T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SABİT NOKTA TEORİSİ VE SEZGİSEL FUZZY NORMLU UZAYLARDA BAZI UYGULAMALARI

MÜZEYYEN ERTÜRK

DOKTORA TEZİ
MATEMETİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
PROF. DR. VATAN KARAKAYA

İSTANBUL, 2014

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SABİT NOKTA TEORİSİ VE SEZGİSEL FUZZY NORMLU UZAYLARDA BAZI UYGULAMALARI

Müzeyyen ERTÜRK tarafından hazırlanan tez çalışması ??.??.2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Yıldız Teknik Üniversitesi

Eş Danışman

Prof. Dr. Mohammad Mursaleen

Aligarh İslam Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ

İstanbul Ticaret Üniversitesi ______________________

Prof.Dr. Ömer GÖK

Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

Prof.Dr. Metin BAŞARIR

Sakarya Üniversitesi ______________________

Doç.Dr. Bayram Ali Ersoy

Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

Bu çalışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'nün 2012-07-03-DOP03 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Akademik hayatımızda bize danışman olmanın yanısıra bir ideale sahip olmayı ve o idealin peşinde koşmayı öğreten değerli hocam Sayın Prof. Dr. Vatan KARAKAYA'ya sonsuz teşekkür ederim.

Tez izleme komitesinde bulunan Sayın Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ ve Sayın Prof. Dr. Ömer GÖK'e teşekkür ederim. Tez savunma sınavı jüri üyeliğini kabul eden Sayın Prof.Dr. Ekrem SAVAŞ, Sayın Prof.Dr. Ömer GÖK, Sayın Prof.Dr. Metin BAŞARIR ve Sayın Doç.Dr. Bayram Ali ERSOY'a teşekkür ederim.

Doktora tezimi maddi anlamda destekleyen YTÜ Bilimsel Araştırmalar Proje Koordinatörlüğü'ne teşekkür ederim.

Bana yeni ufuklar açan, hayal etmeyi öğreten, beni maddi ve manevi anlamda büyüten ve okutan, tanıdığım en cesur kadın olan anneanneme ve fedakâr anneme hususi teşekkür ederim.

Hep yanımda olan aileme teşekkür ederim.

Hayatımda güzel izler bırakan herkese, çok sıcak bir ortamı paylaştığım mesai arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Hayatımın her anına güzellik katan, doktora çalışmaları boyunca desteği ve anlayışıyla bana yardımcı olan sevgili yol ve hayat arkadaşım Ali Serol ERTÜRK'e teşekkür ederim.

Ocak, 2014

Müzeyyen ERTÜRK

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{+}$	0 dahil pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$*$	t-norm
$\Diamond$	t-conorm
(X,d)	X metrik uzayı
$(X,\\|.\\|)$	X normlu uzayı
$\varnothing$	Boş küme
$\ll$	Kısmi sıralama bağıntısı
$(X,\ll)$	Kısmi sıralı küme
$F(f)$	f dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$F_{\varepsilon}(f)$	f dönüşümünün approximate sabit noktalarının kümesi
$F_{\varepsilon}^{(\mu,\nu)}(f)$	f dönüşümünün sezgisel fuzzy approximate sabit noktalarının kümesi

ÖZET

SABİT NOKTA TEORİSİ VE SEZGİSEL FUZZY NORMLU UZAYLARDA BAZI UYGULAMALARI

Müzeyyen ERTÜRK

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Eş Danışman: Prof. Dr. Mohammad MURSALEEN

İkili sabit nokta teoremleri sabit nokta teorisinde önemli bir yer tutar ve uygulamalı matematikte periyodik sınır değer probleminin çözümünün varlığını ve tekliğini göstermede kullanılır. Bu tezde ilk olarak keyfi bir n pozitif tam sayısı için ikili sabit nokta ve ikili çakışma noktasının genelleştirmeleri olan n-li sabit nokta ve n-li çakışma noktası kavramları verildi. Bu kavramların varlığına ve tekliğine ilişkin teoremler kısmi sıralı tam metrik uzayda ispatlandı. Ardından n-li sabit nokta teoremleri kısmi sıralı tam sezgisel fuzzy normlu uzaylarda çalışıldı. Ayrıca bir fonksiyonun ve bir kümenin approximate sabit nokta özelliği sezgisel fuzzy normlu uzaylarda tanımlandı. Sabit nokta teorisinde kullanılan bazı dönüşümlerin sezgisel fuzzy versiyonu verildi ve bu dönüşümlerin approximate sabit nokta özelliğine sahip olup olmadığı araştırıldı.

Anahtar Kelimeler: n-li sabit nokta, n-li çakışma noktası, sezgisel fuzzy normlu uzay, sezgisel fuzzy approximate sabit nokta özelliği

ABSTRACT

FIXED POINT THEORY AND SOME OF ITS APPLICATIONS IN INTUITIONISTIC FUZZY NORMED SPACES

Müzeyyen ERTÜRK

Department of Mathematics

PhD. Thesis

Adviser: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Co-Adviser: Prof. Dr. Mohammad MURSALEEN

Coupled fixed point theorems have an important role in the fixed point theory and are used to show existence and uniqueness of solution of periodic boundary value problem in applied mathematics. In this thesis, firstly, for an arbitrary positive integer it was given the concepts of n-tuplet fixed point and n-tuplet coincidence point which are the generalization of coupled fixed point and coupled coincidence point. Theorems related with existence and uniqueness of these concepts in partially ordered complete metric space were proven. After, n-tuplet fixed point theorems were studied in partially ordered complete intuitionistic fuzzy normed space. Also, approximate fixed point property of a function and a set was defined in intuitionistic fuzzy normed space. Intuitionistic fuzzy version of class of maps used in fixed point theory was given and it was researched whether these maps have approximate fixed point property or not.

Keywords: n-tuplet fixed point, n-tuplet coincidence point, intuitionistic fuzzy normed space, intuitionistic fuzzy approximate fixed point property

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

İnsanoğlu kendi bakış açısına göre dış dünyaya hükmetme eğilimindedir. Bu amacını gerçekleştirmek için çeşitli araç ve yöntemler kullanır. Matematik bu araçlardan biridir. Diğer çoğu bilim dalında olduğu gibi matematik de “Bir şey ya A-dır veya A-olmayandır, üçüncü bir durum düşünülemez.” kesinliğine dayanan Aristo mantığının güdümünde gelişmiştir. Ancak dış dünyadan veri elde etmek ve bu verileri bir kesinlik içerisinde modellemek her zaman çok sağlıklı bir çıkarım yapmamıza olanak vermez. Çünkü hayat, siyah-beyaz, artı-eksi, 0-1 olarak net bir şekilde ayırt edilmeyecek kadar karmaşık olaylarla doludur.

1965 yılında, gerçek dünyadaki karmaşık olayları matematiksel olarak ifade etmede yetersiz kalan Aristo mantığına alternatif olarak Zadeh [1], fuzzy mantığı ve fuzzy mantık kurallarını kullanan fuzzy küme teorisini ortaya attı. Karmaşıklığın veya belirsizliğin matematiksel olarak formülleştirilmesine olanak sağlayan bu mantık “bir şey ya A-dır veya A-olmayandır” ikilemine karşın “bir şey belli bir dereceye kadar A olabilir” bakış açısını getirmiştir.

Önceleri Aristo mantığını temel alan batı tarafından dışlanan bu mantık, doğuda teknolojiye başarıyla uygulanmasının ardından ilgi görmüştür. İlk olarak bir buhar makinesinde, ardından bir çimento fabrikasında sıcaklığın kontrolünde fuzzy mantık kullanılmıştır. Şimdilerde günlük hayatımıza iyice nüfuz eden cep telefonu, fotokopi makinesi, beyaz eşya, klima, asansör, trafik ışıkları gibi birçok teknolojik araçta fuzzy mantık kullanılmaktadır.

Fuzzy mantığın temel kavramı fuzzy kümelerdir. Aristo mantığına göre bir eleman bir kümenin elemanıdır ya da değildir. Kümenin elemanı olma durumu 1, kümenin elemanı olmama durumu 0 ile temsil edilir. Fuzzy mantığın getirdiği bakış açısıyla artık bir eleman bir kümenin belirli bir dereceye kadar elemanı olabilmektedir. Yani [0,1] aralığındaki sonsuz değer, elemanın üye olma derecesini belirlemektedir.

Bilime yeni bir soluk getiren bu çok değerli mantık, Atanassov [2] tarafından sezgisel fuzzy adıyla genelleştirildi. Fuzzy mantık, bir özelliğin sağlanmasına göre derecelendirmeyi yaparken sezgisel fuzzy mantık, **özelliğin hem sağlanmasını hem de sağlanmamasını derecelendirir**. Yani bu mantıkta, "bir şey belli bir dereceye kadar A-dır ve belli bir dereceye kadar A-olmayandır".

Sezgisel fuzzy mantığın getirdiği bakış açısı matematiğin birçok alanında uygulandığı gibi fonksiyonel analizde de kendine yer bulmuştur. Bilindiği gibi, matematikte boştan farklı herhangi bir kümenin iki elemanı arasındaki uzaklığa metrik denir. 2004 yılında Park [3] fuzzy kümelerde birer işlemci olan t-norm ve t-conorm yardımıyla sezgisel fuzzy metrik uzayı tanıtmıştır. Park'ın bu çalışmasında metrik olgusu sezgisel fuzzy mantıkla boştan faklı bir kümenin iki elemanının birbirine yakın olma derecesi ve birbirine yakın olmama derecesi olarak anlam bulmuştur. Ardından Saadati ve Park [4] sezgisel fuzzy normlu uzayı tanıtmışlardır. Bu çalışmalarda sezgisel fuzzy metrik ve normlu uzaylarda yakınsaklık, Cauchy dizisi, tam olma gibi birçok temel kavramın tanımı verilmiştir. Bu makaleler fonksiyonel analizde ele alınan birçok konunun sezgisel fuzzy uzaylarda da çalışılabilirliği üzerine fikir vermiş ve sayısız eser literatüre kazandırılmıştır (bkz. [5-14]).

Fonksiyonel analizde dikkat çeken bir alan olan sabit nokta teorisi sezgisel fuzzy ve fuzzy mantığın uygulandığı alanlardan biridir. Bir adi diferansiyel denklemin çözümünün varlığı ve tekliği üzerine inşa edilen bu alan matematikte ortaya çıkan problemlerin çözümünde kullanılmasının yanında tıp, ekonomi, fizik gibi bilimin birçok alanında uygulama alanı bulmuştur. Sezgisel fuzzy ve sabit nokta teorisi alanlarının zenginliğinden dolayı birçok çalışma ortaya konmuştur (bkz. [15-23]).

Sabit nokta teorisindeki temel teoremlerden biri Banach contraction teoremidir [24]. Bu teorem tam metrik uzaydaki bir contraction dönüşümünün bir tek sabit noktası olduğunu ifade eder. Birçok yazar Banach contraction teoreminin genelleştirmeleri üzerine çalıştı. Tam metrik uzayı değiştirerek veya dönüşümün contraction şartını genişleterek bu genelleştirmeler yapıldı (bkz. [25-31]). Kısmi sıralı tam metrik uzaydaki genelleştirmesi Ran ve Reurings [32] tarafından daha zayıf bir şartla verildi. Ran ve Reurings'in vermiş oldukları teoremde contraction şartı sadece tam metrik uzaydaki kısmi sıralamaya göre karşılaştırılabilen elemanlar için sağlanır. Bu çalışmayı temel alarak bazı sabit nokta teoremleri birçok yazar tarafından elde edildi (bkz. [33-37]). Bhaskar ve Lakshmikantham [38] kısmi sıralı metrik uzayda ikili sabit nokta ve karışık monoton dönüşüm kavramını tanımladılar ve bu kavramları periyodik sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliğine ilişkin bir teoremde kullandılar. Daha sonra, Lahsmikantham and Ćirić [39] ikili sabit nokta kavramının genelleştirmesi olan ikili çakışma noktası kavramını ve karşık g-monoton dönüşümünü tanıttılar ve karışık g-monoton contraction dönüşümü için ikili çakışma noktasının varlığını ve tekliğini çalıştılar. Bu çalışmalardan ilham alınarak farklı tip contraction dönüşümleri için ikili sabit nokta teoremleri çalışıldı (bkz. [40-46]).

İkili sabit nokta teoremleri üzerine olan bu ilgi bu kavramı [47], [48]'de üçlü sabit nokta teoremlerine, ardından [49], [50] çalışmalarında dörtlü sabit nokta teoremlerine genellemek için motive etti.

Diğer yandan yukarıda da bahsedildiği gibi sabit nokta teorisi uygulamalı matematikte bir adi diferansiyel denklemin çözümünün varlığı ve tekliği üzerine inşa edilmiştir. Dolayısıyla uygulamalı matematikteki birçok problem sabit nokta teorisi yoluyla çözülebilmektedir. Fakat bazen problemin kesin çözümü yerine bir yaklaşık çözüm fazlasıyla yeterli olacağından dolayı sabit noktaların varlığı çözümün varlığı için gerekmeyebilir. Bu yaklaşımın dikkat çekmesinin nedeni problemleri çözmek amacıyla sabit noktaların varlığını garantilemek için güçlü şartların eklenmesidir. Bu gibi durumlarda daha az şart koyarak problemin çözümünü sabit nokta ile değil de yaklaşık bir çözüm ile daha doğrusu yaklaşık bir sabit nokta ile bulmak daha kolay olabilmektedir. Bu düşünce, doğal olarak bir fonksiyonun approximate sabit noktasını veya ε-sabit noktasını tanıtmak ve bu kavramla ilgili teoriler üretmek fikrini doğurmuştur. Bir f fonksiyonunun bir x approximate sabit noktası demek ile

$f(x)$'in x'e "yakın" olduğu anlaşılır. Literatürde bu kavramın çalışıldığı birçok çalışma vardır (bkz. [51-57]).

1.2 Tezin Amacı

Bu tezde üçüncü bölümde keyfi bir n pozitif tam sayısı için ikili sabit nokta ve ikili çakışma noktası kavramlarını genelleştirerek n-li sabit nokta ve n-li çakışma noktası kavramları tanıtılacak, bu kavramların varlığı ve tekliği üzerine teoremler verilecek ve ispatlanacaktır.

İkili ve üçlü sabit nokta teoremleri [22] ve [23]'de n-özelliği denen bir özellikle ve t-norm ve t-conorm işlemcilerine bir şart yüklenerek sezgisel fuzzy normlu uzaylarda tanıtıldı. Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde çalışılan n-li sabit nokta kavramıyla ilişkili teoremler sezgisel fuzzy normlu uzaylarda n-özelliği kullanmaksızın ve t-norm ve t-conorm işlemcileri için herhangi bir şart yüklemeksizin çalışılacaktır.

Beşinci bölümde sabit nokta teorisinde çok çalışılan bir konu olan approximate sabit nokta özelliği sezgisel fuzzy normlu uzaylarda tanımlanacak ve bu kavramla ilişkili bazı teoremler ve sonuçlar verilecektir.

1.3 Hipotez

Üçüncü bölümde $(X, \ll)$ kısmi sıralı tam metrik uzayı, $g: X \to X$ sürekli bir dönüşüm ve n keyfi bir pozitif tam sayı olmak üzere karışık g-monoton özelliğine sahip φ-contraction şartınının bir benzerini sağlayan $F: X^n \to X$ dönüşümünün sürekli olduğu veya X'de x'e yakınsak, azalmayan (x_k) dizisi için $x_k \ll x$ olduğu ve y'ye yakınsak, artmayan (y_k) dizisi için $y \ll y_k$ olduğu varsayılarak F ve g dönüşümlerinin bir n-li çakışma noktasına sahip olduğu ve bu noktanın tek olduğu öngörülmüştür.

Dördüncü bölümde $(X, \mu, \nu, *, \Diamond)$, $\ll$ ile gösterilen kısmi sıralamaya sahip tam sezgisel fuzzy normlu uzay ve $g: X \to X$ sezgisel fuzzy sürekli bir dönüşüm olmak üzere karışık g-monoton özelliğine sahip, (4.1), (4.2) ve (4.3) şartlarını sağlayan $F: X^n \to X$ dönüşümünün g ile bir n-li çakışma noktasına sahip olduğu gösterilmiştir.

Beşinci bölümde sezgisel fuzzy normlu uzaylarda $f: X \to X$ dönüşümünün ve uzayın bir alt kümesinin approximate sabit nokta özelliğine sahip olmasının ilk defa tanımları yapıldıktan sonra, sabit nokta teorisinde kullanılan bazı dönüşüm sınıflarının sezgisel fuzzy versiyonu için bu dönüşümlerin $x \ll f(x)$ şartını sağladığı ayrıca $\mu(.,t)$'nin azalmayan ve $\nu(.,t)$'nin artmayan olduğu varsayımları altında approximate sabit nokta özelliklerine sahip olduğu gösterilmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde üçüncü ve daha sonraki bölümlerde bahsi geçen temel kavramlar ve sonuçlar verilecektir.

2.1 Analiz Kaynaklı Kavramlar

Tanım 2.1 X ve Y boştan farklı iki küme olmak üzere $\ll \subset X \times Y$'ye X'den Y'ye bir bağıntı denir. Eğer $\ll$, $X \times X \left(= X^2\right)$'in bir alt kümesi ise $\ll$'ye X'de veya X üzerinde bir bağıntı denir [58].

Tanım 2.2 $X \neq \varnothing$ olmak üzere $\ll$, X'de bir bağıntı olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\ll$ bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı denir [58].

(i) Her $x \in X$ için $x \ll x$'dir (yansıma özelliği),

(ii) $x \ll y$ ve $y \ll x$ ise $x = y$'dir (ters simetri özelliği),

(iii) $x \ll y$ ve $y \ll z$ ise $x \ll z$'dir (geçişme özelliği).

X'de kısmi sıralama bağıntısı tanımlanmış ise X'e kısmi sıralı küme denir ve $\left(X, \ll\right)$ ile gösterilir [58]. $\left(x, y\right) \in \ll$ olması $x \ll y$ veya $y \gg x$ ile temsil edilir.

Örnek 2.3 X pozitif tam sayıların kümesi yani $X = \mathbb{N}$ olsun. $x, y \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\ll$ bağıntısı "$x \ll y \Leftrightarrow x, y$'yi böler" şeklinde tanımlanırsa $\left(\mathbb{N}, \ll\right)$ kısmi sıralı bir kümedir. Bu örneğe dikkat edilirse birbirini bölmeyen tam sayılar vardır. Demek ki kısmi sıralı bir kümede $x \ll y$ veya $y \ll x$ olarak yazılamayan elemanlar vardır [58].

Tanım 2.4 Eğer x, y elemanları için $x \ll y$ veya $y \ll x$'den en az biri doğru ise x ve y'ye karşılaştırılabilir elemanlar denir [58].

Tanım 2.5 Kısmi sıralı bir kümenin herhangi iki elemanı karşılaştırılabilirse bu kümeye tam sıralı küme denir [58].

Örnek 2.6 $\mathbb{R}$'de "$x \ll y \Leftrightarrow x \leq y$" şeklinde kısmi sıralama bağıntısı tanımlanırsa $(\mathbb{R}, \leq)$ tam sıralı bir kümedir [58].

Tanım 2.7 $(X, \ll)$ ve $(Y, \ll')$ iki kısmi sıralı küme ve $f : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. $x \ll y$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ için $f(x) \ll' f(y)$ ise f'ye monoton artan (veya azalmayan) $f(y) \ll' f(x)$ ise f'ye monoton azalan (veya artmayan) fonksiyon denir.

Tanım 2.8 $X \neq \varnothing$ olmak üzere $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için aşağıdakileri sağlarsa d'ye X üzerinde bir metrik, (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir [58].

(i) $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetriklik),

(ii) $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Pozitif tanımlılık),

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Üçgen eşitsizliği).

Tanım 2.9 (X, d) bir metrik uzay ve (x_k) bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $k \geq k_0$ olduğunda, $d(x_k, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tamsayısı varsa, (x_k) dizisine $x \in X$ noktasına yakınsaktır denir ve $x_k \to x$ ile gösterilir [58].

Tanım 2.10 (X, d) bir metrik uzay ve (x_k) bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, k \geq k_0$ olduğunda, $d(x_k, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0 = k_0(\varepsilon)$ tam sayısı varsa, (x_k) dizisine Cauchy dizisi denir [58].

Tanım 2.11 (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu uzaydaki her (x_k) Cauchy dizisi yakınsak ise (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir [58].

Tanım 2.12 $X=(X,d)$ ve $Y=(Y,d')$ iki metrik uzay, $f:X\to Y$ bir dönüşüm ve $x_0\in X$ olsun. Her $\varepsilon>0$ sayısı için, $d(x,x_0)<\delta$ olduğunda $d'(f(x),f(x_0))<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı varsa, f'ye x_0 noktasında süreklidir denir. f, X'in her noktasında sürekli ise, f' ye X'de süreklidir denir [58].

Tanım 2.13 $X=(X,d)$ ve $Y=(Y,d')$ iki metrik uzay, $f:X\to Y$ bir dönüşüm ve $x_0\in X$ olsun. X'de $x_k\to x_0$ olan her (x_k) dizisi için $Y=(Y,d')$ uzayında $f(x_k)\to f(x)$ oluyorsa f'ye x_0 noktasında dizisel sürekli denir. f, X'in her noktasında dizisel sürekli ise f' ye X'de dizisel sürekli denir.

Teorem 2.14 $X=(X,d)$ ve $Y=(Y,d')$ iki metrik uzay ve $f:X\to Y$ bir dönüşüm olsun. f'nin sürekli olması için gerek ve yeter şart f'nin dizisel sürekli olmasıdır.

Tanım 2.15 V boştan farklı bir küme ve F bir cisim olsun. $+:V\times V\to V$ ve $\cdot:\mathrm{F}\times V\to V$ işlemleri tanımlansın. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa V'ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir:

V, $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

(i) Her $x,y\in V$ için $x+y\in V$' dir,

(ii) Her $x,y,z\in V$ için $x+(y+z)=(x+y)+z$'dir,

(iii) Her $x\in V$ için $x+\theta=\theta+x=x$ olacak şekilde $\theta\in V$ vardır,

(iv) Her $x\in V$ için $x+(-x)=(-x)+x=\theta$ olacak şekilde $-x\in V$ vardır,

(v) Her $x,y\in V$ için $x+y=y+x$'dir.

$x,y\in V$ ve $\alpha,\beta\in\mathrm{F}$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

(vi) $\alpha\cdot x\in V$ **'**dir,

(vii) $\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$**'**dir,

(viii) $(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$**'** dir,

(ix) $(\alpha\cdot\beta)\cdot x=\alpha\cdot(\beta\cdot x)$'dir,

(x) $1 \cdot x = x$'dir (Burada 1, F nin birim elemanıdır).

$\mathrm{F} = \mathbb{R}$ ise V'ye reel lineer uzay, $\mathrm{F} = \mathbb{C}$ ise V'ye kompleks lineer uzay adı verilir [59].

Tanım 2.16 V bir vektör uzayı olmak üzere, $\| \,.\, \| : V \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

(ii) Her $\alpha \in \mathrm{F}$ ve her $x \in V$ için $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,

(iii) Her $x, y \in V$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlarsa $\| \,.\, \|$ fonksiyonuna V'de (veya V üzerinde) norm, $(V, \| \,.\, \|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

V üzerindeki bir norm, V üzerinde

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in V)$$

ile verilen bir metrik tanımlar ve bu metriğe norm tarafından üretilen metrik denir.

Tanım 2.17 V normlu uzay olmak üzere V, $d(x, y) = \|x - y\|$, $(x, y \in V)$ norm metriğine göre tam ise V'ye Banach uzayı denir.

V'nin reel veya kompleks lineer uzay oluşuna göre Banach uzayı, reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır.

2.2 Sabit Nokta Teorisi Kaynaklı Kavramlar

Tanım 2.18 X boştan farklı bir küme ve $f : X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $f(x) = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına f'nin sabit noktası denir ve f'nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(f)$ ile gösterilir [60].

Örnek 2.19

(i) Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $f(x) = x^2 + 5x + 4$ ise $F(f) = \{-2\}$

(ii) Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $f(x) = x + 2$ ise $F(f) = \varnothing$ [60].

Tanım 2.20 X boştan farklı bir küme ve $f : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $f^{k+1}(x) = f\left(f^k(x)\right)$ olacak şekilde $f^k(x)$ tanımlansın. $f^k(x)$, x'in f altındaki k. iterasyonu olarak adlandırılır [60].

Tanım 2.21 (X, d) metrik uzay ve $f : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için $\lim_{k\to\infty} d\left(f^{k+1}(x), f^k(x)\right) = 0$ ise f'ye asimptotik regüler dönüşüm denir [61].

Tanım 2.22 (X, d) metrik uzay, $f : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için $d\left(f(x_0), x_0\right) < \varepsilon$ ise $x_0 \in X$ noktasına f'nin approximate veya ε-sabit noktası denir. f'nin approximate sabit noktalarının kümesi $F_\varepsilon(f)$ ile gösterilir.

Tanım 2.23 Her $\varepsilon > 0$ için $F_\varepsilon(f) \neq \varnothing$ ise $f : X \to X$ dönüşümüne approximate sabit nokta özelliğine sahiptir denir.

Tanım 2.24 $(X, \|\ ,\ \|)$ bir normlu lineer uzay ve $K \subset X$ olsun. Eğer her $f : K \to K$ nonexpansive dönüşümü için

$$\inf\left\{\|x - f(x)\| : x \in K\right\} = 0$$

ise X'in K alt kümesi için approximate sabit nokta özelliğine sahiptir denir [62].

Tanım 2.25 (X, d) ve (X', d') birer metrik uzay ve $f : X \to X'$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için $d'\left(f(x), f(y)\right) \leq L \cdot d(x, y)$ olacak şekilde bir $L > 0$ sayısı mevcut ise f'ye bir Lipschitzian (veya L-Lipschitzian) dönüşüm denir. Bir L-Lipschitzian f dönüşümü $L < 1$ için contraction dönüşüm, $L = 1$ için nonexpansive dönüşüm olarak adlandırılır. Eğer her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $d'\left(f(x), f(y)\right) < d(x, y)$ ise f'ye contractive dönüşüm denir.

Tanımdan da görüldüğü üzere her f Lipschitzian dönüşümü düzgün süreklidir. Gerçekten, $\delta < \dfrac{\varepsilon}{L}$ seçimi yapılırsa $d'\left(f(x), f(y)\right) \leq L \cdot d(x, y) < \varepsilon$'dur [63].

Örnek 2.26 Aşağıdaki örneklerde X kümesi üzerindeki metrik $d(x, y) = |x - y|$ olarak alınsın. Bu durumda,

(i) $X=\left[\frac{1}{2},1\right)$ ve $f:X\to X$ dönüşümü $f(x)=\frac{1}{x}$ bağıntısı ile verilsin. f, 4 - Lipschitzian dönüşümüdür.

(ii) $X=\mathbb{R}$ ve $f:X\to X$ dönüşümü $f(x)=\frac{x}{2}+3$ bağıntısı ile verilsin. f, contraction dönüşümüdür.

(iii) $X=[1,\infty)$ ve $f:X\to X$ dönüşümü $f(x)=x+\frac{1}{x}$ bağıntısı ile verilsin. f, contractive dönüşümüdür [60].

Aşağıdaki teorem sabit nokta teorisinde çok önemli bir yere sahip olan Banach contraction teoremidir.

Teorem 2.27 (X,d) boştan farklı bir tam metrik uzay olsun. $f:X\to X$ contraction dönüşümünün bir tek p sabit noktası vardır ve herhangi bir $x_0\in X$ için

$$x_k=f(x_{k-1})=f^k(x_0),\ k=1,2,\ldots$$

ile tanımlı (x_k) iterasyon dizisi p'ye yakınsar [24].

Banach contraction teoremini genelleştirmenin bir yolu contraction şartını genellemektir. Bu genelleştirmeler bazı fonksiyon sınıfları yardımıyla yapılır. Aşağıda contraction şartını genellemek için kullanılan $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonlarının özellikleri verilecektir:

$\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri sağladığı göz önüne alınsın [60]:

(i) φ monoton artandır.

(ii) Her $t>0$ için $\varphi(t)<t$'dir.

(iii) $\varphi(0)=0$'dır.

(iv) φ süreklidir.

(v) Her $t\geq 0$ için $(\varphi^k(t))$, 0'a yakınsar.

(vi) Her $t > 0$ için $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k(t)$ yakınsar.

(vii) $t \to \infty$ için $t - \varphi(t) \to \infty$'dur.

(viii) φ alt toplamsaldır.

Lemma 2.28 (i) ve (ii) özellikleri (iii)'ü, (ii) ve (iv) özellikleri (iii)'ü, (i) ve (v) özellikleri (ii)'yi gerektirir [60].

Tanım 2.29 Bir φ fonksiyonu (i) ve (v) şartlarını sağlarsa comparison (mukayese) fonksiyonu, (i) ve (vi) şartlarını sağlarsa c-comparison fonksiyonu olarak adlandırılır. (vii) şartını sağlayan bir comparison fonksiyonu strict comparison fonksiyonu olarak adlandırılır [60].

Lemma 2.30 Herhangi bir c-comparison fonksiyonu, comparison fonksiyondur. Herhangi bir strict comparison fonksiyonu bir comparison fonksiyondur. Bir comparison fonksiyonu (iii) özelliğini sağlar. (viii) özelliğini sağlayan bir fonksiyon (iv) özelliğini de sağlar. Eğer φ bir comparison fonksiyonu ise her $k \in \mathbb{N}$ için φ^k da bir comparison fonksiyonudur [60].

Örnek 2.31

(i) $a \in (0,1]$ ve $t \in (0,\infty]$ olmak üzere $\varphi(t) = at$ fonksiyonu (i)-(viii) özelliklerinin hepsini sağlar.

(ii) $t \in (0,\infty]$ ve $\varphi(t) = \dfrac{t}{1+t}$ fonksiyonu bir (strict) comparison fonksiyondur fakat bir c- comparison fonksiyon değildir.

(iii) $t \in [0,1]$ için $\varphi(t) = \dfrac{1}{2}t$ ve $t \in (1,\infty)$ için $\varphi(t) = t - \dfrac{1}{2}$ fonksiyonları birer c-comparison fonksiyondur fakat bir strict comparison fonksiyon değildir [60].

Tanım 2.32 (X,d) bir tam metrik uzay olsun. Eğer her $x, y \in X$ için $d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x,y))$ olacak şekilde bir $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ comparison fonksiyonu varsa $f : X \to X$ dönüşümüne bir φ-contraction denir [60].

Banach contraction teoreminde bahsi geçen $f:X\to X$ dönüşümü contraction dönüşüm olduğundan süreklidir. Kannan, Banach contraction teoremini genelleştirmek için f'nin sürekli olmasını gerektirmeyen Tanım 2.33'deki contractivelik şartını tanımlamıştır.

Tanım 2.33 (X,d) bir metrik uzay ve $f:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in X$ için

$$d\left(f(x),f(y)\right)\leq a\cdot\left[d\left(x,f(x)\right)+d\left(y,f(y)\right)\right]$$

olacak şekilde en az bir $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ sayısı varsa f'ye Kannan dönüşüm denir [64], [65].

Chatterjea, Kannan'dan esinlenerek benzer bir contractive'lik şartı vermiştir:

Tanım 2.34 (X,d) bir metrik uzay ve $f:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in X$ için

$$d\left(f(x),f(y)\right)\leq b\cdot\left[d\left(x,f(y)\right)+d\left(y,f(x)\right)\right]$$

olacak şekilde en az bir $b\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ sayısı mevcutsa f'ye Chatterjea dönüşüm denir [66],[64].

1972'de Zamfirescu Banach'ın, Kannan'ın ve Chatterjea'nın contractive'lik şartını bir araya getirerek aşağıdaki tanımlamayı yapmıştır:

Tanım 2.35 (X,d) bir metrik uzay ve $f:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y\in X$ için

(i) $d\left(f(x),f(y)\right)\leq \lambda d(x,y)$

(ii) $d\left(f(x),f(y)\right)\leq a\cdot\left[d\left(x,f(x)\right)+d\left(y,f(y)\right)\right]$

(iii) $d\left(f(x),f(y)\right)\leq b\cdot\left[d\left(x,f(y)\right)+d\left(y,f(x)\right)\right]$

şartlarından en az birisinin doğru olacağı şekilde, $\lambda\in[0,1)$, $0<a,b<1/2$ şartlarını sağlayan λ,a ve b reel sayıları varsa, f'ye Zamfirescu dönüşümü denir [67].

Berinde Zamfirescu'nun vermiş olduğu (i)-(iii) şartından daha genel olan aşağıdaki contraction şartını vermiştir:

Tanım 2.36 (X,d) bir tam metrik uzay ve $f:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y\in X$ için

$$d\left(f(x),f(y)\right)\le \delta d(x,y)+Ld\left(y,f(x)\right)$$

olacak şekilde bir $\delta\in(0,1)$ sabiti ve bir $L\ge 0$ mevcut ise, f'ye bir zayıf contraction denir [68].

Aşağıdaki teorem, Teorem 2.27 (Banach contraction teoremi)'nin Ran ve Reurings tarafından kısmi sıralı tam metrik uzayda verilen bir genelleştirmesidir:

Teorem 2.37 $(X,\ll)$ kısmi sıralı kümesi d metriği ile donatılsın. $f:X\to X$ dönüşümünün aşağıdaki şartları sağladığı varsayılsın.

(i) (X,d) tamdır.

(ii) f sürekli ve monoton bir dönüşümdür.

(iii) $x_0\ll f(x_0)$ ya da $x_0\gg f(x_0)$ olacak şekilde $x_0\in X$ vardır.

(iv) $x\gg y$'yi sağlayan her $x,y\in X$ için $d\left(f(x),f(y)\right)<c.d(x,y)$ olacak şekilde $c\in(0,1)$ vardır.

Bu takdirde f bir tek p sabit noktasına sahiptir. Dahası her $x\in X$ için $f^k(x)\to p$'dir [32].

Kısmi sıralı metrik uzayda Bhaskar ve Lakshmikantham, karışık monoton dönüşüm ve ikili sabit nokta kavramlarını tanımlayıp bir contraction şartı kullanarak ikili sabit noktanın varlığına ve tekliğine ilişkin teoremler verdiler:

Tanım 2.38 $(X,\ll)$ kısmi sıralı bir küme ve $F:X\times X\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $F(x,y)$, x 'de monoton azalmayan, y'de monoton artmayan ise yani her $x,y\in X$ için

$x_1, x_2 \in X$ ve $x_1 \ll x_2$ iken $F(x_1, y) \ll F(x_2, y)$,

$y_1, y_2 \in X$ ve $y_1 \ll y_2$ iken $F(x, y_1) \gg F(x, y_2)$

ise F'ye karışık monoton özelliğine sahiptir denir [38].

Tanım 2.39 $F : X \times X \to X$ dönüşümü için $F(x, y) = x$ ve $F(y, x) = y$ ise $(x, y) \in X$ elemanına F'nin ikili sabit noktası denir [38].

Teorem 2.40 $(X, \ll)$ bir kısmi sıralı küme ve d, (X, d) tam olacak şekilde X üzerinde bir metrik olsun. $F : X \times X \to X$, X üzerinde karışık monoton özelliğine sahip sürekli bir dönüşüm olsun. Her $x \gg u$ ve $y \ll v$ için

$$d(F(x, y), F(u, v)) \leq \frac{k}{2}\left[d(x, u) + d(y, v)\right]$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k \in [0,1)$ olduğu varsayılsın. Eğer $x_0 \ll F(x_0, y_0)$ ve $y_0 \gg F(y_0, x_0)$ olacak şekilde $x_0, y_0 \in X$ varsa bu takdirde $F(x, y) = x$ ve $F(y, x) = y$ eşitliklerini sağlayan $x, y \in X$ vardır [38].

Teorem 2.41 $(X, \ll)$ bir kısmi sıralı küme ve (X, d) bir tam metrik uzay olsun. X'in aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu varsayılsın:

(i) Azalmayan ve x'e yakınsayan (x_k) dizisi için $x_k \ll x$'dir.

(ii) Artmayan ve y'e yakınsayan (y_k) dizisi için $y_k \gg y$'dir.

$F : X \times X \to X$, X üzerinde karışık monoton özelliğine sahip bir dönüşüm olsun. Her $x \gg u$ ve $y \ll v$ için

$$d(F(x, y), F(u, v)) \leq \frac{k}{2}\left[d(x, u) + d(y, v)\right]$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k \in [0,1)$ olduğu varsayılsın. Eğer $x_0 \ll F(x_0, y_0)$ ve $y_0 \gg F(y_0, x_0)$ olacak şekilde $x_0, y_0 \in X$ varsa bu takdirde $F(x, y) = x$ ve $F(y, x) = y$ eşitliklerini sağlayan $x, y \in X$ vardır [38].

Teorem 2.42 $(X,\ll)$ bir kısmi sıralı küme olduğundan $X\times X$'i aşağıdaki kısmi sıralama bağıntısı ile donatılabilir.

$(x,y),(u,v)\in X\times X$ için $(x,y)\ll(u,v)\Leftrightarrow x\ll u, y\gg v$

Teorem 2.40 ve Teorem 2.41'in hipotezlerine ek olarak her $(x,y),(u,v)\in X\times X$ için (x,y) ve (u,v) ile karşılaştırılabilen bir $(z_1,z_2)\in X\times X$ olduğu varsayılsın. Bu durumda Teorem 2.40 ve Teorem 2.41'de var olan sabit noktalar tektir [38].

Lakshmikantham ve Ćirić, [39]'da Bhaskar ve Lakshmikantham [38]'ın çalışmasını genelleştirdi:

Tanım 2.43 $(X,\ll)$ kısmi sıralı bir küme, $F:X\times X\to X$ ve $\mathrm{g}:X\to X$ dönüşümler olsun. Eğer F ilk bileşeninde monoton g-azalmayan ve ikinci bileşeninde monoton g-artmayan ise yani her $x,y\in X$ için

$x_1,x_2\in X$ ve $g(x_1)\ll g(x_2)$ iken $F(x_1,y)\ll F(x_2,y)$

$y_1,y_2\in X$ ve $g(y_1)\ll g(y_2)$ iken $F(x,y_1)\gg F(x,y_2)$

ise F karışık monoton özelliğine sahiptir denir [39].

Tanım 2.44 $F:X\times X\to X$ ve $g:X\to X$ dönüşümü için $F(x,y)=g(x)$ ve $F(y,x)=g(y)$ ise $(x,y)\in X$ elemanına F ve g'nin ikili çakışma noktası denir [39].

Tanım 2.45 X boştan farklı bir küme, $F:X\times X\to X$ ve $g:X\to X$ dönüşümler olsun. Her $x,y\in X$ için $g(F(x,y))=F(g(x),g(y))$ ise F ve g'ye değişmeli denir [39].

Teorem 2.46 $(X,\ll)$ bir kısmi sıralı küme ve d, (X,d) tam olacak şekilde X üzerinde bir metrik olsun. Her bir $t>0$ $\lim_{r\to t+}\varphi(r)<t$ ve $\varphi(t)<t$ olacak şekilde bir $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonunun olduğu varsayılsın. $F:X\times X\to X$ ve $\mathrm{g}:X\to X$ dönüşümleri F karışık g- monoton özelliğine sahip olacak şekilde dönüşümler olsun ve $g(x)\ll g(u)$ ve $g(y)\gg g(v)$ şartının sağlayan her $x,y,u,v\in X$ için

$$d\left(F\left(x,y\right),F\left(u,v\right)\right)\leq\varphi\left(\frac{d\left(g\left(x\right),g\left(u\right)\right)+d\left(g\left(y\right),g\left(v\right)\right)}{2}\right)$$

eşitsizliği gerçeklensin. $F\left(X\times X\right)\subseteq g\left(X\right)$, g sürekli ve F ile değişmeli olsun. Ayrıca aşağıdaki şartların sağlandığı kabul edilsin.

(i) F süreklidir,

veya

(ii) X aşağıdaki özelliklere sahiptir.

a) $\left(x_k\right)$ azalmayan ve x'e yakınsayan bir dizisi ise $x_k \ll x$'dir.

b) $\left(y_k\right)$ artmayan ve y'ye yakınsayan bir dizi ise $y_k \gg y$'dir.

Eğer $g\left(x_0\right)\ll F\left(x_0,y_0\right)$ ve $g\left(y_0\right)\gg F\left(y_0,x_0\right)$ olacak şekilde $x_0,y_0\in X$ varsa bu takdirde $F\left(x,y\right)=g\left(x\right)$ ve $F\left(y,x\right)=g\left(y\right)$ olacak şekilde $x,y\in X$ vardır. Yani F ve g ikili çakışma noktasına sahiptir [39].

Teorem 2.47 Teorem 2.46'nın hipotezine ek olarak, her $\left(x,y\right),\left(x',y'\right)$ için $\left(F\left(u,v\right),F\left(v,u\right)\right)$, $\left(F\left(x,y\right),F\left(y,x\right)\right)$ ve $\left(F\left(x',y'\right),F\left(y',x'\right)\right)$ ile karşılaştırılabilir olacak şekilde $\left(u,v\right)\in X\times X$'in var olduğu varsayılsın. Bu takdirde $x=g\left(x\right)=F\left(x,y\right)$ ve $y=g\left(y\right)=F\left(y,x\right)$ olacak şekilde $\left(x,y\right)\in X\times X$ vardır [39].

2.3 Sezgisel Fuzzy metrik ve Normlu Uzaylardaki Bazı Temel Kavramlar

İlk olarak, Park'ın sürekli t-norm ve t-conorm yardımıyla vermiş olduğu sezgisel fuzzy metrik uzayın tanımı ve bu uzaydaki fonksiyonel analiz kaynaklı temel kavramlar verilecektir.

Tanım 2.48 $*:\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]$ şeklinde tanımlanan bir ikili işlem aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa sürekli t-norm denir [69].

(i) $*$ işlemi birleşmeli ve değişmeli,

(ii) $*$ işlemi sürekli

(iii) Her $a \in [0,1]$ için $a * 1 = a$,

(iv) Her $a,b,c,d \in [0,1]$ için $a \le c$ ve $b \le d$ olduğunda $a * b \le c * d$.

Örneğin $a * b = a \cdot b$ ve $a * b = \min\{a,b\}$ birer t-normdur.

Tanım 2.49 $\Diamond : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ şeklinde tanımlanan bir ikili işlem aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa sürekli t-conorm denir [69].

(i) $\Diamond$ işlemi birleşmeli ve değişmeli,

(ii) $\Diamond$ işlemi sürekli

(iii) Her $a \in [0,1]$ için $a \Diamond 0 = a$,

(iv) Her $a,b,c,d \in [0,1]$ için $a \le c$ ve $b \le d$ olduğunda $a \Diamond b \le c \Diamond d$.

Örneğin $a \Diamond b = \min\{a+b,1\}$ ve $a \Diamond b = \text{maks}\{a,b\}$ birer t-conormdur.

Tanım 2.50 X boştan farklı bir küme $*$ işlemi sürekli bir t-norm, $\Diamond$ işlemi sürekli bir t-conorm ve μ, ν kümeleri $X^2 \times (0,\infty)$ üzerinde fuzzy kümeler olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(X, \mu, \nu, *, \Diamond)$ beşlisine bir sezgisel fuzzy metrik uzay denir. Her $x, y \in X$ ve $s,t > 0$ için

(i) $\mu(x,y,t) + \nu(x,y,t) \le 1$,

(ii) $\mu(x,y,t) > 0,$

(iii) $\mu(x,y,t) = 1$ ancak ve ancak $x = y,$

(iv) $\mu(x,y,t) = \mu(y,x,t),$

(v) $\mu(x,y,t) * \mu(y,z,s) \le \mu(x,z,t+s),$

(vi) $\mu(x,y,.) : (0,\infty) \to (0,1]$ süreklidir,

(vii) $\nu(x,y,t) < 1$,

(viii) $\nu(x,y,t) = 0$ ancak ve ancak $x = y$,

(ix) $\nu(x,y,t)=\nu(y,x,t)$,

(x) $\nu(x,y,t)\Diamond\nu(y,z,s)\geq\nu(x,z,t+s)$,

(xi) $\nu(x,y,.):(0,\infty)\to[0,1)$ süreklidir.

(μ,ν) ikilisine X üzerinde sezgisel fuzzy metrik denir. Burada $\mu(x,y,t)$ ve $\nu(x,y,t)$ fonksiyonları sırası ile x ve y'nin t'ye göre birbirlerine yakın olma ve yakın olmama dercesidir [3].

Sezgisel fuzzy X metrik uzayında $\mu(x,y,.)$ azalmayan ve $\nu(x,y,.)$ artmayandır.

Örnek 2.51 (X,d) bir metrik uzay olsun. Her $a,b\in[0,1]$ için $a*b=a\cdot b$ ve $a\Diamond b=\min\{1,a+b\}$ olsun ve her $m,n,h,k\in\mathbb{R}^+$ için μ ve ν aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\mu_d(x,y,t)=\frac{ht^n}{ht^n+m.d(x,y)} \text{ ve } \nu_d(x,y,t)=\frac{d(x,y)}{ht^n+m.d(x,y)}.$$

Bu takdirde $(X,\mu_d,\nu_d,*,\Diamond)$ bir sezgisel fuzzy metrik uzaydır [3].

Uyarı 2.52 Yukarıdaki örnekte $m=n=h=k=1$ alınırsa

$$\mu_d(x,y,t)=\frac{t}{t+d(x,y)} \text{ ve } \nu_d(x,y,t)=\frac{d(x,y)}{t+d(x,y)}$$

elde edilir. Bu metriğe d tarafından oluşturulan standart sezgisel fuzzy metrik uzay denir.

Örnek 2.53 $X=\mathbb{N}$, her $a,b\in[0,1]$ için $a*b=\text{maks}\{0,a+b-1\}$ ve $a\Diamond b=a+b-a.b$ olsun. μ ve ν fuzzy kümeleri her $x,y\in X$ ve $t>0$ için $X^2\times(0,\infty)$ üzerinde aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\mu(x,y,t)=\begin{cases}\dfrac{x}{y}, & x\leq y\\[2mm] \dfrac{y}{x}, & y\leq x\end{cases} \text{ ve } \nu(x,y,t)=\begin{cases}\dfrac{y-x}{y}, & x\leq y\\[2mm] \dfrac{x-y}{x}, & y\leq x\end{cases}.$$

Bu takdirde $\left(X,\mu,\nu,*,\Diamond\right)$ bir sezgisel fuzzy metrik uzaydır. Dikkat edilirse bu örnekte X üzerinde $\mu\left(x,y,t\right)=\dfrac{t}{t+d\left(x,y\right)}$ ve $\nu\left(x,y,t\right)=\dfrac{d\left(x,y\right)}{t+d\left(x,y\right)}$ olacak şekilde bir d metriği mevcut değildir. Ayrıca bu örnekteki μ ve ν için $a*b=\min\{a,b\}$ ve $a\Diamond b=\text{maks}\{a,b\}$ olarak alınırsa (μ,ν) bir sezgisel fuzzy metrik olmaz [3].

Tanım 2.54 $\left(X,\mu,\nu,*,\Diamond\right)$ sezgisel fuzzy metrik uzay, $r\in(0,1)$, $t>0$ ve $x\in X$ olsun. $B\left(x,r,t\right)=\left\{y\in X:\mu(x-y,t)>1-r,\nu\left(x-y,t\right)<r\right\}$ kümesi t'ye göre x merkezli ve r yarı çaplı açık yuvar olarak tanımlanır [3].

Teorem 2.55 Her açık $B\left(x,r,t\right)$ yuvarı bir açık kümedir [3].

Uyarı 2.56 $\left(X,\mu,\nu,*,\Diamond\right)$ sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda $\tau_{(\mu,\nu)}=\{A\subset X:$ Her $x\in A$ için $B\left(x,y,t\right)\subset A$ olacak şekilde $t>0$ ve $r\in(0,1)$ vardır.$\}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir [3].

Teorem 2.57 Her sezgisel fuzzy metrik uzay bir Hausdorff uzaydır [3].

Tanım 2.58 $\left(X,\mu,\nu,*,\Diamond\right)$ sezgisel fuzzy metrik uzay ve $A\subset X$ olsun. Eğer her $x,y\in A$ için, $\mu(x,y,t)>1-r$ ve $\nu\left(x,y,t\right)<r$ olacak şekilde $r\in(0,1)$ ve $t>0$ varsa, A kümesine sezgisel fuzzy sınırlıdır denir [3].

Uyarı 2.59 $\left(X,\mu,\nu,*,\Diamond\right)$, X üzerindeki d metriği tarafından üretilen sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. $A\subset X$ sezgisel fuzzy sınırlıdır $\Leftrightarrow$ A kümesi sınırlıdır [3].

Teorem 2.60 $\left(X,\mu,\nu,*,\Diamond\right)$ sezgisel fuzzy metrik uzay ve $\tau_{(\mu,\nu)}$, (μ,ν) tarafından doğrulan topoloji olsun. X'de bir $\left(x_k\right)$ dizisi $x\in X$'e yakınsaktır ancak ve ancak $\mu(x_k,x,t)\to 1$ ve $\nu\left(x_k,x,t\right)\to 0$ [3].

Tanım 2.61 $\left(X,\mu,\nu,*,\Diamond\right)$ bir sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ ve $t>0$ için $k,l>k_0$ olduğunda $\mu\left(x_k,x_l,t\right)>1-\varepsilon$ ve $\nu\left(x_k,x_l,t\right)<\varepsilon$ olacak şekilde

$k_0 \in \mathbb{N}$ var ise (x_k) dizisine (μ,ν) sezgisel fuzzy metriğine göre bir Cauchy dizisi denir [3].

Tanım 2.62 $(X,\mu,\nu,*,\Diamond)$'deki her Cauchy dizisi $\tau_{(\mu,\nu)}$'ye göre yakınsak ise $(X,\mu,\nu,*,\Diamond)$'e tam sezgisel fuzzy metrik uzay denir [3].

Lemma 2.63 $(X,\mu,\nu,*,\Diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Eğer $x_k \overset{(\mu,\nu)}{\rightarrow} x$ ve $y_k \overset{(\mu,\nu)}{\rightarrow} y$ ise her $t>0$ için aşağıdakiler sağlanır [15].

(i) $\mu(x,y,t) \le \lim_{k\to\infty} \inf \mu(x_k,y_k,t)$ ve $\nu(x,y,t) \ge \lim_{k\to\infty} \sup \nu(x_k,y_k,t)$,

(ii) $\mu(x,y,t) \ge \lim_{k\to\infty} \sup \mu(x_k,y_k,t)$ ve $\nu(x,y,t) \le \lim_{k\to\infty} \inf \nu(x_k,y_k,t)$.

Şimdi Saadati ve Park [4]'ın sezgisel fuzzy metrik uzay fikrini kullanarak tanımladıkları sezgisel fuzzy normlu uzay kavramı, ardından bu uzaydaki bazı temel kavramlar verilecektir.

Tanım 2.64 Eğer X bir vektör uzayı, $*$ işlemi sürekli bir t-norm, $\Diamond$ işlemi sürekli bir t-conorm ve μ,ν kümeleri $X\times(0,\infty)$ üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan fuzzy kümeleri ise $(X,\mu,\nu,*,\Diamond)$ beşlisine bir sezgisel fuzzy normlu uzay denir. Her $x,y\in X$ ve $s,t>0$ için

(i) $\mu(x,t)+\nu(x,t)\le 1$,

(ii) $\mu(x,t)>0,$

(iii) $\mu(x,t)=1$ ancak ve ancak $x=0,$

(iv) $\alpha\neq 0$ için $\mu(\alpha x,t)=\mu\left(x,\dfrac{t}{|\alpha|}\right),$

(v) $\mu(x,t)*\mu(y,s)\le \mu(x+y,s+t),$

(vi) $\mu(x,.):(0,\infty)\to(0,1]$ sürekli,

(vii) $\lim_{t\to\infty}\mu(x,t)=1$ ve $\lim_{t\to 0}\mu(x,t)=0$,

(viii) $\nu(x,t)<1$,

(ix) $\nu(x,t)=0$ ancak ve ancak $x=0$

(x) $\alpha\neq 0$ için $\nu(\alpha x,t)=\nu\left(x,\frac{t}{|\alpha|}\right)$,

(xi) $\nu(x,t)\Diamond\nu(y,s)\geq\nu(x+y,s+t)$,

(xii) $\nu(x,.):(0,\infty)\rightarrow[0,1)$ sürekli,

(xiii) $\lim_{t\rightarrow\infty}\nu(x,t)=0$ ve $\lim_{t\rightarrow 0}\nu(x,t)=1$.

Bu durumda (μ,ν) ikilisine bir sezgisel fuzzy norm denir [4].

Dördüncü ve beşinci bölümlerde ispatlarda kolaylık olması açısından sezgisel fuzzy normlu uzay için [14]'de verilen aşağıdaki özelliğin sağlandığı kabul edilecektir:

(xiv) Her $a\in[0,1]$ için $a*a=a, a\Diamond a=a$'dır.

Örnek 2.65 $(X,\|.\|)$ bir normlu uzay olsun. Her $a,b\in[0,1]$ için $a*b=a.b$, $a\Diamond b=\min\{a+b,1\}$ olsun ve μ_0 ve ν_0 kümeleri her $t\in\mathbb{R}^+$ için $X\times(0,\infty)$ üzerinde aşağıdaki gibi fuzzy kümeler olsun.

$$\mu_0(x,t)=\frac{t}{t+\|x\|} \text{ ve } \nu_0(x,t)=\frac{\|x\|}{t+\|x\|}.$$

Bu takdirde $(X,\mu_0,\nu_0,*,\Diamond)$ bir sezgisel fuzzy normlu uzaydır [4].

Tanım 2.66 $(X,\mu,\nu,*,\Diamond)$ bir sezgisel fuzzy normlu uzay olsun. Eğer her $t>0$ ve $k\rightarrow\infty$ için $\mu(x_k-x,t)\rightarrow 1$ ve $\nu(x_k-x,t)\rightarrow 0$ ise (x_k) dizisine (μ,ν) sezgisel fuzzy normuna göre $x\in X$'e yakınsar denir. Bu durum $x_k\xrightarrow{(\mu,\nu)}x$ ile gösterilir [4].

Bu tezde sezgisel fuzzy metrik veya norma göre yakınsaklık $x_k\xrightarrow{(\mu,\nu)}x$ veya $(\mu,\nu)-\lim x_k=x$ sembolleri ile gösterilecektir.

Lemma 2.67 $(X,\mu,\nu,*,\lozenge)$ bir sezgisel fuzzy normlu uzay olsun. Eğer μ ve ν,

$$\mu(x,y,t)=\mu(x-y,t) \text{ ve } \nu(x,y,t)=\nu(x-y,t)$$

şeklinde tanımlanırsa (μ,ν) sezgisel fuzzy normu, bir sezgisel fuzzy metrik doğurur [4].

Tanım 2.68 $*$ t-norm, $\lozenge$ t-conorm, $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 * a_2 * ... * a_n$, $\coprod_{i=1}^{n} a_i = a_1\lozenge a_2\lozenge ...\lozenge a_n$, $t>0$, (μ,ν) sezgisel fuzzy norm ve

$$\Phi(x,t)=\prod_{i=1}^{n}\mu(x_i,t) \text{ ve } \Psi(x,t)=\coprod_{i=1}^{n}\nu(x_i,t)$$

olmak üzere (Φ,Ψ) ikilisi sezgisel fuzzy Euclidean norm ve $(\mathbb{R}^n,\mu,\nu,*,\lozenge)$ beşlisi sezgisel fuzzy Euclidean normlu uzay olarak adlandırılır [4].

Tanım 2.69 X ve Y iki sezgisel fuzzy normlu uzay olsun. $f:X\to Y$ dönüşümü için, eğer $x_0\in X$ noktasına yakınsayan her (x_k) dizisi için $f(x_k)$ dizisi Y'de $f(x_0)$ noktasına yakınsarsa f, $x_0\in X$ noktasında süreklidir denir [70].

Tanım 2.70 $(X,\mu,\nu,*,\lozenge)$ bir sezgisel fuzzy normlu uzay ve $A\subset X$ olsun. Her $t>0$ ve her $x\in X$ için $\mu(x_k-x,t)\geq 1-\varepsilon$ ve $\nu(x_k-x,t)\leq 1-\varepsilon$ olacak şekilde A'da en az bir (x_k) dizisi varsa A'ya X sezgisel fuzzy normlu uzayında yoğundur denir [11].

Alaca ve diğ. [15], Banach contraction teoreminin sezgisel fuzzy benzerini aşağıdaki şekilde verdiler:

Teorem 2.71 $(X,\mu,\nu,*,\lozenge)$ bir tam sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. $f:X\to X$ dönüşümü her $x,y\in X$ ve $k\in(0,1)$ için

$$\mu(f(x),f(y),kt)\geq\mu(x,y,t) \text{ ve } \nu(f(x),f(y),kt)\leq\nu(x,y,t)$$

eşitsizliklerini sağlasın. Bu takdirde f bir tek sabit noktaya sahiptir [15].

Gordji ve diğ. [22], aşağıda tanımlanan n-özelliğini kullanarak ikili sabit teoremlerini kısmi sıralı tam sezgisel fuzzy normlu uzaylarda Teorem 2.73'de verdiler:

Tanım 2.72 $(X,\mu,\nu,*,\Diamond)$ bir sezgisel fuzzy normlu uzay olsun. Eğer $x\in X, k>1$ ve $p>0$ olduğunda $\lim_{n\to\infty}\left[\mu\left(x,k^n t\right)\right]^{n^p}=1$ ve $\lim_{n\to\infty}\left[\nu\left(x,k^n t\right)\right]^{n^p}=1$ ise (μ,ν), $X\times(0,\infty)$ üzerinde n-özelliğini sağlar denir [22].

Teorem 2.73 $(X,\ll)$ kısmi sıralı bir küme $(X,\mu,\nu,*,\Diamond)$ n-özelliğine sahip bir tam sezgisel fuzzy normlu uzay olsun. Ayrıca t-norm ve t-conorm işlemcileri her $a,b\in[0,1]$ için $a\Diamond b\le ab\le a*b$ eşitsizliğini sağlasın. $F:X\times X\to X$ ve $g:X\to X$ dönüşümleri verilsin ve F, karışık $g-$monoton özelliğine sahip olsun. $0<k<1$ olduğunda, $g(x)\ll g(u)$ ve $g(y)\gg g(v)$ şartını sağlayan her $x,y,u,v\in X$ için

$$\mu\left(F(x,y)-F(u,v),kt\right)\ge\mu\left(g(x)-g(u),t\right)*\mu\left(g(y)-g(v),t\right),$$

$$\nu\left(F(x,y)-F(u,v),kt\right)\le\nu\left(g(x)-g(u),t\right)\Diamond\nu\left(g(y)-g(v),t\right)$$

olsun. $F(X\times X)\subseteq g(X)$, g sürekli ve g'nin F ile değişmeli olduğu ve ayrıca aşağıdakilerin sağlandığı kabul edilsin.

(i) F süreklidir,

veya

(ii) X aşağıdaki özelliklere sahiptir.

a) (x_k) azalmayan ve $x_k\to x$ ise her $k\in\mathbb{N}$ için $g(x_k)\ll g(x)$,

b) (y_k) artmayan ve $y_k\to y$ ise her $k\in\mathbb{N}$ için $g(y_k)\gg g(y)$.

Eğer $g(x_0)\ll F(x_0,y_0)$ ve $g(y_0)\ll F(y_0,x_0)$ olacak şekilde $x_0,y_0\in X$ varsa F ve g, $X\times X$ 'de bir ikili çakışma noktasına sahiptir [22].

[23]'de Gordji ve diğ. çalışmasından ilham alınarak benzer şekilde üçlü sabit nokta teoremleri sezgisel fuzzy normlu uzaylarda çalışıldı.

BÖLÜM 3

KISMİ SIRALI METRİK UZAYLARDA CONTRACTİVE TİP DÖNÜŞÜMLER İÇİN n-Lİ SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu kısımda, n keyfi bir pozitif tam sayı olmak üzere Bhaskar ve Lakshmikantham [38]'ın vermiş olduğu ikili sabit nokta ve ikili çakışma noktası kavramlarının bir genelleştirmesi olan n-li sabit nokta ve n-li çakışma noktası kavramı tanıtılıp, kısmi sıralı tam metrik uzaylarda bir contraction şartını sağlayan karışık g-monoton dönüşümünün n-li sabit noktalarının varlığına ve tekliğine ilişkin teoremler verilecek ve ispatlanacaktır. İlk olarak bu amaç için bazı yeni tanımlar verilecektir.

Tanım 3.1 $(X,\ll)$ bir kısmi sıralı küme ve $F: X^n \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $F(x^1, x^2, x^3, \ . \ . \ . \ , x^n)$ tek bileşenlerinde monoton azalmayan, çift bileşenlerinde monoton artmayan ise F karışık monoton özelliğine sahiptir denir. Yani her $x^1, x^2, x^3, \ . \ . \ . \ , x^n \in X$ için

$$y^1, z^1 \in X, y^1 \ll z^1 \Rightarrow F(y^1, x^2, x^3, ..., x^n) \ll F(z^1, x^2, x^3, ..., x^n)$$

$$y^2, z^2 \in X, y^2 \ll z^2 \Rightarrow F(x^1, y^2, x^3, ..., x^n) \gg F(x^1, z^2, x^3, ..., x^n)$$

$$\vdots \tag{3.1}$$

$$y^n, z^n \in X, y^n \ll z^n \Rightarrow F(x^1, x^2, x^3, ..., y^n) \ll F(x^1, x^2, x^3, ..., z^n) \qquad \text{(Eğer } n \text{ tek ise)}$$

$$y^n, z^n \in X, y^n \ll z^n \Rightarrow F(x^1, x^2, x^3, ..., y^n) \gg F(x^1, x^2, x^3, ..., z^n) \qquad \text{(Eğer } n \text{ çift ise)}$$

sağlanır.

Tanım 3.2 X boştan farklı bir küme olsun ve $F: X^n \to X$ dönüşümü verilsin. Eğer

$$
\begin{aligned}
&F(x^1,x^2,x^3,...,x^n)=x^1\\
&F(x^2,x^3,...,x^n,x^1)=x^2\\
&\qquad\vdots\\
&F(x^n,x^1,x^2,...,x^{n-1})=x^n
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

ise $(x^1,x^2,x^3,...,x^n)\in X^n$ elemanına F'nin n-li sabit noktası denir.

Tanım 3.3 $(X,\ll)$ kısmi sıralı bir küme ve $F:X^n\to X$ ve $g:X\to X$ dönüşümler olsun. Eğer $F(x^1,x^2,x^3,...,x^n)$ tek bileşenlerinde g-monoton azalmayan, çift bileşenlerinde g-monoton artmayan ise F karışık g-monoton özelliğine sahiptir denir. Yani her $x^1,x^2,x^3,...,x^n\in X$ için

$$
\begin{aligned}
&y^1,z^1\in X, g(y^1)\ll g(z^1)\Rightarrow F(y^1,x^2,x^3,...,x^n)\ll F(z^1,x^2,x^3,...,x^n)\\
&y^2,z^2\in X, g(y^2)\ll g(z^2)\Rightarrow F(x^1,y^2,x^3,...,x^n)\gg F(x^1,z^2,x^3,...,x^n)\\
&\qquad\vdots\\
&y^n,z^n\in X, g(y^n)\ll g(z^n)\Rightarrow F(x^1,x^2,x^3,...,y^n)\ll F(x^1,x^2,x^3,...,z^n)\quad \text{(Eğer } n \text{ tek ise)}\\
&y^n,z^n\in X, g(y^n)\ll g(z^n)\Rightarrow F(x^1,x^2,x^3,...,y^n)\gg F(x^1,x^2,x^3,...,z^n)\quad \text{(Eğer } n \text{ çift ise)}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

sağlanır. Eğer $g(x)=x$ ise bu tanım **Tanım 3.1**'e kısıtlanır.

Tanım 3.4 X boştan farklı bir küme ve $F:X^n\to X$ ve $g:X\to X$ dönüşümleri verilsin. Eğer

$$
\begin{aligned}
&F(x^1,x^2,x^3,...,x^n)=g(x^1)\\
&F(x^2,x^3,...,x^n,x^1)=g(x^2)\\
&\qquad\vdots\\
&F(x^n,x^1,x^2,...,x^{n-1})=g(x^n)
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

ise $(x^1,x^2,x^3,...,x^n)\in X^n$ elemanı $F:X^n\to X$ ve $g:X\to X$'nin n-li çakışma noktası olarak adlandırılır.

Eğer $g(x)=x$ ise $(x^1,x^2,x^3,...,x^n)\in X^n$, F'nin n-li sabit noktası olur.

Tanım 3.5 $(X,\ll)$ bir kısmi sıralı küme $F:X^n\to X$ ve $g:X\to X$ dönüşümler olsun. Eğer her $x^1,x^2,x^3,...,x^n\in X$ için

$$g\left(F(x^1,x^2,x^3,...,x^n)\right)=F\left(g\left(x^1\right),g\left(x^2\right),g\left(x^3\right),...,g\left(x^n\right)\right) \quad (3.5)$$

ise F ve g değişmeli (commutative) olarak adlandırılır.

3.1 n-li çakışma noktasının varlığı

Aşağıda verilecek olan teorem ve sonuçların ifadesini kısaltmak amacıyla $(X,\ll)$ kümesi ve $F:X^n\to X$ için aşağıdaki Varsayım göz önüne alınacaktır:

Varsayım Aşağıdaki şartlardan birinin sağlandığı varsayılsın.

(i) F süreklidir.

veya

(ii) $(X,\ll)$ aşağıdaki şartları sağlar.

(a) Azalmayan (x_k) dizisi için $x_k\to x$ ise, her k için $x_k\ll x$'dir.

(b) Artmayan (y_k) dizisi için $y_k\to y$ ise, her k için $y_k\gg y$'dir.

Teorem 3.6 $\ll$, (X,d) tam metrik uzayı üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. $F:X^n\to X$ ve $g:X\to X$ dönüşümleri verilsin ve F karışık g-monoton özelliğine sahip olsun. $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ sürekli bir comparison fonksiyon olmak üzere $g\left(x^1\right)\ll g\left(y^1\right)$, $g\left(x^2\right)\gg g\left(y^2\right)$,..., $g\left(x^n\right)\ll g\left(y^n\right)$(eğer n tek ise), $g\left(x^n\right)\gg g\left(y^n\right)$(eğer n çift ise) şeklindeki tüm $x^1,x^2,x^3,...,x^n,y^1,y^2,y^3,...,y^n\in X$ için $F:X^n\to X$ ve $g:X\to X$'nin aşağıdaki şartı sağladığı kabul edilsin:

$$\begin{aligned}&d\left(F(x^1,x^2,x^3,...,x^n),F(y^1,y^2,y^3,...,y^n)\right)\\&\le\varphi\left(\frac{d\left(g(x^1),g(y^1)\right)+d\left(g(x^2),g(y^2)\right)+...+d\left(g(x^n),g(y^n)\right)}{n}\right).\end{aligned} \quad (3.6)$$

$F(X^n) \subset g(X)$, g'nin sürekli ve F ile değişmeli olduğu varsayılsın. Ayrıca **Varsayım**'ın sağlandığı kabul edilsin. Eğer

$$
\begin{aligned}
& g\left(x_0^1\right) \ll F\left(x_0^1, x_0^2, x_0^3, \ldots, x_0^n\right) \\
& g\left(x_0^2\right) \gg F\left(x_0^2, x_0^3, \ldots, x_0^n, x_0^1\right) \\
& \qquad \vdots \\
& g\left(x_0^n\right) \ll F\left(x_0^n, x_0^1, x_0^2, x_0^3, \ldots, x_0^{n-1}\right) \quad (\text{eğer } n \text{ tek ise}) \\
& g\left(x_0^n\right) \gg F\left(x_0^n, x_0^1, x_0^2, x_0^3, \ldots, x_0^{n-1}\right) \quad (\text{eğer } n \text{ çift ise})
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

olacak şekilde $x_0^1, x_0^2, x_0^3, \ldots, x_0^n \in X$ varsa bu takdirde

$$
\begin{aligned}
& F(x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n) = g\left(x^1\right) \\
& F(x^2, x^3, \ldots, x^n, x^1) = g\left(x^2\right) \\
& \qquad \vdots \\
& F(x^n, x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}) = g\left(x^n\right)
\end{aligned}
$$

eşitliklerini sağlayan $x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n \in X$ vardır, yani F ve g, n-li çakışma noktasına sahiptir.

İspat: Adım 1: İlk olarak $\left(x_k^1\right), \left(x_k^2\right), \left(x_k^3\right), \ldots, \left(x_k^n\right)$ dizileri kurulacaktır. $x_0^1, x_0^2, x_0^3, \ldots, x_0^n \in X$, (3.7)'deki gibi olsun. $F(X^n) \subset g(X)$ olduğundan $k = 1, 2, \ldots., n$ için $\left(x_k^1\right), \left(x_k^2\right), \left(x_k^3\right), \ldots, \left(x_k^n\right)$ dizileri aşağıdaki gibi kurulabilir:

$$
\begin{aligned}
& g\left(x_k^1\right) = F\left(x_{k-1}^1, x_{k-1}^2, x_{k-1}^3, \ldots, x_{k-1}^n\right) \\
& g\left(x_k^2\right) = F\left(x_{k-1}^2, x_{k-1}^3, \ldots, x_{k-1}^n, x_{k-1}^1\right) \\
& \qquad \vdots \\
& g\left(x_k^n\right) = F\left(x_{k-1}^n, x_{k-1}^1, x_{k-1}^2, \ldots, x_{k-1}^{n-1}\right).
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Adım 2: Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$
\begin{aligned}
&g\left(x_{k-1}^{1}\right) \ll g\left(x_{k}^{1}\right)\\
&g\left(x_{k-1}^{2}\right) \gg g\left(x_{k}^{2}\right)\\
&\qquad\quad\vdots\\
&g\left(x_{k-1}^{n}\right) \ll g\left(x_{k}^{n}\right) \quad (\text{eğer } n \text{ tek ise})\\
&g\left(x_{k-1}^{n}\right) \gg g\left(x_{k}^{n}\right) \quad (\text{eğer } n \text{ çift ise})
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

olduğu gösterilecektir. Bunun için tümevarım yöntemi uygulanacaktır. (3.7)'den dolayı (3.9)'daki sıralamalar $k=1$ için sağlanır. Yani

$$
\begin{aligned}
&g\left(x_{0}^{1}\right) \ll F\left(x_{0}^{1}, x_{0}^{2}, x_{0}^{3}, \ldots, x_{0}^{n}\right)\\
&g\left(x_{0}^{2}\right) \gg F\left(x_{0}^{2}, x_{0}^{3}, \ldots, x_{0}^{n}, x_{0}^{1}\right)\\
&\vdots\\
&g\left(x_{0}^{n}\right) \ll F\left(x_{0}^{n}, x_{0}^{1}, x_{0}^{2}, x_{0}^{3}, \ldots, x_{0}^{n-1}\right) \quad (\text{eğer } n \text{ tek ise})\\
&g\left(x_{0}^{n}\right) \gg F\left(x_{0}^{n}, x_{0}^{1}, x_{0}^{2}, x_{0}^{3}, \ldots, x_{0}^{n-1}\right) \quad (\text{eğer } n \text{ çift ise})
\end{aligned}
$$

dir. Böylece iddia $k=1$ için doğrudur. (3.9)'daki sıralamaların $k=m$ için sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&g\left(x_{m-1}^{1}\right) \ll g\left(x_{m}^{1}\right)\\
&g\left(x_{m-1}^{2}\right) \gg g\left(x_{m}^{2}\right)\\
&\vdots\\
&g\left(x_{m-1}^{n}\right) \ll g\left(x_{m}^{n}\right) \quad (\text{eğer } n \text{ tek ise})\\
&g\left(x_{m-1}^{n}\right) \gg g\left(x_{m}^{n}\right) \quad (\text{eğer } n \text{ çift ise})
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

dir. Şimdi (3.9)'daki sıralamaların $k=m+1$ için sağlandığı gösterilmelidir. (3.10) ile birlikte F'nin karışık g - monoton özelliği ve (3.8) göz önüne alınarak

$$
\begin{aligned}
g\left(x_{m}^{1}\right) &= F\left(x_{m-1}^{1}, x_{m-1}^{2}, \ldots, x_{m-1}^{n}\right)\\
&\ll F\left(x_{m}^{1}, x_{m-1}^{2}, \ldots, x_{m-1}^{n}\right)\\
&\ll F\left(x_{m}^{1}, x_{m}^{2}, \ldots, x_{m-1}^{n}\right)\\
&\qquad\vdots\\
&\ll F\left(x_{m}^{1}, x_{m}^{2}, \ldots, x_{m}^{n-1}, x_{m-1}^{n}\right)\\
&\ll F\left(x_{m}^{1}, x_{m}^{2}, \ldots, x_{m}^{n-1}, x_{m}^{n}\right) = g\left(x_{m+1}^{1}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g\left(x_m^2\right) &= F\left(x_{m-1}^2, x_{m-1}^3, \ldots, x_{m-1}^n, x_{m-1}^1\right) \\
&\gg F\left(x_m^2, x_{m-1}^3, \ldots, x_{m-1}^n, x_{m-1}^1\right) \\
&\gg F\left(x_m^2, x_m^3, \ldots, x_{m-1}^n, x_{m-1}^1\right) \\
&\quad \vdots \\
&\gg F\left(x_m^2, x_m^3, \ldots, x_m^1, x_{m-1}^1\right) \\
&\gg F\left(x_m^2, x_m^3, \ldots, x_m^n, x_m^1\right) = g\left(x_{m+1}^2\right),
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
g\left(x_m^n\right) &= F\left(x_{m-1}^n, x_{m-1}^1, x_{m-1}^2, \ldots, x_{m-1}^{n-1}\right) \\
&\ll F\left(x_m^n, x_{m-1}^1, x_{m-1}^2, \ldots, x_{m-1}^{n-1}\right) \\
&\ll F\left(x_m^n, x_m^1, x_{m-1}^2, \ldots, x_{m-1}^{n-1}\right) \qquad \text{(eğer } n \text{ tek ise)} \\
&\quad \vdots \\
&\ll F\left(x_m^n, x_m^1, x_m^2, \ldots, x_{m-1}^{n-1}\right) \\
&\ll F\left(x_m^n, x_m^1, x_m^2, \ldots, x_m^{n-1}\right) = g\left(x_{m+1}^n\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g\left(x_m^n\right) &= F\left(x_{m-1}^n, x_{m-1}^1, x_{m-1}^2, \ldots, x_{m-1}^{n-1}\right) \\
&\gg F\left(x_m^n, x_{m-1}^1, x_{m-1}^2, \ldots, x_{m-1}^{n-1}\right) \\
&\gg F\left(x_m^n, x_m^1, x_{m-1}^2, \ldots, x_{m-1}^{n-1}\right) \qquad \text{(eğer } n \text{ çift ise)} \\
&\quad \vdots \\
&\gg F\left(x_m^n, x_m^1, x_m^2, \ldots, x_{m-1}^{n-1}\right) \\
&\gg F\left(x_m^n, x_m^1, x_m^2, \ldots, x_m^{n-1}\right) = g\left(x_{m+1}^n\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece (3.9) her $k \in \mathbb{N}$ için sağlanır. Dolayısıyla aşağıdaki (3.11) sıralamaları yazılabilir:

$$
\begin{aligned}
&\ldots \gg g\left(x_k^1\right) \gg g\left(x_{k-1}^1\right) \gg \ldots \gg g\left(x_1^1\right) \gg g\left(x_0^1\right) \\
&\ldots \ll g\left(x_k^2\right) \ll g\left(x_{k-1}^2\right) \ll \ldots \ll g\left(x_1^2\right) \ll g\left(x_0^2\right) \\
&\qquad \vdots \\
&\ldots \gg g\left(x_k^n\right) \gg g\left(x_{k-1}^n\right) \gg \ldots \gg g\left(x_1^n\right) \gg g\left(x_0^n\right) \quad \text{(Eğer } n \text{ tek ise)} \\
&\ldots \ll g\left(x_k^n\right) \ll g\left(x_{k-1}^n\right) \ll \ldots \ll g\left(x_1^n\right) \ll g\left(x_0^n\right) \quad \text{(Eğer } n \text{ çift ise)}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Adım 3: $g\left(x_k^1\right), g\left(x_k^2\right), g\left(x_k^3\right), ..., g\left(x_k^n\right)$ dizilerinin Cauchy dizisi olduğu gösterilecektir.

Bu amaç için

$$\delta_k = d\left(g(x_k^1), g(x_{k+1}^1)\right) + d\left(g(x_k^2), g(x_{k+1}^2)\right) + ... + d\left(g(x_k^n), g(x_{k+1}^n)\right)$$

tanımlansın. $\left(\delta_k\right)$ için

$$\delta_{k+1} \leq n.\varphi\left(\frac{\delta_k}{n}\right) \tag{3 .12}$$

sağlanır. Çünkü (3.6), (3.8) ve (3.11) kullanılarak

$$\begin{aligned} & d\left(g(x_{k+1}^1), g(x_{k+2}^1)\right) \\ & = d\left(F\left(x_k^1, x_k^2 ..., x_k^n\right), F\left(x_{k+1}^1, x_{k+1}^2, ..., x_{k+1}^n\right)\right) \\ & \leq \varphi\left(\frac{d\left(g(x_k^1), g(x_{k+1}^1)\right) + d\left(g(x_k^2), g(x_{k+1}^2)\right) + ... + d\left(g(x_k^n), g(x_{k+1}^n)\right)}{n}\right) \\ & \leq \varphi\left(\frac{\delta_k}{n}\right), \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} & d\left(g(x_{k+1}^2), g(x_{k+2}^2)\right) \\ & = d\left(F\left(x_k^2, ..., x_k^n, x_k^1\right), F\left(x_{k+1}^2, ..., x_{k+1}^n, x_{k+1}^1\right)\right) \\ & \leq \varphi\left(\frac{d\left(g(x_k^2), g(x_{k+1}^2)\right) + ... + d\left(g(x_k^n), g(x_{k+1}^n)\right) + d\left(g(x_k^1), g(x_{k+1}^1)\right)}{n}\right) \\ & \leq \varphi\left(\frac{\delta_k}{n}\right), \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} & d\left(g(x_{k+1}^n), g(x_{k+2}^n)\right) \\ & = d\left(F\left(x_k^n, x_k^1, ..., x_k^{n-1},\right), F\left(x_{k+1}^n, x_{k+1}^1, ..., x_{k+1}^{n-1},\right)\right) \\ & \leq \varphi\left(\frac{d\left(g(x_k^n), g(x_{k+1}^n)\right) + d\left(g(x_k^1), g(x_{k+1}^1)\right) + ... + d\left(g(x_k^{n-1}), g(x_{k+1}^{n-1})\right)}{n}\right) \\ & \leq \varphi\left(\frac{\delta_k}{n}\right) \end{aligned} \tag{3.15}$$

yazılır ve (3.13)-(3.15) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$d\left(g(x_{k+1}^1), g(x_{k+2}^1)\right) + d\left(g(x_{k+1}^2), g(x_{k+2}^2)\right) + \ldots + d\left(g(x_{k+1}^n), g(x_{k+2}^n)\right) \le n.\varphi\left(\frac{\delta_k}{n}\right) \qquad (3.16)$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.12) eşitsizliği gösterilmiş olur.

(3.12) eşitsizliğinde her $t > 0$ için $\varphi(t) < t$ olduğu kullanılırsa $\delta_{k+1} \le n.\varphi\left(\frac{\delta_k}{n}\right) < n.\frac{\delta_k}{n} = \delta_k$ olduğu görülür. Buradan (δ_k)'nın monoton azalan bir dizi olduğu sonucuna varılır. Ayrıca (δ_k) alttan sınırlı olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} \delta_k = \delta \qquad (3.17)$$

olacak şekilde $\delta \ge 0$ vardır. Şimdi $\delta = 0$ olduğu gösterilecektir:

$\delta > 0$ olduğu varsayılsın. (3.12)'nin her iki tarafının $\delta_k \to \delta$ için limiti alınırsa ve her $r > 0$ için $\lim\limits_{r\to t} \varphi(r) < t$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\delta = \lim_{k\to\infty} \delta_{k+1} \le \lim_{k\to\infty} n.\varphi\left(\frac{\delta_k}{n}\right) = \lim_{\delta_k\to\delta} n.\varphi\left(\frac{\delta_k}{n}\right) < n.\frac{\delta}{n} = \delta \qquad (3.18)$$

elde edilir ki bu da bir çelişkidir. Yani $\delta = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla

$$\lim_{k\to\infty} d\left(g(x_k^1), g(x_{k+1}^1)\right) + d\left(g(x_k^2), g(x_{k+1}^2)\right) + \ldots + d\left(g(x_k^n), g(x_{k+1}^n)\right) = 0 \qquad (3.19)$$

dır. Şimdi $g\left(x_k^1\right), g\left(x_k^2\right), g\left(x_k^3\right), \ldots, g\left(x_k^n\right)$'nın Cauchy dizileri olduğunu gösterelim. Bunun için $g\left(x_k^1\right), g\left(x_k^2\right), g\left(x_k^3\right), \ldots, g\left(x_k^n\right)$'den en az birinin Cauchy dizisi olmadığı varsayılsın. Böylece

$$\begin{aligned} t_k = d\left(g(x_{j(k)}^1), g(x_{l(k)}^1)\right) + d\left(g(x_{j(k)}^2), g(x_{l(k)}^2)\right) + \\ \ldots + d\left(g(x_{j(k)}^n), g(x_{l(k)}^n)\right) \ge \varepsilon \end{aligned} \qquad (3.20)$$

olacak şekilde $j(k) > l(k) \geq k$ 'yı sağlayan $j(k), l(k)$ tamsayı alt dizileri bulunabilir. Ayrıca, $j(k)$, $l(k)$'dan büyük, $j(k) > l(k) \geq k$ ve (3.20)'yi sağlayan en küçük tamsayı olacak şekilde $j(k)$ seçilebilir. Dolayısıyla

$$d\left(g(x^1_{j(k)-1}), g(x^1_{l(k)})\right) + d\left(g(x^2_{j(k)-1}), g(x^2_{l(k)})\right) + \ldots + d\left(g(x^n_{j(k)-1}), g(x^n_{l(k)})\right) < \varepsilon \tag{3.21}$$

dur. Üçgen eşitsizliği kullanılarak ve (3.20) ve (3.21) göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq t_k \\
&= d\left(g(x^1_{j(k)}), g(x^1_{l(k)})\right) + d\left(g(x^2_{j(k)}), g(x^2_{l(k)})\right) + \ldots + d\left(g(x^n_{j(k)}), g(x^n_{l(k)})\right) \\
&\leq d\left(g(x^1_{j(k)}), g(x^1_{j(k)-1})\right) + d\left(g(x^1_{j(k)-1}), g(x^1_{l(k)})\right) \\
&\quad + d\left(g(x^2_{j(k)}), g(x^2_{j(k)-1})\right) + d\left(g(x^2_{j(k)-1}), g(x^2_{l(k)})\right) \\
&\quad + \ldots + \\
&\quad d\left(g(x^n_{j(k)}), g(x^n_{j(k)-1})\right) + d\left(g(x^n_{j(k)-1}), g(x^n_{l(k)})\right) \\
&< d\left(g(x^1_{j(k)}), g(x^1_{j(k)-1})\right) + d\left(g(x^2_{j(k)}), g(x^2_{j(k)-1})\right) + \ldots + d\left(g(x^n_{j(k)}), g(x^n_{j(k)-1})\right) + \varepsilon \\
&= \delta_{j(k)-1} + \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.22}$$

elde edilir. (3.22)'de $k \to \infty$ için limit alınır ve (3.19) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} t_k \\
&= \lim_{k\to\infty}\left[d\left(g\left(x^1_{j(k)}\right), g\left(x^1_{l(k)}\right)\right) + d\left(g\left(x^2_{j(k)}\right), g\left(x^2_{l(k)}\right)\right) + \ldots + d\left(g\left(x^n_{j(k)}\right), g\left(x^n_{l(k)}\right)\right)\right] \\
&= \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.23}$$

dır. (3.20)'ye tekrardan aşağıdaki gibi üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
t_k &= d\left(g(x^1_{j(k)}), g(x^1_{l(k)})\right) + d\left(g(x^2_{j(k)}), g(x^2_{l(k)})\right) + \ \ldots + d\left(g(x^n_{j(k)}), g(x^n_{l(k)})\right) \\
&\le\ d\left(g(x^1_{j(k)}), g(x^1_{j(k)+1})\right) + d\left(g(x^1_{j(k)+1}), g(x^1_{l(k)+1})\right) + d\left(g(x^1_{l(k)+1}), g(x^1_{l(k)})\right) \\
&+ d\left(g(x^2_{j(k)}), g(x^2_{j(k)+1})\right) + d\left(g(x^2_{j(k)+1}), g(x^2_{l(k)+1})\right) + d\left(g(x^2_{l(k)+1}), g(x^2_{l(k)})\right) \\
&\qquad + \ldots + \\
&\ d\left(g(x^n_{j(k)}), g(x^n_{j(k)+1})\right) + d\left(g(x^n_{j(k)+1}), g(x^n_{l(k)+1})\right) + d\left(g(x^n_{l(k)+1}), g(x^n_{l(k)})\right) \\
&\le \delta_{j(k)} + \delta_{l(k)} + d\left(g(x^1_{j(k)+1}), g(x^1_{l(k)+1})\right) + d\left(g(x^2_{j(k)+1}), g(x^2_{l(k)+1})\right) + \\
&\ldots + d\left(g(x^n_{j(k)+1}), g(x^n_{l(k)+1})\right)
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

yazılır. $j(k) > l(k)$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
& g\left(x^1_{j(k)}\right) \gg g\left(x^1_{l(k)}\right) \\
& g\left(x^2_{j(k)}\right) \ll g\left(x^2_{l(k)}\right) \\
& \qquad \vdots \\
& g\left(x^n_{j(k)}\right) \gg g\left(x^n_{l(k)}\right) \qquad \text{(Eğer } n \text{ tek ise)} \\
& g\left(x^n_{j(k)}\right) \ll g\left(x^n_{l(k)}\right) \qquad \text{(Eğer } n \text{ çift ise)}
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

dir. Böylelikle, (3.25), (3.8) ve (3.6)’dan

$$
\begin{aligned}
& d\left(g(x^1_{j(k)+1}), g(x^1_{l(k)+1})\right) \\
&= d\left(F\left(x^1_{j(k)}, x^2_{j(k)}, \ldots, x^n_{j(k)}\right), F\left(x^1_{l(k)}, x^2_{l(k)}, \ldots, x^n_{l(k)}\right)\right) \\
&\le \varphi\left(\frac{1}{n}\left[d\left(g(x^1_{j(k)}), g(x^1_{l(k)})\right) + d\left(g(x^2_{j(k)}), g(x^2_{l(k)})\right) + \ldots + d\left(g(x^n_{j(k)}), g(x^n_{l(k)})\right)\right]\right) \\
&= \varphi\left(\frac{t_k}{n}\right),
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

$$
\begin{aligned}
& d\left(g(x^2_{j(k)+1}), g(x^2_{l(k)+1})\right) \\
&= d\left(F\left(x^2_{j(k)}, \ldots, x^n_{j(k)}, x^1_{j(k)}\right), F\left(x^2_{l(k)}, \ldots, x^n_{l(k)}, x^1_{l(k)}\right)\right) \\
&\le \varphi\left(\frac{1}{n}\left[d\left(g(x^2_{j(k)}), g(x^2_{l(k)})\right) + \ldots + d\left(g(x^n_{j(k)}), g(x^n_{l(k)})\right) + d\left(g(x^1_{j(k)}), g(x^1_{l(k)})\right)\right]\right) \\
&= \varphi\left(\frac{t_k}{n}\right),
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
& d\left(g(x^n_{j(k)+1}), g(x^n_{l(k)+1})\right) \\
& = d\left(F\left(x^n_{j(k)}, x^1_{j(k)}, x^2_{j(k)}, \ldots, x^{n-1}_{j(k)}\right), F\left(x^n_{l(k)}, x^1_{l(k)}, x^2_{l(k)}, \ldots, x^{n-1}_{l(k)}\right)\right) \\
& \leq \varphi\left(\frac{1}{n}\left[d\left(g(x^n_{j(k)}), g(x^n_{l(k)})\right) + d\left(g(x^1_{j(k)}), g(x^1_{l(k)})\right) + \ldots + d\left(g(x^{n-1}_{j(k)}), g(x^{n-1}_{l(k)})\right)\right]\right) \\
& = \varphi\left(\frac{t_k}{n}\right)
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

yazılır. (3.26)-(3.28) taraf tarafa toplanıp (3.24) ile birlikte düşünülürse ve her $t > 0$ için $\varphi(t) < t$ olduğu kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
& t_k \leq \delta_{j(k)+1} + \delta_{l(k)+1} \\
& + d\left(g(x^1_{j(k)+1}), g(x^1_{l(k)+1})\right) + d\left(g(x^2_{j(k)+1}), g(x^2_{l(k)+1})\right) + \ldots + d\left(g(x^n_{j(k)+1}), g(x^n_{l(k)+1})\right) \\
& < \delta_{j(k)+1} + \delta_{l(k)+1} + n.\varphi\left(\frac{t_k}{n}\right) \\
& < \delta_{j(k)+1} + \delta_{l(k)+1} + n.\frac{t_k}{n}
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

eşitsizliği bulunur. $k \to \infty$ için (3.29)'da limit alınırsa $\varepsilon < \varepsilon$ çelişkisi elde edilir. Bu çelişki $g\left(x^1_k\right), g\left(x^2_k\right), g\left(x^3_k\right), \ldots, g\left(x^n_k\right)$'dan en az birinin Cauchy dizisi olmadığı varsayımından elde edildiğinden $g\left(x^1_k\right), g\left(x^2_k\right), g\left(x^3_k\right), \ldots, g\left(x^n_k\right)$'nin Cauchy dizileri olduğu anlaşılır ve X tam metrik uzay olduğundan

$$
\lim_{k\to\infty} g\left(x^1_k\right) = x^1, \lim_{k\to\infty} g\left(x^2_k\right) = x^2, \lim_{k\to\infty} g\left(x^3_k\right) = x^3, \ldots, \lim_{k\to\infty} g\left(x^n_k\right) = x^n \tag{3.30}
$$

olacak şekilde $x^1, x^2, \ldots, x^n \in X$ vardır.

Adım 4: Bu adımda Varsayım'daki şartlar altında F ve g'nin n-li çakışma noktasına sahip olduğu gösterilecektir.

g sürekli olduğundan (3.30)'dan,

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} g\left(g\left(x_k^1\right)\right) = g\left(x^1\right),\\
&\lim_{k\to\infty} g\left(g\left(x_k^2\right)\right) = g\left(x^2\right),\\
&\lim_{k\to\infty} g\left(g\left(x_k^3\right)\right) = g\left(x^3\right),\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&\lim_{k\to\infty} g\left(g\left(x_k^n\right)\right) = g\left(x^n\right)
\end{aligned} \tag{3.31}$$

olduğu yazılabilir. (3.8) ile birlikte F ve g'nin değişmeli olduğu göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
&g\left(g\left(x_{k+1}^1\right)\right) = g\left(F\left(x_k^1, x_k^2, ..., x_k^n\right)\right) = F\left(g\left(x_k^1\right), g\left(x_k^2\right), ..., g\left(x_k^n\right)\right)\\
&g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right) = g\left(F\left(x_k^2, ..., x_k^n, x_k^1\right)\right) = F\left(g\left(x_k^2\right), ..., g\left(x_k^n\right), g\left(x_k^1\right)\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\vdots\\
&g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right) = g\left(F\left(x_k^n, x_k^1, ..., x_k^{n-1}\right)\right) = F\left(g\left(x_k^n\right), g\left(x_k^1\right), ..., g\left(x_k^{n-1}\right)\right)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

olduğu görülür. Amaç, aşağıdaki eşitlikleri göstermektir.

$$\begin{aligned}
&F\left(x^1, x^2, ..., x^n\right) = g\left(x^1\right)\\
&F\left(x^2, ..., x^n, x^1\right) = g\left(x^2\right)\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&F\left(x^n, x^1, ..., x^{n-1}\right) = g\left(x^n\right).
\end{aligned}$$

İlk olarak Varsayım'daki (i) şartının sağlandığını kabul edelim. Bu takdirde (3.8), (3.30) ve (3.32) kullanılarak

$$\begin{aligned}
g\left(x^1\right) &= \lim_{k\to\infty} g\left(g\left(x_{k+1}^1\right)\right) = \lim_{k\to\infty} g\left(F\left(x_k^1, x_k^2, ..., x_k^n\right)\right)\\
&= \lim_{k\to\infty} F\left(g\left(x_k^1\right), g\left(x_k^2\right), ..., g\left(x_k^n\right)\right)\\
&= F\left(\lim_{k\to\infty} g\left(x_k^1\right), \lim_{k\to\infty} g\left(x_k^2\right), ..., \lim_{k\to\infty} g\left(x_k^n\right)\right)\\
&= F\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

elde edilir. Benzer olarak,

$$
\begin{aligned}
g\left(x^{2}\right)&=\lim_{k\to\infty} g\left(g\left(x_{k+1}^{2}\right)\right)=\lim_{k\to\infty} g\left(F\left(x_{k}^{2},\dots,x_{k}^{n},x_{k}^{1}\right)\right)\\
&=\lim_{k\to\infty} F\left(g\left(x_{k}^{2}\right),\dots,g\left(x_{k}^{n}\right),g\left(x_{k}^{1}\right)\right)\\
&=F\left(\lim_{k\to\infty} g\left(x_{k}^{2}\right),\dots,\lim_{k\to\infty} g\left(x_{k}^{n}\right),\lim_{k\to\infty} g\left(x_{k}^{1}\right)\right)\\
&=F\left(x^{2},\dots,x^{n},x^{1}\right),
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
g\left(x^{n}\right)&=\lim_{k\to\infty} g\left(g\left(x_{k+1}^{n}\right)\right)=\lim_{k\to\infty} g\left(F\left(x_{k}^{n},x_{k}^{1},\dots,x_{k}^{n-1}\right)\right)\\
&=\lim_{k\to\infty} F\left(g\left(x_{k}^{n}\right),g\left(x_{k}^{1}\right),\dots,g\left(x_{k}^{n-1}\right)\right)\\
&=F\left(\lim_{k\to\infty} g\left(x_{k}^{n}\right),\lim_{k\to\infty} g\left(x_{k}^{1}\right),\dots,\lim_{k\to\infty} g\left(x_{k}^{n-1}\right)\right)\\
&=F\left(x^{n},x^{1},\dots,x^{n-1}\right)
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

dir. Böylece

$$g\left(x^{1}\right)=F\left(x^{1},x^{2},\dots,x^{n}\right),g\left(x^{2}\right)=F\left(x^{2},\dots,x^{n},x^{1}\right),\cdots,g\left(x^{n}\right)=F\left(x^{n},x^{1},\dots,x^{n-1}\right)$$

elde edilir.

Şimdi Varsayım'daki (ii) şartının sağlandığı kabul edilsin. Eğer n tek ise $g\left(x_{k}^{1}\right),g\left(x_{k}^{3}\right),\dots,g\left(x_{k}^{n}\right)$ azalmayan ve $g\left(x_{k}^{2}\right),g\left(x_{k}^{4}\right),\dots,g\left(x_{k}^{n-1}\right)$ artmayan olduğundan, eğer n çift ise $g\left(x_{k}^{1}\right),g\left(x_{k}^{3}\right),\dots,g\left(x_{k}^{n-1}\right)$ azalmayan ve $g\left(x_{k}^{2}\right),g\left(x_{k}^{4}\right),\dots,g\left(x_{k}^{n}\right)$ artmayan olduğundan

$g\left(x_{k}^{1}\right)\to x^{1},g\left(x_{k}^{2}\right)\to x^{2},g\left(x_{k}^{3}\right)\to x^{3},\dots,g\left(x_{k}^{n}\right)\to x^{n}$ olduğu göz önüne alınarak her k için

$$
\begin{aligned}
&g\left(x_{k}^{1}\right)\ll x^{1},g\left(x_{k}^{2}\right)\gg x^{2},g\left(x_{k}^{3}\right)\ll x^{3},\dots,g\left(x_{k}^{n}\right)\ll x^{n}\text{(Eğer } n \text{ tek ise)}\\
&g\left(x_{k}^{n}\right)\gg x^{n}\text{(Eğer } n \text{ çift ise)}
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

elde edilir. Böylece üçgen eşitsizliği ve (3.32) ile

$$
\begin{aligned}
& d\left(g\left(x^1\right), F\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)\right) \\
& \leq d\left(g\left(x^1\right), g\left(g\left(x_{k+1}^1\right)\right)\right)+d\left(g\left(g\left(x_{k+1}^1\right)\right), F\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)\right) \\
& =d\left(g\left(x^1\right), g\left(x_{k+1}^1\right)\right)+d\left(g\left(F\left(x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n\right)\right), F\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)\right) \\
& =d\left(g\left(x^1\right), g\left(x_{k+1}^1\right)\right)+d\left(F\left(g\left(x_k^1\right), g\left(x_k^2\right), \ldots, g\left(x_k^n\right)\right), F\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)\right) \\
& \leq d\left(g\left(x^1\right), g\left(x_{k+1}^1\right)\right)+\varphi\left(\frac{1}{n}\left[\begin{array}{l}
d\left(g\left(g\left(x_k^1\right)\right), g\left(x^1\right)\right)+d\left(g\left(g\left(x_k^2\right)\right), g\left(x^2\right)\right)+ \\
\ldots+d\left(g\left(g\left(x_k^n\right)\right), g\left(x^n\right)\right)
\end{array}\right]\right)
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

yazılır. $k \rightarrow \infty$ için (3.37)'de limit alınırsa $d\left(g\left(x^1\right), F\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)\right) \leq 0$ olur. Böylece $g\left(x^1\right)=F\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$ elde edilir. Benzer şekilde

$$
g\left(x^2\right)=F\left(x^2, \ldots, x^n, x^1\right), \ldots, g\left(x^n\right)=F\left(x^n, x^1, \ldots, x^{n-1}\right)
$$

olduğu görülebilir. Yani F ve g'nin bir n-li çakışma noktası vardır.

Sonuç 3.7 $\ll$**,** (X, d) tam metrik uzayı üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı ve $F: X^n \rightarrow X$ dönüşümü karışık monoton özelliğine sahip olsun. $\varphi:[0, \infty) \rightarrow[0, \infty)$ sürekli bir comparison fonksiyon olmak üzere $x^1 \ll y^1$, $x^2 \gg y^2$,..., $x^n \ll y^n$ (eğer n tek ise), $x^n \gg y^n$ (eğer n çift ise) olacak şekildeki tüm $x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n, y^1, y^2, y^3, \ldots, y^n \in X$ için $F: X^n \rightarrow X$'nin aşağıdaki şartı sağladığı varsayılsın:

$$
\begin{aligned}
& d\left(F(x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n), F(y^1, y^2, y^3, \ldots, y^n)\right) \\
& \leq \varphi\left(\frac{d\left(x^1, y^1\right)+d\left(x^2, y^2\right)+\ldots+d\left(x^n, y^n\right)}{n}\right).
\end{aligned}
$$

Ayrıca **Varsayım**'ın sağlandığı kabul edilsin. Eğer

$$x_0^1 \ll F\left(x_0^1, x_0^2, x_0^3, ..., x_0^n\right)$$
$$x_0^2 \gg F\left(x_0^2, x_0^3, ..., x_0^n, x_0^1\right)$$
$$\vdots$$
$$x_0^n \ll F\left(x_0^n, x_0^1, x_0^2, x_0^3, ..., x_0^{n-1}\right) \quad \text{(eğer } n \text{ tek ise)}$$
$$x_0^n \gg F\left(x_0^n, x_0^1, x_0^2, x_0^3, ..., x_0^{n-1}\right) \quad \text{(eğer } n \text{ çift ise)}$$

olacak şekilde $x_0^1, x_0^2, x_0^3, ..., x_0^n \in X$ varsa bu takdirde

$$F(x^1, x^2, x^3, ..., x^n) = x^1$$
$$F(x^2, x^3, ..., x^n, x^1) = x^2$$
$$\vdots$$
$$F(x^n, x^1, x^2, ..., x^{n-1}) = x^n$$

eşitliklerini sağlayan $x^1, x^2, x^3, ..., x^n \in X$ vardır, yani F, n-li sabit noktaya sahiptir.

İspat Teorem 3.6'da $g(x) = x$ alınırsa Sonuç 3.7 elde edilir.

Sonuç 3.8 Eğer (i) sağlanırsa ve $\varphi(t) = ct, c \in (0,1)$ ise $n = 1$ ve $g(x) = x$ için Teorem 3.6, Teorem 2.37'ye ([32]'nin Teorem 2.1'ine) kısıtlanır.

Aşağıdaki sonuç [39]'deki Sonuç 2.1'in ve [38]'deki Teorem 2.1'in bir genelleştirmesidir.

Sonuç 3.9 $\ll$**,** (X, d) tam metrik uzayı üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. $F : X^n \to X$ ve $g : X \to X$ dönüşümleri karışık g-monoton özelliğini sağlasın. $g(x^1) \ll g(y^1)$, $g(x^2) \gg g(y^2)$,..., $g(x^n) \ll g(y^n)$(eğer n tek ise), $g(x^n) \gg g(y^n)$(eğer n çift ise) eşitsizliklerini sağlayan tüm $x^1, x^2, x^3, ..., x^n, y^1, y^2, y^3, ..., y^n \in X$ için $F : X^n \to X$ ve $g : X \to X$'nin aşağıdaki şartı sağladığı kabul edilsin:

$$\begin{aligned} &d\left(F(x^1, x^2, x^3, ..., x^n), F(y^1, y^2, y^3, ..., y^n)\right) \\ &\leq \frac{m}{n}\left(d\left(g(x^1), g(y^1)\right) + d\left(g(x^2), g(y^2)\right) + ... + d\left(g(x^n), g(y^n)\right)\right) \end{aligned} \tag{3.38}$$

$F(X^n) \subset g(X)$, g sürekli ve F ile değişmeli olduğu ve **Varsayım**'ın sağlandığı kabul edilsin. Eğer

$$
\begin{aligned}
&g\left(x_0^1\right) \ll F\left(x_0^1, x_0^2, x_0^3, \ldots, x_0^n\right) \\
&g\left(x_0^2\right) \gg F\left(x_0^2, x_0^3, \ldots, x_0^n, x_0^1\right) \\
&\qquad\vdots \\
&g\left(x_0^n\right) \ll F\left(x_0^n, x_0^1, x_0^2, x_0^3, \ldots, x_0^{n-1}\right) \quad (\text{eğer } n \text{ tek ise}) \\
&g\left(x_0^n\right) \gg F\left(x_0^n, x_0^1, x_0^2, x_0^3, \ldots, x_0^{n-1}\right) \quad (\text{eğer } n \text{ çift ise})
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

olacak şekilde $x_0^1, x_0^2, x_0^3, \ldots, x_0^n \in X$ varsa bu takdirde

$$
\begin{aligned}
&F(x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n) = g\left(x^1\right) \\
&F(x^2, x^3, \ldots, x^n, x^1) = g\left(x^2\right) \\
&\qquad\vdots \\
&F(x^n, x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}) = g\left(x^n\right)
\end{aligned}
$$

eşitliklerini sağlayan $x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n \in X$ vardır, yani F ve g, n-li çakışma noktasına sahiptir.

3.2 n-li çakışma noktasının tekliği

Bu kısımda n-li çakışma noktasının tekliği gösterilecektir. $\left(X, \ll\right)$ kısmi sıralı bir küme olduğundan X^n üzerinde aşağıdaki sıralama bağıntısı verilebilir:

Tüm $(x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n), (y^1, y^2, y^3, \ldots, y^n) \in X^n$ için

$$
\begin{aligned}
&(x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n) \ll (y^1, y^2, y^3, \ldots, y^n) \\
&\Leftrightarrow x^1 \ll y^1, x^2 \gg y^2, \ldots, x^n \ll y^n \ (\text{eğer } n \text{ tek ise}) \quad x^n \gg y^n (\text{eğer } n \text{ çift ise})
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

Ayrıca

$(x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n) = (y^1, y^2, y^3, \ldots, y^n) \Leftrightarrow x^1 = y^1, x^2 = y^2, \ldots, x^n = y^n$ ’dir.

Teorem 3.10 Teorem 3.6 ’deki hipotezlere ek olarak her $(x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n)$, $(y^1, y^2, y^3, \ldots, y^n) \in X^n$ için

$\left(F(z^1, z^2, z^3, \ldots, z^n), F(z^2, z^3, \ldots, z^n, z^1), \ldots, F(z^n, z^1, z^2, \ldots, z^{n-1})\right)$ n-lisinin

$\left(F(x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n), F(x^2, x^3, \ldots, x^n, x^1), \ldots, F(x^n, x^1, x^2, \ldots, x^{n-1})\right)$ ve

$$\left(F(y^1, y^2, y^2, ..., y^n), F(y^2, y^3, ..., y^n, y^1), ..., F(y^n, y^1, y^2, ..., y^{n-1})\right)$$

ile karşılaştırılabilir olacak şekilde bir $(z^1, z^2, z^3, ..., z^n) \in X^n$'nin mevcut olduğu varsayılsın. Bu takdirde F ve g, ortak bir tek n-li sabit noktaya sahiptir. Yani

$$\begin{aligned}
x^1 &= g(x^1) = F(x^1, x^2, x^3, ..., x^n), \\
x^2 &= g(x^2) = F(x^2, x^3, ..., x^n, x^1), \\
&\vdots \\
x^n &= g(x^n) = F(x^n, x^1, x^2, ..., x^{n-1})
\end{aligned}$$

olacak şekilde $(x^1, x^2, x^3, ..., x^n) \in X^n$ vardır.

İspat: Teorem 3.6'dan, n-li çakışma noktalarının kümesi boştan farklıdır. Eğer $(x^1, x^2, x^3, ..., x^n)$ ve $(y^1, y^2, y^3, ..., y^n)$ iki n-li çakışma noktası iseler, yani eğer

$$\begin{aligned}
g(x^1) &= F(x^1, x^2, x^3, ..., x^n), \\
g(x^2) &= F(x^2, x^3, ..., x^n, x^1), \\
&\vdots \\
g(x^n) &= F(x^n, x^1, x^2, ..., x^{n-1})
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
g(y^1) &= F(y^1, y^2, y^3, ..., y^n), \\
g(y^2) &= F(y^2, y^3, ..., y^n, y^1), \\
&\vdots \\
g(y^n) &= F(y^n, y^1, y^2, ..., y^{n-1})
\end{aligned}$$

ise

$$\begin{aligned}
g(x^1) &= g(y^1) \\
g(x^2) &= g(y^2) \\
&\vdots \\
g(x^n) &= g(y^n)
\end{aligned} \tag{3.41}$$

olduğu gösterilmelidir. Varsayımdan dolayı

$$\left(F(x^1, x^2, x^3, ..., x^n), F(x^2, x^3, ..., x^n, x^1), ..., F(x^n, x^1, x^2, ..., x^{n-1})\right) \tag{3.42}$$

ve

$$\left(F(y^1,y^2,y^3,...,y^n),F(y^2,y^3,...,y^n,y^1),...,F(y^n,y^1,y^2,...,y^{n-1})\right) \tag{3.43}$$

elemanları

$$\left(F(z^1,z^2,z^3,...,z^n),F(z^2,z^3,...,z^n,z^1),...,F(z^n,z^1,z^2,...,z^{n-1})\right) \tag{3.44}$$

ile karşılaştırılabilir olacak şeklide $(z^1,z^2,z^3,...,z^n)\in X^n$ vardır.

$z^1=z_0^1, z^2=z_0^2,...,z^n=z_0^n$ ve

$$\begin{aligned}
g\left(z_k^1\right) &= F(z_{k-1}^1,z_{k-1}^2,...,z_{k-1}^n)\\
g\left(z_k^2\right) &= F(z_{k-1}^2,...,z_{k-1}^n,z_{k-1}^1)\\
&\vdots\\
g\left(z_k^n\right) &= F(z_{k-1}^n,z_{k-1}^1,z_{k-1}^2,...,z_{k-1}^{n-1})
\end{aligned}$$

şeklinde $g\left(z_k^1\right),g\left(z_k^2\right),...,g\left(z_k^n\right)$ dizileri tanımlansın. (3.42) ve (3.43), (3.44) ile karşılaştırılabilir olduğundan

$$\left(g\left(x^1\right),g\left(x^2\right),...,g\left(x^n\right)\right)\gg\left(g\left(z^1\right),g\left(z^2\right),...,g\left(z^n\right)\right)=\left(g\left(z_0^1\right),g\left(z_0^2\right),...,g\left(z_0^n\right)\right)$$

olduğu varsayılabilir. (3.11)'i kullanarak, her k için

$$\left(g\left(x^1\right),g\left(x^2\right),...,g\left(x^n\right)\right)\gg\left(g\left(z_k^1\right),g\left(z_k^2\right),...,g\left(z_k^n\right)\right)$$

elde edilir. (3.40)'dan

$$\begin{aligned}
&g\left(x^1\right)\gg g\left(z_k^1\right)\\
&g\left(x^2\right)\ll g\left(z_k^2\right)\\
&\quad\vdots\\
&g\left(x^n\right)\gg g\left(z_k^n\right) \text{ (Eğer } n \text{ tek ise)}\\
&g\left(x^n\right)\ll g\left(z_k^n\right) \text{ (Eğer } n \text{ çift ise)}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

yazılabilir. (3.45) ve (3.6) ile

$$
\begin{aligned}
&d\left(g\left(x^1\right),g\left(z_{k+1}^1\right)\right)\\
&=d\left(F(x^1,x^2,x^3,...,x^n),F\left(z_k^1,z_k^2,...,z_k^n\right)\right) &(3.46)\\
&\le \varphi\left(\frac{1}{n}\left[d\left(g\left(x^1\right),g\left(z_k^1\right)\right)+d\left(g\left(x^2\right),g\left(z_k^2\right)\right)+...+d\left(g\left(x^n\right),g\left(z_k^n\right)\right)\right]\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&d\left(g\left(x^2\right),g\left(z_{k+1}^2\right)\right)\\
&=d\left(F(x^2,x^3,...,x^n,x^1),F\left(z_k^2,...,z_k^n,z_k^1\right)\right) &(3.47)\\
&\le \varphi\left(\frac{1}{n}\left[d\left(g\left(x^2\right),g\left(z_k^2\right)\right)+...+d\left(g\left(x^n\right),g\left(z_k^n\right)\right)+d\left(g\left(x^1\right),g\left(z_k^1\right)\right)\right]\right),
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
&d\left(g\left(x^n\right),g\left(z_{k+1}^n\right)\right)\\
&=d\left(F(x^n,x^1,x^2,...,x^{n-1}),F\left(z_k^n,z_k^1,z_k^2,...,z_k^{n-1}\right)\right) &(3.48)\\
&\le \varphi\left(\frac{1}{n}\left[d\left(g\left(x^n\right),g\left(z_k^n\right)\right)+d\left(g\left(x^1\right),g\left(z_k^1\right)\right)+...+d\left(g\left(x^{n-1}\right),g\left(z_k^{n-1}\right)\right)\right]\right)
\end{aligned}
$$

yazılır. (3.46)-(3.48)'i toplarsak

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\left(g\left(x^1\right),g\left(z_{k+1}^1\right)\right)+d\left(g\left(x^2\right),g\left(z_{k+1}^2\right)\right)+...+d\left(g\left(x^n\right),g\left(z_{k+1}^n\right)\right)}{n} &(3.49)\\
&\le \varphi\left(\frac{1}{n}\left[d\left(g\left(x^1\right),g\left(z_k^1\right)\right)+d\left(g\left(x^2\right),g\left(z_k^2\right)\right)+...+d\left(g\left(x^n\right),g\left(z_k^n\right)\right)\right]\right)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Dolayısıyla her $k \ge 1$ için

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\left(g\left(x^1\right),g\left(z_{k+1}^1\right)\right)+d\left(g\left(x^2\right),g\left(z_{k+1}^2\right)\right)+...+d\left(g\left(x^n\right),g\left(z_{k+1}^n\right)\right)}{n} &(3.50)\\
&\le \varphi^k\left(\frac{1}{n}\left[d\left(g\left(x^1\right),g\left(z_1^1\right)\right)+d\left(g\left(x^2\right),g\left(z_1^2\right)\right)+...+d\left(g\left(x^n\right),g\left(z_1^n\right)\right)\right]\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. φ bir comparison fonksiyon olduğundan her bir $t > 0$ için $\lim_{k\to\infty} \varphi^k\left(t\right) = 0$'dır. Böylelikle (3.50)'den

$$
\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} d\left(g\left(x^1\right), g\left(z_{k+1}^1\right)\right)=0\\
&\lim_{k\to\infty} d\left(g\left(x^2\right), g\left(z_{k+1}^2\right)\right)=0\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&\lim_{k\to\infty} d\left(g\left(x^n\right), g\left(z_{k+1}^n\right)\right)=0
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

elde edilir. Benzer olarak

$$
\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} d\left(g\left(y^1\right), g\left(z_{k+1}^1\right)\right)=0\\
&\lim_{k\to\infty} d\left(g\left(y^2\right), g\left(z_{k+1}^2\right)\right)=0\\
&\ldots\\
&\lim_{k\to\infty} d\left(g\left(y^n\right), g\left(z_{k+1}^n\right)\right)=0
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

olduğu görülebilir.

(3.51) ve (3.52)'i birlikte düşünerek ve üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$
\begin{aligned}
&d\left(g\left(x^1\right), g\left(y^1\right)\right) \le d\left(g\left(x^1\right), g\left(z_{k+1}^1\right)\right)+d\left(g\left(z_{k+1}^1\right), g\left(y^1\right)\right) \to 0, k \to \infty\\
&d\left(g\left(x^2\right), g\left(y^2\right)\right) \le d\left(g\left(x^2\right), g\left(z_{k+1}^2\right)\right)+d\left(g\left(z_{k+1}^2\right), g\left(y^2\right)\right) \to 0, k \to \infty\\
&\ldots\\
&d\left(g\left(x^n\right), g\left(y^n\right)\right) \le d\left(g\left(x^n\right), g\left(z_{k+1}^n\right)\right)+d\left(g\left(z_{k+1}^n\right), g\left(y^n\right)\right) \to 0, k \to \infty
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

yazılır. (3.53)'den $g(x^1)=g(y^1), g(x^2)=g(y^2), \ldots, g(x^n)=g(y^n)$ elde edilir ve (3.41) gösterilmiş olur.

F ve g'nin değişmeliliğinden

$$
\begin{aligned}
&g\left(g\left(x^1\right)\right)=g\left(F\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)\right)=F\left(g\left(x^1\right), g\left(x^2\right), \ldots, g\left(x^n\right)\right)\\
&g\left(g\left(x^2\right)\right)=g\left(F\left(x^2, \ldots, x^n, x^1\right)\right)=F\left(g\left(x^2\right), \ldots, g\left(x^n\right), g\left(x^1\right)\right)\\
&\ldots\\
&g\left(g\left(x^n\right)\right)=g\left(F\left(x^n, x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}\right)\right)=F\left(g\left(x^n\right), g\left(x^1\right), \ldots, g\left(x^{n-1}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

$g\left(x^1\right)=w^1, g\left(x^2\right)=w^2, \ldots, g\left(x^n\right)=w^n$ denirse (3.54)'den dolayı

$$g\left(w^1\right)=F\left(w^1,w^2,...,w^n\right)$$
$$g\left(w^2\right)=F\left(w^2,...,w^n,w^1\right)$$
$$\vdots \tag{3.55}$$
$$g\left(w^n\right)=F\left(w^n,w^1,w^2,...,w^{n-1}\right)$$

elde edilir. Böylece $\left(w^1,w^2,...,w^n\right)$ bir n-li çakışma noktasıdır. $\left(y^1,y^2,...,y^n\right)$ de bir çakışma noktası olduğundan (3.41)'den

$g\left(y^1\right)=g\left(w^1\right),g\left(y^2\right)=g\left(w^2\right),...,g\left(y^n\right)=g\left(w^n\right)$ ve yine (3.41)'den,

$$g\left(w^1\right)=g\left(x^1\right),g\left(w^2\right)=g\left(x^2\right),...,g\left(w^n\right)=g\left(x^n\right)$$

çıkar. Yani $g\left(w^1\right)=w^1,g\left(w^2\right)=w^2,...,g\left(w^n\right)=w^n$'dir. (3.56)

(3.55) ve (3.56)'dan

$$w^1=g\left(w^1\right)=F\left(w^1,w^2,...,w^n\right)$$
$$w^2=g\left(w^2\right)=F\left(w^2,...,w^n,w^1\right)$$
$$...$$
$$w^n=g\left(w^n\right)=F\left(w^n,w^1,w^2,...,w^{n-1}\right)$$

yazılır. Dolayısıyla $\left(w^1,w^2,...,w^n\right)$, F ve g'nin ortak bir n-li sabit noktasıdır. Tekliği ispat etmek için $\left(u^1,u^2,...,u^n\right)$ başka bir n-li ortak sabit nokta olsun. (3.41)'den

$$u^1=g\left(u^1\right)=g\left(w^1\right)=w^1$$
$$u^2=g\left(u^2\right)=g\left(w^2\right)=w^2$$
$$\vdots$$
$$u^n=g\left(u^n\right)=g\left(w^n\right)=w^n$$

elde edilir. Bu da ortak n-li sabit noktanın tekliğini gösterir.

BÖLÜM 4

SEZGİSEL FUZZY NORMLU UZAYLARDA n-Lİ SABİT NOKTA TEOREMLERİ

[22] ve [23]'de ikili ve üçlü sabit nokta teoremlerinin ispatında teoremlerin hipotezinde ifade edilen $a\Diamond b \leq ab \leq a*b$ şartı kullanılmıştır. Her şeyden önce ispatlarda kurdukları dizilerin Cauchy olduğunu göstermede kullandıkları bu şart $a\Diamond b = ab$ olamayacağından dolayı hatalıdır. Dolayısıyla teoremlerin ispatında bazı hatalar oluşmuştur.

Ayrıca sezgisel fuzzy normlu uzaylarda çalışmalarına rağmen Teorem 2.73'de görüldüğü gibi klasik normlu uzaylarda verdikleri (i) ve (ii) şartlarını kullanarak ispatlarının bir kısmını klasik normlu uzaylarda çalışıyor gibi yapmışlardır.

Bu bölümde üçüncü bölümde tanıtılan n-li sabit nokta kavramı sezgisel fuzzy normlu uzaylarda çalışılacaktır. Bu amaç doğrultusunda üçüncü bölümde tanımlanan kavramların bazıları bu bölümde de kullanılacaktır.

t-norm ve t-conorm için herhangi bir şart konmamakla beraber Tanım 2.72'de verilen n-özelliğini taşımayan sezgisel fuzzy normlu uzaylarda ispatlar yapılacaktır. Ayrıca ispat yöntemi, sezgisel fuzzy normlu uzaylarda ikili ve üçlü sabit noktanın çalışıldığı [22] ve [23] çalışmalarından farklıdır ve bu yöntemle yukarıda bahsi geçen eksiklikler giderilmiş olacaktır.

Tanım 4.1 $(X,\mu,\nu,*,\Diamond)$ bir sezgisel fuzzy normlu uzay olsun. Tanım 2.68'e benzer olarak, X^n üzerinde bir sezgisel fuzzy norm şu şekilde verilebilir:

$x=(x_1,x_2,...,x_n)\in X^n$, $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 * a_2 * ... * a_n$, $\coprod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \Diamond a_2 \Diamond ... \Diamond a_n$ ve $t>0$ olmak üzere

$$\Phi(x,t)=\prod_{i=1}^{n}\mu(x_i,t) \text{ ve } \Psi(x,t)=\coprod_{i=1}^{n}\nu(x_i,t)$$

ile tanımlı (Φ,Ψ) ikilisi X^n üzerinde (Φ,Ψ) bir sezgisel fuzzy normdur ve $(X^n,\Phi,\Psi,*,\Diamond)$ bir sezgisel fuzzy normlu uzaydır. $(X^n,\Phi,\Psi,*,\Diamond)$, sezgisel fuzzy normlu uzayların kartezyen çarpımı olarak adlandırılır.

Teorem 4.2 $F:X^n\to X$, $\ll$ ile gösterilen kısmi sıralamaya sahip tam sezgisel fuzzy normlu uzay $(X,\mu,\nu,*,\Diamond)$ üzerinde karışık $g-$monoton özelliğine sahip bir sezgisel fuzzy sürekli dönüşüm olsun. Ayrıca $F(X^n)\subset g(X)$ ve g, F ile değişmeli, sezgisel fuzzy sürekli bir dönüşüm olsun. $i\in\left\{1,2,...,\frac{n+1}{2}\right\}$ iken $g\left(x^{2i-1}\right)\ll g\left(y^{2i-1}\right)$ ve $i\in\left\{1,2,...,\frac{n}{2}\right\}$ iken $g\left(x^{2i}\right)\gg g\left(y^{2i}\right)$ şartlarını sağlayan her $x^1,x^2,...,x^n,y^1,y^2,...,y^n\in X$ ve $\alpha\in(0,1)$ için $F:X^n\to X$ ve $g:X\to X$ dönüşümlerinin

$$\begin{aligned}&\mu\left(F\left(x^1,x^2,...,x^n\right)-F\left(y^1,y^2,...,y^n\right),\alpha t\right)\\&\geq\mu\left(g\left(x^1\right)-g\left(y^2\right),t\right)*\mu\left(g\left(x^2\right)-g\left(y^2\right),t\right)*...*\mu\left(g\left(x^n\right)-g\left(y^n\right),t\right)\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}&\nu\left(F\left(x^1,x^2,...,x^n\right)-F\left(y^1,y^2,...,y^n\right),\alpha t\right)\\&\leq\nu\left(g\left(x^1\right)-\left(y^1\right),t\right)\Diamond\nu\left(g\left(x^2\right)-\left(y^2\right),t\right)\Diamond...\Diamond\nu\left(g\left(x^n\right)-g\left(y^n\right),t\right)\end{aligned}\tag{4.2}$$

şartlarını sağladığı varsayılsın. Eğer

$$\begin{aligned}&g\left(x_0^1\right)\ll F\left(x_0^1,x_0^2,...,x_0^n\right)\\&g\left(x_0^2\right)\gg F\left(x_0^2,...,x_0^n,x_0^1\right)\\&\qquad\vdots\\&g\left(x_0^n\right)\ll F\left(x_0^n,x_0^1,...,x_0^{n-1}\right)\ \text{(eğer } n \text{ tek ise)}\\&g\left(x_0^n\right)\gg F\left(x_0^n,x_0^1,...,x_0^{n-1}\right)\ \text{(eğer } n \text{ çift ise)}\end{aligned}\tag{4.3}$$

olacak şekilde $x_0^1,x_0^2,...,x_0^n,y_0^1,y_0^2,...,y_0^n\in X$ varsa

$$
\begin{aligned}
&F(x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n) = g\left(x^1\right) \\
&F(x^2, x^3, \ldots, x^n, x^1) = g\left(x^2\right) \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&F(x^n, x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}) = g\left(x^n\right)
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

eşitliklerini sağlayan $x^1, x^2, \ldots, x^n \in X$ vardır, yani F ve g bir $n-$li çakışma noktasına sahiptir.

İspat Bu teoremin ispatı dört adımda yapılacaktır.

Adım 1: İlk adımda $\left(x_k^1\right), \left(x_k^2\right), \ldots, \left(x_k^n\right)$ dizileri tanımlanacaktır. $x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n \in X$, (4.3)'deki gibi olsun. $F(X^n) \subset g(X)$ olduğundan dolayı $\left(x_k^1\right), \left(x_k^2\right), \ldots, \left(x_k^n\right)$ dizileri üçüncü bölümde bulunan Teorem 3.6'nın ispatındaki gibi inşa edilsin:

Her $k = 1, 2, \ldots, n$ için

$$
\begin{aligned}
&g\left(x_k^1\right) = F\left(x_{k-1}^1, x_{k-1}^2, \ldots, x_{k-1}^n\right) \\
&g\left(x_k^2\right) = F\left(x_{k-1}^2, \ldots, x_{k-1}^n, x_{k-1}^1\right) \\
&\qquad \vdots \\
&g\left(x_k^n\right) = F\left(x_{k-1}^n, x_{k-1}^1, \ldots, x_{k-1}^{n-1}\right).
\end{aligned}
$$

Adım 2: Aşağıdaki sıralamaların her $k \in \mathbb{N}$ için sağlandığı gösterilecektir:

$$
\begin{aligned}
&g\left(x_{k-1}^1\right) \ll g\left(x_k^1\right) \\
&g\left(x_{k-1}^2\right) \gg g\left(x_k^2\right) \\
&\qquad \vdots \\
&g\left(x_{k-1}^n\right) \ll g\left(x_k^n\right) \text{ (eğer } n \text{ tek ise)} \\
&g\left(x_{k-1}^n\right) \gg g\left(x_k^n\right) \text{ (eğer } n \text{ çift ise)}
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

İspatın bu adımı üçüncü bölümdeki Toerem 3.6'nın ispatındaki kısımla aynı olduğundan bu adımın gösterilmesi atlanacaktır. Fakat ispatın diğer adımlarında bu adım kullanılacağından dolayı ispatın bütünlüğü açısından bu adımı kullanarak aşağıdaki (4.6) sıralamaları yazalım:

$$
\begin{aligned}
&\gg \ldots \gg g\left(x_k^1\right) \gg g\left(x_{k-1}^1\right) \gg \ldots \gg g\left(x_1^1\right) \gg g\left(x_0^1\right) \\
&\ll \ldots \ll g\left(x_k^2\right) \ll g\left(x_{k-1}^2\right) \ll \ldots \ll g\left(x_1^2\right) \ll g\left(x_0^2\right) \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\gg \ldots \gg g\left(x_k^n\right) \gg g\left(x_{k-1}^n\right) \gg \ldots \gg g\left(x_1^n\right) \gg g\left(x_0^n\right) \text{ (eğer } n \text{ tek ise)} \\
&\ll \ldots \ll g\left(x_k^n\right) \ll g\left(x_{k-1}^n\right) \ll \ldots \ll g\left(x_1^n\right) \ll g\left(x_0^n\right) \text{ (eğer } n \text{ çift ise).}
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

Adım 3: Bu adımda $g\left(x_k^1\right), g\left(x_k^2\right), \ldots, g\left(x_k^n\right)$ dizilerinin $(X, \mu, \nu, *, \Diamond)$'de birer Cauchy dizisi olduğu gösterilecektir. Bunu yapmak için $\delta_k^1(t)$ ve $\delta_k^2(t)$ aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$
\delta_k^1(t) = \mu\left(g\left(x_k^1\right) - g\left(x_{k+1}^1\right), t\right) * \mu\left(g\left(x_k^2\right) - g\left(x_{k+1}^2\right), t\right) * \ldots * \mu\left(g\left(x_k^n\right) - g\left(x_{k+1}^n\right), t\right)
$$

ve

$$
\delta_k^2(t) = \nu\left(g\left(x_k^1\right) - g\left(x_{k+1}^1\right), t\right) \Diamond \nu\left(g\left(x_k^2\right) - g\left(x_{k+1}^2\right), t\right) \Diamond \ldots \Diamond \nu\left(g\left(x_k^n\right) - g\left(x_{k+1}^n\right), t\right).
$$

(4.1) ve (4.6)'yı göz önüne alarak aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$
\begin{aligned}
\mu\left(g\left(x_k^1\right) - g\left(x_{k+1}^1\right), t\right) &= \mu\left(F\left(x_{k-1}^1, x_{k-1}^2, \ldots, x_{k-1}^n\right) - F\left(x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n\right), \alpha \frac{t}{\alpha}\right) \\
&\geq \mu\left(g\left(x_{k-1}^1\right) - g\left(x_k^1\right), \frac{t}{\alpha}\right) * \mu\left(g\left(x_{k-1}^2\right) - g\left(x_k^2\right), \frac{t}{\alpha}\right) \\
&\qquad * \ldots * \mu\left(g\left(x_{k-1}^n\right) - g\left(x_k^n\right), \frac{t}{\alpha}\right) \\
&= \delta_{k-1}^1\left(\frac{t}{\alpha}\right),
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu\left(g\left(x_k^2\right) - g\left(x_{k+1}^2\right), t\right) &= \mu\left(F\left(x_{k-1}^2, \ldots, x_{k-1}^n, x_{k-1}^1\right) - F\left(x_k^2, \ldots, x_k^n, x_k^1\right), \alpha \frac{t}{\alpha}\right) \\
&\geq \mu\left(g\left(x_{k-1}^2\right) - g\left(x_k^2\right), \frac{t}{\alpha}\right) * \ldots \\
&\qquad * \mu\left(g\left(x_{k-1}^n\right) - g\left(x_k^n\right), \frac{t}{\alpha}\right) * \mu\left(g\left(x_{k-1}^1\right) - g\left(x_k^1\right), \frac{t}{\alpha}\right) \\
&= \delta_{k-1}^1\left(\frac{t}{\alpha}\right),
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
\mu\left(g\left(x_k^n\right)-g\left(x_{k+1}^n\right),t\right) &= \mu\left(F\left(x_{k-1}^n,x_{k-1}^1,\ldots,x_{k-1}^{n-1}\right)-F\left(x_k^n,x_k^1,\ldots,x_k^{n-1}\right),\alpha\frac{t}{\alpha}\right) \\
&\geq \mu\left(g\left(x_{k-1}^n\right)-g\left(x_k^n\right),\frac{t}{\alpha}\right)*\mu\left(g\left(x_{k-1}^1\right)-g\left(x_k^1\right),\frac{t}{\alpha}\right) \\
&\quad *\ldots*\mu\left(g\left(x_{k-1}^{n-1}\right)-g\left(x_k^{n-1}\right),\frac{t}{\alpha}\right) \\
&= \delta_{k-1}^1\left(\frac{t}{\alpha}\right).
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

t-normun (iv) özelliğini ve sezgisel fuzzy normun (xiv) özelliği ile birlikte ve (4.7)-(4.9) eşitsizliklerinde kullanarak

$$
\delta_k^1(t)\geq\delta_{k-1}^1\left(\frac{t}{\alpha}\right)*\delta_{k-1}^1\left(\frac{t}{\alpha}\right)*\ldots*\delta_{k-1}^1\left(\frac{t}{\alpha}\right)=\delta_{k-1}^1\left(\frac{t}{\alpha}\right)
$$

elde edilir. Tekrardan (4.1) ve (4.6)'yı göz önüne alarak

$$
\begin{aligned}
\mu\left(g\left(x_{k-1}^1\right)-g\left(x_k^1\right),\frac{t}{\alpha}\right) &= \mu\left(F\left(x_{k-2}^1,x_{k-2}^2,\ldots,x_{k-2}^n\right)-F\left(x_{k-1}^1,x_{k-1}^2,\ldots,x_{k-1}^n\right),\alpha\frac{t}{\alpha^2}\right) \\
&\geq \mu\left(g\left(x_{k-2}^1\right)-g\left(x_{k-1}^1\right),\frac{t}{\alpha^2}\right)*\mu\left(g\left(x_{k-2}^2\right)-g\left(x_{k-1}^2\right),\frac{t}{\alpha^2}\right) \\
&\quad *\ldots*\mu\left(g\left(x_{k-2}^n\right)-g\left(x_{k-1}^n\right),\frac{t}{\alpha^2}\right) \\
&= \delta_{k-2}^1\left(\frac{t}{\alpha^2}\right),
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu\left(g\left(x_{k-1}^2\right)-g\left(x_k^2\right),\frac{t}{\alpha}\right) &= \mu\left(F\left(x_{k-2}^2,\ldots,x_{k-2}^n,x_{k-2}^1\right)-F\left(x_{k-1}^2,\ldots,x_{k-1}^n,x_{k-1}^1\right),\alpha\frac{t}{\alpha^2}\right) \\
&\geq \mu\left(g\left(x_{k-2}^2\right)-g\left(x_{k-1}^2\right),\frac{t}{\alpha^2}\right)*\ldots* \\
&\quad \mu\left(g\left(x_{k-2}^n\right)-g\left(x_{k-1}^n\right),\frac{t}{\alpha^2}\right)*\mu\left(g\left(x_{k-2}^1\right)-g\left(x_{k-1}^1\right),\frac{t}{\alpha^2}\right) \\
&= \delta_{k-2}^1\left(\frac{t}{\alpha^2}\right),
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

$$\begin{aligned}\mu\left(g\left(x_{k-1}^{n}\right)-g\left(x_{k}^{n}\right),\frac{t}{\alpha}\right)&=\mu\left(F\left(x_{k-2}^{n},x_{k-2}^{1},...,x_{k-2}^{n-1}\right)-F\left(x_{k-1}^{n},x_{k-1}^{1},...,x_{k-1}^{n-1}\right),\alpha\frac{t}{\alpha^{2}}\right)\\&\geq\mu\left(g\left(x_{k-2}^{n}\right)-g\left(x_{k-1}^{n}\right),\frac{t}{\alpha^{2}}\right)*\mu\left(g\left(x_{k-2}^{1}\right)-g\left(x_{k-1}^{1}\right),\frac{t}{\alpha^{2}}\right)\\&\quad *...*\mu\left(g\left(x_{k-2}^{n-1}\right)-g\left(x_{k-1}^{n-1}\right),\frac{t}{\alpha^{2}}\right)\\&=\delta_{k-2}^{1}\left(\frac{t}{\alpha^{2}}\right)\end{aligned}\qquad(4.12)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. (4.10)-(4.12) ile beraber t-normun (iv), sezgisel fuzzy normun (xiv) özelliğini kullanarak

$$\delta_{k-1}^{1}\left(\frac{t}{\alpha}\right)\geq\delta_{k-2}^{1}\left(\frac{t}{\alpha^{2}}\right)$$

elde edilir. Süreç bu şekilde sürdürülürse

$$\delta_{k}^{1}\left(t\right)\geq\delta_{k-1}^{1}\left(\frac{t}{\alpha}\right)\geq\delta_{k-2}^{1}\left(\frac{t}{\alpha^{2}}\right)\geq...\geq\delta_{0}^{1}\left(\frac{t}{\alpha^{k}}\right)\qquad(4.13)$$

sonucuna varılır.

Benzer işlemleri $\delta_{k}^{2}\left(t\right)$ için yapalım:

(4.2) ve (4.6) kullanılarak

$$\begin{aligned}\nu\left(g\left(x_{k}^{1}\right)-g\left(x_{k+1}^{1}\right),t\right)&=\nu\left(F\left(x_{k-1}^{1},x_{k-1}^{2},...,x_{k-1}^{n}\right)-F\left(x_{k}^{1},x_{k}^{2},...,x_{k}^{n}\right),\alpha\frac{t}{\alpha}\right)\\&\leq\nu\left(g\left(x_{k-1}^{1}\right)-g\left(x_{k}^{1}\right),\frac{t}{\alpha}\right)\Diamond\nu\left(g\left(x_{k-1}^{2}\right)-g\left(x_{k}^{2}\right),\frac{t}{\alpha}\right)\\&\quad\Diamond...\Diamond\nu\left(g\left(x_{k-1}^{n}\right)-g\left(x_{k}^{n}\right),\frac{t}{\alpha}\right)\\&=\delta_{k-1}^{2}\left(\frac{t}{\alpha}\right),\end{aligned}\qquad(4.14)$$

$$\begin{aligned}\nu\left(g\left(x_k^2\right)-g\left(x_{k+1}^2\right),t\right)&=\nu\left(F\left(x_{k-1}^2,...,x_{k-1}^n,x_{k-1}^1\right)-F\left(x_k^2,...,x_k^n,x_k^1\right),\alpha\frac{t}{\alpha}\right)\\&\leq\nu\left(g\left(x_{k-1}^2\right)-g\left(x_k^2\right),\frac{t}{\alpha}\right)\Diamond...\Diamond\\&\quad\nu\left(g\left(x_{k-1}^n\right)-g\left(x_k^n\right),\frac{t}{\alpha}\right)\Diamond\nu\left(g\left(x_{k-1}^1\right)-g\left(x_k^1\right),\frac{t}{\alpha}\right)\\&=\delta_{k-1}^2\left(\frac{t}{\alpha}\right),\end{aligned}\tag{4.15}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\nu\left(g\left(x_k^n\right)-g\left(x_{k+1}^n\right),t\right)&=\nu\left(F\left(x_{k-1}^n,x_{k-1}^1,...,x_{k-1}^{n-1}\right)-F\left(x_k^n,x_k^1,...,x_k^{n-1}\right),\alpha\frac{t}{\alpha}\right)\\&\leq\nu\left(g\left(x_{k-1}^n\right)-g\left(x_k^n\right),\frac{t}{\alpha}\right)\Diamond\nu\left(g\left(x_{k-1}^1\right)-g\left(x_k^1\right),\frac{t}{\alpha}\right)\\&\quad\Diamond...\Diamond\nu\left(g\left(x_{k-1}^{n-1}\right)-g\left(x_k^{n-1}\right),\frac{t}{\alpha}\right)\\&=\delta_{k-1}^2\left(\frac{t}{\alpha}\right)\end{aligned}\tag{4.16}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

(4.14)-(4.16) ile birlikte t-conormun (iv) ve sezgisel fuzzy normun (xiv) özelliği kullanılarak

$$\delta_k^2(t)\leq\delta_{k-1}^2\left(\frac{t}{\alpha}\right)\Diamond\delta_{k-1}^2\left(\frac{t}{\alpha}\right)\Diamond...\Diamond\delta_{k-1}^2\left(\frac{t}{\alpha}\right)=\delta_{k-1}^2\left(\frac{t}{\alpha}\right)$$

olduğu sonucuna varılır. Tekrardan (4.2) ve (4.6) ile birlikte

$$\begin{aligned}\nu\left(g\left(x_{k-1}^1\right)-g\left(x_k^1\right),\frac{t}{\alpha}\right)&=\nu\left(F\left(x_{k-2}^1,x_{k-2}^2,...,x_{k-2}^n\right)-F\left(x_{k-1}^1,x_{k-1}^2,...,x_{k-1}^n\right),\alpha\frac{t}{\alpha^2}\right)\\&\leq\nu\left(g\left(x_{k-2}^1\right)-g\left(x_{k-1}^1\right),\frac{t}{\alpha^2}\right)\Diamond\nu\left(g\left(x_{k-2}^2\right)-g\left(x_{k-1}^2\right),\frac{t}{\alpha^2}\right)\\&\quad\Diamond...\Diamond\nu\left(g\left(x_{k-2}^n\right)-g\left(x_{k-1}^n\right),\frac{t}{\alpha^2}\right)\\&=\delta_{k-2}^2\left(\frac{t}{\alpha^2}\right),\end{aligned}\tag{4.17}$$

$$\nu\left(g\left(x_{k-1}^{2}\right)-g\left(x_{k}^{2}\right),\frac{t}{\alpha}\right)=\nu\left(F\left(x_{k-2}^{2},\ldots,x_{k-2}^{n},x_{k-2}^{1}\right)-F\left(x_{k-1}^{2},\ldots,x_{k-1}^{n},x_{k-1}^{1}\right),\alpha\frac{t}{\alpha^{2}}\right)$$

$$\begin{aligned}&\leq\nu\left(g\left(x_{k-2}^{2}\right)-g\left(x_{k-1}^{2}\right),\frac{t}{\alpha^{2}}\right)\Diamond\ldots\Diamond\\&\quad\nu\left(g\left(x_{k-2}^{n}\right)-g\left(x_{k-1}^{n}\right),\frac{t}{\alpha^{2}}\right)\Diamond\nu\left(g\left(x_{k-2}^{1}\right)-g\left(x_{k-1}^{1}\right),\frac{t}{\alpha^{2}}\right)\\&=\delta_{k-2}^{2}\left(\frac{t}{\alpha^{2}}\right),\end{aligned}\tag{4.18}$$

$$\vdots$$

$$\nu\left(g\left(x_{k-1}^{n}\right)-g\left(x_{k}^{n}\right),\frac{t}{\alpha}\right)=\nu\left(F\left(x_{k-2}^{n},x_{k-2}^{1},\ldots,x_{k-2}^{n-1}\right)-F\left(x_{k-1}^{n},x_{k-1}^{1},\ldots,x_{k-1}^{n-1}\right),\alpha\frac{t}{\alpha^{2}}\right)$$

$$\begin{aligned}&\leq\nu\left(g\left(x_{k-2}^{n}\right)-g\left(x_{k-1}^{n}\right),\frac{t}{\alpha^{2}}\right)\Diamond\nu\left(g\left(x_{k-2}^{1}\right)-g\left(x_{k-1}^{1}\right),\frac{t}{\alpha^{2}}\right)\\&\quad\Diamond\ldots\Diamond\nu\left(g\left(x_{k-2}^{n-1}\right)-g\left(x_{k-1}^{n-1}\right),\frac{t}{\alpha^{2}}\right)\\&=\delta_{k-2}^{2}\left(\frac{t}{\alpha^{2}}\right)\end{aligned}\tag{4.19}$$

eşitsizlikleri yazılır.

Böylece (4.17)-(4.19) ve t-conormun (iv) ve sezgisel fuzzy normun (xiv) özelliğinden

$$\delta_{k-1}^{2}\left(\frac{t}{\alpha}\right)\leq\delta_{k-2}^{2}\left(\frac{t}{\alpha^{2}}\right)$$

elde edilir. Bu şekilde işlemler sürdürülürse

$$\delta_{k}^{2}\left(t\right)\leq\delta_{k-1}^{2}\left(\frac{t}{\alpha}\right)\leq\delta_{k-2}^{2}\left(\frac{t}{\alpha^{2}}\right)\leq\ldots\leq\delta_{0}^{2}\left(\frac{t}{\alpha^{k}}\right)\tag{4.20}$$

sonucuna ulaşılır.

Şimdi $g\left(x_k^1\right),g\left(x_k^2\right),\ldots,g\left(x_k^n\right)$ dizilerinin $(X,\mu,\nu,*,\Diamond)$'de birer Cauchy dizisi olduğu (4.13) ve (4.20) yardımıyla gösterilebilir. Her bir $t>0$ ve $p>0$ için

$$\mu\left(g\left(x_{k+p}^{1}\right)-g\left(x_{k}^{1}\right),t\right)*\mu\left(g\left(x_{k+p}^{2}\right)-g\left(x_{k}^{2}\right),t\right)*\ldots*\mu\left(g\left(x_{k+p}^{n}\right)-g\left(x_{k}^{n}\right),t\right)$$

$$\begin{aligned}
&=\mu\begin{pmatrix} g\left(x_{k+p}^{1}\right)-g\left(x_{k+p-1}^{1}\right)+g\left(x_{k+p-1}^{1}\right)-g\left(x_{k+p-2}^{1}\right)+g\left(x_{k+p-2}^{1}\right) \\ \ldots-g\left(x_{k-1}^{1}\right)+g\left(x_{k-1}^{1}\right)-g\left(x_{k}^{1}\right),\frac{t}{p}+\frac{t}{p}+\ldots+\frac{t}{p} \end{pmatrix}* \\
&\mu\begin{pmatrix} g\left(x_{k+p}^{2}\right)-g\left(x_{k+p-1}^{2}\right)+g\left(x_{k+p-1}^{2}\right)-g\left(x_{k+p-2}^{2}\right)+g\left(x_{k+p-2}^{2}\right) \\ \ldots-g\left(x_{k-1}^{2}\right)+g\left(x_{k-1}^{2}\right)-g\left(x_{k}^{2}\right),\frac{t}{p}+\frac{t}{p}+\ldots+\frac{t}{p} \end{pmatrix} \\
&*\ldots* \\
&\mu\begin{pmatrix} g\left(x_{k+p}^{n}\right)-g\left(x_{k+p-1}^{n}\right)+g\left(x_{k+p-1}^{n}\right)-g\left(x_{k+p-2}^{n}\right)+g\left(x_{k+p-2}^{n}\right) \\ \ldots-g\left(x_{k-1}^{n}\right)+g\left(x_{k-1}^{n}\right)-g\left(x_{k}^{n}\right),\frac{t}{p}+\frac{t}{p}+\ldots+\frac{t}{p} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
&\geq\mu\left(g\left(x_{k+p}^{1}\right)-g\left(x_{k+p-1}^{1}\right),\frac{t}{p}\right)*\mu\left(g\left(x_{k+p-1}^{1}\right)-g\left(x_{k+p-2}^{1}\right),\frac{t}{p}\right) \\
&*\ldots*\mu\left(g\left(x_{k-1}^{1}\right)-g\left(x_{k}^{1}\right),\frac{t}{p}\right) \\
&*\ldots \\
&*\mu\left(g\left(x_{k+p}^{n}\right)-g\left(x_{k+p-1}^{n}\right),\frac{t}{p}\right)*\mu\left(g\left(x_{k+p-1}^{n}\right)-g\left(x_{k+p-2}^{n}\right),\frac{t}{p}\right) \\
&*\ldots*\mu\left(g\left(x_{k-1}^{n}\right)-g\left(x_{k}^{n}\right),\frac{t}{p}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\mu\left(g\left(x_{k+p}^{1}\right)-g\left(x_{k+p-1}^{1}\right),\frac{t}{p}\right)*\mu\left(g\left(x_{k+p}^{2}\right)-g\left(x_{k+p-1}^{2}\right),\frac{t}{p}\right) \\
&*\ldots*\mu\left(g\left(x_{k+p}^{n}\right)-g\left(x_{k+p-1}^{n}\right),\frac{t}{p}\right)* \\
&\mu\left(g\left(x_{k+p-1}^{1}\right)-g\left(x_{k+p-2}^{1}\right),\frac{t}{p}\right)*\mu\left(g\left(x_{k+p-1}^{2}\right)-g\left(x_{k+p-2}^{2}\right),\frac{t}{p}\right) \\
&*\ldots*\mu\left(g\left(x_{k+p-1}^{n}\right)-g\left(x_{k+p-2}^{n}\right),\frac{t}{p}\right) \\
&*\ldots* \\
&\mu\left(g\left(x_{k-1}^{1}\right)-g\left(x_{k}^{1}\right),\frac{t}{p}\right)*\mu\left(g\left(x_{k-1}^{2}\right)-g\left(x_{k}^{2}\right),\frac{t}{p}\right) \\
&*\ldots*\mu\left(g\left(x_{k-1}^{n}\right)-g\left(x_{k}^{n}\right),\frac{t}{p}\right)
\end{aligned}$$

$$= \delta^1_{k+p-1}\left(\frac{t}{p}\right) * \delta^1_{k+p-2}\left(\frac{t}{p}\right) * \ldots * \delta^1_{k-1}\left(\frac{t}{p}\right)$$

$$\gg \delta^1_0\left(\frac{t}{p\alpha^{k+p-1}}\right) * \delta^1_0\left(\frac{t}{p\alpha^{k+p-1}}\right) * \ldots * \delta^1_0\left(\frac{t}{p\alpha^{k-1}}\right)$$

$$= \mu\left(g\left(x^1_0\right) - g\left(x^1_1\right), \frac{t}{p\alpha^{k+p-1}}\right) * \mu\left(g\left(x^2_0\right) - g\left(x^2_1\right), \frac{t}{p\alpha^{k+p-1}}\right)$$

$$* \ldots * \mu\left(g\left(x^n_0\right) - g\left(x^n_1\right), \frac{t}{p\alpha^{k+p-1}}\right) *$$

$$\mu\left(g\left(x^1_0\right) - g\left(x^1_1\right), \frac{t}{p\alpha^{k+p-2}}\right) * \mu\left(g\left(x^2_0\right) - g\left(x^2_1\right), \frac{t}{p\alpha^{k+p-2}}\right)$$

$$* \ldots * \mu\left(g\left(x^n_0\right) - g\left(x^n_1\right), \frac{t}{p\alpha^{k+p-2}}\right)$$

$$* \ldots *$$

$$\mu\left(g\left(x^1_0\right) - g\left(x^1_1\right), \frac{t}{p\alpha^{k-1}}\right) * \mu\left(g\left(x^2_0\right) - g\left(x^2_1\right), \frac{t}{p\alpha^{k-1}}\right)$$

$$* \ldots * \mu\left(g\left(x^n_0\right) - g\left(x^n_1\right), \frac{t}{p\alpha^{k-1}}\right)$$

ve

$$\nu\left(g\left(x^1_{k+p}\right) - g\left(x^1_k\right), t\right) \Diamond \nu\left(g\left(x^2_{k+p}\right) - g\left(x^2_k\right), t\right) \Diamond \ldots \Diamond \nu\left(g\left(x^n_{k+p}\right) - g\left(x^n_k\right), t\right)$$

$$= \nu\begin{pmatrix} g\left(x^1_{k+p}\right) - g\left(x^1_{k+p-1}\right) + g\left(x^1_{k+p-1}\right) - g\left(x^1_{k+p-2}\right) + g\left(x^1_{k+p-2}\right) \\ \ldots - g\left(x^1_{k-1}\right) + g\left(x^1_{k-1}\right) - g\left(x^1_k\right), \frac{t}{p} + \frac{t}{p} + \ldots + \frac{t}{p} \end{pmatrix} \Diamond$$

$$\nu\begin{pmatrix} g\left(x^2_{k+p}\right) - g\left(x^2_{k+p-1}\right) + g\left(x^2_{k+p-1}\right) - g\left(x^2_{k+p-2}\right) + g\left(x^2_{k+p-2}\right) \\ \ldots - g\left(x^2_{k-1}\right) + g\left(x^2_{k-1}\right) - g\left(x^2_k\right), \frac{t}{p} + \frac{t}{p} + \ldots + \frac{t}{p} \end{pmatrix}$$

$$\Diamond \ldots \Diamond$$

$$\nu\begin{pmatrix} g\left(x^n_{k+p}\right) - g\left(x^n_{k+p-1}\right) + g\left(x^n_{k+p-1}\right) - g\left(x^n_{k+p-2}\right) + g\left(x^n_{k+p-2}\right) \\ \ldots - g\left(x^n_{k-1}\right) + g\left(x^n_{k-1}\right) - g\left(x^n_k\right), \frac{t}{p} + \frac{t}{p} + \ldots + \frac{t}{p} \end{pmatrix}$$

$$\leq \nu\left(g\left(x_{k+p}^{1}\right)-g\left(x_{k+p-1}^{1}\right),\frac{t}{p}\right)\Diamond\nu\left(g\left(x_{k+p-1}^{1}\right)-g\left(x_{k+p-2}^{1}\right),\frac{t}{p}\right)$$
$$\Diamond\ldots\Diamond\nu\left(g\left(x_{k-1}^{1}\right)-g\left(x_{k}^{1}\right),\frac{t}{p}\right)$$
$$\Diamond\ldots \tag{4.22}$$
$$\nu\left(g\left(x_{k+p}^{n}\right)-g\left(x_{k+p-1}^{n}\right),\frac{t}{p}\right)\Diamond\nu\left(g\left(x_{k+p-1}^{n}\right)-g\left(x_{k+p-2}^{n}\right),\frac{t}{p}\right)$$
$$\Diamond\ldots\Diamond\nu\left(g\left(x_{k-1}^{n}\right)-g\left(x_{k}^{n}\right),\frac{t}{p}\right)$$

$$=\nu\left(g\left(x_{k+p}^{1}\right)-g\left(x_{k+p-1}^{1}\right),\frac{t}{p}\right)\Diamond\nu\left(g\left(x_{k+p}^{2}\right)-g\left(x_{k+p-1}^{2}\right),\frac{t}{p}\right)$$
$$\Diamond\ldots\Diamond\nu\left(g\left(x_{k+p}^{n}\right)-g\left(x_{k+p-1}^{n}\right),\frac{t}{p}\right)\Diamond$$
$$\nu\left(g\left(x_{k+p-1}^{1}\right)-g\left(x_{k+p-2}^{1}\right),\frac{t}{p}\right)\Diamond\nu\left(g\left(x_{k+p-1}^{2}\right)-g\left(x_{k+p-2}^{2}\right),\frac{t}{p}\right)$$
$$\Diamond\ldots\Diamond\nu\left(g\left(x_{k+p-1}^{n}\right)-g\left(x_{k+p-2}^{n}\right),\frac{t}{p}\right)$$
$$\Diamond\ldots\Diamond$$
$$\nu\left(g\left(x_{k-1}^{1}\right)-g\left(x_{k}^{1}\right),\frac{t}{p}\right)\Diamond\nu\left(g\left(x_{k-1}^{2}\right)-g\left(x_{k}^{2}\right),\frac{t}{p}\right)\Diamond\ldots\Diamond\nu\left(g\left(x_{k-1}^{n}\right)-g\left(x_{k}^{n}\right),\frac{t}{p}\right)$$

$$=\delta_{k+p-1}^{2}\left(\frac{t}{p}\right)\Diamond\delta_{k+p-2}^{2}\left(\frac{t}{p}\right)\Diamond\ldots\Diamond\delta_{k-1}^{2}\left(\frac{t}{p}\right)$$
$$\leq\delta_{0}^{2}\left(\frac{t}{p\alpha^{k+p-1}}\right)\Diamond\delta_{0}^{2}\left(\frac{t}{p\alpha^{k+p-1}}\right)\Diamond\ldots\Diamond\delta_{0}^{2}\left(\frac{t}{p\alpha^{k-1}}\right)$$

$$=\nu\left(g\left(x_{0}^{1}\right)-g\left(x_{1}^{1}\right),\frac{t}{p\alpha^{k+p-1}}\right)\Diamond\nu\left(g\left(x_{0}^{2}\right)-g\left(x_{1}^{2}\right),\frac{t}{p\alpha^{k+p-1}}\right)$$
$$\Diamond\ldots\Diamond\nu\left(g\left(x_{0}^{n}\right)-g\left(x_{1}^{n}\right),\frac{t}{p\alpha^{k+p-1}}\right)\Diamond$$
$$\nu\left(g\left(x_{0}^{1}\right)-g\left(x_{1}^{1}\right),\frac{t}{p\alpha^{k+p-2}}\right)\Diamond\nu\left(g\left(x_{0}^{2}\right)-g\left(x_{1}^{2}\right),\frac{t}{p\alpha^{k+p-2}}\right)$$
$$\Diamond\ldots\Diamond\nu\left(g\left(x_{0}^{n}\right)-g\left(x_{1}^{n}\right),\frac{t}{p\alpha^{k+p-2}}\right)$$

$$\Diamond ... \Diamond$$
$$\nu\left(g\left(x_0^1\right)-g\left(x_1^1\right),\frac{t}{p\alpha^{k-1}}\right)\Diamond\,\nu\left(g\left(x_0^2\right)-g\left(x_1^2\right),\frac{t}{p\alpha^{k-1}}\right)$$
$$\Diamond ... \Diamond\,\nu\left(g\left(x_0^n\right)-g\left(x_1^n\right),\frac{t}{p\alpha^{k-1}}\right)$$

dir. (4.21) ve (4.22)'de $k \to \infty$ iken $\frac{t}{p\alpha^{k+p-1}}$, $\frac{t}{p\alpha^{k+p-2}}$,..., $\frac{t}{p\alpha^{k-1}}$ değerleri ∞'a gider. Dolayısıyla sezgisel fuzzy normun (vii) ve (xiii) özellikleri ile aşağıdaki (4.23) ve (4.24) eşitsizlikleri elde edilir:

$$\lim_{k\to\infty}\Big[\mu\left(g\left(x_{k+p}^1\right)-g\left(x_k^1\right),t\right)*\mu\left(g\left(x_{k+p}^2\right)-g\left(x_k^2\right),t\right) *...*\mu\left(g\left(x_{k+p}^n\right)-g\left(x_k^n\right),t\right)\Big]\geq 1*1*...*1=1, \tag{4.23}$$

$$\lim_{k\to\infty}\Big[\nu\left(g\left(x_{k+p}^1\right)-g\left(x_k^1\right),t\right)\Diamond\,\nu\left(g\left(x_{k+p}^2\right)-g\left(x_k^2\right),t\right) \Diamond ... \Diamond\,\nu\left(g\left(x_{k+p}^n\right)-g\left(x_k^n\right),t\right)\Big]\leq 0 \Diamond 0 \Diamond ... \Diamond 0=0. \tag{4.24}$$

Böylece $g\left(x_k^1\right), g\left(x_k^2\right),..., g\left(x_k^n\right)$ dizileri $(X,\mu,\nu,*,\Diamond)$'de Cauchy dizileridir.

Adım 4: Son adımda F sezgisel fuzzy sürekli iken g ve F'nin n-li çakışma noktasına sahip olduğu gösterilecektir. X tam sezgisel fuzzy normlu uzay ve $g\left(x_k^1\right), g\left(x_k^2\right),..., g\left(x_k^n\right)$ Cauchy dizileri olduğundan

$$\lim_{k\to\infty}\mu\left(g\left(x_k^1\right)-x^1,t\right)=1 \text{ ve } \lim_{k\to\infty}\nu\left(g\left(x_k^1\right)-x^1,t\right)=0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\mu\left(g\left(x_k^2\right)-x^2,t\right)=1 \text{ ve } \lim_{k\to\infty}\nu\left(g\left(x_k^2\right)-x^2,t\right)=0,$$

$$\vdots$$

$$\lim_{k\to\infty}\mu\left(g\left(x_k^n\right)-x^n,t\right)=1 \text{ ve } \lim_{k\to\infty}\nu\left(g\left(x_k^n\right)-x^n,t\right)=0$$

olacak şekilde $x^1, x^2,..., x^n \in X$ vardır. g'nin sezgisel fuzzy sürekliliğini kullanarak

$$\lim_{k\to\infty}\mu\left(g\left(g\left(x_k^1\right)\right)-g\left(x^1\right),t\right)=1 \text{ ve } \lim_{k\to\infty}\nu\left(g\left(g\left(x_k^1\right)\right)-g\left(x^1\right),t\right)=0$$

$$\lim_{k\to\infty}\mu\Big(g\big(g\big(x_k^2\big)\big)-g\big(x^2\big),t\Big)=1 \text{ ve } \lim_{k\to\infty}\nu\Big(g\big(g\big(x_k^2\big)\big)-g\big(x^2\big),t\Big)=0 \tag{4.25}$$

$$\vdots$$

$$\lim_{k\to\infty}\mu\Big(g\big(g\big(x_k^n\big)\big)-g\big(x^n\big),t\Big)=1 \text{ ve } \lim_{k\to\infty}\nu\Big(g\big(g\big(x_k^n\big)\big)-g\big(x^n\big),t\Big)=0$$

yazılabilir. g ve F 'nin değişmeliliğinden

$$\begin{aligned}
g\big(g\big(x_{k+1}^1\big)\big)&=g\big(F\big(x_k^1,x_k^2,...,x_k^n\big)\big)=F\big(g\big(x_k^1\big),g\big(x_k^2\big),...,g\big(x_k^n\big)\big)\\
g\big(g\big(x_{k+1}^2\big)\big)&=g\big(F\big(x_k^2,...,x_k^n,x_k^1\big)\big)=F\big(g\big(x_k^2\big),...,g\big(x_k^n\big),g\big(x_k^1\big)\big)\\
&\vdots\\
g\big(g\big(x_{k+1}^n\big)\big)&=g\big(F\big(x_k^n,x_k^1,...,x_k^{n-1}\big)\big)=F\big(g\big(x_k^n\big),g\big(x_k^1\big),...,g\big(x_k^{n-1}\big)\big)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

yazılır. X sezgisel fuzzy normlu uzayında

$$g\big(x_k^1\big)\xrightarrow{(\mu,\nu)}x^1 \;,\; g\big(x_k^2\big)\xrightarrow{(\mu,\nu)}x^2 ,...,\; g\big(x_k^n\big)\xrightarrow{(\mu,\nu)}x^n$$

olduğu kullanılarak ve $*$ t-norm ve $\Diamond$ t-conormun sürekliğinini göz önünde bulundurarak X^n sezgisel fuzzy normlu uzayında

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\Phi\Big(\big(g\big(x_k^1\big),g\big(x_k^2\big),...,g\big(x_k^n\big)\big)-\big(x^1,x^2,...,x^n\big),t\Big)\\
&=\lim_{k\to\infty}\Phi\Big(\big(g\big(x_k^1\big)-x^1,g\big(x_k^2\big)-x^2,...,g\big(x_k^n\big)-x^n\big),t\Big)\\
&=\lim_{k\to\infty}\Big[\mu\Big(g\big(x_k^1\big)-x^1,t\Big)*\mu\Big(g\big(x_k^2\big)-x^2,t\Big)*...*\mu\Big(g\big(x_k^n\big)-x^n,t\Big)\Big]\\
&=\lim_{k\to\infty}\mu\Big(g\big(x_k^1\big)-x^1,t\Big)*\lim_{k\to\infty}\mu\Big(g\big(x_k^2\big)-x^2,t\Big)*...*\lim_{k\to\infty}\mu\Big(g\big(x_k^n\big)-x^n,t\Big)\\
&=1*1*...*1=1
\end{aligned}$$

ve

$$\lim_{k\to\infty}\Psi\left(\left(g\left(x_k^1\right),g\left(x_k^2\right),...,g\left(x_k^n\right)\right)-\left(x^1,x^2,...,x^n\right),t\right)$$
$$\lim_{k\to\infty}\Psi\left(\left(g\left(x_k^1\right)-x^1,g\left(x_k^2\right)-x^2,...,g\left(x_k^n\right)-x^n\right),t\right)$$
$$=\lim_{k\to\infty}\left[\nu\left(g\left(x_k^1\right)-x^1,t\right)\Diamond\nu\left(g\left(x_k^2\right)-x^2,t\right)\Diamond...\Diamond\nu\left(g\left(x_k^n\right)-x^n,t\right)\right]$$
$$=\lim_{k\to\infty}\nu\left(g\left(x_k^1\right)-x^1,t\right)\Diamond\lim_{k\to\infty}\nu\left(g\left(x_k^2\right)-x^2,t\right)\Diamond...\Diamond\lim_{k\to\infty}\nu\left(g\left(x_k^n\right)-x^n,t\right)$$
$$=0\Diamond0\Diamond\cdots\Diamond0=0$$

elde edilir. Yani $\left(g\left(x_k^1\right),g\left(x_k^2\right),...,g\left(x_k^n\right)\right)\overset{(\Phi,\Psi)}{\rightarrow}\left(x^1,x^2,...,x^n\right)$'dir. Benzer şekilde

$$\left(g\left(x_k^2\right),...,g\left(x_k^n\right),g\left(x_k^1\right)\right)\overset{(\Phi,\Psi)}{\rightarrow}\left(x^2,...,x^n,x^1\right)$$
$$\vdots$$
$$\left(g\left(x_k^n\right),g\left(x_k^1\right),...,g\left(x_k^{n-1}\right)\right)\overset{(\Phi,\Psi)}{\rightarrow}\left(x^n,x^1,...,x^{n-1}\right)$$

olduğu görülebilir. F sezgisel fuzzy sürekli olduğundan

$$F\left(g\left(x_k^1\right),g\left(x_k^2\right),...,g\left(x_k^n\right)\right)\overset{(\mu,\nu)}{\rightarrow}F\left(x^1,x^2,...,x^n\right)$$
$$F\left(g\left(x_k^2\right),...,g\left(x_k^n\right),g\left(x_k^1\right)\right)\overset{(\mu,\nu)}{\rightarrow}F\left(x^2,...,x^n,x^1\right) \tag{4.27}$$
$$\vdots$$
$$F\left(g\left(x_k^n\right),g\left(x_k^1\right),...,g\left(x_k^{n-1}\right)\right)\overset{(\mu,\nu)}{\rightarrow}F\left(x^n,x^1,...,x^{n-1}\right)$$

dir.

Sezgisel fuzzy normun (v) ve (xi) özellikleri ile birlikte (4.26) kullanılarak

$$\mu\left(g\left(x^1\right)-F\left(x^1,x^2,...,x^n\right),t\right)$$
$$=\mu\left(g\left(x^1\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^1\right)\right)+g\left(g\left(x_{k+1}^1\right)\right)-F\left(x^1,x^2,...,x^n\right),t\right) \tag{4.28}$$
$$\geq\mu\left(g\left(x^1\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^1\right)\right),\frac{t}{2}\right)*\mu\left(g\left(g\left(x_{k+1}^1\right)\right)-F\left(x^1,x^2,...,x^n\right),\frac{t}{2}\right)$$
$$=\mu\left(g\left(x^1\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^1\right)\right),\frac{t}{2}\right)*\mu\left(F\left(g\left(x_k^1\right),g\left(x_k^2\right),...,g\left(x_k^n\right)\right)-F\left(x^1,x^2,...,x^n\right),\frac{t}{2}\right)$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\nu\left(g\left(x^1\right)-F\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right),t\right)\\
&=\nu\left(g\left(x^1\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^1\right)\right)+g\left(g\left(x_{k+1}^1\right)\right)-F\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right),t\right)
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le\nu\left(g\left(x^1\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^1\right)\right),\frac{t}{2}\right)\Diamond\nu\left(g\left(g\left(x_{k+1}^1\right)\right)-F\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right),\frac{t}{2}\right)\\
&=\nu\left(g\left(x^1\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^1\right)\right),\frac{t}{2}\right)\Diamond\nu\left(F\left(g\left(x_k^1\right),g\left(x_k^2\right),\ldots,g\left(x_k^n\right)\right)-F\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right),\frac{t}{2}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.28) ve (4.29) eşitsizliklerinde limit alınır ve (4.25) ve (4.27) kullanılırsa

$$1=\mu\left(g\left(x^1\right)-F\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right),t\right),$$

$$0=\nu\left(g\left(x^1\right)-F\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right),t\right)$$

sonucuna ulaşılır. Sezgisel fuzzy normun (iii) ve (ix) özelliklerinden $F\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right)=g\left(x^1\right)$ olduğu görülür.

Benzer şekilde sezgisel fuzzy normun (v) ve (xi) özellikleri ile birlikte (4.26) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\mu\left(g\left(x^2\right)-F\left(x^2,\ldots,x^n,x^1\right),t\right)\\
&=\mu\left(g\left(x^2\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right)+g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right)-F\left(x^2,\ldots,x^n,x^1\right),t\right)
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

$$
\begin{aligned}
&\ge\mu\left(g\left(x^2\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right),\frac{t}{2}\right)*\mu\left(g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right)-F\left(x^2,\ldots,x^n,x^1\right),\frac{t}{2}\right)\\
&=\mu\left(g\left(x^2\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right),\frac{t}{2}\right)*\mu\left(F\left(g\left(x_k^2\right),\ldots,g\left(x_k^n\right),g\left(x_k^1\right)\right)-F\left(x^2,\ldots,x^n,x^1\right),\frac{t}{2}\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\nu\left(g\left(x^2\right)-F\left(x^2,\ldots,x^n,x^1\right),t\right)\\
&=\nu\left(g\left(x^2\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right)+g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right)-F\left(x^2,\ldots,x^n,x^1\right),t\right)
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le\nu\left(g\left(x^2\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right),\frac{t}{2}\right)\Diamond\nu\left(g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right)-F\left(x^2,\ldots,x^n,x^1\right),\frac{t}{2}\right)\\
&=\nu\left(g\left(x^2\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right),\frac{t}{2}\right)\Diamond\nu\left(F\left(g\left(x_k^2\right),\ldots,g\left(x_k^n\right),g\left(x_k^1\right)\right)-F\left(x^2,\ldots,x^n,x^1\right),\frac{t}{2}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.30) ve (4.31) eşitsizliklerinde limit alınır ve (4.25) ve (4.27) kullanılırsa

$$1=\mu\left(g\left(x^2\right)-F\left(x^2,...,x^n,x^1\right),t\right),$$

$$0=\nu\left(g\left(x^2\right)-F\left(x^2,...,x^n,x^1\right),t\right)$$

elde edilir. Sezgisel fuzzy normun (iii) ve (ix) özelliklerinden $F\left(x^2,...,x^n,x^1\right)=g\left(x^2\right)$ olduğu sonucuna varılır. İşlemler bu şekilde sürdürülürse

$$\begin{aligned}&\mu\left(g\left(x^n\right)-F\left(x^n,x^1...,x^{n-1}\right),t\right)\\&=\mu\left(g\left(x^n\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right)+g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right)-F\left(x^n,x^1...,x^{n-1}\right),t\right)\end{aligned}\tag{4.32}$$

$$\geq\mu\left(g\left(x^n\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right),\frac{t}{2}\right)*\mu\left(g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right)-F\left(x^n,x^1,...,x^{n-1}\right),\frac{t}{2}\right)$$
$$=\mu\left(g\left(x^n\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right),\frac{t}{2}\right)*\mu\left(F\left(g\left(x_k^n\right),g\left(x_k^1\right),...,,g\left(x_k^{n-1}\right)\right)-F\left(x^n,x^1,...,,x^{n-1}\right),\frac{t}{2}\right)$$

ve

$$\begin{aligned}&\nu\left(g\left(x^n\right)-F\left(x^2,...,x^n,x^1\right),t\right)\\&=\nu\left(g\left(x^n\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right)+g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right)-F\left(x^n,x^1,...,,x^{n-1}\right),t\right)\end{aligned}\tag{4.33}$$

$$\leq\nu\left(g\left(x^n\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right),\frac{t}{2}\right)\Diamond\nu\left(g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right)-F\left(x^n,x^1,...,x^{n-1}\right),\frac{t}{2}\right)$$
$$=\nu\left(g\left(x^n\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right),\frac{t}{2}\right)\Diamond\nu\left(F\left(g\left(x_k^n\right),g\left(x_k^1\right),...,,g\left(x_k^{n-1}\right)\right)-F\left(x^n,x^1,...,x^{n-1}\right),\frac{t}{2}\right)$$

elde edilir. (4.32) ve (4.33) eşitsizliklerinde limit alınır ve (4.25) ve (4.27) kullanılırsa

$$1=\mu\left(g\left(x^n\right)-F\left(x^n,x^1,...,x^{n-1}\right),t\right),$$

$$0=\nu\left(g\left(x^n\right)-F\left(x^n,x^1,...,x^{n-1}\right),t\right)$$

olduğu sonucuna ulaşılır. Sezgisel fuzzy normun (iii) ve (ix) özelliklerinden $F\left(x^n,x^1,...,x^{n-1}\right)=g\left(x^n\right)$ olduğu sonucuna varılır.

Teorem 4.3 $F: X^n \to X$, $\ll$ ile gösterilen kısmi sıralamaya sahip tam sezgisel fuzzy normlu $(X,\mu,\nu,*,\Diamond)$ üzerinde karışık $g-$monoton özelliğine sahip bir dönüşüm olsun. Ayrıca $F(X^n)\subset g(X)$ ve g, F ile değişmeli sürekli bir dönüşüm olsun. X'in aşağıdaki özelliğe sahip olduğu varsayılsın:

(i) Azalmayan (x_k) dizisi için $x_k \xrightarrow{(\mu,\nu)} x$ ise, her k için $x_k \ll x$'dir.

(ii) Artmayan (y_k) dizisi için $y_k \xrightarrow{(\mu,\nu)} y$ ise, her k için $y_k \gg y$'dir.

Ayrıca $i\in\left\{1,2,...,\frac{n+1}{2}\right\}$ iken $g\left(x^{2i-1}\right)\ll g\left(y^{2i-1}\right)$ ve $i\in\left\{1,2,...,\frac{n}{2}\right\}$ iken $g\left(x^{2i}\right)\gg g\left(y^{2i}\right)$ eşitsizliklerini sağlayan her $x^1,x^2,...,x^n,y^1,y^2,...,y^n\in X$ ve $\alpha\in(0,1)$ için $F: X^n\to X$ ve $g: X\to X$ dönüşümlerinin

$$\mu\left(F\left(x^1,x^2,...,x^n\right)-F\left(y^1,y^2,...,y^n\right),\alpha t\right)$$
$$\geq \mu\left(g\left(x^1\right)-\left(y^1\right),t\right)*\mu\left(g\left(x^2\right)-\left(y^2\right),t\right)*...*\mu\left(g\left(x^n\right)-g\left(y^n\right),t\right)$$

ve

$$\nu\left(F\left(x^1,x^2,...,x^n\right)-F\left(y^1,y^2,...,y^n\right),\alpha t\right)$$
$$\leq \nu\left(g\left(x^1\right)-g\left(y^1\right),t\right)\Diamond\nu\left(g\left(x^2\right)-g\left(y^2\right),t\right)\Diamond...\Diamond\nu\left(g\left(x^n\right)-g\left(y^n\right),t\right)$$

şartlarını sağladığı varsayılsın. Eğer

$$g\left(x_0^1\right)\ll F\left(x_0^1,x_0^2,...,x_0^n\right)$$
$$g\left(x_0^2\right)\gg F\left(x_0^2,...,x_0^n,x_0^1\right)$$
$$\vdots$$
$$g\left(x_0^n\right)\ll F\left(x_0^n,x_0^1,...,x_0^{n-1}\right) \text{ (eğer } n \text{ tek ise)}$$
$$g\left(x_0^n\right)\gg F\left(x_0^n,x_0^1,...,x_0^{n-1}\right) \text{ (eğer } n \text{ çift ise)}$$

olacak şekilde $x_0^1,x_0^2,...,x_0^n,y_0^1,y_0^2,...,y_0^n\in X$ varsa

$$
\begin{aligned}
&F\left(x^{1},x^{2},...,x^{n}\right)=g\left(x^{1}\right)\\
&F\left(x^{2},...,x^{n},x^{1}\right)=g\left(x^{2}\right)\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&F\left(x^{n},x^{1},...,x^{n-1}\right)=g\left(x^{n}\right)
\end{aligned}
$$

eşitliklerini sağlayan $x^{1},x^{2},...,x^{n}\in X$ vardır, yani F ve g bir $n-$li çakışma noktasına sahiptir.

İspat: Bu teoremin ispatı da dört adımdır. İlk üç adım Teorem 4.2'nin ilk üç adımıyla aynıdır. Dolayısıyla sadece son adım gösterilecektir. (i) ve (ii)'de verilen hipotezler ve $g\left(x_k^{1}\right)\overset{(\mu,\nu)}{\rightarrow} x^{1}$, $g\left(x_k^{2}\right)\overset{(\mu,\nu)}{\rightarrow} x^{2}$,..., $g\left(x_k^{n}\right)\overset{(\mu,\nu)}{\rightarrow} x^{n}$ olduğu göz önüne alınarak her k için

$g\left(x_k^{1}\right)\ll x^{1}$, $g\left(x_k^{2}\right)\gg x^{2}$,..., $g\left(x_k^{n}\right)\ll x^{n}$ (eğer n tek ise) , (4.34)

$g\left(x_k^{n}\right)\gg x^{n}$ (eğer n çift ise)

dir. g 'nin sezgisel fuzzy sürekliliği yoluyla

$$g\left(g\left(x_k^{1}\right)\right)\overset{(\mu,\nu)}{\rightarrow} g\left(x^{1}\right) ,\ g\left(g\left(x_k^{2}\right)\right)\overset{(\mu,\nu)}{\rightarrow} g\left(x^{2}\right),...,\ g\left(g\left(x_k^{n}\right)\right)\overset{(\mu,\nu)}{\rightarrow} g\left(x^{n}\right) \tag{4.35}$$

yazılabilir. (4.1), (4.2) ve (4.34) ile

$$
\begin{aligned}
&\mu\left(g\left(x^{1}\right)-F\left(x^{1},x^{2},...,x^{n}\right),\alpha t\right)\\
&=\mu\left(g\left(x^{1}\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^{1}\right)\right)+g\left(g\left(x_{k+1}^{1}\right)\right)-F\left(x^{1},x^{2},...,x^{n}\right),\alpha t\right)\\
&\geq\mu\left(g\left(x^{1}\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^{1}\right)\right),\frac{\alpha t}{2}\right)*\mu\left(g\left(g\left(x_{k+1}^{1}\right)\right)-F\left(x^{1},x^{2},...,x^{n}\right),\frac{\alpha t}{2}\right)\\
&=\mu\left(g\left(x^{1}\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^{1}\right)\right),\frac{\alpha t}{2}\right)*\mu\left(g\left(F\left(x_k^{1},x_k^{2},...,x_k^{n}\right)\right)-F\left(x^{1},x^{2},...,x^{n}\right),\frac{\alpha t}{2}\right)\\
&=\mu\left(g\left(x^{1}\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^{1}\right)\right),\frac{\alpha t}{2}\right)*\mu\left(F\left(g\left(x_k^{1}\right),g\left(x_k^{2}\right),...,g\left(x_k^{n}\right)\right)-F\left(x^{1},x^{2},...,x^{n}\right),\frac{\alpha t}{2}\right)\\
&\geq\mu\left(g\left(x^{1}\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^{1}\right)\right),\frac{\alpha t}{2}\right)*\mu\left(g\left(g\left(x_k^{1}\right)\right)-g\left(x^{1}\right),\frac{t}{2}\right)\\
&*\mu\left(g\left(g\left(x_k^{2}\right)\right)-g\left(x^{2}\right),\frac{t}{2}\right)*...*\mu\left(g\left(x_k^{n}\right)-g\left(x^{n}\right),\frac{t}{2}\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\nu\left(g\left(x^1\right)-F\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right),\alpha t\right)\\
&=\nu\left(g\left(x^1\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^1\right)\right)+g\left(g\left(x_{k+1}^1\right)\right)-F\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right),\alpha t\right)\\
&\le\nu\left(g\left(x^1\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^1\right)\right),\frac{\alpha t}{2}\right)\lozenge\,\nu\left(g\left(g\left(x_{k+1}^1\right)\right)-F\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right),\frac{\alpha t}{2}\right)\\
&=\nu\left(g\left(x^1\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^1\right)\right),\frac{\alpha t}{2}\right)\lozenge\,\nu\left(g\left(F\left(x_k^1,x_k^2,\ldots,x_k^n\right)\right)-F\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right),\frac{\alpha t}{2}\right)\\
&=\nu\left(g\left(x^1\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^1\right)\right),\frac{\alpha t}{2}\right)\lozenge\,\nu\left(F\left(g\left(x_k^1\right),g\left(x_k^2\right),\ldots,g\left(x_k^n\right)\right)-F\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right),\frac{\alpha t}{2}\right)\\
&\le\nu\left(g\left(x^1\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^1\right)\right),\frac{\alpha t}{2}\right)\lozenge\,\nu\left(g\left(g\left(x_k^1\right)\right)-g\left(x^1\right),\frac{t}{2}\right)\\
&\lozenge\,\nu\left(g\left(g\left(x_k^2\right)\right)-g\left(x^2\right),\frac{t}{2}\right)\lozenge\ldots\lozenge\,\nu\left(g\left(g\left(x_k^n\right)\right)-g\left(x^n\right),\frac{t}{2}\right)
\end{aligned}
$$

dir ve $k\to\infty$ için yukarıdaki eşitsizliklerde limit alınır ve (4.35) kullanılırsa

$$\mu\left(g\left(x^1\right)-F\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right),\alpha t\right)=1$$

ve

$$\nu\left(g\left(x^1\right)-F\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right),\alpha t\right)=0$$

elde edilir. Böylece $g\left(x^1\right)=F\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right)$ olduğu görülür. Yukarıdaki hesaplamalara benzer bir yolla

$$
\begin{aligned}
&\mu\left(g\left(x^2\right)-F\left(x^2,\ldots,x^n,x^1\right),\alpha t\right)\\
&=\mu\left(g\left(x^2\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right)+g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right)-F\left(x^2,\ldots,x^n,x^1\right),\alpha t\right)\\
&\ge\mu\left(g\left(x^2\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right),\frac{\alpha t}{2}\right)*\mu\left(g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right)-F\left(x^2,\ldots,x^n,x^1\right),\frac{\alpha t}{2}\right)\\
&=\mu\left(g\left(x^2\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right),\frac{\alpha t}{2}\right)*\mu\left(g\left(F\left(x_k^2,\ldots,x_k^n,x_k^1\right)\right)-F\left(x^2,\ldots,x^n,x^1\right),\frac{\alpha t}{2}\right)\\
&=\mu\left(g\left(x^2\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right),\frac{\alpha t}{2}\right)*\mu\left(F\left(g\left(x_k^2\right),\ldots,g\left(x_k^n\right),g\left(x_k^1\right)\right)-F\left(x^2,\ldots,x^n,x^1\right),\frac{\alpha t}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$\geq \mu\left(g\left(x^2\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right),\frac{\alpha t}{2}\right)*\mu\left(g\left(g\left(x_k^2\right)\right)-g\left(x^2\right),\frac{t}{2}\right)$$
$$*...*\mu\left(g\left(x_k^n\right)-g\left(x^n\right),\frac{t}{2}\right)*\mu\left(g\left(g\left(x_k^1\right)\right)-g\left(x^1\right),\frac{t}{2}\right)$$

ve

$$\nu\left(g\left(x^2\right)-F\left(x^2,...,x^n,x^1\right),\alpha t\right)$$
$$=\nu\left(g\left(x^2\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right)+g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right)-F\left(x^2,...,x^n,x^1\right),\alpha t\right)$$
$$\leq \nu\left(g\left(x^2\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right),\frac{\alpha t}{2}\right)\Diamond\nu\left(g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right)-F\left(x^2,...,x^n,x^1\right),\frac{\alpha t}{2}\right)$$
$$=\nu\left(g\left(x^2\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right),\frac{\alpha t}{2}\right)\Diamond\nu\left(g\left(F\left(x_k^2,...,x_k^n,x_k^1\right)\right)-F\left(x^2,...,x^n,x^1\right),\frac{\alpha t}{2}\right)$$
$$=\nu\left(g\left(x^2\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right),\frac{\alpha t}{2}\right)\Diamond\nu\left(F\left(g\left(x_k^2\right),...,g\left(x_k^n\right),g\left(x_k^1\right)\right)-F\left(x^2,...,x^n,x^1\right),\frac{\alpha t}{2}\right)$$
$$\leq \nu\left(g\left(x^2\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^2\right)\right),\frac{\alpha t}{2}\right)\Diamond\nu\left(g\left(g\left(x_k^2\right)\right)-g\left(x^2\right),\frac{t}{2}\right)$$
$$\Diamond...\Diamond\nu\left(g\left(g\left(x_k^n\right)\right)-g\left(x^n\right),\frac{t}{2}\right)\Diamond\nu\left(g\left(g\left(x_k^1\right)\right)-g\left(x^1\right),\frac{t}{2}\right)$$

dir ve $k\to\infty$ için yukarıdaki eşitsizliklerde limit alınırsa

$$\mu\left(g\left(x^2\right)-F\left(x^2,...,x^n,x^1\right),\alpha t\right)=1$$

ve

$$\nu\left(g\left(x^2\right)-F\left(x^2,...,x^n,x^1\right),\alpha t\right)=0$$

elde edilir. Böylece $g\left(x^2\right)=F\left(x^2,...,x^n,x^1\right)$ elde edilir. İşlemler bu şekilde sürdürülürse

$$\mu\left(g\left(x^n\right)-F\left(x^n,x^1,...,x^{n-1}\right),\alpha t\right)$$
$$=\mu\left(g\left(x^n\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right)+g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right)-F\left(x^n,x^1,...,x^{n-1}\right),\alpha t\right)$$
$$\geq \mu\left(g\left(x^n\right)-g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right),\frac{\alpha t}{2}\right)*\mu\left(g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right)-F\left(x^n,x^1,...,x^{n-1}\right),\frac{\alpha t}{2}\right)$$

$$= \mu\left(g\left(x^n\right) - g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right), \frac{\alpha t}{2}\right) * \mu\left(g\left(F\left(x_k^n, x_k^1, \dots, x_k^{n-1}\right)\right) - F\left(x^n, x^1, \dots, x^{n-1}\right), \frac{\alpha t}{2}\right)$$
$$= \mu\left(g\left(x^n\right) - g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right), \frac{\alpha t}{2}\right) * \mu\left(F\left(g\left(x_k^n\right), g\left(x_k^1\right), \dots, g\left(x_k^{n-1}\right)\right) - F\left(x^n, x^1, \dots, x^{n-1}\right), \frac{\alpha t}{2}\right)$$
$$\geq \mu\left(g\left(x^n\right) - g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right), \frac{\alpha t}{2}\right) * \mu\left(g\left(g\left(x_k^n\right)\right) - g\left(x^n\right), \frac{t}{2}\right)$$
$$* \mu\left(g\left(g\left(x_k^1\right)\right) - g\left(x^1\right), \frac{t}{2}\right) * \dots * \mu\left(g\left(g\left(x_k^{n-1}\right)\right) - g\left(x^{n-1}\right), \frac{t}{2}\right)$$

ve

$$\nu\left(g\left(x^n\right) - F\left(x^n, x^1, \dots, x^{n-1}\right), \alpha t\right)$$
$$= \nu\left(g\left(x^n\right) - g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right) + g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right) - F\left(x^n, x^1, \dots, x^{n-1}\right), \alpha t\right)$$
$$\leq \nu\left(g\left(x^n\right) - g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right), \frac{\alpha t}{2}\right) \lozenge \nu\left(g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right) - F\left(x^n, x^1, \dots, x^{n-1}\right), \frac{\alpha t}{2}\right)$$
$$= \nu\left(g\left(x^n\right) - g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right), \frac{\alpha t}{2}\right) \lozenge \nu\left(g\left(F\left(x_k^n, x_k^1, \dots, x_k^{n-1}\right)\right) - F\left(x^n, x^1, \dots, x^{n-1}\right), \frac{\alpha t}{2}\right)$$
$$= \nu\left(g\left(x^n\right) - g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right), \frac{\alpha t}{2}\right) \lozenge \nu\left(F\left(g\left(x_k^n\right), g\left(x_k^1\right), \dots, g\left(x_k^{n-1}\right)\right) - F\left(x^n, x^1, \dots, x^{n-1}\right), \frac{\alpha t}{2}\right)$$
$$\leq \nu\left(g\left(x^n\right) - g\left(g\left(x_{k+1}^n\right)\right), \frac{\alpha t}{2}\right) \lozenge \nu\left(g\left(g\left(x_k^n\right)\right) - g\left(x^n\right), \frac{t}{2}\right)$$
$$\lozenge \nu\left(g\left(g\left(x_k^1\right)\right) - g\left(x^1\right), \frac{t}{2}\right) \lozenge \dots \lozenge \nu\left(g\left(g\left(x_k^{n-1}\right)\right) - g\left(x^{n-1}\right), \frac{t}{2}\right)$$

olduğu görülür. $k \to \infty$ için yukarıdaki eşitsizliklerde limit alınırsa

$$\mu\left(g\left(x^n\right) - F\left(x^n, x^1, \dots, x^{n-1}\right), \alpha t\right) = 1$$

ve

$$\nu\left(g\left(x^n\right) - F\left(x^n, x^1, \dots, x^{n-1}\right), \alpha t\right) = 0$$

elde edilir. Böylece $g\left(x^n\right) = F\left(x^n, x^1, \dots, x^{n-1}\right)$ elde edilir. Yani F ve g'nin bir n-li çakışma noktası vardır.

BÖLÜM 5

SEZGİSEL FUZZY NORMLU UZAYLARDA APPROXİMATE SABİT NOKTA ÖZELLİĞİ

Bu bölümde sezgisel fuzzy normlu uzaylarda bir fonksiyonun ve bir kümenin approximate sabit nokta özelliğine sahip olmasının tanımı verilecektir. Ayrıca sabit nokta teorisinde kullanılan bazı dönüşüm sınıflarının sezgisel fuzzy versiyonlarının tanımı verilecek ve bu dönüşümlerin approximate sabit nokta özelliğinin sağlanıp sağlanmadığı incelenecektir.

Tanım 5.1 $(X, \mu, \nu, *, \Diamond)$ bir sezgisel fuzzy normlu uzay ve $f : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Verilen bir $\varepsilon > 0$ ve her $t > 0$ için

$\mu\left(f\left(x_0\right) - x_0, t\right) > 1 - \varepsilon$ ve $\nu\left(f\left(x_0\right) - x_0, t\right) < \varepsilon$

ise $x_0 \in X$, f 'nin sezgisel fuzzy approximate sabit noktası veya ε-sabit noktası olarak adlandırılır. f 'nin sezgisel fuzzy approximate sabit noktalarının kümesi $F_{\varepsilon}^{(\mu,\nu)}\left(f\right)$ ile gösterilir.

Tanım 5.2 Eğer her $\varepsilon > 0$ için $F_{\varepsilon}^{(\mu,\nu)}\left(f\right) \neq \varnothing$ ise f sezgisel fuzzy approximate sabit nokta özelliğine sahiptir denir.

Örnek 5.3 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f\left(x\right) = x + \dfrac{1}{2}$ ile verilsin. $|\,.\,|$, $\mathbb{R}$ üzerinde alışımış mutlak değer normunu göstersin. Her $a, b \in [0,1]$ için $a * b = a.b$ ve $a \Diamond b = \min\{a + b, 1\}$ iken

$$\mu(x,t)=\frac{t}{t+|x|} \text{ ve } \nu(x,t)=\frac{|x|}{t+|x|}$$

ile $(\mathbb{R},\mu,\nu,*,\lozenge)$ bir sezgisel fuzzy normlu uzaydır. Bu fonksiyonun herhangi bir sabit noktası yoktur. Fakat $\varepsilon>\frac{1}{2t+1}$ ve $t>0$ için

$$\mu(f(x)-x,t)=\frac{t}{t+|f(x)-x|}>1-\varepsilon \text{ ve } \nu(f(x)-x,t)=\frac{|f(x)-x|}{t+|f(x)-x|}<\varepsilon$$

olduğundan dolayı her $x\in\mathbb{R}$, f için bir sezgisel fuzzy aprroximate sabit noktadır. Fakat $\varepsilon<\frac{1}{2t+1}$ ve $t>0$ için $F_\varepsilon^{(\mu,\nu)}(f)=\varnothing$'dir.

Örnek 5.4 $((0,1),\mu,\nu,*,\lozenge)$ beşlisi yukarıda tanımlanan t-norm, t-conorm ve sezgisel fuzzy normla bir sezgisel fuzzy normlu uzaydır. $f:(0,1)\to(0,1)$ dönüşümü $f(x)=x^2$ ile verilsin. Her $\varepsilon>0$ ve her $t>0$ için

$$\mu(f(x)-x,t)=\frac{t}{t+|f(x)-x|}>1-\varepsilon \text{ ve } \nu(f(x)-x,t)=\frac{|f(x)-x|}{t+|f(x)-x|}<\varepsilon$$

yani $|x^2-x|<\frac{\varepsilon t}{1-\varepsilon}$'yi sağlayan $x\in(0,1)$ vardır. Her $\varepsilon>0$ için $F_\varepsilon^{(\mu,\nu)}(f)$ boştan farklı olduğundan f sezgisel fuzzy approximate sabit nokta özelliğine sahiptir.

Tanım 5.5 K, $(X,\mu,\nu,*,\lozenge)$'in boştan farklı bir alt kümesi olsun. $t>0$ için

$$\delta_\mu(K)=\inf\{\mu(x-y,t):x,y\in K\} \text{ ve } \delta_\nu(K)=\sup\{\nu(x-y,t):x,y\in K\}$$

olmak üzere $(\delta_\mu(K),\delta_\nu(K))$, K'nın t'ye göre sezgisel fuzzy çapı olarak adlandırılır.

Teorem 5.6 $(X,\mu,\nu,*,\lozenge)$ bir sezgisel fuzzy normlu uzay, $f:X\to X$ bir dönüşüm ve $\varepsilon>0$ olsun.

(i) $F_\varepsilon^{(\mu,\nu)}(f)\neq\varnothing$

(ii) Her $x,y\in F_\varepsilon^{(\mu,\nu)}(f)$ ve $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in(0,1)$ için

$$\mu\left(x-y,t\right)\geq\varepsilon_1*\mu\left(f\left(x\right)-f\left(y\right),t_1\right)\Rightarrow\mu\left(x-y,t\right)\geq\vartheta\left(\varepsilon_1\right)$$

ve

$$\nu\left(x-y,t\right)\leq\varepsilon_2*\nu\left(f\left(x\right)-f\left(y\right),t_2\right)\Rightarrow\nu\left(x-y,t\right)\leq\vartheta\left(\varepsilon_2\right)$$

olacak şekilde $\vartheta\left(\varepsilon_1\right),\vartheta\left(\varepsilon_2\right)\in\left(0,1\right)$ olduğu varsayılsın. Bu takdirde

$\left(\delta_\mu\left(F_\varepsilon^{(\mu,\nu)}\left(f\right)\right),\delta_\nu\left(F_\varepsilon^{(\mu,\nu)}\left(f\right)\right)\right)=\left(\vartheta\left(1-\varepsilon\right),\vartheta\left(\varepsilon\right)\right)$'dır.

İspat $\varepsilon>0$ ve $x,y\in F_\varepsilon^{(\mu,\nu)}\left(f\right)$ olsun. Bu takdirde her $t>0$ için

$\mu\left(x-f\left(x\right),t\right)>1-\varepsilon$ ve $\nu\left(x-f\left(x\right),t\right)<\varepsilon$,

$\mu\left(y-f\left(y\right),t\right)>1-\varepsilon$ ve $\nu\left(y-f\left(y\right),t\right)<\varepsilon$

dır.

$$\begin{aligned}\mu\left(x-y,t\right)&=\mu\left(x-f\left(x\right)+f\left(x\right)-f\left(y\right)+f\left(y\right)-y,t\right)\\&\geq\mu\left(x-f\left(x\right),\frac{t}{3}\right)*\mu\left(f\left(x\right)-f\left(y\right),\frac{t}{3}\right)*\mu\left(f\left(y\right)-y,\frac{t}{3}\right)\\&\geq\left(1-\varepsilon\right)*\left(1-\varepsilon\right)*\mu\left(f\left(x\right)-f\left(y\right),\frac{t}{3}\right)\\&=\left(1-\varepsilon\right)*\mu\left(f\left(x\right)-f\left(y\right),\frac{t}{3}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\nu\left(x-y,t\right)&=\nu\left(x-f\left(x\right)+f\left(x\right)-f\left(y\right)+f\left(y\right)-y,t\right)\\&\leq\nu\left(x-f\left(x\right),\frac{t}{3}\right)\Diamond\nu\left(f\left(x\right)-f\left(y\right),\frac{t}{3}\right)\Diamond\nu\left(f\left(y\right)-y,\frac{t}{3}\right)\\&\leq\varepsilon\Diamond\varepsilon\Diamond\nu\left(f\left(x\right)-f\left(y\right),\frac{t}{3}\right)\\&=\varepsilon\Diamond\nu\left(f\left(x\right)-f\left(y\right),\frac{t}{3}\right)\end{aligned}$$

Teoremin (ii) şartından $\mu(x-y,t)\geq \vartheta(1-\varepsilon),\nu(x-y,t)\leq \vartheta(\varepsilon)$ elde edilir. Her $x,y\in F_{\varepsilon}^{(\mu,\nu)}(f)$ için $\mu(x-y,t)\geq \vartheta(1-\varepsilon)$ ve $\nu(x-y,t)\leq \vartheta(\varepsilon)$ olduğundan $\inf\left\{\mu(x-y,t):x,y\in F_{\varepsilon}^{(\mu,\nu)}(f)\right\}=\vartheta(1-\varepsilon)$

ve

$\sup\left\{\nu(x-y,t):x,y\in F_{\varepsilon}^{(\mu,\nu)}(f)\right\}=\vartheta(\varepsilon)$'dir. Dolayısıyla

$\left(\delta_{\mu}\left(F_{\varepsilon}^{(\mu,\nu)}(f)\right),\delta_{\nu}\left(F_{\varepsilon}^{(\mu,\nu)}(f)\right)\right)=\left(\vartheta(1-\varepsilon),\vartheta(\varepsilon)\right)$'dır.

Şimdi verilen bir fonksiyonun sezgisel fuzzy approximate sabit noktalarının olup olmadığını test etmek için önemli bir araç olarak kullanılacak olan sezgisel fuzzy asimptotik regülerlik özelliği tanımlanacaktır.

Tanım 5.7 $(X,\mu,\nu,*,\Diamond)$ bir sezgisel fuzzy normlu uzay ve $f:X\to X$ bir fonksiyon olsun. Her $x\in X$ ve her $t>0$ için

$\lim_{k\to\infty}\mu\left(f^{k+1}(x)-f^{k}(x),t\right)=1$ ve $\lim_{k\to\infty}\nu\left(f^{k+1}(x)-f^{k}(x),t\right)=0$

ise f'ye sezgisel fuzzy asimptotik regüler denir.

Teorem 5.8 $(X,\mu,\nu,*,\Diamond)$ bir sezgisel fuzzy normlu uzay ve $f:X\to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer f sezgisel fuzzy asimptotik regüler ise f sezgisel fuzzy approximate sabit nokta özlliğine sahiptir.

İspat x_0, X'in keyfi bir elemanı olsun. f sezgisel fuzzy asimptotik regüler olduğundan

$\lim_{k\to\infty}\mu\left(f^{k+1}(x_0)-f^{k}(x_0),t\right)=1$ ve $\lim_{k\to\infty}\nu\left(f^{k+1}(x_0)-f^{k}(x_0),t\right)=0$

dır. Bu durumda her $k>k_0(\varepsilon,t)$ için

$\mu\left(f^{k+1}(x_0)-f^{k}(x_0),t\right)>1-\varepsilon$ ve $\nu\left(f^{k+1}(x_0)-f^{k}(x_0),t\right)<\varepsilon$

olacak şekilde $k_0(\varepsilon,t)\in\mathbb{N}$ vardır. Eğer $f^{k}(x_0)$, y_0 ile gösterilirse

$$\mu\left(f^{k+1}(x_0)-f^k(x_0),t\right)=\mu\left(f\left(f^k(x_0)\right)-f^k(x_0),t\right)=\mu\left(f(y_0)-y_0,t\right)>1-\varepsilon$$

ve

$$\nu\left(f^{k+1}(x_0)-f^k(x_0),t\right)=\nu\left(f\left(f^k(x_0)\right)-f^k(x_0),t\right)=\nu\left(f(y_0)-y_0,t\right)<\varepsilon$$

elde edilir. Bu da y_0'ın f'nin bir sezgisel fuzzy approximate sabit noktası olduğunu gösterir.

Şimdi sabit nokta teorisinde kullanılan bazı dönüşüm sınıflarının sezgisel fuzzy versiyonu tanımlanacak ve sezgisel fuzzy approximate sabit noktalara hangi koşullarda sahip olduğu araştırılacaktır. İlk olarak, Alaca ve diğ. [15]'de çalıştıkları sezgisel fuzzy metrik uzaylardaki Banach contraction teoreminde (Teorem 2.71) geçen sezgisel fuzzy contraction dönüşümünün sezgisel fuzzy approximate sabit noktalarının olduğu gösterilecektir.

Teorem 5.9 $(X,\mu,\nu,*,\Diamond)$ bir sezgisel fuzzy normlu uzay ve $f:X\to X$ bir sezgisel fuzzy contraction dönüşüm olsun. Bu takdirde her $\varepsilon\in(0,1)$ için $F_\varepsilon^{(\mu,\nu)}(f)\neq\varnothing$'dir.

İspat $x\in X,\varepsilon\in(0,1)$ ve $t>0$ olsun. f'nin sezgisel fuzzy contraction olmasından yararlanarak

$$\begin{aligned}\mu\left(f^{k+1}(x)-f^k(x),t\right)&=\mu\left(f\left(f^k(x)\right)-f\left(f^{k-1}(x)\right),t\right)\\&\geq\mu\left(f^k(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{\alpha}\right)\\&\geq\mu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{\alpha^2}\right)\\&\geq\cdots\\&\geq\mu\left(f(x)-x,\frac{t}{\alpha^k}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\nu\left(f^{k+1}(x)-f^k(x),t\right)&=\nu\left(f\left(f^k(x)\right)-f\left(f^{k-1}(x)\right),t\right)\\&\leq\nu\left(f^k(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{\alpha}\right)\end{aligned}$$

$$\leq \nu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{\alpha^2}\right)$$
$$\leq \cdots$$
$$\leq \nu\left(f(x)-x,\frac{t}{\alpha^k}\right)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliklerde $k\to\infty$ için limit alınırsa $\alpha\in(0,1)$ olduğundan $\frac{t}{\alpha^k}\to\infty$'dur. Sezgisel fuzzy normun (vii) ve (xiii) özelliklerinden

$\lim\limits_{k\to\infty}\mu\left(f^{k+1}(x)-f^k(x),t\right)=1$ ve $\lim\limits_{k\to\infty}\nu\left(f^{k+1}(x)-f^k(x),t\right)=0$

elde edilir. Yani f sezgisel fuzzy asimptotik regülerdir ve Teorem 5.8'den dolayı sezgisel fuzzy approximate sabit nokta özelliğine sahiptir.

Örnek 5.10 Örnek 5.3'de verilen sezgisel fuzzy norm, t-norm ve t-conorm ile $(0,1)$ kümesi bir sezgisel fuzzy normlu uzaydır. $f:(0,1)\to(0,1)$ dönüşümü $f(x)=\frac{x}{2}$ ile verilsin. Bu dönüşümün sabit noktası yoktur. Ayrıca her $x,y\in(0,1)$ ve $t>0$ için

$$\mu\left(f(x)-f(y),\frac{t}{2}\right)=\frac{\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}+\left|\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right|}=\frac{t}{t+|x-y|}=\mu(x-y,t)$$

ve

$$\nu\left(f(x)-f(y),\frac{t}{2}\right)=\frac{\left|\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right|}{\frac{t}{2}+\left|\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right|}=\frac{|x-y|}{t+|x-y|}=\nu(x-y,t)$$

olduğundan f bir sezgisel fuzzy contraction dönüşümdür. Her $\varepsilon>0$ ve $t>0$ için

$\mu(x-f(x),t)=\mu\left(x-\frac{1}{2}x,t\right)=\mu\left(\frac{1}{2}x,t\right)=\dfrac{t}{t+\left|\frac{1}{2}x\right|}>1-\varepsilon$ ve

$$\nu\left(x-f\left(x\right),t\right)=\nu\left(x-\frac{1}{2}x,t\right)=\nu\left(\frac{1}{2}x,t\right)=\frac{\left|\frac{1}{2}x\right|}{t+\left|\frac{1}{2}x\right|}<\varepsilon$$

eşitsizliklerinden $\frac{1}{2}x<\frac{\varepsilon t}{1-\varepsilon}$ yazılır. Her $\varepsilon>0$ ve $t>0$ için $\frac{1}{2}x<\frac{\varepsilon t}{1-\varepsilon}$ olacak şekilde $x\in\left(0,1\right)$ olduğundan bu dönüşüm sezgisel fuzzy approximate sabit nokta özelliğine sahiptir.

Tanım 5.11 $\left(X,\mu,\nu,*,\Diamond\right)$ bir sezgisel fuzzy normlu uzay ve $f:X\to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x,y\in X$ ve $t>0$ için

$$\mu\left(f\left(x\right)-f\left(y\right),\alpha t\right)\geq\mu\left(x-f\left(x\right),t\right)*\mu\left(y-f\left(y\right),t\right)$$

ve

$$\nu\left(f\left(x\right)-f\left(y\right),\alpha t\right)\leq\nu\left(x-f\left(x\right),t\right)\Diamond\nu\left(y-f\left(y\right),t\right)$$

olacak şekilde $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ varsa $f:X\to X$ dönüşümüne sezgisel fuzzy Kannan dönüşümü denir.

Teorem 5.12 $a*b=\min\{a,b\}$ ve $a\Diamond b=\max\{a,b\}$ olmak üzere $\left(X,\mu,\nu,*,\Diamond\right),\ll$ ile gösterilen kısmi sıralamaya sahip bir sezgisel fuzzy normlu uzay olsun. $\ll\subset X\times X$ kısmi sıralama bağıntısı için aşağıdakilerin sağlandığı varsayılsın:

(i) $\ll$, $X\times X$'in bir alt vektör uzayıdır.

veya

(ii) X, tam sıralı bir kümedir.

Eğer her $x\in X$ için $f:X\to X$ sezgisel fuzzy Kannan dönüşümü $x\ll f\left(x\right)$'i sağlar ve her $t>0$ ve $x\gg\theta$ şartını sağlayan her $x\in X$ için $\mu\left(\,.\,,t\right)$ azalmayan ve $\nu\left(\,.\,,t\right)$ artmayan ise, her $\varepsilon\in\left(0,1\right)$ için $F_{\varepsilon}^{(\mu,\nu)}\left(f\right)\neq\varnothing$'dır, yani $f:X\to X$ sezgisel fuzzy Kannan dönüşümü approximate sabit nokta özelliğine sahiptir.

İspat $x \in X, \varepsilon \in (0,1)$ ve $t > 0$ olsun. f sezgisel fuzzy Kannan dönüşümü için $x \ll f(x)$ olduğundan

$$x \ll f(x) \ll f^2(x) \ll \ldots \ll f^k(x) \ll \ldots$$

yazılabilir. Bununla birlikte herhangi bir sezgisel fuzzy normlu uzayda $\mu(x, \,.\,)$'nin azalmayan ve $\nu(x, \,.\,)$'nin artmayan olduğu hatırlanarak ve hipotez gereği $\mu(\,.\,, t)$'nin azalmayan ve $\nu(\,.\,, t)$'nin artmayan olduğu göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned}
\mu\left(f^{k+1}(x) - f^k(x), t\right) &= \mu\left(f\left(f^k(x)\right) - f\left(f^{k-1}(x)\right), t\right) \\
&\geq \mu\left(f^k(x) - f^{k+1}(x), \frac{t}{\alpha}\right) * \mu\left(f^{k-1}(x) - f^k(x), \frac{t}{\alpha}\right) \\
&\geq \mu\left(f^k(x) - f^{k-1}(x), \frac{t}{2\alpha}\right) * \mu\left(f^{k-1}(x) - f^{k+1}(x), \frac{t}{2\alpha}\right) \\
&\qquad * \mu\left(f^{k-1}(x) - f^k(x), \frac{t}{\alpha}\right) \\
&\geq \mu\left(f^k(x) - f^{k-1}(x), \frac{t}{2\alpha}\right) * \mu\left(f^{k-1}(x) - f^{k+1}(x), \frac{t}{2\alpha}\right) \\
&\qquad * \mu\left(f^{k-1}(x) - f^k(x), \frac{t}{2\alpha}\right) \\
&= \mu\left(f^k(x) - f^{k-1}(x), \frac{t}{2\alpha}\right) * \mu\left(f^{k-1}(x) - f^{k+1}(x), \frac{t}{2\alpha}\right) \\
&= \min\left\{\mu\left(f^k(x) - f^{k-1}(x), \frac{t}{2\alpha}\right), \mu\left(f^{k+1}(x) - f^{k-1}(x), \frac{t}{2\alpha}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$\ll$'nın alt vektör uzayı veya X'in tam sıralı olması ile birlikte $f^k(x) \ll f^{k+1}(x)$ ve $f^k(x) - f^{k-1}(x) \ll f^{k+1}(x) - f^{k-1}(x)$ olduğundan

$$= \mu\left(f^k(x) - f^{k-1}(x), \frac{t}{2\alpha}\right)$$

$$\geq \mu\left(f^{k-1}(x) - f^{k}(x), \frac{t}{2\alpha^2} \right) * \mu\left(f^{k-2}(x) - f^{k-1}(x), \frac{t}{2\alpha^2} \right)$$

$$\geq \mu\left(f^{k-1}(x) - f^{k-2}(x), \frac{t}{4\alpha^2} \right) * \mu\left(f^{k-2}(x) - f^{k}(x), \frac{t}{4\alpha^2} \right)$$

$$* \mu\left(f^{k-2}(x) - f^{k-1}(x), \frac{t}{2\alpha^2} \right)$$

$$\geq \mu\left(f^{k-1}(x) - f^{k-2}(x), \frac{t}{4\alpha^2} \right) * \mu\left(f^{k-2}(x) - f^{k}(x), \frac{t}{4\alpha^2} \right)$$

$$* \mu\left(f^{k-2}(x) - f^{k-1}(x), \frac{t}{4\alpha^2} \right)$$

$$= \mu\left(f^{k-1}(x) - f^{k-2}(x), \frac{t}{4\alpha^2} \right) * \mu\left(f^{k-2}(x) - f^{k}(x), \frac{t}{4\alpha^2} \right)$$

$$= \mu\left(f^{k-1}(x) - f^{k-2}(x), \frac{t}{4\alpha^2} \right) * \mu\left(f^{k}(x) - f^{k-2}(x), \frac{t}{4\alpha^2} \right)$$

$$= \min\left\{ \mu\left(f^{k-1}(x) - f^{k-2}(x), \frac{t}{4\alpha^2} \right), \mu\left(f^{k}(x) - f^{k-2}(x), \frac{t}{4\alpha^2} \right) \right\}$$

$f^{k-1}(x) \ll f^{k}(x)$ ve $f^{k}(x) - f^{k-2}(x) \ll f^{k+1}(x) - f^{k-2}(x)$ olduğundan

$$= \mu\left(f^{k-1}(x) - f^{k-2}(x), \frac{t}{4\alpha^2} \right)$$

$$\vdots$$

$$\geq \mu\left(f^{k-(k-2)}(x) - f^{k-(k-1)}(x), \frac{t}{2^{k-1}\alpha^{k-1}} \right)$$

$$= \mu\left(f^{2}(x) - f(x), \frac{t}{2^{k-1}\alpha^{k-1}} \right)$$

$$\geq \mu\left(f(x) - f^{2}(x), \frac{t}{2^{k-1}\alpha^{k}} \right) * \mu\left(x - f(x), \frac{t}{2^{k-1}\alpha^{k}} \right)$$

$$\geq \mu\left(f(x) - x, \frac{t}{2^{k}\alpha^{k}} \right) * \mu\left(x - f^{2}(x), \frac{t}{2^{k}\alpha^{k}} \right)$$

$$* \mu\left(x - f(x), \frac{t}{2^{k-1}\alpha^{k}} \right)$$

$$\geq \mu\left(f(x) - x, \frac{t}{2^{k}\alpha^{k}} \right) * \mu\left(x - f^{2}(x), \frac{t}{2^{k}\alpha^{k}} \right)$$

$$* \mu\left(x - f(x), \frac{t}{2^{k}\alpha^{k}} \right)$$

$$=\mu\left(x-f^{2}(x),\frac{t}{2^{k}\alpha^{k}}\right)*\mu\left(x-f(x),\frac{t}{2^{k}\alpha^{k}}\right)$$

$$=\min\left\{\mu\left(f^{2}(x)-x,\frac{t}{2^{k}\alpha^{k}}\right),\mu\left(f(x)-x,\frac{t}{2^{k}\alpha^{k}}\right)\right\}$$

$f(x)\ll f^{2}(x)$ ve $f(x)-x\ll f^{2}(x)-x$ olduğundan

$$=\mu\left(f(x)-x,\frac{t}{2^{k}\alpha^{k}}\right)$$

ve

$$\nu\left(f^{k+1}(x)-f^{k}(x),t\right)=\nu\left(f\left(f^{k}(x)\right)-f\left(f^{k-1}(x)\right),t\right)$$

$$\leq\nu\left(f^{k}(x)-f^{k+1}(x),\frac{t}{\alpha}\right)\Diamond\nu\left(f^{k-1}(x)-f^{k}(x),\frac{t}{\alpha}\right)$$

$$\leq\nu\left(f^{k}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{2\alpha}\right)\Diamond\nu\left(f^{k-1}(x)-f^{k+1}(x),\frac{t}{2\alpha}\right)$$

$$\Diamond\nu\left(f^{k-1}(x)-f^{k}(x),\frac{t}{\alpha}\right)$$

$$\leq\nu\left(f^{k}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{2\alpha}\right)\Diamond\nu\left(f^{k-1}(x)-f^{k+1}(x),\frac{t}{2\alpha}\right)$$

$$\Diamond\nu\left(f^{k-1}(x)-f^{k}(x),\frac{t}{2\alpha}\right)$$

$$\leq\nu\left(f^{k}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{2\alpha}\right)\Diamond\nu\left(f^{k-1}(x)-f^{k+1}(x),\frac{t}{2\alpha}\right)$$

$$=\text{maks}\left\{\nu\left(f^{k}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{2\alpha}\right),\nu\left(f^{k+1}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{2\alpha}\right)\right\}$$

$$=\nu\left(f^{k}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{2\alpha}\right)$$

$$\leq\nu\left(f^{k-1}(x)-f^{k}(x),\frac{t}{2\alpha^{2}}\right)\Diamond\nu\left(f^{k-2}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{2\alpha^{2}}\right)$$

$$\leq\nu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{4\alpha^{2}}\right)\Diamond\nu\left(f^{k-2}(x)-f^{k}(x),\frac{t}{4\alpha^{2}}\right)$$

$$\Diamond\nu\left(f^{k-2}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{2\alpha^{2}}\right)$$

$$\le \nu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{4\alpha^2}\right)\Diamond \nu\left(f^{k-2}(x)-f^{k}(x),\frac{t}{4\alpha^2}\right)$$

$$\Diamond \nu\left(f^{k-2}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{4\alpha^2}\right)$$

$$=\nu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{4\alpha^2}\right)\Diamond \nu\left(f^{k-2}(x)-f^{k}(x),\frac{t}{4\alpha^2}\right)$$

$$=\nu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{4\alpha^2}\right)\Diamond \nu\left(f^{k}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{4\alpha^2}\right)$$

$$=\text{maks}\left\{\nu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{4\alpha^2}\right),\nu\left(f^{k}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{4\alpha^2}\right)\right\}$$

$$=\nu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{4\alpha^2}\right)$$

$$\vdots$$

$$\le \nu\left(f^{k-(k-2)}(x)-f^{k-(k-1)}(x),\frac{t}{2^{k-1}\alpha^{k-1}}\right)$$

$$=\nu\left(f^{2}(x)-f(x),\frac{t}{2^{k-1}\alpha^{k-1}}\right)$$

$$\le \nu\left(f(x)-f^{2}(x),\frac{t}{2^{k-1}\alpha^{k}}\right)\Diamond \nu\left(x-f(x),\frac{t}{2^{k-1}\alpha^{k}}\right)$$

$$\le \nu\left(f(x)-x,\frac{t}{2^{k}\alpha^{k}}\right)\Diamond \nu\left(x-f^{2}(x),\frac{t}{2^{k}\alpha^{k}}\right)$$

$$\Diamond \nu\left(x-f(x),\frac{t}{2^{k-1}\alpha^{k}}\right)$$

$$\le \nu\left(x-f(x),\frac{t}{2^{k}\alpha^{k}}\right)\Diamond \nu\left(x-f^{2}(x),\frac{t}{2^{k}\alpha^{k}}\right)$$

$$\Diamond \nu\left(x-f(x),\frac{t}{2^{k}\alpha^{k}}\right)$$

$$=\nu\left(x-f^{2}(x),\frac{t}{2^{k}\alpha^{k}}\right)\Diamond \nu\left(f^{2}(x)-f(x),\frac{t}{2^{k}\alpha^{k}}\right)$$

$$=\text{maks}\left\{\nu\left(x-f(x),\frac{t}{2^{k}\alpha^{k}}\right),\nu\left(x-f^{2}(x),\frac{t}{2^{k}\alpha^{k}}\right)\right\}$$

$$=\nu\left(x-f(x),\frac{t}{2^{k}\alpha^{k}}\right)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliklerde $k \to \infty$ için limit alınırsa $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ olduğundan $\frac{t}{(2\alpha)^k} \to \infty$'dur. Sezgisel fuzzy normun (vii) ve (xiii) özelliklerinden

$$\lim_{k\to\infty} \mu\left(f^{k+1}(x) - f^k(x), t\right) \geq \lim_{k\to\infty} \mu\left(x - f(x), \frac{t}{(2\alpha)^k}\right) = 1$$

ve

$$\lim_{k\to\infty} \nu\left(f^{k+1}(x) - f^k(x), t\right) \leq \lim_{k\to\infty} \nu\left(x - f(x), \frac{t}{(2\alpha)^k}\right) = 0$$

elde edilir. Bu da sezgisel fuzzy Kannan operatörünün sezgisel fuzzy asimptotik regüler, dolayısıyla da approximate sabit nokta özelliğine sahip olduğunu gösterir.

Sonuç 5.13 Teorem 5.12'de sezgisel fuzzy Kannan dönüşümü için $x \ll f(x)$ ise ve her $t > 0$ ve $x \ll \theta$ şartını sağlayan her $x \in X$ için $\mu(\,.\,,t)$ artmayan ve $\nu(\,.\,,t)$ azalmayan ise $f : X \to X$ sezgisel fuzzy Kannan dönüşümü yine approximate sabit nokta özelliğine sahip olur.

Tanım 5.14 $(X, \mu, \nu, *, \lozenge)$ bir sezgisel fuzzy normlu uzay ve $f : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için

$$\mu\left(f(x) - f(y), \alpha t\right) \geq \mu\left(x - f(y), t\right) * \mu\left(y - f(x), t\right)$$

ve

$$\nu\left(f(x) - f(y), \alpha t\right) \leq \nu\left(x - f(y), t\right) \lozenge \nu\left(y - f(x), t\right)$$

olacak şekilde $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ varsa $f : X \to X$ dönüşümüne sezgisel fuzzy Chatterjea dönüşümü denir.

Teorem 5.15 $a*b=\min\{a,b\}$ ve $a\Diamond b=\max\{a,b\}$ olmak üzere $(X,\mu,\nu,*,\Diamond)$, $\ll$ ile gösterilen kısmi sıralamaya sahip bir sezgisel fuzzy normlu uzay olsun. $\ll\subset X\times X$ kısmi sıralama bağıntısı için aşağıdakilerin sağlandığı varsayılsın:

(i) $\ll$, $X\times X$ 'in bir alt vektör uzayıdır.

veya

(ii) X , tam sıralı bir kümedir.

Eğer $f:X\to X$ sezgisel fuzzy Chatterjea dönüşümü her $x\in X$ için $x\ll f(x)$'i sağlar ve her $t>0$ ve $x\gg\theta$ şartını sağlayan her $x\in X$ için $\mu(\ .\ ,t)$ azalmayan ve $\nu(\ .\ ,t)$ artmayan ise, her $\varepsilon\in(0,1)$ için $F_\varepsilon^{(\mu,\nu)}(f)\neq\varnothing$'dır, yani $f:X\to X$ sezgisel fuzzy Chatterjea dönüşümü approximate sabit nokta özelliğine sahiptir.

İspat $x\in X,\varepsilon\in(0,1)$ ve $t>0$ olsun. Teoremdeki varsayımlar göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned}
\mu\left(f^{k+1}(x)-f^{k}(x),t\right)&=\mu\left(f\left(f^{k}(x)\right)-f\left(f^{k-1}(x)\right),t\right)\\
&\geq\mu\left(f^{k}(x)-f^{k}(x),\frac{t}{\alpha}\right)*\mu\left(f^{k-1}(x)-f^{k+1}(x),\frac{t}{\alpha}\right)\\
&=1*\mu\left(f^{k+1}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{\alpha}\right)=\mu\left(f^{k+1}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{\alpha}\right)\\
&\geq\mu\left(f^{k}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{\alpha^2}\right)*\mu\left(f^{k-2}(x)-f^{k+1}(x),\frac{t}{\alpha^2}\right)\\
&=\mu\left(f^{k}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{\alpha^2}\right)*\mu\left(f^{k+1}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{\alpha^2}\right)\\
&=\min\left\{\mu\left(f^{k}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{\alpha^2}\right),\mu\left(f^{k+1}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{\alpha^2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$\ll$, X'in bir alt vektör uzayı veya X tam sıralı bir vektör uzayı olduğundan $f^{k}(x)\ll f^{k+1}(x)$ ve $-f^{k-1}(x)\ll -f^{k-2}(x)$ olduğu göz önüne alınırsa $f^{k}(x)-f^{k-1}(x)\ll f^{k+1}(x)-f^{k-2}(x)$ elde edilir. $\mu(\ .\ ,t)$ azalmayan olduğundan işlem aşağıdaki gibi devam eder.

$$=\mu\left(f^{k}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{\alpha^{2}}\right)$$

$$\geq\mu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{\alpha^{3}}\right)*\mu\left(f^{k-2}(x)-f^{k}(x),\frac{t}{\alpha^{3}}\right)$$

$$=1*\mu\left(f^{k}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{\alpha^{3}}\right)=\mu\left(f^{k}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{\alpha^{3}}\right)$$

$$\geq\mu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{\alpha^{4}}\right)*\mu\left(f^{k-3}(x)-f^{k}(x),\frac{t}{\alpha^{4}}\right)$$

$$=\mu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{\alpha^{4}}\right)*\mu\left(f^{k}(x)-f^{k-3}(x),\frac{t}{\alpha^{4}}\right)$$

$$=\min\left\{\mu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{\alpha^{4}}\right),\mu\left(f^{k}(x)-f^{k-3}(x),\frac{t}{\alpha^{4}}\right)\right\}$$

$f^{k-1}(x)\ll f^{k}(x)$ ve $-f^{k-2}(x)\ll -f^{k-3}(x)$ olduğu göz önüne alınırsa $f^{k-1}(x)-f^{k-2}(x)\ll f^{k}(x)-f^{k-3}(x)$ elde edilir. $\mu(\ .,t)$ azalmayan olduğundan işlem aşağıdaki gibi devam eder.

$$=\mu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{\alpha^{4}}\right)$$

$$\geq\mu\left(f^{k-2}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{\alpha^{5}}\right)*\mu\left(f^{k-3}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{\alpha^{5}}\right)$$

$$=1*\mu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-3}(x),\frac{t}{\alpha^{5}}\right)=\mu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-3}(x),\frac{t}{\alpha^{5}}\right)$$

$$\geq\mu\left(f^{k-2}(x)-f^{k-3}(x),\frac{t}{\alpha^{6}}\right)*\mu\left(f^{k-4}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{\alpha^{6}}\right)$$

$$=\mu\left(f^{k-2}(x)-f^{k-3}(x),\frac{t}{\alpha^{6}}\right)*\mu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-4}(x),\frac{t}{\alpha^{6}}\right)$$

$$=\min\left\{\mu\left(f^{k-2}(x)-f^{k-3}(x),\frac{t}{\alpha^{6}}\right),\mu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-4}(x),\frac{t}{\alpha^{6}}\right)\right\}$$

$f^{k-2}(x)\ll f^{k-1}(x)$ ve $-f^{k-3}(x)\ll -f^{k-4}(x)$ olduğu göz önüne alınırsa $f^{k-2}(x)-f^{k-3}(x)\ll f^{k-1}(x)-f^{k-4}(x)$ elde edilir. . $\mu(\ .,t)$ azalmayan olduğundan işlem aşağıdaki gibi olur.

$$=\mu\left(f^{k-2}(x)-f^{k-3}(x),\frac{t}{\alpha^{6}}\right)$$

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu\left(f^{k-(k-2)}(x) - f^{k-(k-1)}(x), \frac{t}{\alpha^{2(k-1)}} \right) \\
&= \mu\left(f^{2}(x) - f(x), \frac{t}{\alpha^{2k-2}} \right) \\
&\geq \mu\left(f(x) - f(x), \frac{t}{\alpha^{2k-1}} \right) * \mu\left(x - f^{2}(x), \frac{t}{\alpha^{2k-1}} \right) \\
&= 1 * \mu\left(x - f^{2}(x), \frac{t}{\alpha^{2k-1}} \right) = \mu\left(x - f^{2}(x), \frac{t}{\alpha^{2k-1}} \right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\nu\left(f^{k+1}(x) - f^{k}(x), t \right) &= \nu\left(f\left(f^{k}(x) \right) - f\left(f^{k-1}(x) \right), t \right) \\
&\leq \nu\left(f^{k}(x) - f^{k}(x), \frac{t}{\alpha} \right) \Diamond \nu\left(f^{k-1}(x) - f^{k+1}(x), \frac{t}{\alpha} \right) \\
&= 0 \Diamond \nu\left(f^{k+1}(x) - f^{k-1}(x), \frac{t}{\alpha} \right) = \nu\left(f^{k+1}(x) - f^{k-1}(x), \frac{t}{\alpha} \right) \\
&\leq \nu\left(f^{k}(x) - f^{k-1}(x), \frac{t}{\alpha^{2}} \right) \Diamond \nu\left(f^{k-2}(x) - f^{k+1}(x), \frac{t}{\alpha^{2}} \right) \\
&= \nu\left(f^{k}(x) - f^{k-1}(x), \frac{t}{\alpha^{2}} \right) \Diamond \nu\left(f^{k+1}(x) - f^{k-2}(x), \frac{t}{\alpha^{2}} \right) \\
&= \text{maks}\left\{ \nu\left(f^{k}(x) - f^{k-1}(x), \frac{t}{\alpha^{2}} \right), \nu\left(f^{k+1}(x) - f^{k-2}(x), \frac{t}{\alpha^{2}} \right) \right\}
\end{aligned}
$$

$f^{k}(x) - f^{k-1}(x) \ll f^{k+1}(x) - f^{k-2}(x)$ ve $\nu(\ .\ ,t)$'nin artmayan olduğu göz önüne bulundurulursa işlem aşağıdaki gibi sürdürülür.

$$
\begin{aligned}
&= \nu\left(f^{k}(x) - f^{k-1}(x), \frac{t}{\alpha^{2}} \right) \\
&\leq \nu\left(f^{k-2}(x) - f^{k}(x), \frac{t}{\alpha^{3}} \right) \Diamond \nu\left(f^{k-1}(x) - f^{k-1}(x), \frac{t}{\alpha^{3}} \right) \\
&= \nu\left(f^{k}(x) - f^{k-2}(x), \frac{t}{\alpha^{3}} \right) \Diamond 0 = \nu\left(f^{k}(x) - f^{k-2}(x), \frac{t}{\alpha^{3}} \right) \\
&\leq \nu\left(f^{k-1}(x) - f^{k-2}(x), \frac{t}{\alpha^{4}} \right) \Diamond \nu\left(f^{k-3}(x) - f^{k}(x), \frac{t}{\alpha^{4}} \right)
\end{aligned}
$$

$$=\nu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{\alpha^{4}}\right)\Diamond\nu\left(f^{k}(x)-f^{k-3}(x),\frac{t}{\alpha^{4}}\right)$$
$$\leq \text{maks}\left\{\nu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{\alpha^{4}}\right),\nu\left(f^{k}(x)-f^{k-3}(x),\frac{t}{\alpha^{4}}\right)\right\}$$

$f^{k-1}(x)-f^{k-2}(x)\ll f^{k}(x)-f^{k-3}(x)$ ve $\nu(\ .\ ,t)$'nin artmayan olduğu göz önüne bulundurulursa işlem aşağıdaki gibi devam eder.

$$=\nu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{\alpha^{4}}\right)$$
$$\leq \nu\left(f^{k-2}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{\alpha^{5}}\right)\Diamond\nu\left(f^{k-3}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{\alpha^{5}}\right)$$
$$=0\Diamond\nu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-3}(x),\frac{t}{\alpha^{5}}\right)=\nu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-3}(x),\frac{t}{\alpha^{5}}\right)$$
$$\leq \nu\left(f^{k-2}(x)-f^{k-3}(x),\frac{t}{\alpha^{6}}\right)\Diamond\nu\left(f^{k-4}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{\alpha^{6}}\right)$$
$$=\text{maks}\left\{\nu\left(f^{k-2}(x)-f^{k-3}(x),\frac{t}{\alpha^{6}}\right),\nu\left(f^{k-4}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{\alpha^{6}}\right)\right\}$$

$f^{k-2}(x)-f^{k-3}(x)\ll f^{k-1}(x)-f^{k-4}(x)$ ve $\nu(\ .\ ,t)$'nin artmayan olduğu göz önüne bulundurulursa işlem aşağıdaki gibi devam eder.

$$=\nu\left(f^{k-2}(x)-f^{k-3}(x),\frac{t}{\alpha^{6}}\right)$$
$$\vdots$$
$$=\nu\left(f^{k-(k-2)}(x)-f^{k-(k-1)}(x),\frac{t}{\alpha^{2(k-1)}}\right)$$
$$=\nu\left(f^{2}(x)-f(x),\frac{t}{\alpha^{2k-2}}\right)$$
$$\leq \nu\left(f(x)-f(x),\frac{t}{\alpha^{2k-1}}\right)\Diamond\nu\left(x-f^{2}(x),\frac{t}{\alpha^{2k-1}}\right)$$
$$=0\Diamond\nu\left(x-f^{2}(x),\frac{t}{\alpha^{2k-1}}\right)=\nu\left(x-f^{2}(x),\frac{t}{\alpha^{2k-1}}\right)$$

Yukarıdaki eşitsizliklerde $k\to\infty$ için limit alınırsa $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ olduğundan $\frac{t}{\alpha^{2k-1}}\to\infty$'dur. Sezgisel fuzzy normun (vii) ve (xiii) özelliklerinden

$$\lim_{k\to\infty} \mu\left(f^{k+1}(x) - f^{k}(x), t \right) \geq \lim_{k\to\infty} \mu\left(x - f^{2}(x), \frac{t}{\alpha^{2k-1}} \right) = 1$$

ve

$$\lim_{k\to\infty} \nu\left(f^{k+1}(x) - f^{k}(x), t \right) \leq \lim_{k\to\infty} \nu\left(x - f^{2}(x), \frac{t}{\alpha^{2k-1}} \right) = 0$$

elde edilir. Bu da sezgisel fuzzy Chatterjea operatörünün approximate sabit nokta özelliğine sahip olduğunu gösterir.

Sonuç 5.16 Teorem 5.15'de sezgisel fuzzy Chatterjea dönüşümü için $x \ll f(x)$ ise ve her $t > 0$ ve $x \ll \theta$ şartını sağlayan her $x \in X$ için $\mu(\ . ,t)$ artmayan ve $\nu(\ . ,t)$ azalmayan ise $f : X \to X$ sezgisel fuzzy Chatterjea dönüşümü yine approximate sabit nokta özelliğine sahip olur.

Tanım 5.17 $(X, \mu, \nu, *, \Diamond)$ bir sezgisel fuzzy normlu uzay ve $f : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için aşağıdakilerden en az biri doğru olacak şekilde $\alpha \in (0,1), k \in \left(0, \frac{1}{2}\right), c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ varsa $f : X \to X$ dönüşümüne sezgisel fuzzy Zamfirescu dönüşümü denir:

(i) $\begin{array}{l} \mu\left(f(x) - f(y), \alpha t \right) \geq \mu\left(x - y, t \right) \\ \nu\left(f(x) - f(y), \alpha t \right) \leq \nu\left(x - y, t \right), \end{array}$

(ii) $\begin{array}{l} \mu\left(f(x) - f(y), kt \right) \geq \mu\left(x - f(x), t \right) * \mu\left(y - f(y), t \right) \\ \nu\left(f(x) - f(y), kt \right) \leq \nu\left(x - f(x), t \right) \Diamond \mu\left(y - f(y), t \right), \end{array}$

(iii) $\begin{array}{l} \mu\left(f(x) - f(y), ct \right) \geq \mu\left(x - f(y), t \right) * \mu\left(y - f(x), t \right) \\ \nu\left(f(x) - f(y), ct \right) \leq \nu\left(x - f(y), t \right) \Diamond \mu\left(y - f(x), t \right). \end{array}$

Teorem 5.18 $(X, \mu, \nu, *, \Diamond)$ bir sezgisel fuzzy normlu uzay ve $f : X \to X$ bir sezgisel fuzzy Zamfirescu dönüşüm olsun. Sezgisel fuzzy Kannan ve Chatterjea dönüşümü için verilen şartlarla sezgisel fuzzy Zamfirescu dönüşümü approximate sabit nokta özelliğine sahiptir.

İspat Teorem 5.9, Teorem 5.12 ve Teorem 5.15'den approximate sabit nokta özelliğine sahip olduğu görülür.

Tanım 5.19 $(X,\mu,\nu,*,\Diamond)$ bir sezgisel fuzzy normlu uzay ve $f:X\to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x,y\in X$ ve $t>0$ için

$$\mu\left(f(x)-f(y),t\right)\geq\mu\left(x-y,\frac{t}{\alpha}\right)*\mu\left(y-f(x),\frac{t}{L}\right)$$
$$\nu\left(f(x)-f(y),t\right)\leq\nu\left(x-y,\frac{t}{\alpha}\right)\Diamond\mu\left(y-f(x),\frac{t}{L}\right)$$

olacak şekilde $\alpha\in(0,1)$ ve $L\geq 0$ varsa $f:X\to X$ dönüşümü sezgisel fuzzy weak contraction olarak adlandırılır.

Uyarı 5.20 $\mu(x-y,t)=\mu(-1(y-x),t)=\mu\left(y-x,\frac{t}{|-1|}\right)=\mu(y-x,t)$ olduğundan sezgisel fuzzy weak contraction dönüşümü her $x,y\in X$ ve $t>0$ için

$$\mu\left(f(x)-f(y),t\right)\geq\mu\left(x-y,\frac{t}{\alpha}\right)*\mu\left(x-f(y),\frac{t}{L}\right)$$
$$\nu\left(f(x)-f(y),t\right)\leq\nu\left(x-y,\frac{t}{\alpha}\right)\Diamond\nu\left(x-f(y),\frac{t}{L}\right)$$

şeklinde de tanımlanabilir.

Teorem 5.21 $(X,\mu,\nu,*,\Diamond)$ bir sezgisel fuzzy normlu uzay ve $f:X\to X$ bir sezgisel fuzzy weak contraction dönüşüm olsun. Her $\varepsilon>0$ ve $t>0$ için $F_{\varepsilon}^{(\mu,\nu)}(f)\neq\varnothing$'dır.

İspat $x\in X,\varepsilon\in(0,1)$ ve $t>0$ olsun.

$$\begin{aligned}\mu\left(f^{k+1}(x)-f^{k}(x),t\right)&=\mu\left(f\left(f^{k}(x)\right)-f\left(f^{k-1}(x)\right),t\right)\\&\geq\mu\left(f^{k}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{\alpha}\right)*\mu\left(f^{k}(x)-f^{k}(x),\frac{t}{L}\right)\\&=\mu\left(f^{k}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{\alpha}\right)*1=\mu\left(f^{k}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{\alpha}\right)\\&\geq\mu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{\alpha^{2}}\right)*\mu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{L}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \mu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{\alpha^2}\right)*1=\mu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{\alpha^2}\right)\\
&\geq \cdots\\
&\geq \mu\left(f^{k-(k-2)}(x)-f^{k-(k-1)}(x),\frac{t}{\alpha^{k-1}}\right)=\mu\left(f^{2}(x)-f(x),\frac{t}{\alpha^{k-1}}\right)\\
&\geq \mu\left(f(x)-x,\frac{t}{\alpha^{k}}\right)*\mu\left(f^{2}(x)-f^{2}(x),\frac{t}{L}\right)=\mu\left(f(x)-x,\frac{t}{\alpha^{k}}\right)*1\\
&=\mu\left(f(x)-x,\frac{t}{\alpha^{k}}\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\nu\left(f^{k+1}(x)-f^{k}(x),t\right)&=\nu\left(f\left(f^{k}(x)\right)-f\left(f^{k-1}(x)\right),t\right)\\
&\leq \nu\left(f^{k}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{\alpha}\right)\lozenge\,\nu\left(f^{k}(x)-f^{k}(x),\frac{t}{L}\right)\\
&=\nu\left(f^{k}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{\alpha}\right)\lozenge 0=\nu\left(f^{k}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{\alpha}\right)\\
&\leq \nu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{\alpha^2}\right)\lozenge\,\nu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-1}(x),\frac{t}{L}\right)\\
&\leq \nu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{\alpha^2}\right)\lozenge 0=\nu\left(f^{k-1}(x)-f^{k-2}(x),\frac{t}{\alpha^2}\right)\\
&\leq \cdots\\
&\leq \nu\left(f^{k-(k-2)}(x)-f^{k-(k-1)}(x),\frac{t}{\alpha^{k-1}}\right)=\nu\left(f^{2}(x)-f(x),\frac{t}{\alpha^{k-1}}\right)\\
&\leq \nu\left(f(x)-x,\frac{t}{\alpha^{k}}\right)\lozenge\,\nu\left(f^{2}(x)-f^{2}(x),\frac{t}{L}\right)=\nu\left(f(x)-x,\frac{t}{\alpha^{k}}\right)\lozenge 0\\
&=\nu\left(f(x)-x,\frac{t}{\alpha^{k}}\right)
\end{aligned}
$$

$\alpha\in(0,1)$ için $\frac{t}{\alpha^k}\to\infty$’dur. Sezgisel fuzzy normun (vii) ve (xiii) özelliklerinden

$$
\lim_{k\to\infty}\mu\left(f^{k+1}(x)-f^{k}(x),t\right)\geq \lim_{k\to\infty}\mu\left(f(x)-x,\frac{t}{\alpha^{k}}\right)=1
$$

ve

$$\lim_{k\to\infty} \nu\left(f^{k+1}(x)-f^{k}(x),t\right) \le \lim_{k\to\infty} \nu\left(f(x)-x,\frac{t}{\alpha^{k}}\right)=0$$

elde edilir. Bu da sezgisel fuzzy weak contraction dönüşümünün sezgisel fuzzy approximate sabit nokta özelliğine sahip olduğunu gösterir.

Şimdi sezgisel fuzzy normlu uzayındaki bir kümenin approximate sabit nokta özelliğine sahip olmasının tanımı verilecektir. Daha sonra approximate sabit nokta özelliğine sahip bir sezgisel fuzzy normlu uzayın yoğun alt kümesinin de approximate sabit nokta özelliğine sahip olduğu gösterilecektir.

Tanım 5.22 $(X,\mu,\nu,*,\Diamond)$ bir sezgisel fuzzy normlu uzay ve $K\subset X$ olsun. Eğer her sezgisel fuzzy nonexpansive $f:K\to K$ dönüşümü, her $t>0$ için

$$\sup\left\{\mu\left(x-f(x),t\right):x\in K\right\}=1 \text{ ve } \inf\left\{\nu\left(x-f(x),t\right):x\in K\right\}=0$$

eşitliklerini sağlarsa K'ya sezgisel fuzzy approximate sabit nokta özelliğine sahiptir denir.

Teorem 5.23 $(X,\mu,\nu,*,\Diamond)$ sezgisel fuzzy approximate sabit nokta özelliğine sahip bir sezgisel fuzzy normlu uzay olsun. Eğer K**,** X'in sezgisel fuzzy anlamında yoğun bir alt kümesi ise K da sezgisel fuzzy approximate nokta özelliğine sahiptir.

İspat $f:X\to X$ dönüşümü sezgisel fuzzy nonexpansive dönüşüm olsun. İlk olarak $t,s>0$ için

$$\sup\left\{\mu\left(x-f(x),t\right):x\in K\right\}=\sup\left\{\mu\left(y-f(y),s\right):y\in X\right\} \quad (5.1)$$

$$\inf\left\{\nu\left(x-f(x),t\right):x\in K\right\}=\inf\left\{\nu\left(y-f(y),s\right):y\in X\right\}$$

olduğu gösterilecektir. $K\subset X$ olduğundan

$$\sup\left\{\mu\left(y-f(y),s\right):y\in X\right\}\ge\sup\left\{\mu\left(x-f(x),t\right):x\in K\right\} \quad (5.2)$$

$$\inf\left\{\nu\left(y-f(y),s\right):y\in X\right\}\le\inf\left\{\nu\left(x-f(x),t\right):x\in K\right\}$$

dir. $y \in X$ olsun. K, X ’de sezgisel fuzzy anlamında yoğun olduğundan her $y \in X$ için $y_k \overset{(\mu,\nu)}{\rightarrow} y$ olacak şekilde $y_k \in K$ vardır. Her bir $k \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için

$$\begin{aligned} \text{sup}\left\{\mu\left(x - f(x), t\right) : x \in K\right\} &\geq \mu\left(y_k - f(y_k), t\right) \\ &= \mu\left(y_k - y + y - f(y) + f(y) - f(y_k), t\right) \\ &\geq \mu\left(y_k - y, \frac{t}{3}\right) * \mu\left(y - f(y), \frac{t}{3}\right) \\ &\quad * \mu\left(f(y) - f(y_k), \frac{t}{3}\right) \end{aligned} \tag{5.3}$$

ve

$$\begin{aligned} \text{inf}\left\{\nu\left(x - f(x), t\right) : x \in K\right\} &\leq \nu\left(y_k - f(y_k), t\right) \\ &= \nu\left(y_k - y + y - f(y) + f(y) - f(y_k), t\right) \\ &\leq \nu\left(y_k - y, \frac{t}{3}\right) \Diamond \nu\left(y - f(y), \frac{t}{3}\right) \\ &\quad \Diamond \nu\left(f(y) - f(y_k), \frac{t}{3}\right) \end{aligned} \tag{5.4}$$

yazılabilir. f sezgisel fuzzy nonexpansive dönüşüm olduğundan sezgisel fuzzy süreklidir. Çünkü $y_k \overset{(\mu,\nu)}{\rightarrow} y$ iken

$$\mu\left(f(y_k) - f(y), t\right) \geq \mu\left(y_k - y, t\right) \rightarrow 1$$

$$\nu\left(f(y_k) - f(y), t\right) \leq \nu\left(y_k - y, t\right) \rightarrow 0$$

olduğundan $f(y_k) \overset{(\mu,\nu)}{\rightarrow} f(y)$’dir. (5.3) ve (5.4)’de $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa ve $\frac{t}{3} = s'$ denirse, her $y \in X$ ve $t > 0$ için

$$\text{sup}\left\{\mu\left(x - f(x), t\right) : x \in K\right\} \geq \mu\left(y - f(y), \frac{t}{3}\right) = \mu\left(y - f(y), s'\right)$$

ve

$$\text{inf}\left\{\nu\left(x - f(x), t\right) : x \in K\right\} \leq \nu\left(y - f(y), \frac{t}{3}\right) = \nu\left(y - f(y), s'\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\sup\left\{\mu\left(x-f(x),t\right):x\in K\right\}\geq\left\{\mu\left(y-f(y),s'\right):y\in X\right\} \tag{5.5}$$

$$\inf\left\{\nu\left(x-f(x),t\right):x\in K\right\}\leq\left\{\nu\left(y-f(y),s'\right):y\in X\right\}$$

yazılır. (5.2) ve (5.5)'den (5.1) gösterilmiş olur.

Şimdi K üzerinde tanımlı herhangi bir sezgisel fuzzy nonexpansive $f_K:K\to K$ dönüşümü göz önüne alınsın. K, X'de yoğun olduğundan her $y\in X$ için $y_k \overset{(\mu,\nu)}{\to} y$ olacak şekilde $y_k\in K$ vardır. Ayrıca $f_K:K\to K$ dönüşümü sezgisel fuzzy nonexpansive, dolayısıyla sezgisel fuzzy sürekli olduğundan X üzerinde $f(x)=\lim(\mu,\nu)-f(x_k)$ tanımlanarak $f:X\to X$ dönüşümüne genişletilebilir. Lemma 2.63 kullanılarak her $x,y\in X$ ve $t>0$ için

$$\mu\left(f(x)-f(y),t\right)=\lim_{k\to\infty}\sup\mu\left(f(x_k)-f(y_k),t\right)\geq\lim_{k\to\infty}\sup\mu\left(x_k-y_k,t\right)=\mu\left(x-y,t\right)$$

$$\nu\left(f(x)-f(y),t\right)=\lim_{k\to\infty}\inf\nu\left(f(x_k)-f(y_k),t\right)\leq\lim_{k\to\infty}\inf\nu\left(x_k-y_k,t\right)=\nu\left(x-y,t\right)$$

yazılabilir. Buradan $f:X\to X$ dönüşümünün sezgisel fuzzy nonexpansive olduğu sonucuna ulaşılır. X sezgisel fuzzy approximate sabit nokta özelliğine sahip olduğundan (5.1) ile birlikte

$$\sup\left\{\mu\left(x-f(x),t\right):x\in K\right\}=\sup\left\{\mu\left(y-f(y),s\right):y\in X\right\}=1 \tag{5.6}$$

$$\inf\left\{\nu\left(x-f(x),t\right):x\in K\right\}=\inf\left\{\nu\left(y-f(y),s\right):y\in X\right\}=0$$

dır. Bu da K'nın sezgisel fuzzy approximate sabit nokta özelliğine sahip olduğunu gösterir.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ilk olarak üçüncü bölümde ikili sabit nokta ve ikili çakışma noktası kavramlarının genelleştirmesi olan n-li sabit nokta ve n-li çakışma noktası kavramları tanıtıldı. Kısmi sıralama bağıntısı ile donatılmış tam metrik uzayda, bir contraction şartını sağlayan karışık g-monoton dönüşüm için bu kavramların varlığına ve tekliğine ilişkin teoremler verildi. Elde edilen sonuçlar literatürdeki sonuçlardan daha geneldir.

n-li sabit nokta ve n-li çakışma noktası kavramları farklı ve daha genel tip contraction şartını sağlayan dönüşümler için çalışılabileceği gibi, tam metrik uzay yerine farklı özelliklere sahip başka bir uzayda çalışılabilir. Ayrıca bu tezde elde edilen sonuçlar uygulamalı matematikte bir periyodik sınır değer probleminin çözümünde kullanılması için önerilebilir.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde kısmi sıralı tam metrik uzayda çalışılan n-li çakışma noktası kavramı, sezgisel fuzzy contraction şartını sağlayan karşık g-monoton özelliğine sahip bir dönüşüm için kısmi sıralı tam sezgisel fuzzy normlu uzaylarda çalışıldı. Elde edilen sonuçlar [22] ve [23]'deki sonuçlardan daha genel olmakla beraber kullanılan ispat yöntemi bu çalışmalarda kullanılan ispat yönteminden farklıdır.

Beşinci bölümde approximate sabit nokta özelliği sezgisel fuzzy normlu uzaylarda tanımlandı. Çeşitli örneklerle bu özellik sezgisel fuzzy normlu uzaylarda çalışıldı. Sabit nokta teorisinde kullanılan çeşitli dönüşüm sınıflarının sezgisel fuzzy benzerleri verildikten sonra bu dönüşümlerin hangi şartlarla sezgisel fuzzy approximate sabit nokta özelliğine sahip olduğu gösterildi. Ayrıca bir kümenin sezgisel fuzzy çapının tanımı verildikten sonra sezgisel fuzzy approximate sabit nokta kümesinin sezgisel fuzzy çapı ile ilgili bir teorem verildi. Ardından sezgisel fuzzy normlu uzayın bir alt kümesinin approximate sabit nokta özelliğine sahip olmasının tanımı verilerek approximate sabit nokta özelliğine sahip bir sezgisel fuzzy normlu uzayın yoğun bir alt kümesinin de sezgisel fuzzy approximate sabit nokta özelliğine sahip olduğu gösterildi. Bu çalışmalarımızdan ilham alınarak sabit nokta teorisinde kullanılan başka dönüşüm sınıfların sezgisel fuzzy approximate sabit nokta özelliği incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Zadeh, L.A., (1965). "Fuzzy sets", Information and control, 8: 338-353.

[2] Atanassov, K.T., (1986). "Intuitionistic fuzzy sets", Fuzzy sets and Systems, 20: 87-96.

[3] Park, J.H., (2004). "Intuitionistic fuzzy metric spaces", Chaos, Solitons & Fractals, 22: 1039-1046.

[4] Saadati, R. ve Park, J.H., (2006). "On the intuitionistic fuzzy topological spaces", Chaos, Solitons & Fractals, 27: 331-344.

[5] Alaca, C. ve Efe, H., (2006). "On Intuitionistic fuzzy Banach spaces", Int. J. Pure Appl. Math, 32: 347-364.

[6] Karakus, S. Demirci, K. ve Duman, O., (2008). "Statistical convergence on intuitionistic fuzzy normed spaces", Chaos, Solitons & Fractals, 35: 763-769.

[7] Mursaleen, M. ve Danish Lohani, Q., (2009). "Intuitionistic fuzzy 2-normed space and some related concepts", Chaos, Solitons & Fractals, 42: 224-234.

[8] Mursaleen, M. ve Mohiuddine, S., (2009). "Statistical convergence of double sequences in intuitionistic fuzzy normed spaces", Chaos, Solitons & Fractals, 41: 2414-2421.

[9] Karakaya, V., Şimşek, N., Ertürk, M. ve Gürsoy, F., (2012). "Statistical Convergence of Sequences of Functions in Intuitionistic Fuzzy Normed Spaces", Abstract and Applied Analysis, 2012: 19.

[10] Karakaya, V., Şimşek, N., Ertürk, M. ve Gürsoy, F., (2012). "λ-Statistical Convergence of Sequences of Functions in Intuitionistic Fuzzy Normed Spaces", Journal of Function Spaces and Applications, 2012: 14.

[11] Mursaleen, M. Karakaya, V. ve Mohiuddine, S., (2011). "Schauder basis, separability, and approximation property in intuitionistic fuzzy normed space", Abstract and Applied Analysis, 2011: 14.

[12] Gregori, V. Romaguera, S. ve Veeramani, P., (2006). "A note on intuitionistic fuzzy metric spaces", Chaos, Solitons & Fractals, 28: 902-905.

[13] Saadati, R. ve Park, J.H., (2006). "Intuitionistic fuzzy Euclidean normed spaces", Commun. Math. Anal, 1: 1-6.

[14] Dinda, B. ve Samanta, T., (2010). "Intuitionistic fuzzy continuity and uniform convergence", Int. J. Open Problems Compt. Math, 3: 8-26.

[15] Alaca, C. Turkoglu, D. ve Yildiz, C., (2006). "Fixed points in intuitionistic fuzzy metric spaces", Chaos, Solitons & Fractals, 29: 1073-1078.

[16] Rafi, M. ve Noorani, M., (2006). "Fixed point theorem on intuitionistic fuzzy metric spaces", Iranian Journal of Fuzzy Systems, 3: 23-29.

[17] Razani, A., (2006). "Existence of fixed point for the nonexpansive mapping of intuitionistic fuzzy metric spaces", Chaos, Solitons & Fractals, 30: 367-373.

[18] Turkoglu, D. Alaca, C. Cho, Y. ve Yildiz, C., (2006). "Common fixed point theorems in intuitionistic fuzzy metric spaces", Journal of Applied Mathematics and Computing, 22: 411-424.

[19] Ćirić, L., (2009). "Some new results for Banach contractions and Edelstein contractive mappings on fuzzy metric spaces", Chaos, Solitons & Fractals, 42: 146-154.

[20] Ćirić, L.B. Ješić, S.N. ve Ume, J.S., (2008). "The existence theorems for fixed and periodic points of nonexpansive mappings in intuitionistic fuzzy metric spaces", Chaos, Solitons & Fractals, 37: 781-791.

[21] Sintunavarat, W. ve Kumam, P., (2012). "Fixed point theorems for a generalized intuitionistic fuzzy contraction in intuitionistic fuzzy metric spaces", Thai journal of Mathematics, 10: 123-135.

[22] Eshaghi Gordji, M. Baghani, H. ve Cho, Y.J., (2011). "Coupled fixed point theorems for contractions in intuitionistic fuzzy normed spaces", Mathematical and Computer Modelling, 54: 1897-1906.

[23] Abbas, M. Ali, B. Sintunavarat, W. ve Kumam, P., (2012). "Tripled fixed point and tripled coincidence point theorems in intuitionistic fuzzy normed spaces", Fixed Point Theory and Applications, 2012: 1-16.

[24] Banach., S., (1922). "Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales", Fund. Math, 3: 49.

[25] Ćirić, L.B., (1974). "A generalization of Banach's contraction principle", Proceedings of the American Mathematical Society, 45: 267-273.

[26] Arshad, M. Azam, A. Vetro, P. ve Górniewicz, L., (2009). "Some common fixed point results in cone metric spaces", Fixed Point Theory and Applications, 2009: 8.

[27] Latif, A., (2014). Banach Contraction Principle and Its Generalizations, ed. Topics in Fixed Point Theory. Springer, 33-64.

[28] Kirk, W.A., (2003). "Fixed points of asymptotic contractions", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 277: 645-650.

[29] Öztürk, M. ve Başarır, M., (2011). "On some common fixed point theorems with φ-maps on G− cone metric spaces", Bull. Math. Anal. Appl, 3: 121-133.

[30] Öztürk, M. ve Başarır, M., (2012). "On Some Coincidence and Common Fixed Point Theorems in G-Cone Metric Spaces", Thai journal of Mathematics, 9: 647-657.

[31] Berinde, V., (1992). "Abstract ϕ-contractions which are Picard mappings", Mathematica (Cluj), 34: 107-111.

[32] Ran, A.C.M. ve Reurings, M.C.B., (2004). "A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations", Proceedings of the American Mathematical Society, 132: 1435-1443.

[33] Amini-Harandi, A. ve Emami, H., (2010). "A fixed point theorem for contraction type maps in partially ordered metric spaces and application to ordinary differential equations", Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 72: 2238-2242.

[34] O'Regan, D. ve Petruşel, A., (2008). "Fixed point theorems for generalized contractions in ordered metric spaces", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 341: 1241-1252.

[35] Saadati, R. Vaezpour, S.M. Vetro, P. ve Rhoades, B., (2010). "Fixed point theorems in generalized partially ordered G-metric spaces", Mathematical and Computer Modelling, 52: 797-801.

[36] Agarwal, R.P. El-Gebeily, M. ve O'Regan, D., (2008). "Generalized contractions in partially ordered metric spaces", Applicable Analysis, 87: 109-116.

[37] Altun, I. ve Simsek, H., (2010). "Some fixed point theorems on ordered metric spaces and application", Fixed Point Theory Appl, 17: 2010.

[38] Bhaskar, T.G. ve Lakshmikantham, V., (2006). "Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications", Nonlinear Analysis-Theory Methods & Applications, 65: 1379-1393.

[39] Lakshmikantham, V. ve Ćirić,, L., (2009). "Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces", Nonlinear Analysis-Theory Methods & Applications, 70: 4341-4349.

[40] Berinde, V., (2011). "Generalized coupled fixed point theorems for mixed monotone mappings in partially ordered metric spaces", Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 74: 7347-7355.

[41] Berinde, V., (2012). "Coupled coincidence point theorems for mixed monotone nonlinear operators", Computers & Mathematics with Applications, 64: 1770-1777.

[42] Gordji, M.E. Ghods, S. Ghods, V. ve Hadian, M., (2012). "Coupled fixed point theorem for generalized fuzzy meir-keeler contraction in fuzzy metric spaces", Journal of Computational Analysis and Applications, 14: 271-277.

[43] Aydi, H. Karapinar, E. ve Shatanawi, W., (2011). "Coupled fixed point results for (psi, phi)-weakly contractive condition in ordered partial metric spaces", Computers & Mathematics with Applications, 62: 4449-4460.

[44] Hassen, A. Erdal, K. ve Şavas, Y.İ., (2012). "Quadruple fixed point theorems in partially ordered metric spaces depending on another function", ISRN Applied Mathematics, 2012.

[45] Abbas, M. Khan, M.A. ve Radenovic, S., (2010). "Common coupled fixed point theorems in cone metric spaces for w-compatible mappings", Applied Mathematics and Computation, 217: 195-202.

[46] Mursaleen, M. Mohiuddine, S.A. ve Agarwal, R.P., (2012). "Coupled fixed point theorems for α-ψ-contractive type mappings in partially ordered metric spaces", Fixed Point Theory and Applications, 2012: 1-11.

[47] Berinde, V. ve Borcut, M., (2011). "Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces", Nonlinear Analysis-Theory Methods & Applications, 74: 4889-4897.

[48] Mohiuddine, S.A. ve Alotaibi, A., (2012). "Some results on a tripled fixed point for nonlinear contractions in partially ordered G-metric spaces", Fixed Point Theory and Applications, 2012: 1-12.

[49] Karapinar, E. ve Berinde, V., (2012). "Quadruple fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces", Banach Journal of Mathematical Analysis, 6: 74-89.

[50] Karapinar, E. Shatanawi, W. ve Mustafa, Z., (2012). "Quadruple Fixed Point Theorems under Nonlinear Contractive Conditions in Partially Ordered Metric Spaces", Journal of Applied Mathematics.

[51] Tijs, S. Torre, A. ve Brânzei, R., (2003). "Approximate fixed point theorems", Libertas Mathematica, 23: 35-39.

[52] Dey, D. ve Saha, M., (2013). "Approximate fixed point of Reich operator", Acta Math. Univ. Comenianae, 82: 119-123.

[53] Pacurar, M. ve Pacurar, R.V., (2007). "Approximate fixed point theorems for weak contractions on metric spaces", Carpathian Journal of Mathematics, 23: 149-155.

[54] Dey, D. Laha, A.K. ve Saha, M., (2013). "Approximate Coincidence Point of Two Nonlinear Mappings", Journal of Mathematics, 2013:4.

[55] Anoop, S. ve Ravindran, K., (2011). "On Approximate Fixed Point Property and Fixed Points".

[56] Berinde, M., (2006). "Approximate Fixed Point Theorems", Studia Univ. "Babeş-Bolyai", Mathematica, LI: 15.

[57] Matoušková, E. ve Reich, S., (2003). "Reflexivity and approximate fixed points", Studia Math, 159: 403-415.

[58] Kreyszig, E., (1989). Introductory Functional Analysis with Applications: Wiley.

[59] Pugachev, V.V.S. ve Sinitsyn, I.I.N., (1999). Lectures on functional analysis and applications: World Scientific.

[60] Berinde, V., (2007). Iterative Approximation of Fixed Points: Springer, Berlin.

[61] Browder, F.E. ve Petryshyn, W., (1966). "The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces", Bulletin of the American Mathematical Society, 72: 571-575.

[62] Kirk, W.A. ve Sims, B., (2001). Handbook of metric fixed point theory: Springer.

[63] Agarwal, R.P. Sahu, D.R. ve O'Regan, D., (2009). Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications: Springer.

[64] Rus, I.A., (2001). Generalized contractions and applications: Cluj University Press Cluj-Napoca.

[65] Kannan, R., (1968). "Some results on fixed points", Bull. Calcutta Math. Soc., 10: 6.

[66] Chatterjea, S., (1972). "Fixed-point theorems", CR Acad. Bulgare Sci, 25: 727-730.

[67] Zamfirescu, T., (1972). "Fixed point theorems in metric spaces", Arch. Math. (Basel), 23: 7.

[68] Berinde, V., (2004). "Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration", Nonlinear Analysis Forum, 9:43–53..

[69] B. Schweizer, A.S., (1960). "Statistical metric spaces", Pacific J. Math., 10: 21.

[70] Mursaleen, M. ve Mohiuddine, S., (2009). "Nonlinear operators between intuitionistic fuzzy normed spaces and Fréchet derivative", Chaos, Solitons & Fractals, 42: 1010-1015.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Müzeyyen ERTÜRK
Doğum Tarihi ve Yeri	: 01.01.1986/ HİLVAN
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: merturk3263@gmail.com; merturk@yildiz.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Matematik	Harran Üniversitesi	2009
Lisans	Matematik	Harran Üniversitesi	2006
Lise		Şanlıurfa İmam Hatip Lisesi	2002

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	**Firma/Kurum**	**Görevi**
2007-2010	Adıyaman Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2010-	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. **Ertürk M.**, Karakaya V., “n-tuplet coincidence point theorems in intuitionistic fuzzy normed spaces”, ***Journal of Function Spaces and Applications,*** **(2014) (Baskıda). (S.C.I.) (Tez kapsamında)**

2. **Ertürk M.**, Karakaya V., “*n*-tuplet fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces”, ***Journal of Inequalities and Applications,*** 2013**:**196 doi:10.1186/1029-242X-2013-196, (2013) **(S.C.I.) (Tez kapsamında)**

3. **Ertürk, M.**, Karakaya, V., "Correction: n-tuplet fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces"**,** ***Journal of Inequalities and Applications***, 2013: 368**,** (2013) **(S.C.I.) (Tez kapsamında)**

4. Karakaya V., Şimşek N., **Ertürk M.,** Gürsoy F., **“**On Ideal Convergence of Sequences of Functions in Intuitionistic Fuzzy Normed Spaces**”,** ***Appl. Math. Inf. Sci*****., 8:1-7 (2014) (S.C.I.)**

5. Karakaya, V., Doğan, K., Gürsoy, F**., Ertürk M., “**Fixed Point of a New Three-Step Iteration Algorithm under Contractive-like Operators over Normed Spaces”**, *Abstract and Applied Analysis,* (2013) (S.C.I.) (Baskıda).**

6. Karakaya, V., Gürsoy, F., Doğan, K**., Ertürk, M.,** “Data Dependence Results for Multistep and CR Iterative Schemes in the Class of Contractive-Like Operators”**, *Abstract and Applied Analysis*, 2013:1-7. (2013). (S.C.I.)**

7. Karakaya V., Şimşek N., **Gürsoy F.,** Ertürk M., “Lacunary statistical convergence of sequences of functions in intuitionistic fuzzy normed space”, ***Journal of Intelligent and Fuzzy Systems,*** DOI 10.3233/IFS-130815, **(2013) (S.C.I.)**

8. Karakaya V., Şimşek N., Ertürk M., **Gürsoy F.,** “Statistical Convergence of Sequences of Functions in Intuitionistic Fuzzy Normed Spaces”, ***Abstract and Applied Analysis,*** Vol. 2012, Issue 2012, pp. 1-19, **(2012) (S.C.I.)**

9. Karakaya V., Şimşek N., Ertürk M., **Gürsoy F.,** “λ- statistical convergence of sequence of functions in Intuitionistic fuzzy normed spaces”, ***Journal of Function Spaces and Applications,*** Vol. 2012, Issue 2012, pp. 1-14, **(2012) (S.C.I.)**

10. Mursaleen, M., Karakaya, V., **Ertürk, M.,** Gürsoy, F., “Weighted statistical convergence and its application to Korovkin type approximation theorem”***, Applied Mathematics and Computation*****, 218:9132-9137. (2012) (S.C.I.)**

Bildiri

1. Karakaya, V., **Ertürk, M.,** “n-tuplet fixed point theorems in partially ordered metric space”, ***IECMSA 2013, 2nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications,*** Sarajevo-Bosnia and Herzegovina, 26-29 August 2013.

2. **Ertürk, M.,** Karakaya, V., “n-tuplet fixed point fixed point theorems in intuitionistic fuzzy normed space”, ***ICAAMM 2013, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling***, Istanbul-Turkey, 2-5 June (2013)

3. Gürsoy, F., Karakaya, V., Doğan, K., **Ertürk, M.,** “Some Convergence Results For Jungck-Noor and Jungck-Thianwan Hybrid-Type Iterative Procedures”, ***ICAAMM 2013, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling***, Istanbul-Turkey, 2-5 June (2013)

4. Doğan, K., Karakaya, V**.,** Gürsoy, F., **Ertürk, M.,** “Convergence results for Jungck-SP and Jungck-Noor type iteration algorithms in convex metric spaces”, ***ICAAMM2013, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling***, Istanbul-Turkey, 2-5 June (2013)

5. Doğan, K., Karakaya, V., **Ertürk, M.**, Gürsoy, F., “On the convergence of a new iterative scheme for the class of contractive-like

operators”, ***ICMSS 2013, International Conference On Mathematical Sciences And Statistics 2013***, Kuala Lumpur-Malaysia, 5-7 February (2013)

6. Karakaya, V., Gürsoy, F., Doğan, K., **Ertürk, M.**, “Data Dependence Of Multistep And CR Iterative Schemes In The Class Of Contractive-Like Operators”, **ICMSS 2013, International Conference On Mathematical Sciences And Statistics 2013,** Kuala Lumpur-Malaysia, 5-7 February (2013)

7. **Ertürk**, M., Karakaya, V., Gürsoy, F., “Approximation Theory in Intuitionistic Fuzzy 2-Banach Spaces”, **International Conference on Applied Analysis and Algebra (ICAAA 2012)**, Vol. 2012, (2012)

8. Gürsoy,F., Karakaya,V., Şimşek,N., **Ertürk, M.,** “Lacunary Statistical Convergence Of Function Sequences In Intuitionistic Fuzzy Normed Space”, **International Conference on Analysis and its Applications (ICAA-2011)**, (2011)

9. Karakaya,V., Şimşek,N., **Ertürk,M.,** Gürsoy,F., “Ideal Convergence Of Function Sequences In Intuitionistic Fuzzy Normed Space”, **International Conference on Analysis and its Applications (ICAA-2011),** (2011)

10. **Ertürk,M.,** Karakaya,V., Şimşek,N., Gürsoy,F., “Lambda Statistically Convergence Of Function Sequences In Intuitionistic Fuzzy Normed Space”, **International Conference on Analysis and its Applications (ICAA-2011)**, (2011)