 = \eta_2 = 0,5$, $h/\ell = 0,2$ olarak alınmış, diğer parametre değerleri tablolar ve şekiller üzerinde gösterilmiştir. Kısım 3.1 için,

$$\tilde{q} = \frac{q}{(E_1\eta_1 + E_2\eta_2)} \quad (3.3)$$

boyutsuz öngerilme (Şekil 2.5 ve formül (2.26)) parametresi kullanılacaktır.

Tablo 3.1'de, yapıda öngerilme olmadığı ($\tilde{q} = 0$) durumda şerit-levhanın içerdiği farklı çatlak uzunlukları, izotrop malzeme özellikleri için Ek 2'de verilen (E2.1) analitik formül yardımıyla ($K_I^{(s)}$), (E2.3)'de verilen çatlak ucu bölgesindeki yer değiştirmeler yardımıyla ($K_I^{(f)}$) ve (E2.4)'de verilen enerji boşalma oranı yöntemi ($K_I^{(E)}$) yardımıyla olmak üzere, üç farklı yolla bulunan K_I değerlerinin $K_{I\infty}$ 'a oranları verilmektedir. Burada, $K_{I\infty} = p\sqrt{\pi\ell_0}$ olup, çatlağın bulunduğu düzleme dik doğrultuda etkiyen ve sonsuzda verilen şiddeti p olan düzgün yayılı aksenal çekme kuvveti etkisinde, $\tilde{q} = 0$ için şerit-levhanın içerdiği çatlak ucunda oluşan SIF değeridir. Tablo 3.1'den görüldüğü gibi, çatlağın boyutları (ℓ_0/ℓ) küçüldükçe verilen oranlar 1'e yaklaşmaktadır yani, sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla bulunan sayısal sonuçlar, çatlağın uzunluğu düşürüldükçe uygun yüklemde sonsuz ortamda bulunan çatlak ucundaki $K_{I\infty}$ değerine yaklaşmaktadır. Bu sonuç, yapılan algoritma ve bilgisayar programlarının doğruluğunu göstermektedir.

Yapılan pek çok hesaplama ve Tablo 3.1'de verilen çok sayıdaki sayısal verilerin incelenmesi, SIF'in belirlenmesinde enerji boşalma oranı yönteminin daha güvenilir olduğunu göstermiştir. Bu nedenle tez çerçevesinde verilen bütün SIF değerleri sadece bu yöntem ile belirlenecektir.

Sayısal sonuçların hassasiyeti ile ilgili diğer bir araştırmanın sonuçları Tablo 3.2'de verilmektedir. Bu tabloda, ele alınan problem parametreleri için çözüm bölgesinin ayrıklaştırılmasında kullanılan toplam sonlu eleman sayısı arttıkça $(\partial U/\partial \ell_0)/p\ell$ ve $K_I^{(E)}/K_{I\infty}$ değerlerinin yakınsaklığı incelenmektedir. Buna göre, toplam sonlu eleman sayısı arttıkça bulunan $(\partial U/\partial \ell_0)/p\ell$ ve $K_I^{(E)}/K_{I\infty}$ değerleri bir limite yaklaşmaktadır. Bu

sonuçlardan yararlanarak sonlu eleman çözümünde kullanılacak olan sonlu eleman ağı ve toplam sonlu eleman sayısı tespit edilmiştir.

Ele alınan problemin ve yüklemenin $x_1 = \ell/2$ 'ye göre simetrik olması göz önüne alınarak sonlu eleman modellemesi çözüm bölgesinin yarısı için yapılmıştır.

Tablo 3.1 $E_2/E_1 = 1$, $h/\ell = 0,20$, $h_U/\ell = h_A/\ell$ durumunda elde edilen SIF değerleri.

ℓ_0/ℓ	ℓ_0/h	$K_I^{(s)}/K_{I\infty}$	$K_I^{(f)}/K_{I\infty}$	$K_I^{(E)}/K_{I\infty}$
0,080	0,80	1,2406	1,2406	1,1930
0,075	0,75	1,2009	1,2009	1,1716
0,060	0,60	1,1444	1,1444	1,1108
0,050	0,50	1,0936	1,0931	1,0729
0,040	0,40	1,0473	1,0473	1,0409

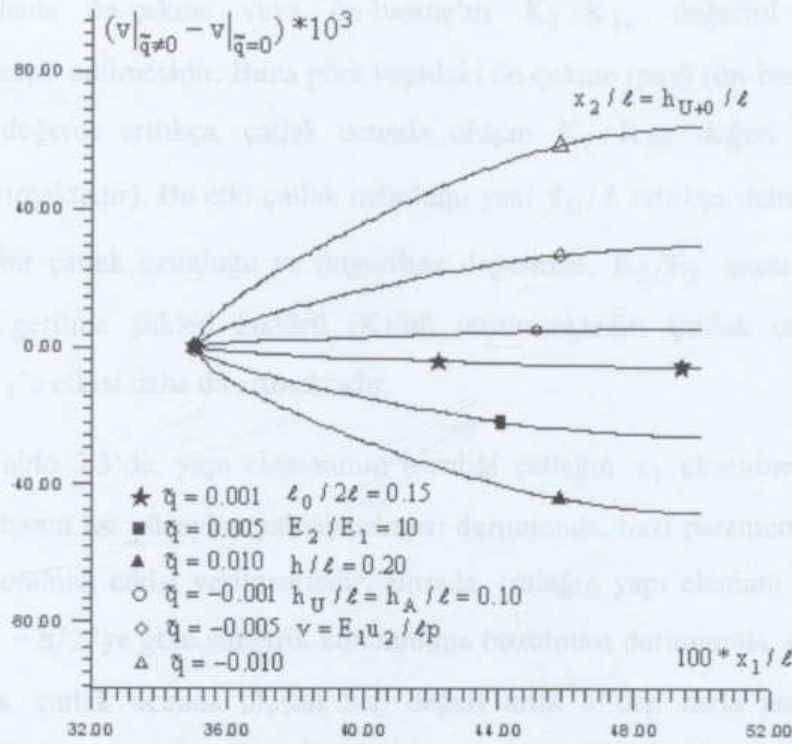
Tablo 3.2 $E_2/E_1 = 1$, $h/\ell = 0,20$, $h_U/\ell = h_A/\ell$ durumunda SIF ve $(\partial U/\partial \ell_0)/p\ell$ değerlerine sonlu eleman sayısının etkisi.

$\ell_0/2\ell$	Eleman sayısı	$(\partial U/\partial \ell_0)/p\ell$	$K_I/K_{I\infty}$
0,10	600	1,0262	1,8945
	720	1,0226	1,8912
	780	1,0068	1,8765
	960	0,9916	1,8623
	1080	0,9798	1,8512
	1200	0,9718	1,8435

Şekil 3.1'de $\ell_0/\ell = 0,30$, $E_2/E_1 = 10$, $h/\ell = 0,20$, $h_u = h/2$ iken farklı \tilde{q} öngerilme değerlerinde $(v|_{\tilde{q} \neq 0} - v|_{\tilde{q} = 0})10^3$ ve x_1/ℓ arasındaki ilişki verilmektedir. Burada

$v\left(= \frac{u_2 E_1}{p\ell}\right)$ çatlakın üst kenarının ($x_2/\ell = h_{U+0}$) Ox_2 doğrultusundaki boyutsuz yer

değiştirmesini göstermektedir. Şekil 3.1'de verilen grafiklerden, çatlak boyunca uygulanan ön-çekmenin (ön-basıncın) değeri mutlak değerce arttıkça, çatlak kenarlarındaki Ox_2 doğrultusundaki yer değiştirmenin değerinin azaldığı (arttığı) görülmektedir.



Şekil 3.1 Farklı \tilde{q} öngerilmesi için $(v|_{\tilde{q} \neq 0} - v|_{\tilde{q} = 0})10^3$ yer değiştirmesinin x_1 / ℓ 'ye göre grafiği.

Şimdiye kadar verilen sayısal sonuçlar, yapı elemanında öngerilme olmadığı durumda elde edilmişlerdir. Bundan sonra verilecek tablolarda yapı elemanında öngerilme olmaması ($\tilde{q} = 0$) ve çekme öngerilmesi ($\tilde{q} > 0$)/ basınç öngerilmesi ($\tilde{q} < 0$) olması durumları birlikte verilmektedir. Buna göre Tablo 3.3'de, farklı yarı-çatlak uzunlukları (ℓ_0) ve E_2 / E_1 için \tilde{q} (ön-çekme veya ön-basınç gerilmesi) değişiminin $K_I / K_{I\infty}$ 'a etkisi verilmektedir. Tablodan görüldüğü üzere, yapı elemanında öngerilme olmadığı durumda ($\tilde{q} = 0$) çatlak uzunluğunun küçülmesi ve E_2 / E_1 oranının artması $K_I / K_{I\infty}$ oranını düşürmektedir. Bu tablodaki verilerden elde edilen önemli diğer sonuç; yapı elemanında öngerilme olması durumunda çatlakın uzunluğu küçüldükçe, ilave yüklemekten dolayı çatlak ucunda oluşan K_I değerine öngerilmenin etkisinin azaldığının tespit edilmesidir. Öngerilmeli sonsuz ortamda ilave yüklemekten dolayı çatlak ucunda oluşan SIF değerine öngerilmenin etkisinin olmadığı Guz (1991, 1999a) ve öğrencileri tarafından daha önce verilmiştir (Ek 3). Dolayısıyla Tablo 3.3'de verilen sayısal sonuçlar Guz ve öğrencileri tarafından elde edilen bu sonucu teyit etmektedir. Bu sonuç, ele alınan problemler için tarafımızdan yapılan algoritma ve programlara olan güveni daha da pekiştirmektedir. Yine bu tablodan çıkarılabilecek önemli diğer bir sonuç,

sonlu şerit-levhada ön-çekme veya ön-basınç'ın $K_I/K_{I\infty}$ değerini önemli ölçüde değiştirdiğinin tespit edilmesidir. Buna göre yapıdaki ön-çekme (pay) (ön-basınç (payda))'nın değeri mutlak değerce arttıkça, çatlak ucunda oluşan $K_I/K_{I\infty}$ değeri monoton olarak azalmaktadır (artmaktadır). Bu etki çatlak uzunluğu yani ℓ_0/ℓ arttıkça daha çok belirgindir. Ele alınan her bir çatlak uzunluğu ve öngerilme değerinde, E_2/E_1 oranının artışı, çatlak ucunda oluşan gerilme şiddeti faktörü (K)'nü düşürmektedir. Çatlak uzunluğu arttıkça anizotropinin K_I 'e etkisi daha da artmaktadır.

Tablo 3.4 ile Tablo 3.5'de, yapı elemanının içerdiği çatlağın x_1 eksenine paralel kalacak şekilde şerit-levhanın üst yüzeyine yaklaştırılması durumunda, bazı parametre değişimlerinin enerji boşalma oranına etkisi verilmektedir. Burada, çatlağın yapı elemanı içinde yerleştiği $x_1 = \ell/2$ ve $x_2 = h/2$ 'ye göre simetrik konumunun bozulması durumunda, göz önüne alınan yükleme altında, çatlak ucunda oluşan SIF değeri artık birden fazla asal modun süper pozisyonu şeklinde ortaya çıkar. Bu asal modların birbirinden ayrılması burada yapılamadığından, belirtilen durumda enerji boşalma oranının verilmesi tercih edilmiştir. Tablo 3.4 ile Tablo 3.5'de farklı iki çatlak uzunluğu için göz önüne alınan parametre değişimlerinin SIF'e etkisi verilmektedir. Tablo 3.4'de, $\ell_0/2\ell = 0,04$ ve Tablo 3.5'de, $\ell_0/2\ell = 0,10$ alınmıştır. Her iki tabloda farklı h_u/ℓ , E_2/E_1 ile ön-çekme (pay) ve ön-basınç (payda) gerilmesinin $(\partial U/\partial \ell_0)/P\ell$ değerine etkisi incelenmiştir. Tablolardaki verilere göre, ele alınan çatlağın şerit-levhanın $x_2 = h/2$ ($h_u/\ell = 0,10$) konumunda, önceki konumuna paralel kalacak şekilde, pozitif Ox_2 eksenini doğrultusunda hareket ettirilerek şerit-levhanın üst yüzeyine yaklaştırılması durumunda, I. mod yüklemesi (Şekil 2.1a) altında $(\partial U/\partial \ell_0)/P\ell$ değeri artmaktadır. Ele alınan durum için çekme (basınç) öngerilmesinin olması, yapıda öngerilmenin olmamasına göre $(\partial U/\partial \ell_0)/P\ell$ değerini düşürmekte (arttırmakta)'dır. Ele alınan çatlak konumu için her durumda E_2/E_1 oranının artması belirtilen değeri düşürmektedir.

Tablo 3.3 $h/\ell = 0,20$, $h_U/\ell = h_A/\ell$ durumunda ön-çekme (pay) ve ön-basınç (payda) gerilmesinin $K_I / K_{I\infty}$ 'a etkisi.

$\ell_0/2\ell$	E_2/E_1	$\tilde{q} = q/(E_1\eta_1 + E_2\eta_2)$			
		0,000	$\frac{+0,001}{-0,001}$	$\frac{+0,005}{-0,005}$	$\frac{+0,01}{-0,01}$
0,04	1	1,1929	$\frac{1,1920}{1,1939}$	$\frac{1,1884}{1,1977}$	$\frac{1,1839}{1,2026}$
	5	1,1723	$\frac{1,1710}{1,1736}$	$\frac{1,1659}{1,1790}$	$\frac{1,1599}{1,1861}$
	10	1,1573	$\frac{1,5555}{1,1591}$	$\frac{1,1485}{1,1668}$	$\frac{1,1404}{1,1772}$
	20	1,1435	$\frac{1,1407}{1,1463}$	$\frac{1,1303}{1,1584}$	$\frac{1,1187}{1,1756}$
0,10	1	1,8512	$\frac{1,8471}{1,8553}$	$\frac{1,8312}{1,8723}$	$\frac{1,8124}{1,8946}$
	5	1,7306	$\frac{1,7257}{1,7355}$	$\frac{1,7070}{1,7561}$	$\frac{1,6851}{1,7838}$
	10	1,6476	$\frac{1,6416}{1,6536}$	$\frac{1,6196}{1,6794}$	$\frac{1,5934}{1,7152}$
	20	1,5754	$\frac{1,5675}{1,5836}$	$\frac{1,5383}{1,6195}$	$\frac{1,5064}{1,6729}$
0,15	1	2,5099	$\frac{2,5005}{2,5193}$	$\frac{2,4646}{2,5588}$	$\frac{2,4225}{2,6119}$
	5	2,2601	$\frac{2,2499}{2,2705}$	$\frac{2,2111}{2,3144}$	$\frac{2,1666}{2,3751}$
	10	2,0879	$\frac{2,0763}{2,0998}$	$\frac{2,0331}{2,1508}$	$\frac{1,9850}{2,2240}$
	20	1,9384	$\frac{1,9531}{1,9242}$	$\frac{1,8729}{2,0108}$	$\frac{1,8184}{2,1207}$
0,20	1	3,2717	$\frac{3,2534}{3,2905}$	$\frac{3,1837}{3,3694}$	$\frac{3,1039}{3,4785}$
	5	2,8679	$\frac{2,8490}{2,8873}$	$\frac{2,7780}{2,9706}$	$\frac{2,6985}{3,0809}$
	10	2,5890	$\frac{2,5687}{2,6101}$	$\frac{2,4937}{2,7023}$	$\frac{2,4121}{2,8392}$
	20	2,3472	$\frac{2,3236}{2,3719}$	$\frac{2,2395}{2,4848}$	$\frac{2,1525}{2,6681}$

Tablo 3.4 $h/\ell = 0,20$, $\ell_0/2\ell = 0,04$ iken farklı h_u/ℓ değerlerinde, ön-çekme (pay) /ön-basınç (payda) gerilmesinin $(\partial U/\partial \ell_0)/P\ell$ değerine etkisi.

h_u/ℓ	E_2/E_1	$\tilde{q} = q/(E_1\eta_1 + E_2\eta_2)$			
		0,000	+ 0,001 - 0,001	+ 0,005 - 0,005	+ 0,01 - 0,01
0,1000	1	0,1627	0,1622 0,1633	1,1601 1,1655	0,1576 0,1683
	5	0,0882	0,0877 0,0886	0,0860 0,0904	0,0840 0,0928
	10	0,0753	0,0748 0,0759	0,0726 0,0783	0,0701 0,0816
	20	0,0675	0,0667 0,0684	0,0636 0,0721	0,0602 0,0775
0,0833	1	0,1672	0,1667 0,1678	0,1645 0,1701	0,1618 0,1731
	5	0,0903	0,0898 0,0907	0,0880 0,0926	0,0859 0,0952
	10	0,0769	0,0763 0,0775	0,0741 0,0800	0,0715 0,0835
	20	0,0688	0,0679 0,0697	0,0647 0,0735	0,0612 0,0792
0,0666	1	0,1833	0,1826 0,1840	0,1799 0,1868	0,1767 0,1904
	5	0,0977	0,0972 0,0982	0,0951 0,1005	0,0926 0,1035
	10	0,0825	0,0818 0,0832	0,0793 0,0861	0,0763 0,0901
	20	0,0732	0,0722 0,0742	0,0686 0,0786	0,0647 0,0850
0,0500	1	0,2245	0,2214 0,2234	0,2175 0,2275	0,2129 0,2330
	5	0,1155	0,1145 0,1162	0,1118 0,1194	0,1085 0,1236
	10	0,0957	0,0948 0,0966	0,0914 0,1004	0,0876 0,1057
	20	0,0833	0,0821 0,0846	0,0776 0,0902	0,0727 0,0985

Tablo 3.5 $h/\ell = 0,20$, $\ell_0/2\ell = 0,10$ iken farklı h_u/ℓ değerlerinde, ön-çekme (pay)/ön-basınç (payda) gerilmesinin $(\partial U/\partial \ell_0)/P\ell$ değerine etkisi.

h_u/ℓ	E_2/E_1	$\tilde{q} = q/(E_1\eta_1 + E_2\eta_2)$			
		0,000	$\frac{+0,001}{-0,001}$	$\frac{+0,005}{-0,005}$	$\frac{+0,01}{-0,01}$
0,10	1	2,7016	$\frac{2,6770}{2,7267}$	$\frac{2,5830}{2,8332}$	$\frac{2,4749}{2,9768}$
	5	1,2292	$\frac{1,2148}{1,2440}$	$\frac{1,1606}{1,3071}$	$\frac{1,0998}{1,3964}$
	10	0,9199	$\frac{0,9058}{0,9345}$	$\frac{0,8539}{0,9982}$	$\frac{0,7974}{1,0925}$
	20	0,7280	$\frac{0,7120}{0,7448}$	$\frac{0,6551}{0,8217}$	$\frac{0,5967}{0,9467}$
0,0833	1	2,9387	$\frac{2,9094}{2,9687}$	$\frac{2,7981}{3,0954}$	$\frac{2,6711}{3,2711}$
	5	1,3219	$\frac{1,3053}{1,3391}$	$\frac{1,2429}{1,4128}$	$\frac{1,1734}{1,5182}$
	10	0,9799	$\frac{0,9640}{0,9964}$	$\frac{0,9056}{1,0690}$	$\frac{0,8427}{1,7779}$
	20	0,7679	$\frac{0,7502}{0,7864}$	$\frac{0,6878}{0,8720}$	$\frac{0,6243}{1,0132}$
0,0666	1	3,8411	$\frac{3,7913}{3,8923}$	$\frac{3,6052}{4,1131}$	$\frac{3,3987}{4,4308}$
	5	1,6707	$\frac{1,6445}{1,6978}$	$\frac{1,5479}{1,8169}$	$\frac{1,4433}{1,9944}$
	10	1,2031	$\frac{1,1797}{1,2276}$	$\frac{1,0953}{1,3375}$	$\frac{1,0068}{1,5098}$
	20	0,9140	$\frac{0,8898}{0,9396}$	$\frac{0,8061}{1,0603}$	$\frac{0,7231}{1,2709}$
0,0500	1	6,3837	$\frac{6,2567}{6,5162}$	$\frac{5,7980}{7,1097}$	$\frac{5,3157}{8,0336}$
	5	2,6309	$\frac{2,5707}{2,6942}$	$\frac{2,3568}{2,9836}$	$\frac{2,1375}{3,4543}$
	10	1,8039	$\frac{1,7553}{1,8555}$	$\frac{1,5864}{2,0981}$	$\frac{1,4189}{2,5187}$
	20	1,2966	$\frac{1,2522}{1,3446}$	$\frac{1,1034}{1,5833}$	$\frac{0,9641}{2,6551}$

$\ell_0/2\ell = 0,04$ için Tablo 3.4'de ele alınan parametre değişimlerinin $(\partial U/\partial \ell_0)/P\ell$ 'e etkileri, $\ell_0/2\ell = 0,10$ için Tablo 3.5'de verilmektedir. Tablo 3.4'de verilen yorumlar, Tablo 3.5 için de aynen geçerlidir. Ancak Tablo 3.5'de verilen $(\partial U/\partial \ell_0)/P\ell$ 'nin parametrelerin değerinin değişiminden etkilenme oranı, Tablo 3.4'deki etkilenme oranına göre daha fazladır. Her iki

tablodaki verilerden, anizotropinin ve çekme öngerilmesinin değerinin artmasının yapıdaki $((\partial U / \partial \ell_0) / P\ell)$ değerini düşürdüğü; çatlak uzunluğunun artması, çatlağın üst yüzeylere yaklaşması ve basınç öngerilmesinin değerinin mutlak değerce artmasının, belirtilen değeri arttırdığı söylenebilir. Dolayısıyla anizotropi ve çekme öngerilmesinin değerinin artması yapıyı kritik durumdan uzaklaştırmakta, diğer durumlar yapıyı kritik duruma (kırılma başlangıcına) yaklaştırmaktadır.

3.1.2 K_{II} Mod Değerleri

Bu kısımda, Kısım 2.1.1'de verilen Problem 2 için (2.2) bağıntılarının açık ifadeleri (3.1) şeklinde alınarak, öngerilme olmadığı (olduğu) durumda Kısım 2.1.2 (Kısım 2.1.3)'de verilen sonlu elemanlar modellemesi ile elde edilen sayısal sonuçlar tablolar ve grafikler halinde verilmektedir. Tablolar görülen $K_{II\infty}$, $2\ell_0$ uzunluğunda çatlak içeren sonsuz ortamda, sonsuzda verilen düzgün yayılı kayma gerilmesi (τ) etkisinde çatlak ucunda oluşan asal II. mod SIF olup, değeri $K_{II\infty} = \tau\sqrt{\pi\ell_0}$ 'dir.

Tablo 3.6'da, $h/\ell = 0,20$, $h_u = h/2$ iken farklı \tilde{q} , E_2/E_1 ve ℓ_0/ℓ parametrelerinin $K_{II}/K_{II\infty}$ değerine etkisi incelenmiştir. Tablodaki verilerden $\tilde{q} = 0$ için Kısım 3.1.2'de olduğu gibi, yapıdaki çatlağın uzunluğu küçüldükçe $K_{II} \rightarrow K_{II\infty}$ elde edilmekte dolayısıyla $K_{II}/K_{II\infty}$ oranı 1'e yaklaşmaktadır. Yapıdaki çatlağın boyutları büyüdükçe, öngerilme olması veya olmaması durumlarının her ikisinde de ele alınan parametre değerlerinin değişimi II. mod SIF değerini önemli ölçüde etkilemektedir. Bu tablodaki verilerden ele alınan parametre değerlerinin değişiminin SIF'e etkisi kısaca şu şekilde özetlenebilir: Çatlak boyunca ön-çekme (ön-basınç)'ın değeri mutlak değerce arttıkça $K_{II}/K_{II\infty}$ değeri monoton olarak azalmaktadır (artmaktadır). Bu etki çatlak uzunluğu yani $\ell_0/2\ell$ arttıkça daha çok artmaktadır. E_2/E_1 oranının değerinin artması, ele alınan her bir durumda $K_{II}/K_{II\infty}$ oranının değerini düşürmekte ve $\ell_0/2\ell$ arttıkça bu düşüş miktarı artmaktadır.

Tablo 3.7'de $\ell_0/2\ell = 0,16$ ve Tablo 3.8'de $\ell_0/2\ell = 0,24$ için farklı h_u/ℓ ve E_2/E_1 değerlerinde, ön-çekme(pay)/ön-basınç(payda)'ın $(\partial U / \partial \ell_0) / P\ell$ değerine etkisi incelenmiştir. Her iki tabloda da h_u/ℓ değerinin azalması yani, çatlağın önceki konumuna paralel kalacak şekilde şerit-levhanın üst yüzeyine yaklaştırılması, $(\partial U / \partial \ell_0) / P\ell$ değerini düşürmektedir. Ayrıca ele alınan h_u/ℓ için çekme (basınç) öngerilmesi mutlak değerce değerinin artışı $(\partial U / \partial \ell_0) / P\ell$ değerini düşürürken (arttırırken), E_2/E_1 oranının değerinin

artışı, her durumda, belirtilen değeri düşürmektedir. Parametre değerlerine göre $(\partial U / \partial \ell_0) / P\ell$ 'deki değişim miktarı $\ell_0 / 2\ell$ arttıkça daha da fazlalaşmaktadır.

Tablo 3.6 $h/\ell = 0, 20$, $h_U/\ell = h_A/\ell$ durumunda ön-çekme (pay) ve ön-basınç (payda) gerilmesinin $K_{II} / K_{II\infty}$ 'a etkisi.

$\ell_0/2\ell$	E_2/E_1	$\tilde{q} = q/(E_1\eta_1 + E_2\eta_2)$			
		0,000	+ 0,001 - 0,001	+ 0,01 - 0,01	+ 0,02 - 0,02
0,08	1	1,0948	$\frac{1,0940}{1,0956}$	$\frac{1,0874}{1,1033}$	$\frac{1,0809}{1,1133}$
	5	1,0788	$\frac{1,0780}{1,0797}$	$\frac{1,0708}{1,0886}$	$\frac{1,0641}{1,1007}$
	10	1,0729	$\frac{1,0719}{1,0739}$	$\frac{1,0642}{1,0843}$	$\frac{1,0573}{1,1000}$
	20	1,0694	$\frac{1,0683}{1,0706}$	$\frac{1,0598}{1,0839}$	$\frac{1,0528}{1,0086}$
0,16	1	1,2634	$\frac{1,2607}{1,2662}$	$\frac{1,2389}{1,2935}$	$\frac{1,2183}{1,3313}$
	5	1,1968	$\frac{1,1941}{1,1968}$	$\frac{1,1725}{1,2284}$	$\frac{1,1531}{1,2712}$
	10	1,1572	$\frac{1,1543}{1,1601}$	$\frac{1,1326}{1,1918}$	$\frac{1,1143}{1,2444}$
	20	1,1274	$\frac{1,1244}{1,1306}$	$\frac{1,1025}{1,1687}$	$\frac{1,0858}{1,2110}$
0,24	1	1,4240	$\frac{1,4187}{1,4296}$	$\frac{1,3761}{1,4873}$	$\frac{1,3375}{1,5739}$
	5	1,3182	$\frac{1,3129}{1,3236}$	$\frac{1,2723}{1,3819}$	$\frac{1,2377}{1,4768}$
	10	1,2489	$\frac{1,2436}{1,2543}$	$\frac{1,2045}{1,3161}$	$\frac{1,1731}{1,4302}$
	20	1,1912	$\frac{1,1858}{1,1968}$	$\frac{1,1484}{1,2681}$	$\frac{1,1212}{1,3876}$
0,40	1	1,6785	$\frac{1,6666}{1,6910}$	$\frac{1,5768}{1,8313}$	$\frac{1,5042}{2,0862}$
	5	1,5246	$\frac{1,5135}{1,5363}$	$\frac{1,4322}{1,6723}$	$\frac{1,1368}{1,9454}$
	10	1,4158	$\frac{1,4052}{1,4269}$	$\frac{1,3306}{1,5648}$	$\frac{1,2754}{1,8907}$
	20	1,3167	$\frac{1,3066}{1,3276}$	$\frac{1,2395}{1,4784}$	$\frac{1,1943}{1,7708}$

Tablo 3.7 $h/\ell = 0,20$, $\ell_0/2\ell = 0,16$ iken farklı h_u/ℓ değerlerinde, ön-çekme (pay) /ön-basınç (payda) gerilmesinin $(\partial U/\partial \ell_0)/P\ell$ değerine etkisi.

h_u/ℓ	E_2/E_1	$\tilde{q} = q/(E_1\eta_1 + E_2\eta_2)$			
		0,000	$\frac{+0,001}{-0,001}$	$\frac{+0,01}{-0,01}$	$\frac{+0,02}{-0,02}$
0,1000	1	0,3651	$\frac{0,3633}{0,3670}$	$\frac{0,3484}{0,3853}$	$\frac{0,3344}{0,4096}$
	5	0,1430	$\frac{0,1422}{0,1439}$	$\frac{0,1361}{0,1529}$	$\frac{0,1306}{0,1653}$
	10	0,0925	$\frac{0,0920}{0,0933}$	$\frac{0,0879}{0,1010}$	$\frac{0,0844}{0,1122}$
	20	0,0607	$\frac{0,0603}{0,0614}$	$\frac{0,0575}{0,0692}$	$\frac{0,0553}{0,0819}$
0,0833	1	0,3640	$\frac{0,3623}{0,3658}$	$\frac{0,3477}{0,3840}$	$\frac{0,3341}{0,4093}$
	5	0,1429	$\frac{0,1429}{0,1437}$	$\frac{0,1362}{0,1516}$	$\frac{0,1308}{0,1635}$
	10	0,0926	$\frac{0,0920}{0,0931}$	$\frac{0,0880}{0,0990}$	$\frac{0,0845}{0,1088}$
	20	0,0607	$\frac{0,0604}{0,0611}$	$\frac{0,0576}{0,0659}$	$\frac{0,0554}{0,0703}$
0,0666	1	0,3589	$\frac{0,3573}{0,3606}$	$\frac{0,3441}{0,3770}$	$\frac{0,3316}{0,3995}$
	5	0,1421	$\frac{0,1414}{0,1428}$	$\frac{0,1358}{0,1502}$	$\frac{0,1307}{0,1611}$
	10	0,0924	$\frac{0,0919}{0,0930}$	$\frac{0,0881}{0,0985}$	$\frac{0,0847}{0,1077}$
	20	0,0608	$\frac{0,0605}{0,0612}$	$\frac{0,0577}{0,0658}$	$\frac{0,0556}{0,0758}$
0,0500	1	0,3531	$\frac{0,3517}{0,3545}$	$\frac{0,3404}{0,3683}$	$\frac{0,3295}{0,3870}$
	5	0,1412	$\frac{0,1406}{0,1419}$	$\frac{0,1356}{0,1484}$	$\frac{0,1310}{0,1578}$
	10	0,0925	$\frac{0,0920}{0,0929}$	$\frac{0,0884}{0,0980}$	$\frac{0,0853}{0,1063}$
	20	0,0611	$\frac{0,0607}{0,0614}$	$\frac{0,0581}{0,0658}$	$\frac{0,0560}{0,0752}$

3.2 Özgün Şekil-Etkisi

3.2.1 K_1 Mod Değeri

Öz karede bir altın parabolik taban malzemesinin, izotrop (E₁) ile taban malzemesinin farklılık gösterdiği bir durum için, Tablo 3.1.3'de (2.27) buna denklemimizde yer alan K_1 oranının, izotrop malzeme taban için taban (Lathinskij, 1963)

Tablo 3.8 $h/\ell = 0,20$, $\ell_0/2\ell = 0,24$ iken farklı h_u/ℓ değerlerinde, ön-çekme (pay) /ön-basınç (payda) gerilmesinin $(\partial U / \partial \ell_0) / P\ell$ değerine etkisi.

h_u/ℓ	E_2/E_1	$\tilde{q} = q/(E_1\eta_1 + E_2\eta_2)$			
		0,000	+ 0,001 - 0,001	+ 0,01 - 0,01	+ 0,02 - 0,02
0,10	1	0,6958	<u>0,6900</u> 0,7017	<u>0,6447</u> 0,7649	<u>0,6046</u> 0,8636
	5	0,2601	<u>0,2579</u> 0,2625	<u>0,2404</u> 0,2883	<u>0,2258</u> 0,3322
	10	0,1616	<u>0,1601</u> 0,1632	<u>0,1491</u> 0,1811	<u>0,1403</u> 0,2159
	20	0,1016	<u>0,1006</u> 0,1027	<u>0,0936</u> 0,1163	<u>0,0885</u> 0,1533
0,0833	1	0,6877	<u>0,6822</u> 0,6934	<u>0,6389</u> 0,7531	<u>0,6008</u> 0,8455
	5	0,2584	<u>0,2562</u> 0,2606	<u>0,2394</u> 0,2853	<u>0,2252</u> 0,3270
	10	0,1610	<u>0,1596</u> 0,1626	<u>0,1489</u> 0,1799	<u>0,1403</u> 0,2135
	20	0,1015	<u>0,1005</u> 0,1026	<u>0,0936</u> 0,1159	<u>0,0886</u> 0,1521
0,0666	1	0,6621	<u>0,6574</u> 0,6669	<u>0,6203</u> 0,7170	<u>0,5873</u> 0,7929
	5	0,2519	<u>0,2500</u> 0,2526	<u>0,2351</u> 0,2589	<u>0,2224</u> 0,2666
	10	0,1586	<u>0,1573</u> 0,1588	<u>0,1474</u> 0,1611	<u>0,1395</u> 0,1639
	20	0,1008	<u>0,0999</u> 0,1009	<u>0,0933</u> 0,1017	<u>0,0886</u> 0,1027
0,0500	1	0,6332	<u>0,6297</u> 0,6369	<u>0,6008</u> 0,6749	<u>0,5747</u> 0,7310
	5	0,2443	<u>0,2427</u> 0,2459	<u>0,2306</u> 0,2631	<u>0,2200</u> 0,2707
	10	0,1555	<u>0,1544</u> 0,1567	<u>0,1460</u> 0,1698	<u>0,1391</u> 0,1940
	20	0,0999	<u>0,0990</u> 0,1008	<u>0,0931</u> 0,1119	<u>0,0888</u> 0,1409

3.2 Ortotrop Şerit-Levha

3.2.1 K_1 Mod Değerleri

Bu kısımda ele alınan şerit-levhanın malzemesinin, izotropi düzlemlerinin normalleri koordinat eksenleri olan ve Kısım 2.1.1'de (2.2) bünye denklemlerinde verilen A_{ij} normalize edilmiş mekanik sabitlerin açık ifadeleri (Lekhnitskii, 1963)

$$A_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \quad A_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \quad A_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \quad A_{66} = G_{12} \quad (3.4)$$

burada,

$$a_{11} = \frac{1}{E_1} \left(1 - \frac{E_3}{E_1} v_{13}^2 \right), \quad a_{12} = \frac{1}{E_1} \left(-v_{12} - \frac{E_3}{E_2} v_{13} v_{23} \right),$$

$$a_{22} = \frac{1}{E_2} \left(1 - \frac{E_3}{E_2} v_{23}^2 \right) \quad (3.5)$$

ile verilen ortotrop malzeme olduğu kabul edilecektir. (3.5)'de E_1 , E_2 ve E_3 şerit levhanın sırasıyla Ox_1 , Ox_2 ve Ox_3 doğrultusundaki Elastisite modülleri; v_{12} , v_{23} , v_{13} malzemenin Poisson oranları ve (3.4)'de G_{12} , şerit-levhanın Ox_1x_2 düzlemindeki kayma modülünü göstermektedir.

Bu kısımda sadece, Kısım 2.1.1'de verilen Problem 1 için (2.2) bağıntılarının açık ifadeleri (3.5) şeklinde alınarak, öngerilme olmadığı (olduğu) durumda Kısım 2.1.2 (Kısım 2.1.3)'de verilen sonlu elemanlar modellemesi ile elde edilen I. mod SIF veya $(\partial U / \partial \ell_0) / p\ell$ enerji boşalma oranına ait sayısal sonuçlar verilmektedir. Sayısal hesaplamalarda $v_{12} = v_{13} = v_{23} = 0.3$ ve $\tilde{q} = \frac{q}{E_1}$ olarak alınmış, diğer parametre değerleri tablolar üzerinde gösterilmiştir.

Tablo 3.9'da çözüm bölgesinin ayrıklaştırılmasında kullanılan farklı toplam sonlu eleman adedi (Ox_2 doğrultusunda M adet, Ox_1 doğrultusunda N adet) için $(\partial U / \partial \ell_0) / p\ell$ ve $K_1^{(E)} / K_{I\infty}$ 'nin değerleri verilmektedir. Buna göre toplam sonlu eleman sayısı arttıkça $(\partial U / \partial \ell_0) / p\ell$ ve $K_1^{(E)} / K_{I\infty}$ 'nin değerleri bir limite yakınsamaktadır. Tablo 3.10'da ele alınan parametre değerleri için $\Delta \ell_0 / \ell$ oranının değişiminin $(\partial U / \partial \ell_0) / p\ell$ ve $K_1 / K_{I\infty}$ 'a etkisi incelenmiştir.

$$\frac{\partial U}{\partial \ell_0} = \lim_{\Delta \ell_0 \rightarrow 0} \frac{U(\ell_0 + \Delta \ell_0) - U(\ell_0)}{\Delta \ell_0} \quad (3.6)$$

olduğu göz önüne alınır, $\Delta \ell_0 \rightarrow 0$ için (3.6) 'daki eşitliğin sağındaki oranın limiti $\frac{\partial U}{\partial \ell_0}$ olur. Dolayısıyla, Tablo 3.10'da $\Delta \ell_0 / \ell$ değeri küçüldükçe $\frac{\partial U}{\partial \ell_0}$ ve $K_1^{(E)} / K_{I\infty}$ 'un bir limite yakınsadığı görülmektedir. Tablo 3.9 ve Tablo 3.10'da verilen sonuçlar, bu kısımda çözülecek problemler için yapılan algoritma ve programlara güvenilirliği sağlamaktadır.

Tablo 3.9 $h/\ell = 0,20$, $\ell_0/2\ell = 0,15$, $E_2/E_1 = E_3/E_1 = 0,5$, $G_{12}/E_1 = 0,01$, $h_U/\ell = h_A/\ell$ durumunda I. mod SIF ve $(\partial U / \partial \ell_0) / p\ell$ değerlerine sonlu eleman sayısının etkisi.

N*M	$(\partial U / \partial \ell_0) / p\ell$	$K_1 / K_{I\infty}$
50*12	30,6334	4,3699
60*12	29,8073	4,3106
70*12	28,8817	4,2431
80*12	28,0874	4,1844
90*12	27,4970	4,1402
100*12	27,1405	4,1132

Tablo 3.10 $h/\ell = 0,20$, $\ell_0/2\ell = 0,15$, $E_2/E_1 = E_3/E_1 = 0,5$, $G_{12}/E_1 = 0,01$, $h_U/\ell = h_A/\ell$ durumunda I. mod SIF ve $(\partial U / \partial \ell_0) / p\ell$ değerlerine $\Delta \ell_0 / \ell$ 'in etkisi .

$\Delta \ell_0 / \ell$	$(\partial U / \partial \ell_0) / p\ell$	$K_1 / K_{I\infty}$
$1 * 10^{-3}$	27,3061	4,1122
$5 * 10^{-4}$	27,3809	4,1247
$1 * 10^{-4}$	27,4722	4,1371
$5 * 10^{-5}$	27,4858	4,1388
$1 * 10^{-5}$	27,4970	4,1402
$5 * 10^{-6}$	27,4983	4,1403
$1 * 10^{-6}$	27,4983	4,1403

Tablo 3.11'de; $E_2/E_1 (= E_3/E_1)$, G_{12}/E_1 , $\ell_0/2\ell$ ve \tilde{q} 'nın değerlerinin değişiminin $K_1 / K_{I\infty}$ değerine etkisi incelenmiştir. Yapıda göz önüne alınan çekme (basınç) öngerilmesinin değeri mutlak değerce arttıkça, I. mod SIF ($K_1 / K_{I\infty}$) değeri azalmaktadır

(artmaktadır). Ayrıca bu etki, $\ell_0/2\ell$ yarı çatlak uzunluğu arttıkça ve G_{12}/E_1 kayma modülü değeri düştükçe daha da artmaktadır. Fakat $E_2/E_1 (=E_3/E_1)$ Elastisite modülleri oranı düştükçe $K_1/K_{1\infty}$ değeri düşmektedir.

Tablo 3.12 ve Tablo 3.13'de $K_1/K_{1\infty}$ değerine sırasıyla E_2/E_1 ve E_3/E_1 oranlarının değişiminin, SIF'e etkisi incelenmiştir. Bu iki tabloda, basınç öngerilmesinin değeri $\tilde{q} = -0,01$ olduğunda $K_1/K_{1\infty}$ değeri ∞ 'a yaklaşmaktadır. Bu durum, ele alınan ön-basınç gerilmesinde cismin stabilite kaybı ile açıklanır (Akbarov ve Rzayev, 2002, 2003). Yani, seçilen bu \tilde{q} basınç kuvvetinde, çatlak içeren cisim stabilite kaybına sebep olabilecek büyüklüğe ulaşmaktadır. Dolayısıyla ele alınan problemler misalinde, yapı elemanlarında uygulanacak basınç öngerilmesinin değerinin, o yapının stabilite kaybına sebep olan kritik yük şiddetinden küçük olması gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Çekme öngerilmesi değerinin belirlenmesinde ise bu şekilde bir sınırlama yoktur. Her iki tablodaki verilerden diğer parametre değişimlerinin $K_1/K_{1\infty}$ değerine etkileri önceki tablolar için yapılan yorumlarda olduğu gibidir. Bunun dışında her iki tablodaki verilerden E_2/E_1 ve E_3/E_1 oranının değeri düştükçe, $K_1/K_{1\infty}$ 'in değeri düşmektedir. Ancak, Tablo 3.12'de verilen E_2/E_1 oranının SIF'e etkisi, Tablo 3.13'de verilen E_3/E_1 oranının SIF'e etkisine göre çok daha fazladır.

0,10	0,50	0,10	2,5025	2,4918	2,4510	2,4021
		0,05	2,6774	2,6594	2,5982	2,5252
	0,10	0,02	3,0265	2,9879	2,8462	2,7176
		0,10	1,2590	1,2005	1,1368	1,0627
0,10	0,05	0,10	2,6774	2,6594	2,5982	2,5252
		0,05	2,7619	2,7365	2,6217	2,5046
	0,02	2,2666	2,2192	2,1400	2,0697	

Tablo 3.11 $h/\ell = 0,20$, $h_U/\ell = h_A/\ell$ için farklı $\ell_0/2\ell$, G_{12}/E_1 , $E_2/E_1 = E_3/E_1$ değerlerinde \tilde{q} 'ın SIF'e etkisi.

$\ell_0/2\ell$	$E_2/E_1 = E_3/E_1$	G_{12}/E_1	$\tilde{q} = q/E_1$				
			0,000	+0,001 -0,001	+0,005 -0,005	+0,01 -0,01	
1	2	3	4	5	6	7	
0,04	0,50	0,10	1,7238	1,7205 1,7271	1,7079 1,7413	1,6286 1,7606	
		0,05	1,8486	1,8421 1,8554	1,8181 1,8849	1,7917 1,9288	
		0,02	2,0763	2,0581 2,0958	1,9969 2,1931	1,9380 2,3957	
	0,10	0,10	1,4764	1,4731 1,4799	1,4603 1,4943	1,4456 1,5143	
		0,05	1,5438	1,5388 1,5489	1,5205 1,5715	1,5006 1,6054	
		0,02	1,6725	1,6610 1,6850	1,6223 1,7473	1,5854 1,8789	
	0,05	0,10	1,4013	1,3973 1,4053	1,3823 1,4224	1,3651 1,4461	
		0,05	1,4554	1,4502 1,4607	1,4311 1,4843	1,4104 1,5196	
		0,02	1,5551	1,5451 1,5659	1,5114 1,6203	1,4791 1,7357	
	0,10	0,50	0,10	2,5025	2,4918 2,5134	2,4519 2,5600	2,4071 2,6263
			0,05	2,6774	2,6594 2,6962	2,5942 2,7807	2,5252 2,9135
			0,02	3,0285	2,9859 3,0751	2,8462 3,3190	2,7176 3,9043
0,10		0,10	1,9390	1,9305 1,9478	1,8988 1,9855	1,8627 2,0399	
		0,05	2,0519	2,0390 2,0655	1,9925 2,1267	1,9439 2,2246	
		0,02	2,2668	2,2392 2,2971	2,1490 2,4572	2,0667 2,8507	

Tablo 3.11'un devamı.

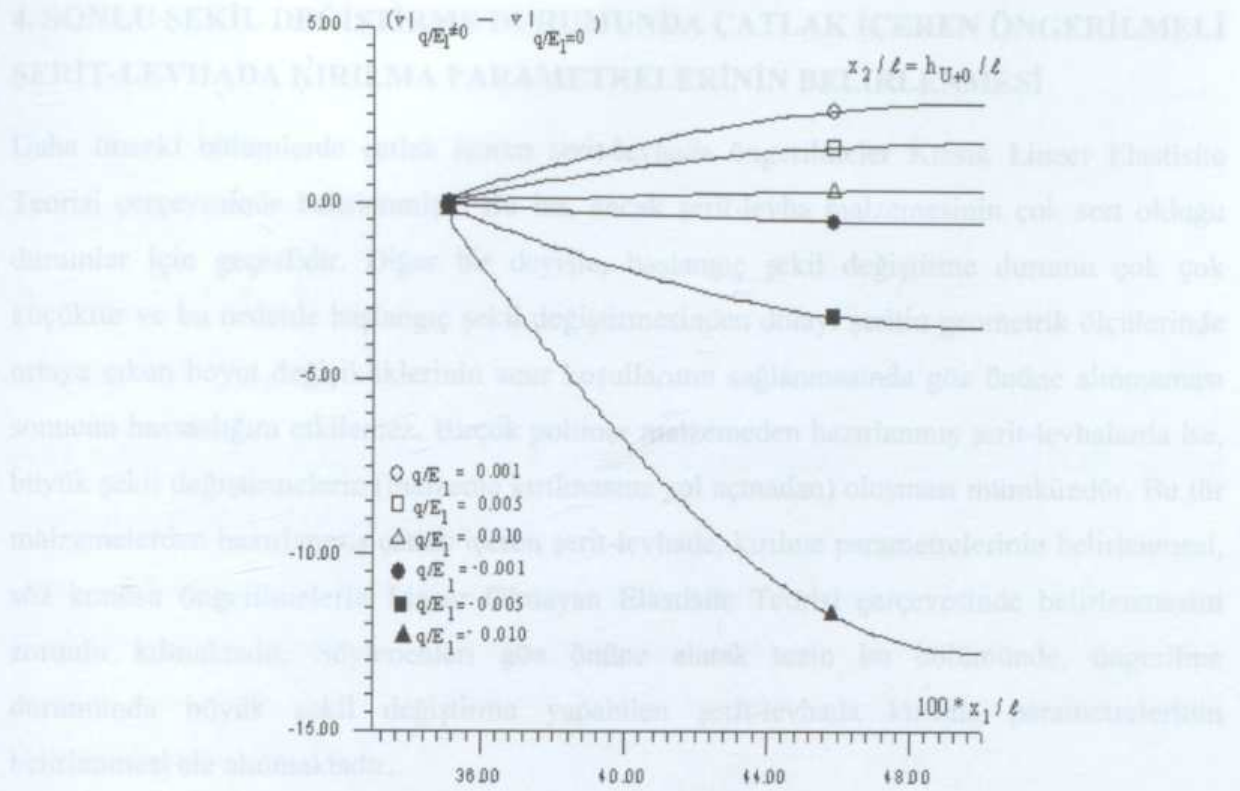
1	2	3	4	5	6	7	
0,10	0,05	0,10	1,7666	$\frac{1,7585}{1,7750}$	$\frac{1,7285}{1,8111}$	$\frac{1,6953}{1,8638}$	
		0,05	1,8593	$\frac{1,8477}{1,8715}$	$\frac{1,8061}{1,9270}$	$\frac{1,7630}{2,0167}$	
		0,02	2,0347	$\frac{2,0112}{2,0606}$	$\frac{1,9350}{2,1978}$	$\frac{1,8661}{2,5403}$	
0,15	0,50	0,10	3,1639	$\frac{3,1438}{3,1847}$	$\frac{3,0692}{3,2753}$	$\frac{2,9875}{3,4085}$	
		0,05	3,3131	$\frac{3,2818}{3,3460}$	$\frac{3,1708}{3,4974}$	$\frac{3,0570}{3,7482}$	
		0,02	3,6944	$\frac{3,6271}{3,7691}$	$\frac{3,4116}{4,1774}$	$\frac{3,2206}{5,2993}$	
	0,10	0,10	2,3886	$\frac{2,3726}{2,4051}$	$\frac{2,3139}{2,4776}$	$\frac{2,2503}{2,5860}$	
		0,05	2,4833	$\frac{2,4610}{2,5068}$	$\frac{2,3822}{2,6150}$	$\frac{2,3021}{3,2778}$	
		0,02	2,6952	$\frac{2,6511}{2,7430}$	$\frac{2,5159}{3,0076}$	$\frac{2,3961}{3,7656}$	
	0,05	0,10	2,1349	$\frac{2,1199}{2,1504}$	$\frac{2,0651}{2,2189}$	$\frac{2,0061}{2,3228}$	
		0,05	2,2227	$\frac{2,2025}{2,2441}$	$\frac{2,1314}{2,3435}$	$\frac{2,0595}{2,5127}$	
		0,02	2,3992	$\frac{2,3626}{2,4399}$	$\frac{2,2467}{2,6664}$	$\frac{2,1450}{3,3245}$	
	0,20	0,50	0,10	3,9235	$\frac{3,8886}{3,9599}$	$\frac{3,7613}{4,1212}$	$\frac{3,6254}{4,3682}$
			0,05	4,0411	$\frac{3,9904}{4,0949}$	$\frac{3,8138}{4,3487}$	$\frac{3,6379}{4,7944}$
			0,02	4,4335	$\frac{4,3337}{4,5456}$	$\frac{4,0219}{5,1856}$	$\frac{3,7540}{7,2623}$
0,10		0,10	2,8923	$\frac{2,8651}{2,9207}$	$\frac{2,7666}{3,0480}$	$\frac{2,6627}{3,2467}$	
		0,05	2,9624	$\frac{2,9261}{3,0011}$	$\frac{2,8004}{3,1853}$	$\frac{2,6764}{3,2467}$	
		0,02	3,1688	$\frac{3,1038}{3,2422}$	$\frac{2,9025}{3,6685}$	$\frac{2,7317}{5,1326}$	
0,05		0,10	2,5554	$\frac{2,5302}{2,5818}$	$\frac{2,4395}{2,7004}$	$\frac{2,3444}{2,8878}$	
		0,05	2,6266	$\frac{2,5938}{2,6616}$	$\frac{2,4807}{2,8289}$	$\frac{2,3697}{3,1325}$	
		0,02	2,7945	$\frac{2,7390}{2,8573}$	$\frac{2,5673}{3,2240}$	$\frac{2,4218}{4,5112}$	

Tablo 3.12 $h/\ell = 0,20$, $E_2/E_1 = 0,5$, $h_U/\ell = h_A/\ell$, $\ell_0/2\ell = 0,20$, $G_{12}/E_1 = 0,01$ iken farklı E_3/E_1 değerlerinde \tilde{q} 'in SIF'e etkisi.

E_3/E_1	$\tilde{q} = q/E_1$			
	0,000	$\frac{+0,001}{-0,001}$	$\frac{+0,005}{-0,005}$	$\frac{+0,01}{-0,01}$
0,5	4,9194	$\frac{4,7377}{5,1410}$	$\frac{4,2421}{7,0893}$	$\frac{3,8775}{\infty}$
0,4	4,8998	$\frac{4,7186}{5,1210}$	$\frac{4,2244}{7,0703}$	$\frac{3,8613}{\infty}$
0,3	4,8807	$\frac{4,6999}{5,1016}$	$\frac{4,2073}{7,0519}$	$\frac{3,8455}{\infty}$
0,2	4,8622	$\frac{4,6818}{5,0827}$	$\frac{4,1905}{7,0341}$	$\frac{3,8302}{\infty}$
0,1	4,8441	$\frac{4,6641}{5,0642}$	$\frac{4,1742}{7,0170}$	$\frac{3,8152}{\infty}$

Tablo 3.13 $h/\ell = 0,20$, $E_3/E_1 = 0,5$, $h_U/\ell = h_A/\ell$, $\ell_0/2\ell = 0,20$, $G_{12}/E_1 = 0,01$ iken farklı E_2/E_1 değerlerinde \tilde{q} 'in SIF'e etkisi.

E_2/E_1	$\tilde{q} = q/E_1$			
	0,000	$\frac{+0,001}{-0,001}$	$\frac{+0,005}{-0,005}$	$\frac{+0,01}{-0,01}$
0,5	4,9194	$\frac{4,7377}{5,1410}$	$\frac{4,2421}{7,0893}$	$\frac{3,8775}{\infty}$
0,4	4,6909	$\frac{4,5193}{4,9006}$	$\frac{4,0519}{6,7504}$	$\frac{3,7091}{\infty}$
0,3	4,4274	$\frac{4,2676}{4,6230}$	$\frac{3,8335}{6,3564}$	$\frac{3,5164}{\infty}$
0,2	4,1184	$\frac{3,9729}{4,2967}$	$\frac{3,5790}{5,8889}$	$\frac{3,2923}{\infty}$
0,1	3,8077	$\frac{3,6772}{3,9680}$	$\frac{3,3249}{5,4095}$	$\frac{3,0693}{\infty}$



Şekil 3.2 $h/l = 0,20$, $E_2/E_1 = E_3/E_1 = 0,5$, $G_{12}/E_1 = 0,02$, $\ell_0/2\ell = 0,15$ iken farklı, q/E_1 öngerilmesi için $(v|_{\tilde{q} \neq 0} - v|_{\tilde{q} = 0})$ yerdeğiştirmesinin x_1/l 'e göre grafiği.

Şekil 3.2'de ele alınan parametre değerlerinde çatlakın alt yüzeyinde, farklı çekme ve basınç öngerilmelerinde Ox_2 doğrultusundaki yer değiştirme $v \left(= \frac{u_2 E_1}{p l} \right)$ 'nin grafiği verilmektedir.

Bu grafikten, çekme öngerilmesinin çatlak yüzeylerindeki Ox_2 doğrultusundaki yer değiştirmeyi düşürdüğü, basınç öngerilmesinin ise mutlak değerce arttırdığı görülmektedir.

$$x_2 = (a_1 - b)^2 + (a_2 - b)^2 + (a_3 - b)^2 \quad (4.2)$$

Ölçü (4.2)'de

$$\lambda_3 = \sqrt{1 + 2b} \quad (4.3)$$

Bir (4.3)'de λ_3 , Çekme yerli değiştirme miktarının asal değerlerini göstermektedir. Bu durumda bilinenler

$$\lambda_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_1}{\partial_2} - \frac{\partial_1}{\partial_3} + \frac{\partial_1}{\partial_4} - \frac{\partial_1}{\partial_5} \right) \quad (4.4)$$

4. SONLU ŞEKİL DEĞİŞTİRME DURUMUNDA ÇATLAK İÇEREN ÖNGERİLMELİ ŞERİT-LEVHADA KIRILMA PARAMETRELERİNİN BELİRLENMESİ

Daha önceki bölümlerde çatlak içeren şerit-levhada öngerilmeler Klasik Lineer Elastisite Teorisi çerçevesinde belirlenmişti. Bu ise, ancak şerit-levha malzemesinin çok sert olduğu durumlar için geçerlidir. Diğer bir deyişle, başlangıç şekil değiştirme durumu çok çok küçüktür ve bu nedenle başlangıç şekil değiştirmesinden dolayı şeritin geometrik ölçülerinde ortaya çıkan boyut değişikliklerinin sınır koşullarının sağlanmasında göz önüne alınmaması sonucun hassaslığını etkilemez. Birçok polimer malzemeden hazırlanmış şerit-levhalarda ise, büyük şekil değiştirmelerin (malzeme kırılmasına yol açmadan) oluşması mümkündür. Bu tür malzemelerden hazırlanmış çatlak içeren şerit-levhada, kırılma parametrelerinin belirlenmesi, söz konusu öngerilmelerin Lineer Olmayan Elastisite Teorisi çerçevesinde belirlenmesini zorunlu kılmaktadır. Söylenenleri göz önüne alarak tezin bu bölümünde, öngerilme durumunda büyük şekil değiştirme yapabilen şerit-levhada kırılma parametrelerinin belirlenmesi ele alınmaktadır.

4.1 Problemin Formülasyonu

Ele alınan şerit-levhanın malzemesinin izotrop homojen sıkıştırılabilir hiperelastik olduğu ve bünye denklemlerinin harmonik tipli potansiyelle verildiği kabul edilsin. Bu potansiyelin ifadesi,

$$\Phi = \frac{1}{2} \lambda s_1^2 + \mu s_2 \quad (4.1)$$

biçiminde belirlenir (Guz, 1991). Burada

$$s_1 = (\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1) + (\lambda_3 - 1),$$

$$s_2 = (\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_2 - 1)^2 + (\lambda_3 - 1)^2 \quad (4.2)$$

dir. (4.2)'de

$$\lambda_n = \sqrt{1 + 2\varepsilon_n} \quad (4.3)$$

dir. (4.3)'de ε_n , Green şekil değiştirme tansörünün asal değerlerini göstermektedir. Bu tansörün bileşenleri

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right) \quad (4.4)$$

biçiminde belirlenir. (4.4)'de x_i 'ler Lagrange koordinatları, u_i 'ler ise yerdeğiştirme vektörü bileşenleridir. Düzlem şekil değiştirme durumu ele alındığında yukarıdaki formüllerde $i,j,n=1,2$ ve $\lambda_3 = 1$ olacaktır. Dolayısıyla (4.2)'de s_1 ve s_2 büyüklükleri (invariantları) aşağıdaki gibi belirlenecektir:

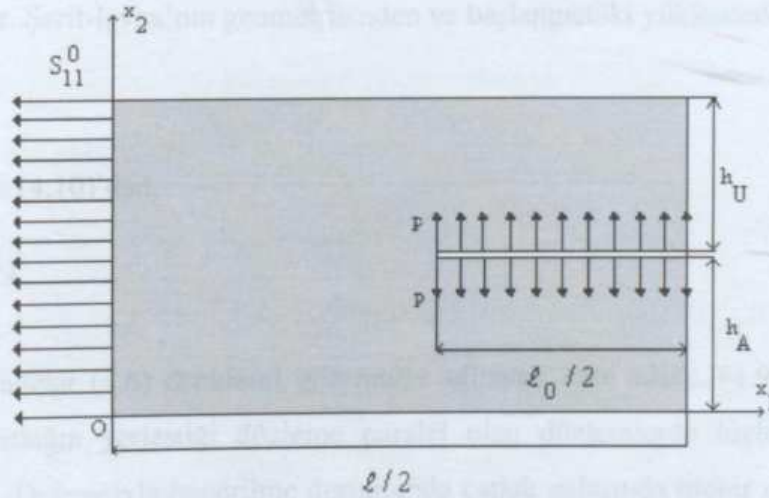
$$s_1 = (\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1),$$

$$s_2 = (\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_2 - 1)^2 \quad (4.5)$$

(4.1) potansiyelinin ifadesindeki λ ve μ sabitleri, Lamé sabitleri benzeri büyüklükler olup malzeme özelliklerini göstermektedir.

Sonlu şekil değiştirme durumunda simetrik Lagrange gerilme tansörü (S) ve simetrik olmayan Kirchoff gerilme tansörleri (Q) kullanılmaktadır. Bu tansörlerin ve buna benzer birçok gerilme tansörünün tanım ve ilişkileri birçok kaynakta örneğin, Guz (1991, 1999a) kaynağında verilmektedir.

Hiç bir dış etki olmadığı durumda şerit-levhanın konumu Ox_1x_2 Lagrange koordinatları ile gösterilsin. Ele alınan durumda Ox_1x_2 koordinat takımı uygun kartezyen koordinat takımı ile çakışmaktadır. Şerit-levhanın hiçbir dış etki olmadığı durumda, $\Omega = \{0 \leq x_1 \leq \ell, 0 \leq x_2 \leq h\}$ bölgesini kapsadığı,



Şekil 4.1 Ele alınan şerit-levhanın geometrisi

$\{L^\pm = \ell/2 - \ell_0/2 \leq x_1 \leq \ell/2 + \ell_0/2, x_2 = h_{A\pm 0}\}$ bölgesinde çatlak olduğu ve şeritin $x_1 = 0$ ve $x_1 = \ell$ kenarları boyunca şiddeti S_{11}^0 olan düzgün yayılı yükün etkisi altındadır (Şekil 4.1). Bu etkiden dolayı şeritte oluşan yerdeğiştirmeler,

$$u_m^0 = (\lambda_m - 1)x_m, \quad \lambda_m = \text{sabit}_m \quad (4.6)$$

biçiminde belirlenmektedir (Guz, 1991,1999a). Bu bölümde, daha önceki bölümlerde öngörülenler için kabul edilen işaretlemeler kullanılacaktır. Şerit-levhada öngörülme olması durumundaki konum Oy_1y_2 koordinat takımı ile belirlensin. Yukarıda tanımlanan öngörülmeden dolayı Ox_1x_2 ve Oy_1y_2 koordinat takımları arasında,

$$y_i = \lambda_i x_i, \quad \lambda_i = \text{sabit}_i \quad (4.7)$$

ilişkileri vardır. Sonraki işlemler Oy_1y_2 koordinat takımında ele alınacaktır.

Lagrange gerilme tansörünün (S) bileşenleri (S_{ij}), (4.1) potansiyeli ve (4.4) şekil değiştirme tansörü bileşenleri yardımıyla;

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ji}} \right) \Phi \quad (4.8)$$

kullanılarak belirlenir. (4.6) ve (4.8)'den,

$$\begin{aligned} S_{11}^0 &= [\lambda(\lambda_1 + \lambda_2 - 2) + 2\mu(\lambda_1 - 1)]; \quad S_{12}^0 = 0, \\ S_{22}^0 &= [\lambda(\lambda_1 + \lambda_2 - 2) + 2\mu(\lambda_2 - 1)]; \quad S_{33}^0 = 2\mu(1 - \lambda_2) \end{aligned} \quad (4.9)$$

ifadeleri elde edilir. Şerit-levha'nın geometrisinden ve başlangıçtaki yüklemekten,

$$S_{22}^0 = 0 \quad (4.10)$$

yazılabilir. (4.9) ve (4.10)'dan,

$$\lambda_2 = \frac{2(\lambda + \mu) - \lambda\lambda_1}{\lambda + 2\mu} \quad (4.11)$$

dir. Yukarıdaki ifadeler (4.6) denklemi göz önüne alınarak elde edilir. (4.9) ve (4.10)'dan görüldüğü gibi çatlakın yerleştiği düzleme paralel olan düzlemlerde hiçbir gerilme etki göstermemektedir. Dolayısıyla öngörülme durumunda çatlak uçlarında hiçbir gerilme birikimi oluşmaz.

Ox_1x_2 koordinat takımı çerçevesinde Kirchoff gerilme tansörü bileşenleri (Q_{ij}) ve Lagrange gerilme tansörü bileşenleri (S_{ij}) arasında

$$Q_{ij} = S_{in} \left(\delta_{nj} + \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right) \quad (4.12)$$

ilişkisi sağlanmaktadır. Ele alınan durumda Kirchoff tansörünün Ox_1x_2 koordinat takımının Q_{ij} bileşenleri ile bu tansörün Oy_1y_2 koordinat takımındaki Q'_{ij} bileşenleri arasında

$$Q'_{ij} = \frac{\lambda_i}{\lambda_1\lambda_2} Q_{ij} \quad (4.13)$$

bağıntıları sağlanmaktadır.

Yukarıdaki öngerilme durumu oluştuğundan sonra, şerit-levhadaki çatlakın kenarlarına şiddeti p olan düzgün yayılı normal kuvvetin etki gösterdiği ve $p \ll S_{11}^0$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda ek yüklemekten dolayı oluşan gerilme ve şekil değiştirme durumunun belirlenebilmesi için Oy_1y_2 koordinat takımı çerçevesinde Üç Boyutlu Lineerize Edilmiş Elastisite Teorisi kullanılır. Bu teoremin denklemleri sonlu ön şekil değiştirme durumlarında aşağıdaki biçimde yazılır (Biot, 1965; Guz, 1991, 1999a).

$$\frac{\partial Q'_{ij}}{\partial y_i} = 0; \quad i, j = 1, 2$$

$$Q'_{ij} = \omega'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial' u_\alpha}{\partial y_\beta}, \quad i, j, \alpha, \beta = 1, 2. \quad (4.14)$$

(4.14)'de Q'_{ij} 'ler Kirchoff tansörü bileşenlerinin perturbasyonlarını, u'_i 'ler ise yerdeğiştirme vektörü bileşenlerinin perturbasyonlarını göstermektedir.

(4.12)'de Q_{ij} 'i, $Q_{ij}^0 + Q_{ij}$ ile S_{in} 'i, $S_{in}^0 + S_{in}$ ile u_i 'yi, $u_i^0 + u_i$ ile yer değiştirirsek (burada Q_{ij} , S_{in} ve u_i , sırasıyla Q_{ij} , S_{in} ve u_i 'lerin perturbasyonunu göstermektedir); (4.6), (4.12) ve (4.13)'den

$$Q'_{ij} = \frac{\lambda_i}{\lambda_1\lambda_2} \left(\delta_{nj} + (\lambda_i - 1)\delta_{ni} \right) S_{in} + S_{in}^0 \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \quad (4.15)$$

elde edilir.

(4.8) ifadesinin doğrusallaştırılmasından Lagrange gerilme tansörü bileşenlerinin perturbasyonları için

$$S_{in} = \lambda_{in\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta},$$

$$\lambda_{in\alpha\beta} = \frac{1}{4} \left(\delta_{m\alpha} + \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_\beta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{m\beta}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\beta n}^0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{in}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ni}^0} \right) \Phi^0 \quad (4.16)$$

bulunur. (4.15) ve (4.16)'dan, (4.14)'ün ikinci denklemi ile (4.15), (4.16) ve (4.6)'dan $\omega'_{ij\alpha\beta}$ 'lar

$$\omega'_{1111} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (\lambda + 2\mu), \quad \omega'_{2222} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} (\lambda + 2\mu), \quad \omega'_{1122} = \lambda, \quad \omega'_{2112} = \omega'_{1212} = \frac{2\mu\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

$$\omega'_{1221} = \frac{2\mu\lambda_1^2}{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)}, \quad \omega'_{1112} = \omega'_{1121} = \omega'_{1211} = \omega'_{1222} = \omega'_{2111} = \omega'_{2121} = \omega'_{2122} = 0,$$

$$\omega'_{2211} = \lambda, \quad \omega'_{2121} = \frac{2\mu\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (4.17)$$

olarak bulunur. Oy_1y_2 koordinat takımına göre (4.14) denklemleri

$$\Omega' = \{0 \leq y_1 \leq \ell', 0 \leq y_2 \leq h'\} - (L'^+ \cup L'^-) \quad (4.18)$$

bölgesinde sağlanmaktadır. Burada

$$L'^{\pm} = \{\ell'/2 - \ell'_0/2 < y_1 < \ell'/2 + \ell'_0/2, y_2 = \pm h'_A\},$$

$$h' = \lambda_2 h, \quad \ell'_0 = \lambda_1 \ell_0, \quad h'_U = \lambda_2 h_U, \quad h'_A = \lambda_2 h_A \quad (4.19)$$

dır.

Yukarıda verilenler göz önüne alınarak, ele alınan problem için sınır koşulları,

$$Q'_{11}|_{y_1=0;\ell} = 0;$$

$$u'_2|_{y_1=0;\ell} = 0; \quad Q'_{21}|_{y_2=0;h} = Q'_{22}|_{y_2=0;h} = 0;$$

$$Q'_{22}|_{L^{\pm}} = -p; \quad Q'_{21}|_{L^{\pm}} = 0 \quad (4.20)$$

olur. Böylece, sonlu ön şekil değiştirme durumunda çatlak içeren şerit-levhada ek p yüklemesinden dolayı oluşan gerilme ve şekil değiştirmelerin belirlenmesi (4.14), (4.17) denklemlerinin (4.20) sınır koşulları çerçevesinde çözümüne indirgenmiş olur.

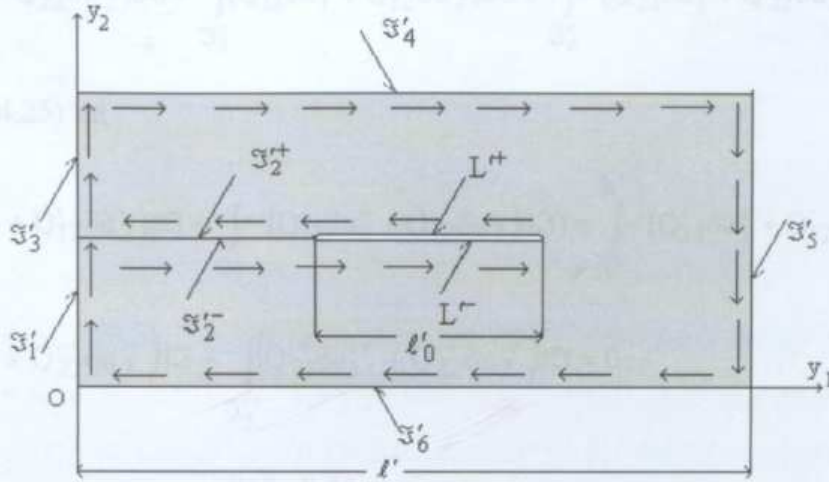
4.2 Problemin Varyasyonel Formülasyonu

Açıktır ki, (4.14), (4.17) ve (4.20) probleminin analitik çözümü imkansızdır. Bu nedenle problemin çözümü için sonlu elemanlar yöntemi kullanılacaktır. Bu yöntemin uygulanabilmesi için varyasyonel formülasyonun belirlenmesi gerekir. Bunun için

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} Q'_{ij} \frac{\partial u'_j}{\partial y_i} dy_1 dy_2 - \int_{L''} p u'_2{}^+ dy_1 + \int_{L'} p u'_2{}^- dy_1 \quad (4.21)$$

fonksiyoneli ele alınsın. (4.14)'ün ikinci denkleminin ve (4.20)'de yerdeğiştirme için verilen sınır koşullarının sağlandığı durumda, (4.21) fonksiyonelinin birinci varyasyonelinin sıfıra eşitliğinden (4.14)'deki birinci denklemi ve (4.20)'deki sınır koşulları elde edilmektedir. Buna göre (4.21) fonksiyonelinin birinci varyasyonu:

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[\left(\omega'_{1111} \frac{\partial u'_1}{\partial y_1} + \frac{1}{2} \omega'_{1122} \frac{\partial u'_2}{\partial y_2} + \frac{1}{2} \omega'_{2211} \frac{\partial u'_2}{\partial y_2} \right) \delta \left(\frac{\partial u'_1}{\partial y_1} \right) + \left(\omega'_{1122} \frac{\partial u'_1}{\partial y_1} + \frac{1}{2} \omega'_{2211} \frac{\partial u'_1}{\partial y_1} + \right. \\ &\omega'_{2222} \frac{\partial u'_2}{\partial y_2} \right) \delta \left(\frac{\partial u'_2}{\partial y_2} \right) + \left(\omega'_{2112} \frac{\partial u'_1}{\partial y_2} + \frac{1}{2} \omega'_{1212} \frac{\partial u'_2}{\partial y_1} + \frac{1}{2} \omega'_{2121} \frac{\partial u'_2}{\partial y_1} \right) \delta \left(\frac{\partial u'_1}{\partial y_2} \right) + \left. \left(\frac{1}{2} \omega'_{1212} \frac{\partial u'_1}{\partial y_2} + \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{1}{2} \omega'_{1221} \frac{\partial u'_2}{\partial y_1} + \frac{1}{2} \omega'_{2121} \frac{\partial u'_1}{\partial y_2} \right) \delta \left(\frac{\partial u'_2}{\partial y_1} \right) \right] dy_1 dy_2 - \int_{L''} p \delta u'_2{}^+ dy_1 - \int_{L'} p \delta u'_2{}^- dy_1 = \\ &\iint_{\Omega} \left[Q'_{11} \delta \left(\frac{\partial u'_1}{\partial y_1} \right) + Q'_{22} \delta \left(\frac{\partial u'_2}{\partial y_2} \right) + Q'_{21} \delta \left(\frac{\partial u'_1}{\partial y_2} \right) + Q'_{12} \delta \left(\frac{\partial u'_2}{\partial y_1} \right) \right] dy_1 dy_2 - \int_{L''} p \delta u'_2{}^+ dy_1 + \\ &\int_{L'} p \delta u'_2{}^- dy_1 = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} (Q'_{11} \delta u'_1) - \frac{\partial Q'_{11}}{\partial y_1} \delta u'_1 + \frac{\partial}{\partial y_2} (Q'_{22} \delta u'_2) - \frac{\partial Q'_{22}}{\partial y_2} \delta u'_2 + \frac{\partial}{\partial y_2} (Q'_{21} \delta u'_1) - \right. \\ &\left. \frac{\partial Q'_{21}}{\partial y_2} \delta u'_1 + \frac{\partial}{\partial y_1} (Q'_{12} \delta u'_2) - \frac{\partial Q'_{12}}{\partial y_1} \delta u'_2 \right] dy_1 dy_2 - \int_{L''} p \delta u'_2{}^+ dy_1 + \int_{L'} p \delta u'_2{}^- dy_1. \\ &= \iint_{\Omega} \left[- \left(\frac{\partial Q'_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial Q'_{21}}{\partial y_2} \right) \delta u'_1 - \left(\frac{\partial Q'_{22}}{\partial y_2} + \frac{\partial Q'_{12}}{\partial y_1} \right) \delta u'_2 \right] dy_1 dy_2 + \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} (Q'_{11} \delta u'_1) + \frac{\partial}{\partial y_2} (Q'_{22} \delta u'_2) + \right. \\ &\left. \frac{\partial}{\partial y_2} (Q'_{21} \delta u'_1) + \frac{\partial}{\partial y_1} (Q'_{12} \delta u'_2) \right] dy_1 dy_2 - \int_{L''} p \delta u'_2{}^+ dy_1 + \int_{L'} p \delta u'_2{}^- dy_1 \quad (4.22) \end{aligned}$$



Şekil 4.2 Çözüm bölgesinin basit bağımlı bölgeye dönüştürülmesi

dir. Çatlak içeren şerit-levhanın kapsadığı bölgenin ikinci mertebeden bağımlı bir bölge olduğu göz önüne alınırsa, (4.22)'deki altı çizili integrale Gauss integral formülünün uygulanabilmesi için bu bölgenin Şekil 4.2'de gösterildiği gibi basit bağımlı bölgeye dönüştürülmesi gerekir. Bu durumda

$$\iint_{\Omega'} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} (Q'_{11} \delta u'_1) + \frac{\partial}{\partial y_2} (Q'_{22} \delta u'_2) + \frac{\partial}{\partial y_2} (Q'_{21} \delta u'_1) + \frac{\partial}{\partial y_1} (Q'_{12} \delta u'_2) \right] dy_1 dy_2$$

$$= \iint_{\mathfrak{I}'} [(Q'_{11} \delta u'_1) n_1 + (Q'_{21} \delta u'_1) n_2 + (Q'_{12} \delta u'_2) n_1 + (Q'_{22} \delta u'_2) n_2] d\mathfrak{I} \quad (4.23)$$

(4.23)'de

$$\mathfrak{I}' = \mathfrak{I}'_1 \cup \mathfrak{I}'_2^- \cup L^- \cup L^+ \cup \mathfrak{I}'_2^+ \cup \mathfrak{I}'_3 \cup \mathfrak{I}'_4 \cup \mathfrak{I}'_5 \cup \mathfrak{I}'_6 \quad (4.24)$$

dir. (4.23)'de n_1 ve n_2 , \mathfrak{I} sınırının dış birim normal vektörünün bileşenleridir. Şekil 4.2'den \mathfrak{I}'_1 ve \mathfrak{I}'_3 için $n_1 = -1$, $n_2 = 0$; \mathfrak{I}'_5 için $n_1 = 1$, $n_2 = 0$; \mathfrak{I}'_4 için $n_1 = 0$, $n_2 = 1$ \mathfrak{I}'_6 için $n_1 = 0$, $n_2 = -1$; L^+ ve \mathfrak{I}'_2^+ için $n_1 = 0$, $n_2 = -1$; L^- ve \mathfrak{I}'_2^- için $n_1 = 0$, $n_2 = 1$ dir. n_1 ve n_2 'nin bu değerleri dikkate alınarak (4.23) ve (4.24)'den,

$$\int_{\mathfrak{I}'_1} -(Q'_{11} \delta u'_1 + Q'_{12} \delta u'_2) d\mathfrak{I} + \int_{\mathfrak{I}'_2^-} (Q'_{21} \delta u'_1 + Q'_{22} \delta u'_2) d\mathfrak{I} + \int_{L^-} (Q'_{21} \delta u'_1 + Q'_{22} \delta u'_2) d\mathfrak{I} +$$

$$\int_{L^+} -(Q'_{21} \delta u'_1 + Q'_{22} \delta u'_2) d\mathfrak{I} + \int_{\mathfrak{I}'_2^+} (Q'_{21} \delta u'_1 + Q'_{22} \delta u'_2) d\mathfrak{I} + \int_{\mathfrak{I}'_3} -(Q'_{11} \delta u'_1 + Q'_{12} \delta u'_2) d\mathfrak{I} +$$

$$\int_{\mathfrak{I}'_4} (Q'_{21}\delta u'_1 + Q'_{22}\delta u'_2) d\mathfrak{I} + \int_{\mathfrak{I}'_5} (Q'_{11}\delta u'_1 + Q'_{12}\delta u'_2) d\mathfrak{I} + \int_{\mathfrak{I}'_6} -(Q'_{21}\delta u'_1 + Q'_{22}\delta u'_2) d\mathfrak{I} \quad (4.25)$$

yazılabilir. (4.25)'de

$$\int_{\mathfrak{I}'_1} -(Q'_{11}\delta u'_1 + Q'_{12}\delta u'_2) d\mathfrak{I} + \int_{\mathfrak{I}'_3} -(Q'_{11}\delta u'_1 + Q'_{12}\delta u'_2) d\mathfrak{I} = \int_0^{h'} -(Q'_{11}\delta u'_1 + Q'_{12}\delta u'_2) \Big|_{y_1=0} dy_2;$$

$$\int_{\mathfrak{I}'_2} (Q'_{21}\delta u'_1 + Q'_{22}\delta u'_2) d\mathfrak{I} - \int_{\mathfrak{I}'_2} (Q'_{21}\delta u'_1 + Q'_{22}\delta u'_2) d\mathfrak{I} = 0;$$

$$\int_{L'} (Q'_{21}\delta u'_1 + Q'_{22}\delta u'_2) d\mathfrak{I} = \int_{\ell'/2-\ell'_0/2}^{\ell'/2+\ell'_0/2} (Q'_{21}\delta u'_1 + Q'_{22}\delta u'_2) \Big|_{y_2=h'_{\Lambda-0}} dy_1;$$

$$\int_{L''} -(Q'_{21}\delta u'_1 + Q'_{22}\delta u'_2) d\mathfrak{I} = - \int_{\ell'/2+\ell'_0/2}^{\ell'/2-\ell'_0/2} (Q'_{21}\delta u'_1 + Q'_{22}\delta u'_2) \Big|_{y_2=h'_{\Lambda+0}} dy_1;$$

$$\int_{\mathfrak{I}'_4} (Q'_{21}\delta u'_1 + Q'_{22}\delta u'_2) d\mathfrak{I} = \int_0^{\ell'} (Q'_{21}\delta u'_1 + Q'_{22}\delta u'_2) \Big|_{y_2=h'} dy_1;$$

$$\int_{\mathfrak{I}'_5} (Q'_{11}\delta u'_1 + Q'_{12}\delta u'_2) d\mathfrak{I} = \int_0^{h'} (Q'_{11}\delta u'_1 + Q'_{12}\delta u'_2) \Big|_{y_1=\ell'} dy_2;$$

$$\int_{\mathfrak{I}'_6} -(Q'_{21}\delta u'_1 + Q'_{22}\delta u'_2) d\mathfrak{I} = \int_0^{\ell'} -(Q'_{21}\delta u'_1 + Q'_{22}\delta u'_2) \Big|_{y_2=0} dy_1 \quad (4.26)$$

dir. (4.26) ifadeleri (4.25) eşitliğinde yerine yazılır ve (4.20) sınır koşulları ile $\delta u'_2 \Big|_{y_1=0; \ell'} = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} (Q'_{11}\delta u'_1) + \frac{\partial}{\partial y_2} (Q'_{22}\delta u'_2) + \frac{\partial}{\partial y_2} (Q'_{21}\delta u'_1) + \frac{\partial}{\partial y_1} (Q'_{12}\delta u'_2) \right] dy_1 dy_2 \\ &= \int_{\ell'/2-\ell'_0/2}^{\ell'/2+\ell'_0/2} (Q'_{21}\delta u'_1 + Q'_{22}\delta u'_2) \Big|_{y_2=h'_{\Lambda-0}} dy_1 - \int_{\ell'/2+\ell'_0/2}^{\ell'/2-\ell'_0/2} (Q'_{21}\delta u'_1 + Q'_{22}\delta u'_2) \Big|_{y_2=h'_{\Lambda+0}} dy_1 \\ &= \int_{L'} (Q'_{21}\delta u'_1 + Q'_{22}\delta u'_2) \Big|_{L'} dy_1 - \int_{L''} (Q'_{21}\delta u'_1 + Q'_{22}\delta u'_2) \Big|_{L''} dy_1 \end{aligned} \quad (4.27)$$

elde edilir. Elde edilen ifadeler, (4.22) fonksiyoneline yerine yazılırsa

$$\delta\Pi = \iint_{\Omega'} \left[- \left(\frac{\partial Q'_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial Q'_{21}}{\partial y_2} \right) \delta u'_1 - \left(\frac{\partial Q'_{22}}{\partial y_2} + \frac{\partial Q'_{12}}{\partial y_1} \right) \delta u'_2 \right] dy_1 dy_2 + \int_0^{h'} (-Q'_{11} \delta u'_1)_{y_1=0} dy_2 + \int_0^{h'} (Q'_{11} \delta u'_1)_{y_1=\ell'} dy_2 + \int_{L^-} (Q'_{21} \delta u'_1 + (Q'_{22} + p) \delta u'_2)_{L^-} + \int_{L''} (-Q'_{21} \delta u'_1 - (Q'_{22} - p) \delta u'_2)_{L''} dy_1 = \quad (4.28)$$

olur. (4.28)'deki $\delta u'_1$ ve $\delta u'_2$ varyasyonlarının keyfi olmasından dolayı, bu büyüklüklerin katsayılarının sıfırlığından (4.14)'deki ilk denklem ve (4.20)'deki son iki sınır koşulları elde edilir. Dolayısıyla (4.14) ve (4.20) denklemlerinin, (4.21) fonksiyonelinin Euler denklemi olduğu ispat edilmiş olur. Sonlu eleman formülasyonunda kullanılan Rijidlik matrisinin elemanları için, Kısım 3.1.2 formül (3.13)'de verilen $\mathbf{K}_{ij}^{(k)}$ matrisinin elemanlarının ifadesi:

$$\begin{aligned} K_{ij}^{(k)}(1,1) &= \omega'_{1111} \frac{\partial N_j}{\partial y_1} \frac{\partial N_i}{\partial y_1} + \omega'_{1112} \frac{\partial N_j}{\partial y_2} \frac{\partial N_i}{\partial y_1} + \omega'_{2112} \frac{\partial N_j}{\partial y_2} \frac{\partial N_i}{\partial y_2} + \omega'_{2111} \frac{\partial N_j}{\partial y_1} \frac{\partial N_i}{\partial y_2}, \\ K_{ij}^{(k)}(1,2) &= \omega'_{1122} \frac{\partial N_j}{\partial y_2} \frac{\partial N_i}{\partial y_1} + \omega'_{2121} \frac{\partial N_j}{\partial y_1} \frac{\partial N_i}{\partial y_2}, \\ K_{ij}^{(k)}(2,1) &= \omega'_{2211} \frac{\partial N_j}{\partial y_1} \frac{\partial N_i}{\partial y_2} + \omega'_{1212} \frac{\partial N_j}{\partial y_2} \frac{\partial N_i}{\partial y_1}, \\ K_{ij}^{(k)}(2,2) &= \omega'_{2222} \frac{\partial N_j}{\partial y_2} \frac{\partial N_i}{\partial y_2} + \omega'_{2221} \frac{\partial N_j}{\partial y_1} \frac{\partial N_i}{\partial y_2} + \omega'_{1221} \frac{\partial N_j}{\partial y_1} \frac{\partial N_i}{\partial y_2} + \omega'_{1222} \frac{\partial N_j}{\partial y_2} \frac{\partial N_i}{\partial y_2}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

$i, j, k=1,2$

olarak bulunur.

4.3 Sayısal Sonuçlar

(4.14) ve (4.20) ile ele alınan problemin sonlu eleman modellemesi, (4.1) ve (4.2)'deki uygun değişiklikler göz önüne alınarak önceki bölümde yapılan modellemenin aynısı olduğundan burada ayrıca yer verilmemiştir. Sayısal işlemler sonucunda enerji boşalma oranının değerleri

$$\gamma \approx -\frac{1}{2} \frac{U(\ell'_0 + \Delta \ell'_0) - U(\ell'_0)}{\Delta \ell'_0} \quad (4.30)$$

formülü ile elde edilecektir. Eğer $h'_A = h'/2$ durumu söz konusu ise, enerji boşalma oranı ile SIF'in ilişkisi yardımıyla, K_I -gerilme şiddeti faktörü'nün değerleri

$$\left[K_I^2 (\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)}) \mu_1' \gamma_{21}'^{(1)} - \gamma_2^{(1)} \gamma_{21}'^{(2)} \right] = 4\gamma_i^{-1} (\mu_1' \gamma_{21}'^{(1)} \gamma_{22}'^{(2)} - \gamma_{21}'^{(2)}), \quad i = \sqrt{-1} \quad (4.31)$$

eşitliğinden belirlenecektir (Guz, 1991,1999a). (4.31)'de

$$\mu_{1,2}' = i\sqrt{A' \pm \sqrt{A'^2 - A_1'}},$$

$$2\gamma_{21}'^{(1)} = -(\omega'_{2112}\omega'_{1122}\mu_1'^2 - \omega'_{1111}\omega'_{1212})B_1'^{-1} - (\omega'_{2222}\omega'_{2112}\mu_1'^2 + \omega'_{2112}\omega'_{1221} - \omega'_{1212}(\omega'_{1122} + \omega'_{1212}))B_2'^{-1},$$

$$\gamma_{22}'^{(2)} = -2(\omega'_{2222}\omega'_{2112}B_1'^{-1}\mu_1'^4 + \omega'_{1122}\omega'_{1221}B_2'^{-1}),$$

$$2\mu_1'^{-1}\gamma_{21}'^{(2)} = (\omega'_{2112}\omega'_{1122}\mu_1'^2 + 3\omega'_{1111}\omega'_{1212})B_1'^{-1},$$

$$2\mu_1'^{-1}\gamma_2^{(1)} = (\omega'_{1111} + \omega'_{2112}\mu_1'^2)B_1'^{-1} + (\omega'_{1122} + \omega'_{1212})B_2'^{-1} + (3\omega'_{2222}\omega'_{2112}\mu_1'^2 - \omega'_{2112}\omega'_{1221} + \omega'_{1212}(\omega'_{1122} + \omega'_{1212}))B_2'^{-1},$$

$$\gamma_2^{(2)} = \mu_1'(\omega'_{1111} - \omega'_{2112}\mu_1'^2)B_1'^{-1} \quad (4.32)$$

işaretlemeleri kabul edilmiştir. (4.32) ifadelerindeki A' , A_1' , B_1' ve B_2' sabitleri

$$A' = \frac{1}{2\omega'_{2222}\omega'_{2112}} \left[\omega'_{1111}\omega'_{2222} + \omega'_{2112}\omega'_{1221} - (\omega'_{2211} + \omega'_{1212})^2 \right],$$

$$A_1' = \omega'_{1111}\omega'_{1221}(\omega'_{2222}\omega'_{2112})^{-1},$$

$$B_1' = \mu_1'^2 (\omega'_{1212} + \omega'_{1212}\omega'_{1122} + \omega'_{1221}\omega'_{2112}) - \omega'_{1111}\omega'_{1221},$$

$$B_2' = \omega'_{2222}\omega'_{1212}\mu_1'^2 - \omega'_{1122}\omega'_{1221}$$

formülleri yardımıyla belirlenir (Guz, 1991,1999a).

Eğer $h'_A \neq h'/2$ ise, γ 'nın değeri farklı kırılma modlarının yani K_I , K_{II} ve K_{III} değerlerinin aynı anda iştirak ettiği bir ifadeden belirlenir. Dolayısıyla γ 'nın değerinden herhangi bir kırılma moduna ait SIF değerini hesaplamak imkansızdır. Bu nedenle $h'_A \neq h'/2$ durumlarında ön-şekil değiştirmenin sadece γ değerlerine etkisi verilecektir. Sayısal sonuçlar $\lambda/\mu = 1$ durumu için elde edilmiştir. λ ve μ şerit malzemesinin mekanik sabitleri olup (4.1) potansiyeline dahildir.

İlk olarak ön-çekme şekil değiştirmesinin K_I 'e etkisi verilecektir. Ön-çekme şekil değiştirmesi λ_1 parametresi ile gösterilsin. λ_1 parametresine değer verilerek (4.9) ve (4.11)'den öngermelerin ve λ_2 parametresinin değeri bulunabilir.

Tablo 4.1-4.3'de sırasıyla $h/\ell = 0,20; 0,15; 0,10$ ve $h'_A = h'/2$ durumu için farklı λ_1 ve $\ell_0/2\ell$ parametrelerinde, $K_I/K_{I\infty}$ ($K_{I\infty} = p\sqrt{\pi\ell_0}$) değerleri verilmiştir. Bu tablolardan görüldüğü gibi ön-çekme gerilmesi büyüdükçe (çatlak boyunca ön uzama büyüdükçe), K_I değerleri monoton olarak azalmaktadır. Bu düşüş $\ell_0/2\ell$ büyüdükçe daha çok artmaktadır.

Tablo 4.1, Tablo 4.2 ve Tablo 4.3'deki değerler karşılaştırıldığında, şerit-levhanın kalınlığı azaldıkça ön-çekme gerilmesinin etkisi artmaktadır.

Tablo 4.1 $h/\ell = 0,20$ ve $h'_A = h'/2$ iken farklı çatlak uzunluklarında (farklı $\ell_0/2\ell$) ön-çekme gerilmesinin $K_I/K_{I\infty}$ (SIF)'a etkisi.

$\ell_0/2\ell$	λ_1					
	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
0,02	1,0409	1,0217	1,0155	1,0107	1,0107	1,0067
0,04	1,1929	1,1537	1,1281	1,1100	1,0965	1,0861
0,10	1,8512	1,6499	1,5437	1,4785	1,4344	1,4027
0,15	2,5099	2,0505	1,8495	1,7368	1,6646	1,6145
0,20	3,2717	2,4304	2,1241	1,9639	1,8650	1,7978

Tablo 4.2 $h/\ell = 0,15$ ve $h'_A = h'/2$ iken farklı çatlak uzunluklarında (farklı $\ell_0/2\ell$) ön-çekme gerilmesinin $K_I/K_{I\infty}$ (SIF) 'a etkisi.

$\ell_0/2\ell$	λ_1					
	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
0,02	1,0879	1,0706	1,0589	1,0504	1,0440	1,0388
0,04	1,3270	1,2620	1,2214	1,1939	1,1739	1,1588
0,10	2,3002	1,9309	1,7584	1,6586	1,5936	1,5479
0,15	3,2575	2,4187	2,1132	1,9533	1,8547	1,7877
0,20	4,3865	2,8713	2,4320	2,2169	2,0881	2,0020

Tablo 4.3 $h/\ell = 0,10$ ve $h'_A = h'/2$ iken farklı çatlak uzunluklarında (farklı $\ell_0/2\ell$) ön-çekme gerilmesinin $K_I/K_{I\infty}$ (SIF)'a etkisi.

$\ell_0/2\ell$	λ_1					
	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
0,02	1,1865	1,1516	1,1294	1,1141	1,1030	1,0945
0,04	1,6281	1,4889	1,4096	1,3587	1,3233	1,2974
0,10	3,3095	2,4510	2,1366	1,9715	1,8694	1,7999
0,15	4,9775	3,0647	2,5639	2,3241	2,1817	2,0870
0,20	6,9716	3,6184	2,9526	2,6486	2,4714	2,3547

Aşağıda $h'_A \neq h'/2$ durumunda $\gamma\mu/K_{I\infty}^2$ için bulunan sayısal sonuçlar verilecektir. Bu sonuçlar Tablo 4.4–4.6'da sırasıyla $h/\ell = 0,20; 0,15; 0,10$ değerleri için verilmektedir. Bu sonuçlardan görüldüğü gibi çatlak üst yüzeye yaklaştıkça ($(h' - h'_A)/\ell'$ küçüldükçe) ön-çekme gerilmesinin γ değerlerine katkısı monoton olarak artmaktadır. Başka bir deyişle $(h' - h'_A)/\ell'$ küçüldükçe λ_1 parametresinin büyümesi γ değerlerini daha çok düşürmektedir. Ayrıca Tablo 4.4, Tablo 4.5 ve Tablo 4.6 karşılaştırıldığında h/ℓ küçüldükçe γ değerlerine, ön-çekme gerilmesinin etkisinin daha çok arttığı görülmektedir.

Tablo 4.4 $h/\ell = 0,20$ ve $h'_A \neq h'/2$ iken farklı çatlak uzunluklarında (farklı $\ell_0/2\ell$) ön-çekme gerilmesinin $\gamma\mu/K_{I\infty}^2$ 'a etkisi.

$\ell_0/2\ell$	$(h - h_A)/\ell$	λ_1				
		1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
1	2	3	4	5	6	7
0,04	0,10000	0,1627	0,1522	0,1511	0,1480	0,1478
	0,08333	0,1672	0,1577	0,1538	0,1531	0,1510
	0,06666	0,1833	0,1694	0,1633	0,1613	0,1580
	0,05000	0,2245	0,1966	0,1849	0,1798	0,1781
0,10	0,10000	0,9798	0,7891	0,7075	0,6684	0,6501
	0,08333	1,0442	0,8225	0,7310	0,6875	0,6670
	0,06666	1,2832	0,9372	0,8100	0,7514	0,7232
	0,05000	1,9247	1,1945	0,9803	0,8877	0,8427
0,15	0,10000	2,7016	1,8283	1,5233	1,3836	1,3133
	0,08333	2,9387	1,9107	1,5752	1,4243	1,3489
	0,06666	3,8411	2,1906	1,7491	1,5609	1,4680
	0,05000	6,3837	2,7992	2,1203	1,8526	1,7229

Tablo 5,4 'ün devamı

1	2	3	4	5	6	7
0,10 0,20	0,10000	6,1208	3,4247	2,6792	2,3590	2,1983
	0,08333	6,7550	3,5738	2,7677	2,4280	2,2584
	0,06666	9,2011	4,0753	3,0649	2,6599	2,4606
	0,05000	16,2785	5,1499	3,7010	3,1578	2,8954

Tablo 4.5 $h/\ell = 0,15$ ve $h'_A \neq h'/2$ iken farklı çatlak uzunluklarında (farklı $\ell_0/2\ell$) öne-
çekme gerilmesinin $\gamma\mu/K_{I\infty}^2$ 'a etkisi.

$\ell_0/2\ell$	$(h - h_A)/\ell$	λ_1				
		1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
0,04	0,0750	0,2014	0,1847	0,1772	0,1743	0,1740
	0,0625	0,2092	0,1901	0,1815	0,1780	0,1775
	0,0500	0,2370	0,2090	0,1963	0,1907	0,1888
	0,0375	0,3060	0,2524	0,2293	0,2184	0,2135
0,10	0,0750	1,5128	1,0809	0,9180	0,8412	0,8025
	0,0625	1,6336	1,1289	0,9491	0,8658	0,8239
	0,0500	2,0897	1,2926	1,0535	0,9483	0,8958
	0,0375	3,3534	1,6516	1,2767	1,1241	1,0493
0,15	0,0750	4,5509	2,5439	1,9887	1,7502	1,6305
	0,0625	5,0219	2,6544	2,0543	1,8014	1,6751
	0,0500	6,8383	3,0261	2,2747	1,9734	1,8251
	0,0375	12,0921	3,8232	2,7466	2,3429	2,1478
0,20	0,0750	11,0023	4,7799	3,5121	3,0059	2,7556
	0,0625	12,3095	4,9723	3,6240	3,0932	2,8317
	0,0500	17,4075	5,6182	4,0006	3,3873	3,0883
	0,0375	32,4754	7,0008	4,8114	4,0213	3,6418

Tablo 4.6 $h/\ell = 0,10$ ve $h'_A \neq h'/2$ iken farklı çatlak uzunluklarında (farklı $\ell_0/2\ell$) ön-
çekme gerilmesinin $\gamma/K_{I\infty}^2$ 'a etkisi.

$\ell_0/2\ell$	$(h - h_A)/\ell$	λ_1				
		1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
1	2	3	4	5	6	7
0,04	0,05000	0,3031	0,2571	0,2360	0,2258	0,2213
	0,04166	0,3198	0,2670	0,2433	0,2319	0,2267
	0,03333	0,3809	0,3013	0,2683	0,2524	0,2449
	0,02500	0,5391	0,3793	0,3225	0,2964	0,2835

Tablo 4.6'nin devamı

1	2	3	4	5	6	7
0,10	0,05000	3,1316	1,7416	1,3554	1,1886	1,1043
	0,04166	3,4481	1,8162	1,3998	1,2233	1,1344
	0,03333	4,6649	2,0676	1,5491	1,3397	1,2359
	0,02500	8,1651	2,6065	1,8687	1,5897	1,4539
0,15	0,05000	10,6252	4,0843	2,9275	2,4776	2,2562
	0,04166	11,9445	4,2426	3,0196	2,5495	2,3188
	0,03333	17,1080	4,7748	3,3299	2,7918	2,5301
	0,02500	32,4769	5,9172	3,9992	3,3149	2,9861
0,20	0,05000	27,7918	7,5913	5,1767	4,2905	3,8602
	0,04166	31,6051	7,8643	5,3359	4,4147	3,9684
	0,03333	46,6548	8,7843	5,8732	4,8339	4,3333
	0,02500	92,1588	10,7679	7,0343	5,7398	5,1217

Tablo 4.7, Tablo 4.8 ve Tablo 4.9'da ön-basınç şekil değiştirmesinin sırasıyla $h/\ell = 0,20$; $0,15$; $0,10$ ve $h'_A = h'/2$ durumlarında farklı λ_1 ve $\ell_0/2\ell$ için $K_I/K_{I\infty}$ ($K_{I\infty} = p\sqrt{\pi\ell_0}$) değerleri verilmiştir. Bu tablolardan görüldüğü gibi ön-basınç gerilmesi büyüdükçe (çatlak boyunca ön kısalma büyüdükçe) K_I değerleri monoton olarak artmaktadır. Bu artış $\ell_0/2\ell$ büyüdükçe daha fazladır. Ayrıca Tablo 4.7, Tablo 4.8 ve Tablo 4.9 birbirlerine göre karşılaştırıldığında h/ℓ küçüldükçe ön-basınç gerilmesinin $K_I/K_{I\infty}$ değerine etkisinin daha fazla olduğu görülmektedir.

Tablo 4.7 $h/\ell = 0,20$ ve $h'_A = h'/2$ iken farklı çatlak uzunluklarında (farklı $\ell_0/2\ell$) ön-basınç gerilmesinin $K_I/K_{I\infty}$ (SIF)'a etkisi.

$\ell_0/2\ell$	λ_1					
	1,0	0,97	0,95	0,93	0,90	0,87
0,02	1,0409	1,0453	1,0485	1,0520	1,0580	1,0652
0,04	1,1929	1,2091	1,2215	1,2355	1,2602	1,2907
0,10	1,8512	1,9516	2,0375	2,1452	2,3699	2,7315
0,15	2,5099	2,7913	3,0691	3,4798	4,6753	9,0227
0,20	3,2717	3,9295	4,7392	6,3969	25,3359	∞

Tablo 4.8 $h/\ell = 0,15$ ve $h'_A = h'/2$ iken farklı çatlak uzunluklarında (farklı $\ell_0/2\ell$) ön-basınç gerilmesinin $K_I/K_{I\infty}$ (SIF)'a etkisi.

$\ell_0/2\ell$	λ_1					
	1,0	0,97	0,95	0,93	0,90	0,87
0,02	1,0879	1,0949	1,1002	1,1061	1,1163	1,1287
0,04	1,3270	1,3549	1,3768	1,4018	1,4473	1,5058
0,10	2,3002	2,5101	2,7061	2,9770	3,6570	5,2673
0,15	3,2575	3,9129	4,7195	6,3703	25,2201	∞
0,20	4,3865	6,1412	9,8571	80,1818	∞	∞

Tablo 4.9 $h/\ell = 0,10$ ve $h'_A = h'/2$ iken farklı çatlak uzunluklarında (farklı $\ell_0/2\ell$) ön-basınç gerilmesinin $K_I/K_{I\infty}$ (SIF)'a etkisi.

$\ell_0/2\ell$	λ_1					
	1,0	0,97	0,95	0,93	0,90	0,87
0,02	1,1865	1,2012	1,2125	1,2253	1,2481	1,2767
0,04	1,6281	1,6926	1,7455	1,8090	1,9319	2,1070
0,10	3,3095	3,9778	4,7989	6,4768	25,5632	∞
0,15	4,9775	7,7774	18,1308	∞	∞	∞
0,20	6,9716	36,5970	∞	∞	∞	∞

Tablo 4.10, Tablo 4.11 ve Tablo 4.12'de sırasıyla $h/\ell = 0,20; 0,15; 0,10$ değerleri için farklı çatlak uzunluklarında ve $h'_A \neq h'/2$ için ön-basınç gerilmesinin $\gamma\mu/K_{I\infty}^2$ 'a etkisini gösteren sayısal sonuçlar verilmektedir. Bu sonuçlardan görüldüğü gibi, çatlak üst yüzeye yaklaştıkça ($(h' - h'_A)/\ell'$ küçüldükçe) ön-basınç gerilmesinin γ değerlerine katkısı monoton olarak artmaktadır. Başka bir deyişle $(h' - h'_A)/\ell'$ küçüldükçe λ_1 parametresinin büyümesi γ değerlerine daha çok etki etmektedir.

Tablo 4.10 $h/\ell = 0,20$ ve $h'_A \neq h'/2$ iken farklı çatlak uzunluklarında (farklı $\ell_0/2\ell$) ön-basınç gerilmesinin $\gamma\mu/K_{I\infty}^2$ 'a etkisi.

$\ell_0/2\ell$	$(h - h_A)/\ell$	λ_1				
		1,0	0,97	0,95	0,93	0,91
1	2	3	4	5	6	7
0,04	0,10000	0,1627	0,1673	0,1711	0,1759	0,1818
	0,08333	0,1672	0,1721	0,1760	0,1807	0,1864
	0,06666	0,1833	0,1902	0,1960	0,2030	0,2115
	0,05000	0,2245	0,2357	0,2470	0,2611	0,2788

Tablo 4.10'nun devamı

1	2	3	4	5	6	7
0,10	0,10000	0,9798	1,1114	1,2373	1,4134	1,6725
	0,08333	1,0442	1,1769	1,2981	1,4682	1,7149
	0,06666	1,2832	1,5271	1,7630	2,1517	2,8333
	0,05000	1,9247	2,6298	3,5068	5,6457	13,6044
0,15	0,10000	2,7016	3,4961	4,4552	6,2503	10,4155
	0,08333	2,9387	3,7999	4,7319	6,6042	11,1706
	0,06666	3,8411	5,8500	8,3808	17,8369	142,4431
	0,05000	6,3837	15,2744	47,5605	246,8487	∞
0,20	0,10000	6,1208	9,5821	15,7343	38,1640	392,1336
	0,08333	6,7550	11,0325	16,9105	45,3681	∞
	0,06666	9,2011	23,9111	56,6667	∞	∞
	0,05000	16,2785	270,3732	∞	∞	∞

Tablo 4.11 $h/\ell = 0,15$ ve $h'_A \neq h'/2$ iken farklı çatlak uzunluklarında (farklı $\ell_0/2\ell$) ön-basinç gerilmesinin $\gamma\mu/K_{I\infty}^2$ 'a etkisi.

$\ell_0/2\ell$	$(h - h_A)/\ell$	λ_1				
		1,0	0,97	0,95	0,93	0,91
0,04	0,0750	0,2014	0,2097	0,2166	0,2248	0,2348
	0,0625	0,2092	0,2187	0,2267	0,2363	0,2480
	0,0500	0,2370	0,2515	0,2638	0,2790	0,2984
	0,0375	0,3060	0,3360	0,3631	0,3990	0,4482
0,10	0,0750	1,5128	1,7994	2,0918	2,5346	3,2678
	0,0625	1,6336	1,9951	2,3913	3,0514	4,3476
	0,0500	2,0897	2,8133	3,8171	6,1870	15,9802
	0,0375	3,3534	5,9162	12,9265	146,6492	∞
0,15	0,0750	4,5509	6,5586	9,5435	17,4081	59,4136
	0,0625	5,0219	7,7973	13,09825	38,7692	∞
	0,0500	6,8383	14,2586	54,1321	∞	∞
	0,0375	12,0921	78,3765	∞	∞	∞
0,20	0,0750	11,0023	21,5400	55,5070	3677,1730	∞
	0,0625	12,3095	36,7010	1136,2747	∞	∞
	0,0500	17,4075	200,0717	∞	∞	∞
	0,0375	32,4754	∞	∞	∞	∞

Tablo 4.12 $h/\ell = 0,10$ ve $h'_A \neq h'/2$ iken farklı çatlak uzunluklarında (farklı $\ell_0/2\ell$) ön-basınç gerilmesinin $\gamma\mu/K_{I\infty}^2$ 'a etkisi.

$\ell_0/2\ell$	$(h - h_A)/\ell$	λ_1				
		1,0	0,97	0,95	0,93	0,91
0,04	0,05000	0,3031	0,3273	0,3482	0,3744	0,4081
	0,04166	0,3198	0,3483	0,3734	0,4083	0,4474
	0,03333	0,3809	0,4278	0,4720	0,5473	0,6168
	0,02500	0,5391	0,6541	0,7803	1,0572	1,3588
0,10	0,05000	3,1316	4,5188	6,5783	11,9973	40,8665
	0,04166	3,4481	5,3855	9,2779	11,6302	597,6386
	0,03333	4,6649	9,9450	45,2184	∞	∞
	0,02500	8,1651	∞	∞	∞	∞
0,15	0,05000	10,6252	25,9105	140,8466	∞	∞
	0,04166	11,9465	66,0022	∞	∞	∞
	0,03333	17,1080	182404	∞	∞	∞
	0,02500	32,4769	∞	∞	∞	∞
0,20	0,05000	27,7918	771,2523	∞	∞	∞
	0,04166	31,6051	∞	∞	∞	∞
	0,03333	46,6548	∞	∞	∞	∞
	0,02500	92,1588	∞	∞	∞	∞

Tablo 4.7- Tablo 4.12'de bulunan ∞ değerleri "rezonans" tipli bir durumun oluştuğunu göstermektedir. Bu tür bir durumun oluşması, ön-basınç durumunda çatlak içeren sonsuz ortamlar için yapılan araştırmalarda gözlemlenmiştir (Guz, 1991). Guz (1991)'de K_I 'in ∞ değer alması veya K_I 'in ∞ 'a yaklaşması ($K_I \rightarrow \infty$), λ_1 'in ele alınan malzeme için yüzeysel stabilite kaybına karşı gelen değerler alması veya bu değerlere yaklaşması ile açıklanmıştır. Bu tezde ise, K_I 'in (veya γ 'nın) ∞ değer alması λ değerlerinin problem parametrelerinin seçilmiş değerlerinde ele alınan şerit levhanın stabilite kaybı ile açıklanabilir. Bu açıklamanın ispatı Turan ve Akbarov (2005) makalesinde uygun stabilite kaybı probleminin incelenmesi ile gösterilmiştir.

5. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

Tez kapsamında yapılan araştırmalarda elde edilen sayısal sonuçlar ve değerlendirmesi hakkında aşağıdakiler söylenebilir:

1. Tez kapsamında, karşılıklı iki kenarının orta yüzeyine dik yöndeki yerdeğiştirmeleri kısıtlanan ve makro çatlak içeren öngerilmeli anizotrop şerit-levhanın, Üç Boyutlu Lineerize Edilmiş Elastisite Teorisi (ÜBLET) erevesinde, düzlem şekil değiştirme durumunda kırılma parametrelerinin bulunmasına yönelik matematiksel model ve bu modele ait formülasyon belirlenmiştir. şerit-levhadaki öngerilmelerin, homojen olduğu ve çatlak yüzeylerine paralel yönde şerit kenarlarında etki gösteren düzgün yayılı normal doğrultuda yükleme sonucunda oluştuğu varsayılmıştır.
2. Formülasyonu yapılan sınır değer problemlerinin zm, sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla elde edilmiştir. Bunun için gerekli algoritma ve programlar tarafımızdan yapılmıştır.
3. Sonlu elemanlar yöntemi modellemesinde çatlak ucu civarında gerilmelerin $1/\sqrt{r}$ tekilliğine sahip olabilmesi için, zm bölgesinin sonlu elemanlara ayrıklaştırılmasında, çatlak ucu bölgesinde altı nodlu tekil üçgen, geri kalan kısımda dokuz nodlu standart dikdörtgen sonlu elemanlar birlikte kullanılmıştır.
4. Tez çerçevesinde çatlağın yapıdaki konumuna göre, kırılma parametresi olarak gerilme şiddeti faktörü (K) veya enerji boşalma oranı (G) kullanılmıştır. Her iki kırılma parametresinin belirlenmesinde enerji yönteminden yararlanılmış, bunun için gerekli olan matematiksel model, algoritma ve programlar oluşturulmuştur.
5. Ele alınan sınır değer problemlerinde kk n şekil değiştirme durumu için, gerilme şiddeti faktörünün 1. mod (K_I) ve 2. mod (K_{II}) değerleri ile enerji boşalma oranı (G)'nin değerleri, iki farklı anizotropi (enine izotrop ve ortotrop) zellikleri ile yapı elemanının ngerilmesiz ve öngerilmeli olduğu durumlarda ayrı ayrı ele alınmıştır.
6. İncelenen sınır değer problemlerinde sonlu (büyük) n şekil değiştirme durumu için, 1. mod gerilme şiddeti faktörü (K_I) ve enerji boşalma oranı (G) değerleri, cismin öngerilmeli ve izotrop olduğu durumda ele alınmıştır.
7. Her bir durumda, ele alınan cismin geometrik ve malzeme parametreleri ile öngerilmenin (ekme veya basınç öngerilmesinin) kırılma parametrelerine etkisi detaylı olarak incelenmiştir.

8. Her bir problem için yapılan algoritma ve sonlu eleman programlarından elde edilen sayısal sonuçlar özel durumda, literatürdeki uygun sonuçlar ile karşılaştırılarak test edilmiştir.

Tezde verilen çok sayıdaki sayısal sonucun değerlendirmesi aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

1. Ele alınan sınır değer problemleri çerçevesinde, sonlu ortamdaki çatlak boyutları küçültüldükçe, çatlak kenarlarına etki eden yüklemekten dolayı çatlak ucunda oluşan gerilme şiddeti faktörünün değeri, sonsuz ortamdaki uygun değere ($\rho\sqrt{\pi a}$) yakınsamaktadır.
2. Sonsuz ortamda çatlak ucunda oluşan gerilme şiddeti faktörü değerine öngerilmenin etkisinin olmadığı (Guz, 1991), sonlu ortamda ise önemli ölçüde etkilediği belirlenmiştir.
3. Yapı elemanındaki ön-çekme (ön-basınç) gerilmesi yapı elemanının tehlikeli durumdan uzaklaşmasına (yaklaşmasına) sebep olmaktadır.
4. Yapı elemanındaki çatlak boyutlarının büyümesi, çatlakın şerit-levhanın serbest dış yüzeylerine yaklaştırılması, malzemenin anizotropi özelliklerinin artırılması veya basınç öngerilmesinin artması kırılma parametrelerinin değerini artırmakta, çekme öngerilmesinin artması kırılma parametrelerinin değerini düşürmektedir.
5. Yapı elemanında ele alınan basınç öngerilmesi değerinin, bu yapı elemanının uygun stabilite kaybı kritik değerine yaklaşması durumunda, çatlak yüzeyindeki yer değiştirme ve gerilme değerleri çok büyüyerek "rezonans" tipli olayın meydana gelmesine sebep olmaktadır (Tablo 4.7-Tablo 4.12).
6. Yapılan incelemeler sonucunda gerilme şiddeti faktörü K_{II} 'nin değeri, aynı dış kuvvet yoğunluğu için K_I 'in değerinden daima küçük kalmakta ve K_I 'e göre parametre değişimlerinden daha az etkilenmektedir.
7. Yapılan incelemelerde ortotrop malzeme için kayma modülü değişiminin elastisite modülleri değişimine göre kırılma parametrelerini daha fazla etkilediği tespit edilmiştir.
8. Bu çalışma, öngerilmeli küçük veya büyük şekil değiştirme yapabilen yapı elemanları için pek çok açıdan ilk teşebbüsleri oluşturmaktadır.

Yukarıda söylenenlerden başka, tezde teklif edilen ve geliştirilen algoritmaların ve programların, öngerilmeli veya öngerilmemiş, küçük veya büyük şekil değiştirebilen malzemeden yapılmış yapı elemanlarının farklı yükleme ve farklı sınır koşulları için, geliştirilebilir olması tezde yapılan araştırmaların önemini bir kez daha artırmaktadır.

KAYNAKLAR

- Akbarov, S.D. ve Guz, A.N. (2000), *Mechanics of Curved Composites*, Kluwer Academic Publishers, London.
- Akbarov, S.D. ve Rzayev, O.G. (2002), "Delamination of Unidirectional Viscoelastic Composite Materials", *Mechanics of Composite Materials*, 38(1): 17-24.
- Akbarov, S.D. ve Rzayev, O.G. (2003), "On the Delamination of the Viscoelastic Composite Circular Plate", *International Applied Mechanics*, 39(3): 368-374.
- Akbarov, S.D., Yahnioğlu, N. ve Turan, A. (2003), "On the Determination of the SIF at the Macro-Crack Tips in the Pre-stretched Anisotrop Strip", 6th International Fracture Conference, 10-12 September 2003, Konya.
- Akbarov, S.D., Yahnioğlu, N. ve Turan, A. (2004), "Influence of Initial Stresses on Stress Intensity Factors at Crack Tips in a Composite Strip", *Mechanics of Composite Materials*, 40(4), 299-308.
- Anderson, T.L. (1991), *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*, CRC Press, Inc., Boca Raton, Florida.
- Biot, M.A. (1965), *Mechanics of Incremental Deformations*, Willey, New York.
- Chan, S.K., Tuba, I.S. ve Wilson, W.K. (1970), "On the Finite Element Method in Linear Fracture Mechanics", *Engineering Fracture Mechanics*, 2:1-17.
- Chau, K.T ve Wang, Y.B. (1999), "A New Boundary Integral Formulation for Plane Elastic Bodies Containing Cracks and Holes", *International Journal of Solids and Structures*, 36:2041-2074.
- Chen, Y. ve Hasebe, N. (1988), "A Consistency Check for Strongly Interacting Multiple Crack Problem in Isotropic, Bimaterial and Orthotropic Bodies", *International Journal of Fracture*, 89:333-353.
- Cherepanov, G.P. (1979), *Mechanics of Brittle Fracture*, McGraw-Hill, New York.
- Christensen, R.M. (1979), *Mechanics of Composite Material*, Wiley, New York.
- Cotterell, B. ve Mai, Y. (1996), *Fracture Mechanics of Cementations Materials*, Blackie Academic & Professional, Glasgow, England.
- Erdoğan, F. (2000), "Fracture Mechanics", *International Journal of Solids and Structures*, 37: 171-183.
- Gdoutos, E.E. (1993), *Fracture Mechanics; An Introduction*, Kluwer Academic Press, Dordrecht.
- Gorbatikh, L. ve Kachanov, M. (2000), "A Simple Technique for Constructing the Full Stress and Displacement Fields in Elastic Plates with Multiple Cracks", *Engineering Fracture Mechanics*, 66(1): 51-63.
- Gosz, M., Dolbow, J. ve Moran, B. (1998), "Domain Integral Formulation for Stress Intensity Factor Computation along Curved Three-Dimensional Interface Cracks" *International Journal Solids and Structures*, 1763-1783.
- Green, A.E ve Adkins J.E. (1960), *Large Elastic Deformations and Non-Linear Continuum Mechanics*, Oxford at the Clarendon Press, Oxford.
- Griffith, A.A. (1921), "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A-Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 221A:163-198.

Griffith, A.A. (1924), "The Theory of Rupture", In Proceedings of the First International Congress for Applied Mechanics, Delft, Holland, 55-63.

Guangwei, M., Suhuan, C., Hanbing, L. ve Zhichao, W. (1998), "The Influence of Plate Size with Double Cracks on Stress Intensity Factor", Communications in Numerical Methods in Engineering, 14:429-436.

Guz, A.N. (1980), "Theory of Cracks in Elastic Bodies with Initial Stresses Formulation of Problems Tear Cracks", Soviet Applied Mechanics, 16:1015-1024.

Guz, A.N. (1981a), "Theory of Cracks in Prestressed Elastic Bodies With Initial Stresses. Shear Cracks and Limiting Cases", Soviet Applied Mechanics, 17:1-9.

Guz, A.N. (1981b), "Theory of Cracks in Prestressed Highly Elastic Materials", Soviet Applied Mechanics, 17: 110-118.

Guz, A.N. (1981c), "Theory of Cracks in Elastic Bodies with Initial Stresses (Cleavage Problems)", Soviet Applied Mechanics, 17: 311-316.

Guz, A.N. (1981d), "Theory of Cracks in Elastic Bodies with Initial Stresses (Stiff Materials)", Soviet Applied Mechanics, 17: 405-412.

Guz, A.N. (1982a), "Moving Cracks in Elastic Bodies with Initial Stresses", Soviet Applied Mechanics, 18: 137-143.

Guz, A.N. (1982b), "Fracture Mechanics of Solids in Compression", Soviet Applied Mechanics, 18: 213-224.

Guz, A.N. (1983a), Brittle Fracture Mechanics of Pre-stressed Materials, Naukova Dumka, Kiev (in Russian).

Guz, A.N. (1983b), Nonclassical Problems of Fracture Mechanics, Naukova Dumka, Kiev (in Russian).

Guz, A.N. ve Klushnikov, Yu.V. (1984), "Spatial Statical Problem for Elliptical Crack in the Pre-stressed Body", Soviet Applied Mechanics, 20 (10): 22-31.

Guz, A.N. (1986), "Order of Characteristic at Crack Tips in Problems of Brittle Fracture Mechanics of Materials with Initial Stresses", Soviet Applied Mechanics, 22: 20-25.

Guz, A.N. ve Klushnikov, Yu.V. (1987), "Penny Shaped Shear Crack in the Pre-Stresses Body", Soviet Applied Mechanics, 23 (3): 22-29.

Guz, A.N. (1991), "Brittle Fracture of the Materials with Initial Stresses", Naukova Dumka, Kiev (in Russian).

Guz, A.N. (1992), "Construction of Fracture Mechanics for Material Subjected to Compression along Cracks", International Applied Mechanics, 28(10):633-639.

Guz, A.N. (1996), "On the Development of Brittle Fracture Mechanics of Materials with Initial Stresses", International Applied Mechanics, 32 (4): 316-323.

Guz, A.N. (1998), "Dynamic Problems of Brittle Fracture of Materials with Initial Stresses for Moving Cracks 1. Problem Statement and General Relationship", International Applied Mechanics, 34 (12):633-639.

Guz, A.N. (1999a), Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

Guz, A.N. (1999b), "Dynamic Problems of Brittle Fracture of Materials with Initial Stresses for Moving Cracks 2. Cracks of Normal Separation (Mode I)", International Applied Mechanics, 35 (1):1-12.

- Guz, A.N. (1999c), "Dynamic Problems of Brittle Fracture of Materials with Initial Stresses for Moving Cracks 3. Cracks of Transversal Shear (Mode II) and Longitudinal Shear (Mode III)", *International Applied Mechanics*, 35 (2):109-119.
- Guz, A.N. (1999d), "Dynamic Problems of Brittle Fracture of Materials with Initial Stresses for Moving Cracks 4. Wedge Problems", *International Applied Mechanics*, 35 (3):225-232.
- Guz, A.N. (2000), "Description and Study of Some Nonclassical Problems of Fracture Mechanics and Related Mechanisms", *International Applied Mechanics*, 36(1): 1537-1564.
- Guz, A.N. ve Guz, I.A. (2003), "On Publications on the Brittle Fracture Mechanics of Prestressed Materials", *International Applied Mechanics*, 39(7): 797-801.
- Guz, A.N. (2004), "On Some Nonclassical Problems of Fracture Mechanics Taking into Account the Stresses along Cracks", *International Applied Mechanics*, 40(8): 138-144.
- Henshell, R.D. ve Shaw, K.G. (1975), "Crack Tip Finite Elements are Unnecessary", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 9:495-507.
- Inglis, C. (1913), "Stresses in a Plate due to the Presence of Cracks and Sharp Corners", *Trans. Inst. Naval Architects*, LV: 219-230.
- Irwin, G. (1957), "Analysis of Stresses and Strains Near the end of a Crack Traversing a Plate", *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 79:361-364.
- Irwin, G. (1960), "Plastic Zone Near a Crack and Fracture Toughness", In *Proceeding of the Seventh In Proceedings Sagamore Ordnance Materials Conference*, Syracuse University, New York.
- Irwin, G. (1962), "Crack Extension Force for a Part-Through Crack in a Plate" *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 29:651-654.
- Kaninen, M. ve Popelar, C. (1985), *Advanced Fracture Mechanics*, Oxford University Press, Oxford, England.
- Kardestuncer, H. ve Norrie, D. (1987), *Finite Element Handbook*, McGraw Hill, New York.
- Lekhnitskii, S.G (1963), *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Holden Day, San Francisco.
- Liebowitz, H. (1968), *Fracture: An Advanced Treatise in 7 vol.*, Academic Press, New York.
- Okada, H., Higashi, M., Kikuchi, M., Fukui, Y. ve Kumazawa, N. (2005), "Three dimensional Virtual Crack Closure-Integral Method (VCCM) with Skewed and Non-Symmetric Mesh Arrangement at the Crack Front", *Engineering Fracture Mechanics*, 72:1717-1737.
- Parton, V.Z. (1992), *Fracture Mechanics from Theory to Practice* (translated by L. Man), Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam.
- Sih, G. (1973), *Handbook of Stress Intensity Factors*, Lehigh University Press, Bethlehem.
- Solecki, R. ve Conant, R.J. (2003), *Advanced Mechanics of Materials*, Oxford University Press, Oxford, New York.
- Tan, C.L. ve Gao, Y.L. (1990), "Treatment of Bimaterial Interface Crack Problems Using the Boundary Element Method", *Engineering Fracture Mechanics*, 36(6): 919-932.
- Thomas, S.B., Mhaiskar, M.J. ve Sethuraman, R. (2000), "Stress Intensity Factors for Circular Hole and Inclusion Using Finite Element Alternating Method", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 33: 73-81.
- Tsang, D.K.L., Oyadiji, S.O. ve Leung, A.Y.T. (2003), "Multiple Penny-Shaped Cracks Interaction in a Finite Body and Their Effect on Stress Intensity Factor", *Engineering Fracture*

Mechanics, 70:2199-2214.

Turan, A. ve Akbarov, S.D. (2005), "On the Stability Loss of The Strip with Two Parallel Macro-Cracks under Finite Precritical Deformation", International Applied Mechanics, (basımda).

Vardar, Ö. (1988), Fracture Mechanics, Boğaziçi University Publication, İstanbul.

Wang, Qi-Zhi (1996), "The Crack-Line (Plane) Stress Field Method for Estimating SIFs-a Review", Engineering Fracture Mechanics 55(4):593-603.

Wang, Qi-Zhi ve Chen J. (1998), "Two General Equations for Deriving SIF Expressions of Some Axisymmetric Finite Domain Problems", Engineering Fracture Mechanics, 61: 619-634.

Westergaard, H. M. (1939), "Bearing Pressures and Cracks", Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME, 6: 49-53.

Yahnioğlu, N. ve Turan, A.(2003), "Çatlak İçeren Öngerilmeli Şeritte Gerilme Birikimi Şiddeti Faktörüne Öngerilmenin Etkisi", XII Ulusal Mekanik Kongresi , 8-12 Eylül 2003, Gaziantep, 797-806.

Zienkiewicz, O.C ve Taylor, R.L. (1989), The Finite Element Method- 4th Ed. Vol. 1, Basic Formulation and Linear Problems, McGraw-Hill Book Company, London.

Zienkiewicz, O.C.ve Taylor, R.L. (1991), The Finite Element Method. Vol.2. Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Nonlinearity, Mc Graw –Hill Book Company, London

INTERNET KAYNAKLARI

[1] <http://civil.colorado.edu/~saouma/Lecture-Notes/lecfrac.pdf>

EKLER

Ek 1 Lineer Elastik Kırılma Parametreleri

- Ek 1 Lineer Elastik Kırılma Parametreleri
 Ek 2 Gerilme Şiddeti Faktörünün Belirlenmesi Yöntemleri
 Ek 3 Öngerilmeli Ortamlar İçin Kırılma Parametreleri

$$\begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{12} \\ K_{13} \end{bmatrix} = \frac{E_1 \nu_1 \sqrt{2\pi a}}{E_2 \nu_2} \begin{bmatrix} \nu_{21} \\ \nu_{22} \\ \nu_{23} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} K_{21} \\ K_{22} \\ K_{23} \end{bmatrix} = \frac{E_2 \nu_2 \sqrt{2\pi a}}{E_1 \nu_1} \begin{bmatrix} \nu_{11} \\ \nu_{12} \\ \nu_{13} \end{bmatrix} \quad (2A.7)$$

malzemelerin belirlenmesi (Wierzbicki, 1998; Vasilev, 1994). Burada $\nu_{11}, \nu_{12}, \nu_{13}$ çelik malzemenin belirli bir yöndeki gerilme birimliklerindeki ν cisimsel deformasyon katsayılarıdır. K_{11}, K_{12}, K_{13} (K_{21}, K_{22}, K_{23}) ileriye doğru kırılma gerilme şiddetleri denince, ilk terimle 1. gerilme şiddeti, 2. gerilme şiddeti ve 3. gerilme şiddeti, malzemenin kırılma gerilme şiddetleri olarak ifade edilebilir. Bu malzemenin kırılma şiddetleri için literatürden aşağıdaki değerler alınmıştır.



Şekil Ek 1.1. Aşılma modeller ve gerilme şiddetleri

Şekil Ek 1.1'de verilen üç model için Şekil Ek 1.1'de verilen gerilme şiddetleri denince, ilk terimle 1. gerilme şiddeti, 2. gerilme şiddeti ve 3. gerilme şiddeti olarak ifade edilebilir. Bu malzemenin kırılma şiddetleri için literatürden aşağıdaki değerler alınmıştır.

$$K_{11} = \sigma \sqrt{2\pi a}, \quad K_{12} = \tau \sqrt{2\pi a}, \quad K_{13} = \tau \sqrt{2\pi a} \quad (2A.8)$$

Şekil Ek 1.1'de verilen üç model için Şekil Ek 1.1'de verilen gerilme şiddetleri denince, ilk terimle 1. gerilme şiddeti, 2. gerilme şiddeti ve 3. gerilme şiddeti olarak ifade edilebilir. Bu malzemenin kırılma şiddetleri için literatürden aşağıdaki değerler alınmıştır.

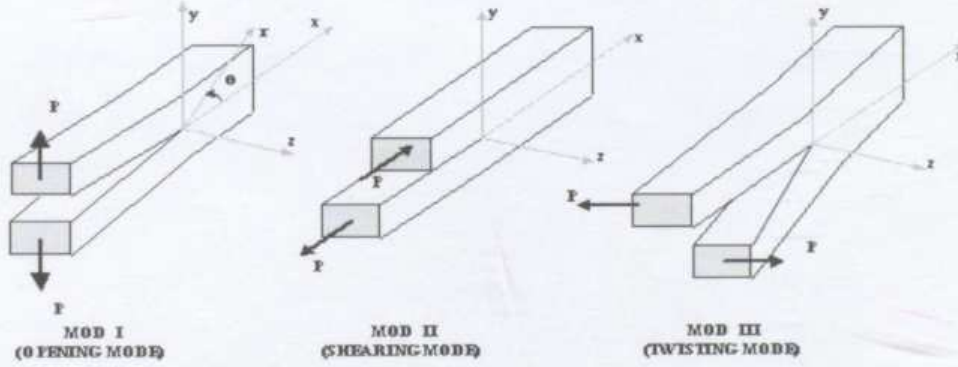
Şekil Ek 1.1'de verilen üç model için Şekil Ek 1.1'de verilen gerilme şiddetleri denince, ilk terimle 1. gerilme şiddeti, 2. gerilme şiddeti ve 3. gerilme şiddeti olarak ifade edilebilir. Bu malzemenin kırılma şiddetleri için literatürden aşağıdaki değerler alınmıştır.

Ek 1 Lineer Elastik Kırılma Parametreleri

Çatlak ucu civarında oluşan gerilme veya yerdeğiştirme fonksiyonlarında yer alan θ 'ya bağımlı ve $1/\sqrt{r}$ tekilliğine sahip terimlerin katsayısı olan gerilme şiddeti faktörünün değeri

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{Bmatrix} = \lim_{r \rightarrow 0, \theta=0} \sqrt{2\pi r} \begin{Bmatrix} \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \text{ veya } \begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{Bmatrix} = \lim_{r \rightarrow 0, \theta=0} \sqrt{2\pi r} \begin{Bmatrix} \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (E1.1)$$

eşitliklerinden belirlenir (Westergaard, 1939; Vardar, 1988). Burada $\sigma_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{yz}$ çatlak ucu civarında seçilen noktadaki gerilme fonksiyonları; r , ele alınan noktanın çatlak ucuna olan mesafesi; K_I, K_{II}, K_{III} (K_1, K_2, K_3) düzlem şekil değiştirme (düzlem gerilme) durumuna ait sırasıyla 1.(opening mod), 2.(shearing mod) ve 3. (twisting mod) mod değerleridir. Bu mod değerleri yükleme durumuna göre birbirinden bağımsız asal modları oluşturur.



Şekil Ek 1.1 Asal modlar ve yükleme durumu

Sonsuz ortamda çatlak içeren cismin Şekil Ek 1.1'de verilen yüklenme durumlarına ait K (SIF) değerleri sırasıyla 1. mod, 2. mod ve 3. mod için

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}, \quad K_{II} = \tau\sqrt{\pi a}, \quad K_{III} = \tau\sqrt{\pi a} \quad (E1.2)$$

olarak elde edilir (Vardar, 1988). (E1.2)'de, a yarı çatlak uzunluğu ve σ, τ sırasıyla I mod, II veya III mod yüklenme durumunda, sonsuzda verilen düzgün yayılı kuvvetin şiddetidir.

Gerilme şiddeti faktörü- K ve kırılma tokluğu- K_c arasındaki ilişkiden çatlak ilerlemesi koşulu

$$(K - K_{Ic}) = \begin{cases} > 0 & \text{çatlak ilerler} \\ < 0 & \text{çatlak ilerlemez} \\ = 0 & \text{çatlak ilerlemesi başlangıcı.} \end{cases} \quad (E1.3)$$

şeklinde verilebilir.

Kırılmayı temsil eden diğer kırılma parametresi enerji boşalma oranı G dir. G 'nin değeri

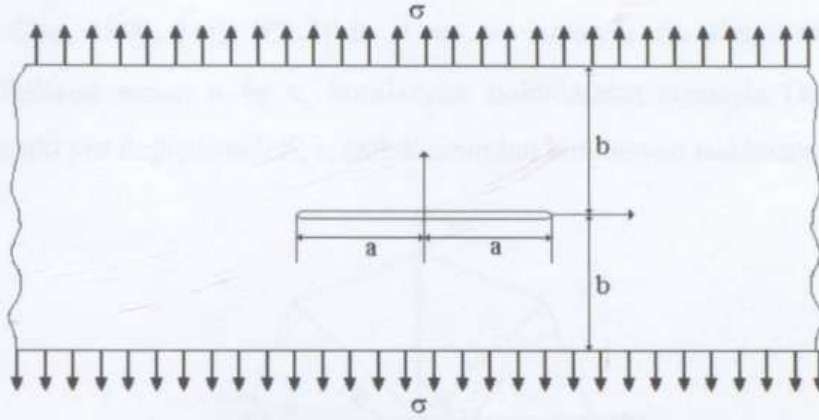
$$G = 2\gamma \quad (E1.4)$$

dir [1]. Burada γ çatlak yüzeylerindeki malzemenin toplam yüzey elastik enerjisidir.

Ek 2 Gerilme Şiddeti Faktörünün Belirlenmesi Yöntemleri

Tez çerçevesinde kullanılan, yaklaşık analitik ve sayısal yöntemlerle K değerlerinin hesaplanması aşağıda verilmiştir.

Yaklaşık Analitik Yöntem: Seri Yardımıyla SIF'in Belirlenmesi Metodu (K-Calibration)



Şekil Ek 2.1 Ele alınan cismin geometrisi ve yükleme durumu

$a/b < 1$ için $2a$ uzunluğunda merkezi çatlak içeren ve şekildeki gibi düzgün yayılı yük etkisinde olan bir cisimde çatlak ucunda oluşan I. mod gerilme şiddeti faktörünün değeri,

$$K_I = F\left(\frac{a}{b}\right)\sigma\sqrt{\pi a} \quad (E2.1)$$

dir (Sih, 1973). (E2.1)'de verilen σ çatlak yüzeylerine dik doğrultuda uygulanan ve çatlaka paralel alt ve üst yüzeylerine etki eden gerilme, a yarı çatlak uzunluğudur. $F\left(\frac{a}{b}\right)$ fonksiyonun ifadesi,

$$F^2\left(\frac{a}{b}\right) = 1 + 2.3498\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 0.4053\left(\frac{a}{b}\right)^4 + 37.3164\left(\frac{a}{b}\right)^6 + O\left(\frac{a}{b}\right)^8 \quad (E2.2)$$

dir (Sih, 1973).

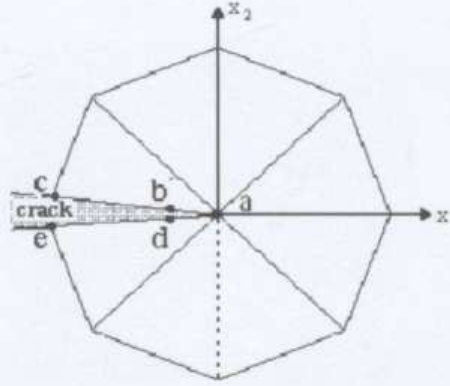
Sayısal Yöntem: Çatlak Ucu Yer Değiştirmeleri Yardımıyla SIF'in Belirlenmesi Metodu (Displacement Correlation Method)

Bu yöntemde, çatlak ucunda gerilme şiddeti faktörünün (SIF) bulunmasında, çatlak ucuna yakın çatlak yüzeylerindeki noktaların (korelasyon noktalarının) yer değiştirmelerinin birbirine göre farklı değer almasından yararlanır (Chan vd., 1970). Çatlak ucu civarındaki tekil sonlu elemanlar (Şekil Ek 2.2) için düzlem şekil değiştirme durumunda K değerleri,

$$K_I = \frac{\mu\sqrt{2\pi}}{\sqrt{r}(2-2\nu)} [4(v_b - v_d) + v_e - v_c]$$

$$K_{II} = \frac{\mu\sqrt{2\pi}}{\sqrt{r}(2-2\nu)} [4(u_b - u_d) + u_e - u_c] \quad (E2.3)$$

dir (Tan ve Gao, 1990; [1]). (E2.3)'de μ ve ν , sırasıyla ele alınan malzemenin kayma modülü ve Poisson oranı; u ve v , korelasyon noktalarının sırasıyla Ox ve Oy eksenleri doğrultularındaki yer değiştirmeleri; r , çatlak ucundan korelasyon noktasına olan uzaklıktır.



Şekil Ek 2.2 Çatlak ucu bölgesinde tekil üçgen sonlu elemanlar

Kullanımının kolaylığı tercih sebebi olmasına karşın, çatlak yüzeylerindeki korelasyon noktalarının (nodların) yer değiştirmeleri kullanılarak SIF'in belirlenmesi birçok zorluk içermektedir; örneğin, (E2.3)'da r 'nin seçimi, sonlu eleman uzunluğunun seçimi v.b. Aynı zamanda bu parametrelerin belirlenen değerleri, farklı problem parametreleri için iyi sonuç vermeyebilmektedir. Bu yüzden SIF'in şekil değiştirme enerjisinden yararlanılarak hesaplanması daha güvenilirdir.

Sayısal Yöntem: Şekil Değiştirme Enerjisi Yardımıyla SIF'in Belirlenmesi

Şekil değiştirme enerjisi yardımıyla SIF, düzlem şekil değiştirme durumunda elastik izotrop ortamlar için uygun mod yüklemesi altında asal mod değerleri

$$K_{I,II} = \sqrt{G_{I,II} \frac{E}{1-\nu^2}} \quad (E2.4)$$

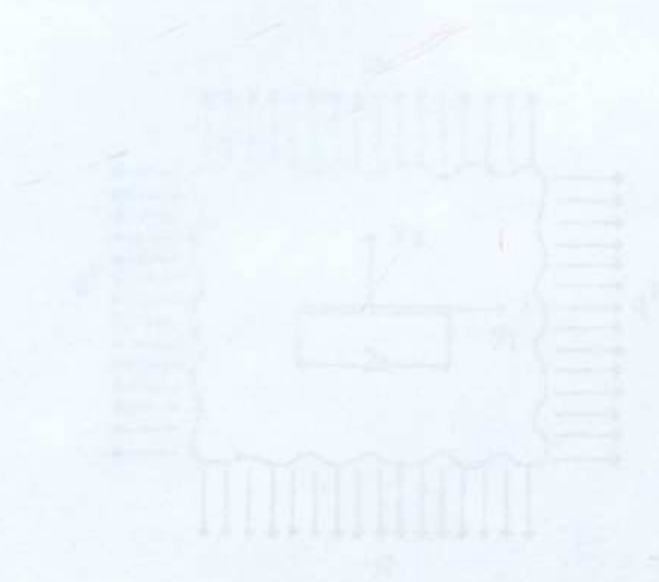
formüllerinden hesaplanır [1]. Burada

$$G = 2\gamma = -\frac{\partial U}{\partial a} \quad (E2.5)$$

dir. (E2.5)'de

$$U = \frac{1}{2} \iint_{\Omega'} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega' \quad (\text{E2.6})$$

dir. Ω' ; Kısım 2.2.3'de, (2.35) ifadelerinde verildiği gibidir.



Şekil Ek. 3.1 Bir alan cisiminde yaygın yük ve Lame'ye göre kayma gerilmeleri

Şekil Ek. 3.1'de gösterilen yapı cisiminde yaygın yükler ve kayma gerilmeleri dağılımı durumu aynı olduğu düşünelim. σ_{xx} Eğrimsiz Lame gerilme gerilme sistemi. Bu durumda öngerilmeden (u^0) dotay cinsinde gerilmelerdir

$$u_{xx}^0 = D_1 x^2 + D_2 x + D_3 \quad (\text{E2.7})$$

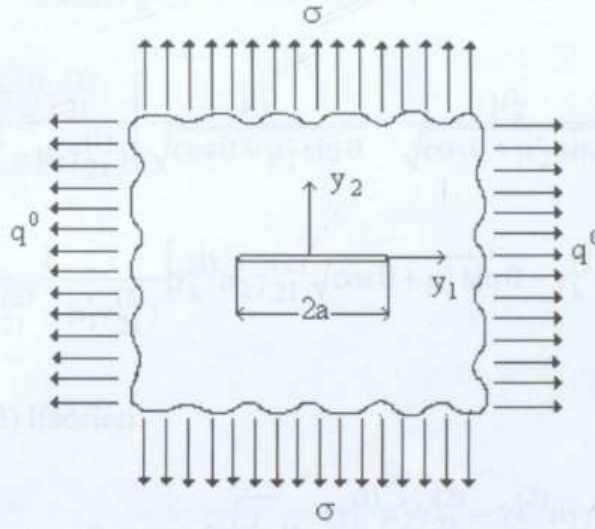
buçininde tahminler (E2.2)'de ϵ_{xx} bulunabilir

$$\epsilon_{xx} = A_{11} u_{xx}^0 \quad (\text{E2.8})$$

dir. Burada A_{11} yaygın yükler, kayma gerilmeleri ve yayılma gerilme durumu oluşturan gerilme durumu için bir katsayıdır. Aynı zamanda A_{11} ile birlikte yayılma gerilme durumu için bir katsayıdır. Aynı zamanda gerilme ve yayılma gerilmeleri arasındaki ilişkiyi gösteren formüllerle birlikte (E2.9) olarak yazılabilir.

Ek 3 Öngerilmeli Ortamlar İçin Kırılma Parametreleri

I. mod ve II. Mod yükleme durumunda, öngerilmeli ortamlar için cisimdeki çatlak ucu civarında oluşan yer değiştirme ve gerilme yayılımına ait formüller, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi yardımıyla uygun sınır değer problemlerinin çözümü sonucunda elde edilmiştir (Guz, 1991, 1999a). Bununla birlikte ön-şekil değiştirmenin küçük veya sonlu (büyük) olması durumları birbirinden farklı modellenmektedir. Burada sıkıştırılabilen malzemelere ait formülasyon verilecektir.



Şekil Ek 3.1 Ele alınan cisimde öngerilme ve I.mod yükleme durumu

Şekil Ek 3.1'de gösterilen yapı elemanı ve yükleme durumu için ön şekil değiştirme durumunun sonlu olduğu durumda Oy_1y_2 Lagrange koordinat takımı ele alınsın. Bu cisimde öngerilmeden (q^0) dolayı oluşan yer değiştirmeler

$$u_m^0 = (\lambda_m - 1)x_m, \quad \lambda_m = \text{sabit}_m \quad (\text{E3.1})$$

biçiminde belirlenmektedir. (E3.1)'de x_m koordinatları

$$x_m = \lambda_m^{-1}y_m, \quad \lambda_m = \text{sabit}_m \quad (\text{E3.2})$$

dir. Burada $\sigma \ll q^0$ olduğu kabul edilecektir. σ yüklemesinden dolayı oluşan gerilme durumu simetrik olmayan Kirchoff gerilme tansörü bileşenleri, Q'_{ij} 'lerle belirlenir. Bu durumda çatlak ucu civarındaki gerilme ve yer değiştirmeler aşağıdaki formüllerle hesaplanır (Guz, 1991, 1999a).

$$Q'_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \frac{1}{(\mu'_2 \gamma_{21}^{(2)} - \mu'_1 \gamma_{21}^{(1)})} \left[\frac{\mu'_2 \gamma_{21}^{(2)}}{\sqrt{\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta}} - \frac{\mu'_1 \gamma_{21}^{(1)}}{\sqrt{\cos \theta + \mu'_2 \sin \theta}} \right],$$

$$Q'_{21} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \frac{\mu'_1 \mu'_2 \gamma_{21}^{(1)} \gamma_{21}^{(2)}}{(\mu'_2 \gamma_{21}^{(2)} - \mu'_1 \gamma_{21}^{(1)})} \left[\frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu'_2 \sin \theta}} \right],$$

$$Q'_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \frac{\mu'_1 \mu'_2}{(\mu'_2 \gamma_{21}^{(2)} - \mu'_1 \gamma_{21}^{(1)})} \left[\frac{\gamma_{21}^{(2)}}{\sqrt{\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta}} - \frac{\gamma_{21}^{(1)}}{\sqrt{\cos \theta + \mu'_2 \sin \theta}} \right],$$

$$Q'_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \frac{\mu'_1 \mu'_2 \gamma_{21}^{(1)} \gamma_{21}^{(2)}}{(\mu'_2 \gamma_{21}^{(2)} - \mu'_1 \gamma_{21}^{(1)})} \left[\frac{\mu'_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta}} - \frac{\mu'_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu'_2 \sin \theta}} \right],$$

$$u_k = 2\sqrt{\frac{r}{2\pi}} K_I \operatorname{Re} \frac{1}{(\mu'_2 \gamma_{21}^{(2)} - \mu'_1 \gamma_{21}^{(1)})} \left[\gamma_k^{(1)} \mu'_2 \gamma_{21}^{(2)} \sqrt{\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta} - \gamma_k^{(2)} \mu'_1 \gamma_{21}^{(1)} \sqrt{\cos \theta + \mu'_2 \sin \theta} \right] \quad (\text{E3.3})$$

$\theta = 0$ durumunda (E3.3) ifadeleri

$$Q'_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}, \quad Q'_{21} = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_k = 2\sqrt{\frac{r}{2\pi}} K_I \frac{(\gamma_1^{(1)} \mu'_2 \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_2^{(2)} \mu'_1 \gamma_{21}^{(1)})}{(\mu'_2 \gamma_{21}^{(2)} - \mu'_1 \gamma_{21}^{(1)})}, \quad (\text{E3.4})$$

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$$

olur. Burada aşağıdaki işaretlemeler kabul edilmiştir.

$$A' = \frac{1}{2\omega'_{2222}\omega'_{2112}} \left[\omega'_{1111}\omega'_{2222} + \omega'_{2112}\omega'_{1221} - (\omega'_{2211} + \omega'_{1212})^2 \right],$$

$$A'_1 = \frac{\omega'_{1111}\omega'_{1221}}{\omega'_{2222}\omega'_{2112}},$$

$$\mu'_{1,2} = i\sqrt{A \pm \sqrt{A^2 - A_1}},$$

$$B'_j = \omega'_{2222}\omega'_{2112}\mu_j^2 + \omega'_{1111}\omega'_{2222} - \omega'_{1122}(\omega'_{1122} + \omega'_{1212}),$$

$$\gamma_{21}^{(j)} = \mu_j'^{-2} (\omega'_{2112}\omega'_{1122}\mu_j'^2 - \omega'_{1111}\omega'_{1212}) B_j'^{-1},$$

$$\gamma_1^{(j)} = -(\omega'_{1122} + \omega'_{1212})\mathbf{B}'_j^{-1}, \quad \gamma_2^{(j)} = \mu_j'^{-1}(\omega'_{2112}\mu_j'^2 + \omega'_{1111})\mathbf{B}'_j^{-1}, \quad j=1,2 \quad (\text{E3.5})$$

dir. (E3.3), (E3.4) formülleri $\mu'_1 \neq \mu'_2$ durumuna aittir. $\mu'_1 = \mu'_2$ durumunda ise (E3.3) formülleri yerine aşağıdakiler elde edilir (Guz, 1991, 1999a).

$$Q'_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[\text{Re}(\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta)^{-1/2} + \frac{\sin \theta}{2C_{(1)}} \text{Re} \mu'_1 (\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta)^{-3/2} \right],$$

$$Q'_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[\text{Re} \frac{\gamma_{21}^{(2)} + \gamma_{21}^{(1)} \gamma_{12}^{(2)}}{2C_{(1)} \sqrt{\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta}} + \frac{\sin \theta}{2C_{(1)}} \text{Re} \frac{\mu_1'^2}{(\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta)^{3/2}} \right],$$

$$Q'_{21} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\sin \theta}{2C_{(1)}} \text{Re} \mu_1'^2 \gamma_{21}^{(1)} (\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta)^{3/2},$$

$$Q'_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[\text{Re} \frac{\gamma_{11}^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} - \gamma_{21}^{(2)} \mu_1' \gamma_{11}^{(1)}}{2C_{(1)} \gamma_{21}^{(1)} \sqrt{\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta}} + \frac{\sin \theta}{2C_{(1)}} \frac{\text{Re} \mu_1' \gamma_{11}^{(1)}}{(\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta)^{3/2}} \right],$$

$$u_k = \frac{K_I}{2C_{(1)}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \text{Re} \left[2\gamma_k^{(2)} - \gamma_k^{(1)} \frac{2\gamma_{21}^{(2)} - \mu_1' \gamma_{21}^{(1)}}{\mu_1' \gamma_{21}^{(1)}} \sqrt{\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta} - \gamma_k^{(1)} \frac{\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta}{\sqrt{\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta}} \right],$$

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}, \quad k=1,2 \quad (\text{E3.6})$$

(E3.4) ve (E3.6) formüllerinde r ve θ çatlak ucu civarındaki keyfî noktanın polar koordinatlarıdır. (E3.6)'de aşağıdaki işaretlemeler kabul edilmiştir.

$$\mathbf{B}'_{(1)} = (\omega'_{1212}{}^2 + \omega'_{1212}\omega'_{1122} - \omega'_{1221}\omega'_{2112})\mu_1'^2 - \omega'_{1111}\omega'_{1221},$$

$$\mathbf{B}'_{(2)} = \omega'_{2222}\omega'_{1212}\mu_1'^2 - \omega'_{1122}\omega'_{1221},$$

$$\gamma_{21}^{(1)} = \frac{1}{2} \left[\mu_1'^{-2} (\omega'_{2112}\omega'_{1122}\mu_1'^2 - \omega'_{1111}\omega'_{1212})\mathbf{B}'_{(1)}^{-1} - [\omega'_{2222}\omega'_{2112}\mu_1'^2 + \omega'_{2112}\omega'_{1221} + \omega'_{1122}(\omega'_{1122} + \omega'_{1212})]\mathbf{B}'_{(2)}^{-1} \right],$$

$$\gamma_{21}^{(2)} = \frac{\mu_1'}{2} \left[\mu_1'^{-2} (\omega'_{2112}\omega'_{1122}\mu_1'^2 + 3\omega'_{1111}\omega'_{1212})\mathbf{B}'_{(1)}^{-1} + [3\omega'_{2112}\omega'_{2222}\mu_1'^2 - \omega'_{2112}\omega'_{1221} + \omega'_{1122}(\omega'_{1122} + \omega'_{1212})]\mathbf{B}'_{(2)}^{-1} \right],$$

$$\gamma_{12}^{(2)} = \frac{\mu_1'}{2} \left[\left(\omega_{1212}'^2 + \omega_{1212}' \omega_{1122}' - \omega_{2112}' \omega_{1221}' \right) \mu_1'^2 + 3\omega_{1111}' \omega_{1221}' \right] \mathbf{B}_{(1)}'^{-1} + \left(3\omega_{2222}' \omega_{1212}' \mu_1'^2 - \omega_{1221}' \omega_{1221}' \right) \mathbf{B}_{(2)}'^{-1} \Big],$$

$$\gamma_{11}^{(1)} = -\gamma_{21}^{(1)},$$

$$-2\gamma_{11}^{(2)} = \mu_1'^2 \left[\left(3\omega_{2112}' \omega_{1122}' \mu_1'^2 + \omega_{1111}' \omega_{1212}' \right) \mathbf{B}_{(1)}'^{-1} + \left(\omega_{1122}'^2 + \omega_{1122}' \omega_{1212}' - \omega_{1111}' \omega_{2222}' \right) \mu_1'^2 - 3\omega_{1111}' \omega_{1221}' \right] \mathbf{B}_{(2)}'^{-1} \Big]$$

$$-2\gamma_1^{(1)} = \mu_1'^2 \left(\omega_{1111}' + \omega_{1212}' \right) \mathbf{B}_{(1)}'^{-1} + \left(\omega_{2222}' \mu_1'^2 + \omega_{1221}' \right) \mathbf{B}_{(2)}'^{-1},$$

$$\gamma_1^{(2)} = \left(\omega_{2222}' \mu_1'^2 - \omega_{1221}' \mu_1'^2 \right) \mathbf{B}_{(2)}'^{-1},$$

$$-2\mu_1'^{-1} \gamma_2^{(1)} = \left(\omega_{1111}' + \omega_{2112}' \right) \mathbf{B}_{(1)}'^{-1} + \left(\omega_{1122}' + \omega_{1212}' \right) \mathbf{B}_{(2)}'^{-1},$$

$$\gamma_2^{(2)} = \mu_1' \left(\omega_{1111}' - \omega_{2112}' \mu_1'^2 \right) \mathbf{B}_{(1)}'^{-1},$$

$$2C_{(1)} = \gamma_{21}^{(2)} - \mu_1' \gamma_{21}^{(1)} \gamma_{22}^{(2)}. \quad (\text{E3.7})$$

(E3.5) ve (E3.7)'deki $\omega'_{ij\alpha\beta}$ 'ler, malzeme sabitleri ile öngerilme büyüklüklerine bağlı olarak aşağıdaki biçimde belirlenir.

$$\omega'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_j \lambda_\alpha \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2} \left[\delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} A_{i\beta} + (1 - \delta_{ij}) (\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha} \mu_{ij} + \lambda_\alpha^{-2} \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha} S_0^{\beta\beta}) \right]. \quad (\text{E3.8})$$

Burada $S_0^{\beta\beta}$ öngerilme durumuna ait simetrik Cauchy gerilme tansörü bileşenlerini belirtmektedir. $A_{i\beta}$ ve μ_{ij} ise malzemenin mekanik özelliklerini gösteren sabitlerdir.

Görüldüğü gibi, sonsuz ortamda her iki durumda da ($\mu_1' \neq \mu_2'$ ve $\mu_1' = \mu_2'$) öngerilmeler K_1 değerine hiçbir etki göstermemektedir ((E3.4) ve (E3.6) formülleri).

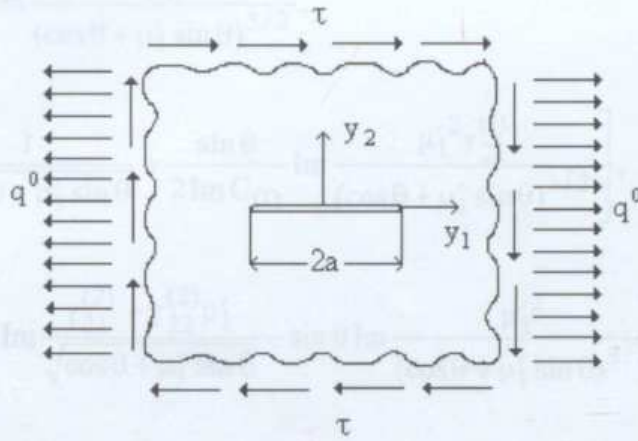
Ön şekil değiştirmenin küçük olduğu durumlarda sadece $\mu_1' \neq \mu_2'$ durumu oluşur ve Kirchoff gerilme tansörü bileşenleri ile adi simetrik gerilme tansörü bileşenleri çakışır. Çatlak ucu civarında gerilme bileşenleri ise

$$Q'_{22} = \sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \frac{1}{\mu'_2 - \mu'_1} \left[\frac{\mu'_2}{\sqrt{\cos\theta + \mu'_1 \sin\theta}} - \frac{\mu'_1}{\sqrt{\cos\theta + \mu'_1 \sin\theta}} \right],$$

$$Q'_{21} = Q'_{12} = \sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \frac{\mu'_1 \mu'_2}{\mu'_2 - \mu'_1} \left[\frac{1}{\sqrt{\cos\theta + \mu'_1 \sin\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + \mu'_1 \sin\theta}} \right],$$

$$Q'_{11} = \sigma_{11} = \operatorname{Re} \frac{\mu'_1 \mu'_2}{\mu'_2 - \mu'_1} \left[\frac{\mu'_1}{\sqrt{\cos\theta + \mu'_1 \sin\theta}} - \frac{\mu'_2}{\sqrt{\cos\theta + \mu'_1 \sin\theta}} \right] \quad (\text{E3.9})$$

ile belirlenir (Guz, 1991).



Şekil Ek 3.2 Ele alınan cisimde öngerilme ve II.mod yükleme durumu

Şekil Ek 3.2' de verilen 2. mod yüklemesi için ön şekil değiştirmelerin sonlu ve $\mu'_1 \neq \mu'_2$ olması durumunda, çatlak ucu civarındaki gerilmeler ve yer değiştirmeler

$$Q'_{22} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \frac{1}{\mu'_2 \gamma_{21}^{(2)} - \mu'_1 \gamma_{21}^{(1)}} \left[\frac{1}{\sqrt{\cos\theta + \mu'_1 \sin\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + \mu'_2 \sin\theta}} \right],$$

$$Q'_{21} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \frac{1}{\mu'_2 \gamma_{21}^{(2)} - \mu'_1 \gamma_{21}^{(1)}} \left[\frac{\mu'_2 \gamma_{21}^{(2)}}{\sqrt{\cos\theta + \mu'_1 \sin\theta}} - \frac{\mu'_1 \gamma_{21}^{(1)}}{\sqrt{\cos\theta + \mu'_2 \sin\theta}} \right],$$

$$Q'_{12} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \frac{1}{\mu'_2 \gamma_{21}^{(2)} - \mu'_1 \gamma_{21}^{(1)}} \left[\frac{\mu'_2}{\sqrt{\cos\theta + \mu'_1 \sin\theta}} - \frac{\mu'_1}{\sqrt{\cos\theta + \mu'_2 \sin\theta}} \right],$$

$$Q'_{11} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \frac{1}{\mu'_2 \gamma_{21}^{(2)} - \mu'_1 \gamma_{21}^{(1)}} \left[\frac{\mu_1'^2 \gamma_{11}^{(1)}}{\sqrt{\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta}} - \frac{\mu_2'^2 \gamma_{11}^{(2)}}{\sqrt{\cos \theta + \mu'_2 \sin \theta}} \right],$$

$$u_k = 2K_{II} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{Re} \frac{1}{\mu'_2 \gamma_{21}^{(2)} - \mu'_1 \gamma_{21}^{(1)}} \left[\gamma_k^{(1)} \sqrt{\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta} - \gamma_k^{(2)} \sqrt{\cos \theta + \mu'_2 \sin \theta} \right], \quad (E3.9)$$

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi a}, \quad k=1,2 \quad (E3.10)$$

dir (Guz, 1991). $\mu'_1 = \mu'_2$ için, (E3.10) ifadeleri aşağıdaki ifadeler ile yer değiştirir (Guz, 1991).

$$Q'_{22} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\sin \theta}{2 \operatorname{Im} C_{(1)}} \operatorname{Im} \frac{\mu'_1}{(\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta)^{3/2}},$$

$$Q'_{21} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[\operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta}} + \frac{\sin \theta}{2 \operatorname{Im} C_{(1)}} \operatorname{Im} \frac{\mu_1'^2 \gamma_{21}^{(1)}}{(\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta)^{3/2}} \right],$$

$$Q'_{12} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{2 \operatorname{Im} C_{(1)}} \left[\operatorname{Im} \frac{\gamma_{21}^{(2)} + \gamma_{22}^{(2)} \mu'_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta}} - \sin \theta \operatorname{Im} \frac{\mu_1'^2}{(\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta)^{3/2}} \right],$$

$$Q'_{11} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{2 \operatorname{Im} C_{(1)}} \left[\operatorname{Im} \frac{\gamma_{11}^{(2)} - \mu_1'^2 \gamma_{11}^{(1)} \gamma_{22}^{(2)}}{\sqrt{\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta}} - \sin \theta \operatorname{Im} \frac{\mu_1'^3 \gamma_{11}^{(1)}}{(\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta)^{3/2}} \right],$$

$$u_k = \frac{K_{II}}{2 \operatorname{Im} C_{(1)}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{Im} \left[2\gamma_k^{(2)} - \gamma_k^{(1)} (\gamma_{22}^{(2)} - 1) \sqrt{\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta} - \gamma_k^{(1)} \frac{\cos \theta - \mu'_1 \sin \theta}{\sqrt{\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta}} \right],$$

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi a}, \quad k=1,2. \quad (E3.11)$$

2. mod yüklemesi için ön şekil değiştirmelerin küçük olduğu durumda, 1. modda olduğu gibi, sadece $\mu'_1 \neq \mu'_2$ durumu oluşur. Kirchoff gerilme tansörü bileşenleri, klasik simetrik gerilme tansörü bileşenleri ile çakışır. Çatlak ucu civarındaki gerilmeler aşağıdaki formüller ile ifade edilir (Guz, 1991, 1999a).

$$Q'_{22} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \frac{1}{\mu'_2 - \mu'_1} \left[\frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu'_2 \sin \theta}} \right],$$

$$Q'_{21} = Q'_{12} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \frac{1}{\mu'_2 - \mu'_1} \left[\frac{\mu'_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta}} - \frac{\mu'_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu'_2 \sin \theta}} \right],$$

$$Q'_{11} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \frac{1}{\mu'_2 - \mu'_1} \left[\frac{\mu_1'^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu'_1 \sin \theta}} - \frac{\mu_2'^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu'_2 \sin \theta}} \right]. \quad (E3.12)$$

Yukarıdaki sonuçlardan görüldüğü gibi, mikro çatlaklar için ele alınan cisimde öngerilme olduğu durumda K_I ve K_{II} , öngerilme olmadığı durumdaki aynı formüllerle hesaplanır. Dolayısıyla, mikro çatlaklar için öngerilmeler gerilme şiddeti faktörüne etki etmemektedir (Guz, 1991; Akbarov vd., 2003; Yahnioğlu ve Turan, 2003; Akbarov vd., 2004).

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	25.05.1978	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1991-1994	Kadıköy Kazım İşmen Lisesi
Lisans	1994-1998	Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya-Metalurji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü,
Yüksek Lisans	1998-2001	Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı,
Doktora	2001-	Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Çalıştığı kurum(lar)

1998-Devam ediyor YTÜ, Kimya-Metalurji Fakültesi,
Matematik Müh. Bölümünde Araştırma Görevlisi

