T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BANACH UZAYLARI ÜZERİNDE BİR BUÇUK-GEÇİŞLİ VE YERELLEŞTİRME OPERATÖR CEBİRLERİ

ELİF DEMİR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF. DR. ÖMER GÖK

İSTANBUL, 2012

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BANACH UZAYLARI ÜZERİNDE BİR BUÇUK-GEÇİŞLİ VE YERELLEŞTİRME OPERATÖR CEBİRLERİ

Elif DEMİR tarafından hazırlanan tez çalışması 16/07/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Ömer GÖK

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Ömer GÖK

Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

Prof. Dr. Mustafa SİVRİ

Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

Prof. Dr. Yasemin KAHRAMANER

İstanbul Ticaret Üniversitesi ______________________

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

Doç. Dr. Ünsal TEKİR

Marmara Üniversitesi ______________________

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen Danışmanım Sayın Prof. Dr. Ömer GÖK’ e ve çalışmalarım sırasında beni maddi açıdan destekleyen TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı’na teşekkür ederim. Ayrıca manevi desteklerini eksik etmeyip her zaman yanımda olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Mayıs, 2012

Elif DEMİR

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

X^*	X uzayının topolojik duali
X^{**}	X uzayının ikinci duali
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\{T\}^c$	T operatörünün komutant kümesi
$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
$\overline{A}^{WOT}$	A cebirinin zayıf operatör topolojisine göre kapanışı
$B(X)$	X üzerindeki tüm sınırlı lineer operatörlerin uzayı
$B(X^*)$	X^* üzerindeki tüm sınırlı lineer operatörlerin uzayı
co(A)	A kümesini içeren bütün konveks kümelerin kesişimi
$\overline{co}(A)$	A kümesini içeren bütün kapalı konveks kümelerin kesişimi
T^{-1}	T operatörünün tersi
$\|\|x\|\|$	x elemanının normu
$\|\|T\|\|$	T operatörünün normu
$\|a\|$	a elemanının mutlak değeri
T^*	T operatörünün adjointi (eşleniği)
X^+	X kümesinin pozitif konisi
$\wedge$	İnfimum
$\vee$	Supremum
$Y \oplus Z$	Y ve Z uzaylarının direkt toplamı
A^*	A nın dual cebiri
$\cap$	Kesişim
$\cup$	Birleşim
T^{**}	T operatörünün ikinci adjointi
$\sum$	Toplam sembolü
$M_n(\mathbb{R})$	$n \times n$ boyutlu reel değerli matrislerin kümesi
A^{cc}	A kümesinin ikinci komutantı
Boy(P)	P kümesinin boyutu
$x_n \xrightarrow{w} x$	x_n x elemanına zayıf yakınsıyor
$x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$	x_n^* x^* elemanına zayıf* yakınsıyor
$x_n \xrightarrow{\|\|.\|\|} x$	x_n x elemanına normda yakınsıyor

ÖZET

BANACH UZAYLARI ÜZERİNDEKİ BİR BUÇUK- GEÇİŞLİ VE YERELLEŞTİRME OPERATÖR CEBİRLERİ

Elif DEMİR

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ömer GÖK

Bu çalışmada Banach uzayları üzerindeki operatör cebirlerinin geçişli ve yerelleştirme cebiri olma durumları incelenmiştir. Vladimir G. Troitsky tarafından tanımlanmış olan Banach uzaylarındaki minimal vektörler yöntemi kullanılarak bir T operatörünün komutant kümesi $\{T\}^c$ nin yerelleştirme cebiri olması ile T nin hiper değişmez alt uzaya sahip olması arasındaki ilişki araştırılıp, T operatörünün adjointi T^* için gerekli şartlar incelenmiştir. Buna ek olarak X^*, X Banach uzayının topolojik duali olmak üzere bir kompakt operatör içeren $A \subset B(X)$ cebirinin ve $A^* \subset B(X^*)$ dual cebirinin $\overline{A}^{WOT} = B(X)$ ifadesini sağlaması için gereken koşullar araştırılmıştır. Ayrıca zayıf kompakt bir operatör içeren A cebiri için de benzer durumlar incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Operatör cebiri, geçişli cebir, yerelleştirme cebiri, minimal vektör, hiper değişmez alt uzay

ABSTRACT

SESQUITRANSITIVE AND LOCALIZING OPERATOR ALGEBRAS ON BANACH SPACES

Elif DEMİR

Department of Mathematics

Ph.D. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Ömer GÖK

In this study, the conditions of the transitive and localizing operator algebras on Banach spaces are investigated. By the minimal vectors method, which is defined by Vladimir G. Troitsky, the connection between being a localizing operator algebra of $\{T\}^c$, which is the commutant set of the operator T, and having a hyperinvariant subspace of T is searched for. Also required situations for T^* which is the adjoint operator of T are dealed. In addition to this, for the topological dual space X^* of a Banach space X, some circumstances of an algebra $A \subset B(X)$ and its dual algebra $A^* \subset B(X^*)$, which contains a compact operator, to satisfy the equation $\overline{A}^{WOT} = B(X)$ are investigated. Also, similar conditions are investigated for the algebra A which contains a weakly compact operator.

Key words: Operator algebra, transitive algebra, localizing algebra, minimal vector, hyperinvariant subspace

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

“ Bir X Banach uzayı üzerinde tanımlı T: X $\rightarrow$ X sürekli lineer operatörü X içinde aşikar olmayan, yani, $\{0\}$ ve X ten farklı kapalı değişmez alt uzaya sahip midir? ” sorusu değişmez alt uzay problemi olarak bilinmektedir ve bir çok matematikçinin üzerinde çalıştığı bir konudur. Kapalı bir E $\subset$ X alt uzayının bir T operatörü altında değişmez kalması için T(E) $\subseteq$ E ifadesi sağlanmalıdır. Bunun yanı sıra eğer kapalı E $\subset$X alt uzayı T operatörü ile değişmeli olan operatörlerin kümesi olan komutant kümesi $\{T\}^c$ altında değişmez kalıyorsa E ye T- hiper değişmez alt uzay denir. Eğer X Banach uzayı ayrılabilir değilse, yani, sayılabilir yoğun bir alt kümesi yoksa, bu uzay üzerindeki her operatör aşikar olmayan kapalı bir değişmez alt uzaya sahiptir.

Değişmez alt uzay problemine ilişkin elde edilmiş bazı olumlu sonuçlar bulunmaktadır. En göze çarpanı ise Lomonosov’ un değişmez alt uzay teoremidir, [1].

Lomonosov’ un Teoremi: Bir Banach uzayı üzerinde sürekli olan bir T operatörü birim operatörle bir çarpımdan farklı olan bir S operatörüyle değişmeli ve S de sıfırdan farklı kompakt operatörle değişmeliyse, T aşikar olmayan bir kapalı değişmez alt uzaya sahiptir.

Buna ek olarak, X bir kompleks Banach uzayı ise ve T operatörü birim operatörün bir katı değilse o zaman T nin bir hiper değişmez alt uzayı vardır, [1]. Hooker, reel durumda da hiper değişmez alt uzayın bulunabileceğini, ancak buna ek olarak T operatörünün bir reel- indirgenemez kuadratik denklemi sağlamaması gerektiğini ispatlamıştır, [2]. Buna rağmen, genelde reel ve kompleks Banach uzaylarında değişmez alt uzayı bulunmayan operatörler mevcuttur, [3],[4].

Bir T operatörünün komutantı $\{T\}^c$ zayıf operatör topolojisine göre (WOT) kapalı bir cebirdir ve $\{T\}^c$ nin geçişli cebir olması için gerek ve yeter koşul T nin hiper değişmez alt uzaya sahip olmamasıdır. [3],[4] e göre Banach uzayları üzerindeki operatörlerin zayıf operatör topolojisine göre yoğun olmayan geçişli cebirleri mevcuttur. Buna rağmen, bilinen bazı durumlar vardır ki cebirlerin geçişlilik ile birlikte zayıf operatör topolojisine göre yoğun olma durumları söz konusudur. Örneğin, her kesin geçişli cebir zayıf operatör topolojisine göre yoğundur, [5], [6]. Ayrıca [1] in cebirsel versiyonu iddia etmektedir ki A, kompleks bir Banach uzayı üzerinde kompakt operatör içeren bir geçişli cebir ise o zaman $\overline{A}^{WOT} = B(X)$ olur.

Minimal vektörler metodu Banach uzayları üzerinde ilk olarak Troitsky tarafından çalışılmıştır, [7]. Ayrıca Ansari ve Enflo tarafından, bir Hilbert uzayı üzerindeki operatörlerin belli sınıflarına ait değişmez alt uzaylarının varlığını ispatlamak için tanımlanmıştır, [8]. Pearcy bu metodu Lomonosov' un teoreminin bir versiyonunu ispatlamak için kullanmıştır. Troitsky ise [9] u baz alarak bu metodun Banach uzaylarında uygulanacak şekilde bir versiyonunu sunmuştur, [7].

1.2 Tezin Amacı

Biz bu çalışmada, bir $A \subset B(X)$ cebirinin hangi koşullar altında $\overline{A}^{WOT} = B(X)$ ifadesini gerçeklediğini inceledik. Benzer şekilde A^* dual cebirinin $\overline{A^*}^{WOT} = B(X^*)$ ifadesini nasıl gerçeklediğinin üzerinde durduk. Buna ek olarak T operatörünün komutant kümesi $\{T\}^c$ nin yerelleştirme cebiri olması ile T nin hiper değişmez alt uzaya sahip olması arasındaki ilişkiyi araştırdık ve bunu T operatörünün adjointi T^* için de uyguladık. Bunun için de Banach uzayları üzerinde minimal vektör ve minimal fonksiyonel metodunu kullandık, [7].

1.3 Hipotez

Bir T operatörünün komutantı $\{T\}^c$ nin geçişli cebir olması için gerek ve yeter koşul T nin hiper değişmez alt uzaya sahip olmamasıdır. Ayrıca $\{T\}^c$ bir yerelleştirme cebiri ise T bir hiper değişmez alt uzaya sahiptir.

A, kompleks bir Banach uzayı üzerinde kompakt operatör içeren bir geçişli cebir ise o zaman $\overline{A}^{WOT}$ = B(X) olur. Buna ek olarak, X bir reel Banach uzayı olmak üzere B(X) in kompakt operatör içeren her bir buçuk- geçişli alt cebiri A için $\overline{A}^{WOT}$ = B(X) ifadesi sağlanır.

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamızın içinde yer alan temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 2.1 K bir küme ve K üzerinde toplama (+) ve çarpma (.) işlemleri tanımlansın. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan K kümesine bir cisim denir.

i. Her $x,y \in K$ için $x + y \in K$ ve $xy \in K$.

ii. Her $x,y \in K$ için $x+\left(y+z\right)=\left(x+y\right)+z$.

iii. K içerisinde bir tek sıfır (0) elemanı bulunabilir ki her $x \in K$ için $x + 0 = 0 + x = 0$ eşitliği sağlanır.

iv. Her $x \in K$ için bir tek $-x \in K$ bulunabilir ki $x + \left(-x\right) = 0$ eşitliği sağlanır.

v. Her $x,y \in K$ için $x + y = y + x$.

vi. Her $x,y \in K$ için $xy = yx$.

vii. Her $x, y, z \in K$ için $x\left(yz\right)=\left(xy\right)z$.

viii. Her $x \in K$ için $x.1 = x$ eşitliğini sağlayan K nın bir tek $0 \neq 1$ (bir) elemanı vardır.

ix. Her $0 \neq x \in K$ ya karşılık $xx^{-1} = 1$ eşitliğini sağlayan K içinde bir tek x^{-1} elemanı vardır.

x. Her $x, y, z \in K$ için $x\left(y + z\right) = xy + xz$, $\left(y + z\right)x = yx + zx$ eşitlikleri sağlanır.

Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ yukarıdaki aksiyomları sağladığından bir cisimdir.

Tanım 2.2 E boş olmayan bir küme ve K cismi $\mathbb{R}$ (reel sayılar kümesi) veya $\mathbb{C}$ (kompleks sayılar kümesi) olsun.

$+: E \times E \to E$, $(x,y) \to x + y$,

$\cdot : K \times E \to E$, $(a,x) \to a.x$,

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemleri tanımlansın. Aşağıdaki koşullar sağlansın.

i. Her $x, y, z \in E$ için $x+(y+z)=(x+y)+z$,

ii. Her $x, y \in E$ için $x + y = y + x$,

iii. Her $x \in E$ için x + 0 = x eşitliğini sağlayan E içinde bir tek 0 (sıfır) elemanı vardır.

iv. Her $x \in E$ için x + (-x) = 0 eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in E$ vardır.

v. Her $x \in E$ için 1.x = x.

vi. Her $x \in E$ ve $a,b \in K$ için (ab)x = a(bx).

vii. Her $x, y \in E$ ve $a \in K$ için $a(x + y) = ax + ay$.

viii. Her $x \in E$ ve $a,b \in K$ için $(a + b)x = ax + bx$.

Bu durumda E ye K üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) ve elemanlarına da vektör adı verilir. $K = \mathbb{R}$ alınırsa E ye bir reel vektör uzayı ve $K = \mathbb{C}$ alınırsa E ye bir kompleks vektör uzayı adı verilir.

Örnek 2.3 $E = \mathbb{R}^n$, $K = \mathbb{R}$ olsun.

$x=(x_1,...,x_n)$, $y=(y_1,...,y_n) \in E$ için toplama işlemini şu şekilde tanımlayalım:

$x + y = (x_1+y_1,..., x_n+ y_n)$

Bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı ile $x=(x_1,...,x_n) \in E$ vektörünün çarpımı

$a.x = (a x_1 ,...,a x_n)$

ile tanımlansın. Bu çarpma ve toplama tanımları ile $\mathbb{R}^n$ bir vektör uzayıdır.

Tanım 2.4 E bir vektör uzayı ve E içinde $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ vektörlerin bir kümesi olsun.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0 \tag{2.1}$$

denkleminin çözüm kümesinde hepsi birden sıfır olmayan $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ sayıları varsa $x_1, \ldots, x_n$ vektörlerine lineer bağımlı, aksi halde lineer bağımsız denir.

Tanım 2.5 E bir vektör uzayı ve $z, x_1, \ldots, x_n$ E içinde vektörler olsun. Eğer

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{2.2}$$

olacak biçimde K cismi içinde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sayıları varsa z ye $x_1, \ldots, x_n$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonu adı verilir.

F, E vektör uzayının bir alt kümesi olsun. E içindeki her vektör F nin elemanlarının bir lineer kombinezonu ise F kümesi E vektör uzayını gerer denir ve E = spanF ile gösterilir.

Tanım 2.6 E ve F vektör uzayları, $T : E \to F$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlasın.

Her x, y $\in$ E için T (x + y) = T(x) + T(y)

Her x $\in$ E ve a $\in$ K için T(ax) = aT(x)

Bu durumda T dönüşümüne bir lineer operatör denir.

Lineer operatörün tanımından T(-x) = -T(x) ve T(0) = 0 olduğuna dikkat edelim.

Tanım 2.7 E , F vektör uzayları ve $T : E \to F$ birebir, örten bir lineer operatör olsun. T nin tersi T^{-1} ile ifade edilir ve

(1) $T^{-1} : F \to E$,

(2) Her x $\in$ E için T^{-1} (Tx) = x,

(3) Her y $\in$ F için $T(T^{-1} y) = y$ dir.

$T : E \to F$ birebir , örten lineer bir operatör ise $T^{-1} : F \to E$ dönüşümü de birebir, örten lineer bir dönüşümdür.

Tanım 2.8 E, F, G vektör uzayları ve $T : E \to F$, $S : F \to G$ operatörler olsun. x $\in$ E için Tx $\in$ F olduğundan S(Tx) $\in$ G dir. E den G ye (ST)x = S(Tx) ile tanımlı dönüşümüne S ile T nin bileşkesi denir ve ST ile gösterilir.

$T : E \to F$, $S : F \to G$ birebir ve örten olsun. Tanımı kullanarak $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$ elde edilir.

Tanım 2.9 E, F vektör uzayları ve $T : E \to F$ lineer bir operatör olsun.

ÇekT = $T^{-1}(\{0\}) = \{x \in E : Tx = 0\}$ kümesine T nin sıfır uzayı (çekirdeği) adı verilir.

Tanım 2.10 E bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$, $x \to \| x \|$ şeklinde tanımlı dönüşüme aşağıdaki koşulları sağlarsa E üzerinde bir norm adı verilir.

1. Her $x \in E$ için $\| x \| \geq 0$,

2. $x \in E$ ve $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

3. Her $x \in E$ ve $a \in K$ için $\| ax \| = |a| . \| x \|$,

4. Her $x,y \in E$ için $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (Üçgen eşitsizliği).

Bu durumda (E, $\|.\|$) çiftine bir normlu vektör uzayı adı verilir. Üzerinde norm tanımlanmış bir uzaya normlu uzay adı verilir.

Örnekler 2.11 Normlu uzaylar için aşağıdaki örnekler verilebilir.

1. $E = \mathbb{R}$ olsun. $x \in \mathbb{R}$ için $\| x \| = |x|$ tanımı ile $\|\cdot\|$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir norm belirtir.

2. $1 \leq p < \infty$ için $\ell_p = \left\{ x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$ uzayını alalım ve E = ℓ_p olsun.

$x = (x_n) \in \ell_p$ için $\| x \| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$ tanımı ile $\|\cdot\|$, ℓ_p üzerinde bir norm belirtir.

Tanım 2.12 E, F normlu uzaylar, $T : E \to F$ lineer bir operatör ve $x_0 \in E$ olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı bulunabildiğinde $\| x - x_0 \| < \delta$ için $\| Tx - Tx_0 \| < \varepsilon$ oluyorsa T lineer operatörüne x_0 da sürekli denir.

Tanım 2.13 E, F normlu uzaylar ve $T : E \to F$ lineer bir operatör olsun. Her $x \in E$ için $\| Tx \| \leq M \| x \|$ eşitsizliğini sağlayan bir M > 0 sayısı varsa T lineer operatörüne sınırlı operatör adı verilir.

Örnek 2.14 Sınırlı dizilerin uzayı $\ell_\infty = \{x = (x_n) : \sup |x_n| < \infty\}$ olmak üzere

$T : \ell_\infty \to \ell_\infty$,

$$T(x_1, x_2, \ldots) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, \ldots) \tag{2.3}$$

ile tanımlı T operatörü lineer ve sınırlıdır.

Tanım 2.15 E bir vektör uzayı ve K reel veya kompleks sayıların cismi olsun. $f : E \to K$ lineer operatörüne bir lineer fonksiyonel denir.

Teorem 2.16 E, F normlu uzaylar ve $T : E \to F$ lineer bir operatör olsun. Aşağıdakiler denktir [10].

(1) T operatörü $x_0 \in E$ de süreklidir.

(2) T operatörü her yerde süreklidir.

(3) T operatörü sınırlıdır.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2): T operatörü $x_0 \in E$ de sürekli ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda $\delta > 0$ sayısı bulunabilir ki $\| x - x_0 \| < \delta$ olduğunda $\| Tx - Tx_0 \| < \varepsilon$ olur. Keyfi bir $z \in E$ alalım. Her $x \in E$ için $\| x - z \| < \delta$ olsun. $\| x_0 - (x - z + x_0) \| < \delta$ ve T' nin lineer olmasından $\| Tx - Tz \| < \varepsilon$ elde edilir.

(2) $\Rightarrow$(3): T operatörü her yerde sürekli olduğundan özellikle $0 \in E$ için de süreklidir. O halde $\varepsilon = 1$ için bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilir ki $\| x \| < \delta$ olduğunda $\| Tx \| < 1$ sağlanır. $y = 0$ için $T(0) = 0$ olduğundan problem yoktur. $y \neq 0$ kabul edebiliriz. Bu durum için $y = \dfrac{x}{\| x \|}$ olsun. Böylece $\| T(\dfrac{\delta}{2} y) \| < 1$ olduğundan $M = \dfrac{2}{\delta}$ seçerek her $x \in E$ için $\| Tx \| < M \| x \|$ sağlandığından T lineer operatörü sınırlıdır.

(3) $\Rightarrow$(1): T lineer operatörünün sadece 0 da sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. $\varepsilon > 0$ verilsin. T nin sınırlılığından bir $M > 0$ sayısı bulunabilir ki her $x \in E$ için $\| Tx \| < M \| x \|$ olur. Yoğunluk teoreminden dolayı bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilir ki $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{M}$ sağlanır. O halde $\| x \| < \delta$ olduğunda $\| Tx \| \leq \delta M < \varepsilon$ elde edilir. Bu da T lineer operatörünün sürekliliğini verir.

Tanım 2.17 (E, $\|.\|$) normlu bir uzay olsun. f : $\mathbb{N} \rightarrow$E tanımlı fonksiyonuna E içinde bir dizi adı verilir. (f(n)) = (x_n) ile gösterilir.

Tanım 2.18 (E, $\|.\|$) normlu bir uzay ve (x_n) E içinde bir dizi olsun.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in E \Leftrightarrow$ Verilen her $\varepsilon > 0$ için bir n_0 sayısı bulunabilir ki $n \geq n_0$ olduğunda $\| x_n - x \| < \varepsilon$ sağlanır. Bunu sağlayan bir diziye yakınsak dizi adı verilir.

Tanım 2.19 (E, $\|.\|$) normlu bir uzay ve (x_n) E içinde bir dizi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için bir n_0 sayısı bulunduğunda her n, m $\geq n_0$ için $\| x_n - x_m \| < \varepsilon$ oluyorsa (x_n) dizisine E içinde bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.20 (E, $\|.\|$) normlu bir uzay olsun. Eğer E içindeki her Cauchy dizisi E deki norma göre yakınsak ise E uzayına bir Banach uzayı (veya tam uzay) denir.

Örnekler 2.21 Banach uzayları için aşağıdaki örnekler verilebilir.

1. $1 \leq p < \infty$ için $\left\{ x = (x_n) : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$ uzayı $x = (x_n) \in \ell_p$ için

$\| x \| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

2. Sınırlı dizilerin uzayı $\ell_\infty = \{ x = (x_n) : \sup |x_n| < \infty \}$ üzerindeki supremum normuna göre, yani, $x = (x_n) \in \ell_\infty$ için

$\| x \| = \sup\limits_n | x_n |$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.22 X bir Banach uzayı olsun. X uzayı üzerinde tanımlı tüm sürekli lineer operatörlerin kümesi B(X) ile gösterilir. Yani,

B(X) = $\{ T \mid T{:}X \rightarrow X$ sürekli, lineer$\}$ şeklindedir ve T, S $\in$ B(X) için

$$(T + S)(x) = T(x) + S(x) , x \in X \qquad (2.4)$$

olarak toplam tanımlansın.

$K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ olsun. Bir a $\in$ K ve T $\in$ B(X) için çarpımı (aT)(x) = aT(x) olarak tanımlansın. Bu çarpma ve toplama işlemlerinin tanımları ile B(X) bir vektör uzayıdır.

İspat: (1) Her $T, S, N \in B(X)$ için

$[T + (S + N)](x) = T(x) + (S + N)(x)$

$= T(x) + (S(x) + (N)(x))$

$= [T(x) + S(x)] + (N)(x) , \ \forall \ x \in X$

O halde

$T + (S + N) = (T + S) + N$

ifadesi gerçeklenmiş olur.

(2) Her $T, S \in B(X)$ için

$(T + S)(x) = T(x) + S(x)$

$= S(x) + T(x)$

$= (S + T)(x) , \ \forall \ x \in X$

O halde

$T + S = S + T$

İfadesi gerçeklenmiş olur.

(3) $\mathbf{O}(x) = 0 , \ \forall \ x \in X$. O halde sıfır operatörü **O,** B(X) in sıfırıdır.

(4) Her $T \in B(X)$ için $-T \in B(X)$ operatörü $(-T)(x) = - T(x)$ eşitliğini sağlar.

(5) Her $T \in B(X)$ için $(1.T)(x) = 1. T(x) = T(x), \ x \in X$ olduğundan $1.T = T$ özelliği sağlanır.

(6) $a, b \in K$, $T \in B(X)$ ve $x \in X$ için

$[(ab)T](x) = (ab)T(x)$

$= a(bT(x))$

$= a(bT)(x)$

Olduğundan

$(ab)T = a(bT)$

sağlanır.

(7) T, S $\in$ B(X), a$\in$ K ve x$\in$X için

$[(a + b)T](x) = (a + b)T(x)$

$= aT(x) + bT(x)$

$= (aT + bT)(x)$

olduğundan

$(a + b)T = aT + bT$

sağlanır.

O halde B(X) bir vektör uzayıdır.

Tanım 2.23 E ve F normlu uzaylar, T : E$\to$F sınırlı bir lineer operatör olsun. O zaman T operatörünün normu $\| T \|$ aşağıdaki birbirine denk eşitliklerle verilir.

- $\| T \| = \sup\{\| Tx \| : \| x \| < 1\}$
- $\| T \| = \sup\{\| Tx \| : \| x \| = 1\}$
- $\| T \| = \sup\left\{ \dfrac{\| Tx \|}{\| x \|} : x \neq 0, x \in E \right\}$
- $\| T \| = \inf\{M > 0 : \| Tx \| \leq M.\| x \|, x \in E\}$

Tanımdan, her x$\in$X için

$$\| Tx \| \leq \| T \|.\| x \| \qquad (2.5)$$

eşitsizliği geçerlidir.

B(X) uzayı $\| T \| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \| Tx \|$ operatör normu ile bir normlu uzaydır.

İspat: (1) Her T $\in$ B(X) için, $\| Tx \| \geq 0$ olur. Tx $\in$ X ve X normlu uzay olduğu için

$\| T \| \geq 0$ sağlanır.

(2) $T \in B(X)$, $\| T \| = 0$ için $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \| Tx \| = 0$ olacağından $\| Tx \| = 0$ olur. $Tx \in X$ ve X normlu uzay olduğu için her $x \in X$ için $Tx = 0$ sağlanır ki bu da $T = 0$ (sıfır operatörü) olur.

Tersine, $T \in B(X)$ ve $T = 0$ (sıfır operatörü) için $\| Tx \| = 0$ ve dolayısıyla $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \| Tx \| = 0$ olacağından $\| T \| = 0$ elde edilir.

O halde her $T \in B(X)$ için, $\|T \| = 0 \Leftrightarrow T = 0$ sağlanmış olur.

(3) Her $T \in B(X)$ ve $a \in K$ için

$$\| aT \| = \sup_{\|x\| \leq 1} \| (aT)x \| = \sup_{\|x\| \leq 1} \| a(Tx) \|$$

Burada $a(Tx) \in X$ ve X normlu uzay olduğu ve $|a| > 0$ olduğu için,

$$\begin{aligned} \sup_{\|x\| \leq 1} \| a(Tx) \| &= \sup_{\|x\| \leq 1} |a| . \| Tx \| \\ &= |a| . \sup_{\|x\| \leq 1} \| Tx \| \\ &= a . \| T \| \end{aligned}$$

olur, böylece

$$\| aT \| = a . \| T \|$$

sağlanır.

(4) $T, S \in B(X)$ için üçgen eşitsizliği sağlanmalıdır.

$$\| T + S \| = \sup_{\|x\| \leq 1} \| (T + S)(x) \|$$

şeklindedir.

$\| (T + S)(x) \| = \| T(x) + S(x) \|$ ve $T(x) , S(x) \in X$ ve X normlu uzay olduğundan

$$\| T(x) + S(x) \| \leq \|T(x) \| + \| S(x) \|$$

olur . $\| x \| \leq 1$ üzerinden supremum alınırsa,

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \| T(x) + S(x) \| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \| T(x) \| + \sup_{\|x\| \leq 1} \| S(x) \| \tag{2.6}$$

elde edilir ki böylece

$\| T + S \| \leq \| T \| + \| S \|$

sağlanır.

O halde B(X) normlu bir uzaydır.

Ayrıca B(X) yukarda tanımlanan operatör normuna göre bir Banach uzayıdır.

Teorem 2.24 E, F normlu vektör uzayları ve E den F ye tanımlı tüm sınırlı lineer operatörlerin uzayı B(E, F), operatör normuna göre bir normlu vektör uzayıdır. Eğer F bir Banach uzayı ise B(E, F) de bir Banach uzayıdır [10].

İspat: $T \in B(E, F)$ ve $\| T \| = 0$ olsun. Bir $x \in E$ için,

$\|Tx\| \leq \| T \| . \| x \|$

eşitsizliğinden $\| Tx \| = 0$ elde edilir. O halde T = 0 operatörüdür.

$x \in E$ için,

$\| (S + T)(x) \| \leq (\| S \| + \| T \|).\| x \|$

olduğundan birim küre üzerinden supremum alınırsa

$$\| S + T \| = \sup_{\|x\|=1} \| (S + T)(x) \| \leq \| S \| + \| T \| \tag{2.7}$$

üçgen eşitsizliği elde edilir. $a \in K$ ve $T \in B(E, F)$ için

$$\| aT \| = \sup_{\|x\|=1} \| aTx \| = |a|.\| T \| \tag{2.8}$$

elde edilir. O halde B(E, F) bir normlu uzaydır. Şimdi F bir Banach uzayı ise B(E, F) nin bir Banach uzayı olduğunu görelim.

(T_n) bu uzayda bir Cauchy dizisi ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda bir n_0 sayısı bulunabilir ki her $n, m \geq n_0$ için $\| T_n - T_m \| < \varepsilon$ sağlanır. Bir $x \in E$ alalım. O zaman $n, m \geq N$ için

$$\begin{aligned} \| T_n x - T_m x \| &= \| (T_n - T_m)x \| \\ &\leq \| T_n - T_m \| . \| x \| \end{aligned}$$

$< \varepsilon \| x \|$

olur. O halde $(T_n x)$ F içinde bir Cauchy dizisidir ve F nin Banach uzayı olmasından dolayı $(T_n x)$ dizisi yakınsar. Bu dizinin limiti $x \in E$ keyfi olduğundan $T: E \to F$ tanımlı bir dönüşüm için $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = Tx$ olsun. Şimdi bu T dönüşümünün lineer ve sınırlı olduğunu görelim.

T nin lineerliği:

$x, y \in E$ için

$$T(x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n (x+y)$$

$$= \lim_{n\to\infty} T_n x + \lim_{n\to\infty} T_n y$$

$$= Tx + Ty$$

$a \in K$ ve $x \in E$ için

$$T(ax) = \lim_{n\to\infty} T_n (ax)$$

$$= a \lim_{n\to\infty} T_n x$$

$$= a(Tx)$$

O halde T lineer bir operatördür.

T nin sınırlılığı:

Her $x \in E$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\| T_n x - Tx \| = \lim_{m\to\infty} \| T_n x - T_m x \| < \varepsilon \| x \| , \ (n \geq n_0) \tag{2.9}$$

olur. Dolayısıyla her $x \in E$ için

$$\| Tx \| \leq \| Tx - T_{n_0} \| + \| T_{n_0} \| \leq (\varepsilon + \| T_{n_0} \|). \| x \| \tag{2.10}$$

olması T operatörünün sınırlı olmasını gerektirir.

(T_n) dizisinin T ye operatör normuna göre yakınsadığını görelim.

$$\| T_n - T \| = \sup_{\|x\|=1} \| T_n x - Tx \| \leq \varepsilon, \ (n \geq n_0) \tag{2.11}$$

eşitsizliği bize $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ yi verir. O halde B(E, F) bir Banach uzayıdır.

Bu teoremin bir sonucu olarak, X Banach uzayı olmak üzere B(X, X) = B(X) kümesinin de Banach uzayı olduğunu söyleyebiliriz.

Önerme 2.25 E, F, G normlu uzaylar, $T \in B(E, F)$ ve $S \in B(F, G)$ olsun. $ST \in B(E, G)$ ve

$\| ST \| \leq \| S \|.\| T \|$ olur [10].

İspat: $x, y \in E$ için

$(ST)(x + y) = S(T(x + y)) = S(Tx + Ty) = S(Tx) + S(Ty)$

olduğundan ST toplamsaldır. $a \in K$ ve her $x \in E$ için

$ST(ax) = S(aTx) = aST(x)$

olduğundan ST lineerdir. Şimdi ST nin sınırlılığını görelim. Her $x \in E$ için

$\| (ST)x \| = \| S(Tx) \| \leq \| S \|.\| T \|.\| x \|$

olduğundan

$$\| ST \| = \sup_{\|x\|\leq 1} \| (ST)x \| \leq \| S \|.\| T \|$$

elde edilir.

Tanım 2.26 $(E, \|.\|)$ normlu bir uzay ve $x_0 \in E$, $r > 0$ olsun. x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar, açık yuvar ve küre sırası ile

(1) $B[x_0 , r] = \left\{ x: \| x - x_0 \| \leq r \right\}$

(2) $B(x_0 , r) = \left\{ x: \| x - x_0 \| < r \right\}$

(3) $S[x_0 , r] = \left\{ x: \| x - x_0 \| = r \right\}$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.27 $(E, \|.\|)$ normlu bir uzay ve $A \subset E$ olsun. Bir $x_0 \in E$ ve $r > 0$ için $A \subset B(x_0 , r)$ oluyorsa A kümesine normlu uzayda sınırlı bir küme denir. O halde bir A kümesinin sınırlı olması için gerek ve yeter koşul bir $r > 0$ sayısı bulunabilir ki her $a \in A$ için $\|a\| < r$ olmasıdır. Böylece bir (x_n) dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter koşulun $\|x_n\| < M$, $n = 1, 2, \dots$ olacak biçimde bir $M > 0$ sayısının bulunabilmesidir.

Tanım 2.28 $(E, \|.\|)$ normlu bir uzay ve $A \subset E$ olsun. (x_n) A da herhangi bir dizi olsun. Eğer (x_n) dizisi A daki bir elemana yakınsıyorsa A kümesine kapalıdır denir.

Tanım 2.29 $(E, \|.\|)$ normlu bir uzay ve $A \subset E$ olsun. E uzayında A yı içeren tüm kapalı kümelerin koleksiyonunun kesişimine A nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. $\overline{A}$ kümesi de kapalı bir kümedir.

Teorem 2.30 $(E, \|.\|)$ normlu bir uzay ve $A \subset E$ olsun. A nın kapalı olması için gerek ve yeter koşul $A = \overline{A}$ olmasıdır [11].

Tanım 2.31 X bir normlu uzay, $E \subset X$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. Herhangi $x, y \in E$ için $\lambda x + (1 - \lambda)y \in E$ oluyorsa E ye konveks küme denir.

Tanım 2.32 X normlu bir uzay ve $A \subset X$ olsun. A yi içeren bütün konveks kümelerin kesişimi A kümesinin konveks kabuğudur ve co(A) ile gösterilir. Benzer şekilde A yi içeren tüm kapalı konveks kümelerin kesişimi A nın kapalı konveks kabuğudur ve $\overline{co}(A)$ ile gösterilir.

Tanım 2.33 X normlu bir uzay, $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. Eğer A kümesi x noktasının bir komşuluğunu içeriyorsa yani, $B(x, \delta) \subset A$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(x) > 0$ sayısı varsa x noktasına A nın bir iç noktası denir. A kümesinin tüm iç noktalarının kümesine de A nın içi denir.

Ayrıca, içine eşit olan yani her noktası iç nokta olan küme açık kümedir.

Tanım 2.34 X bir normlu uzay, ρ da bu uzayın açık alt kümelerinin her hangi bir topluluğu ve $E \subset X$ olsun. Eğer $E \subset \bigcup_{A \in \rho} A$ ise ρ topluluğuna E nin bir açık örtüsü denir.

Eğer E kümesinin her açık örtüsünün sonlu alt örtüsü varsa E ye kompakt bir küme denir.

Tanım 2.35 X bir Banach uzayı ve $P: X \to X$ olsun. $P^2 = P$ koşulunu sağlayan P sınırlı lineer operatörüne idempotent denir.

Tanım 2.36 X bir vektör uzayı, Y ve Z de alt uzaylar olsun. Eğer $y\in Y$ ve $z \in Z$ iken her $x\in X$, $x = y + z$ şeklinde tek türlü yazılabiliyorsa X e, Y ve Z alt uzaylarının direkt toplamı denir ve $X = Y \oplus Z$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.37 X bir vektör uzayı olsun. $x_0 \in X$ için $H = x_0 + \text{Çek}h$ şeklindeki kümesine X uzayında x_0 elemanı boyunca bir hiperdüzlem denir. Burada $H\subset X$ ve h X üzerinde sıfırdan farklı bir lineer fonksiyoneldir.

Tanım 2.38 L bir vektör uzayı, K bir cisim ve τ L üzerinde bir topoloji olsun. Aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa (L, τ) çiftine K üzerinde bir topolojik vektör uzayı denir.

(1) $(x, y) \to x + y$ $\quad L \times L$ den L ye sürekli

(2) $(\lambda, x) \to \lambda x$ $\quad K \times L$ den L ye sürekli

Tanım 2.39 L bir topolojik vektör uzayı ve $A \subset L$ olsun. Eğer L de sıfırın her komşuluğu U için sonlu bir $A_0 \subset A$ varsa ve $A \subset A_0 + U$ oluyorsa A ya total sınırlı küme denir.

Başka bir deyişle, her $\varepsilon > 0$ için $A\subset \bigcup_{i=1}^{n} B(\varepsilon, x_i)$ olacak şekilde L de bir sonlu sayıda $x_1, x_2, ..., x_n$ elemanı varsa A kümesine total sınırlıdır denir.

Tanım 2.40 X, Y vektör uzayları, $T : X\to Y$ bir operatör olsun. Eğer T operatörünün görüntü kümesi sonlu boyutlu ise T ye sonlu ranklı bir operatör denir.

Eğer T nin görüntü kümesinin boyutu bir ise T ye rank- bir operatör denir.

Tanım 2.41 (X, $\|.\|$) normlu uzayında tanımlı tüm sürekli lineer fonksiyonellerin uzayına X in topolojik duali denir ve X^* ile gösterilir. X in topolojik duali X^* bir Banach uzayıdır. Çünkü $X^* = B(X, K)$ şeklindedir ve K reel veya kompleks sayılar kümesi Banach uzayı olduğundan X^* da bir Banach uzayıdır.

Örnekler 2.42 Bazı uzaylar ve dualleri şu şekildedir.

(1) $\ell_1 = \left\{ x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$ uzayının topolojik duali ℓ_∞ uzayıdır.

(2) $c_0 = \left\{ x = (x_n) : \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}$ uzayının topolojik duali ℓ_1 uzayıdır.

Tanım 2.43 E, F normlu uzaylar ve $T : E \to F$ lineer sınırlı bir operatör olsun. O zaman T operatörünün adjointi T^*, $T^* : F^* \to E^*$ şeklindedir ve $g \in F^*$ için $T^* g = gT$ ile tanımlanır.

$g, h \in F^*$ için

$T^*(g + h)(x) = (g + h)(Tx) = g(Tx) + h(Tx) = (T^* g + T^* h)(x) , x \in E$

olduğundan T^* toplamayı korur.

$a \in K , f \in F^*$ için

$T^*(af)(x) = (af)(Tx) = af(Tx) = a T^* f(x) , x \in E$

olması T^* ın çarpmayı koruduğunu gösterir.

Böylece T^* lineer bir operatördür.

$| g(Tx) | \le \| g \| . \| Tx \|$ eşitsizliğinden $T^* g \in E^*$ olduğu görülür.

Teorem 2.44 E, F normlu uzaylar ve $T : E \to F$ lineer sınırlı bir operatör olsun. O zaman T operatörünün adjointi $T^*, T^* : F^* \to E^*$ lineer, sınırlı bir operatör ve $\| T \| = \| T^* \|$ dir [10].

İspat: T operatörünün lineer olmasından adjoint operatörü T^* lineerdir. $0 \neq x \in E$ için Hahn-Banach Teoreminin neticesinden bir $g \in F^*$ bulunabilir ki $T^* g(x) = \| Tx \|$, $\| g \| = 1$ sağlanır. O halde

$$\|T \| \le \| T^* \| \text{ ve } \| T^* \| = \sup_{\|g\| \le 1} \| T^* g \| \le \| g \| . \| T \|$$

olduğundan $\| T \| = \| T^* \|$ eşitliği elde edilir.

E, F, G normlu uzaylar olsun. B(E, F) ve B(F, G) uzayları şu şekilde tanımlanır:

B(E, F) = $\{T \mid T : E \to F$ sınırlı lineer operatör$\}$ ve

B(F, G) $\{T \mid T : F \to G$ sınırlı lineer operatör$\}$.

$T \in B(E, F)$ ve $S \in B(F, G)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

(1) $(ST)^* = T^* S^*$

(2) $(T + S)^* = T^* + S^*$

(3) $a \in K$ için $(aT)^* = aT^*$

(4) T nin tersi var ve E, F Banach uzayları olsun. O zaman $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ dir.

Tanım 2.45 E bir normlu uzay olsun. E nin norm topolojisine göre duali E^* olsun, yani $E^* = B(E, K)$ dır ve K Banach uzayı olduğu için E^* da bir Banach uzayıdır.

$f, g \in E^*$ için

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in E$

$(af)(x) = af(x)$, $x \in E$, $a \in K$

$\| f \| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$ şeklinde tanımlanır.

E^* Banach uzayının norm topolojiye göre duali $E^{**} = (E^*)^*$ uzayına E uzayının ikinci duali denir. E^{**} uzayı da bir Banach uzayıdır. $x \in E$ olsun.

$\hat{x} : E^* \to K$, $\hat{x}(f) = f(x)$, $f \in E^*$

tanımını yapalım.

$f, g \in E^*$ için

$\hat{x}(f + g) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \hat{x}(f) + \hat{x}(g)$

olduğundan $\hat{x}$ toplamayı korur.

$a \in K$ ve $f \in E^*$ için

$\hat{x}(af) = (af)(x) = af(x) = a\hat{x}(f)$

Bu nedenle $\hat{x}$ bir lineer fonksiyoneldir.

$|\hat{x}(f)| = |f(x)| \leq \| f \|.\| x \|$, $f \in E^*$

olduğundan $\hat{x}$ bir sürekli lineer fonksiyoneldir, yani, $\hat{x} \in E^*$ dır ve $\| f \| \leq 1$ üzerinden supremum alınırsa $\| \hat{x} \| \leq \| x \|$ bulunur. O halde

$J : E \to E^{**}$, $x \to J(x) = \hat{x}$

ile tanımlı dönüşüm lineerdir. Bunu görelim:

$$J(x+y) = (x \hat{+} y) = \hat{x} + \hat{y} = J(x) + J(y) \tag{2.12}$$

$$J(ax) = a\hat{\ }x = a\hat{x} = aJ(x) \tag{2.13}$$

$(x \hat{+} y)(f) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \hat{x}(f) + \hat{y}(f) = (\hat{x} + \hat{y})(f)$

$a\hat{\ }x(f) = f(ax) = af(x) = a\hat{x}(f)$.

Tanım 2.46 E normlu bir uzay ve $E = E^{**}$ ise E uzayına refleksif bir uzay denir.

Örnek 2.47 $1 < p < \infty$ için ℓ_p bir refleksif uzaydır.

Tanım 2.48 Boştan farklı bir X kümesi içinde $\leq$ bağıntısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa kısmi sıralama adını alır.

i) $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ dir.

ii) Her $x \in X$ için $x \leq x$ dir.

iii) $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$ dir.

Tanım 2.49 E bir reel vektör uzayı olsun. f, g $\in$ E olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa E ye sıralı bir vektör uzayı denir.

i. $f \leq g$ ise her $h \in E$ için $f + h \leq g + h$ dır.

ii. $0 \leq f$ için ve her $0 \leq a$ reel sayısı için $0 \leq af$ dir.

$E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ kümesine E nin pozitif konisi denir.

Tanım 2.50 $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ ve A sıralı bir vektör uzayı olsun. Her $x \in A$ için $x \leq y$ olacak şekilde bir $y \in \mathbb{R}$ varsa $y \in \mathbb{R}$ ye A için bir üst sınır denir. Her $x \in A$ için $x \leq z$, $z \in \mathbb{R}$ olduğunda $y \leq z$ ise y ye A nın en küçük üst sınırı (supremumu) denir ve supA ile gösterilir.

Tanım 2.51 $\varnothing \neq B \subset \mathbb{R}$ ve B sıralı bir vektör uzayı olsun. Her $x \in B$ için $y \leq x$ olacak şekilde bir $y \in \mathbb{R}$ varsa B kümesine alttan sınırlı bir küme denir. Her $x \in B$ için $z \leq x$, $z \in \mathbb{R}$ olduğunda $z \leq y$ oluyorsa y ye B kümesinin en büyük alt sınırı (infimumu) denir ve inf B ile gösterilir.

Tanım 2.52 X bir Banach uzayı ve (X, $\|.\|$, $\leq$) bir sıralı vektör uzayı olsun.

$|x| \leq |y|$ iken $\|x\| \leq \|y\|$ oluyorsa X uzayına Banach latis denir.

x, y$\in$X için inf $\{x,y\}$ = $x \wedge y$ ve sup$\{x,y\}$ = $x \vee y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.53 X bir Banach latis olsun. $x \wedge y = 0$ koşulunu sağlayan her x, y $\in X^+$ için $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ oluyorsa X e AL-uzayı denir.

Tanım 2.54 X bir Banach latis olsun. $x \wedge y = 0$ koşulunu sağlayan her x, y $\in X^+$ için $\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ oluyorsa X e AM- uzayı denir.

Tanım 2.55 X bir Banach uzayı ve X^* onun topolojik duali olsun. X teki bir (x_n) dizisinin bir x $\in$X elemanına zayıf yakınsaması $x_n \xrightarrow{w} x$ şeklinde gösterilir ve her $x^* \in X^*$ için $x^*(x_n) \to x^*(x)$ ifadesini sağlaması demektir.

Tanım 2.56 X bir Banach uzayı ve X^* onun topolojik duali olsun. X^*uzayına ait bir (x_n^*) dizisinin bir $x^* \in X^*$ elemanına zayıf* yakınsaması $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ şeklinde gösterilir ve her x$\in$X için $x_n^*(x) \to x^*(x)$ ifadesini sağlaması demektir.

Tanım 2.57 X normlu bir uzay ve E $\subset$X olsun. Eğer E kümesindeki her dizinin zayıf* yakınsak bir alt dizisi varsa bu kümeye zayıf* kompakt küme denir.

Teorem 2.58 (Alaoğlu Teoremi) X normlu bir uzay ve X^* dual uzayı olsun. O zaman X^* uzayının kapalı birim yuvarı zayıf* kompakttır [12].

Tanım 2.59 T: X $\to$Y bir lineer operatör, X ve Y normlu uzaylar olsun. X deki her sınırlı (x_n) dizisi için (Tx_n) dizisinin Y de bir yakınsak alt dizisi varsa T ye bir kompakt operatör denir.

Örnek 2.60 $T : \ell_2 \to \ell_2$ sınırlı operatörü T $\{a_n\} = \{n^{-1}a_n\}$ şeklinde tanımlanmış olsun. T bir kompakt operatördür.

Çözüm: Her k $\in \mathbb{N}$ için $T_k \in B(\ell_2)$ operatörünü şu şekilde tanımlayalım:

$$\begin{Bmatrix} b_n^k = n^{-1} a_n , & n \le k \\ b_n^k = 0 , & n > k \end{Bmatrix} \quad \text{olmak üzere} \quad T_k \{a_n\} = \{b_n^k\} \text{ olsun.}$$

T_k operatörleri lineer, sınırlıdır ve sonlu ranklıdır. Ayrıca, bir $a \in \ell_2$ için

$$\| (T_k - T)a \|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^2}$$

$$\le (k+1)^{-2} \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n|^2$$

$$\le (k+1)^{-2} \| a \|^2$$

olur. Buradan,

$$\| T_k - T \| \le (k+1)^{-1}$$

olur ve buradan $\| T_k - T \| \to 0$ elde edilir. $\{T_k\}$ sonlu ranklı sınırlı operatörlerin dizisi olduğundan ve $T \in B(\ell_2)$ operatörüne yakınsadığından T kompakttır.

Teorem 2.61 X, Y ve Z normlu uzaylar olsun. $S : X \to Y$ ve $T : Y \to Z$ sınırlı operatörlerinden en az bir tanesi kompakt ise bileşkeleri $TS : X \to Z$ de kompakt olur [11].

İspat: $\{x_n\}$ X uzayında sınırlı bir dizi olsun. Eğer S kompakt ise bir $\{x_{n(r)}\}$ alt dizisi vardır ki $\{Sx_{n(r)}\}$ yakınsaktır. T sınırlı ve dolayısıyla sürekli olduğundan $\{TSx_{n(r)}\}$ de yakınsar. Böylece TS kompakttır. S sınırlı fakat kompakt değilse $\{Sx_n\}$ dizisi sınırlıdır. T kompakt olacağından, bir $\{Sx_{n(r)}\}$ alt dizisi vardır ki $\{TSx_{n(r)}\}$ yakınsaktır. Böylece yine TS kompakt olur.

Tanım 2.62 X, Y Banach uzayı ve $T: X \to Y$ bir lineer operatör olsun. X deki her sınırlı (x_n) dizisi için (Tx_n) dizisinin Y de bir zayıf yakınsak alt dizisi varsa T ye zayıf kompakt operatör denir.

Tanım 2.63 X bir Banach uzayı, $T: X \to X$ bir lineer operatör ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer T,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| T^n x_0 \right\|^{1/n} = 0 \tag{2.14}$$

koşulunu sağlarsa x_0 da yarı nilpotent denir.

Tanım 2.64 Bir X Banach uzayı için B(X) sınırlı lineer operatörler kümesini ve onun bir A vektör alt uzayını göz önüne alalım. S, T $\in$ A iken çarpımları (bileşkeleri) ST $\in$ A oluyorsa A ya bir operatör cebiri veya B(X) in bir alt cebiri adı verilir.

Yardımcı Teorem 2.65 X bir vektör uzayı, R, S, T$\in$B(X) ve a $\in$K olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır [11].

(1)$R(ST) = (RS)T$;

(2)$R(S + T) = RS + RT$;

(3)$(S + T)R = SR + TR$;

(4)$I_X T = TI_X = T$;

(5)$(aS)T = a(ST) = S(aT)$.

Listelenen bu beş özellik, bir vektör uzayının cebir olması için sağlaması gereken ek özelliklerdir.

Tanım 2.66 X bir reel veya kompleks Banach uzayı ve T$\in$B(X) olsun. Eğer X de boştan farklı kapalı bir Y alt uzayı T(Y) $\subseteq$Y olacak şekilde mevcutsa Y alt uzayına T- değişmez kapalı alt uzay denir.

Tanım 2.67 X bir reel veya kompleks Banach uzayı ve T $\in$B(X) olsun. T operatörünün komutant kümesi T ile değişmeli olan operatörlerin kümesidir, yani

$$\{T\}^c = \{S \in B(X): ST = TS\} \qquad (2.15)$$

şeklindedir.

Benzer şekilde S^c, $S \subseteq B(X)$ kümesinin komutantıdır yani,

$S^c = \{A \in B(X) : \forall\ K \in S \text{ için } AK = KA\}$

şeklindedir.

$\{T\}^c$ kümesi de B(X) in bir alt cebiridir. Çünkü her S_1 , $S_2 \in \{T\}^c$ için $S_1S_2 \in \{T\}^c$ olur.

Gerçekten,

$(S_1S_2)T = S_1\ (S_2T) = S_1\ (TS_2) = (S_1T)\ S_2 = (TS_1)S_2 = T(S_1\ S_2)$

olduğundan

her $S_1, S_2 \in \{T\}^c$ için $(S_1\ S_2)T = T(S_1\ S_2)$ elde edilir ki bu da $S_1\ S_2\ \in \{T\}^c$ anlamına gelir.

Tanım 2.68 X bir reel veya kompleks Banach uzayı ve $T\in B(X)$ olsun. Eğer bir Y alt uzayı $\{T\}^c$ kümesindeki her operatör altında değişmez kalıyorsa Y, T için bir hiperdeğişmez alt uzaydır.

Teorem 2.69 X bir Banach uzayı, $T : X \to X$ sürekli lineer operatör ise Çek(T) ve T nin görüntü kümesi R(T) kümeleri T- hiper değişmezdir.

İspat: Çek(T) = $\{x \in X : Tx = 0\}$ kümesini göz önüne alalım. Bu kümenin T- hiper değişmez olması için T operatörünün komutant kümesi olan $\{T\}^c$ deki tüm operatörler altında değişmez kalmalıdır.

$S\in \{T\}^c$ alalım. O halde TS = ST şeklindedir.

$x\in$ Çek(T) keyfi alalım.

$x\in$ Çek(T) olduğundan Tx = 0 olur.

(TS)(x) = T(Sx) = S(Tx) = S(0) = 0

Böylece T(Sx) = 0 elde ettik bu da Sx $\in$ Çek(T) demektir.

O halde S(Çek(T)) $\subseteq$ Çek(T) olur.

Benzer şekilde $S\in \{T\}^c$ için S(R(T)) $\subseteq$ R(T) olduğunu görelim.

$y\in R(T)$ alalım. O halde, y = Tx olacak şekilde $x\in X$ vardır. Sy $\in$ R(T) olduğunu göstermemiz yeterlidir.

Sy = S(Tx) = (ST)x olur.

Burada $S\in \{T\}^c$ olduğundan,

(ST)x = (TS)x = T(Sx) olur.

Burada S operatörü aynı zamanda B(X) uzayına ait olduğundan $x\in X$ için $Sx\in X$ olacaktır.

$Sx = x_1 \in X$ diyelim. O halde,

$Sy = T(Sx) = Tx_1$, $x_1 \in X$ elde edildiğinden $Sy \in R(T)$ sonucuna varılır. Böylece R(T) kümesi T- hiper değişmezdir.

Tanım 2.70 $S \subseteq B(X)$ olsun. Eğer $Sx = \{Ax : A \in S\}$ kümesi her $0 \neq x \in X$ için X de yoğun ise, yani, $\overline{Sx} = X$ ise S kümesi geçişli olarak adlandırılır.

Tanım 2.71 X ve Y Banach uzayları olmak üzere $T : X \to Y$ bir operatör olsun. $(x_n) \subset X$ için, X uzayında $x_n \xrightarrow{w} 0$ iken $\lim_{n\to\infty} \| T x_n \| = 0$ oluyorsa, başka bir deyişle, X uzayında $x_n \xrightarrow{w} x$ iken $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - Tx\| = 0$ oluyorsa T operatörüne bir Dunford- Pettis operatörü denir.

Tanım 2.72 X bir Banach uzayı, X^* duali olsun. Eğer $(x_n) \subset X$ ve $x_n^* \subset X^*$ için, X uzayında $x_n \xrightarrow{w} 0$ ve X^* uzayında $x_n^* \xrightarrow{w} 0$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n^*(x_n) = 0$ oluyorsa, veya başka bir deyişle, X uzayında $x_n \xrightarrow{w} x$ ve X^* uzayında $x_n^* \xrightarrow{w} x^*$ iken $x_n^*(x_n) = x^*(x)$ oluyorsa X uzayına Dunford- Pettis özelliğine sahip denir.

Tanım 2.73 G üzerindeki ikili işlem tanımlanmış boştan farklı bir küme olsun. G kümesi her a, b, c $\in G$ için a(bc) = (ab)c koşulunu sağlıyorsa G ye bir yarı grup denir.

BÖLÜM 3

YERELLEŞTİRME VE BİR BUÇUK-GEÇİŞLİ OPERATÖR CEBİRLERİ

Tanım 3.1 X bir Banach uzayı, A da B(X) in bir alt cebiri olsun. Eğer X in, cebirin her elemanı altında değişmez kalan, aşikar olmayan (sıfır ve X ten farklı) değişmez kapalı alt uzay yoksa A geçişli operatör cebiri adını alır.

Tanım 3.2 X bir Banach uzayı, X^* onun topolojik duali ve A da B(X)' in bir alt cebiri olsun. A nın dual cebiri A^*, $B(X^*)$ ın bir alt cebiridir ve A daki operatörlerin adjointlerinden oluşur. Yani,

$$A^* = \left\{ T^* \in B(X^*) : T \in A \right\} \tag{3.1}$$

şeklindedir ve bir operatör cebiridir.

İspat: Öncelikle her $S^*, T^* \in A^*$ için çarpımları (bileşkeleri) $S^* T^* \in A^*$ olmalıdır, (T, S $\in$A). A bir cebir olduğundan her T, S $\in$A için TS $\in$ A ve $S^* T^* = (TS)^*$ olduğundan $S^* T^* \in A^*$ elde edilir.

Sonrasında A^* ın Yardımcı Teorem 2.65 deki koşulları sağladığını görelim:

$T^*, S^*, K^* \in A^*$ ve a $\in$ K için,

(1) $$\begin{aligned}[T^* (S^* K^*)](x^*) &= (S^* K^*) x^* T \\ &= x^* (KS) T \\ &= x^* K(ST) \\ &= (ST)^* K^* x^* \\ &= (T^* S^*) K^* x^*, \text{ her } x^* \in X^*\end{aligned}$$

O halde

$T^{*}\ (S^{*}K^{*}) = (T^{*}S^{*})K^{*}$

elde edilir.

(2) $[T^{*}\ (S^{*}+K^{*})](x^{*}) = (S^{*}+K^{*})x^{*}T$

$= x^{*}\ [(S+K)T]$

$= x^{*}\ (ST+KT)$

$= x^{*}\ (ST) + x^{*}\ (KT)$

$= (ST)^{*}\ x^{*} + (KT)^{*}\ x^{*}$

$= (T^{*}S^{*})x^{*} + (T^{*}K^{*})x^{*}$

$= (T^{*}S^{*} + T^{*}K^{*})x^{*}$, her $x^{*} \in X^{*}$

O halde

$T^{*}\ (S^{*}+K^{*}) = T^{*}S^{*} + T^{*}K^{*}$

elde edilir.

(3) $[(S^{*}+K^{*})T^{*}](x^{*}) = T^{*}x^{*}\ (S+K)$

$= T^{*}\ [x^{*}\ (S+K)]$

$= (T^{*}x^{*})(S+K)$

$= x^{*}\ [T(S+K)]$

$= x^{*}\ (TS+TK)$

$= x^{*}\ (TS) + x^{*}\ (TK)$

$= (TS)^{*}\ x^{*} + (TK)^{*}\ x^{*}$

$= (S^{*}T^{*})x^{*} + (K^{*}T^{*})x^{*}$

$= (S^{*}T^{*}+K^{*}T^{*})x^{*}$, her $x^{*} \in X^{*}$

O halde

$(S^* + K^*)T^* = S^*T^* + K^*T^*$

elde edilir.

(4) $(I_{X^*}T^*)(x^*) = x^*(TI_X)$, $I_X \in A$ ve her $T \in A$ için $TI_X = I_X T = T$ olduğundan;

$= x^*(I_X T)$

$= (T^* I_{X^*})x^*$, her $x^* \in X^*$

O halde $I_{X^*}T^* = T^* I_{X^*}$ ve

$(I_{X^*}T^*)(x^*) = x^*(TI_X)$

$= x^*T$

$= T^*x^*$, her $x^* \in X^*$

benzer şekilde

$(T^* I_{X^*})x^* = x^*(I_X T)$

$= x^*T$

$= T^*x^*$, her $x^* \in X^*$

Olacağından

$I_{X^*}T^* = T^* I_{X^*} = T^*$

elde edilir.

(5) $[(aS^*)T^*](x^*) = T^*(x^*(aS))$

$= T^*(a(x^*S))$

$= T^*(ax^*)S$

$= (ax^*)TS$

$= a(x^*(TS))$

$= a(S^*T^*)x^*$, her $x^* \in X^*$

Benzer şekilde,

$[(aS^*)T^*](x^*) = T^*(x^*(aS))$

$= T^*(a(x^*S))$

$= T^*(ax^*)S$

$= (T^*(ax^*))S$

$= (x^*(aT))S$

$= S^*x^*(aT)$

$= S^*(aT^*)x^*$, her $x^* \in X^*$

O halde

$(aS^*)T^* = a(S^*T^*)x^* = S^*(aT^*)$

elde edilir.

Sonuç olarak A^* bir operatör cebiridir.

Tanım 3.3 X bir Banach uzayı, A da B(X) in bir alt cebiri olsun. Eğer X uzayında sıfırı içermeyecek şekilde bir B kapalı yuvarı bulunabiliyorsa, B deki her (x_n) dizisi için bir (x_{n_i}) dizisi ve A da $\| S_i \| \leq 1$ olacak şekilde (S_i) dizisi varsa ve $(S_i x_{n_i})$ sıfırdan farklı bir vektöre yakınsıyorsa A ya yerelleştirme cebiri denir.

Önerme 3.4 T bire-bir ve kompakt bir operatör ise komutant kümesi $\{T\}^c$ bir yerelleştirme cebiridir [13].

Teorem 3.5 X ve Y normlu uzaylar ; X^*, Y^* dual uzaylar ve $T : X \rightarrow Y$ kompakt operatör olsun. O zaman T operatörünün Y^* uzayından X^* uzayına tanımlı adjointi T^* da kompakttır [14].

İspat: T kompakt olduğundan, X deki B kapalı birim yuvarı için $\overline{T(B)}$ kümesi de Y de kompakttır. Y^* uzayındaki kapalı birim yuvara ait $\{f_n\}$ dizisini göz önüne alalım.

$A = \{ f_n|_{\overline{T(B)}} : n \in \mathbb{N} \}$ kümesi sınırlıdır ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$| f_n(y) - f_n(y_1) | \leq \| y - y_1 \|$

olduğundan aynı zamanda A kümesi için şunlar söylenebilir. $\varepsilon > 0$ ve $y_0 \in \overline{T(B)}$ için bir $\delta(\varepsilon, y) > 0$ vardır ki her $f \in A$ ve her $y \in \overline{T(B)}$ için,

$| y - y_0 | < \delta$ iken $| f(y) - f(y_0) | < \varepsilon$ olur.

Böylece $\overline{A}$ kümesi kompakttır. O zaman, $\{f_n\}$ dizisi bir $\{f_{n_k}\}$ alt dizisine sahiptir ki,

$\{f_{n_k}|_{\overline{T(B)}} : n \in \mathbb{N}\}$, $\overline{T(B)}$ de yakınsaktır. Fakat ;

$$\| T^* f_{n_k} - T^* f_{n_j} \| = \sup\{| (f_{n_k} - f_{n_j})(Tx) | : x \in B\}$$

olur. Bu nedenle $\{T^* f_{n_k}\}$, X^* uzayında bir Cauchy dizisidir. X^* uzayı tam olduğundan $\{T^* f_{n_k}\}$ dizisi bu uzayda yakınsar. O halde T^* operatörü kompakttır.

Teorem 3.6 T operatörü bir X Banach uzayı üzerinde bire-bir, örten ve kompakt, ek olarak adjointi de bire-bir ve örten olsun. O zaman, $\{T^*\}^c$ bir yerelleştirme cebiridir.

İspat: T operatörü kompakt ise adjointi olan T^* operatörü de Teorem 3.5 e göre kompakttır. O halde Önerme 3.4 e göre $\{T^*\}^c$ bir yerelleştirme cebiridir.

Şimdi minimal vektör ve minimal fonksiyoneller [7] üzerinde duralım.

X bir Banach uzayı, X^* onun topolojik duali, $T \in B(X)$ ve adjonti T^* olsun. T^* operatörünün hiper değişmez alt uzaylarıyla ilgilendiğimizden, genelliği bozmaksızın, bire-bir ve yoğun görüntüye sahip olduğunu farzedebiliriz. Aksi takdirde ÇekT^* ve $\overline{R(T^*)}$, T^* operatörü için hiperdeğişmez alt uzaylardır. T^* operatörünün komutantını $\{T^*\}^c$ ile gösterelim.

Yardımcı Özellik 3.7 X bir Banach uzayı, X^* onun topolojik duali, $T \in B(X)$ ve adjonti T^* olsun. X^* dual uzayında $f_0 \neq 0$ fonksiyonelini ve $0 < \varepsilon < \| f_0 \|$ sayısını sabitleyelim.

$$K = (T^*)^{-1}(B[f_0, \varepsilon]) = \{(T^*)^{-1} f : f \in B[f_0, \varepsilon]\} \subset X^* \qquad (3.2)$$

kümesi konveks ve kapalı bir kümedir.

İspat: Konveks olduğunu görmek için;

$0 \leq \lambda \leq 1$ ve $(T^*)^{-1} f_1$, $(T^*)^{-1} f_2 \in K$ için $\lambda (T^*)^{-1} f_1 + (1 - \lambda)(T^*)^{-1} f_2 \in K$ olmalıdır.

Yani K kümesinin tanımından

$\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2 \in B[f_0, \varepsilon]$ olmalıdır diyebiliriz. Başka bir deyişle

$\| \lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2 - f_0 \| \leq \varepsilon$

sağlanmalıdır.

$$\begin{aligned} \| \lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2 - f_0 \| &= \| \lambda f_1 + f_2 - \lambda f_2 - f_0 \| \\ &= \| \lambda f_1 - \lambda f_0 + \lambda f_0 - \lambda f_2 + f_2 - f_0 \| \\ &\leq \| \lambda f_1 - \lambda f_0 \| + \| \lambda f_0 - \lambda f_2 \| + \| f_2 - f_0 \| \\ &= \lambda \| f_1 - f_0 \| + (1 - \lambda) . \| f_2 - f_0 \| \\ &\leq \lambda \varepsilon + (1 - \lambda) \varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

O halde K kümesi konvekstir.

Şimdi de K nın kapalı olduğunu gösterelim. Bunun için $\overline{K} \subset K$ olmalıdır çünkü $K \subset \overline{K}$ ifadesi her zaman sağlanmaktadır.

$y \in \overline{K}$ alalım. O zaman $\lim\limits_{n \to \infty} \| y_n - y \| = 0$ olacak şekilde $(y_n) \subset K$ dizisi vardır.

$K = (T^*)^{-1}(B[f_0, \varepsilon])$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(y_n) = (T^*)^{-1}(f_n)$ olmak üzere $(f_n) \subset B[f_0, \varepsilon]$ vardır.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $(y_n) = (T^*)^{-1}(f_n)$ olduğundan $(f_n) = T^*(y_n)$ olur.

$B[f_0, \varepsilon]$ kapalı yuvar olduğundan (f_n) dizisi $B[f_0, \varepsilon]$ da yakınsar. $f_n \to f \in B[f_0, \varepsilon]$ olsun.

$$\begin{aligned} \| T^* y_n - f \| &= \| T^* y_n - f_n + f_n - f \| \\ &\leq \| T^* y_n - f_n \| + \| f_n - f \| \end{aligned}$$

$(f_n) = T^*(y_n)$ olduğundan $\| T^* y_n - f_n \| = 0$ olur. O halde

$\| T^* y_n - f \| \leq \| f_n - f \|$

elde edilir. $n \to \infty$ için limite geçilirse,

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \| T^* y_n - f \| \leq \lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|$$

olur. $f_n \to f$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0$ olur, böylece

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \| T^* y_n - f \| \leq 0$$

olur ki, bu da

$$\lim_{n\to\infty} \| T^* y_n - f \| = 0$$

olması demektir. Buradan $T^* y_n \to f \in B[f_0, \varepsilon]$ sağlanır. $(T^*)^{-1}$ sürekli olduğundan $y_n \to (T^*)^{-1} f$ olur.

$f \in B[f_0, \varepsilon]$ olduğundan $(T^*)^{-1} f = y \in K$ olur. Böylece $y \in \overline{K}$ iken $y \in K$ elde edilir ki, bu da $\overline{K} = K$ demektir, yani K kümesi kapalıdır.

Buna ek olarak, T^* yoğun görüntüye sahip olduğundan yani $\overline{R(T^*)} = X^*$ olduğundan $0 \notin K$ dır.

$0 \notin K$ çünkü $0 \in K = (T^*)^{-1}(B[f_0, \varepsilon])$ olsaydı $T^* 0 \in B[f_0, \varepsilon]$ olurdu, T^* lineer operatör olduğundan $T^* 0 = 0 \in B[f_0, \varepsilon]$ sonucu çıkar fakat $0 \notin B[f_0, \varepsilon]$ kabul etmiştik. Bu nedenle $0 \notin K$ dır.

Aynı zamanda yine T^* yoğun görüntüye sahip olduğundan $K \neq \emptyset$ dir.

Şimdi minimal vektör tanımını verebiliriz.

$K = (T^*)^{-1}(B[f_0, \varepsilon])$ kümesini ele alalım. $z \in K$ için $d = \inf_{z\in K} \|z\|$ olsun. Norm fonksiyonunun özelliğinden $d > 0$ dır. $z \in K = (T^*)^{-1}(B[f_0, \varepsilon])$ olduğundan

$\| z \| = \sup_{\|x\|\leq 1} | z(x) |$ şeklindedir.

Tanım 3.8 X refleksif bir Banach uzayı ve $K = (T^*)^{-1}(B[f_0, \varepsilon])$ olsun. Yukarıdaki açıklamalara göre $\| z \| = d$ olacak şekilde $z \in K$ mevcuttur. Bu şekildeki bir vektöre f_0, ε ve T^* için bir minimal vektör denir.

Refleksif olmayan uzaylarda ise $\|y\| \leq 2d$ olacak şekilde bir $y \in K$ her zaman bulunabilir. Bu şekildeki bir y vektörüne f_0, ε ve T^* için bir 2- minimal vektör denir.

Tüm minimal vektörlerin kümesi $K \cap B[\,0, d\,]$ şeklindedir. Genel olarak bu küme boştan farklı olmayabilir. Yani $\|\, z \,\| = d$ olacak şekilde z vektörü her zaman bulunamayabilir. Eğer z bir minimal vektörse, $z \in K = (T^*)^{-1}(B[\,f_0, \varepsilon\,])$ olduğundan $T^* z \in B[\,f_0, \varepsilon\,]$ olur.

z, K daki minimal normun bir elemanı olduğundan $T^* z \in S[\,f_0, \varepsilon\,]$ olur. Çünkü $T^* z \in B[\,f_0, \varepsilon\,]$ dur ve böylece $\|\, T^* z - f_0 \,\| \leq \varepsilon$ olur. $z \in K$ olduğundan $z = (T^*)^{-1} f$ şeklindedir ve $\|\, z \,\| = d$ koşulunu sağlamaktadır.

$$\|\, z \,\| = \inf_{k \in K} \|\, k \,\| = d$$

olduğundan $T^* z \in S[\,f_0, \varepsilon\,]$ olur.

T^* operatörü bire-bir kabul edildiğinden

$$T^*(B[\,0, d\,]) \cap B[\,f_0, \varepsilon\,] = T^*(\,B[\,0, d\,] \cap K\,) \subseteq S[\,f_0, \varepsilon\,] \tag{3.3}$$

olur. Gerçekten, $K = (T^*)^{-1}(B[\,f_0, \varepsilon\,])$olduğundan

$$T^*(K) = T^*\,(T^*)^{-1}(B[\,f_0, \varepsilon\,]) = B[\,f_0, \varepsilon\,]$$

olur ve böylece

$$T^*(B[\,0, d\,]) \cap B[\,f_0, \varepsilon\,] = T^*(B[\,0, d\,]) \cap T^*(K) = T^*(\,B[\,0, d\,] \cap K\,)$$

sağlanır.

z bir minimal vektörse $z \in K = (T^*)^{-1}(B[\,f_0, \varepsilon\,])$ olduğundan $T^* z \in B[\,f_0, \varepsilon\,]$ ve böylece $T^* z \in S[\,f_0, \varepsilon\,]$ olur.

$B[\,0, d\,] \cap K$ tüm minimal vektörlerin kümesi olduğundan ve $T^* z \in S[\,f_0, \varepsilon\,]$ olduğundan

$$T^*(B[\,0, d\,]) \cap B[\,f_0, \varepsilon\,] = T^*(B[\,0, d\,]) \cap T^*(K) = T^*(\,B[\,0, d\,] \cap K\,) \subseteq S[\,f_0, \varepsilon\,]$$

ifadesi gerçeklenmiş olur.

Yardımcı Özellik 3.9 Yukarıda tanımlanan $T^*(B[0, d])$ ve $B(f_0, \varepsilon)$ kümeleri iki ayrık konveks kümelerdir.

İspat: $T^*(B[0, d])$ ve $B(f_0, \varepsilon)$ kümelerinin ayrık olduklarını görelim,

$t \in T^*(B[0, d])$ olsun. O zaman, $t = T^* f_1$ olacak şekilde $f_1 \in B[0, d]$ şeklindedir. Bu yüzden $\| f_1 \| \leq d$ olur.

Eğer $t \in B(f_0, \varepsilon)$ olsaydı $\| t - f_0 \| < \varepsilon$ olurdu. $t = T^* f_1$ idi, o zaman

$$\| T^* f_1 - f_0 \| < \varepsilon$$

olması mümkün değildir. Çünkü $\| f_0 \| > \varepsilon$ kabul etmiştik. O halde $t \in T^*(B[0, d])$ iken $t \in B(f_0, \varepsilon)$ olamaz.

O zaman $T^*(B[0, d])$ ve $B(f_0, \varepsilon)$ kümeleri ayrıktır. Bu kümelerin konveks olduğunu görelim.

$T^*(B[0, d]) = \left\{ T^* f : f \in B[0, d] \right\}$ şeklindedir.

$T^* f_1$, $T^* f_2 \in T^*(B[0, d])$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için $\lambda T^* f_1 + (1 - \lambda) T^* f_2 \in T^*(B[0, d])$ olmalıdır. Yani, $\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2 \in B[0, d]$ olmalıdır.

f_1, $f_2 \in B[0, d]$ olduğundan $\| f_1 \| \leq d$ ve $\| f_2 \| \leq d$ şeklindedir.

$$\begin{aligned} \| \lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2 \| &\leq \lambda \| f_1 \| + (1 - \lambda) . \| f_2 \| \\ &\leq \lambda d + (1 - \lambda) d = d \end{aligned}$$

sağlanır. O halde $T^*(B[0, d])$ konvekstir.

$B(f_0, \varepsilon)$ açık yuvarının konveks olduğunu görelim.

f_1, $f_2 \in B(f_0, \varepsilon)$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için $\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2 \in B(f_0, \varepsilon)$ olmalıdır, yani,

$$\| \lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2 - f_0 \| \leq \varepsilon$$

sağlanmalıdır.

f_1, $f_2 \in B(f_0, \varepsilon)$ olduğundan $\| f_1 - f_0 \| < \varepsilon$ ve $\| f_2 - f_0 \| < \varepsilon$ dur.

$$\| \lambda f_1 + (1-\lambda) f_2 - f_0 \| = \| \lambda f_1 - \lambda f_0 + \lambda f_0 + (1-\lambda) f_2 - f_0 \|$$

$$= \| \lambda (f_1 - f_0) + (1-\lambda) f_2 - (1-\lambda) f_0 \|$$

$$\leq \lambda \| f_1 - f_0 \| + (1-\lambda) \| f_2 - f_0 \|$$

$$< \lambda \varepsilon + (1-\lambda)\varepsilon = \varepsilon$$

O halde $B(f_0, \varepsilon)$ kümesi konvekstir.

$T^*(B[0, d])$ ve $B(f_0, \varepsilon)$ kümelerinden en az biri boştan farklı içe sahiptir. Yani en az bir tane iç noktaya sahiptir.

Teorem 3.10 A ve B iki ayrık boştan farklı kümeler olsun. Eğer iki kümeden birinin içi boştan farklıysa yani en az bir iç noktaya sahip ise bu kümeler sıfırdan farklı bir lineer fonksiyonel tarafından ayrılabilirler [15].

O zaman Yardımcı Özellik 3.9 ve Teorem 3.10 a göre $T^*(B[0, d])$ ve $B(f_0, \varepsilon)$ bu koşulları sağladığından sıfırdan farklı bir $\hat{f} \in X^{**}$ lineer fonksiyoneli tarafından ayrılabilirler. Yani, $\| \hat{f} \| = 1$ olacak şekilde $\hat{f}$ lineer fonksiyoneli ve $c > 0$ reel sayısı vardır ki $\hat{f}|_{T^*(B[0, d])} \leq c$ ve $\hat{f}|_{B(f_0, \varepsilon)} \geq c$ olur.

Tanım 3.11 Yukarıdaki açıklamalara göre $T^*(B[0, d])$ ve $B(f_0, \varepsilon)$ kümelerini ayıran $\hat{f}$ lineer fonksiyoneline f_0, ε ve T^* için bir minimal fonksiyonel denir.

Yardımcı Özellik 3.12 T operatörünün ikinci adjointi $T^{**} = \left(T^*\right)^*$, y bir 2- minimal vektör ve $\hat{f}$ bir minimal fonksiyonel olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur.

$$(T^{**} \hat{f})(y) \geq \frac{1}{2} \| T^{**} \hat{f} \| . \| y \| \tag{3.4}$$

İspat: Öncelikle, yukarıdaki açıklamalara göre $\hat{f}$ için $\hat{f}(f_0) \geq \varepsilon$ olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten, $\| f \| \leq 1$ koşulunu sağlayan her f için

$f_0 - \varepsilon f \in B[f_0, \varepsilon]$ dur. Çünkü,

$\| f_0 - \varepsilon f - f_0 \| = \| \varepsilon f \| = \varepsilon \| f \| \leq \varepsilon$

sağlanır. O zaman

$$\hat{f}\,(f_0 - \varepsilon f) \geq c$$

olur. $\hat{f}$ lineer olduğundan,

$$\hat{f}(f_0) - \hat{f}(\varepsilon f) \geq c$$

ve

$$\hat{f}(f_0) \geq c + \hat{f}(\varepsilon f)$$

olur. Buradan $\| f \| \leq 1$ için supremum alınırsa

$$\sup_{\|f\| \leq 1} \hat{f}(f_0) \geq c + \varepsilon \sup_{\|f\| \leq 1} |\hat{f}(f)|$$

olur.

$\sup\limits_{\|f\| \leq 1} |\hat{f}(f)| = \|\hat{f}\|$ ve $\sup\limits_{\|f\| \leq 1} \hat{f}(f_0) = \hat{f}(f_0)$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\hat{f}(f_0) \geq c + \varepsilon \|\hat{f}\| \geq \varepsilon$$

olur. Böylece $\hat{f}(f_0) \geq \varepsilon$ sağlanmış olur.

Buna ek olarak, $T^{**}\hat{f} = c$ hiper düzleminin $K = (T^*)^{-1}(B[f_0, \varepsilon])$ ve $B[0, d]$ kümelerini ayırdığını gösterelim.

$f \in B[0, d]$ için $T^* f \in T^*(B[0, d])$ olacağından ve $\hat{f}$ lineer fonksiyonelinin tanımından

$$\begin{aligned} (T^{**}\hat{f})(f) &= \hat{f}(T^* f) \\ &= (T^* f)(x) \\ &= f(Tx) \leq c \end{aligned}$$

elde edilir, $(x \in X)$.

$f \in K = (T^*)^{-1}(B[f_0, \varepsilon])$ için $T^* f \in B[f_0, \varepsilon]$ olacağından

$$(T^{**}\hat{f})(f) = \hat{f}\,(T^* f) = f(Tx) \geq c$$

olur. Böylece $\hat{f}\,|_{(T^*)^{-1}(B[f_0, \varepsilon])} \geq c$ ve $\hat{f}\,|_{B[0,d]} \leq c$ sağlanmış olur.

$\|f\| \leq 1$ koşulunu sağlayan her f için $fd \in B[0, d]$ dir. Gerçekten,

$\|fd\| = d\|f\| \leq d.1 = d$ sağlanır. O zaman $(T^{**}\hat{f})(fd) \leq c$ dir. Buradan

$$
\begin{aligned}
(T^{**}\hat{f})(fd) &= \hat{f}[T^{*}(fd)] \\
&= \hat{f}[T^{*}d(f)] \\
&= \hat{f}\, d(T^{*}f) \leq c
\end{aligned}
$$

ve böylece $\hat{f}(T^{*}f) \leq \dfrac{c}{d}$ olur. Burada $\|f\| \leq 1$ için supremum alınırsa

$$\sup_{\|f\|\leq 1} |\hat{f}(T^{*}f)| \leq \sup_{\|f\|\leq 1} \frac{c}{d}$$

$$\sup_{\|f\|\leq 1} |(T^{**}\hat{f})(f)| \leq \frac{c}{d}$$

$$\|T^{**}\hat{f}\| \leq \frac{c}{d} \tag{3.5}$$

elde edilir.

Diğer taraftan her $\delta > 0$ için $f \in K = (T^{*})^{-1}(B[f_0, \varepsilon])$ vardır ki $\|f\| \leq d + \delta$ olur. Buradan

$\dfrac{\|f\|}{d+\delta} \leq 1$ olur. O zaman

$$
\begin{aligned}
(T^{**}\hat{f})(f) &\geq c \\
&\geq c\,\frac{\|f\|}{d+\delta} \\
&= \frac{c}{d+\delta}\|f\|
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $\|f\| \leq 1$ için supremum alınırsa

$$\|T^{**}\hat{f}\| \geq \frac{c}{d+\delta} \tag{3.6}$$

olur. (3.5) ve (3.6) ifadesinden

$$\| T^{**}\hat{f} \| = \frac{c}{d} \tag{3.7}$$

elde edilir.

Her $f \in K = (T^*)^{-1}(B[f_0, \varepsilon])$ için $(T^{**}\hat{f})(f) \geq c$ olduğundan

$(T^{**}\hat{f})(f) \geq c = d\| T^{**}\hat{f} \|$

olur.

y 2- minimal vektör olduğundan $\| y \| \leq 2d$ ifadesi sağlanır.

$\| y \| \leq 2d$ ise $2d \geq \| y \|$ ve $d \geq \frac{1}{2}\| y \|$ olacağından,

$(T^{**}\hat{f})(y) \geq \frac{1}{2}\| T^{**}\hat{f} \|.\| y \|$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.13 X bir Banach uzayı, X^* onun topolojik duali, $T \in B(X)$ yarı- nilpotent operatör ve T^* onun adjointi olsun. Eğer $\{T^*\}^c$ bir yerelleştirme cebiriyse T^* ın hiper değişmez alt uzayı vardır.

İspat: $T \in B(X)$ olduğundan adjointi $T^*: X^* \to X^*$ yani $T^* \in B(X^*)$ olur. T^* operatörü bire- bir ve görüntüsü yoğun olsun, yani, $\overline{R(T^*)} = X^*$ alalım.

T^* operatörünün komutant kümesi olan $\{T^*\}^c$ şu şekilde tanımlanır:

$\{T^*\}^c = \{S \in B(X^*) : ST^* = T^*S\}$.

T operatörü yarı nilpotent olduğundan adjointi T^* da yarı nilpotenttir.

$0 \neq f_0 \in X^*$ için $\varepsilon \in (0, \| f_0 \|)$ ve $B = B[f_0, \varepsilon]$ olsun. $\varepsilon \in (0, \| f_0 \|)$ olduğundan

$0 < \varepsilon < \| f_0 \|$ olur.

$0 \notin B$ çünkü eğer $0 \in B$ olsaydı $\| f_0 - 0 \| = \| f_0 \| < \varepsilon$ olurdu fakat $\varepsilon < \| f_0 \|$ seçmiştik, bu nedenle $0 \notin B$.

Her n ≥ 1 için f_0, ε ve $\left(T^*\right)^n$ için 2- minimal vektör y_n ve bir minimal fonksiyonel $\hat{f}_n$ seçelim.

T^* yarı nilpotent olduğundan bir (y_{n_i}) alt dizisi vardır ki,

$$\frac{\| y_{n_i -1} \|}{\| y_{n_i} \|} \to 0 \tag{3.8}$$

olur. Gerçekten, aksi takdirde, bir $\delta > 0$ mevcut olurdu ki her n için

$$\frac{\| y_{n-1} \|}{\| y_n \|} > \delta$$

olurdu. Böylece;

$$\| y_1 \| \geq \delta \| y_2 \| \geq \ldots \geq \delta^n \| y_{n+1} \|$$

olurdu. $\left(T^*\right)^n (y_{n+1}) \in (T^*)^{-1}(B)$ olduğundan;

$$\| \left(T^*\right)^n y_{n+1} \| \geq d \geq \frac{\| y_1 \|}{2} \geq \frac{\delta^n}{2} \| y_{n+1} \| \tag{3.9}$$

olur. Buradan $\| \left(T^*\right)^n \| \geq \dfrac{\delta^n}{2}$ olur, bu da T^* operatörünün yarı- nilpotentliği ile çelişir.

Her i için $\| \hat{f}_{n_i} \| = 1$ olduğundan, Alaoğlu Teoremine göre $(\hat{f}_{n_i})$ dizisinin bir $g \in X^{**}$ elemanına zayıf* yakınsadığını düşünebiliriz. Yani, $\hat{f}_{n_i} \xrightarrow{w^*} g$ olsun.

Her n için $\hat{f}_n(f_0) \geq \varepsilon$ olduğundan $g(f_0) \geq \varepsilon$ olur. Özellikle, $g \neq 0$ dır.

$\left(\left(T^*\right)^{n_i -1} y_{n_i -1}\right)_{i=1}^{\infty}$ dizisini göz önüne alalım. Bu dizi B kümesinde olduğundan, $\left\{T^*\right\}^c$ kümesinde bir (K_i) dizisi bulabiliriz ki $\| K_i \| \leq 1$ ve $K_i \left(T^*\right)^{n_i -1}(y_{n_i -1})$ sıfırdan farklı bir $w \in X^*$ elemanına normda yakınsar, yani, $K_i \left(T^*\right)^{n_i -1}(y_{n_i -1}) \xrightarrow{\|\cdot\|} w$ olur. Çünkü teoremin başında $\left\{T^*\right\}^c$ nin bir yerelleştirme cebiri olduğunu kabul etmiştik. Yani, X^* uzayında sıfırı içermeyen bir $B = B[f_0, \varepsilon]$ kapalı yuvarı bulduk ki, B deki $(\left(T^*\right)^n y_n)$ dizisi için

$\left(\left(T^*\right)^{n_i-1} y_{n_i-1}\right)_{i=1}^{\infty}$ alt dizisi ve $\left\{T^*\right\}^c$ cebirinde $\| K_i \| \leq 1$ koşulunu sağlayan (K_i) dizisi vardır ki

$$K_i \left(T^*\right)^{n_i-1} (y_{n_i-1}) \xrightarrow{\|.\|} w \neq 0 \tag{3.10}$$

olur.

$$Y = \left\{T^*\right\}^c T^* w = \left\{S^* T^* w : S^* \in \left\{T^*\right\}^c\right\}$$

kümesini dikkate alalım. Y kümesi X^* uzayının bir lineer alt uzayıdır.

Y nin bir lineer alt uzay olduğunu ispatlamak için,

$S_1^* T^* w,\ S_2^* T^* w \in Y$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $\alpha S_1^* T^* w + \beta S_2^* T^* w \in Y$ olduğu gösterilmelidir.

Burada S_1^*, S_2^* ve T^* operatörlerinin lineer olduklarını göz önüne almalıyız.

$$\alpha S_1^* T^* w + \beta S_2^* T^* w = (\alpha S_1^*) T^* w + (\beta S_2^*) T^* w$$

$$= (\alpha S_1^* + \beta S_2^*) T^* w$$

Burada Y kümesinin tanımı gereği $\alpha S_1^* + \beta S_2^* \in \left\{T^*\right\}^c$ olmalıdır.

$S_1^* \in \left\{T^*\right\}^c$ olduğundan,

$S_1^* T^* = T^* S_1^*$ olur ve

$$(\alpha S_1^*) T^* = \alpha (S_1^* T^*)$$

$$= \alpha (T^* S_1^*)$$

$$= T^* (\alpha S_1^*)$$

elde edilir. Yani, $\alpha S_1^* \in \left\{T^*\right\}^c$ olur.

Benzer şekilde $\beta S_2^* \in \left\{T^*\right\}^c$ elde edilir. O halde

$$(\alpha S_1^* + \beta S_2^*) T^* = (\alpha S_1^*) T^* + (\beta S_2^*) T^*$$

$= \alpha\,(S_1^* T^*) + \beta\,(S_2^* T^*)$

$= T^*(\alpha\, S_1^*) + T^*(\beta\, S_2^*)$

$= T^*(\alpha\, S_1^* + \beta\, S_2^*)$

olur.

$(\alpha\, S_1^* + \beta\, S_2^*)\,T^* = T^*(\alpha\, S_1^* + \beta\, S_2^*)$ elde edildiğine göre $\alpha\, S_1^* + \beta\, S_2^* \in \{T^*\}^c$ dir. Böylece Y nin lineer alt uzay olduğu ispatlanmış olur.

Bunun yanı sıra Y kümesi $\{T^*\}^c$ altında değişmez kalır. Bunu ispatlamak için Y kümesinin $\{T^*\}^c$ kümesindeki her operatör altında değişmez kaldığını göstermeliyiz. Yani,

$\forall\, S^* \in \{T^*\}^c$ için $S^*(Y) \subseteq Y$ ifadesi sağlanmalıdır.

$S^* \in \{T^*\}^c$ alalım ve $S^*(S_1^* T^* w) \in S^*(Y)$ elemanını inceleyelim.

Hedefimiz $S^*(S_1^* T^* w) \in Y$ olduğunu göstermektir. Bunun için Y kümesinin tanımı gereği $S^* S_1^* \in \{T^*\}^c$ olmalıdır.

$S^* \in \{T^*\}^c$ olduğundan $S^* T^* = T^* S^*$ sağlanır. Ayrıca $S_1^* T^* w \in Y$ olduğundan $S_1^* \in \{T^*\}^c$ dir ve $S_1^* T^* = T^* S_1^*$ olur. S^* ve T^* operatörlerinin lineer olduklarını da göz önüne alarak;

$(S^* S_1^*)\,T^* = T^*\,(S^* S_1^*)$ olduğunu görelim.

$(S^* S_1^*)\,T^* = S^*(S_1^* T^*)$

$= S^*(T^* S_1^*)$

$= (S^* T^*)\,S_1^*$

$= (T^* S^*)\,S_1^*$

$= T^*(S^* S_1^*)$

Bu şekilde $S^* S_1^* \in \{T^*\}^c$ olduğunu yani, $S^*(S_1^* T^* w) = (S^* S_1^*) T^* w \in Y$ ifadesini elde ettik. O halde $\forall\, S^* \in \{T^*\}^c$ için $S^*(Y) \subseteq Y$ olur ki böylece Y kümesinin $\{T^*\}^c$ altında değişmez kaldığını söyleyebiliriz.

Y kümesi aşikar değildir çünkü T^* operatörü bire-birdir ve $0 \neq T^* w \in Y$ dir. $Y \subseteq$ Çek(g) olduğunu böylece $\overline{Y}$ nin bir T^* - hiper değişmez alt uzay olduğunu göstereceğiz.

$S^* \in \{T^*\}^c$ alalım. $g(S^* T^* w) = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$$(T^{**} \hat{f})(y) \geq \frac{1}{2} \| T^{**} \hat{f} \| . \| y \| \tag{3.11}$$

ifadesinden her i için $((T^{**})^{n_i} \hat{f}_{n_i})(y_{n_i}) \neq 0$ olur. O zaman,

$$X^* = \text{span}(y_{n_i}) \oplus \text{Çek}((T^{**})^{n_i} \hat{f}_{n_i})$$

olur. Buradan $S^* K_i(y_{n_i-1}) = \alpha_i(y_{n_i}) + r_i$ yazılabilir. Burada $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ve $r_i \in$ Çek$((T^{**})^{n_i} \hat{f}_{n_i})$ dir.

$\alpha_i \to 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten,

$$((T^{**})^{n_i} \hat{f}_{n_i})(S^* K_i(y_{n_i-1})) = \alpha_i\, ((T^{**})^{n_i} \hat{f}_{n_i})(y_{n_i}) \tag{3.12}$$

olur. (3.11) ve (3.12) yi birleştirirsek

$$|\, ((T^{**})^{n_i} \hat{f}_{n_i})(S^* K_i(y_{n_i-1}))\, | \geq \frac{|\alpha_i|}{2} \| (T^{**})^{n_i} \hat{f}_{n_i} \| . \| y_{n_i} \| \tag{3.13}$$

olur. Diğer taraftan,

$$|\, ((T^{**})^{n_i} \hat{f}_{n_i})(S^* K_i(y_{n_i-1}))\, | \leq \| (T^{**})^{n_i} \hat{f}_{n_i} \| . \| S^* \| . \| y_{n_i-1} \| \tag{3.14}$$

olur. (3.13) ve (3.14) den,

$$\frac{|\alpha_i|}{2} \| (T^{**})^{n_i} \hat{f}_{n_i} \| . \| y_{n_i} \| \leq \| (T^{**})^{n_i} \hat{f}_{n_i} \| . \| S^* \| . \| y_{n_i-1} \| \tag{3.15}$$

ve böylece,

$$|\alpha_i| \leq 2\|S^*\|.\frac{\|y_{n_i-1}\|}{\|y_{n_i}\|} \tag{3.16}$$

elde edilir.

$\frac{\|y_{n_i-1}\|}{\|y_{n_i}\|} \to 0$ şeklindeydi, o zaman,

$$|\alpha_i| \leq 2\|S^*\|.\frac{\|y_{n_i-1}\|}{\|y_{n_i}\|} \to 0 \tag{3.17}$$

olur.

(3.12) eşitliğinden,

$$|\hat{f}_{n_i}((T^*)^{n_i} S^* K_i(y_{n_i-1}))| = |\alpha_i \hat{f}_{n_i}((T^*)^{n_i}(y_{n_i}))|$$

$$\leq |\alpha_i|.\|\hat{f}_{n_i}\|.\|(T^*)^{n_i}(y_{n_i})\|$$

$$\leq |\alpha_i|.1.(\|f_0\| + \varepsilon) \to 0$$

olur. O zaman,

$$\hat{f}_{n_i}((T^*)^{n_i} S^* K_i(y_{n_i-1})) \to 0$$

sonucu çıkar.

Diğer taraftan, S^*, $K_i \in \{T^*\}^c$ olduğundan,

$$(T^*)^{n_i} S^* K_i(y_{n_i-1}) = S^* T^* K_i (T^*)^{n_i-1}(y_{n_i-1}) \to S^* T^* w \tag{3.18}$$

elde edilir. $(\hat{f}_{n_i})$ dizisi $g \in X^{**}$ elemanına zayıf* yakınsadığından,

$$\hat{f}_{n_i}((T^*)^{n_i} S^* K_i(y_{n_i-1})) \to g(S^* T^* w) \tag{3.19}$$

ve buradan,

$g(S^* T^* w) = 0$ olur. Böylece $Y \subseteq$ Çek(g) elde edilir ki, bu da $\overline{Y}$ nin bir T^*- hiper değişmez alt uzay olduğunu gösterir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 3.14 X Banach uzayı ve S $\subset$B(X) olsun. Her sıfırdan farklı z$\in$X için bir pozitif reel C = C(z) mevcutsa öyle ki, z den lineer bağımsız her x için, her y$\in$X ve her ε > 0 için A$\in$S mevcutsa öyle ki, $\| Ax - y \| \leq \varepsilon$ ve $\| Az \| \leq C. \| z \|$ oluyorsa S ye bir buçuk-geçişli cebir denir.

Teorem 3.15 X Banach uzayı olsun. $\{x_n\} \subset X$ ve $\{x_n^*\} \subset X^*$ dizileri ile X te $x_n \xrightarrow{w} 0$ ve X^* uzayında $x_n^* \xrightarrow{w} 0$ ifadeleri sağlansın. O zaman,

(1) S : $\ell_1 \to X$, $S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$,

(2) T: X $\to c_0$, $T(x) = (x_1^*(x), x_2^*(x), \ldots)$

operatörleri zayıf kompakttır [16].

Teorem 3.16 X, Y Banach uzayları ve T : X$\to$Y sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir [16].

(1) T bir Dunford- Pettis operatörüdür.

(2) T operatörü X in rölatif zayıf kompakt alt kümelerini Y nin norm total sınırlı alt kümelerine taşır.

(3) Her Z Banach uzayı ve her S : Z$\to$X zayıf kompakt operatörü için TS operatörü kompakttır.

(4) S : $\ell_1 \to X$ her zayıf kompakt operatörü için TS operatörü kompakttır.

Teorem 3.17 Bir X Banach uzayı için şu ifadeler denktir [16].

(1) X uzayı Dunford- Pettis özelliğine sahiptir.

(2) X uzayından herhangi bir Banach uzayına tanımlı her zayıf kompakt operatör, zayıf kompakt kümeleri norm kompakt kümelere eşleştirir.

(3) X uzayından herhangi bir Banach uzayına tanımlı her zayıf kompakt operatör bir Dunford- Pettis operatörüdür.

(4) X uzayından c_0 uzayına tanımlı her zayıf kompakt operatör bir Dunford- Pettis operatörüdür.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2): Y bir Banach uzayı olmak üzere $T : X \to Y$ bir zayıf kompakt operatör ve W X uzayının bir zayıf kompakt alt kümesi olsun. T(W) norm kapalıdır. O zaman T(W) nin kompakt olduğunu göstermek için T(W) deki her dizinin normda yakınsak alt dizisi olduğunu göstermek yeterlidir.

$\{x_n\} \subseteq W$ olsun. Bir alt diziye geçerek, $x_n \xrightarrow{w} x$ olduğunu farzedebiliriz. $\{Tx_n\}$ dizisinin Tx elemanına normda yakınsayan bir alt dizisi olduğunu iddia ediyoruz.

Her n için $f_n \in Y^*$ seçelim öyle ki $\| f_n \| = 1$ ve

$$\| T(x_n - x) \| \leq 2 | f_n (T(x_n - x)) | \tag{3.20}$$

sağlansın.

T nin adjoint operatörü $T^* : Y^* \to X^*$ de zayıf kompakt operatör olduğundan, $\{f_n\}$ dizisinin bir $\{f_{k_n}\}$ alt dizisi vardır öyle ki, $T^* f_{k_n} \xrightarrow{w} f$ ifadesi X^* uzayında sağlanır.

Diğer taraftan, X uzayının Dunford- Pettis özelliğinden

$$\lim_{n\to\infty} | T^* f_{k_n} (x_n - x) | = | f(0) | = 0 \tag{3.21}$$

olur. Böylece (3.20) ifadesinden

$$\lim_{n\to\infty} \| T(x_{k_n} - x) \| = 0 \tag{3.22}$$

sağlanır. Yani, $\{Tx_n\}$ dizisinin alt dizisi $\{Tx_{k_n}\}$ Tx elemanına normda yakınsar.

(2) $\Rightarrow$ (3): Teorem 3.16 dan elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (4): X uzayından herhangi bir Banach uzayına tanımlı her zayıf kompakt operatör bir Dunford- Pettis operatörü olduğundan, X ten c_0 uzayına tanımlı her zayıf kompakt operatör de bir Dunford- Pettis operatörü olacaktır.

(4) $\Rightarrow$ (1): X uzayında $x_n \xrightarrow{w} 0$ ve X^* uzayında $x_n^* \xrightarrow{w} 0$ olduğunu farz edelim.

$T(x) = (x_1^*(x), x_2^*(x), \ldots)$

şeklinde tanımlanan $T : X \to c_0$ operatörünü göz önüne alalım. Teorem3.15 den T operatörü zayıf kompakttır ve böylece hipotez gereği bir Dunford- Pettis operatörüdür. Özellikle, X uzayındaki $x_n \xrightarrow{w} 0$ ifadesi $\lim_{n\to\infty} \| Tx_n \| = 0$ eşitliğini gerektirir.

$| x_n^*(x_n) | \leq \| Tx_n \|$ eşitsizliğinden $\lim_{n\to\infty} x_n^*(x_n) = 0$ elde edilir. Böylece X uzayının Dunford- Pettis özelliğine sahip olduğunu söyleyebiliriz. İspat tamamlanmış olur.

Teorem 3.18 X, Y ve Z Banach uzayları olmak üzere $S : X \to Y$, $T : Y \to Z$ zayıf kompakt operatörler olsun. Eğer Y uzayı Dunford- Pettis özelliğine sahip ise TS bir kompakt operatördür [16].

İspat: Teorem 3.17 den, Y uzayı Dunford- Pettis özelliğine sahip olduğundan, Y uzayından herhangi bir Banach uzayına tanımlı her zayıf kompakt operatör bir Dunford- Pettis operatörüdür. O zaman T bir Dunford- Pettis operatörüdür. Teorem 3.16 dan, $S : X \to Y$ zayıf kompakt operatörü için TS kompakttır.

Sonuç 3.19 (Dunford- Pettis) T operatörü AL veya AM uzayı üzerinde bir zayıf kompakt operatör ise T^2 bir kompakt operatördür [16].

Teorem 3.20 X bir reel Banach uzayı olsun. Kompakt bir operatör içeren her bir buçuk- geçişli $A \subset B(X)$ alt cebiri zayıf operatör topolojisine göre B(X) te yoğundur, yani $\overline{A}^{WOT} = B(X)$ olur [13].

Sonuç 3.21 X bir AL veya AM uzayı olsun. O zaman B(X) in bir zayıf kompakt operatör içeren her bir buçuk- geçişli A alt cebiri zayıf operatör topolojisine göre B(X) te yoğundur, yani $\overline{A}^{WOT} = B(X)$ olur.

İspat: A bir buçuk- geçişli bir cebir ve T operatörü A cebirinde zayıf kompakt bir operatör olsun. Sonuç 3.19 a göre T^2 bir kompakt operatördür. O halde A cebiri bir kompakt operatör içerdiğinden Teorem 3.20 den $A \subset B(X)$ alt cebiri zayıf operatör topolojisine göre B(X) te yoğundur, yani $\overline{A}^{WOT} = B(X)$ olur.

Teorem 3.22: X bir Banach uzayı olsun. Eğer K, X uzayının kompakt bir alt kümesi ise o zaman co(K) kümesi de kompakttır [12].

İspat: $\overline{co}(K)$ kümesinin total sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir.

$\varepsilon > 0$ olsun ve K kümesinde $x_1,...,x_n$ elemanlarını seçelim ki

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j;\frac{\varepsilon}{4})$$

sağlansın. C = $co\{x_1,...,x_n\}$ olsun. C kümesi kompakttır o halde $y_1,...,y_m \in C$ vektörleri vardır ki,

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(y_i;\frac{\varepsilon}{4})$$

olur. Eğer $w \in \overline{co}(K)$ ise bir $z \in co(K)$ vardır ki, $\| w - z \| < \frac{\varepsilon}{4}$ olur. Böylece $k_p \in K$,

$\alpha_p \geq 0$ ve $\sum \alpha_p = 1$ için $z = \sum_{p=1}^{\ell} \alpha_p k_p$ olacaktır.

Her k_p için $\| k_p - x_{j(p)} \| < \frac{\varepsilon}{4}$ olacak şekilde bir $x_{j(p)}$ elemanı vardır. Bu nedenle,

$$\| z - \sum_{p=1}^{\ell} \alpha_p x_{j(p)} \| = \| \sum_{p=1}^{\ell} \alpha_p \ (k_p - x_{j(p)}) \|$$

$$\leq \sum_{p=1}^{\ell} \alpha_p \| k_p - x_{j(p)} \| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$\sum_p \alpha_p x_{j(p)} \in C$ olduğundan,

$$\| \sum_p \alpha_p x_{j(p)} - y_i \| < \frac{\varepsilon}{4}$$

olacak şekilde bir y_i vardır. Üçgen eşitsizliği gösterir ki,

$\overline{co}(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(y_i;\frac{\varepsilon}{4})$ sağlanır ve böylece $\overline{co}(K)$ kümesi total sınırlıdır.

Teorem 3.23 (Tyconoff Sabit Nokta Teoremi) V bir yerel konveks topolojik vektör uzayı olsun. Boştan farklı kompakt ve konveks $X \subset V$ için $f : X \to X$ sürekli fonksiyonunun sabit noktası vardır.

Yardımcı Teorem 3.24 X bir reel veya kompleks Banach uzayı ve $A \subset B(X)$ alt cebiri için duali $A^* \subset B(X^*)$ geçişli bir cebir olsun. O halde sıfırdan farklı her kompakt K operatörü için bir $A \in A^*$ operatörü vardır ki AK kompakt operatörü sıfırdan farklı bir sabit noktaya sahiptir, yani, $0 \neq f \in X^*$ için $(AK)f = f$ olur.

İspat: $A^* \subset B(X^*)$ geçişli bir cebir ve K kompakt bir operatör olsun. $\| K \| = 1$ olduğunu düşünebiliriz.

Bir $f_0 \in X^*$ seçelim öyle ki $\| K f_0 \| > 1$ olsun. f_0 merkezli kapalı birim yuvara da U_0 diyelim.

X^* uzayındaki norm tanımına göre $\| f - f_0 \| = \sup_{\|x\| \le 1} |(f - f_0)x|$ olacağından,

$$U_0 = \left\{ f \in X^* : \sup_{\|x\| \le 1} |(f - f_0)x| \le 1 \right\}$$

şeklindedir.

$0 \notin U_0$ çünkü eğer $0 \in U_0$ olsaydı, $\| 0 - f_0 \| = \| f_0 \| \le 1$ olurdu. Fakat biz başlangıçta $\| K f_0 \| > 1$ ve $\| K \| = 1$ olduğunu kabul etmiştik.

$1 < \| K f_0 \| \le \| K \| . \| f_0 \| = \| f_0 \|$

Buradan $1 < \| f_0 \|$ sonucuna ulaşılır. O halde $\| f_0 \| \le 1$ ifadesi bir çelişkidir. Böylece $0 \notin U_0$ diyebiliriz. Buradan yola çıkarak $0 \notin \overline{K(U_0)}$ diyebiliriz.

A^* bir cebir olduğundan $\overline{A^* f}$ her $f \in X^*$ için A^*- değişmezdir. Başka bir deyişle $\overline{A^* f}$ kapalı kümesi A^* cebirindeki her operatörün altında değişmez kalır.

Her $f \neq 0$ için $\overline{A^* f} \neq \{0\}$ olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten, eğer bir $f \neq 0$ için $\overline{A^* f} = \{0\}$ olsaydı, o zaman aşikar olmayan kapalı alt uzay $\{\lambda f : \lambda \text{ skaler}\}$, A^*- değişmez olurdu fakat bu da hipoteze ters düşer çünkü A^* cebiri geçişlidir yani cebirdeki tüm operatörlerin ortak olarak değişmez bıraktığı aşikar olmayan kapalı bir alt uzay yoktur. O halde her $f \neq 0$ için $\overline{A^* f} = X^*$ olur.

Her $f \in \overline{K(U_0)}$ için bir $A \in A^*$ vardır ki, $\| Af - f_0 \| < 1$ olur. O zaman açık kümelerin ailesi olan

$\left\{ f \in X^* : \| Af - f_0 \| < 1 \right\}_{A \in A^*}$

kümesi $\overline{K(U_0)}$ kümesinin bir açık örtüsüdür. Yani,

$$\overline{K(U_0)} \subseteq \bigcup_{A \in A^*} \left\{ f \in X^* : \| Af - f_0 \| < 1 \right\} \tag{3.23}$$

olur. K kompakt bir operatör olduğundan U_0 sınırlı kümesinin K altındaki görüntüsünün kapanışı da kompakttır, yani $\overline{K(U_0)}$ kümesi de kompakttır. Kompakt küme tanımından her açık alt örtüsünün sonlu bir alt örtüsü olduğunu bildiğimizden,

$A_1, A_2, ..., A_m \in A^*$ operatörleri vardır ki,

$$\overline{K(U_0)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \left\{ f \in X^* : \| A_i f - f_0 \| < 1 \right\} \tag{3.24}$$

sağlanır.

Sonrasında her i için $f_i : X^* \to [0,\infty)$ sürekli fonksiyonunu

$f_i(z) = \max\left\{0, 1 - \| A_i z - f_0 \|\right\}$

şeklinde tanımlayalım.

$f_i(z) > 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\| A_i z - f_0 \| < 1$ olmasıdır.

(3.24) ifadesinden her $z \in \overline{K(U_0)}$ için

$$f(z) = \sum_{i=1}^{m} f_i(z) > 0 \tag{3.25}$$

olmaktadır ve böylece $g_i(z) = \dfrac{f_i(z)}{f(z)}$ fonksiyoneli $\overline{K(U_0)}$ kümesi üzerinde her $z \in \overline{K(U_0)}$ için $\sum_{i=1}^{m} g_i(z) = 1$ koşulunu sağlayan ve negatif olmayan bir fonksiyoneldir.

Özellikle her $f \in U_0$ için $\sum_{i=1}^{m} g_i(Kf) = 1$ olur.

Şimdi $\phi : U_0 \rightarrow X^*$ fonksiyonunu

$$\phi(f) = \sum_{i=1}^{m} g_i(Kf) A_i Kf$$

şeklinde tanımlayalım. $f \in U_0$ ve $g_i(Kf) > 0$ olduğundan $A_i Kf \in U_0$ olur ve U_0 da konveks bir küme olduğundan $\phi(U_0) \subseteq U_0$ olur.

$\phi(f)$ ifadesi de $A_1Kf, A_2Kf, \ldots, A_mKf$ vektörlerinin bir konveks kombinasyonu olduğundan ve $A_iKf \in A_iK(U_0)$ olduğundan $\phi(f)$, $C = \overline{co}\,[\bigcup_{i=1}^{m} A_iK(U_0)]$ kümesine aittir. Bu küme norm sınırlı bir kümedir ve aynı zamanda A_iK operatörleri her i için kompakt olduğundan Teorem 3.22 ye göre C kompakt bir kümedir. Böylece,

$$\phi(U_0) \subseteq C \cap U_0$$

kümesi de X^* uzayının boştan farklı ve konveks alt kümesidir. Ayrıca kompakt bir kümenin kapalı bir alt kümesi olduğundan kompakttır.

Tyconoff Sabit Nokta Teoremine göre

$$\phi : C \cap U_0 \rightarrow C \cap U_0$$

fonksiyonu sabit bir noktaya sahiptir. Bu vektöre u diyelim.

$u \in U_0$ olduğundan ve $0 \notin U_0$ olduğunu bildiğimizden $u \neq 0$ diyebiliriz.

Son olarak,

$$A = \sum_{i=1}^{m} g_i(Ku) A_i \in A^*$$

operatörünü gözününe alalım.

$$AKu = \sum_{i=1}^{m} g_i(Ku) A_i Ku = \phi(u) = u \qquad (3.26)$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Yardımcı Teorem 3.25 X bir reel Banach uzayı olsun. K da X uzayı üzerinde sıfırdan farklı sabit vektöre sahip bir kompakt operatör olsun. O zaman K ile üretilen B(X) in düzgün kapalı alt cebiri sonlu ranklı idempotent operatöre sahiptir [13].

Önerme 3.26 X bir Banach uzayı ve $A \subset L(X)$ bir buçuk- geçişli bir altcebir ise o zaman A nın komutantı A^c aşikardır [13].

İspat: A bir buçuk- geçişli bir cebir olsun fakat birim operatörün bir katı olmayan bir $S \in A^c$ mevcut olduğunu varsayalım. O zaman, sıfırdan farklı bir $z \in X$ bulabiliriz ki Sz, z elemanının bir katı değildir. x = Sz diyelim. Bir buçuk- geçişli cebirin tanımındaki C = C(z) olsun.

$\| y \| > C\| S \|.\| z \|$ olacak şekilde $y \notin R(S)$ seçelim. A nın bir buçuk- geçişliliğinden, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\| A_n x - y \| \leq \frac{1}{n}$$

ve

$$\| A_n z \| \leq C\| z \|$$

olacak şekilde $A_n \in A$ vardır. Buradan, $A_n x \to y$ elde edilir. Böylece

$$\| A_n x \| \to \| y \|$$

olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \| A_n x \| &= \| A_n Sz \| \\ &= \| S A_n z \| \\ &\leq \| S \|. C\| z \| \end{aligned}$$

olur ve böylece

$$\| y \| \leq C\| S \|.\| z \|$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir.

Önerme 3.27 A cebiri $M_n(\mathbb{R})$ uzayının bir alt cebiri olsun. Eğer A bir buçuk- geçişli bir cebirse $A = M_n(\mathbb{R})$ olur [13].

İspat: A bir buçuk- geçişli cebir olduğundan Önerme 3.26 dan A^c aşikardır. Böylece $A = A^{cc} = M_n(\mathbb{R})$ olur.

Yardımcı Teorem 3.28 S kompakt operatörlerin düzgün kapalı ve pozitif reel sayılarla çarpım altında kapalı olan bir yarı grubu olsun. Eğer S, yarı nilpotent olmayan bir operatöre sahipse o zaman S, sıfırdan farklı idempotent veya nilpotent olan sonlu ranklı bir operatöre sahiptir [17].

Teorem 3.29 X bir reel Banach uzayı, X^* topolojik duali ve bir $A \subset B(X)$ alt cebiri için $A^* \subset B(X^*)$ bir kompakt operatör içeren bir buçuk-geçişli dual cebir olsun. O zaman A^* $B(X^*)$ uzayında yoğundur, yani $\overline{A^*}^{WOT} = B(X^*)$ olur.

İspat: Genelliği bozmaksızın A^* cebirinin düzgün kapalı olduğunu düşünebiliriz. Yardımcı Teorem 3.24 den, bir $K \in A^*$ kompakt operatörü vardır ki K sıfırdan farklı bir sabit vektöre sahiptir. Yine Yardımcı Teorem 3.25 den, A^* cebiri sonlu ranklı bir idempotent P operatörüne sahiptir.

$Y = R(P)$ olsun. Yani, P nin görüntüsü Y olsun. O halde Y nin boyutu sonludur, yani,

$Boy(Y) < \infty$ olur.

PA^*P kısıtlanış cebirinin Y de bir buçuk- geçişli olduğunu göstereceğiz. Gerçekten,

$z \in Y$ aldığımızda, her f, $g \in X^*$ için bir C vardır öyle ki, f ve z lineer bağımsızdır ve her $\varepsilon > 0$ için bir $A \in A^*$ operatörü vardır ki,

$\| Af - g \| < \varepsilon$ ve

$\| Az \| \leq C.\| z \|$

olur. Özellikle f, $g \in Y$ ise,

$$\| PA^*Pf - g \| = \| P(A^*f - g) \| \leq \| P \| \varepsilon \qquad (3.27)$$

ve

$$\| PA^*Pz \| \leq \| P \|.C.\| z \| \qquad (3.28)$$

elde edilir.

Önerme 3.27 ye göre PA^*P nin kısıtlanışı B(Y) nin tamamıdır. O zaman PA^*P ve böylelikle A^* rankı bir olan bir operatöre sahiptir. O halde Yardımcı Teorem 3.28 den A^* cebiri sonlu ranklı tüm operatörlere sahiptir ve böylece A^*, $B(X^*)$ uzayında yoğundur, yani $\overline{A^*}^{WOT} = B(X^*)$ olur.

BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada bir X Banach uzayı üzerindeki geçişli, bir buçuk- geçişli ve yerelleştirme operatör cebirleri incelendi.

T operatörünün komutant kümesi $\{T\}^c$ nin yerelleştirme cebiri olması ile T nin hiper değişmez alt uzaya sahip olması arasındaki ilişki araştırıldı. $\{T\}^c$ nin yerelleştirme cebiri olduğu zaman T nin hiperdeğişmez bir alt uzaya sahip olduğu gerçeğinden yola çıkarak ve minimal vektörler metodu kullanılarak T nin adjoint operatörü T^* için de benzer sonuçlar elde edildi. $\{T^*\}^c$ nin yerelleştirme cebiri olması durumunda T^* operatörünün de hiper değişmez alt uzaya sahip olduğu gösterildi.

Buna ek olarak B(X) in bir A alt cebiri için $\overline{A}^{WOT} = B(X)$ ifadesini sağlaması için gereken koşullar üzerinde duruldu. Kompakt bir operatör içeren her bir buçuk- geçişli $A \subset B(X)$ alt cebirinin zayıf operatör topolojisine göre B(X) te yoğun olduğundan yani $\overline{A}^{WOT} = B(X)$ ifadesini gerçeklediğinden, X uzayının bir AL veya AM uzayı olması durumunda zayıf kompakt bir operatör içeren bir buçuk- geçişli A cebirinin de bu koşulu sağladığı elde edildi.

Ayrıca, X^* X uzayının topolojik duali olmak üzere, A nın dual cebiri $A^* \subset B(X^*)$ için de bu durum ile ilgili sonuçlar elde edildi. Özellikle, X reel bir Banach uzayı olmak üzere bir buçuk- geçişli A^* cebirinin de $\overline{A^*}^{WOT} = B(X^*)$ koşulunu gerçeklediği gösterildi.

KAYNAKLAR

[1] Lomonosov, V.I., (1973). “ Invariant Subspaces for Operators Commuting with Compact Operators ”, Funktsional. Anal. I Prilozhen, 7:55-56 (Russian); Functional Anal. Apll., 7:213-214 (English).

[2] Hooker, N.D., (1981). “Lomonosov’s Hyperinvariant Subspace Theorem for Real Spaces”, Math. Proc. Cambridge Philos Soc., 89(1):129-133.

[3] Enflo, P., (1975-1976). “On the Invariant Subspace Problem in Banach Spaces”, Seminaire D’Analyse Fonctionnelle Ecole Polytechnique, 14-15:1-6.

[4] Read, C.J., (1984). “A Solution to the Invariant Subspace Problem”, Bull. London Math. Soc., 16(4):337-401.

[5] Yood, B., (1949). “Additive Groups and Linear Manifolds of Transformations Between Banach Spaces”, Amer. J. Math., 71:663-677.

[6] Rickart, C.E., (1950). “The Uniqueness of Norm Problem in Banach Algebras”, Annals of Mathematics, 51(3):615-628.

[7] Troitsky, V.G., (2004). “Minimal Vectors in Arbitrary Banach Spaces”, Proc. Amer. Math. Soc., 132(4):1177-1180.

[8] Ansari, S. ve Enflo, P., (1998). “Extremal Vectors and Invariant Subspaces”, Trans. Amer. Math. Soc., 350(2):539-558.

[9] Androulakis, G., (2003). “A Note on the Method of Minimal Vectors”, Contem. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 321:29-36.

[10] Gök, Ö., (2002). Fonksiyonel Analize Giriş, 3. Baskı, YTÜ Yayınları, İstanbul.

[11] Rynne, B.P. ve Youngson, M.A., (2008). Linear Functional Analysis, Springer – Verlag, London,.

[12] Conway, J.B., (1990). A Course in Functional Analysis, Second Edition, Springer –Verlag, New York.

[13] Lomonosov, V.I., Radjavi, H. ve Troitsky, V.G., (2008). “Sesquitransitive and Localizing Operator Algebras”, Integr. Equ. Oper. Theory, 60:405-418.

[14] Giles, J.R., (2000). Introduction to the Analysis of Normed Linear Spaces, Cambridge University Press, Cambridge.

[15] Aliprantis, C.D. ve Border, K.C., (1999). Infinite Dimensional Analysis, A Hitchiker’s Guide, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin.

[16] Aliprantis, C.D. ve Burkinshaw, O., (1985). Positive Operators, Academic Press, Orlando, London.

[17] Radjavi, H. ve Rosenthal, P., (2000). Simultaneous Triangularization, Springer - Verlag, New York.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Elif DEMİR
Doğum Tarihi ve Yeri	: 23.11.1981 İstanbul
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: edemirbilek@yahoo.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Matematik	YTÜ	2006
Lisans	Matematik	YTÜ	2004
Lise	Fen - Matematik	Pertevniyal Lisesi	1999

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	**Firma/Kurum**	**Görevi**
2005 – devam ediyor	YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü	Araştırma Görevlisi
2003- 2004	Pertevniyal Eğitim Vakfı Dershanesi	Matematik Öğretmeni

YAYINLARI

Makale

1. Ömer GÖK, Elif DEMİR	"On Transitive and Localizing Operator Algebras" International Mathematical Forum
2. Elif DEMİR	" On Transitive and Quasi- Localizing Operator Algebras" International Journal Of Contemporary Mathematical Sciences

Bildiri

1. ICAAA	International Conference on Applied Analysis and Algebra, 2011