T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ MERTEBEYE SAHİP DİFERANSİYEL-CEBİRSEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

BİROL İBİŞ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
PROF.DR. A.GÖKSEL AĞARGÜN

İSTANBUL, 2011

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ MERTEBEYE SAHİP DİFERANSİYEL-CEBİRSEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Birol İBİŞ tarafından hazırlanan tez çalışması 28.10.2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof.Dr.A.Göksel AĞARGÜN

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof.Dr.A.Göksel AĞARGÜN

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Prof.Dr.Mustafa BAYRAM

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Doç.Dr.Cevdet CERİT

İstanbul Teknik Üniversitesi ________________________

Doç.Dr.İbrahim EMİROĞLU

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Doç.Dr.Ünsal TEKİR

Marmara Üniversitesi ________________________

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı hazırlamam sırasında bana yardımcı olan değerli hocam Prof.Dr.A.Göksel AĞARGÜN'e, yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Prof.Dr.Mustafa BAYRAM'a, çalışmalarım sırasında beni manevi açıdan destekleyen ve yanımda olan sevgili ailem ile arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Ekim, 2011

Birol İBİŞ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMA LİSTESİ vii

ŞEKİL LİSTESİ viii

ÇİZELGE LİSTESİ ix

ÖZET x

ABSTRACT xi

BÖLÜM 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 2
1.2 Tezin Amacı 4
1.3 Hipotez 5

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE TEOREMLER 6

BÖLÜM 3

DİFERANSİYEL-CEBİRSEL DENKLEMLER 13

3.1 Diferansiyel-Cebirsel Denklemler 14
3.2 Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin İndeksi 14
3.3 Sabit Katsayılı Lineer Diferansiyel-Cebirsel Denklemler 15

BÖLÜM 4

DİFERANSİYEL-CEBİRSEL DENKLEMLER İÇİN YAKLAŞIK ÇÖZÜM METODLARI 18

4.1 Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DDM) 18
4.2 Varyasyonel İterasyon Metodu (VİM) 21
4.3 Adomian Ayrışım Metodu (AAM) 22
4.4 Kuvvet Serileri ile Çözüm Metodu 25

BÖLÜM 5

KESİRLİ MERTEBEYE SAHİP DİFERANSİYEL-CEBİRSEL DENKLEMLER İÇİN YAKLAŞIK ÇÖZÜM METODLARI 39

5.1 Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Metodu (KDDM) 40
5.2 Adomian Ayrışım Metodu (AAM) 46
5.3 Varyasyonel İterasyon Metodu (VİM) 48
5.4 Kesirli Kuvvet Serileri ile Çözüm Metodu 49

BÖLÜM 6

ARAŞTIRMA SONUÇLARI 51

BÖLÜM 7

SONUÇ VE ÖNERİLER 97

KAYNAKLAR 98

ÖZGEÇMİŞ 102

KISALTMA LİSTESİ

DDM	Diferansiyel Dönüşüm Metodu
KDDM	Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Metodu
VİM	Varyasyonl İterasyon Metodu
AAM	Adomian Ayrışım Metodu
HPM	Homotopy Pertürbasyon Metodu
HAM	Homotopy Analiz Metodu
CAD/CAM	Bilgisayar Destekli Tasarım

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 4.1 (4.30) diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonunun tam çözümü ile yaklaşık çözümlerinin grafikleri .... .36

Şekil 4.2 (4.30) diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $y(t)$ fonksiyonunun tam çözümü ile yaklaşık çözümlerinin grafikleri 37

Şekil 4.3 (4.30) diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $z(t)$ fonksiyonunun tam çözümü ile yaklaşık çözümlerinin grafikleri 38

Şekil 6.1 (6.1) denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonunun $\alpha = 1, \alpha = 0.75$ ve $\alpha = 0.5$ değerleri için grafikleri 57

Şekil 6.2 (6.19) denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonunun $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$ ve $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ değerleri için grafikleri............................ 68

Şekil 6.3 (6.19) denklem sistemindeki $y(t)$ fonksiyonunun $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$ ve $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ değerleri için grafikleri............................ 68

Şekil 6.4 (6.38) denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonunun $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$ ve $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ değerleri için grafikleri............................ 81

Şekil 6.5 (6.38) denklem sistemindeki $y(t)$ fonksiyonunun $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$ ve $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ değerleri için grafikleri............................ 81

Şekil 6.6 (6.59) denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonunun $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$ ve $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ değerleri için grafikleri........................... 95

Şekil 6.7 (6.59) denklem sistemindeki $y(t)$ fonksiyonunun $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$ ve $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ değerleri için grafikleri........................... 95

Şekil 6.8 (6.59) denklem sistemindeki $z(t)$ fonksiyonunun $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$ ve $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ değerleri için grafikleri........................... 96

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 4.1 Bazı fonksiyonların diferansiyel dönüşümü 20
Çizelge 4.2 (4.30) diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümlerin karşılaştırması 36
Çizelge 4.3 (4.30) diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $y(t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümlerin karşılaştırması 37
Çizelge 4.4 (4.30) diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $z(t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümlerin karşılaştırması 38
Çizelge 6.1 (6.1) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümlerinin karşılaştırması 58
Çizelge 6.2 (6.19) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümlerinin karşılaştırması 69
Çizelge 6.3 (6.19) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $y(t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümlerinin karşılaştırması 70
Çizelge 6.4 (6.38) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümlerinin karşılaştırması 79
Çizelge 6.5 (6.38) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $y(t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümlerinin karşılaştırması 80
Çizelge 6.6 (6.59) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümlerinin karşılaştırması 92
Çizelge 6.7 (6.59) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $y(t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümlerinin karşılaştırması 93
Çizelge 6.8 (6.59) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $z(t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümlerinin karşılaştırması 94

ÖZET

KESİRLİ MERTEBEYE SAHİP DİFERANSİYEL-CEBİRSEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Birol İBİŞ

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof.Dr. A.Göksel AĞARGÜN

Bu çalışmada, kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemler için nümerik çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Tez yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde daha önce yapılmış olan çalışmalar kısaca ele alınmıştır. İkinci bölümde çalışmanın diğer bölümlerinde kullanılan bazı tanımlar ile teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde diferansiyel-cebirsel denklemler ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. Dördüncü bölümde diferansiyel-cebirsel denklemler için uygulanmış olan nümerik çözüm yöntemlerinden Diferansiyel Dönüşüm Metodu, Adomian Ayrışım Metodu, Varyasyonel İterasyon Metodu ile Kuvvet serileri ile çözüm metodu verilerek bir test problemi üzerinde bu metodlar uygulanmıştır. Beşinci bölümde ise kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemler ele alınarak bu denklemler için nümerik çözüm metodları geliştirilmiştir. Altıncı bölümde ise geliştirilen nümerik çözüm metodları çeşitli test problemlerine uygulanarak sonuçlar karşılaştırılmıştır. Son bölümde ise uygulanan nümerik metodlardan elde edilen sonuçlar yorumlanıp öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel-cebirsel denklemler, kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemler, Differensiyel Dönüşüm Metodu, Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Metodu, Adomian Ayrışım Metodu, Varyasyonel İterasyon Metodu, Kesirli Kuvvet Serileri.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTIONS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC EQUATIONS

Birol İBİŞ

Department of Mathematics

Ph.D. Thesis

Advisor: Prof. Dr. A.Göksel AĞARGÜN

In this study,We developed numerical solution methods fort he fractional differential-algebraic equations. The thesis is made up of seven sections. In the first section, The studies that has been done previously are expressed briefly. In the second section, the definitions and theorems that will be used later are given. In the third section general information about the fractional differential-algebraic equations is given. In the fourth section, among the numerical solution methods applied for differential-algebraic equations, Fractional Differential Transform Method, Adomain Decomposition Method, Variational Iteration Method and Fractional Power Series Method are explaided and applied to a test problem. In the section five, fractional differential-algebraic equations are investigated and numerical methods are developed. In the section six, developed numerical solutions are applied to various test problems and the results are compared. In the last section, the results taken from numerical methods are commented and suggestions presented.

Anahtar Kelimeler: Differential-Algebraic Equations, Fractional Differential-Algebraic Equations, Differetial Transform Method, Fractional Differential Transform Method, Adomian Decomposition Method, Variational Itereation Method, Fractional Power Series.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Yapmış olduğumuz doktora tez çalışmasında, kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemlerin nümerik çözümlerinin bulunması amaçlanmıştır. Genel olarak, çeşitli mühendislik bilimleri, doğa bilimleri (fizik, kimya v.b) gibi uygulamalı bilim dallarında ortaya çıkan matematiksel modellemelerde karşılaşılan problemler adi/kısmi diferansiyel denklem, diferansiyel-cebirsel denklem içermektedir. Elektrik devre tasarımı, matematiksel modelleme teorisi, bilgisayar destekli tasarım (CAD/CAM), mekanik sistemlerin simülasyonu, güç sistemleri, kimyasal işlemlerin simülasyonu ve optimal kontrol gibi problemlerin matematiksel modellemelerinde diferansiyel-cebirsel denklemler önemli bir rol oynamaktadır. Bu tip diferansiyel denklemlerin çözümü için literatürde birçok farklı yöntem geliştirilmiştir. Uygulamalı bilim dallarında karşılaşılan problemlerin matematiksel modellemelerinde lineer problemlerden ziyade lineer olmayan problemlerin ortaya çıkması, problemlerin çözümlerinin analitik biçimde elde edilmesini daha da zorlaştırmaktadır. Bu ise diferansiyel denklemlerin açık çözümlerinin veya herhangi bir başka yöntem kullanılarak nümerik çözümlerinin bulunması sorununu ortaya çıkarmıştır. Bu sorun nümerik ve yaklaşık çözüm yöntemlerinin geliştirilmesini daha da önemli kılmaktadır. Nümerik yöntemler son zamanlarda teorinin pratikte uygulanabilirliği bakımından çok önemli rol oynamaktadır. Hızlı bilgisayarların varlığı, uygulamalı bilim dallarında ortaya çıkan karmaşık problemlerin nümerik yöntemlerle daha hızlı çözülmesine imkan vermektedir. Bugüne kadar birbirlerinden farklı birçok nümerik yöntem ortaya konmuştur. Bilgisayar teknolojisinin hızla gelişmesi ile birlikte nümerik yöntemlerin bilgisayar ortamında uygulanabilirliği de artmıştır. Basit bir algoritmayla çok daha hızlı sonuçlanan, hem lineer hemde lineer olmayan problemlerin çözümünde kullanılabilen metotlar ortaya konmuştur.

1.1 Literatür Özeti

Diferensiyel-cebirsel denklemlerin nümerik çözümleri için ilk genel teknik 1970 yılında Gear tarafından ele alınmıştır. Gear, süresiz network analizi ve sürekli sistem simülasyonunda ortaya çıkan diferansiyel-cebirsel denklemleri inceleyerek sınıflandırmış ve çözümlerini incelemiştir [1].

Petzold, diferansiyel-cebirsel denklemlerin adi diferansiyel denklemlerden farklı olduğunu ortaya koymuştur [2].

Gear ve Petzold, adi diferansiyel denklemler için geliştirilmiş nümerik yöntemlere göre diferansiyel-cebirsel denklemlerin çözülebilirlikleri incelemiş, sınıflandırmış ve çözülememe durumlarını ortaya koymuşlardır [3].

Brenan, Campbell ve Petzold, elektrik akımının simülasyonu, kimyasal reaksiyonlar gibi matematiksel modellemelerde ortaya çıkan

$$M(t)y' = f(t, y), \quad t \in [a, b]$$

şeklindeki diferansiyel-cebirsel denklemlerin çözümüyle ilgilenmişlerdir [4].

Hairer, Lubich ve Roche, Runge-Kutta metodunu kullanarak diferansiyel-cebirsel denklemlerin nümerik çözümleriyle ilgili çalışma yapmış ve bu tip denklemleri çözmek için başlangıç/sınır değer metotlarını sunmuştur [5].

Ascher ve Spiter, sıralama (collocation) metodunu kullanarak sınır değerleri verilmiş diferansiyel-cebirsel denklemleri çözmüşlerdir [6].

Lucht ve Strehmel, sabit katsayılı lineer kısmi türevli diferansiyel-cebirsel denklemlerin indeksleri, başlangıç ve sınır değer tutarlılıkları, ve nümerik çözümleri üzerine çalışmalar yapmışlardır [7],[8],[9].

Martinson ve Barton, kısmi türevli diferansiyel-cebirsel denklemlerin karakteristik analizi ve diferansiyel indeks üzerine çalışmışlardır [10],[11].

Müler, diferansiyel-cebirsel denklemlerle modellenmiş dinamik sistemin iyi yönleri (pros) ve kötü yönleri (cons) ile ilgili bir çalışma yapmıştır [12].

Çelik ve Bayram, diferansiyel-cebirsel denklemlerin çözümünde Páde yaklaşımını kullanmışlardır [13],[14],[15].

Ayaz, diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanarak, diferansiyel-cebirsel denklemler için yeni bir nümerik yaklaşım ortaya koymuştur [16].

Çelik ve Yeloğlu, Diferansiyel-cebirsel denklemlerin Chebyshev serileri yardımıyla nümerik çözümü üzerinde çalışmalar yapmışlardır [17].

Kızıloğlu, Adomian ayrıştırma metodunu kullanarak diferansiyel-cebirsel denklemlerin nümerik çözümü üzerinde çalışmalar yapmıştır [18].

Debrabant ve Strehmel, lineer kısmi türevli diferansiyel-cebirsel denklemlere uygulanan Runge–Kutta metodunun yakınsaklığını incelemişlerdir [19].

Guzel ve Bayram, Páde yaklaşımını yüksek indeksli diferansiyel-cebirsel denklemlere uygulamışlardır [20].

Hosseini, Adomian ayrışım metodununu lineer ve lineer olmayan diferansiyel-cebirsel denklemlere uygulamıştır [21],[22].

Lıu ve Song, diferansiyel dönüşüm metodunun, 2-indeksli diferansiyel-cebirsel denklemlere uygulanabilirliğini, 3-indeksli diferansiyel-cebirsel denklemlere uygulanamadığını ortaya koymuşlardır [23].

Diferansiyel-cebirsel denklemlerin nümerik çözümleri üzerine yapılan çalışmaların yanı sıra Campbell ve Marz lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin indeksi ve çözülebilirliğini incelemişler, Hosseini de lineer Hessenberg sistemleri için indeks indirgeme metodu ortaya koymuştur [24],[25],[26],[27].

Mertebesi tamsayı olmayan, yani kesirli mertebeye sahip türev ve integralle, teoride çok eskiden beri bilinmesine karşılık fizik, kimya ve mühendislik alanlarındaki uygulamalarıyla son dönemlerde sıklıkla karşılaşılmaktadır. Son zamanlarda kesirli mertebeye sahip diferansiyel denklemlerin çözülebilirlikleri için birçok çalışma yapılmıştır. Kesirli mertebeye sahip diferansiyel denklemlerin çözümlerinde özellikle

Laplace ve Fourier dönüşümleri gibi birçok analitik yaklaşımlar ortaya konulmuştur. Ancak bu yöntemler, lineer ve sabit katsayılı problemlerin çözümlerinde daha çok işe yaramaktadır. Fakat uygulamalarda karşılaşılan kesirli mertebeye sahip diferansiyel denklemler lineer veya sabit katsayılı olamayacağı gibi tam çözümlerinin de bulunamaması matematikçileri yeni yöntemlerin geliştirilmesine sevk etmiştir. Son dönemlerde yapılan çalışmalarda, Varyasyonel Iterasyon Metodu (VIM), Homotopy Perturbasyon Metodu (HPM), Homotopy Analiz Metodu (HAM), Adomian Ayrışım Metodu (ADM) ve Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DDM) gibi yaklaşık çözüm yöntemlerine ağırlık verilmiştir.

Arikoglu ve Özkol, kesirli mertebeye sahip diferansiyel denklemler için diferansiyel dönüşüm metodunu tanımlayarak bu denklemlere uygulamışlardır [28].

Momani ve Al-Khaled, ayrışım (decomposition) metodunu kesirli mertebeye sahip diferansiyel denklem sistemleri için uygulamışlardır [29].

Odibat ve Momani, varyasyonel iterasyon metodunu kesirli mertebeye sahip diferansiyel denklemlere uyarlamışlardır [30].

Adomian ayrışım metodunu; Ray ve Bera, kesirli mertebeye sahip lineer olmayan diferansiyel denklemeler için; Hu,Luo ve Lu ise kesirli mertebeye sahip sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemler için uygulamışlardır [31],[32].

Abdulaziz, Hashim, ve Momani, Homotopy analiz metodunu, kesirli mertebeye sahip başlangıç değer problemlerine, Ganjiani ise kesirli mertebeye sahip lineer olmayan diferansiyel denklemlere uygulamıştır [33],[34].

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmada, kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemler için nümerik çözüm yöntemlerinin geliştirilmesi amaçlanmıştır. Zurigat, Momani ve Alawneh, yayınladıkları makalede kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemleri tanımlamışlar ve bu denklemler için Homotopy Analiz Metodunu (HAM) geliştirerek elde edilen sonuçları yayınlamışlardır [35]. Bu tezde, Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Metodu (KDDM), Adomian Ayrışım Metodu (AAM), Varyasyonel İterasyon Metodu (VİM) ve Kesirli Kuvvet Serileri ile Çözüm yöntemleri Kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemler için geliştirilerek uygulanmıştır. Geliştirilen yöntemlerden elde edilen sonuçlar kendi aralarında ve Homotopy analiz metodu ile karşılaştırılmış ve yakın sonuçlar elde edilmiştir. Uygulanan yöntemlerden, Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Metodunun, diğer metodlara göre çözüme daha kolay ulaştığı görülmüştür. Fakat bu yöntemin uygulanamadığı problem tipleri için diğer yöntemlerin uygulanabilirliği gözlemlenmiştir.

1.3 Hipotez

Kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemler için yaklaşık çözüm yöntemleri araştırılmış ve bu tip denklemlere uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar, Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Metodu (KDDM), Adomian Ayrışım Metodu (AAM), Varyasyonel İterasyon Metodu (VİM) ve Kesirli Kuvvet Serileri ile Çözüm yöntemlerinin Kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemlere uygulanabilirliği ortaya konmuştur.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Uygulamalı bilim dallarında karşılaşılan matematiksel modellemelere ait problemler genel olarak adi diferansiyel denklem, kısmi diferansiyel denklem, diferansiyel-cebirsel denklem ve son zamanlarda da kesirli mertebeli diferansiyel denklem olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu tip denklemlerin analitik çözümleri denklemin yapısına göre değişmektedir. Özellikle analitik olarak çözümü mümkün olmayan denklemlerin nümerik çözümlerinin araştırılması, matematiksel modelleme teorisinin gelişmesine büyük katkı sağlamıştır. Bu bölümde tezimizde sık kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. Burada yer verilen bazı teoremlerin ispatları, literatürde ayrıntılı bir şekilde verildiği için ayrıca yapılmamıştır.

Tanım 2.1 Bir bağımsız değişken ile bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denkleme diferansiyel denklem denir. Bu tür denklemler genel olarak

$$f(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{2.1}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $y^{(n)}$, *y*'nin *x*'e göre *n*-inci mertebeden türevini temsil etmektedir. (2.1) denklemi $y^{(n)}$ 'ye göre çözüldüğünde

$$y^{(n)} = g(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \tag{2.2}$$

elde edilir. Bu denklem (2.1) diferansiyel denkleminin açık formda yazılmış şeklidir.

Tanım 2.2 $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$ (2.3)

şeklindeki denklemlere lineer diferansiyel denklem denir. Burada, eşitliğin sağ tarafındaki r ve sol tarafta ki $p_0, p_{1,\cdots,} p_{n-1}$ katsayıları x değişkenine bağlıdır.

Tanım 2.3 m **-**inci dereceden bir

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m \tag{2.4}$$

polinomun sıfıra eşit kılınmasıyla elde edilen

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0 \tag{2.5}$$

ifadesine cebirsel denklem, pozitif m tamsayısına da (2.5) denkleminin derecesi denir. $f(x)$ polinomunda $f(x_i) = 0$ denklemini sağlayan x_i değerlerine denklemin kökü denir.

Tanım 2.4 Eğer $f(x)$ fonksiyonunun $x_0 = c$ de her mertebeden türevi varsa, $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \ldots \tag{2.6}$$

şeklinde yazılabilir. (2.6) ifadesinden elde edilen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \tag{2.7}$$

toplamına $x_0 = c$ noktasında $f(x)$ fonksiyonunun Taylor serisi adı verilir. Eğer (2.7) denkleminde $c = 0$ alınırsa

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{2.8}$$

toplamına $f(x)$ fonksiyonunun Maclaurin serisi adı verilir.

Tanım 2.5 Leopold Kronecker tarafından tanımlanan aşağıdaki fonksiyona Kronecker-Delta fonksiyonu denir.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{2.9}$$

Tanım 2.6 (Gamma Fonksiyonu) $n > 0$ için,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Gamma Fonksiyonu denir. Gamma fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

1. $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n),\ n > 0$ ve $\Gamma(n+1) = n!\ ,\ n = 0,1,2,\ldots$ (2.11)

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (2.12)

3. $\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n},\ n < 0$ (2.13)

4. $\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}\ ,\ 0 < p < 1$ (2.14)

5. $2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(2x)$ (2.15)

Tanım 2.7 (Beta Fonksiyonu) Beta fonksiyonu iki değişkenli bir fonksiyondur ve aşağıdaki şekilde tanımlanır,

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \qquad x > 0,\ y > 0 \tag{2.16}$$

Beta fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

1. $\beta(x,y) = \beta(y,x)$ (2.17)

2. $\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ (2.18)

Tanım 2.8 (Mittag-Leffler Fonksiyonu) Mittag-Leffler fonksiyonu e^x üstel fonksiyonunun genelleştirilmiş halidir ve kesirli analizde (fractional calculus) önemli bir rol oynar. Mittag-Leffler fonksiyonu tek değişkenli ve iki değişkenli olmak üzere aşağıdaki gibi kuvvet serileri yardımıyla tanımlanır.

$$E_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0 \tag{2.19}$$

$$E_{a,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0 \tag{2.20}$$

Tanım 2.9 (Mellin-Ross Fonksiyonu) Mellin-Ross fonksiyonu $E_t(v,a)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$E_t(v,a) = t^v e^{at} \Gamma^*(v,t) \tag{2.21}$$

Ayrıca Mellin-Ross fonknsiyonu,

$$E_t(v,a) = t^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k+v+1)} = t^v E_{1,v+1}(at) \tag{2.22}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Tanım 2.10 (Dirichlet's Formulü) $h(\ x,\ y$ sürekli bir fonksiyon ve $\mu, v > 0$ olmak üzere,

$$\int_0^t (t-x)^{\mu-1} dx \int_0^x (x-y)^{v-1} h(x,y) dy = \int_0^t dy \int_y^t (t-x)^{\mu-1} (x-y)^{v-1} h(x,y) dx \tag{2.23}$$

Eğer $h(x,y) = g(x) f(y)$ ve $g(x) = 1$ alınırsa,

$$\int_0^t (t-x)^{\mu-1} dx \int_0^x (x-y)^{v-1} f(y) dy = B(\mu, v) \int_0^t (t-y)^{\mu+v-1} f(y) dy \tag{2.24}$$

elde edilir. Burada β, beta fonksiyonunu ifade etmektedir.

Tanım 2.11 $x > 0$ ve $f(x)$ reel fonksiyonu için $f_1(x) \in C[0,\infty)$ olmak üzere $f(x) = x^p f_1(x)$ olacak şekilde bir $p > \mu,\ (\mu \in R)$ reel sayısı varsa $f(x)$ reel fonksiyonuna C_μ uzayındadır denir. Eğer $n \in N$ ve $f^{(n)} \in C_\mu$ ise $f(x)$ fonksiyonuna C_μ^n uzayındadır denir.

Tanım 2.12 (Riemann-Liouville integral operatörü) Bir $f \in C_\mu,\ \mu > -1$ fonksiyonu için $\alpha \geq 0$ mertebeli J_a^α Riemann-Liouville integral operatörü,

$$J_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x \geq a, \tag{2.25a}$$

$$J_{a^-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^a (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x \leq a, \tag{2.25b}$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak Riemann-Liouville integral operatöründe $\alpha = 0$ için,

$$J_a^0 f(x) = f(x) \tag{2.26}$$

elde edilir.

Teorem 2.1 Riemann-Liouville integral operatörü için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

1. $$J_a^\alpha J_a^\beta f(x) = J_a^\beta J_a^\alpha f(x) = (J_a^{\alpha+\beta}) f(x), \ \ \alpha, \beta \geq 0, \ \ f \in C_\mu, \ \mu \geq -1, \tag{2.27}$$

2. $$J_a^\alpha (x-a)^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \cdot (x-a)^{\alpha+\gamma}, \ \ \alpha > 0, \ \gamma > -1, \ \ x > 0 \tag{2.28}$$

Tanım 2.13 (Riemann-Liouville Kesirli Türevi) Bir $f(x)$ fonksiyonunun α -mertebeli Riemann-Liouville kesirli türevi Riemann-Liouville integral operatörü yardımıyla tanımlanır. $m-1 \leq \alpha < m, \ m \in Z^+$ ve $x > x_0$ olmak üzere,

$${}_aD_x^\alpha f(x) = D^m \left[{}_aD_x^{-(m-\alpha)} f(x) \right] = D^m \left[J_a^{(m-\alpha)} f(x) \right] = \frac{d^m}{dx^m} \left[J_a^{(m-\alpha)} f(x) \right] \tag{2.29}$$

eşitliğinde Riemann-Liouville integral operatörü yardımıyla verilen Riemann-Liouville kesirli türevi (2.25)'den,

$${}_aD_x^\alpha f(x) = D^m \left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t)dt \right) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \cdot \frac{d^m}{dx^m} \left(\int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t)dt \right) \tag{2.30}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Tanım 2.14 (Caputo Kesirli Türevi) Bir $f(x)$ reel değerli fonksiyonun α -mertebeli Caputo kesirli türevi, $f \in C_{-1}^{m}$ için,

$$ {}_{a}D_{*}^{\alpha} f(x) = J^{(m-\alpha)}\left[f^{(m)}(x) \right], \tag{2.31}$$

veya,

$$ {}_{a}D_{*}^{\alpha} f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \displaystyle\int_{a}^{x} (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t)dt, m-1<\alpha<m,\ m\in N \\ \dfrac{d^{m}}{dx^{m}} f(x) \qquad\qquad\qquad ,m=\alpha \end{cases} \tag{2.32}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2 Caputo kesirli türevi için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

1. $$D_{*}^{\alpha} J^{\alpha} f(x) = f(x) \tag{2.33}$$

2. $$J^{\alpha} D_{*}^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^{+}) \frac{x^{k}}{k!}, x>0,\ n-1<\alpha\le n, n\in N \tag{2.34}$$

3. $$D_{*}^{\alpha}(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda D_{*}^{\alpha} f(x) + \mu D_{*}^{\alpha} g(x),\ \ \lambda, \mu \text{ birer sabit.} \tag{2.35}$$

4. $$D_{*}^{\alpha} D_{*}^{\beta} f(x) = D_{*}^{\alpha+\beta} f(x),\ \ \alpha, \beta \in R^{+}, \tag{2.36}$$

5. $$D_{*}^{\alpha}(x^{\gamma}) = \begin{cases} 0 & , \gamma \in N \cup \{0\}\ ve\ \ \gamma<n \\ \dfrac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} x^{\gamma-\alpha}, & \gamma \in N\, ve\ \gamma \ge m\ veya\ \ \gamma \notin N\, ve\, \gamma > m \end{cases} \tag{2.37}$$

Tanımlardan da görüleceği gibi kesirli mertebeden bir türevi elde etmek için Caputo kesirli türevinde ilk önce adi türev, daha sonra kesirli integral işlemleri uygulanmaktadır. Riemann-Liouville kesirli türevinde ise bu işlemlerin sırası yer değiştirmiştir.

Teorem 2.3 (Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi) $0<\alpha\le 1$ için $f(x)\in C[a,b]$ ve $D_{a}^{\alpha} f(x) \in C(a,b]$ olsun. Bu durumda,

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(D_a^{\alpha} f\right)(\xi)\cdot(x-a)^{\alpha} \tag{2.38}$$

olur. Burada, $\forall x \in (a,b]$ için $a \le \xi \le x$ ve D_a^{α}, α -mertebeli Caputo kesirli türevdir.

İspat (2.25a) ve (2.34) den

$$(J_a^{\alpha} D_a^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\left(D_a^{\alpha} f\right)(t)dt \tag{2.39}$$

İntegral ortalama değer teoreminden,

$$(J_a^{\alpha} D_a^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(D_a^{\alpha}\right)(\xi)\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(D_a^{\alpha} f\right)(\xi)\cdot(x-a)^{\alpha}, \quad 0 \le \xi \le x \tag{2.40}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (2.34) den,

$$(J_a^{\alpha} D_a^{\alpha} f)(x) = f(x) - f(a) \tag{2.41}$$

olur. (2.39) ve (2.41) den (2.38) elde edilir. $\alpha = 1$ olması durumunda genelleştirilmiş ortalama değer teoremi klasik bilinen ortalama değer teoremine dönüşür.

BÖLÜM 3

DİFFERANSİYEL-CEBİRSEL DENKLEMLER

Mekanik sistemlerin simülasyonu, güç sistemleri, kimyasal işlemlerin simülasyonu, optimal kontrol, elektrik devre tasarımı, moleküler dinamik gibi uygulamalı bilimlerde karşımıza çıkan matematiksel modelleme problemlerinin bazıları diferansiyel-cebirsel denklem şeklinde olduğu görülmektedir. Son yıllarda yapılan araştırmalar, diferansiyel-cebirsel denklemlerin nümerik çözüm yöntemleri üzerinde yoğunlaşmıştır. Diferansiyel-cebirsel denklemlerin nümerik çözümleri için ilk genel teknik 1970 yılında Gear tarafından verilmiştir [1]. Daha sonra araştırmacılar tarafından pek çok yöntem geliştirilmiştir. Hairer, diferansiyel-cebirsel denklemlerin çözümü için Runge–Kutta yöntemini kullanmıştır [5]. Ascher ve Spıter, sınır değeri verilmiş diferansiyel-cebirsel denklemlerin çözümü için sıralama (collocation) yöntemini kullanmışlardır [6]. Çelik ve Bayram, diferansiyel-cebirsel denklemlerin çözümünde Pade yaklaşımını kullanmışlardır [13],[14],[15]. Ayaz, diferansiyel dönüşüm yöntemini diferansiyel-cebirsel denklemlere uygulamıştır [16]. Güzel ve Bayram, Pade yaklaşımını yüksek indeksli diferansiyel-cebirsel denklemlere uygulamışlardır [20]. Hosseini, lineer ve lineer olmayan diferansiyel-cebirsel denklemlerin çözümü için Adomian ayrıştırma yöntemini kullanmıştır [21],[22]. Liu ve Song, Adomian ayrıştırma yöntemini yüksek indeksli diferansiyel-cebirsel denklemlere uygulamışlardır [23]. Diferansiyel-cebirsel denklemlerin nümerik çözümleri üzerine yapılan çalışmaların yanısıra Campbell ve Marz, lineer ve lineer olmayan diferansiyel-cebirsel denklemlerin indeksi ve çözülebilirliklerini incelemişler; Hosseini de yüksek indeksli diferansiyel-cebirsel denklemlerde indeks indirgeme için bir yöntem sunmuştur [24],[25],[26],[27].

3.1 Diferansiyel-Cebirsel Denklemler

Tanım 3.1.1 Diferansiyel-cebirsel denklem sistemi başlangıç değerleri ile birlikte

$$F\big(t, y(t), y'(t)\big) = 0 \tag{3.1a}$$

$$y(t_0) = y_0 \ , \ \ y'(t_0) = y_1 \tag{3.1b}$$

formundadır. (3.1a) denklemine kapalı (implicit) diferansiyel-cebirsel denklem denir. Burada $F \in R^n, y \in R^n \ ve \ \ t \in R$ dir.

$$Ay' + f(y,t) = 0 \tag{3.2a}$$

$$y(t_0) = y_0 \ , \ \ y'(t_0) = y_1 \tag{3.2b}$$

denklemine lineer kapalı diferansiyel-cebirsel denklem denir. Diferansiyel-cebirsel denklemi açık formda,

$$F(y', y, x, t) = 0 \tag{3.3a}$$

$$G(y, x, t) = 0 \tag{3.3b}$$

şeklinde yazılabilir. (3.3) denklem sisteminin (3.3b) kısmında görüldüğü gibi diferansiyel-cebirsel denklemler üzerinde cebirsel kısıtlamalar vardır. Burada y diferansiyel değişken ve x de cebirsel değişkendir. Eğer (3.1) denklem sistemi *n*-tane denkleme sahip ve *p*-tanesi diferansiyel değişken ise *(n-p)* tanesi cebirsel değişkendir.

3.2 Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin İndeksi

İndeks kavramı, diferansiyel-cebirsel denklemlerin davranışlarında ve sınıflandırılmasında önemli bir rol oynamaktadır. İndeks tanımını vermeden önce

$$x' = f\left(x, y, t\right) \tag{3.4a}$$

$$0 = g\left(x, y, t\right) \tag{3.4b}$$

ifadesini göz önüne alalım. Diferansiyel-cebirsel denklemin bu şekilde yazılışına yarı–açık form denir.(3.4b) denkleminin *t* ye göre türevi alındığında,

$$x' = f(x, y, t) \tag{3.5a}$$

$$g_x(x, y, t)x' + g_y(x, y, t)y' = -g_t(x, y, t) \tag{3.5b}$$

denklem sistemi elde edilir. Eğer g_y nonsingüler ise (3.5) sistemi adi diferansiyel denklem sistemine indirgenir ve bu durumda diferansiyel-cebirsel denklemin indeksinin 1 (bir) olduğu söylenir. Eğer (3.5) sistemi adi diferansiyel denklem sistemine dönüşmezse bazı matematiksel işlemler ve koordinat değişiklikleri yardımıyla adi diferansiyel denklem elde edilmeye çalışılır. Eğer açık formda adi diferansiyel denklem elde edilirse, (3.4) sisteminin indeksi 2 (iki)'dir denir. Eğer elde edilen yeni sistem de açık formda yazılmış adi diferansiyel denklem değilse işleme açık formda yazılmış adi diferansiyel elde edilinceye kadar devam edilir. Bu sırada yapılan türev alma sayısına sistemin indeksi denir.

3.2.1 Tanım (3.1a) diferansiyel-cebirsel denkleminin y' diferansiyelini oluşturabilmek için denkleminin hepsinin veya bir kısmının *t* ye bağlı minimum türevlenebilme sayısına (3.1a) denklem sisteminin indeksi denir [4].

3.3 Sabit Katsayılı Lineer Diferansiyel-Cebirsel Denklemler

A ve B $m \times m$ tipinde iki matris olmak üzere,

$$Ax' + Bx = f \tag{3.6}$$

sabit katsayılı lineer diferansiyel-cebirsel denklem sistemi olsun. λ kompleks parametre olmak üzere, $\lambda A + B$ matrisine matris kalemi denir. Burada, P ve Q $m \times m$ tipinde nonsingüler matrisler olmak üzere, $x = Qy$ dönüşümü yapılır ve (3.6) denkleminin her iki yanı P matrisi ile çarpılırsa,

$$PAQy' + PBQy = Pf \tag{3.7}$$

elde edilir. Böylece yeni matris kalemi $\lambda PAQ + PBQ$ olur.

Eğer $\lambda A + B$ nın determinantı sıfırdan farklı ise, matris kalemi regülerdir.

3.3.1 Teorem Eğer $\lambda A + B$ kalemi regüler ise, o zaman $Ax' + Bx = f$ sistemi çözülebilirdir [4].

3.3.2 Teorem $\lambda A + B$ kalemi regüler olsun. N nilpotentlik derecesi *k* olan nilpotent matris ($N^k = 0$ ve $N^{k-1} \neq 0$ ise *N* ye nilpotent matris ve *k* ya da nilpotentlik derecesi denir) ve *I* birim matris olmak üzere,

$$PAQ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \quad PBQ = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

olacak şekilde P ve Q nonsingüler matrisleri vardır [4].

Burada $N = 0$ ise $k = 1$ dir. Ayrıca A nonsingüler ise $PAQ = I, PBQ = C, k = 0$ olarak alınabilir. $\det(\lambda A + B)$ sabit ise, (3.8) ifadeleri $PAQ = N, PBQ = I$ şeklinde düzenlenebilir. N nin nilpotentlik derecesi $\lambda A + B$ kaleminin indeksi, dolayısıyla diferansiyel-cebirsel denklemin indeksidir.

Teorem 3.3.2'yi sağlayan P ve Q matrisleri (3.6) denklemine uygulanırsa, (3.6) denklemi (3.7) denklemine dönüşür. (3.7) denklemi (3.8) formunda yazılırsa,

$$y_1' + Cy_1 = f_1 \tag{3.9}$$

$$Ny_2' + y_2 = f_2 \tag{3.10}$$

sistemi elde edilir. (3.9) denklemi bir adi diferansiyel denklemdir ve herhangi bir f_1 ve başlangıç değeri için bir çözüm vardır. (3.10) denklemi,

$$(ND + I)y_2 = f_2 \tag{3.11}$$

şeklinde yazılabilir ($D = d/dt$). Buradan $f_2^{(i)} = d^i f_2 / dt^i$ ve $(ND)^k = 0$ olmak üzere (3.11) denklemi,

$$y_2 = (ND + I)^{-1} f_2 = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i N^i f_2^{(i)} \tag{3.12}$$

şeklinde çözülebilir. Bu ifade daha açık bir şekilde yazılacak olursa,

$$y_2 = f_2 - Nf_2' + N^2 f_2'' - ...(-1)^{k-1} N^{k-1} f_2^{(k-1)} \tag{3.13}$$

denklemi elde edilir. Buradan açık formda yazılmış adi diferansiyel denklem elde etmek için (3.13) ifadesinin türevini alındığında,

$$y_2' = f_2' - N f_2'' + \ldots (-1)^{k-1} N^{k-1} f_2^{(k)} \tag{3.14}$$

denklemi elde edilir. Buradan adi diferansiyel denklem elde edebilmek için sistemin *k* defa türevinin alınması gerektiği sonucuna varılır. Yani diferansiyel cebirsel denklemin indeksi *k* dır.

BÖLÜM 4

DİFERANSİYEL-CEBİRSEL DENKLEMLER İÇİN YAKLAŞIK ÇÖZÜM METODLARI

4.1 Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DDM)

Bu bölümde, Diferansiyel Dönüşüm Metodunun (DDM) tanımı ve genel özellikleri ifade edilecektir. Diferansiyel Dönüşüm Metodu, diferansiyel denklemlerin cebirsel denklemlere dönüştürülerek çözülmesini içermektedir. Diferansiyel denklemleri cebirsel denklemlere dönüştüren başka yöntemler var olmakla birlikte çalışmalar göstermiştir ki, diferansiyel dönüşüm yöntemi bu yöntemlere nazaran çok daha iyi sonuçlar vermektedir. DDM ilk olarak 1986 yılında Zhou tarafından elektrik devre analizinde karşılaşılan lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemlerini çözmek için kullanılmıştır [36]. Bu tip problemler için kapalı seri çözüm formları elde edilerek geliştirilmiştir. Diferansiyel dönüşüm yöntemi, diferansiyel denklemin içerdiği bağımsız değişken sayısına göre şekillenmektedir. Tek boyutlu, iki boyutlu ve n-boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu ile ilgili literatürde çalışmalar yapılmıştır.

Diferansiyel dönüşüm metodu birçok lineer ve lineer olmayan problemlerin çözümünde kullanılmıştır. Jang ve Chen, diferansiyel dönüşüm yöntemini başlangıç değer problemlerinin çözümünde kullanmışlardır [37]. Hassan, bazı özdeğer problemlerinin çözümünde diferansiyel dönüşüm metodundan faydalanmıştır [38]. Ayaz, diferansiyel dönüşüm yöntemini lineer diferansiyel-cebirsel denklemlerin nümerik çözümlerinin bulunmasında uygulamış ve indeksi 1 olan diferansiyel-cebirsel denklemlerin nümerik çözümleri ile açık çözümlerinin tutarlı olduğunu göstermiştir [16]. Liu ve Song, ise diferansiyel dönüşüm yöntemini indeksi 2 ve 3 olan lineer diferansiyel-cebirsel denklemlere uygulanabilirliği üzerine çalışmışlar ve diferansiyel dönüşüm yönteminin indeksi 2 olan diferansiyel-cebirsel denklemlerin nümerik çözümleri için uygulanabilir olmasına rağmen indeksi 3 olan diferansiyel-cebirsel denklemlerin (seri katsayıları hesaplanamamıştır) nümerik çözümlerinin bulunmasında uygulanabilir olmadığını göstermişlerdir [23].

4.1.1 Tanım Bir $y(t)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü,

$$Y(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right]_{t=0} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $y(t)$ orijinal fonksiyon, $Y(k)$ ise T-fonksiyonu olarak isimlendirilen dönüşüm fonksiyonudur.

4.1.2 Tanım $Y(k)$'nın ters diferansiyel dönüşümü,

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty} t^k Y(k) \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanır. (4.1) ve (4.2) denklemlerinden ters diferansiyel dönüşümü olarak,

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left[\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right]_{t=0} \tag{4.3}$$

elde edilir. (4.3) denklemi diferansiyel dönüşümün Taylor serisi açılımından türetildiği düşüncesini akla getirmektedir. Fakat bu metot sembolik olarak türevleri hesaplamamaktadır. Bununla beraber, hesaplamalar için gerekli türevler, aşağıdaki Çizelge 4.1 de görüldüğü gibi asıl(orijinal) fonksiyonların dönüşüm denklemleri olarak tarif edilen bir iteratif yöntemle hesaplanırlar [16].

Yukarıdaki (4.2) ve (4.3) denklemlerinin tanımlarından, Çizelge 4.1 deki temel matematiksel işlemlerin dönüşüm fonksiyonlarıyla uyuştuğu kolaylıkla görülebilir ve kanıtlanabilir. $y(x)$ fonksiyonu sonlu bir seriyle ifade edilir ve (4.2) denklemi

$$y(t)=\sum_{k=0}^{m} t^k Y(k) \tag{4.4}$$

olarak yazılabilir. (4.4) denklemi ile $\sum_{k=m+1}^{\infty} x^k Y(k)$ ifadesinin ihmal edilebilecek kadar küçük olduğu açıkça görülmektedir [16].

Çizelge 4.1 Bazı fonksiyonların diferansiyel dönüşümü.

ORİJİNAL FONKSİYON	**DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜMÜ**
$f(t)=\alpha h(t)+\beta g(t)$	$F(k)=\alpha H(k)+\beta G(k)$
$f(t)=\dfrac{dg(t)}{dt}$	$F(k)=(k+1)G(k+1)$
$f(t)=\dfrac{d^n g(t)}{dt^n}$	$F(k)=(k+1)(k+2)\cdots(k+n)G(k+n)$
$f(t)=g(t)\cdot h(t)$	$F(k)=\sum_{r=0}^{k} G(r)\cdot H(k-r)$
$f(t)=g_1(t)\cdot g_2(t)\cdots g_n(t)$	$F(k)=\sum_{k_{n-1}=0}^{k}\sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}}\cdots\sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1)\cdots G_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2})\cdot G_n(k-k_{n-1})$
$f(t)=g(t+a)$	$N\to\infty$ *için* $F(k)=\sum_{r=k}^{N}\binom{r}{k}\cdot a^{r-k}\cdot G(r)$
$f(t)=\dfrac{d^n g(t+a)}{dt^n}$	$N\to\infty$ *için* $F(k)=\dfrac{(k+n)!}{k!}\sum_{r=k+n}^{N}\binom{r}{k+n}\cdot a^{r-k-n}\cdot G(r)$
$f(t)=\int_0^t g(t)dt$	$F(k)=\dfrac{G(k)}{k},\ (k\geq 1)$
$f(t)=t^n$	$F(k)=\delta(k-n)=\begin{cases}1, & k=n\\ 0, & k\neq n\end{cases}$
$f(t)=e^{ct}$	$F(k)=\dfrac{c^k}{k!}$
$f(t)=\sin(\alpha t+\beta)$	$F(k)=\left(\dfrac{\alpha^k}{k!}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{k\pi}{2}+\alpha\right)$
$f(t)=\cos(\alpha t+\beta)$	$F(k)=\left(\dfrac{\alpha^k}{k!}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{k\pi}{2}+\alpha\right)$

4.2 Varyasyonel İtersayon Metodu (VİM)

Varyasyonel iterasyon metodu, J.He tarafından geliştirilmiş varyasyonel tabanlı analitik bir çözüm tekniği olup, çeşitli lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler, sınır-değer ve başlangıç-değer problemleri ile diferansiyel denklem sistemlerin çözümünde etkin bir şekilde kullanılabilen, çözümlere hızlı bir şekilde yakınsayan iteratif bir yöntemdir [39],[40],[41]. Soltanian, Karbassi ve Hosseini, Varyasyonel iterasyon metodunu diferansiyel-cebirsel denklemlere uygulamışlardır [42].

Varyasyonel itersayon metoduna göre bir diferansiyel denklem,

$$Lu + Nu = g(t) \tag{4.5}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, L-lineer operatörü, N-lineer olmayan operatörü temsil etmektedir. $u_0(t)$'nin $Lu=0$ sisteminin bir çözümü olduğu varsayılarak belirli bir nokta için bu değer aşağıdaki gibi düzeltilebilir.

$$u_{düzeltilmiş}(1) = u_0(1) + \int_0^1 \lambda \cdot (Lu_0 + Nu_0 - g)dt \tag{4.6}$$

Burada, λ genel langrange çarpanıdır ve varyasyonel teori yardımıyla elde edilir.(4.6) denkleminin sağındaki ikinci terim ise düzeltme olarak adlandırılır. He, bu yöntemi aşağıdaki şekilde bir iteratif yönteme dönüştürmüştür.

$$u_{n+1}(t_0) = u_n(t_0) + \int_0^{t_0} \lambda \cdot (Lu_n + Nu_n - g)dt \tag{4.7}$$

Burada $u_0(t)$ muhtemel değişkenlerle bir başlangıç tahmini ve u_n, $\delta \cdot u_n = 0$ şartını sağlayan sınırlı varyasyon olarak düşünülebilir. Herhangi bir t_0 için bu denklem aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^{t} \lambda \cdot \left\{ Lu_n(\xi) + Nu_n(\xi) - g(\xi) \right\} d\xi \tag{4.8}$$

(4.8) denklemine düzeltme fonksiyonu denir. Bu denklemde, λ- langrange çarpanı, u_n , n-nci yaklaşık çözüm olarak ifade edilir.

He tarafından geliştirilen varyasyonel iterasyon metoduna (VIM) göre, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinde (4.8) düzeltme fonksiyonu,

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \cdot \left\{ Lu_n(\xi) + Nu_n(\xi) - g(\xi) \right\} d\xi \tag{4.9}$$

olarak alınır. Burada, λ- langrange çarpanı, u_n ise $\delta \cdot u_n = 0$ koşulunu sağlayan varyasyon kısıtlarıdır. Bu metotta öncelikle λ-langrange çarpanları belirlenir. Langrange çarpanları belirlendikten sonra, genel olarak u_0 başlangıç fonksiyonu olarak diferansiyel denklemin başlangıç koşulları alınır ve $u_n\,(n \geq 0)$ n-nci yaklaşım fonksiyonu elde edilir. Böylece (4.8) düzeltme fonksiyonu yaklaşık çözümü verecektir. Tam çözüm ise,

$$u = \lim_{n \to \infty} u_n \tag{4.10}$$

şeklinde elde edilir.

4.3 Adomian Ayrışım Metodu (AAM)

Adomian ayrışım metodu, Adomian tarafından literatüre kazandırılmıştır [43],[44]. Ayrışım metodu, lineer ve lineer olmayan denklemlerin çözümünde kullanılan diğer yöntemlere göre daha basit ve daha karmaşık denklemlere uygulanabilen seri çözüm yöntemidir. Hosseini, Adomian ayrışım metodunu lineer ve lineer olmayan diferansiyel-cebirsel denklemlerine uygulamıştır [21],[22].

$$Lu + Ru + Nu = g(t) \tag{4.11}$$

diferansiyel denklemini ele alalım. Burada, N diferansiyel denklemde lineer olmayan terimi; R lineer operatörden kalan kısmı ve L verilen diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevini göstermektedir. L lineer bir operatördür ve terside mevcuttur. (4.11) eşitliğinden,

$$Lu = g(t) - Ru - Nu \tag{4.12}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafına L^{-1} ters operatörü uygulandığında,

$$u = f(t) - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu) \tag{4.13}$$

elde edilir. Burada $f(t) = L^{-1}(g(t)) + \varphi(t)$'dir. ($\varphi(t)$: $L^{-1}(u)$ işlemi ve başlangıç koşullarından elde edilen bir fonksiyondur.)

Ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \tag{4.14}$$

şeklinde olsun. Lineer olmayan terimlerden oluşan Nu terimi,

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{4.15}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradaki, A_n polinomları özel polinomlardır ve "Adomian Polinomları" olarak ifade edilir. Her i değeri için A_i polinomu, $u_0, u_1, ..., u_i$ terimlerini içermektedir. (4.14) ve (4.15) eşitlikleri (4.13)'de yerine yazıldığında,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = f(t) - L^{-1}(R\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)) - L^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty} A_n) \tag{4.16}$$

elde edilir. Bu eşitlikten ayrıştırılmış seri elemanları

$$\begin{aligned}
u_0 &= f(t) = L^{-1}(g(t)) + \varphi(t) \\
u_1(t) &= -L^{-1}(Ru_0) - L^{-1}(A_0) \\
u_2(t) &= -L^{-1}(Ru_1) - L^{-1}(A_1) \\
&\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\
u_{k+1}(t) &= -L^{-1}(Ru_k) - L^{-1}(A_k)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

olarak bulunur.

$F(u) = Nu$ olmak üzere A_i, Adomian polinomları,

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[F\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0}, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{4.18}$$

veya açık olarak

$$A_0 = F(u_0)$$

$$A_1 = u_1 \cdot F'(u_0)$$

$$A_2 = u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2} u_1^{\,2} F''(u_0) \tag{4.19}$$

$$A_3 = u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^{\,3} F'''(u_0)$$

$$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

formülleri yardımıyla elde edilmektedir.

Adomian ayrışım metodunu diferansiyel-cebirsel denklemlere uygulamak için,

$$y_i' = f_i(t, y_1, ..., y_n) \ , \ \ i = 1, 2, ..., n \tag{4.20}$$

diferansiyel-cebirsel denklem sistemini ele alalım.

$L = \dfrac{d}{dt}$ lineer operatör ve $L^{-1} = \int_0^t (.)dt$ ters operatör olmak üzere (4.20) eşitliği L operatörüne bağlı olarak,

$$Ly_i = f_i(t, y_1, ..., y_n) \ , \ \ i = 1, 2, ..., n \tag{4.21}$$

şeklinde ifade edilebilir. (4.21) denklemine L^{-1} ters operatörü uygulandığında,

$$y_i = y_i(0) + \int_0^t f_i(t, y_1, ..., y_n) dt \ , \ \ i = 1, 2, ..., n \tag{4.22}$$

elde edilir. (4.22) denkleminin çözümünü

$$y_i = \sum_{j=0}^{\infty} f_{i,j} \tag{4.23}$$

seri toplamı olsun. $A_{i,j}(f_{i,0}, f_{i,1}, ..., f_{i,j})$, Adomian polinomları olmak üzere,

$$f_i(t, y_1, ..., y_n) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{i,j}(f_{i,0}, f_{i,1}, ..., f_{i,j}) \tag{4.24}$$

seri toplamı şeklinde ifade edelim. (4.23) ve (4.24) eşitlikleri (4.22) de yerine yazıldığında,

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_{i,j} = y_i(0) + \int_0^t \sum_{j=0}^{\infty} A_{i,j}(f_{i,0}, f_{i,1}, ..., f_{i,j})dt = y_i(0) + \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t A_{i,j}(f_{i,0}, f_{i,1}, ..., f_{i,j})dt \tag{4.25}$$

buradan,

$$f_{i,0} = y_i(0)$$
$$f_{i,n+1} = \int_0^t A_{i,n}(f_{i,0}, f_{i,1}, ..., f_{i,j})dt \quad , \quad n = 0,1,2,.... \tag{4.26}$$

elde edilir. Bu değerler (4.23) de yerine yazılarak (4.22) denkleminin çözümü yaklaşık olarak bulunur.

4.4 Kuvvet Serileri ile Çözüm Metodu

(3.1) diferansiyel-cebirsel denkleminin çözümlerinin,

$$y(t) = y_0 + y_1 t + e_1 t^2 \tag{4.27}$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. (4.27) ifadesi ile türevleri (3.1) denkleminde yerine yazılır ve yüksek dereceden terimler ihmal edilirse A ve B terimleri sabitler olan matrisler olmak üzere,

$$Ae_1 = B \tag{4.28}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi e'ye göre çözülür ve (4.27) denkleminde yazıldıktan sonra (3.1) denkleminin çözümlerinin,

$$y(t) = y_0 + y_1 t + e_1 t^2 + e_2 t^3 \tag{4.29}$$

şeklinde olduğu kabul edilerek yukarıdaki işlemler tekrar edilirse (3.1) diferansiyel-denklem sisteminin çözümü için keyfi dereceden kuvvet serileri bulunur.

4.1 Örnek İndeksi 2 olan ve başlangıç koşulları ile verilen lineer olmayan diferansiyel-cebirsel denklemi ele alalım.

$$x'(t)=x(t)-y(t)\cdot z(t)+\sin t+t\cos t \tag{4.30a}$$

$$y'(t)=tz(t)+x(t)^2+\sec^2(t)-t^2(\cos t+\sin^2 t) \tag{4.30b}$$

$$0=x(t)-z(t)+t(\cos t-\sin t) \tag{4.30c}$$

$$x(0)=y(0)=z(0)=0 \tag{4.30d}$$

Diferansiyel-cebirsel denklem sisteminin tam çözümleri;

$$x(t)=t\sin t,\quad y(t)=\tan t,\quad z(t)=t\cos t \tag{4.31}$$

şeklindedir.

Diferansiyel Dönüşüm Metodu ile çözüm;

Çizelge 4.1 de verilen dönüşüm formüllerinden (4.30a), (4.30b) ve (4.30c) denklemlerine ait diferansiyel dönüşüm formülleri;

$$(k+1)\cdot X(k+1)=X(k)-\sum_{l=0}^{k}\sum_{r=0}^{l}Y(l)\cdot Z(l-r)+G_1(k) \tag{4.32}$$

$$(k+1)\cdot Y(k+1)=\sum_{l=0}^{k}\delta(l-1)\cdot Z(k-l)+\sum_{l=0}^{k}X(l)\cdot X(k-l)+G_2(k) \tag{4.33}$$

$$0=X(k)-Z(k)+G_3(k) \tag{4.34}$$

şeklindedir. Burada, $G_1(k),\ G_2(k),\ G_3(k)$ ifadeleri sırasıyla $g_1(t)=\sin t+t\cos t$, $g_2(t)=\sec^2 t-t^2(\cos t+\sin^2 t)$ ve $g_3(t)=t(\cos t-\sin t)$ fonksiyonlarının dönüşüm formüllerini temsil etmektedir.

(4.32)-(4.34) denklemlerini aşağıdaki şekilde düzenleyelim.

$$Z(k)=X(k)+G_3(k) \tag{4.35}$$

$$X(k+1)=\frac{1}{(k+1)}\left\{X(k)-\sum_{l=0}^{k}\sum_{r=0}^{l}Y(l)\cdot Z(l-r)+G_1(k)\right\} \tag{4.36}$$

$$Y(k+1)=\frac{1}{(k+1)}\left\{\sum_{l=0}^{k}\delta(l-1)\cdot Z(k-l)+\sum_{l=0}^{k}X(l)\cdot X(k-l)+G_2(k)\right\} \tag{4.37}$$

(4.1) denklemini, (4.30d) eşitliği ile verilen başlangıç koşullarına uyguladığımıza,

$$X(0)=Y(0)=Z(0)=0 \tag{4.38}$$

elde edilir. Sırasıyla $g_1(t), g_2(t)$ ve $g_3(t)$ fonksiyonlarının Taylor açılımlarından $G_1(k), G_2(k)$ ve $G_3(k)$ değerleri elde edilebilir.

$$G_1(0)=0, G_1(1)=2, G_1(2)=0, G_1(3)=-\frac{2}{3}, G_1(4)=0, G_1(5)=\frac{1}{20}, \dots \tag{4.39}$$

$$G_2(0)=1, G_2(1)=0, G_2(2)=0, G_2(3)=0, G_2(4)=\frac{1}{6}, G_2(5)=0, \dots \tag{4.40}$$

$$G_3(0)=0, G_3(1)=1, G_3(2)=-1, G_3(3)=-\frac{1}{2}, G_3(4)=\frac{1}{6}, G_3(5)=\frac{1}{24}, \dots \tag{4.41}$$

(4.35)-(4.41) denklemlerinden $k=0,1,\dots,m$ değerleri için $X(k),\ Y(k)\ ve\ Z(k)$ değerleri

$$X(0)=0,\ X(1)=1,\ X(2)=-\frac{1}{2},\ X(3)=\frac{1}{3},\ X(4)=-\frac{1}{4},\ X(5)=\frac{1}{5}, \dots$$

$$Y(0)=0,\ Y(1)=1,\ Y(2)=-1,\ Y(3)=1,\ Y(4)=-1,\ Y(5)=1, \dots \tag{4.42}$$

$$Z(0)=0,\ Z(1)=1,\ Z(2)=-1,\ Z(3)=1,\ Z(4)=-1,\ Z(5)=1, \dots$$

olarak bulunur. (4.2) ters dönüşüm formülünden,

$$x(t)=\sum_{i=0}^{m}X(i)\cdot t^i=t^2-\frac{1}{6}t^4+\frac{1}{120}t^6-\frac{1}{5040}t^8+\frac{1}{362880}t^{10}-\frac{1}{39916800}t^{12}+\dots \tag{4.43}$$

$$y(t)=\sum_{i=0}^{m}Y(i)\cdot t^i=t+\frac{1}{3}t^3+\frac{2}{15}t^5+\frac{17}{315}t^7+\frac{62}{2835}t^9+\frac{1382}{155925}t^{11}+\frac{21844}{6081075}t^{13}+\dots \tag{4.44}$$

$$z(t)=\sum_{i=0}^{m} Z(i)\cdot t^{i} = t-\frac{1}{2}t^{3}+\frac{1}{24}t^{5}-\frac{1}{720}t^{7}+\frac{1}{40320}t^{9}-\frac{1}{3628800}t^{11}+... \quad (4.45)$$

elde edilir ki bu ifadeler sırasıyla, $x(t)=t\sin t,\;\; y(t)=\tan t,\;\; z(t)=t\cos t$ fonksiyonlarının Taylor açılımlarına karşılık gelmektedir.

Varyasyonel İterasyon Metodu ile çözüm;

Varyasyonel iterasyon metodunu (4.30) ile verilen diferansiyel-cebirsel denklem sistemine aşağıdaki gibi uygulanabilir.

$$z_{n+1}(t)=x_n(t)+g_3(t) \quad (4.46)$$

$$x_{n+1}(t)=x_n(t)+\int_0^t \lambda_1(\xi)\cdot\left\{x_n'(\xi)-x_n(\xi)+\tilde{y}_n(\xi)\cdot\tilde{z}_n(\xi)-g_1(\xi)\right\}d\xi \quad (4.47)$$

$$y_{n+1}(t)=y_n(t)+\int_0^t \lambda_2(\xi)\cdot\left\{y_n'(\xi)-\xi\cdot\tilde{z}_n(\xi)-\tilde{x}_n(\xi)^2-g_2(\xi)\right\}d\xi \quad (4.48)$$

(4.47) ve (4.48) denklemlerindeki $\tilde{x}_n,\, \tilde{y}_n\; ve\; \tilde{z}_n$ ifadeleri $\delta\tilde{x}_n=\delta\tilde{y}_n=\delta\,\tilde{z}_n=0$ şartını sağlayan varyasyon kısıtlarıdır. Varyasyonel iterasyon metodu için, öncelikle $\lambda_1(\xi)$ ve $\lambda_2(\xi)$ langrange çarpanları ve bunlar yardımıyla da düzeltme fonksiyonları elde edilmelidir. Bunun için öncelikle (4.47) ve (4.48) denklemlerinin her iki tarafı δ ile çarpılırsa

$$\delta x_{n+1}(t)=\delta x_n(t)+\delta\int_0^t \lambda_1(\xi)\cdot\left\{x_n'(\xi)-x_n(\xi)+\tilde{y}_n(\xi)\cdot\tilde{z}_n(\xi)-g_1(\xi)\right\}d\xi$$

$$\delta x_{n+1}(t)=\delta x_n(t)+\int_0^t \lambda_1(\xi)\cdot\left\{\delta x_n'(\xi)-\delta x_n(\xi)+\delta\tilde{y}_n(\xi)\cdot\tilde{z}_n(\xi)-\delta g_1(\xi)\right\}d\xi$$

$$\delta x_{n+1}(t)=\delta x_n(t)+\int_0^t \lambda_1(\xi)\cdot\left\{\delta x_n'(\xi)-\delta x_n(\xi)\right\}d\xi$$ (kısmi integrasyondan)

$$\delta x_{n+1}(t)=\delta x_n(t)+\lambda_1(\xi)\delta x_n(\xi)\big|_{\xi=t}-\int_0^t\left\{\lambda_1'(\xi)+\lambda_1(\xi)\right\}\delta x_n(\xi)d\xi$$

$\delta\cdot x_{n+1}(t)=0$ olduğundan,

$$1+\lambda_1(\xi)\big|_{\xi=t} \quad =0$$
$$\lambda_1'(\xi)+\lambda_1(\xi)=0 \tag{4.49}$$

denklemleri elde edilir. Buradan $\lambda_1(\xi)$ Langrange çarpanı,

$$\lambda_1(\xi)=-e^{t-\xi} \tag{4.50}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde,

$$\delta y_{n+1}(t)=\delta y_n(t)+\delta\int_0^t \lambda_2(\xi)\cdot\left\{y_n'(\xi)-\xi\cdot\tilde{z}_n(\xi)-\tilde{x}_n(\xi)^2-g_2(\xi)\right\}d\xi$$

$$\delta y_{n+1}(t)=\delta y_n(t)+\int_0^t \lambda_2(\xi)\cdot\left\{\delta y_n'(\xi)-\xi\cdot\delta\tilde{z}_n(\xi)-\delta\tilde{x}_n(\xi)^2-\delta g_2(\xi)\right\}d\xi$$

$$\delta y_{n+1}(t)=\delta y_n(t)+\int_0^t \lambda_2(\xi)\cdot\left\{\delta y_n'(\xi)\right\}d\xi$$ (kısmi integrasyondan)

$$\delta y_{n+1}(t)=\delta y_n(t)+\lambda_2(\xi)\delta y_n(\xi)\big|_{\xi=t}-\int_0^t \lambda_2(\xi)\cdot\delta y_n(\xi)d\xi$$

$\delta\cdot y_{n+1}(t)=0$ olduğundan,

$$1+\lambda_2(\xi)\big|_{\xi=t}=0$$
$$\lambda_2'(\xi)=0 \tag{4.51}$$

denklemleri, buradan da $\lambda_2(\xi)$ Langrange çarpanı,

$$\lambda_2(\xi)=-1 \tag{4.52}$$

olarak bulunur.

(4.50) ve (4.52) eşitlikleri ile verilen Langrange çarpanları (4.47) ve (4.48) denklemlerinde yerlerine yazıldığında (4.46)-(4.48) iterasyon formülleri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$z_{n+1}(t)=x_n(t)+g_3(t) \tag{4.53}$$

$$x_{n+1}(t) = x_n(t) - \int_0^t e^{t-\xi} \cdot \left\{ x_n'(\xi) - x_n(\xi) + y_n(\xi) \cdot z_n(\xi) - g_1(\xi) \right\} d\xi \tag{4.54}$$

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) - \int_0^t \left\{ y_n'(\xi) - \xi \cdot z_n(\xi) - x_n(\xi)^2 - g_2(\xi) \right\} d\xi \tag{4.55}$$

İterasyon formülleri için başlangıç değerleri olarak $x_0 = x(0) = 0,\ y_0 = y(0) = 0, z_0 = z(0) = 0$, ve $g_1(t),\ g_2(t),\ g_3(t)$ fonksiyonlarının yerine $t = 0$ noktasındaki ve $e^{t-\xi}$ langrange çarpanının yerine $t = \xi$ noktasındaki Taylor açılımı kullanılabilir.

$$\hat{g}_1(t) = 2t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{20}t^5 - \frac{1}{630}t^7 + \frac{1}{36288}t^9 \tag{4.56}$$

$$\hat{g}_2(t) = 1 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{241}{360}t^6 + \frac{155}{1008}t^8 + \frac{182611}{1814400}t^{10} \tag{4.57}$$

$$\hat{g}_3(t) = t - t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{24}t^5 - \frac{1}{120}t^6 - \frac{1}{720}t^7 + \frac{1}{5040}t^8 + \frac{1}{40320}t^9 \tag{4.58}$$

$$e^{t-\xi} = 1 + (t-\xi) + \frac{1}{2!}(t-\xi)^2 + \frac{1}{3!}(t-\xi)^3 + \frac{1}{4!}(t-\xi)^4 + \frac{1}{5!}(t-\xi)^5 + \ldots + \frac{1}{10!}(t-\xi)^{10} \tag{4.59}$$

Böylece $n = 0,1,2,\ldots$ değerleri için (4.52)-(4.54) iterasyon formüllerinden ilk 5 terim;

$$x_1(t) = t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{60}t^5 + \frac{1}{180}t^6 + \frac{1}{1260}t^7 - \frac{1}{6720}t^8 - \frac{1}{60480}t^9 + \cdots$$

$$y_1(t) = t + \frac{7}{30}t^5 + \frac{1}{9}t^6 + \frac{221}{2520}t^7 - \frac{1}{90}t^8 + \frac{1}{56}t^9 + \cdots \tag{4.60}$$

$$z_1(t) = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{40}t^5 - \frac{1}{360}t^6 - \frac{1}{1680}t^7 + \frac{1}{20160}t^8 - \frac{1}{60480}t^9 + \cdots$$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$$x_5(t) = t^2 - \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{120}t^6 - \frac{1}{5040}t^8 - \frac{1}{362880}t^{10} - \frac{226}{9775543}t^{12} + \cdots$$

$$y_5(t) = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{17}{315}t^7 + \frac{62}{2835}t^9 - \frac{92455}{480534863}t^{11} + \cdots \tag{4.61}$$

$$z_5(t) = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{24}t^5 - \frac{1}{720}t^7 + \frac{1}{40320}t^9 + \frac{37}{18461529}t^{11} + \cdots$$

olarak bulunur. İlk 5 iterasyondan da görüleceği gibi $n \to \infty$ için $x_{n+1}(t),\ y_{n+1}(t),\ z_{n+1}(t)$ ifadeleri sırasıyla $x(t) = t\sin t,\ y(t) = \tan t,\ z(t) = t\cos t$ fonksiyonlarının Taylor açılımlarına yaklaşır.

Adomian Ayrışım Metodu ile çözüm;

Adomian ayrışım metodu için lineer operator $L = \frac{d}{dt}$ ve ters operatör $L^{-1} = \int_0^t dt$ alındığında, (4.30) ile verilen diferansiyel-cebirsel denklem sistemi,

$$Lx(t) = x(t) - y(t)z(t) + \tilde{g}_1(t) \tag{4.62}$$

$$Ly(t) = tz(t) + x(t)^2 + \tilde{g}_2(t) \tag{4.63}$$

$$0 = x(t) - z(t) - \tilde{g}_3(t) \tag{4.64}$$

olarak ifade edilebilir. Burada, $\tilde{g}_1(t),\ \tilde{g}_2(t),\ \tilde{g}_3(t)$ fonksiyonları sırasıyla $g_1(t),\ g_2(t),\ g_3(t)$ fonksiyonlarının Taylor açılımlarını temsil etmektedir.

Başlangıç şartları olarak, $x_0(t) = x(0) = 0,\ y_0(t) = y(0) = 0$ ve $z_0(t) = z(0) = 0,$ alınır ve Adomian ayrışım metodu uygulandığında;

$$\begin{aligned} x_1(t) &= L^{-1}(x_0(t) - A_0 + \tilde{g}_1(t)) \\ z_1(t) &= x_1(t) + \tilde{g}_2(t) \\ y_1(t) &= L^{-1}(tz_1(t) + B_1 + \tilde{g}_3(t)) \end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t) &= L^{-1}(x_n(t) - A_n) \\ z_{n+1}(t) &= x_1(t) \\ y_{n+1}(t) &= L^{-1}(tz_{n+1}(t) + B_{n+1}) \end{aligned} \tag{4.66}$$

(4.66) eşitliklerinde verilen A_n ve B_n ifadeleri, sırasıyla (4.62) ve (4.63) denklemlerindeki $y(t)z(t)$ ve $x(t)^2$ lineer olmayan terimlerin Adomian polinomlarını temsil etmektedir. (4.18) eşitliğinden A_n ve B_n Adomian polinomları,

$$A_0 = y_0(t)\cdot z_0(t) = 0$$

$$A_1 = y_1(t)\cdot z_0(t) + y_0(t)\cdot z_1(t) = 0$$

$$A_2 = y_2(t)\cdot z_0(t) + y_1(t)\cdot z_1(t) + y_0(t)\cdot z_2(t) = y_1(t)\cdot z_1(t) \tag{4.67}$$

$$A_3 = y_3(t)\cdot z_0(t) + y_2(t)\cdot z_1(t) + y_1(t)\cdot z_2(t) + y_0(t)\cdot z_3(t) = y_2(t)\cdot z_1(t) + y_1(t)\cdot z_2(t)$$

$$\vdots$$

$$B_0 = x_0(t)^2 = 0$$

$$B_1 = 2x_0(t)\cdot x_1(t) = 0$$

$$B_2 = x_1(t)^2 + 2x_0(t)\cdot x_2(t) = x_1(t)^2 \tag{4.68}$$

$$B_3 = 2x_1(t)\cdot x_2(t) + 2x_0(t)\cdot x_3(t) = 2x_1(t)\cdot x_2(t)$$

$$\vdots$$

şeklindedir. (4.65) ve (4.66) eşitlikleri ile verilen iterasyon formülleri $n = 0,1,2,\ldots,10$ için uygulanır ve elde edilen değerler (4.23) eşitliğinde yerine yazılırsa (4.30) diferansiyel-cebirsel denklem sisteminin Adomian Ayrışım metodu ile yaklaşık çözümü olarak,

$$x(t) = \sum_{i=0}^{10} x_i(t) = t^2 - \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{120}t^6 - \frac{1}{5040}t^8 + \frac{1}{362880}t^{10} + \cdots \tag{4.69}$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{10} y_i(t) = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 + \frac{17}{315}t^7 + \frac{62}{2835}t^9 + \frac{1382}{155925}t^{11} + \cdots \tag{4.70}$$

$$z(t) = \sum_{i=0}^{10} z_i(t) = t - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{24}t^5 - \frac{1}{720}t^7 + \frac{1}{40320}t^9 - \frac{13}{554400}t^{11} + \cdots \tag{4.71}$$

bulunur. Burada iterasyon sayısını arttırdığımızda, sırasıyla tam çözümler olan $x(t)=t\sin t,\;\; y(t)=\tan t,\;\; z(t)=t\cos t$ fonksiyonlarının Taylor açılımlarına yaklaşılır.

Kuvvet Serileri ile çözüm;

(4.30) diferansiyel-cebirsel denklem sisteminin çözümlerinin,

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x(0)+e_1 t = e_1 t \\
y(t) &= y(0)+e_2 t = e_2 t \\
z(t) &= z(0)+e_3 t = e_3 t
\end{aligned}
\tag{4.72}
$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. $\tilde{g}_1(t),\, \tilde{g}_2(t),\, \tilde{g}_3(t)$ fonksiyonları sırasıyla $g_1(t),\, g_2(t),\, g_3(t)$ fonksiyonlarının Taylor açılımları olmak üzere, (4.72) ile verilen eşitlikler ve türevleri (4.30) denklem sisteminde yerine yazıldığında,

$$
\begin{aligned}
& e_1 + Q_1\left(\sum_{k=1}^{m} a_k t^k\right) = 0 \\
& -1+e_2 + Q_2\left(\sum_{k=1}^{m} b_k t^k\right) = 0 \\
& (1+e_1-e_3)t + Q_3\left(\sum_{k=2}^{m} c_k t^k\right) = 0
\end{aligned}
\tag{4.73}
$$

şeklinde denklem sistemi elde edilir. Burada Q_1, Q_2, Q_3 yüksek mertebeden terimleri içeren ifadeleri ihmal edersek elde edilen lineer denklem sisteminin çözümünden $e_1=0, e_2=1,\; e_3=1$ değerleri elde edilir. Böylece,

$$
x(t)=0,\;\; y(t)=t \;\; ve \;\; z(t)=t \tag{4.74}
$$

olur. (4.74) denkleminden (4.30) denklem sisteminin çözümlerinin,

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e_1 t^2 \\
y(t) &= t+e_2 t^2 \\
z(t) &= t+e_3 t^2
\end{aligned}
\tag{4.75}
$$

olduğunu kabul edelim. Benzer şekilde (4.75) eşitliklerini ve türevlerini (4.30) denklem sisteminde yerlerine yazarsak,

$$
\begin{aligned}
&(2e_1-2)t+Q_1\left(\sum_{k=2}^{m}a_k t^k\right)=0 \\
&2e_2 t+Q_2\left(\sum_{k=2}^{m}b_k t^k\right)=0 \\
&(-1+e_1-e_3)t^2+Q_3\left(\sum_{k=3}^{m}c_k t^k\right)=0
\end{aligned}
\qquad (4.76)
$$

denklemleri elde edilir. Q_1, Q_2, Q_3 yüksek mertebeden terimleri içeren ifadeleri ihmal edersek elde edilen lineer denklem sisteminin çözümünden $e_1=1, e_2=0,\ e_3=0$ değerleri elde edilir. Böylece,

$$x(t)=t^2,\ \ y(t)=t\ \ ve\ \ z(t)=t \qquad (4.77)$$

olur. (4.77)’den (4.30) denklem sisteminin çözümleri,

$$
\begin{aligned}
&x(t)=t^2+e_1t^3 \\
&y(t)=t+e_2t^3 \\
&z(t)=t+e_3t^3
\end{aligned}
\qquad (4.78)
$$

kabul edilir ve (4.78) eşitlikleri ile türevleri (4.30) denklem sisteminde yerlerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&3e_1t^2+Q_1\left(\sum_{k=3}^{m}a_k t^k\right)=0 \\
&(-1+3e_2)t^2+Q_2\left(\sum_{k=3}^{m}b_k t^k\right)=0 \\
&(1+e_1-e_3)t^3+Q_3\left(\sum_{k=4}^{m}c_k t^k\right)=0
\end{aligned}
\qquad (4.79)
$$

denklemleri elde edilir. Q_1, Q_2, Q_3 yüksek mertebeden terimleri içeren ifadeleri ihmal edersek elde edilen lineer denklem sisteminin çözümünden $e_1 = 0, e_2 = \frac{1}{3}, e_3 = -\frac{1}{2}$ değerleri elde edilir. O halde (4.30) denklem sisteminin çözümü,

$$x(t) = t^2, \quad y(t) = t + \frac{1}{3}t^3 \quad ve \quad z(t) = t - \frac{1}{2}t^3 \tag{4.80}$$

olur. Yukarıdaki işlemler tekrar edilirse (4.30) diferansiyel-denklem sisteminin çözümü olarak,

$$x(t) = t^2 - \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{120}t^6 - \frac{1}{5040}t^8 + \frac{1}{362880}t^{10} - \frac{1}{39916800}t^{12} + \frac{1}{6227020800}t^{14} \tag{4.81}$$

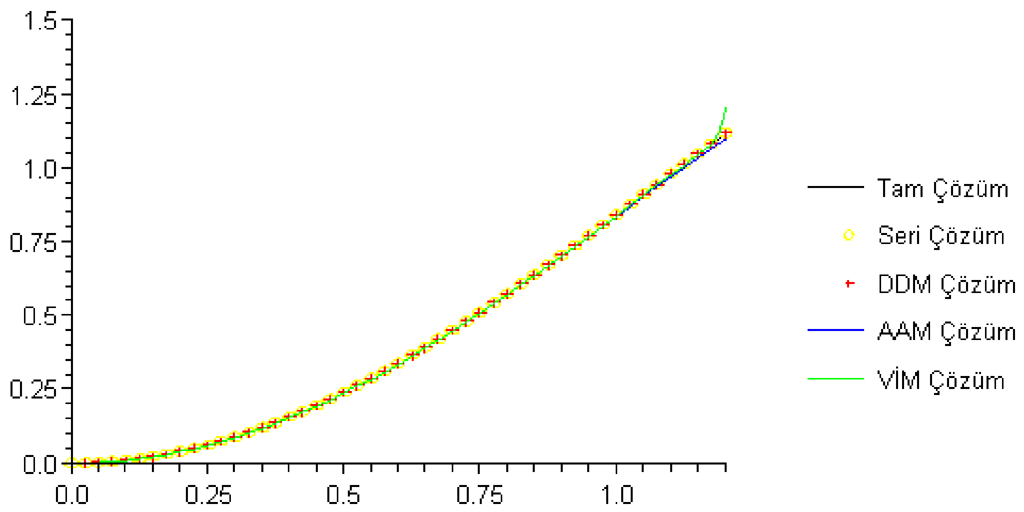
$$y(t) = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{17}{315}t^7 + \frac{62}{2835}t^9 + \frac{1382}{155925}t^{11} + \frac{21844}{6081075}t^{13} + \frac{929569}{638512875}t^{15} \tag{4.82}$$

$$z(t) = t - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{24}t^5 - \frac{1}{720}t^7 + \frac{1}{40320}t^9 - \frac{1}{3628800}t^{11} + \frac{1}{479001600}t^{13} \tag{4.83}$$

kuvvet serileri elde edilir.

Çizelge 4.2 (4.30) diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümlerin karşılaştırması.

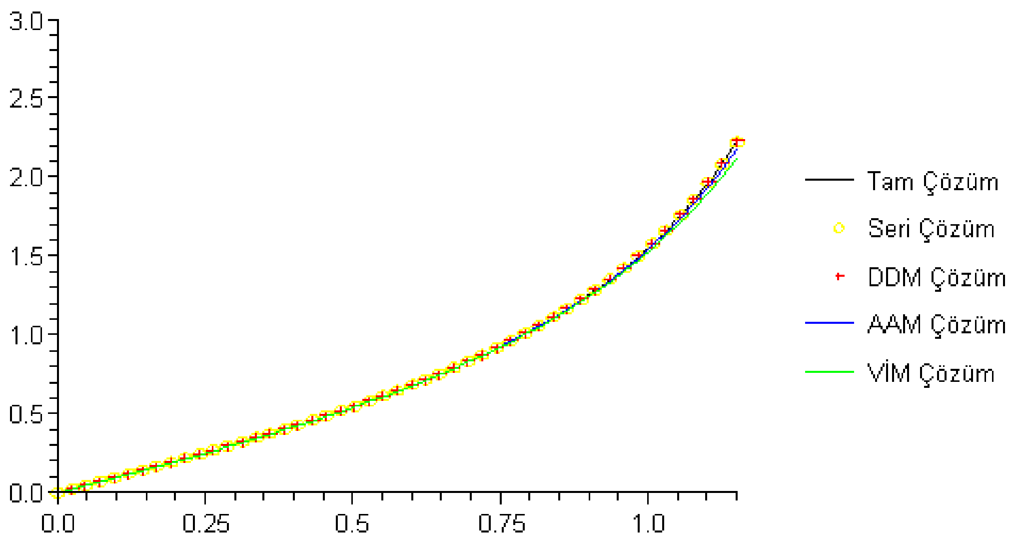
t	$x_{Tam Çözüm}$	$x_{Seri çözüm}$	x_{DDM}	x_{AAM}	$x_{VİM}$
0.0	*0.00000000*	*0.00000000*	*0.00000000*	*0.00000000*	*0.00000000*
0.1	*0.00998334*	*0.00998334*	*0.00998334*	*0.00998334*	*0.00998334*
0.2	*0.03973387*	*0.03973387*	*0.03973387*	*0.03973387*	*0.03973387*
0.3	*0.08865606*	*0.08865606*	*0.08865606*	*0.08865606*	*0.08865606*
0.4	*0.15576734*	*0.15576733*	*0.15576733*	*0.15576731*	*0.15576733*
0.5	*0.23971277*	*0.23971276*	*0.23971276*	*0.23971245*	*0.23971285*
0.6	*0.33878548*	*0.33878549*	*0.33878549*	*0.33878251*	*0.33878638*
0.7	*0.45095238*	*0.45095238*	*0.45095238*	*0.45093167*	*0.45095892*
0.8	*0.57388487*	*0.57388487*	*0.57388487*	*0.57377298*	*0.57392141*
0.9	*0.70499422*	*0.70499422*	*0.70499422*	*0.70449544*	*0.70515927*
1.0	*0.84147098*	*0.84147098*	*0.84147098*	*0.83955818*	*0.84209889*



Şekil 4.1 (4.30) diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonunun tam çözümü ile yaklaşık çözümlerinin grafikleri.

Çizelge 4.3 (4.30) diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $y(t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümlerin karşılaştırması.

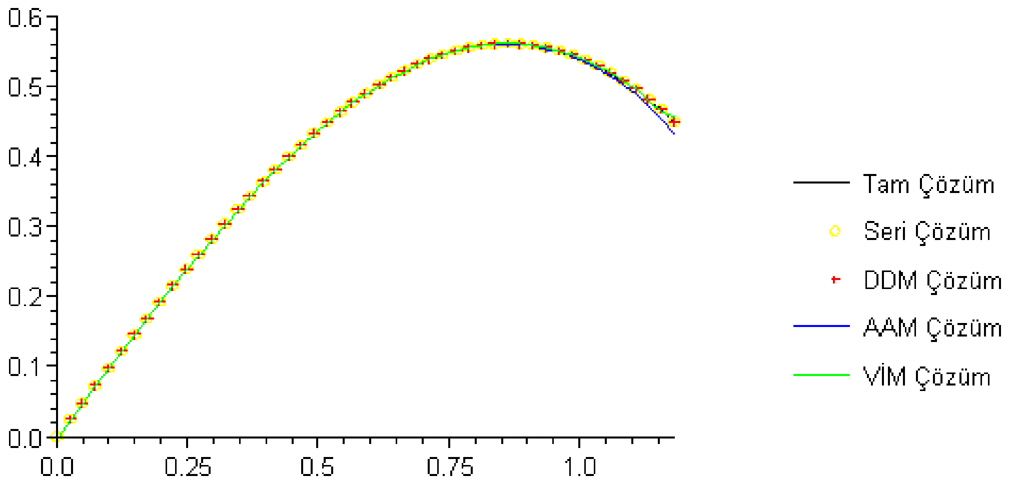
t	$y_{Tam Çözüm}$	$y_{Seri çözüm}$	y_{DDM}	y_{AAM}	$y_{VİM}$
0.0	*0.00000000*	*0.00000000*	*0.00000000*	*0.00000000*	*0.00000000*
0.1	*0.10033467*	*0.10033467*	*0.10033467*	*0.10033467*	*0.10033467*
0.2	*0.20271004*	*0.20271004*	*0.20271004*	*0.20271004*	*0.20271004*
0.3	*0.30933625*	*0.30933625*	*0.30933625*	*0.30933625*	*0.30933623*
0.4	*0.42279322*	*0.42279320*	*0.42279320*	*0.42279317*	*0.42279280*
0.5	*0.54630249*	*0.54630249*	*0.54630249*	*0.54630187*	*0.54629754*
0.6	*0.68413681*	*0.68413669*	*0.68413680*	*0.68412989*	*0.68409816*
0.7	*0.84228838*	*0.84228666*	*0.84228830*	*0.84223525*	*0.84206450*
0.8	*1.02963860*	*1.02962060*	*1.02963730*	*1.02932110*	*1.02858970*
0.9	*1.26015820*	*1.26001170*	*1.26014240*	*1.25858410*	*1.25595020*
1.0	*1.55740770*	*1.55641560*	*1.55724480*	*1.55059600*	*1.54233090*



Şekil 4.2 (4.30) diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $y(t)$ fonksiyonunun tam çözümü ile yaklaşık çözümlerinin grafikleri.

Çizelge 4.4 (4.30) diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $z(t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümlerin karşılaştırması.

t	$z_{TamÇözüm}$	$z_{Seri\,çözüm}$	z_{DDM}	z_{AAM}	$z_{VİM}$
0.0	*0.00000000*	*0.00000000*	*0.00000000*	*0.00000000*	*0.00000000*
0.1	*0.09950042*	*0.09950042*	*0.09950042*	*0.09950042*	*0.09950041*
0.2	*0.19601332*	*0.19601331*	*0.19601331*	*0.19601331*	*0.19601331*
0.3	*0.28660095*	*0.28660095*	*0.28660095*	*0.28660095*	*0.28660095*
0.4	*0.36842440*	*0.36842440*	*0.36842440*	*0.36842438*	*0.36842439*
0.5	*0.43879128*	*0.43879128*	*0.43879128*	*0.43879097*	*0.43879132*
0.6	*0.49520137*	*0.49520137*	*0.49520137*	*0.49519839*	*0.49520203*
0.7	*0.53538953*	*0.53538953*	*0.53538953*	*0.53536884*	*0.53539516*
0.8	*0.55736537*	*0.55736537*	*0.55736537*	*0.55725352*	*0.55739890*
0.9	*0.55944897*	*0.55944897*	*0.55944897*	*0.55895027*	*0.55960545*
1.0	*0.54030231*	*0.54030231*	*0.54030231*	*0.53838974*	*0.54090842*



Şekil 4.3 (4.30) diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $z(t)$ fonksiyonunun tam çözümü ile yaklaşık çözümlerinin grafikleri.

BÖLÜM 5

KESİRLİ MERTEBEYE SAHİP DİFERANSİYEL-CEBİRSEL DENKLEMLER İÇİN YAKLAŞIK ÇÖZÜM METODLARI

Tam değerli olmayan yani kesirli mertebeye sahip türev ve integral, teoride çok eskiden beri bilinmesine karşılık fizik, kimya ve mühendislik alanlarındaki uygulamalarıyla son dönemlerde sıklıkla karşılaşılmaktadır. Kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri için yapılan çalışmalarda birçok gelişmeler meydana gelmiştir. Bu tip denklemlerin çözümlerinde özellikle Laplace ve Fourier dönüşümleri gibi bir çok analitik yaklaşımlar ortaya konulmuş, ancak bu yöntemler kesirli diferansiyel denklemlerin lineerlik, sabit katsayılı olup olmadığı gibi özel durumların çözümlerinde daha çok işe yaramaktadır. Fakat uygulamalarda karşılaşılan kesirli diferansiyel denklemler lineer veya sabit katsayılı olamayacağı gibi tam çözümlerinin de bulunamaması matematikçileri için yeni yöntemlerin geliştirilmesine sevk etmiştir. Son dönemlerde yapılan çalışmalarda, Varyasyonel Iterasyon Metodu (VIM), Homotopy Perturbasyon Metodu (HPM), Adomian Ayrışım Metodu (ADM) ve Kesirli Diferensiyel Dönüşüm Metodu gibi yaklaşık çözüm yöntemlerine ağırlık verilmiştir [45-56].

Uygulamalı bilimlerde karşılaşılan matematiksel modellerden bazıları kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemlerden oluşmaktadır. Zurigat M., Momani S. ve Alawneh A. kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemler için Homotopy Analiz Metodunu (HAM) uygulamışlar ve elde edilen sonuçları yayınlanmışlardır [35]. Bu tip denklemler için başka yöntemler uygulanmamış olup, tezimizin amacına uygun olarak kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemler için farklı yaklaşık çözüm yöntemleri ele alınmıştır. Bu tip denklemlere Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Metodu (KDDM), Varyasyonel İterasyon Metodu (VİM), Adomian Ayrışım Metodu

(AAM) ve Kesirli Kuvvet Serileri kullanılarak çözüm elde edilmeye çalışılmıştır. Uygulanan metodlardan elde edilen sonuçlar çizelgelerde karşılaştırılmış ve yakın sonuçlara ulaşıldığı görülmüştür.

5.1 Tanım Kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sistemi başlangıç değerleri ile birlikte,

$$D_*^{\alpha_i} x_i(t) = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n, x_1', x_2', ..., x_n'), \quad i = 1, 2, 3, ..., n-1,\ t \geq 0,\ 0 < \alpha \leq 1 \tag{5.1a}$$

$$0 = g(t, x_1, x_2, ..., x_n) \tag{5.1b}$$

$$x_i(0) = a_i,\ i = 1, 2, 3, ..., n \tag{5.1c}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $D_*^{\alpha_i} x_i(t)$, $x_i(t)$ fonksiyonun Caputo kesirli türevini ifade etmektedir. (5.1b) denklemi, (5.1a) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem üzerinde cebirsel bir kısıtlamadır.

5.1 Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Metodu (KDDM)

5.1.1 Tanım Bir $y(t)$ fonksiyonunun kesirli diferansiyel dönüşümü,

$$Y(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1+\frac{k}{\alpha})} \left[D^{k/\alpha} y(t) \right]_{t=t_0} & , \ k/\alpha \in Z^+ \ (k = 0, 1, 2, ..., n\alpha - 1) \\ 0 & , \ k/\alpha \notin Z^+ \end{cases} \tag{5.2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada n kesirli mertebeli diferansiyel denklemin mertebesi, $y(x)$ orijinal fonksiyon, $Y(k)$ ise dönüşüm fonksiyonudur [28].

5.1.2 Tanım $\{Y(k)\}_{k=0}^{\infty}$ dizisinin ters kesirli diferansiyel dönüşümü,

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) \cdot (t - t_0)^{k/\alpha} \tag{5.3}$$

olarak tanımlanır [28].

(5.2) ve (5.3) denklemleri birlikte düşünüldüğünde,

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(1+\frac{k}{\alpha})}\left[D^{k/\alpha}y(t)\right]_{t=t_0}\cdot(t-t_0)^{k/\alpha}\ ,\ \left(k/\alpha \in Z^{+}\right) \tag{5.4}$$

elde edilir. Burada (5.4) eşitliğinden, kesirli diferansiyel dönüşüm kavramının kesirli kuvvet serileri açılımından elde edildiği açıktır.

5.1.3 Teorem Bir $y(t)=u(t)\pm v(t)$ fonksiyonunun kesirli diferansiyel dönüşümü,

$$Y(k)=U(k)\pm V(k) \tag{5.5}$$

şeklindedir [28].

İspat

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}U(k)(t-t_0)^{k/\alpha}\pm\sum_{k=0}^{\infty}V(k)(t-t_0)^{k/\alpha}$$

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[U(k)\pm V(k)\right](t-t_0)^{k/\alpha}$$

yazılır. Tanım 5.1.2’den ,

$$Y(k)=U(k)\pm V(k)$$

elde edilir.

5.1.4 Teorem Bir $y(t)=u(t)\cdot v(t)$ fonksiyonunun kesirli diferansiyel dönüşümü,

$$Y(k)=U(l)\otimes V(k-l)=\sum_{l=0}^{\infty}U(l)\cdot V(k-l) \tag{5.6}$$

şeklindedir [28].

İspat

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}U(k)(t-t_0)^{k/\alpha}\times\sum_{k=0}^{\infty}V(k)(t-t_0)^{k/\alpha}$$

$$=\left[U(0)+U(1)(t-t_0)^{1/\alpha}+U(2)(t-t_0)^{2/\alpha}+\cdots+U(n)(t-t_0)^{n/\alpha}\right]$$

$$\times\left[V(0)+V(1)(t-t_0)^{1/\alpha}+V(2)(t-t_0)^{2/\alpha}+\cdots+V(n)(t-t_0)^{n/\alpha}\right]$$

$$=\left[U(0)V(0)\right]+\left[U(0)V(1)+U(1)V(0)\right](t-t_0)^{1/\alpha}$$

$$+\left[U(0)V(2)+U(1)V(1)+U(2)V(0)\right](t-t_0)^{2/\alpha}+\cdots$$

$$+\left[U(0)V(n)+U(1)V(n-1)+\cdots+U(n-1)V(1)+U(n)V(0)\right](t-t_0)^{n/\alpha}$$

dir. Bu ifade,

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}U(k)V(k-l)(t-t_0)^{k/\alpha}$$

şeklinde yazılabilir. Tanım 5.1.2'den,

$$Y(k)=\sum_{l=0}^{\infty}U(l)\cdot V(k-l)$$

elde edilir.

5.1.5 Teorem $y(t)=u_1(t)\cdot u_2(t)\cdot\cdots\cdot u_{n-1}(t)\cdot u_n(t)$ fonksiyonunun kesirli diferansiyel dönüşümü,

$$Y(k)=\sum_{k_{n-1}=0}^{k}\sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}}\cdots\sum_{k_2=0}^{k_3}\sum_{k_1=0}^{k_2}U_1(k_1)U_2(k_2-k_1)\cdots U_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2})U_n(k-k_{n-1}) \tag{5.7}$$

şeklindedir [28].

İspat $u_1(t)\cdot u_2(t)\cdot\cdots\cdot u_{n-1}(t)\cdot u_n(t)$ ifadesinin kuvvet serisi açılımını kullanarak,

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}U_1(k)(t-t_0)^{k/\alpha}\times\sum_{k=0}^{\infty}U_2(k)(t-t_0)^{k/\alpha}\cdots\sum_{k=0}^{\infty}U_{n-1}(k)(t-t_0)^{k/\alpha}\times\sum_{k=0}^{\infty}U_n(k)(t-t_0)^{k/\alpha}$$

$$=\left[U_1(0)+U_1(1)(t-t_0)^{1/\alpha}+U_1(2)(t-t_0)^{2/\alpha}+\cdots\right]\times\left[U_2(0)+U_2(1)(t-t_0)^{1/\alpha}+\cdots\right]$$

$$\times\cdots\times\left[U_n(0)+U_n(1)(t-t_0)^{1/\alpha}+U_n(2)(t-t_0)^{2/\alpha}+\cdots\right]$$

$$=\left[U_1(0)U_2(0)\cdots U_n(0)\right]$$

$$+[U_1(1)U_2(0)\cdots U_{n-1}(0)U_n(0)+U_1(0)U_2(1)\cdots U_{n-1}(0)U_n(0)$$

$$+\cdots+U_1(0)U_2(0)\cdots U_{n-1}(1)U_n(0)+U_1(0)U_2(0)\cdots U_{n-1}(0)U_n(1)](t-t_0)^{1/\alpha}$$

$$+[U_1(1)U_2(1)U_3(0)\cdots U_n(0)+U_1(1)U_2(0)U_3(1)\cdots U_n(0)$$

$$+\cdots+U_1(1)U_2(0)U_3(0)\cdots U_n(1)+U_1(0)U_2(1)U_3(1)\cdots U_n(0)$$

$$+\cdots+U_1(0)U_2(1)U_3(0)\cdots U_n(1)+\cdots+U_1(0)U_2(0)\cdots U_{n-1}(1)U_n(1)$$

$$+U_1(2)U_2(0)\cdots U_{n-1}(0)U_n(0)+\cdots+U_1(0)U_2(0)\cdots U_{n-1}(0)U_n(2)](t-t_0)^{2/\alpha}+\cdots$$

Bu ifade genel olarak,

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_{n-1}=0}^{k}\sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}}\cdots\sum_{k_2=0}^{k_3}\sum_{k_1=0}^{k_2}U_1(k_1)U_2(k_2-k_1)\cdots U_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2})U_n(k-k_{n-1})(t-t_0)^{k/\alpha}$$

şeklinde ifade edilebilir. Tanım 5.1.2'den,

$$Y(k)=\sum_{k_{n-1}=0}^{k}\sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}}\cdots\sum_{k_2=0}^{k_3}\sum_{k_1=0}^{k_2}U_1(k_1)U_2(k_2-k_1)\cdots U_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2})U_n(k-k_{n-1})$$

elde edilir.

5.1.6 Teorem $y(t)=(t-t_0)^p$ fonksiyonunun kesirli diferansiyel dönüşümü $\delta(k)=\begin{cases}1\ ,\ k=0\\ 0\ ,\ k\neq 0\end{cases}$ olmak üzere,

$$Y(k)=\delta(k-\alpha p) \tag{5.8}$$

şeklindedir [28].

İspat $y(t)$ fonksiyonu dirac-delta fonksiyonu cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(k-\alpha p)(t-t_0)^{k/\alpha}$$

Tanım 5.1.2'den,

$Y(k)=\delta(k-\alpha p)$

elde edilir.

5.1.7 Teorem $y(t)=D_{t_0}^{q}\left[u(t)\right]$ fonksiyonunun kesirli diferansiyel dönüşümü,

$$Y(k)=\frac{\Gamma(q+1+k/\alpha)}{\Gamma(1+k/\alpha)}U(k+\alpha\cdot q) \tag{5.9}$$

şeklindedir [28].

İspat $y(t)=D_{t_0}^{q}\left[u(t)\right]$ olsun. (5.2) denkleminden,

$$Y(k)=\frac{1}{\Gamma\left(1+k/\alpha\right)}D^{k/\alpha}\left[D^{q}(u(t))\right]_{t=t_0}$$

yazılabilir. (2.36) ‘dan,

$$Y(k)=\frac{1}{\Gamma\left(1+k/\alpha\right)}\left[D^{q+k/\alpha}(u(t))\right]_{t=t_0}$$

$$=\frac{1}{\Gamma\left(1+k/\alpha\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(q+1+k/\alpha\right)}{\Gamma\left(q+1+k/\alpha\right)}\left[D^{k+\alpha q/\alpha}(u(t))\right]_{t=t_0}$$

$$=\frac{\Gamma\left(q+1+k/\alpha\right)}{\Gamma\left(1+k/\alpha\right)}\cdot\left(\frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{k+\alpha q}{\alpha}\right)}\left[D^{\frac{k+\alpha q}{\alpha}}(u(t))\right]_{t=t_0}\right) \qquad \text{((5.2) denkleminden)}$$

$$=\frac{\Gamma\left(q+1+k/\alpha\right)}{\Gamma\left(1+k/\alpha\right)}\cdot U(k+\alpha q)$$

elde edilir.

5.1.8 Teorem $y(t)=D^{q_1}\left[u_1(t)\right]\cdot D^{q_2}\left[u_2(t)\right]\cdots D^{q_{n-1}}\left[u_{n-1}(t)\right]\cdot D^{q_n}\left[u_n(t)\right]$ fonksiyonunun kesirli diferansiyel dönüşümü $i=1,2,3,\ldots,n$ *için* $\alpha q_i\in Z^{+}$ olmak üzere,

$$Y(k)=\sum_{k_{n-1}=0}^{k}\sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}}\cdots\sum_{k_2=0}^{k_3}\sum_{k_1=0}^{k_2}\frac{\Gamma\left(q_1+1+k_1/\alpha\right)}{\Gamma\left(1+k_1/\alpha\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(q_2+1+(k_2-k_1)/\alpha\right)}{\Gamma\left(1+(k_2-k_1)/\alpha\right)}\cdots\frac{\Gamma\left(q_{n-1}+1+(k_{n-1}-k_{n-2})/\alpha\right)}{\Gamma\left(1+(k_{n-1}-k_{n-2})/\alpha\right)}$$

$$\cdot\frac{\Gamma\left(q_n+1+(k-k_{n-1})/\alpha\right)}{\Gamma\left(1+(k-k_{n-1})/\alpha\right)}U_1(k_1+\alpha q_1)U_2(k_2-k_1+\alpha q_2)\cdots U_{n-2}(k_{n-2}-k_{n-1}+\alpha q_{n-2}) \tag{5.10}$$

$$\cdot U_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2}+\alpha q_{n-1})U_n(k-k_{n-1}+\alpha q_n)$$

şeklindedir [28].

İspat $i=1,2,3,\ldots,n$ için $D^{q_i}\left[u_i(t)\right]$'nin $t=t_0$ noktasındaki kesirli diferansiyel dönüşümü $C_i(k)$ olarak tanımlayalım. Teorem 5.1.5'den $y(t)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü,

$$Y(k)=\sum_{k_{n-1}=0}^{k}\sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}}\cdots\sum_{k_2=0}^{k_3}\sum_{k_1=0}^{k_2}C_1(k_1)C_2(k_2-k_1)\cdots C_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2})C_n(k-k_{n-1})$$

dir. Teorem 5.1.7'den,

$$C_1(k_1)=\frac{\Gamma(q_1+1+k_1/\alpha)}{\Gamma(1+k_1/\alpha)}U_1(k_1+\alpha\cdot q_1)$$

$$C_2(k_2-k_1)=\frac{\Gamma\left(q_2+1+(k_2-k_1)/\alpha\right)}{\Gamma\left(1+(k_2-k_1)/\alpha\right)}U_2(k_2-k_1+\alpha\cdot q_2)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$C_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2})=\frac{\Gamma\left(q_{n-1}+1+(k_{n-1}-k_{n-2})/\alpha\right)}{\Gamma\left(1+(k_{n-1}-k_{n-2})/\alpha\right)}U_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2}+\alpha\cdot q_{n-1})$$

$$C_n(k-k_{n-1})=\frac{\Gamma\left(q_n+1+(k-k_{n-1})/\alpha\right)}{\Gamma\left(1+(k-k_{n-1})/\alpha\right)}U_n(k-k_{n-1}+\alpha\cdot q_n)$$

elde edilir. $i=1,2,3,\ldots,n$ için $C_i(k)$ değerleri yerlerine yazıldığında,

$$Y(k)=\sum_{k_{n-1}=0}^{k}\sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}}\cdots\sum_{k_2=0}^{k_3}\sum_{k_1=0}^{k_2}\frac{\Gamma\left(q_1+1+k_1/\alpha\right)}{\Gamma\left(1+k_1/\alpha\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(q_2+1+(k_2-k_1)/\alpha\right)}{\Gamma\left(1+(k_2-k_1)/\alpha\right)}\cdots\frac{\Gamma\left(q_{n-1}+1+(k_{n-1}-k_{n-2})/\alpha\right)}{\Gamma\left(1+(k_{n-1}-k_{n-2})/\alpha\right)}$$

$$\cdot\frac{\Gamma\left(q_n+1+(k-k_{n-1})/\alpha\right)}{\Gamma\left(1+(k-k_{n-1})/\alpha\right)}U_1(k_1+\alpha q_1)U_2(k_2-k_1+\alpha q_2)\cdots U_n(k-k_{n-1}+\alpha q_n)$$

bulunur.

5.2 Adomian Ayrıştırma Metodu (AAM)

Yaklaşık hesaplamalarda kullanılan Adomian Ayrışım Metodu (AAM) bir seri çözüm yöntemidir. Amerikalı matematikçi Adomain (1923-1996) tarafından geliştirilen bu metod lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklemlere başarıyla uygulanabilmektedir. Adomian ayrışım metodunun kesirli mertebeli diferansiyel denklemlere uygulanması için genel anlamda aşağıdaki başlangıç değer problemini ele alalım.

$$D_*^{\alpha} y(x) + Ly(x) + Ny(x) = g(x), \quad y^{(k)}(0) = c_k, \;\; k = 0,1,\ldots, m-1, \;\; m-1 < \alpha \le m \tag{5.11}$$

Burada, L lineer operatörü, N ise lineer olmayan operatörü temsil etmektedir. Ayrışım metodu

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \tag{5.12}$$

formundaki çözümlerin bulunmasını içermektedir.

Lineer olmayan $Ny(x)$ operatörü,

$$Ny(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(y_0, y_1, \ldots, y_n) \tag{5.13}$$

ayrışımı olarak yazılabilir. Burada A_n ile Adomian polinomları temsil edilmektedir ve bu polinomların genel formu,

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \cdot y_i\right)\right]_{\lambda=0} \tag{5.14}$$

şeklindedir. $Ny = F(y)$ lineer olmayan fonksiyonunun Adomian polinomları,

$$A_0 = F(y_0)$$

$$A_1 = F'(y_0)\cdot y_1$$

$$A_2 = F'(y_0)\cdot y_2 + \frac{1}{2!}y_1^2 F''(y_0)$$

$$A_3 = F'(y_0)\cdot y_3 + F''(y_0)\cdot y_1 y_2 + \frac{1}{3!}y_1^3 F'''(y_0) \tag{5.15}$$

$$A_4 = F'(y_0)\cdot y_4 + F''(y_0)\cdot (y_1 y_3 + \frac{1}{2!}y_2^2) + \frac{1}{2!}F'''(y_0)\cdot y_1^2 y_2 + \frac{1}{4!}F^{(iv)}(y_0)\cdot y_1^4$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

biçimindedir.

Şimdi, (5.11) ile verilen başlangıç değer denklemine J^{α} operatörünü uygulandığında,

$J^{\alpha} D_*^{\alpha} y(x) = J^{\alpha} g(x) - J^{\alpha} Ly(x) - J^{\alpha} Ny(x)$ ((2.34)'den)

$$y(x) - \sum_{k=0}^{m-1} y^{(k)}(0^+)\frac{x^k}{k!} = J^{\alpha} g(x) - J^{\alpha} Ly(x) - J^{\alpha} Ny(x)$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{x^k}{k!} + J^{\alpha} g(x) - J^{\alpha} Ly(x) - J^{\alpha} Ny(x) \tag{5.16}$$

elde edilir.(5.12) ve (5.13) eşitlikleriyle verilen ifadeler (5.16) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{x^k}{k!} + J^{\alpha} g(x) - J^{\alpha} Ly(x) - J^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(y_0, y_1, ..., y_n) \tag{5.17}$$

bulunur. Buradan y_n bileşenleri sırasıyla,

$$y_0 = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{x^k}{k!} + J^{\alpha} g(x)$$

$$y_1 = -J^{\alpha} Ly_0(x) - J^{\alpha} A_0 \tag{5.18}$$

$$y_n = -J^{\alpha} Ly_{n-1}(x) - J^{\alpha} A_{n-1}, \quad n \geq 2$$

olarak elde edilir. Buradan, (5.11) ile verilen kesirli mertebeli başlangıç değer probleminin seri çözümü,

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = y(x) \tag{5.19}$$

olur.

5.3 Varyasyonel İterasyon Metodu (VIM)

Varyasyonel iterasyon metodu (VIM), pozitif bilimler ve mühendislik alanlarında yapılan araştırmalarda önemli bir rol oynamaktadır. Bu method, Çinli matematikçi He tarafından genel Langrange çarpan metodunun modifikasyonu olarak geliştirilmiştir [36],[37],[38].

Bu method bir çok lineer yada lineer olmayan diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesinde kullanılmıştır. Varyasyonel iterasyon metodunu uygulamak için aşağıdaki kesirli mertebeli diferansiyel denklemi ele alalım.

$$D_*^{\alpha} y - f(x,y) = 0, \quad m-1 < \alpha \le m \tag{5.20}$$

Bu metodun temel unsuru, (5.20) ile verilen denklemin düzeltme fonksiyonunu kurmaktır. λ-Langrange çarpanı olmak üzere (5.20) denkleminin düzeltme fonksiyonu,

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + J^{\alpha}\left[\lambda \cdot \left(D_*^{\alpha} y_n(x) - f(x, \tilde{y}_n(x))\right)\right] \tag{5.21}$$

şeklindedir. Burada, y_n n-nci yaklaşık çözüm fonksiyonu, $\delta \cdot \tilde{y}_n = 0$ olmak üzere $\tilde{y}_n$ ise kısıtlayıcı varyasyon olarak tanımlanır. (5.21) düzeltme fonksiyonunda kesirli mertebeden olduğu zaman λ-Langrange çarpanını belirlemek için belli bir yol yoktur. λ-Langrange çarpanını yaklaşık olarak belirleyebilmek için kesirli mertebe yerine m yada $m-1$ tamsayı değerleri kullanılır. Bu durumda (5.21) ile verilen doğrulama fonksiyonu,

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \left[\lambda \cdot \left(\frac{d^m}{dt^m} y_n(x) - f(x, \tilde{y}_n(x))\right)\right] dt \tag{5.22}$$

veya

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \left[\lambda \cdot \left(\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} y_n(x) - f(x, \tilde{y}_n(x)) \right) \right] dt \tag{5.23}$$

olur.

Odibat ve Momani [30] çalışmalarında (5.20) ile verilen denklemin doğrulama fonksiyonunu,

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \left[\lambda \cdot \left(\frac{d^{m}}{dt^{m}} y_n(x) - f(x, \tilde{y}_n(x)) \right) \right] dt \tag{5.24}$$

olarak yapılandırmışlardır. Bu durumda, $m=1$ için Langrange çarpanının $\lambda=-1$ olduğu açıktır. Böylece (5.24) denklemindeki λ-Langrange çarpanı belirlenerek yerine yazıldığında aşağıdaki iterasyon uygulanır.

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \left[\lambda \cdot \left(D_*^{\alpha} y_n(x) - f(x, \tilde{y}_n(x)) \right) \right] dt \tag{5.25}$$

Verilen başlangıç koşulları ve (5.25) deki iterasyon formulü uygulanarak (5.20) denkleminin yaklaşık çözümü elde edilebilir. Tam çözüm ise,

$$y(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x) \tag{5.26}$$

eşitliği ile elde edilir.

5.4 Kesirli Kuvvet Serileri ile Çözüm

(5.1) denkleminde açık olarak verilen kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemi kapalı formda $F \in R^n$, $X \in R^n$ ve $t \in R$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} &F\left(D_*^{\alpha} x(t), x(t), t\right) = 0 \\ &x(t_0) = x_0 \end{aligned} \tag{5.27}$$

şeklinde ifade edilir. (5.27) denkleminin çözümleri,

$$x(t) = x_0 + e t^{1/\beta} \tag{5.28}$$

şeklinde olsun. Burada, β, α kesirli sayısının kesir değeri, e, x_0 ile aynı boyutta bir vektörel fonksiyondur. (5.27) denkleminde (5.28) ifadesi ve türevleri yerine yazılır sonra yüksek dereceden terimler ihmal edilirse,

$$Ae = B \tag{5.29}$$

şeklinde e'ye göre lineer denklem sistemi elde edilir. Burada, A ve B sabit matrislerdir. (5.29) lineer denklem sisteminin çözümüyle e vektörü belirlenir ve (5.28) da yerine yazılır. Yüksek dereceden terimler için bu işlem tekrar edilirse (5.27) denklem sisteminin kesirli kuvvet serileri elde edilmiş olur.

Yukarıdaki işlemleri daha genel olarak ifade etmek gerekirse, (5.27) ifadesi ile verilen kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemin çözümleri,

$$x_i(t) = x_{i,0} + \sum_{j=1}^{n} e_{i,j} t^{j/\beta} \tag{5.30}$$

şeklinde olsun. (5.30) ifadesi ile kesirli türevlerini (5.27) denkleminde yerine yazıldığında,

$$f_i = \left(f_{i,n} + p_{i,1}e_1 + \cdots + p_{i,m}e_m \right) t^{\frac{n}{\beta}-j} + Q\left(t^{\frac{n}{\beta}-j+1} \right) \tag{5.31}$$

elde edilir. Burada, f_i, (5.27) denklemindeki F kapalı denklem sisteminin i-nci denklemi, $p_{i,j}$'ler sabit ve $e_1, e_2, \ldots, e_m$, (5.30) denklemindeki e vektörünün tabanı ve m değeri vektörün boyutudur. Eğer, f_i denklemi $D_*^{\alpha_i} x_i(t)$ kesirli türevini içeriyorsa $j = \alpha_i$, içermiyorsa $j = 0$'dır. (5.29) ve (5.31)'dan,

$$\begin{aligned} A &= P_{i,j} \\ B &= -f_{i,n} \end{aligned} \tag{5.32}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Burada $P_{i,j}$, elemanları $p_{i,j}$ olan matristir. Bu lineer denklem sisteminin çözümünden e_i $(i = 1,2,\ldots,m)$ bulunur ve (5.30) denkleminde yerine yazıldığında (5.27) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemin çözümü için keyfi terimden oluşan kesirli kuvvet serisi elde edilir.

BÖLÜM 6

ARAŞTIRMA SONUÇLARI

Bu bölümde, kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemler için sunulan metotlar dört problem üzerinde test edilmiş ve elde edilen sonuçlar kendi aralarında karşılaştırımıştır. Kesirli türevin farklı değerleri için yaklaşık çözümler grafik olarak verilmiştir. Literatürde yapılan çalışmalar incelendiğinde kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemlerin nümerik çözümleri için sadece Homotopy Analiz Metodu (HAM) uygulanmıştır [35]. Bu çalışmada sunulan metodlarla elde edilen sonuçlar HAM ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldığında aynı sonuçlar elde edilmiştir.

6.1 Test Problemi

Aşağıdaki başlangıç koşulları ile verilen kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemi ele alalım.

$$D_*^\alpha x(t) - ty'(t) + x(t) - (1+t)y(t) = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \tag{6.1a}$$

$$y(t) - \sin t = 0 \tag{6.1b}$$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0 \tag{6.1c}$$

$\alpha = 1$ için (6.1) denklem sisteminin tam çözümleri $x(t) = e^{-t} + t \cdot \sin t$, $y(t) = \sin t$ şeklindedir.

Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Metodu (KDDM) ile çözüm;

Teorem 5.1.3, Teorem 5.1.5 ve Teorem 5.1.8 den (6.1a) ile verilen denklemin diferansiyel dönüşümü,

$$X(k+\alpha\beta)=\frac{\Gamma\left(1+k/\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha+1+k/\beta\right)}\left[\sum_{l=0}^{k}\delta(k-l-\beta)\left(\frac{\Gamma\left(2+l/\beta\right)}{\Gamma\left(1+l/\beta\right)}Y(l+\beta)+Y(l)\right)-X(k)+Y(k)\right] \quad (6.2)$$

olarak ifade edilir. (5.2) den (6.1b) ifadesine ait diferansiyel dönüşüm:

$$Y(k)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i}}{(2i+1)!}\cdot\delta(k-\beta(2i+1)) \quad (6.3)$$

(5.2) den (6.1c) ile verilen başlangıç değerleri,

$$X(0)=1,\ X(k)=0,\ k=1,2,..\alpha\beta-1 \quad (6.4a)$$

$$Y(k)=0,\quad k=1,2,..\alpha\beta-1 \quad (6.4b)$$

$\alpha=1$ için (6.1) denklem sisteminin tam çözümü,

$$x(t)=e^{-t}+t\cdot\sin t \quad (6.5a)$$

$$y(t)=\sin t \quad (6.5b)$$

$\alpha=1,\beta=1$ ve $k=0,1,2,....n$ için (6.2), (6.3), (6.4a) ve (6.4b) eşitliklerinden,

$$X(0)=1,\quad Y(0)=0,$$

$$X(1)=-1,\ X(2)=\frac{3}{2},\ X(3)=-\frac{1}{6},\ X(4)=-\frac{1}{8},\ X(5)=-\frac{1}{120},\ X(6)=\frac{7}{720}$$

$$X(7)=-\frac{1}{5040},\ X(8)=-\frac{1}{5760},\ X(9)=-\frac{1}{362880},\ X(10)=\frac{11}{3628800}$$

(5.3)' den,

$$x(t)=\sum_{k=0}^{n}X(k)\cdot t^{\frac{k}{\beta}}=\sum_{k=0}^{n}X(k)\cdot t^{k}$$

$$x(t)=t-t^{2}+\frac{3}{2}t^{3}-\frac{1}{6}t^{4}-\frac{1}{8}t^{5}-\frac{1}{120}t^{6}+\frac{7}{720}t^{6}-\frac{1}{5040}t^{7}-\frac{1}{5760}t^{8}-\frac{1}{362880}t^{9}+... \quad (6.6)$$

serisi ede edilir ki bu seri (6.1a) tam çözümünün Taylor açılımı ile aynıdır.

(6.1) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemin $\alpha = 0.5,\ \beta = 2$ için KDDM ile elde edilen çözümü;

$$x(t) = \sum_{k=0}^{20} X(k) \cdot t^{\frac{k}{2}} = 1 - 1.1283791\sqrt{t} + 0.9999999t + 0.7522527t^{3/2} - 0.4999999t^2$$
$$+ 0.9027033t^{5/2} \text{-} 0.4999999t^3 \text{-} 0.0859718t^{7/2} + 0.0416667t^4 \quad (6.7)$$
$$- 0.0955242t^{9/2} + 0.0416667t^5 + 0.0034736t^{11/2} + \cdots$$

olarak bulunur.

Varyasyonel İterasyon Metodu (VİM) ile çözüm;

(6.1) denklem sistemine (5.16) formulü uygulandığında düzeltme fonksiyonu,

$$x_{k+1}(t) = x_k(t) - J^{\alpha}\left(D_*^{\alpha} x_k(t) + x_k(t) - \tilde{g}(t)\right) \quad (6.8)$$

şeklindedir. Burada, $\tilde{g}(t)$ fonksiyonu, $g(t) = t\cos t + (1+t)\sin t$ fonksiyonunun Taylor açılımıdır.

$$\tilde{g}(t) = \sum_{n=0}^{10} \frac{t^n}{n!} \tilde{g}^{(n)}(0) = 2t + t^2 - \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{20}t^5 + \frac{1}{120}t^6 - \frac{1}{630}t^7 - \frac{1}{5040}t^8 + \frac{1}{36288}t^9$$

$x_0(t) = 1$ ile iterasyona başlandığında,

$$x_0(t) = 1$$

$$x_1(t) = 1 - \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{2t^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} + \frac{2t^{2+\alpha}}{\Gamma(3+\alpha)} - \frac{4t^{3+\alpha}}{\Gamma(4+\alpha)} - \frac{4t^{4+\alpha}}{\Gamma(5+\alpha)} + \frac{6t^{5+\alpha}}{\Gamma(6+\alpha)} + \cdots$$
$$(6.9)$$
$$x_2(t) = 1 - \frac{2t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{2t^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} - \frac{2t^{1+2\alpha}}{\Gamma(2+2\alpha)} + \frac{2t^{2+\alpha}}{\Gamma(3+\alpha)} - \frac{2t^{2+2\alpha}}{\Gamma(3+2\alpha)} + \cdots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

elde edilir. (6.1) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemin $\alpha = 0.5$ için VİM ile elde edilen çözümü;

$$x_{20}(t) = 1 - 1.1283792\sqrt{t} + t + 0.7522529t^{3/2} - 0.5t^2 + 0.9027033t^{5/2} - 0.5t^3$$

$$- 0.0859718t^{7/2} + 0.0416667t^4 - 0.0955241t^{9/2} + 0.0416667t^5 \quad (6.10)$$

$$+ 0.00347361t^{11/2} + \cdots$$

olarak bulunur.

Adomian Ayrışım Metodu (AAM) ile çözüm;

(6.1b), (6.1a) denkleminde yerine yazıldığında

$$D_*^\alpha x(t) = -x(t) + t\cos t + (1+t)\sin t \quad (6.11)$$

Denklemi elde edilir. (6.11) denkleminde J^α operatorü uygulandığında,

$$x(t) = 1 + J^\alpha (t\cos t + (1+t)\sin t) - J^\alpha (x(t)) \quad (6.12)$$

bulunur. $g(t) = t\cos t + (1+t)\sin t$ fonksiyonunun Taylor açılımı,

$$\tilde{g}(t) = \sum_{n=0}^{10} \frac{t^n}{n!} \tilde{g}^{(n)}(0) = 2t + t^2 - \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{20}t^5 + \frac{1}{120}t^6 - \frac{1}{630}t^7 - \frac{1}{5040}t^8 \quad (6.13)$$

olmak üzere (6.11) denklemi,

$$D_*^\alpha x(t) = -x(t) + \tilde{g}(t) \quad (6.14)$$

şeklinde yazılabilir. Adomian ayrışım metoduna göre, (6.11) denkleminden

$$x_0(t) = 1$$

$$x_1(t) = J^\alpha (-x_0(t) + \tilde{g}(t)), \quad (6.15)$$

$$x_{n+1}(t) = -J^\alpha (x_n(t))$$

İterasyon formülleri elde edilir. $n \geq 1$ için (6.15) iterasyon formüllerinden

$$x_0(t) = 1$$

$$x_1(t) = -\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{2t^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} + \frac{2t^{2+\alpha}}{\Gamma(3+\alpha)} - \frac{4t^{3+\alpha}}{\Gamma(4+\alpha)} - \frac{4t^{4+\alpha}}{\Gamma(5+\alpha)} + \frac{6t^{5+\alpha}}{\Gamma(6+\alpha)} + \frac{6t^{6+\alpha}}{\Gamma(7+\alpha)} + \cdots$$

$$x_2(t)=\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}-\frac{2t^{1+2\alpha}}{\Gamma(2+2\alpha)}-\frac{2t^{2+2\alpha}}{\Gamma(3+2\alpha)}+\frac{4t^{3+2\alpha}}{\Gamma(4+2\alpha)}+\frac{4t^{4+2\alpha}}{\Gamma(5+2\alpha)}-\frac{6t^{5+2\alpha}}{\Gamma(6+2\alpha)}+\cdots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

elde edilir. (6.1) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemin $\alpha=0.5$ için AAM ile elde edilen çözümü;

$$x(t)=\sum_{i=0}^{20}x_i(t)=1-1.1283792\sqrt{t}+t+0.7522528t^{3/2}-0.5t^2+0.9027033t^{5/2}-0.5t^3$$

$$-0.0859718t^{7/2}+0.0416667t^4-0.0955241t^{9/2}+0.0416667t^5 \tag{6.16}$$

$$+0.0034736t^{11/2}+\cdots$$

olarak bulunur.

Kesirli Kuvvet Serileri ile çözüm;

(6.1) kesirli mertebeye sahip denklemin çözümünü $\alpha=0.5$ için çözümünü inceleyelim. Bu durumda $\beta=2$'dir ve (6.1a) denkleminin çözümü,

$$x(t)=x(0)+\sum_{i=1}^{n}e_i t^{i/2} \tag{6.17}$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. $y(t)=\sin t$ fonksiyonu yerine Taylor açılımı ve (6.17) ifadesi (6.1a) denkleminde kesirli türevleriyle birlikte yazıldığında,

$$\sum_{i=1}^{n}e_i\frac{\Gamma(1+i/2)}{\Gamma((i+1)/2)}t^{\frac{i-1}{2}}+\sum_{i=1}^{n}e_i t^{i/2}+1-2t-t^2+\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{6}t^4-\frac{1}{20}t^5-\frac{1}{120}t^6+\cdots=0 \tag{6.18}$$

elde edilir. (6.18) denkleminden $n=1,2,3,...$ değerleri için;

$$n=1\ \ için\quad (0.88622695\cdot e_1+1)+Q_{ihmal}\left(\sum_{k=0}^{n-1}c_k t^{k/2}+\sum_{k=n+1}^{m}c_k t^{k/2}\right)=0$$

$$\Rightarrow 0.88622695\cdot e_1+1=0\ \Rightarrow e_1=-1.1283791$$

$$n = 2 \;\; için \quad \left(1.1283791 \cdot e_2 - 1.1283791\right) \cdot \sqrt{t} + Q_{ihmal}\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k t^{k/2} + \sum_{k=n+1}^{m} c_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 1.1283791 \cdot e_2 - 1.1283791 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; e_2 = 1$$

$$n = 3 \;\; için \quad \left(1.3293404 \cdot e_3 - 1\right) \cdot t + Q_{ihmal}\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k t^{k/2} + \sum_{k=n+1}^{m} c_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 1.3293404 \cdot e_3 - 1 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; e_3 = 0.75225277$$

$$n = 4 \;\; için \quad \left(1.5045055 \cdot e_4 + 0.75225277\right) \cdot t^{3/2} + Q_{ihmal}\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k t^{k/2} + \sum_{k=n+1}^{m} c_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 1.5045055 \cdot e_4 + 0.75225277 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; e_4 = -0.5$$

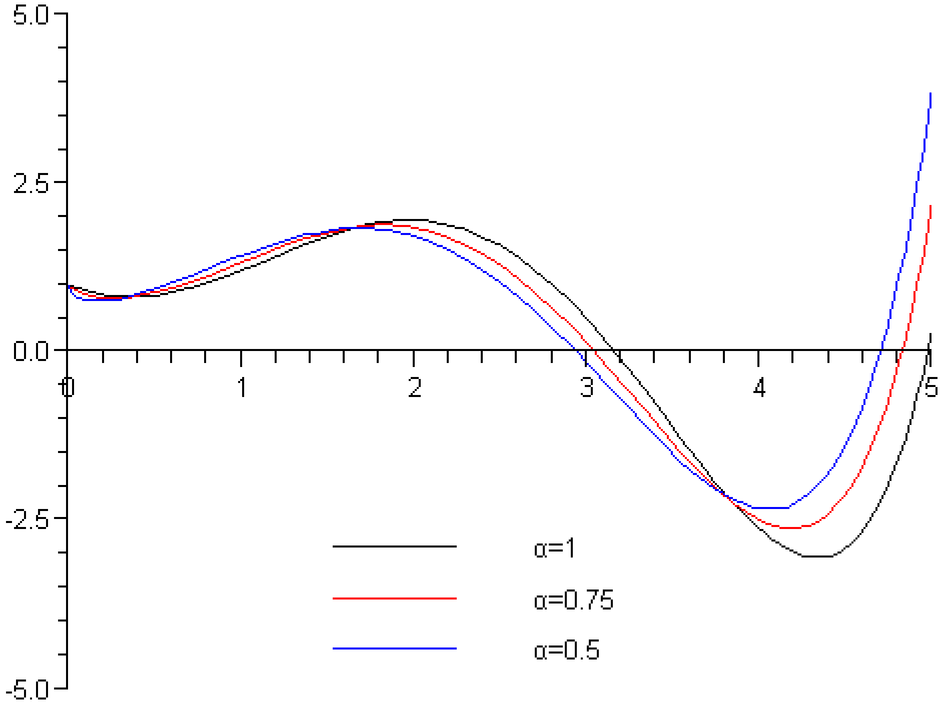
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

Bu şekilde devam edilirse, $\alpha = 0.5$ için (6.1a) denkleminin kesirli kuvvet serisi çözümü olarak,

$$\begin{aligned} x(t) = x(0) + \sum_{j=1}^{n} e_i t^{j/2} &= 1 - 1.1283791\sqrt{t} + t + 0.7522528t^{3/2} - 0.5t^2 + 0.9027033t^{5/2} \\ &\quad - 0.5t^3 - 0.0859717t^{7/2} + 0.0416667t^4 - 0.0955242t^{9/2} \qquad (6.19) \\ &\quad + 0.0416667t^5 + 0.0034736t^{11/2} + \cdots \end{aligned}$$

bulunur.

(6.1) denklem sisteminin α' nın farklı değerleri için Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Metodu (KDDM), Varyasyonel İterasyon Metodu (VIM), Adomian Ayrışım Metodu (AAM) ve Kesirli Kuvvet Serileri ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin karşılaştırması Çizelge 6.1'de, grafikleri Şekil 6.1'de verilmiştir.



Şekil 6.1 (6.1) denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonunun $\alpha = 1, \alpha = 0.75$ ve $\alpha = 0.5$ değerleri için grafikleri.

Çizelge 6.1 (6.1) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümlerinin karşılaştırması.

t	$\alpha=0.5$					$\alpha=0.75$					$\alpha=1$					
	x_{seri}	x_{KDDM}	x_{VIM}	x_{AAM}	x_{HAM}	x_{series}	x_{KDDM}	x_{VIM}	x_{AAM}	x_{HAM}	x_{series}	x_{KDDM}	x_{VIM}	x_{AAM}	x_{HAM}	$x_{Tam Çözüm}$
0.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
0.1	0.7642924	0.7642925	0.7642925	0.7642925	0.7642925	0.8492996	0.8492996	0.8492995	0.8492996	0.8492995	0.9148208	0.9148208	0.9148208	0.9148208	0.9148208	0.9148208
0.2	0.7545095	0.7545095	0.7545097	0.7545096	0.7545097	0.8016697	0.8016697	0.8016698	0.8016697	0.8016696	0.8584646	0.8584646	0.8584646	0.8584646	0.8584646	0.8584646
0.3	0.7903162	0.7903162	0.7903162	0.7903162	0.7903162	0.7978999	0.7978999	0.7978997	0.7978999	0.7978999	0.8294743	0.8294743	0.8294743	0.8294743	0.8294743	0.8294743
0.4	0.8524952	0.8524951	0.8524950	0.8524950	0.8524950	0.8250875	0.8250871	0.8250869	0.8250871	0.8250873	0.8260874	0.8260874	0.8260874	0.8260874	0.8260874	0.8260874
0.5	0.9323248	0.9323246	0.9323247	0.9323247	0.9323247	0.8760169	0.8760143	0.8760143	0.8760144	0.8760146	0.8462434	0.8462434	0.8462434	0.8462434	0.8462434	0.8462434
0.6	1.0242051	1.0242050	1.0242051	1.0242051	1.0242052	0.9454683	0.9454581	0.9454582	0.9454581	0.9454582	0.8875971	0.8875971	0.8875971	0.8875971	0.8875971	0.8875971
0.7	1.1237906	1.1237904	1.1237905	1.1237905	1.1237906	1.0291093	1.0290756	1.0290756	1.0290755	1.0290755	0.9475377	0.9475377	0.9475377	0.9475377	0.9475377	0.9475377
0.8	1.2273296	1.2273291	1.2273291	1.2273290	1.2273291	1.1230542	1.1229595	1.1229594	1.1229594	1.1229592	1.0232138	1.0232138	1.0232138	1.0232138	1.0232138	1.0232138
0.9	1.3313933	1.3313916	1.3313915	1.3313916	1.3313916	1.2236723	1.2234367	1.2234364	1.2234365	1.2234363	1.1115640	1.1115639	1.1115639	1.1115639	1.1115639	1.1115639
1.0	1.4327592	1.4327551	1.4327552	1.4327551	1.4327552	1.3275088	1.3269766	1.3269756	1.3269758	1.3269757	1.2093504	1.2093504	1.2093505	1.2093504	1.2093506	1.2093504

6.2 Test Problemi

Aşağıdaki başlangıç koşulları ile verilen kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemi ele alalım.

$$D_*^{\alpha_1} x(t) - ty'(t) + t^2 z'(t) + x(t) - (1+t)y(t) + (t^2+2t)z(t) = 0 \tag{6.19a}$$

$$D_*^{\alpha_2} y(t) - tz'(t) - y(t) + (t-1)z(t) = 0, \quad 0 < \alpha_1, \alpha_2 \le 1 \tag{6.19b}$$

$$z(t) - \sin t = 0 \tag{6.19c}$$

$$x(0) = 1, \;\; y(0) = 1, \;\; z(0) = 0 \tag{6.19d}$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (6.19) denklem sisteminin tam çözümleri $x(t) = e^{-t} + te^{t}$, $y(t) = e^{t} + t\sin t$ ve $z(t) = \sin t$ şeklindedir.

Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Metodu (KDDM) ile çözüm;

Teorem 5.1.3, Teorem 5.1.5, Teorem 5.1.6, Teorem 5.1.7 ve Teorem 5.1.8’ den 6.19a ve 6.19b denklemlerine ait diferansiyel dönüşüm,

$$\begin{aligned} X(k+\alpha_1\beta_1) = \frac{\Gamma(1+k/\beta_1)}{\Gamma(\alpha_1+1+k/\beta_1)} \Bigg[& \sum_{l=0}^{k} \left(\frac{\Gamma(2+l/\beta_1)}{\Gamma(1+l/\beta_1)} Y(l+\beta_1) + Y(l) - 2Z(l) \right) \delta(k-l-\beta_1) \\ & - \sum_{l=0}^{k} \left(\frac{\Gamma(2+l/\beta_1)}{\Gamma(1+l/\beta_1)} Z(l+\beta_1) + Z(l) \right) \delta(k-l-2\beta_1) - X(k) + Y(k) \Bigg] \end{aligned} \tag{6.20}$$

$$\begin{aligned} Y(k+\alpha_2\beta_2) = \frac{\Gamma(1+k/\beta_2)}{\Gamma(\alpha_2+1+k/\beta_2)} \Bigg[& \sum_{l=0}^{k} \left(\frac{\Gamma(2+l/\beta_2)}{\Gamma(1+l/\beta_2)} Z(l+\beta_2) - Z(l) \right) \delta(k-l-\beta_2) \\ & + Y(k) + Z(k) \Bigg] \end{aligned} \tag{6.21}$$

Burada, $\beta = EKOK(\beta_1, \beta_2)$ dır. (5.2) den (6.19c) ifadesine ait diferansiyel dönüşüm,

$$Z(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \cdot \delta(k - \beta(2i+1)) \tag{6.22}$$

(5.2)’ den (6.19d) ile verilen başlangıç değerleri,

$$X(0)=1,\ \ X(k)=0,\ \ k=1,2,..\alpha_1\beta_1-1 \tag{6.23a}$$

$$Y(k)=0,\quad k=1,2,..\alpha_1\beta_1-1 \tag{6.23b}$$

$\alpha_1=\alpha_2=1$ için (6.11) denklem sisteminin tam çözümü,

$$x(t)=e^{-t}+te^{t},\ \ y(t)=e^{t}+t\sin t,\ \ z(t)=\sin t \tag{6.24}$$

$\alpha_1=\alpha_2=1$ ve $k=0,1,2,....n$ için (6.20), (6.21), (6.22), (6.23a) ve (6.23b) eşitliklerinden,

$$X(0)=1,\ X(1)=0,\ X(2)=\frac{3}{2},\ X(3)=\frac{1}{3},\ X(4)=\frac{5}{24},\ X(5)=\frac{1}{30},X(6)=\frac{7}{720},\ ...$$
$$Y(0)=1,\ Y(1)=1,\ Y(2)=\frac{3}{2},\ Y(3)=\frac{1}{6},\ Y(4)=-\frac{1}{8},\ Y(5)=\frac{1}{120},\ Y(6)=\frac{7}{720},\ ...$$

(5.3)’den (6.19) denklem sisteminin yaklaşık çözümü olarak

$$x(t)=\sum_{k=0}^{n}X(k)\cdot t^{\frac{k}{\beta_1}}=1+\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+\frac{5}{24}t^4+\frac{1}{30}t^5+\frac{7}{720}t^6+\frac{1}{840}t^7+... \tag{6.25a}$$

$$y(t)=\sum_{k=0}^{n}Y(k)\cdot t^{\frac{k}{\beta_2}}=1+t+\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{8}t^4+\frac{1}{120}t^5+\frac{7}{720}t^6+\frac{1}{5040}t^7+... \tag{6.25b}$$

serileri ede edilir ki bu seriler (6.24) tam çözümlerinin Taylor açılımı ile aynıdır.

(6.19) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sisteminin $\alpha_1=\alpha_2=0.75$ için KDDM ile elde edilen çözümü;

$$\begin{aligned} x(t)=\sum_{k=0}^{40}X(k)\cdot t^{\frac{k}{4}} &=1+0.7522528t^{3/2}+0.6217516t^{7/4}+0.5884068t^{9/4} \\ &+1.8806319t^{5/2}\text{-}1.3565489t^{11/4}\text{-}0.2916667t^{3}+0.3922712t^{13/4} \\ &+0.3438870t^{7/2}-0.2260915t^{15/4}+0.3541667t^{4} \\ &-0.1703983t^{17/4}-0.3438870t^{9/2}+0.3236678t^{19/4}+\cdots \end{aligned} \tag{6.26a}$$

$$y(t)=\sum_{k=0}^{40} Y(k)\cdot t^{\frac{k}{4}} = 1+1.0880653t^{3/4}+0.7522528t^{3/2}+1.2435031t^{7/4}$$

$$+0.3922712t^{9/4}+0.6018022t^{5/2}-0.4521830t^{11/4}+0.1666667t^{3} \quad (6.26b)$$

$$+0.2413976t^{13/4}-0.1719435t^{7/2}-0.1808732t^{15/4}$$

$$+0.0833333t^{4}-0.0567995t^{17/4}-0.0573145t^{9/2}+\cdots$$

olarak bulunur.

Varyasyonel İterasyon Metodu (VİM) ile çözüm;

(6.19) denklem sistemine (5.16) ile verilen formül uygulandığında düzeltme fonksiyonları,

$$x_{k+1}(t)=x_k(t)-J^{\alpha_1}\left(D_*^{\alpha_1}x_k(t)-ty_k'(t)+x_k(t)-(t+1)y_k(t)+\tilde{g}_1(t)\right)$$

$$y_{k+1}(t)=y_k(t)-J^{\alpha_2}\left(D_*^{\alpha_2}y_k(t)-y_k(t)-\tilde{g}_2(t)\right),\ k\geq 1. \quad (6.27)$$

şeklindedir. Burada, $\tilde{g}_1(t),\tilde{g}_2(t)$ ifadeleri, sırasıyla $g_1(t)=t^2\cos t+(t^2+2t)\sin t$ ve $g_2(t)=t\cos t-(t-1)\sin t$ fonksiyonlarının Taylor açılımlarıdır.

$x_0(t)=y_0(t)=1$ ile iterasyona başlandığında,

$x_0(t)=1,$

$y_0(t)=1,$

$$x_1(t)=1+\frac{t^{1+\alpha_1}}{\Gamma(2+\alpha_1)}-\frac{6t^{2+\alpha_1}}{\Gamma(3+\alpha_1)}-\frac{6t^{3+\alpha_1}}{\Gamma(4+\alpha_1)}+\frac{20t^{4+\alpha_1}}{\Gamma(5+\alpha_1)}+\frac{20t^{5+\alpha_1}}{\Gamma(6+\alpha_1)}+\cdots \quad (6.28)$$

$$y_1(t)=1+\frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma(1+\alpha_2)}+\frac{2t^{1+\alpha_2}}{\Gamma(2+\alpha_2)}-\frac{2t^{2+\alpha_2}}{\Gamma(3+\alpha_2)}-\frac{4t^{3+\alpha_2}}{\Gamma(4+\alpha_2)}+\frac{4t^{4+\alpha_2}}{\Gamma(5+\alpha_2)}+\cdots$$

$$\vdots$$

elde edilir. (6.19) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sisteminin $\alpha_1=\alpha_2=0.75$ için VİM ile elde edilen çözümü;

$$x_{20}(t)=1+1.3164424t^{3/2}+0.6217516t^{7/4}+0.2942034t^{9/4}+1.8806319t^{5/2}$$
$$-1.3565489t^{11/4}+0.4166667t^{3}+0.3922712t^{13/4}+0.3438870t^{7/2}$$
$$-0.2713098t^{15/4}+0.3541667t^{4}-0.1703983t^{17/4}$$
$$-0.3295584t^{9/2}+0.3236678t^{19/4}+\cdots \tag{6.29a}$$

$$y_{20}(t)=1+1.0880653t^{3/4}+0.7522528t^{3/2}+1.2435031t^{7/4}+0.3922712t^{9/4}$$
$$+0.6018022t^{5/2}-0.4521830t^{11/4}+0.1666667t^{3}+0.2413976t^{13/4}$$
$$-0.1719435t^{7/2}-0.1808732t^{15/4}+0.0833333t^{4}-0.0567995t^{17/4}$$
$$-0.0573145t^{9/2}+\cdots \tag{6.29b}$$

olarak bulunur.

Adomian Ayrışım Metodu (AAM) ile çözüm;

(6.19) denklem sistemi,

$$D_*^{\alpha_1}x(t)=ty'(t)-x(t)+(1+t)y(t)-t^2\cos t-(t^2+2t)\sin t \tag{6.30a}$$

$$D_*^{\alpha_2}y(t)=y(t)+t\cos t-(t-1)\sin t \tag{6.30b}$$

olarak ifade edilebilir. (6.30) denklem sistemine J^{α} integral operatorü uygulandığında,

$$x(t)=1+J^{\alpha}\left(ty'(t)-x(t)+(1+t)y(t)\right)-J^{\alpha}\left(t^2\cos t+(t^2+2t)\sin t\right) \tag{6.31a}$$

$$y(t)=1+J^{\alpha}\left(y(t)\right)+J^{\alpha}\left(t\cos t-(t-1)\sin t\right) \tag{6.31b}$$

buluruz. (6.31) denklem sisteminde hesaplamaların kolay yapılabilmesi için $g_1(t)=t^2\cos t+(t^2+2t)\sin t$ ve $g_2(t)=t\cos t-(t-1)\sin t$ fonksiyonlarının Taylor açılımları kullanılabilir.

$$\tilde{g}_1(t)=\sum_{n=0}^{10}\frac{t^n}{n!}\tilde{g}_1^{(n)}(0)=3t^2+t^3-\frac{5}{6}t^4-\frac{1}{6}t^5+\frac{7}{120}t^6+\frac{1}{120}t^7-\frac{1}{560}t^8-\frac{1}{5040}t^9+\frac{11}{362880}t^{10}$$

$$\tilde{g}_2(t)=\sum_{n=0}^{10}\frac{t^n}{n!}\tilde{g}_2^{(n)}(0)=2t-t^2-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{6}t^4+\frac{1}{20}t^5-\frac{1}{120}t^6-\frac{1}{630}t^7+\frac{1}{5040}t^8+\frac{1}{36288}t^9 \tag{6.32}$$

Adomian ayrışım metoduna göre, (6.31) denklem sisteminden,

$$\begin{aligned}
&x_0(t)=x(0),\\
&y_0(t)=y(0),\\
&x_1(t)=J^{\alpha}(ty_0'(t)-x_0(t)+(1+t)y_0(t)-\tilde{g}_1(t)),\\
&y_1(t)=J^{\alpha}(y_n(t)+\tilde{g}_2(t)),\\
&x_{n+1}(t)=J^{\alpha}(ty_n'(t)-x_n(t)+(1+t)y_n(t)),\\
&y_{n+1}(t)=J^{\alpha}(y_n(t)),
\end{aligned} \tag{6.33}$$

iterasyon formülleri elde edilir. $n\geq 1$ için (6.33) iterasyon formüllerinden

$$x_0(t)=1$$

$$y_0(t)=1$$

$$x_1(t)=\frac{t^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}-\frac{6t^{2+\alpha}}{\Gamma(3+\alpha)}-\frac{6t^{3+\alpha}}{\Gamma(4+\alpha)}+\frac{20t^{4+\alpha}}{\Gamma(5+\alpha)}+\frac{20t^{5+\alpha}}{\Gamma(6+\alpha)}+\cdots$$

$$y_1(t)=\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}+\frac{2t^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}-\frac{2t^{2+\alpha}}{\Gamma(3+\alpha)}-\frac{4t^{3+\alpha}}{\Gamma(4+\alpha)}+\frac{4t^{4+\alpha}}{\Gamma(5+\alpha)}+\cdots$$

$$x_2(t)=\frac{(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}t^{2\alpha}+\frac{4+3\alpha}{\Gamma(2+2\alpha)}t^{1+2\alpha}+\frac{4}{\Gamma(3+2\alpha)}t^{2+2\alpha}-\frac{6\alpha+16}{\Gamma(4+2\alpha)}t^{3+2\alpha}+\cdots$$

$$y_2(t)=\frac{1}{\Gamma(1+2\alpha)}t^{2\alpha}+\frac{2}{\Gamma(2+2\alpha)}t^{1+2\alpha}-\frac{2}{\Gamma(3+2\alpha)}t^{2+2\alpha}-\frac{4}{\Gamma(4+2\alpha)}t^{3+2\alpha}+\cdots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

elde edilir. (6.19) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sisteminin $\alpha_1=\alpha_2=0.75$ için AAM ile elde edilen çözümü;

$$x(t)=\sum_{i=0}^{20}x_i(t)=1+1.3164424t^{3/2}+0.6217516t^{7/4}+0.2942034t^{9/4}+1.8806319t^{5/2}$$

$$-1.3565489t^{11/4}+0.4166667t^{3}+0.3922712t^{13/4}+0.3438870t^{7/2} \tag{6.34a}$$

$$-0.2713098t^{15/4}+0.3541667t^{4}-0.1703983t^{17/4}-0.3295584t^{9/2}$$

$$+0.3236678t^{19/4}+\cdots$$

$$y(t)=\sum_{i=0}^{20}y_i(t)=1+1.0880653t^{3/4}+0.7522528t^{3/2}+1.2435031t^{7/4}+0.3922712t^{9/4}$$

$$+0.6018022t^{5/2}-0.4521830t^{11/4}+0.1666667t^{3}+0.2413976t^{13/4} \tag{6.34b}$$

$$-0.1719435t^{7/2}-0.1808732t^{15/4}+0.0833333t^{4}-0.0567994t^{17/4}$$

$$-0.0573145t^{9/2}+\cdots$$

olarak bulunur.

Kesirli Kuvvet Serileri ile çözüm;

(6.19) kesirli mertebeye sahip denklem sisteminin $\alpha_1=\alpha_2=0.75$ için çözümünü inceleyelim. Bu durumda $\beta=4$'dir ve (6.19) denklem sisteminin çözümü,

$$x(t)=x(0)+\sum_{i=1}^{n}e_i t^{i/4}=1+\sum_{i=1}^{n}e_i t^{i/4} \tag{6.35a}$$

$$y(t)=y(0)+\sum_{i=1}^{n}f_i t^{i/4}=1+\sum_{i=1}^{n}f_i t^{i/4} \tag{6.35b}$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. $z(t)=\sin t$ fonksiyonu yerine Taylor açılımı ve (6.35) ifadeleri (6.19) denklem sisteminde türevleriyle birlikte yazıldığında,

$$\sum_{i=1}^{n}e_i\cdot\left(\frac{\Gamma(1+i/4)}{\Gamma((i+1)/4)}t^{\frac{i-3}{4}}+t^{i/4}\right)-\sum_{i=1}^{n}f_i\cdot\left(\frac{i}{4}t^{i/4}+t^{i/4}+t^{\frac{i+4}{4}}\right)-t+3t^2+t^3+\cdots=0 \tag{6.36a}$$

$$\sum_{i=1}^{n}f_i\cdot\left(\frac{\Gamma(1+i/4)}{\Gamma((i+1)/4)}t^{\frac{i-3}{4}}-t^{i/4}\right)-1-2t+t^2+\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{6}t^4-\frac{1}{20}t^5+\frac{1}{120}t^6+\cdots=0 \tag{6.36b}$$

elde edilir. (6.36) denklemlerinden $n=1,2,3,\dots$ değerleri için;

$$n=1\ \text{için}\quad 0.51138288\cdot e_1\cdot t^{-1/2}+Q_{ihmal}\left(\sum_{k=n-2}^{m}c_k t^{k/4}\right)=0$$

$$0.51138288\cdot f_1\cdot t^{-1/2}+R_{ihmal}\left(\sum_{k=n-2}^{l}d_k t^{k/4}\right)=0$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0.51138288 & 0\\ 0 & 0.51138288\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e_1\\ f_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}e_1\\ f_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$n=2\ \text{için}\quad 0.72320455\cdot e_2\cdot t^{-1/4}+Q_{ihmal}\left(\sum_{k=n-2}^{m}c_k t^{k/4}\right)=0$$

$$0.72320455\cdot f_2\cdot t^{-1/4}+R_{ihmal}\left(\sum_{k=n-2}^{m}d_k t^{k/4}\right)=0$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0.72320455 & 0\\ 0 & 0.72320455\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e_2\\ f_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}e_2\\ f_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$n=3\ \text{için}\quad 0.91906252\cdot e_3+Q_{ihmal}\left(\sum_{k=n-2}^{m}c_k t^{k/4}\right)=0$$

$$0.91906252\cdot f_3-1+R_{ihmal}\left(\sum_{k=n-2}^{m}d_k t^{k/4}\right)=0$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0.91906252 & 0\\ 0 & 0.91906252\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e_3\\ f_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}e_3\\ f_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1.0880653\end{pmatrix}$$

$$n=4\ \text{için}\quad 1.1032627\cdot e_4\cdot t^{1/4}+Q_{ihmal}\left(\sum_{k=n-2}^{m}c_k t^{k/4}\right)=0$$

$$1.1032627\cdot f_4\cdot t^{1/4}+R_{ihmal}\left(\sum_{k=n-2}^{m}d_k t^{k/4}\right)=0$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1.1032627 & 0\\ 0 & 1.1032627\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e_4\\ f_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}e_4\\ f_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$n=5$ *için* $\quad 1.2784572 \cdot e_5 \cdot t^{1/2} + Q_{ihmal}\left(\sum_{k=n-2}^{m} c_k t^{k/4}\right) = 0$

$1.2784572 \cdot f_5 \cdot t^{1/2} + R_{ihmal}\left(\sum_{k=n-2}^{m} d_k t^{k/4}\right) = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1.2784572 & 0 \\ 0 & 1.2784572 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_5 \\ f_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e_5 \\ f_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$n=6$ *için* $\quad (1.4464091 \cdot e_6 - 1.9041143) \cdot t^{3/4} + Q_{ihmal}\left(\sum_{k=n-2}^{m} c_k t^{k/4}\right) = 0$

$(1.4464091 \cdot f_6 - 1.0880653) \cdot t^{3/4} + R_{ihmal}\left(\sum_{k=n-2}^{m} d_k t^{k/4}\right) = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1.4464091 & 0 \\ 0 & 1.4464091 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_6 \\ f_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.9041143 \\ 1.0880653 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e_6 \\ f_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3164424 \\ 0.75225280 \end{pmatrix}$$

$n=7$ *için* $\quad (1.6083594 \cdot e_7 - 1) \cdot t + Q_{ihmal}\left(\sum_{k=n-2}^{m} c_k t^{k/4}\right) = 0$

$(1.6083594 \cdot f_7 - 2) \cdot t + R_{ihmal}\left(\sum_{k=n-2}^{m} d_k t^{k/4}\right) = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1.6083594 & 0 \\ 0 & 1.6083594 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_7 \\ f_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e_7 \\ f_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.62175158 \\ 1.2435032 \end{pmatrix}$$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Bu şekilde devam edilirse, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$ için (6.19) denklem sisteminin kesirli kuvvet serisi çözümü olarak,

$$\begin{aligned} x(t) = x(0) + \sum_{i=1}^{n} e_i t^{i/4} &= 1 + 1.3164424 t^{3/2} + 0.6217516 t^{7/4} + 0.2942034 t^{9/4} \\ &+ 1.8806320 t^{5/2} - 1.3565489 t^{11/4} + 0.4166666 t^{3} \\ &+ 0.3922712 t^{13/4} - 0.2713098 t^{15/4} + 0.3541666 t^{4} \\ &- 0.1703983 t^{17/4} - 0.3295584 t^{9/2} + 0.3236678 t^{19/4} + \cdots \end{aligned} \tag{6.37a}$$

$$y(t)=y(0)+\sum_{i=1}^{n} f_i t^{i/4} = 1+1.0880653t^{3/4}+0.7522528t^{3/2}+1.2435032t^{7/4}$$

$$+0.3922711t^{9/4}+0.6018023t^{5/2}-0.4521830t^{11/4}$$

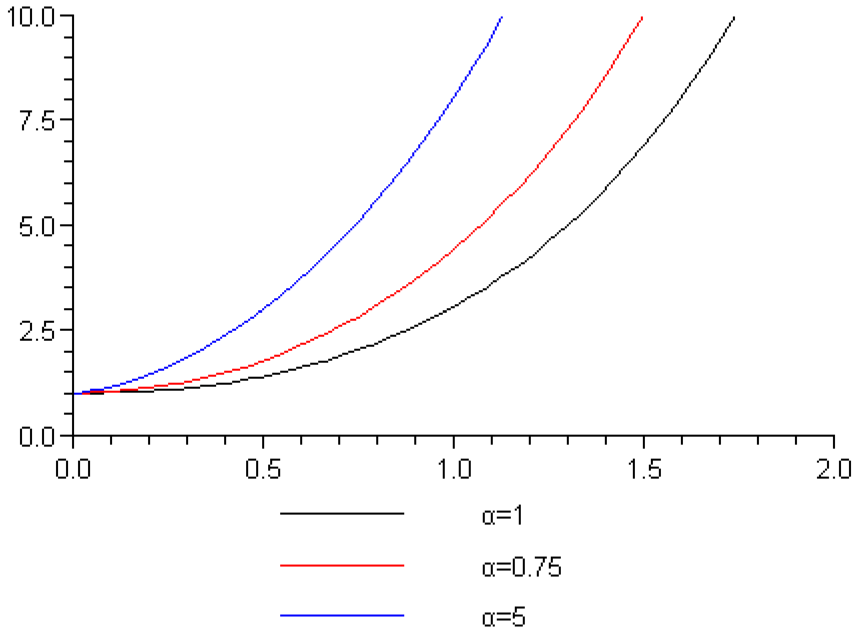
$$+0.1666667t^{3}+0.2413976t^{13/4}-0.1719435t^{7/2} \qquad (6.37b)$$

$$-0.1808732t^{15/4}+0.0833333t^{4}-0.0567994t^{17/4}$$

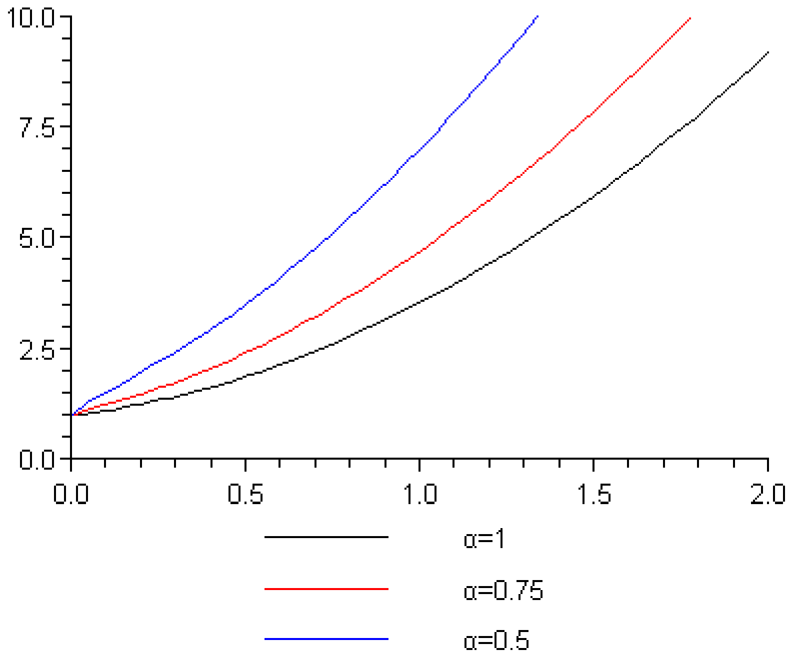
$$-0.0573144t^{9/2}+\cdots$$

bulunur.

(6.19) denklem sisteminin α nın farklı değerleri için Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Metodu (KDDM), Varyasyonel İterasyon Metodu (VIM), Adomian Ayrışım Metodu (AAM) ve Kesirli Kuvvet Serileri ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin karşılaştırması Çizelge 6.2 ve Çizelge 6.3'de, $x(t)$ ile $y(t)$ fonksiyonlarının grafikleri sırasıyla Şekil 6.2 ve Şekil 6.3'de verilmiştir.



Şekil 6.2 (6.19) denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonunun $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$ ve $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ değerleri için grafikleri.



Şekil 6.3 (6.19) denklem sistemindeki $y(t)$ fonksiyonunun $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$ ve $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ değerleri için grafikleri.

Çizelge 6.2 (6.19) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümlerinin karşılaştırması.

t	$\alpha_1=\alpha_2=0.5$					$\alpha_1=\alpha_2=0.75$					$\alpha_1=\alpha_2=1$					
	x_{seri}	x_{KDDM}	x_{VIM}	x_{AAM}	x_{HAM}	x_{series}	x_{KDDM}	x_{VIM}	x_{AAM}	x_{HAM}	x_{series}	x_{KDDM}	x_{VIM}	x_{AAM}	x_{HAM}	$x_{Tam Çözüm}$
0.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
0.1	1.2228686	1.1826669	1.2228686	1.2228686	1.2228685	1.0585942	1.0422900	1.0585942	1.0585942	1.0585940	1.0153545	1.0153545	1.0153545	1.0153545	1.0153545	1.0153545
0.2	1.5533696	1.4791622	1.5533696	1.5533696	1.5533698	1.1865367	1.1430426	1.1865367	1.1865367	1.1865374	1.0630113	1.0630113	1.0630113	1.0630113	1.0630107	1.0630113
0.3	1.9879446	1.8829159	1.9879445	1.9879445	1.9879446	1.3773918	1.3013450	1.3773918	1.3773918	1.3773921	1.1457759	1.1457759	1.1457759	1.1457759	1.1457757	1.1457759
0.4	2.5299287	2.3963004	2.5299284	2.5299284	2.5299252	1.6329568	1.5209151	1.6329568	1.6329568	1.6329549	1.2670499	1.2670499	1.2670499	1.2670499	1.2670519	1.2670499
0.5	3.1842984	3.0237759	3.1842965	3.1842965	3.1842820	1.9571515	1.8067239	1.9571515	1.9571515	1.9571484	1.4308913	1.4308913	1.4308913	1.4308913	1.4308954	1.4308913
0.6	3.9569430	3.7709033	3.9569350	3.9569350	3.9568828	2.3551134	2.1645730	2.3551133	2.3551133	2.3551127	1.6420829	1.6420829	1.6420829	1.6420829	1.6420863	1.6420829
0.7	4.8545885	4.6441750	4.8545612	4.8545612	4.8544043	2.8329698	2.6010423	2.8329695	2.8329695	2.8329735	1.9062122	1.9062122	1.9062122	1.9062122	1.9062103	1.9062122
0.8	5.8849542	5.6511265	5.8848760	5.8848761	5.8844792	3.3978266	3.1235606	3.3978254	3.3978254	3.3978313	2.2297617	2.2297617	2.2297617	2.2297617	2.2297507	2.2297617
0.9	7.0570359	6.8005903	7.0568382	7.0568385	7.0559691	4.0578601	3.7405416	4.0578567	4.0578567	4.0578543	2.6202125	2.6202125	2.6202125	2.6202125	2.6201919	2.6202125
1.0	8.3814772	8.1030425	8.3810239	8.3810247	8.3793211	4.8224735	4.4615632	4.8224644	4.8224644	4.8224367	3.0861613	3.0861613	3.0861613	3.0861615	3.0861362	3.0861613

Çizelge 6.3 (6.19) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $y(t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümlerinin karşılaştırması.

t	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$					$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$					$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$					
	y_{seri}	y_{KDDM}	y_{VIM}	y_{AAM}	y_{HAM}	y_{series}	y_{KDDM}	y_{VIM}	y_{AAM}	y_{HAM}	y_{series}	y_{KDDM}	y_{VIM}	y_{AAM}	y_{HAM}	$y_{TamÇözüm}$
0.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
0.1	1.5442147	1.5442147	1.5442147	1.5442147	1.5442148	1.2429149	1.2429149	1.2429149	1.2429149	1.2429149	1.1151543	1.1151543	1.1151543	1.1151543	1.1151546	1.1151543
0.2	1.9720908	1.9720908	1.9720908	1.9720908	1.9720908	1.4845588	1.4845587	1.4845588	1.4845587	1.4845587	1.2611366	1.2611366	1.2611366	1.2611366	1.2611373	1.2611366
0.3	2.4385129	2.4385129	2.4385129	2.4385129	2.4385129	1.7602815	1.7602815	1.7602815	1.7602815	1.7602815	1.4385149	1.4385149	1.4385149	1.4385149	1.4385142	1.4385149
0.4	2.9526384	2.9526385	2.9526384	2.9526384	2.9526385	2.0732557	2.0732556	2.0732556	2.0732556	2.0732556	1.6475920	1.6475920	1.6475920	1.6475920	1.6475902	1.6475920
0.5	3.5159836	3.5159836	3.5159836	3.5159836	3.5159834	2.4240283	2.4240283	2.4240283	2.4240283	2.4240283	1.8884340	1.8884340	1.8884340	1.8884340	1.8884328	1.8884340
0.6	4.1279358	4.1279358	4.1279358	4.1279358	4.1279358	2.8122851	2.8122849	2.8122849	2.8122849	2.8122849	2.1609043	2.1609043	2.1609043	2.1609043	2.1609054	2.1609043
0.7	4.7870918	4.7870918	4.7870918	4.7870918	4.7870924	3.2373243	3.2373235	3.2373236	3.2373236	3.2373236	2.4647051	2.4647051	2.4647051	2.4647051	2.4647091	2.4647051
0.8	5.4917779	5.4917779	5.4917779	5.4917779	5.4917788	3.6982688	3.6982663	3.6982665	3.6982665	3.6982665	2.7994258	2.7994258	2.7994258	2.7994258	2.7994312	2.7994258
0.9	6.2403394	6.2403393	6.2403394	6.2403394	6.2403387	4.1942027	4.1941958	4.1941963	4.1941963	4.1941963	3.1645973	3.1645973	3.1645973	3.1645974	3.1646012	3.1645973
1.0	7.0313499	7.0313499	7.0313499	7.0313501	7.0313458	4.7242853	4.7242679	4.7242695	4.7242695	4.7242695	3.5597528	3.5597528	3.5597528	3.5597528	3.5597519	3.5597528

6.3 Test Problemi

Aşağıdaki başlangıç koşulları ile verilen kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemi ele alalım.

$$x(t)+y(t)=e^{-t}+\sin t \tag{6.38a}$$

$$D_*^{\alpha}x(t)+x(t)-y(t)=-\sin t,\quad 0<\alpha\le 1 \tag{6.38b}$$

$$x(0)=1,\ \ y(0)=0 \tag{6.38c}$$

$\alpha=1$ için (6.38) denklem sisteminin tam çözümü $x(t)=e^{-t},\quad y(t)=\sin t$ şeklindedir.

Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Metodu (KDDM) ile çözüm;

Teorem 5.1.3 ve Teorem 5.1.7'den (6.38a) ve (6.38b) denklemleri ile (5.2)'den $g_1(t)=e^{-t}$ *ve* $g_2(t)=\sin t$ fonksiyonlarına ait dönüşüm formülleri,

$$X(k)+Y(k)=G_1(k)+G_2(k) \tag{6.39}$$

$$X(k+\alpha\beta)=\frac{\Gamma(1+k/\beta)}{\Gamma(\alpha+1+k/\beta)}\left[-X(k)+Y(k)-S(k)\right] \tag{6.40}$$

$$G_1(k)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{k/\beta}}{(k/\beta)!} & ,k/\beta\in Z^+\\ 0 & ,k/\beta\notin Z^+\end{cases} \tag{6.41}$$

$$G_2(k)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\cdot\delta(k-\beta(2i+1)) \tag{6.42}$$

(5.2)'den (6.38c) ile verilen başlangıç değerleri,

$$X(0)=1,\ \ X(k)=0,\ \ k=1,2,..\alpha\beta-1 \tag{6.43}$$

$$Y(0)=0 \tag{6.44}$$

$\alpha=1$ için (6.38) denklem sisteminin tam çözümü,

$$x(t)=e^{-t},\quad y(t)=\sin t \tag{6.45}$$

$k = 0,1,2,....n$ için (6.39)-(6.44) eşitliklerinden,

$$X(0)=1,\ X(1)=-1,\ X(2)=\frac{1}{2},\ X(3)=-\frac{1}{6},\ X(4)=\frac{1}{24},\ X(5)=-\frac{1}{120}, X(6)=\frac{1}{720},...$$
$$Y(0)=0,\ Y(1)=1, Y(2)=0,\ Y(3)=-\frac{1}{6}, Y(4)=0,\ Y(5)=\frac{1}{120}, Y(6)=0,...$$

elde edilir. (5.3) den (6.38) denklem sistemine ait yaklaşık çözüm,

$$x(t)=\sum_{k=0}^{n} X(k)\cdot t^{\frac{k}{\beta}} = 1-t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{24}t^4-\frac{1}{120}t^5+\frac{1}{720}t^6+... \tag{6.46a}$$

$$y(t)=\sum_{k=0}^{n} Y(k)\cdot t^{\frac{k}{\beta_2}} = t-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{120}t^5-\frac{1}{5040}t^7+... \tag{6.46b}$$

serileri ede edilir ki bu seriler (6.45) tam çözümlerinin Taylor açılımı ile aynıdır.

(6.38) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sisteminin $\alpha = 0.5$ için KDDM ile çözümü;

$$\begin{aligned} x(t)=\sum_{k=0}^{40} X(k)\cdot t^{\frac{k}{2}} &= 1-1.1283792t^{1/2}+2t-3.7612639t^{3/2}+5t^2-5.7171211t^{5/2} \\ &+6.3333333t^3-6.6198244t^{7/2}+6.4166667t^4-5.8651836t^{9/2} \\ &+5.1166667t^5-4.2690617t^{11/2}+3.4138889t^6-2.6265805t^{13/2} \\ &+1.9503968t^7-1.4009142t^{15/2}+0.9752480t^8+\cdots \end{aligned} \tag{6.47a}$$

$$\begin{aligned} y(t)=\sum_{k=0}^{40} Y(k)\cdot t^{\frac{k}{2}} &= 1.1283792t^{1/2}-2t+3.7612639t^{3/2}-4.5t^2+5.7171211t^{5/2} \\ &-6.6666667t^3+6.6198244t^{7/2}-6.3750000t^4+5.8651836t^{9/2} \\ &-5.1166667t^5+4.2690617t^{11/2}-3.4125000t^6+2.6265805t^{13/2} \\ &-1.9507937t^7+1.4009142t^{15/2}-0.97522321t^8+\cdots \end{aligned} \tag{6.47b}$$

olarak bulunur.

Varyasyonel İterasyon Metodu (VİM) ile çözüm;

(5.16) ile verilen formül (6.38) denklem sistemi için uygulandığında düzeltme fonksiyonları,

$$
\begin{aligned}
& y_{k+1}(t)=\tilde{g}_1(t)+\tilde{g}_2(t)-x_k(t) \\
& x_{k+1}(t)=x_k(t)-J^{\alpha}\left(D_*^{\alpha}x_k(t)+x_k(t)-y_k(t)+\tilde{g}_2(t)\right),\ k\geq 1.
\end{aligned}
\tag{6.48}
$$

şeklindedir. Burada, $\tilde{g}_1(t)$ *ve* $\tilde{g}_2(t)$ sırasıyla $g_1(t)=e^{-t}$ *ve* $g_2(t)=\sin t$ fonksiyonlarının Taylor açılımlarıdır.

$x_0(t)=1$ *ve* $y_0(t)=0$ ile iterasyona başlandığında,

$$y_0(t)=0,$$

$$x_0(t)=1,$$

$$y_1(t)=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{24}t^4+\frac{1}{720}t^6-\frac{1}{2520}t^7+\frac{1}{40320}t^8+\frac{1}{3628800}t^{10} \tag{6.49}$$

$$x_1(t)=1-\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}-\frac{t^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}+\frac{t^{2+\alpha}}{\Gamma(3+\alpha)}-\frac{t^{3+\alpha}}{\Gamma(4+\alpha)}+\frac{t^{4+\alpha}}{\Gamma(5+\alpha)}-\frac{t^{5+\alpha}}{\Gamma(6+\alpha)}+\cdots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

elde edilir. (6.38) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sisteminin $\alpha=0.5$ için VİM ile elde edilen çözümü;

$$
\begin{aligned}
x_{30}(t)=\ & 1-1.1283792t^{1/2}+2t-3.7612639t^{3/2}+5t^2-5.7171211t^{5/2} \\
& +6.3333333t^3-6.6198245t^{7/2}+6.4166667t^4-5.8651836t^{9/2} \\
& +5.1166667t^5-4.2690617t^{11/2}+3.4138889t^6-2.6265805t^{13/2} \\
& +1.9503968t^7-1.4009142t^{15/2}+0.975223222t^8+\cdots
\end{aligned}
\tag{6.50a}
$$

$$y_{30}(t)=1.1283792t^{1/2}-2t+3.7612639t^{3/2}-4.5t^{2}+5.7171211t^{5/2}$$

$$-6.6666667t^{3}+6.6198244t^{7/2}-6.3750000t^{4}+5.8651836t^{9/2}$$

$$-5.1166667t^{5}+4.2690617t^{11/2}-3.4125000t^{6}+2.6265805t^{13/2} \tag{6.50b}$$

$$-1.9507937t^{7}+1.4009142t^{15/2}-0.97482639t^{8}+\cdots$$

olarak bulunur.

Adomian Ayrışım Metodu (AAM) ile çözüm;

(6.38) denklem sistemi

$$y(t)=-x(t)+e^{-t}+\sin t \tag{6.51a}$$

$$D_{*}^{\alpha}x(t)=-x(t)+y(t)-\sin t \tag{6.51b}$$

olarak ifade edilebilir. (6.38b) denklemine J^{α} integral operatorü uygulandığında,

$$y(t)=-x(t)+e^{-t}+\sin t \tag{6.52a}$$

$$x(t)=x(0)+J^{\alpha}\left(-x(t)+y(t)-\tilde{g}_{2}(t)\right) \tag{6.52b}$$

elde edilir. (6.52) denklem sisteminde hesaplamaların kolay yapılabilmesi için $g_1(t)=e^{-t}+\sin t$ ve $g_2(t)=\sin t$ fonksiyonlarının 10-terimli Taylor açılımları kullanılabilir.

$$\tilde{g}_{1}(t)=\sum_{n=0}^{10}\frac{t^{n}}{n!}g_{1}^{(n)}(0)=1+\frac{1}{2}t^{2}-\frac{1}{3}t^{3}+\frac{1}{24}t^{4}+\frac{1}{720}t^{6}-\frac{1}{2520}t^{7}+\frac{1}{40320}t^{8}+\frac{1}{362880}t^{10}$$

$$\tilde{g}_{2}(t)=\sum_{n=0}^{10}\frac{t^{n}}{n!}g_{2}^{(n)}(0)=t-\frac{1}{6}t^{3}+\frac{1}{120}t^{5}-\frac{1}{5040}t^{7}+\frac{1}{362880}t^{9} \tag{6.53}$$

Adomian ayrışım metoduna göre, (6.52) denklem sisteminden,

$$
\begin{aligned}
&y_0(t) = y(0)\\
&x_0(t) = x(0)\\
&y_1(t) = -x_0(t) + \tilde{g}_1(t)\\
&x_1(t) = J^{\alpha}(-x_0(t) + y_1(t) - \tilde{g}_2(t))\\
&y_{n+1}(t) = -x_n(t)\\
&x_{n+1}(t) = J^{\alpha}(-x_n(t) + y_{n+1}(t)), \quad n \geq 1.
\end{aligned} \tag{6.54}
$$

iterasyon formülleri elde edilir. $n \geq 1$ için (6.54) iterasyon formüllerinden

$$y_0(t) = 0$$

$$x_0(t) = 1$$

$$y_1(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{14}t^4 + \frac{1}{120}t^6 - \frac{1}{2520}t^7 + \frac{1}{40320}t^8 + \frac{1}{362880}t^{10}$$

$$x_1(t) = -\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{t^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} + \frac{t^{2+\alpha}}{\Gamma(3+\alpha)} - \frac{t^{3+\alpha}}{\Gamma(4+\alpha)} + \frac{t^{4+\alpha}}{\Gamma(5+\alpha)} - \frac{t^{5+\alpha}}{\Gamma(6+\alpha)} + \frac{t^{6+\alpha}}{\Gamma(7+\alpha)} + \cdots$$

$$y_2(t) = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} - \frac{t^{2+\alpha}}{\Gamma(3+\alpha)} + \frac{t^{3+\alpha}}{\Gamma(4+\alpha)} - \frac{t^{4+\alpha}}{\Gamma(5+\alpha)} + \frac{t^{5+\alpha}}{\Gamma(6+\alpha)} - \frac{t^{6+\alpha}}{\Gamma(7+\alpha)} + \cdots$$

$$x_2(t) = \frac{2t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{2t^{1+2\alpha}}{\Gamma(2+2\alpha)} - \frac{2t^{2+2\alpha}}{\Gamma(3+2\alpha)} + \frac{2t^{3+2\alpha}}{\Gamma(4+2\alpha)} - \frac{2t^{4+2\alpha}}{\Gamma(5+2\alpha)} + \frac{2t^{5+2\alpha}}{\Gamma(6+2\alpha)} - \frac{2t^{6+2\alpha}}{\Gamma(7+2\alpha)} + \cdots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

elde edilir. (6.38) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sisteminin $\alpha = 0.5$ için AAM ile elde edilen çözümü;

$$
\begin{aligned}
x(t) = \sum_{i=0}^{30} x_i(t) = 1 &- 1.1283792t^{1/2} + 2t - 3.7612639t^{3/2} + 5t^2 - 5.7171211t^{5/2}\\
&+ 6.3333334t^3 - 6.6198245t^{7/2} + 6.4166667t^4 - 5.8651836t^{9/2}\\
&+ 5.1166667t^5 - 4.2690617t^{11/2} + 3.4138889t^6 - 2.6265805t^{13/2}\\
&+ 1.9503969t^7 - 1.4009142t^{15/2} + 0.97524804t^8 + \cdots
\end{aligned} \tag{6.55a}
$$

$$y(t)=\sum_{i=0}^{30} y_i(t)=1.1283792t^{1/2}-2t+3.7612639t^{3/2}-4.5t^2+5.7171212t^{5/2}$$

$$-6.6666667t^3+6.6198245t^{7/2}-6.3750001t^4+5.8651836t^{9/2} \quad (6.55b)$$

$$-5.1166667t^5+4.2690617t^{11/2}-3.4125000t^6+2.6265805t^{13/2}$$

$$-1.9507937t^7+1.4009142t^{15/2}-0.97522324t^8+\cdots$$

olarak bulunur.

Kesirli Kuvvet Serileri ile çözüm;

(6.38) kesirli mertebeye sahip denklem sisteminin $\alpha=0.5$ için çözümünü inceleyelim. Bu durumda $\beta=2$'dir ve (6.38) denklem sisteminin çözümü,

$$x(t)=x(0)+\sum_{i=1}^{n} e_i t^{i/2}=1+\sum_{i=1}^{n} e_i t^{i/2} \quad (6.56a)$$

$$y(t)=y(0)+\sum_{i=1}^{n} f_i t^{i/2}=\sum_{i=1}^{n} f_i t^{i/2} \quad (6.56b)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. $g_1(t)=e^{-t}+\sin t$ ve $g_2(t)=\sin t$ fonksiyonlarının yerine Taylor açılımlarını ve (6.56) ifadeleri (6.38) denklem sisteminde türevleriyle birlikte yazıldığında,

$$\sum_{i=1}^{n}(e_i+f_i)t^{i/2}-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{24}t^4-\frac{1}{720}t^6+\frac{1}{2520}t^7-\frac{1}{40320}t^8-\frac{1}{362880}t^{10}+\cdots=0 \quad (6.57a)$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i\cdot\left(\frac{\Gamma(1+i/2)}{\Gamma((i+1)/2)}t^{i-1/2}+t^{i/2}\right)-\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot t^{i/2}+t-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{120}t^5-\frac{1}{5040}t^7+\cdots=0 \quad (6.57b)$$

elde edilir. (6.57) denklemlerinden $n=1,2,3,\ldots$ değerleri için;

$$n=1 \;\; için \quad (e_1+f_1)\cdot t^{1/2}+Q_{ihmal}\left(\sum_{k=n+1}^{m} c_k t^{k/2}\right)=0$$

$$0.88622695\cdot e_1+1+R_{ihmal}\left(\sum_{k=n}^{l} d_k t^{k/2}\right)=0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.88622695 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.1283791 \\ 1.1283791 \end{pmatrix}$$

$n = 2$ *için* $\quad (e_2 + f_2) \cdot t + Q_{ihmal}\left(\sum_{k=n+1}^{m} c_k t^{k/2}\right) = 0$

$$(-2.2567582 + 1.1283791 \cdot e_2) \cdot t^{1/2} + R_{ihmal}\left(\sum_{k=n}^{m} d_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1283791 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_2 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.2567582 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e_2 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$n = 3$ *için* $\quad (e_3 + f_3) \cdot t^{3/2} + Q_{ihmal}\left(\sum_{k=n+1}^{m} c_k t^{k/2}\right) = 0$

$$(5 + 1.3293404 \cdot e_3) \cdot t + R_{ihmal}\left(\sum_{k=n}^{m} d_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.3293404 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_3 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e_3 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.7612639 \\ 3.7612639 \end{pmatrix}$$

$n = 4$ *için* $\quad (e_4 + f_4 - 0.50000000) \cdot t^2 + Q_{ihmal}\left(\sum_{k=n+1}^{m} c_k t^{k/2}\right) = 0$

$$(-7.5225278 + 1.5045055 \cdot e_4) \cdot t^{3/2} + R_{ihmal}\left(\sum_{k=n}^{m} d_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.5045055 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_4 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ -7.5225278 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e_4 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.0000002 \\ -4.5000002 \end{pmatrix}$$

$n = 5$ *için* $\quad (e_5 + f_5) \cdot t^{5/2} + Q_{ihmal}\left(\sum_{k=n+1}^{m} c_k t^{k/2}\right) = 0$

$$(9.5000002 + 1.6616755 \cdot e_5) \cdot t^2 + R_{ihmal}\left(\sum_{k=n}^{m} d_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.6616755 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_5 \\ f_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9.5000002 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e_5 \\ f_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.7171212 \\ 5.7171212 \end{pmatrix}$$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Bu şekilde devam edilirse, $\alpha = 0.5$ için (6.38) denklem sisteminin çözümü olarak,

$$x(t) = x(0) + \sum_{i=1}^{m} e_i t^{i/2} = 1 - 1.1283792t^{1/2} + 2t - 3.7612639t^{3/2} + 5t^2 - 5.7171211t^{5/2}$$

$$+ 6.3333333t^3 - 6.6198245t^{7/2} + 6.4166667t^4 - 5.865183t^{9/2} \qquad (6.58a)$$

$$+ 5.1166667t^5 - 4.2690616t^{11/2} + 3.4138889t^6 - 2.626580t^{13/2}$$

$$+ 1.9503968t^7 - 1.4009142t^{15/2} + 0.97524802t^8 + \cdots$$

$$y(t) = y(0) + \sum_{i=1}^{m} f_i t^{i/2} = 1.1283792t^{1/2} - 2t + 3.7612639t^{3/2} - 4.5t^2 + 5.7171211t^{5/2}$$

$$- 6.6666667t^3 + 6.6198245t^{7/2} - 6.3750000t^4 + 5.8651836t^{9/2} \qquad (6.58b)$$

$$- 5.1166667t^5 + 4.2690616t^{11/2} - 3.4125000t^6 + 2.6265805t^{13/2}$$

$$- 1.9507936t^7 + 1.4009142t^{15/2} - 0.97524802t^8 + \cdots$$

bulunur.

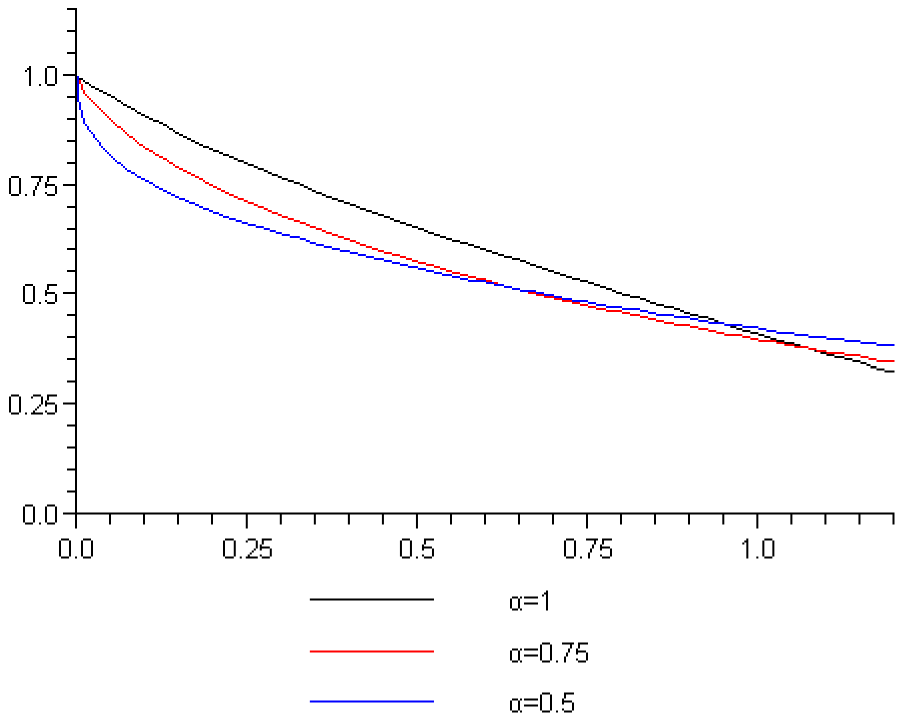
(6.38) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sisteminin α nın farklı değerleri için Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Metodu (KDDM), Varyasyonel İterasyon Metodu (VIM), Adomian Ayrışım Metodu (AAM) ve Kesirli Kuvvet Serileri ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin karşılaştırması Çizelge 6.4 ve Çizelge 6.5'de, $x(t)$ ile $y(t)$ fonksiyonlarının grafikleri sırasıyla Şekil 6.4 ve Şekil 6.5'de verilmiştir.

Çizelge 6.4 (6.38) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümlerinin karşılaştırması.

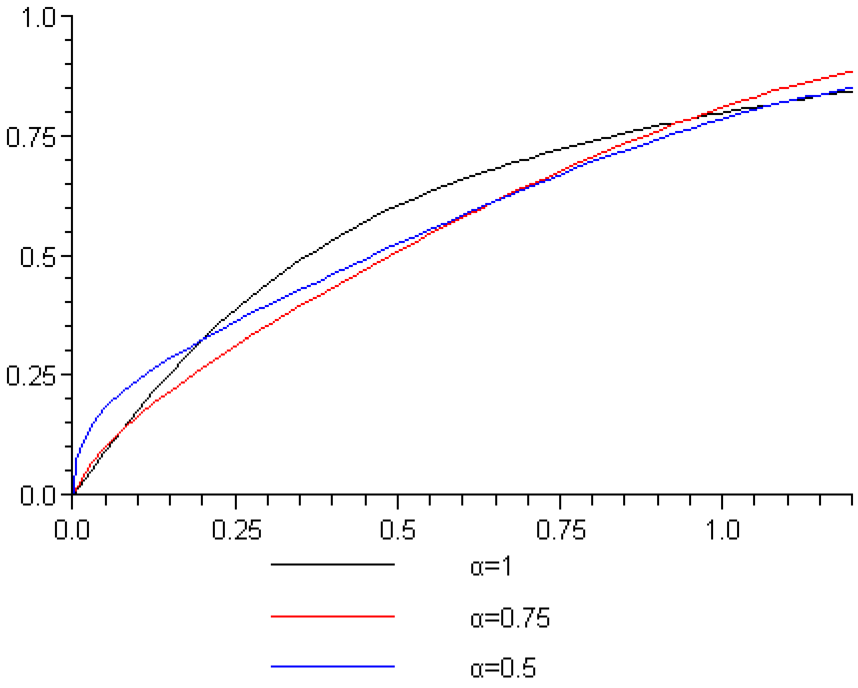
t	$\alpha_1=\alpha_2=0.5$					$\alpha_1=\alpha_2=0.75$					$\alpha_1=\alpha_2=1$					
	x_{seri}	x_{KDDM}	x_{VIM}	x_{AAM}	x_{HAM}	x_{series}	x_{KDDM}	x_{VIM}	x_{AAM}	x_{HAM}	x_{series}	x_{KDDM}	x_{VIM}	x_{AAM}	x_{HAM}	$x_{Tam Çözüm}$
0.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
0.1	0.7608910	0.7608910	0.7608911	0.7608910	0.7608910	0.8373931	0.8373931	0.8373932	0.8373929	0.8373931	0.9048374	0.9048374	0.9048374	0.9048374	0.9048374	0.9048374
0.2	0.6909261	0.6909262	0.6909261	0.6909261	0.6909262	0.7494390	0.7494391	0.7494390	0.7494391	0.7494391	0.8187308	0.8187308	0.8187308	0.8187308	0.8187308	0.8187308
0.3	0.6396502	0.6396502	0.6396501	0.6396502	0.6396502	0.6816129	0.6816129	0.6816129	0.6816128	0.6816129	0.7408182	0.7408182	0.7408182	0.7408182	0.7408182	0.7408182
0.4	0.5970877	0.5970877	0.5970878	0.5970877	0.5970878	0.6250322	0.6250322	0.6250322	0.6250321	0.6250322	0.6703201	0.6703201	0.6703201	0.6703201	0.6703201	0.6703201
0.5	0.5599927	0.5599926	0.5599928	0.5599927	0.5599926	0.5760121	0.5760122	0.5760122	0.5760124	0.5760122	0.6065307	0.6065307	0.6065307	0.6065307	0.6065307	0.6065307
0.6	0.5268889	0.5268894	0.5268895	0.5268891	0.5268894	0.5326236	0.5326238	0.5326238	0.5326237	0.5326238	0.5488116	0.5488116	0.5488116	0.5488116	0.5488116	0.5488116
0.7	0.4969632	0.4969640	0.4969654	0.4969651	0.4969640	0.4937126	0.4937128	0.4937127	0.4937127	0.4937128	0.4965853	0.4965853	0.4965853	0.4965853	0.4965853	0.4965853
0.8	0.4697014	0.4697024	0.4697067	0.4697066	0.4697022	0.4585197	0.4585198	0.4585197	0.4585197	0.4585197	0.4493290	0.4493290	0.4493290	0.4493290	0.4493290	0.4493290
0.9	0.4447420	0.4447444	0.4447577	0.4447741	0.4447448	0.4265075	0.4265076	0.4265077	0.4265077	0.4265076	0.4065697	0.4065697	0.4065697	0.4065697	0.4065697	0.4065697
1.0	0.4218152	0.4218206	0.4218511	0.4219688	0.4218207	0.3972736	0.3972738	0.3972736	0.3972732	0.3972736	0.3678795	0.3678795	0.3678794	0.3678794	0.3678794	0.3678794

Çizelge 6.5 (6.38) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $y(t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümlerinin karşılaştırması.

t	$\alpha_1=\alpha_2=0.5$					$\alpha_1=\alpha_2=0.75$					$\alpha_1=\alpha_2=1$					
	y_{seri}	y_{KDDM}	y_{VIM}	y_{AAM}	y_{HAM}	y_{series}	y_{KDDM}	y_{VIM}	y_{AAM}	y_{HAM}	y_{series}	y_{KDDM}	y_{VIM}	y_{AAM}	y_{HAM}	$y_{TamÇözüm}$
0.0	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.00000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.1	0.2437798	0.2437798	0.2437798	0.2437798	0.24377987	0.1672777	0.1672777	0.1672777	0.1672777	0.1672777	0.0998334	0.0998334	0.0998334	0.0998334	0.0998334	0.0998334
0.2	0.3264740	0.3264739	0.3264740	0.3264740	0.32647396	0.2679611	0.2679610	0.2679611	0.2679611	0.2679610	0.1986693	0.1986693	0.1986693	0.1986693	0.1986693	0.1986693
0.3	0.3966883	0.3966883	0.3966883	0.3966883	0.39668830	0.3547255	0.3547256	0.3547255	0.3547255	0.3547256	0.2955202	0.2955202	0.2955202	0.2955202	0.2955202	0.2955202
0.4	0.4626506	0.4626507	0.4626506	0.4626505	0.46265067	0.4347062	0.4347062	0.4347062	0.4347062	0.4347062	0.3894183	0.3894183	0.3894183	0.3894183	0.3894183	0.3894183
0.5	0.5259634	0.5259636	0.5259638	0.5259636	0.52596360	0.5099440	0.5099441	0.5099441	0.5099440	0.5099441	0.4794256	0.4794255	0.4794256	0.4794256	0.4794255	0.4794255
0.6	0.5865647	0.5865648	0.5865657	0.5865653	0.58656476	0.5808303	0.5808303	0.5808302	0.5808303	0.5808303	0.5646425	0.5646425	0.5646425	0.5646425	0.5646425	0.5646425
0.7	0.6438384	0.6438391	0.6438416	0.6438411	0.6438391	0.6470902	0.6470902	0.6470901	0.6470901	0.6470902	0.6442177	0.6442177	0.6442177	0.6442177	0.6442177	0.6442177
0.8	0.6969792	0.6969827	0.6969880	0.6969944	0.6969830	0.7081653	0.7081653	0.7081653	0.7081653	0.7081653	0.7173561	0.7173561	0.7173561	0.7173561	0.7173561	0.7173561
0.9	0.7451437	0.7451522	0.7451589	0.7452119	0.74515197	0.7633889	0.7633889	0.7633890	0.7633889	0.7633890	0.7833269	0.7833269	0.7833269	0.7833269	0.7833269	0.7833269
1.0	0.7875108	0.7875299	0.7875336	0.7878171	0.78752995	0.8120763	0.8120766	0.8120770	0.8120772	0.8120769	0.8414710	0.8414710	0.8414710	0.8414710	0.8414710	0.8414710



Şekil 6.4 (6.38) denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonunun $\alpha=1$, $\alpha=0.75$ ve $\alpha=0.5$ değerleri için grafikleri.



Şekil 6.5 (6.38) denklem sistemindeki $y(t)$ fonksiyonunun $\alpha=1$, $\alpha=0.75$ ve $\alpha=0.5$ değerleri için grafikleri.

6.4 Test Problemi

Aşağıdaki başlangıç koşulları ile verilen kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemi ele alalım.

$$D_*^{\alpha_1} x(t) - t^2 x(t) + y(t) - 2t = 0 \tag{6.59a}$$

$$D_*^{\alpha_2} y(t) - 2z(t) + 2t + 2 = 0, \quad 0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1 \tag{6.59b}$$

$$z(t) - y(t) - 2tx(t) + t^4 - t - 1 = 0 \tag{6.59c}$$

$$x(0) = 0, \; y(0) = 0, \; z(0) = 1 \tag{6.59d}$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (6.59) denklem sisteminin tam çözümleri $x(t) = t^2, \;\; y(t) = t^4 \;\; ve \;\; z(t) = 2t^3 + t + 1$ şeklindedir.

Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Metodu (KDDM) ile çözüm;

Teorem 5.1.3, 5.1.6 ve 5.1.7'dan (6.59) denklem sistemine ait dönüşüm formülleri,

$$X(k + \alpha_1\beta_1) = \frac{\Gamma\left(1 + k/\beta_1\right)}{\Gamma\left(\alpha_1 + 1 + k/\beta_1\right)} \left[\sum_{l=0}^{k} \delta(l - 2\beta_1) \cdot X(k - l) - Y(k) + 2\delta(k - \beta_1) \right] \tag{6.60}$$

$$Y(k + \alpha_2\beta_2) = \frac{\Gamma\left(1 + k/\beta_2\right)}{\Gamma\left(\alpha_2 + 1 + k/\beta_2\right)} \left[2Z(k) - 2\delta(k - \beta_2) - 2\delta(k) \right] \tag{6.61}$$

$$Z(k) = Y(k) + 2 \cdot \sum_{l=0}^{k} \delta(l - \beta) \cdot X(k - l) - 4\delta(k - 4\beta) + \delta(k - \beta) + \delta(k) \tag{6.62}$$

olur. Burada $\beta = EKOK(\beta_1, \beta_2)$ dir. (5.2) den (6.59d) ile verilen başlangıç değerleri,

$$X(k) = 0, \; k = 0,1,..\alpha_1\beta_1 - 1, \qquad Y(k) = 0, \quad k = 0,1,...,\alpha_2\beta_2 - 1 \text{ ve } Z(0) = 1 \tag{6.63}$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (6.59) denklem sisteminin tam çözümleri,

$$x(t) = t^2, \;\; y(t) = t^4 \;\; ve \;\; z(t) = 2t^3 + t + 1 \tag{6.64}$$

$k = 0,1,2,....n$ için (2.40a), (2.40b) ve (2.40c) eşitliklerinden,

$X(0)=0,\ X(1)=0,\ X(2)=1,\ X(4)=X(5)=...=X(n)=0$

$Y(0)=0,\ Y(1)=0, Y(2)=0,\ Y(3)=0, Y(4)=1,\ Y(5)=Y(6)=...=Y(n)=0$

$Z(0)=1,\ Z(1)=1, Z(2)=0,\ Z(3)=2,\ Z(4)=0,\ Z(5)=Z(6)=...=Z(n)=0$

elde edilir. (2.2) den (2.39) denklem sistemine ait yaklaşık çözüm,

$$x(t)=\sum_{k=0}^{n} X(k)\cdot t^{\frac{k}{\beta}}=t^2 \tag{6.65a}$$

$$y(t)=\sum_{k=0}^{n} Y(k)\cdot t^{\frac{k}{\beta_2}}=t^4 \tag{6.65b}$$

$$z(t)=\sum_{k=0}^{n} Z(k)\cdot t^{\frac{k}{\beta_2}}=2t^3+t+1 \tag{6.65c}$$

ede edilir ki bu çözümler tam çözümler ile aynıdır. (6.59) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sisteminin $\alpha_1=\alpha_2=0.5$ için KKDM ile elde edilen çözümü;

$$\begin{aligned} x(t)=\sum_{k=0}^{60} X(k)\cdot t^{\frac{k}{2}} &= 1.5045056t^{3/2}-1.7194349t^{7/2}-0.93750000t^4-1.5283866t^{9/2} \\ &-0.93333333t^5+0.47241040t^{11/2}+0.31527778t^6 \\ &+1.3514999t^{13/2}+1.2373016t^7+0.70911438t^{15/2} \\ &+0.73377976t^8-0.14456907t^{17/2}+\cdots \end{aligned} \tag{6.66a}$$

$$\begin{aligned} y(t)=\sum_{k=0}^{60} Y(k)\cdot t^{\frac{k}{2}} &= 3.3333333t^3+3.4388698t^{7/2}+3.3333333t^4+2.1397412t^{9/2} \\ &-1.1333333t^5-2.5079435t^{11/2}-4.4500000t^6 \\ &-4.8609107t^{13/2}-2.9079365t^7-1.6356943t^{15/2} \\ &+0.74300595t^8+2.1750578t^{17/2}+\cdots \end{aligned} \tag{6.66b}$$

$$z(t)=\sum_{k=0}^{60} Z(k)\cdot t^{\frac{k}{2}} = 1+t+3.009011t^{5/2}+3.3333333t^{3}+3.4388698t^{7/2}+2.3333333t^{4}$$

$$-1.2991286t^{9/2}-3.0083333t^{5}-5.5647167t^{11/2}-6.3166667t^{6} \qquad (6.66c)$$

$$-3.9160899t^{13/2}-2.277381t^{7}+1.0673055t^{15/2}+3.2176091t^{8}+\cdots$$

olarak bulunur.

Varyasyonel İterasyon Metodu (VİM) ile çözüm;

(5.16) ile verilen formül (6.59) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sistemi için uygulandığında düzeltme fonksiyonları,

$$x_{k+1}(t)=x_k(t)-J^{\alpha_1}\left(D_*^{\alpha_1}x_k(t)-t^2\cdot x_k(t)+y_k(t)-2t\right)$$

$$z_{k+1}(t)=y_k(t)+2t\cdot x_{k+1}(t)-t^4+t+1 \qquad (6.67)$$

$$y_{k+1}(t)=y_k(t)-J^{\alpha_2}\left(D_*^{\alpha_2}y_k(t)-2\cdot z_{k+1}(t)+2t+2\right)$$

şeklinde alınabilir. $x_0(t)=0,\ y_0(t)=0,\ z_0(t)=1$ başlangıç koşulları ile iterasyona başlandığında, (6.59) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sisteminin $\alpha_1=\alpha_2=0.5$ için VİM ile elde edilen çözümü;

$$x_{20}(t)=1.5045056t^{3/2}-1.7194349t^{7/2}-0.93750000t^{4}-1.5283866t^{9/2}$$

$$-0.93333333t^{5}+0.47241040t^{11/2}+0.31527778t^{6}+1.3514999t^{13/2}$$

$$+1.2373016t^{7}+0.70911438t^{15/2}+0.73377976t^{8} \qquad (6.68a)$$

$$-0.14456907t^{17/2}+\cdots$$

$$y_{20}(t)=3.3333333t^{3}+3.4388698t^{7/2}+3.3333333t^{4}+2.1397412t^{9/2}$$

$$-1.1333333t^{5}-2.5079435t^{11/2}-4.4500000t^{6}-4.8609107t^{13/2}$$

$$-2.9079365t^{7}-1.6356943t^{15/2}+0.74300595t^{8} \qquad (6.68b)$$

$$+2.1750578t^{17/2}+\cdots$$

$$z_{20}(t) = 1 + t + 3.0090111t^{5/2} + 3.3333333t^{3} + 3.4388698t^{7/2} + 2.3333333t^{4}$$

$$-1.2991286t^{9/2} - 3.0083333t^{5} - 5.5647167t^{11/2} - 6.3166667t^{6} \tag{6.68c}$$

$$-3.9160899t^{13/2} - 2.2773810t^{7} + 1.0673055t^{15/2} + 3.2176091t^{8} + \cdots$$

olarak bulunur.

Adomian Ayrışım Metodu (AAM) ile çözüm;

(6.59) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sistemi

$$D_{*}^{\alpha_1} x(t) = t^2 x(t) - y(t) + 2t \tag{6.69a}$$

$$z(t) = y(t) + 2tx(t) - t^4 + t + 1 \tag{6.69b}$$

$$D_{*}^{\alpha_2} y(t) = 2z(t) - 2t - 2 \tag{6.69c}$$

olarak ifade edilebilir. (6.69a) ve (6.69c) denklemlerine sırasıyla J^{α_1} ve J^{α_2} integral operatorleri uygulandığında,

$$x(t) = x(0) + J^{\alpha_1}\left(t^2 \cdot x(t) - y(t) + 2t\right) \tag{6.70a}$$

$$z(t) = y(t) + 2tx(t) - t^4 + t + 1 \tag{6.70b}$$

$$y(t) = y(0) + J^{\alpha_2}\left(2z(t) - 2t - 2\right) \tag{6.70c}$$

bulunur.Adomian ayrışım metoduna göre, (6.70) denklem sisteminden,

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= x(0)\\
z_0(t) &= z(0)\\
y_0(t) &= y(0)\\
x_1(t) &= J^{\alpha_1}(t^2 \cdot x_0(t) - y_0(t) + 2t)\\
z_1(t) &= y_0(t) + 2tx_1(t) - t^4 + t + 1\\
y_1(t) &= J^{\alpha_2}(2z_1(t) - 2t - 2)\\
x_{n+1}(t) &= J^{\alpha_1}(t^2 \cdot x_n(t) - y_n(t))\\
z_{n+1}(t) &= y_n(t) + 2tx_{n+1}(t)\\
y_{n+1}(t) &= J^{\alpha_2}(2z_{n+1}(t))
\end{aligned} \tag{6.71}$$

iterasyon formülleri elde edilir. $n \geq 1$ için (6.71) iterasyon formüllerinden

$x_0(t) = 0$

$z_0(t) = 1$

$y_0(t) = 0$

$$x_1(t) = \frac{2t^{\alpha_1+1}}{\Gamma(2+\alpha_1)}$$

$$z_1(t) = \frac{4t^{\alpha_1+2}}{\Gamma(2+\alpha_1)} - t^4 + t + 1$$

$$y_1(t) = \frac{8(\alpha_1+2)t^{\alpha_1+\alpha_2+2}}{\Gamma(3+\alpha_1+\alpha_2)} - \frac{t^{\alpha_2+1}}{\Gamma(2+\alpha_2)} - \frac{24t^{\alpha_2+4}}{\Gamma(5+\alpha_2)}$$

$$x_2(t) = \frac{2(\alpha_1+2)(\alpha_1+3)t^{2\alpha_1+3}}{\Gamma(4+2\alpha_1)} - \frac{8(\alpha_1+2)t^{2\alpha_1+\alpha_2+3}}{\Gamma(4+2\alpha_1+\alpha_2)} + \frac{t^{\alpha_1+\alpha_2+1}}{\Gamma(2+\alpha_1+\alpha_2)} + \frac{24t^{\alpha_1+\alpha_2+4}}{\Gamma(5+\alpha_1+\alpha_2)}$$

$$z_2(t) = -\frac{t^{\alpha_2+1}}{\Gamma(2+\alpha_2)} - \frac{24t^{\alpha_2+4}}{\Gamma(5+\alpha_2)} + \frac{4(\alpha_1+2)(\alpha_1+3)t^{2\alpha_1+4}}{\Gamma(4+2\alpha_1)} + \frac{(10\alpha_1+20+2\alpha_2)t^{\alpha_1+\alpha_2+2}}{\Gamma(3+\alpha_1+\alpha_2)} + \cdots$$

$$y_2(t) = -\frac{2t^{2\alpha_2+1}}{\Gamma(2+2\alpha_2)} - \frac{48t^{2\alpha_2+4}}{\Gamma(5+2\alpha_2)} - \frac{16(\alpha_1+2)(2\alpha_1+\alpha_2+3)t^{2\alpha_1+2\alpha_2+3}}{\Gamma(3+2\alpha_1+2\alpha_2)} + \cdots$$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

elde edilir. (6.59) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sisteminin $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ için çözümü;

$$\begin{aligned} x(t) = \sum_{i=0}^{20} x_i(t) = 1.5045056t^{3/2} - 1.7194349t^{7/2} - 0.93750000t^4 - 1.5283866t^{9/2} \\ - 0.93333334t^5 + 0.47241041t^{11/2} + 0.31527778t^6 \\ + 1.3514999t^{13/2} + 1.2373016t^7 + 0.70911438t^{15/2} \\ + 0.73377977t^8 - 0.14456907t^{17/2} + \cdots \end{aligned} \tag{6.72a}$$

$$y(t)=\sum_{i=0}^{20} y_i(t)=3.3333333t^3+3.4388698t^{7/2}+3.3333333t^4+2.1397412t^{9/2}$$

$$-1.1333334t^5-2.5079435t^{11/2}-4.4500000t^6$$

$$-4.8609107t^{13/2}-2.9079365t^7-1.6356943t^{15/2} \tag{6.72b}$$

$$+0.74300596t^8+2.1750578t^{17/2}+\cdots$$

$$z(t)=\sum_{i=0}^{20} z_i(t)=1+t+3.0090111t^{5/2}+3.3333333t^3+3.4388698t^{7/2}+2.3333333t^4$$

$$-1.2991286t^{9/2}-3.0083334t^5-5.5647167t^{11/2}$$

$$-6.3166667t^6-3.9160899t^{13/2}-2.2773809t^7 \tag{6.72c}$$

$$+1.0673056t^{15/2}+3.2176090t^8+\cdots$$

olarak bulunur.

Kesirli Kuvvet Serileri ile çözüm;

(6.59) kesirli mertebeye sahip denklem sisteminin $\alpha_1=\alpha_2=0.5$ için çözümünü inceleyelim. Bu durumda $\beta=2$'dir ve (6.59) denklem sisteminin çözümü,

$$x(t)=x(0)+\sum_{i=1}^{n} e_i t^{i/2}=1+\sum_{i=1}^{n} e_i t^{i/2} \tag{6.73a}$$

$$y(t)=y(0)+\sum_{i=1}^{n} f_i t^{i/2}=\sum_{i=1}^{n} f_i t^{i/2} \tag{6.73b}$$

$$z(t)=z(0)+\sum_{i=1}^{n} g_i t^{i/2}=1+\sum_{i=1}^{n} g_i t^{i/2} \tag{6.73c}$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. (6.73) ifadeleri (6.59) denklem sisteminde türevleriyle birlikte yazıldığında,

$$\sum_{i=1}^{n} e_i\cdot\left(\frac{\Gamma(1+i/2)}{\Gamma((i+1)/2)}t^{i-1/2}-t^{i+4/2}\right)+\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot t^{i/2}-2t=0 \tag{6.74a}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot\frac{\Gamma(1+i/2)}{\Gamma((i+1)/2)}t^{i-1/2}-2\sum_{i=1}^{n} g_i\cdot t^{i/2}+2t=0 \tag{6.74b}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(g_i + f_i)t^{i/2} - 2\sum_{i=1}^{n} e_i \cdot t^{i+2/2} + t^4 - t = 0 \qquad (6.74c)$$

elde edilir. (6.74) denklemlerinden $n = 1, 2, 3, ...$ değerleri için;

$$n = 1 \; için \quad 0.88622695e_1 + Q_{ihmal}\left(\sum_{k=n}^{m} c_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$0.88622695f_1 + R_{ihmal}\left(\sum_{k=n}^{l} d_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$(g_1 - f_1)\cdot t^{1/2} + P_{ihmal}\left(\sum_{k=n+1}^{r} d_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0.88622695 & 0 & 0 \\ 0 & 0.88622695 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \\ g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \\ g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n = 2 \; için \quad 1.1283791e_2 t^{1/2} + Q_{ihmal}\left(\sum_{k=n}^{m} c_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$1.1283791f_2 t^{1/2} + R_{ihmal}\left(\sum_{k=n}^{l} d_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$(g_1 - f_1 - 1)\cdot t + P_{ihmal}\left(\sum_{k=n+1}^{r} d_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1.1283791 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1283791 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_2 \\ f_2 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e_2 \\ f_2 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$n = 3 \; için \quad (1.3293404e_3 - 2)t + Q_{ihmal}\left(\sum_{k=n}^{m} c_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$1.3293404f_3 t + R_{ihmal}\left(\sum_{k=n}^{l} d_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$(g_3 - f_3)\cdot t^{3/2} + P_{ihmal}\left(\sum_{k=n+1}^{r} d_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1.3293404 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3293404 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_3 \\ f_3 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e_3 \\ f_3 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5045055 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n = 4 \;\; için \quad 1.5045055 e_4 t^{3/2} + Q_{ihmal}\left(\sum_{k=n}^{m} c_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$1.5045055 f_4 t^{3/2} + R_{ihmal}\left(\sum_{k=n}^{l} d_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$(g_4 - f_4)\cdot t^2 + P_{ihmal}\left(\sum_{k=n+1}^{r} d_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1.5045055 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5045055 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_4 \\ f_4 \\ g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e_4 \\ f_4 \\ g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n = 5 \;\; için \quad 1.6616755 e_5 t^{2} + Q_{ihmal}\left(\sum_{k=n}^{m} c_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$1.6616755 f_4 t^{2} + R_{ihmal}\left(\sum_{k=n}^{l} d_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$(g_5 - f_5 - 3.0090110)\cdot t^{5/2} + P_{ihmal}\left(\sum_{k=n+1}^{r} d_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1.6616755 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6616755 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_5 \\ f_5 \\ g_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.0090110 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e_5 \\ f_5 \\ g_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.0090110 \end{pmatrix}$$

$$n = 6 \;\; için \quad 1.8054066 e_6 t^{5/2} + Q_{ihmal}\left(\sum_{k=n}^{m} c_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$(1.8054066 f_6 - 6.0180220) t^{5/2} + R_{ihmal}\left(\sum_{k=n}^{l} d_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$(g_6 - f_6)\cdot t^3 + P_{ihmal}\left(\sum_{k=n+1}^{r} d_k t^{k/2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1.8054066 & 0 & 0 \\ 0 & 1.8054066 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_6 \\ f_6 \\ g_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6.0180220 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e_6 \\ f_6 \\ g_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3.3333333 \\ 3.3333333 \end{pmatrix}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Bu şekilde devam edilirse, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ için (6.59) denklem sisteminin kesirli kuvvet serisi çözümü olarak,

$$\begin{aligned} x(t) = x(0) + \sum_{i=1}^{m} e_i t^{i/2} &= 1.5045056t^{3/2} - 1.7194349t^{7/2} - 0.93750000t^4 \\ &- 1.5283866t^{9/2} - 0.93333333t^5 + 0.47241040t^{11/2} \\ &+ 0.31527778t^6 + 1.3514999t^{13/2} + 1.2373016t^7 \\ &+ 0.70911438t^{15/2} + 0.73377976t^8 - 0.14456907t^{17/2} + \cdots \end{aligned} \tag{6.75a}$$

$$\begin{aligned} y(t) = y(0) + \sum_{i=1}^{m} f_i t^{i/2} &= 3.3333333t^3 + 3.4388698t^{7/2} + 3.3333333t^4 \\ &+ 2.1397412t^{9/2} - 1.1333333t^5 - 2.5079435t^{11/2} \\ &- 4.4500000t^6 - 4.8609107t^{13/2} - 2.9079365t^7 \\ &- 1.6356943t^{15/2} + 0.74300595t^8 + 2.1750578t^{17/2} + \cdots \end{aligned} \tag{6.75b}$$

$$\begin{aligned} z(t) = z(0) + \sum_{i=1}^{m} g_i t^{i/2} &= 1 + t + 3.0090111t^{5/2} + 3.3333333t^3 + 3.4388698t^{7/2} \\ &+ 2.3333333t^4 - 1.2991286t^{9/2} - 3.0083333t^5 \\ &- 5.5647167t^{11/2} - 6.3166667t^6 - 3.9160899t^{13/2} \\ &- 2.2773810t^7 + 1.0673055t^{15/2} + 3.2176091t^8 + \cdots \end{aligned} \tag{6.75c}$$

bulunur.

(6.59) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sisteminin α nın farklı değerleri için Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Metodu (KDDM), Varyasyonel İterasyon Metodu (VIM), Adomian Ayrışım Metodu (AAM) ve Kesirli Kuvvet Serileri ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin karşılaştırması Çizelge 6.6, Çizelge 6.7 ve Çizelge 6.8'de; $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ fonksiyonlarının grafikleri sırasıyla Şekil 6.6, Şekil 6.7 ve Şekil 6.8'de verilmiştir.

Çizelge 6.6 (6.59) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümlerinin karşılaştırması.

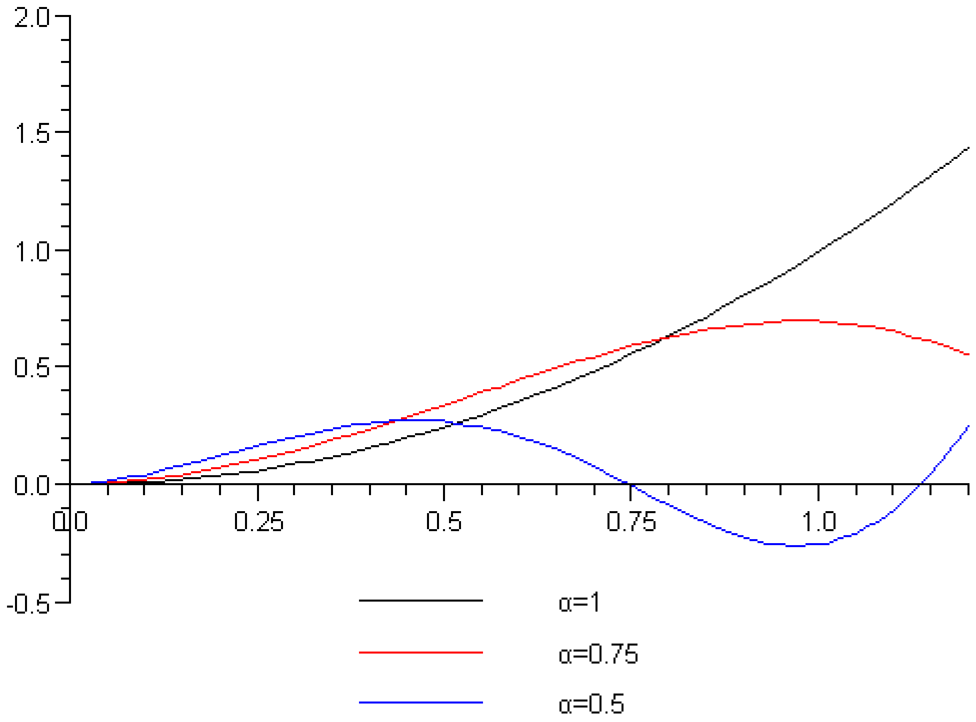
t	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$					$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$					$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$					
	x_{seri}	x_{KDDM}	x_{VIM}	x_{AAM}	x_{HAM}	x_{series}	x_{KDDM}	x_{VIM}	x_{AAM}	x_{HAM}	x_{series}	x_{KDDM}	x_{VIM}	x_{AAM}	x_{HAM}	$x_{Tam Çözüm}$
0.0	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.1	0.0468839	0.0468839	0.0468839	0.0468839	0.7608910	0.0220868	0.0220868	0.0220868	0.0220868	0.8373931	0.0100000	0.0100000	0.0100000	0.0100000	0.0100000	0.0100000
0.2	0.1256710	0.1256709	0.12567106	0.1256709	0.6909262	0.0738823	0.0738823	0.0738823	0.0738823	0.7494391	0.0400000	0.0400000	0.0400000	0.0400000	0.0400000	0.0400000
0.3	0.2069285	0.2069285	0.2069285	0.2069285	0.6396502	0.1483883	0.1483883	0.1483882	0.1483883	0.6816129	0.0900000	0.0900000	0.0900000	0.0900000	0.0900000	0.0900000
0.4	0.2635406	0.2635406	0.2635406	0.2635406	0.5970878	0.2403222	0.2403222	0.2403222	0.2403222	0.6250322	0.1600000	0.1600000	0.1600000	0.1600000	0.1600000	0.1600000
0.5	0.2692381	0.2692381	0.2692381	0.2692381	0.5599926	0.3435493	0.3435493	0.3435493	0.3435493	0.5760122	0.2500000	0.2500000	0.2500000	0.2500000	0.2500000	0.2500000
0.6	0.2064375	0.2064374	0.2064375	0.2064375	0.5268894	0.4503451	0.4503451	0.4503451	0.4503451	0.5326238	0.3600000	0.3600000	0.3600000	0.3600000	0.3600000	0.3600000
0.7	0.0771393	0.0771393	0.0771394	0.0771394	0.4969640	0.5510810	0.5510811	0.5510811	0.5510811	0.4937128	0.4900000	0.4900000	0.4900000	0.4900000	0.4900000	0.4900000
0.8	−0.087473	−0.087474	−0.087474	−0.087474	0.4697022	0.6342821	0.6342821	0.6342822	0.6342822	0.4585197	0.6400000	0.6400000	0.6400000	0.6400000	0.6400000	0.6400000
0.9	−0.224971	−0.224971	−0.224972	−0.224972	0.4447448	0.6872098	0.6872098	0.6872107	0.6872107	0.4265076	0.8100000	0.8100000	0.8100000	0.8100000	0.8100000	0.8100000
1.0	−0.253646	−0.253649	−0.253648	−0.253648	0.4218207	0.6972492	0.6972492	0.6972563	0.6972563	0.3972736	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000

Çizelge 6.7 (6.59) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $y(t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümlerinin karşılaştırması.

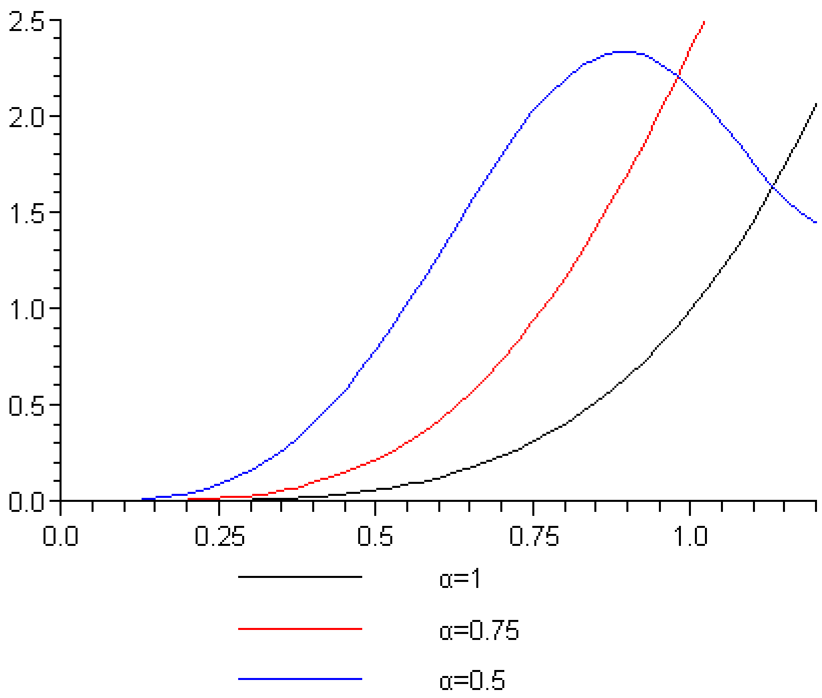
t	$\alpha_1=\alpha_2=0.5$					$\alpha_1=\alpha_2=0.75$					$\alpha_1=\alpha_2=1$					
	y_{seri}	y_{KDDM}	y_{VIM}	y_{AAM}	y_{HAM}	y_{series}	y_{KDDM}	y_{VIM}	y_{AAM}	y_{HAM}	y_{series}	y_{KDDM}	y_{VIM}	y_{AAM}	y_{HAM}	$y_{TamÇözüm}$
0.0	*0.0000000*	*0.0000000*	*0.0000000*	*0.0000000*	*0.0000000*	*0.0000000*	*0.0000000*	*0.0000000*	*0.0000000*	*0.0000000*	*0.0000000*	*0.0000000*	*0.0000000*	*0.0000000*	*0.0000000*	*0.0000000*
0.1	*0.0047962*	*0.0047962*	*0.0047962*	*0.0047962*	*0.0047962*	*0.0006640*	*0.0006640*	*0.0006640*	*0.0006640*	*0.0006640*	*0.0001000*	*0.0001000*	*0.0001000*	*0.0001000*	*0.0001000*	*0.0001000*
0.2	*0.0446486*	*0.0446486*	*0.0446486*	*0.0446486*	*0.0446486*	*0.0079990*	*0.0079990*	*0.0079990*	*0.0079990*	*0.0079990*	*0.0016000*	*0.0016000*	*0.0016000*	*0.0016000*	*0.0016000*	*0.0016000*
0.3	*0.1654479*	*0.1654479*	*0.1654479*	*0.1654479*	*0.1654479*	*0.0347313*	*0.0347313*	*0.0347313*	*0.0347313*	*0.0347313*	*0.0081000*	*0.0081000*	*0.0081000*	*0.0081000*	*0.0081000*	*0.0081000*
0.4	*0.4099255*	*0.4099255*	*0.4099255*	*0.4099255*	*0.4099255*	*0.0988115*	*0.0988115*	*0.0988115*	*0.0988115*	*0.0988115*	*0.0256000*	*0.0256000*	*0.0256000*	*0.0256000*	*0.0256000*	*0.0256000*
0.5	*0.7956629*	*0.7956628*	*0.7956628*	*0.7956628*	*0.7956628*	*0.2220253*	*0.2220253*	*0.2220253*	*0.2220253*	*0.2220253*	*0.0625000*	*0.0625000*	*0.0625000*	*0.0625000*	*0.0625000*	*0.0625000*
0.6	*1.2918230*	*1.2918231*	*1.2918230*	*1.29182307*	*1.2918230*	*0.4277909*	*0.4277910*	*0.4277910*	*0.4277910*	*0.4277910*	*0.1296000*	*0.1296000*	*0.1296000*	*0.1296000*	*0.1296000*	*0.1296000*
0.7	*1.8063925*	*1.8063925*	*1.8063925*	*1.8063926*	*1.8063925*	*0.7376692*	*0.7376692*	*0.7376692*	*0.7376692*	*0.7376692*	*0.2401000*	*0.2401000*	*0.2401000*	*0.2401000*	*0.2401000*	*0.2401000*
0.8	*2.1992058*	*2.1992062*	*2.1992065*	*2.1992066*	*2.1992173*	*1.1662342*	*1.1662344*	*1.1662343*	*1.1662343*	*1.1662343*	*0.4096000*	*0.4096000*	*0.4096000*	*0.4096000*	*0.4096000*	*0.4096000*
0.9	*2.3316970*	*2.3316970*	*2.3316969*	*2.3316969*	*2.3319582*	*1.7141423*	*1.7141424*	*1.7141421*	*1.7141421*	*1.7141421*	*0.6561000*	*0.6561000*	*0.6561000*	*0.6561000*	*0.6561000*	*0.6561000*
1.0	*2.1479874*	*2.1479845*	*2.1479835*	*2.1479833*	*2.1509580*	*2.3596234*	*2.3596233*	*2.3596213*	*2.3596213*	*2.3596212*	*1.0000000*	*1.0000000*	*1.0000000*	*1.0000000*	*1.0000000*	*1.0000000*

Çizelge 6.8 (6.59) kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklem sistemindeki $z(t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümlerinin karşılaştırması.

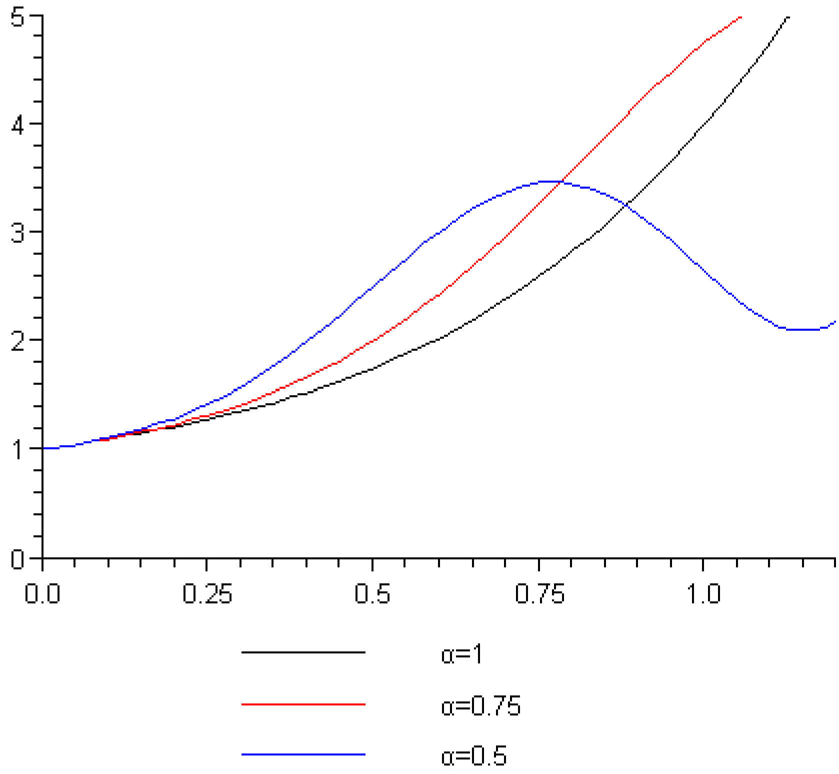
t	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$					$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$					$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$					
	z_{seri}	z_{KDDM}	z_{VIM}	z_{AAM}	z_{HAM}	z_{seri}	z_{KDDM}	z_{VIM}	z_{AAM}	z_{HAM}	z_{seri}	z_{KDDM}	z_{VIM}	z_{AAM}	z_{HAM}	$z_{Tam Çözüm}$
0.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
0.1	1.1140729	1.1140729	1.1140729	1.1140729	1.1140729	1.1049813	1.1049813	1.1049813	1.1049813	1.1049813	1.1020000	1.1020000	1.1020000	1.1020000	1.1020000	1.1020000
0.2	1.2933168	1.2933169	1.2933169	1.2933169	1.2933169	1.2359519	1.2359519	1.2359519	1.2359519	1.2359519	1.2160000	1.2160000	1.2160000	1.2160000	1.2160000	1.2160000
0.3	1.5815050	1.5815050	1.5815050	1.5815050	1.5815050	1.4156642	1.4156643	1.4156643	1.4156643	1.4156642	1.3540000	1.3540000	1.3540000	1.3540000	1.3540000	1.3540000
0.4	1.9951580	1.9951579	1.9951579	1.9951579	1.9951579	1.6654694	1.6654692	1.6654692	1.6654692	1.6654692	1.5280000	1.5280000	1.5280000	1.5280000	1.5280000	1.5280000
0.5	2.5024009	2.5024009	2.5024008	2.5024008	2.5024009	2.0030744	2.0030745	2.0030745	2.0030745	2.0030745	1.7500000	1.7500000	1.7500000	1.7500000	1.7500000	1.7500000
0.6	3.0099480	3.0099479	3.0099478	3.0099478	3.0099479	2.4386050	2.4386050	2.4386050	2.4386050	2.4386050	2.0320000	2.0320000	2.0320000	2.0320000	2.0320000	2.0320000
0.7	3.3742876	3.3742874	3.3742877	3.3742876	3.3742876	2.9690827	2.9690826	2.9690826	2.9690826	2.9690826	2.3860000	2.3860000	2.3860000	2.3860000	2.3860000	2.3860000
0.8	3.4496477	3.4496477	3.4496483	3.4496483	3.4496824	3.5714851	3.5714849	3.5714858	3.5714858	3.5714857	2.8240000	2.8240000	2.8240000	2.8240000	2.8240000	2.8240000
0.9	3.1706479	3.1706481	3.1706472	3.1706472	3.1713371	4.1950118	4.1950119	4.1950212	4.1950213	4.1950213	3.3580000	3.3580000	3.3580000	3.3580000	3.3580000	3.3580000
1.0	2.6406827	2.6406863	2.6406852	2.6406852	2.6477138	4.7540535	4.7540532	4.7541338	4.7541338	4.7541338	4.0000000	4.0000000	4.0000000	4.0000000	4.0000000	4.0000000



Şekil 6.6 (6.59) denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonunun $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$ ve $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ değerleri için grafikleri.



Şekil 6.7 (6.59) denklem sistemindeki $y(t)$ fonksiyonunun $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$ ve $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ değerleri için grafikleri.



Şekil 6.8 (6.59) denklem sistemindeki $z(t)$ fonksiyonunun $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$ ve $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ değerleri için grafikleri.

BÖLÜM 7

SONUÇ VE ÖNERİLER

Uygulamalı bilimlerde karşılaşılan matematiksel modellemeler ile ortaya çıkan denklemlerin ve özellikle de lineer olmayan denklemlerin analitik çözümü ya çok zor ya da imkansız olabilmektedir. Bu durumda nümerik çözüm yöntemleri kullanılarak çözüme ulaşılmaya çalışılmaktadır. Son zamanlarda yapılan çalışmalar da nümerik çözüm yöntemler üzerine yoğunlaşmıştır. Özellikle hızlı sonuç veren, algoritması kolay ve hassasiyeti yüksek olan yöntemler son derece ilgi çekici olup hem zamandan hem de maliyetten tasarruf sağlamaktadır.

Bu tezde, kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsel denklemler, kesirli diferansiyel dönüşüm metodu, varyasyonel iterasyon metodu, Adomian ayrışım metodu ve kesirli kuvvet serileri kullanılarak yaklaşık olarak çözüldü. Uygulanan metotları karşılaştırdığımızda, kesirli dönüşüm metodu, çözüm için karmaşık integral ve türev alma işlemleri yerine denklem sistemini cebirsel denklem sistemine dönüştürerek çözüme daha kolay ve hızlı ulaşması ile dikkat çekmektedir. Yaklaşık hesaplamada göstermiş olduğu hassasiyet ve kolay hesaplanabilirlik özelliğinden dolayı diğer metodlardan çok daha etkili ve daha hızlı sonuç üretmektedir. Fakat dönüşüm metodunun uygulanamadığı modellerde ise diğer metodlar ön plana çıkmaktadır. Varyasyonel iterasyon metodu ve Adomian ayrışım metodu uygun başlangıç fonksiyonu seçimiyle lineer olmayan denklemlerde çözüme hızlı ve etkili bir şekilde yaklaşmaktadır. Sonuç olarak, benzerlerinden daha etkili olan diferansiyel dönüşüm metodu günümüzde çokça karşılaşılan birçok problemin çözümüne yardımcı olmaya aday yeni ve oldukça etkili bir metottur.

KAYNAKLAR

[1] Gear, C.W., (1970), “The Simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations”, IEEE Trans. Circuit Theory, CT,18:89-92.

[2] Petzold, L.R., (1982), “Differential-algebraic equations are not ODEs”, SIAM, J. Sci. Statist. Comput, 3:367–384.

[3] Gear, C.W. ve Petzold, L.R., (1984), ”ODE Methods for the Solution of Differential/Algebraic Systems”, SIAM, J. Numerical Analysis, 21:716–728.

[4] Brenan, K.E., Campbell, S.L. ve Petzold, L.R., (1989), Numerical Solution of Initial-Value,Problems in Differential-Algebraic Equations, Elsevier, New York.

[5] Hairer, E. ve Lubich, C.H. ve Roche, M., (1989), The Numerical Solution of Differential Algebraic Systems by Runge Kutta methods, Lecture Notes in Mathematics, 1409, Springer, Berlin.

[6] Ascher,U.M. ve Spiter,R.J., (1994), “Collocation software for boundary value differential-algebraic equations”, SIAM, J. Sci. Comput., 15:938–952.

[7] Lucht, W. ve Strehmel, K. ve Eichler-Liebenow, C., (1997a), Linear partial differential algebraic equations, Part I: Indexes, consistent boundary/initial conditions, Report 17, Fachbereich Mathematik und Informatik, Martin-Luther-Universitat Halle.

[8] Lucht, W. ve Strehmel, K. ve Eichler-Liebenow, C., (1997b), Linear partial differential algebraic equations, Part II: Numerical solution, Report 18, Fachbereich Mathematik und Informatik, Martin-Luther-Universitat Halle.

[9] Lucht, W. ve Strehmel, K. ve Eichler-Liebenow, C., (1999), “Indexes and special discretization methods for linear partial differential algebraic equations.”, BIT, 39(3): 484-512.

[10] Martinson, W. ve Barton, P., (2000), “A differentiation index for partial differential-algebraic equations”, SIAM J. Sci. Comput., 21(6):2295-2315.

[11] Martinson, W. ve Barton, P., (2002), “Index and characteristic analysis of linear PDAE systems”, SIAM J. Sci. Comput., 24(3):905-923.

[12] Müller, P. C., (2000), “Descriptor Systems: Pros and Cons of System Modelling by Differential-Algebraic Equations”, Mathematics Computers in Simulation. 53:273-279.

[13] Celik, E. ve Bayram, M., (2003), "Arbitrary order numerical method for solving differential-algebraic equations by Pade´ series", Appl. Math. Comput., 137:57–65.

[14] Celik, E. ve Bayram, M., (2003), "On the numerical solution of differential-algebraic equations by Pade´ series", Appl. Math. Comput. 137:151–160.

[15] Celik, E. ve Bayram, M., (2004), "Numerical solution of differential-algebraic equation systems and applications", Appl. Math. Comput, 154:405–413.

[16] Ayaz, F., (2004), "Applications of differential transform method to differential-algebraic equations", Appl. Math. Comput., 152:649-657.

[17] Celik E. ve Yeloğlu T., (2006), "Chebyshev series Approximation for solving Differential-Algebraic Equations(DAEs)", International Journal of Computer Mathematics, 83:651-662.

[18] Kızıloglu, O., (2005), Diferensiyel-Cebirsel Denklemlerin Adomian Ayrıştırma Metodu ile Nümerik Çözümü, Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

[19] Debrabant, K. ve Strehmel K. (2005), "Convergence of Runge-Kutta methods applied to linear partial differential-algebraic equations", Appl. Numerical Mathematics, 53:213-229.

[20] Guzel, N. ve Bayram, M., (2006), "On the numerical solution of differential-algebraic equations with index-3", Appl. Math. Comput., 175:1320-1331.

[21] Hosseini, M., (2006), "Adomian decomposition method for solution of differential algebraic equations", Journal Comput. and Appl. Math., 197:495-501.

[22] Hosseini, M., (2006), "Adomian decomposition method for solution of nonlinear differential algebraic equations", Appl. Math.Comput., 181:1737-1744.

[23] Liu, H. ve Song, Y. (2007), "Differential transform method applied to high index differential-algebraic equations", Appl. Math. Comput., 184:748-753.

[24] Campbell, S.L. ve Gear, C.W., (1995), "The index of general nonlinear DAEs", Numer. Math. 72:173-196 .

[25] Marz, R., (2003), "The index of linear differential-algebraic equations with properly stated leading term",Results in Mathematics, 42:308–338.

[26] Marz, R., (2004), "Solvability of linear differential-algebraic equations with properly stated leading term",Results in Mathematics, 45:88–105.

[27] Hosseini, M., (2005), "An index reduction method for linear Hessenberg systems", Appl. Math. Comput., 171:596-603.

[28] Arikoglu A. ve Özkol İ.,(2007), "Solution of fractional differential equations by using differential transform method" ,Chaos, Solitons & Fractals, 34(5):1473-1481.

[29] Momani S. and Al-Khaled K., (2005), “Numerical solutions for systems of fractional differential equations by the decomposition method”, Appl. Math. Comput., 162(3):1351-1365

[30] Odibat Z.M., Momani S., (2006), “Application of variational iteration method nonlinear differential equations of fractional order”, Int. J. Nonlinear Numerical Simulation 7:27–34.

[31] Ray S.S. ,Bera, R.K.,(2005), ” An approximate solution of a nonlinear fractional differential equation by Adomian decomposition method”, Appl. Math. Comput., 167:561–571.

[32] Hu Y., Luo Y. ve Lu Z.,(2008), “Analytical solution of the linear fractional differential equation by Adomian decomposition method”, Journal of Computational and Applied Mathematics, 215(1):220-229

[33] Abdulaziz O., Hashim I. ve Momani S., (2008), ” Application of homotopy-perturbation method to fractional IVPs”, Journal of Computational and Applied Mathematics, 216(2):574-584

[34] Ganjiani M., ”Solution of nonlinear fractional differential equations using homotopy analysis method”, Applied Mathematical Modelling, 34(6):1634-1641

[35] Zurigat M., Momani S. and Alawneh A., (2010), “Analytical approximate solutions of systems of fractional algebraic–differential equations by homotopy analysis method”, Computers& Mathematics with Applications, 59:1227-1235

[36] Zhou,J.K., (1986), Differential Transformation and Its Applications for Electrical Circuits (in Chinese), Huazhong University Press, Wuhan, China.

[37] Jang M., Chen C., Liy Y.,(2000), “On solving the initial-value problems using the differential transformation method” , Appl.Math. Comput., 115(2-3):145-160

[38] Hassan, I. H. A. ,(2002), “On solving some eigenvalue problems by using a differential transformation”, Appl. Math. Comput., 127(1):1-22

[39] He, J.H., 1997, “A new approach to nonlinear partial differential equations”, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2:230–235.

[40] He JH., 1997, “Variational iteration method for delay differential equations.”, Communication Nonlinear Science Numeric Simulation, 2(4):235–6.

[41] He, J.H.,(1998),”Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media”, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 167:57–68.

[42] Soltanian F., Karbassi S.M. ve Hosseini M.M., (2009), “Application of He’s variational iteration method for solution of differential-algebraic equations” Chaos, Solitons & Fractals, 41(1):436-445

[43] Adomian G.,(1990), “A Review of the Decomposition Method and Some Recent Results for Nonlinear Equations”, Math. Comp. Modell., 13:17-43.

[44] Adomian, G. ve Rach, R.,(1990), “Equality of Partial Solutions in the Decomposition Method for Linear or Nonlinear Partial Differential Equations”, Comp. Math. Appl., 19: 9–12.

[45] Gorenflo R. ve Mainardi F., (1997), Fractional Calculus: İntegral and Diffrential Equations of Fractional Order, International Centre fort he Mechanical Science Palazzo del Torso, Piazza Garibaldi, Udine, İtaly.

[46] Podlubny, I., (1999), Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, some methods of their solutionand some of their applications, SanDiego: Academic Press.

[47] Diethelm K., Ford N.J., Freed A.D. ve Luchko Y.,(2005), “Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194:6-8.

[48] Momani S. ve Odibat Z., (2006), “Analytical approach to linear fractional partial differential equations arising in fluid mechanics”, Phys. Lett., 355:271–279.

[49] Momani S. ve Odibat Z., (2007), “Numerical comparison of methods for solving linear differential equations of fractional order”, Chaos Solitons Fract. 31:1248–1255.

[50] Odibat Z. ve Momani S., (2007), “Numerical solution of Fokker–Planck equation with space- and time-fractional derivatives”, Phys. Lett. A, 369:349–358.

[51] Momani S. ve Odibat Z. (2007) ,Homotopy perturbation method for nonlinear partial differential equations of fractional order , Physics Letters A, 365(5-6): 345-350

[52] Abdulaziz O., Hashim I. ve Momani S., (2008),” Solving systems of fractional differential equations by homotopy-perturbation method”, Physics Letters A, 372(4):451-459

[53] Ertürk V.S. ve Momani S., (2008), “Solving systems of fractional differential equations using differential transform method”, Journal of Computational and Applied Mathematics,215(1):142-151

[54] Hashim I., Abdulaziz O. ve Momani S. (2009), ”Homotopy analysis method for fractional IVPs”, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 14:674-684.

[55] Zurigat M., Momani S., Odibat Z. ve Alawneh A., (2010),”The homotopy analysis method for handling systems of fractional differential equations”,Applied Mathematical Modelling,34:24-35.

[56] Ascher, U.M. ve Petzold, L.R., (1998), Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential–Algebraic Equations, Philadelphia, PA.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:Birol İBİŞ
Doğum Tarihi ve Yeri	:1977 - Bandırma
Yabancı Dili	:İngilizce
E-posta	:birol_ibis@yahoo.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2005
Lisans	Matematik	Hacettepe Üniversitesi	1999
Lise		Balıkesir 100.Yıl Teknik Lisesi	1993

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	**Firma/Kurum**	**Görevi**
2001-	Hava Harp Okulu Komutanlığı	Öğretim Elemanı
2000-2001	Milli Eğitim Bakanlığı	Öğretmen

YAYINLARI

Makale

1. İbiş, B., Bayram M. ve Ağargün A.G., (2011), "Applications of Fractional Differential Transform Method to Fractional Differential-Algebraic Equations", European Journal of Pure and Applied Mathematics (EJPAM), 4(2):129-141.

2. İbiş, B. ve Bayram M., (2011), "Numerical comparison of methods for solving Fractional Differential-Algebraic Equations (FDAEs)", Computers & Mathematics with Applications, 62:3270-3278.

Bildiri

1. İbiş, B. ve Yıldırım, K., (2011), "Approximate Analytical Solutions For The Emden-Fowler Type Equations by Reduced Differential Transform Method", Internatıonal Conference on Applıed Analysıs and Algebra (ICAAA2011), 29-30 June and 1-2 July 2011, Istanbul, Turkey.

2. Daş, S.E. ve İbiş, B., (2011), "Application of the differential transform method to approximate solution for some nonlinear differential-difference equations systems", Internatıonal Conference on Applıed Analysıs and Algebra (ICAAA2011), 29-30 June and 1-2 July 2011, Istanbul, Turkey.