

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ MİMARLIK FAKÜLTESİ

Taşıyıcı Sistemlerin Plâstik Davranışı

Dr. A. Nafiz Çambel

Doktora Tezi

127//
YILDIZ ÜNİVERSİTESİ - MİMARLIK FAKÜLTESİ

TAŞIYICI SİSTEMLERİN
PLÂSTİK DAVRANIŞI.

Dr.A.NAFİZ ÇAMLİBEL
TAŞIYICI SİSTEMLER BİLİM DALI

MİMARLIK BÖLÜMÜ - YAPI ANA BİLİM DALI 1984

YILDIZ UNİVERSİTESİ
GENEL KİTAPLIĞI

Kot : R 151
Alındığı Yer : Fen Bil. Ens. 127/1
Tarih : 2.10.1986
Fatura :
Fiatı : 1000 TL.
Ayniyat No : 1/4
Kayıt No : 44407
UDC :
Ek :

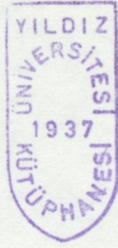
+

xcomp.

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ-MİMARLIK FAKÜLTESİ

TAŞIYICI SİSTEMLERİN PLÂSTİK DAVRANIŞI

(TEMEL İLKELER)



Dr. Nafiz Çamlıbel

TAŞIYICI SİSTEMLER BİLİM DALI

MİMARLIK BÖLÜMÜ - YAPI BİLGİSİ ANABİLİM DALI 1984

İ Ç İ N D E K İ L E R

- SEMBOLLER

- GİRİŞ

BÖLÜM : I

CİSİMLERİN PLÂSTİK DAVRANIŞI

- 1.1- Plâstik Şekil Değişimi
- 1.2- Plâstik Deformasyonun Yararları
- 1.3- Plâstik Deformasyon Kriteri
- 1.4- Plâstik Deformasyonun Özellikleri
- 1.5- Genel Gerilme Durumunda Elâsto-Plâstik Problemler
- 1.6- Plâstik İdeal Cisimler

BÖLÜM : II

TAŞIYICI ELEMANLARDA ELÂSTO-PLÂSTİK DEFORMASYON

- 2.1- Eğilme Etkisinde Basit Bir Kirişte Elâsto-Plâstik Deformasyon
- 2.2- Elâsto-plâstik Deformasyonda Kiriş Ekseninin Şekil Değişimi
- 2.3- Hiperstatik Sistemlerin Elâsto-Plâstik Eğilmedeki Adaptasyonu ve Limit Analiz
- 2.4- Taşıyıcı Sistemlerde Artık Gerilmeler
 - 2.4.1- Eğilme Etkisindeki Elemanlarda Artık Gerilmeler
 - 2.4.2- Hiperstatik Sistemlerde Artık Gerilmeler
 - 2.4.3- Elâsto-Plâstik (Burulma) Etkisinde Artık Gerilmeler
 - 2.4.4- Elâsto-Plâstik Burulma Etkisinin Kalkması ile oluşan Artık Gerilmeler
 - 2.4.5- Düzgün Geometrik Biçimi Olmayan Kesitlerde Elâsto-Plâstik Problemler

KAYNAKLAR

S E M B O L L E R

ϵ	:	Toplam birim boy değişimi
E	:	Elastik birim boy değişimi
P	:	Plastik birim boy değişimi
σ	:	Gerilme
F	:	Kesit
P	:	Kuvvet
E	:	Elastik modül
C	:	Benzerlik katsayısı
ν	:	Büzülme katsayısı
$\max M$:	Maksimum Moment
W	:	Mukavemet momentini
σ_F	:	Akma gerilmesi
τ_F	:	Akma kayma gerilmesi
M_F	:	Akma halinde bir kesitte eğilme momentini
n	:	Bir oran
M_{ult}	:	Akma halinde bir kesitin taşıyacağı en büyük eğilme momentini
q	:	Düzgün yazılı yük (kg,ton)/m.
q_{ult}	:	Düzgün yazılı olarak kirişe yüklenecek en büyük yayılı yük.
G	:	Güvenlik sayını
M_B	:	Burulma momentini

G İ R İ Ő

Bugün birçok ülkelerde, taşıyıcı sistemlerin hesap yöntemleri değişmiş, "Limit Analiz" ve "Taşıma Gücü Yöntemleri" gibi, teorinin "gözlem" ve "deney" lerle düzeltilmiş sonuçlarına göre düzenlenmiş yeni hesap yöntemleri kullanılmaya başlanmıştır. Ülkemizde de, Betonarme taşıyıcı sistemlerin boyutlandırılması ile ilgili, betonun elasto-plastik davranışını gözönüne alan, "Taşıma Gücü Yöntemi" yakında uygulanmaya başlayacaktır. Bu yeni hesap yöntemine ilişkin, betonarme yapıların hesap ve yapım kuralları (TS.500) Aralık 1981 de, Türk Standartlar Enstitüsünce kabul edilip, Mart 1982 de yayınlanmıştır. Bu standart, 10.9.1976 gün ve 7/12493 sayılı Bakanlar Kurulu Kararı ile yürürlükte olan eski standart yönetmeliğinin yürürlükten kalkmasını takiben, Resmi gazetede yayınlanarak, yürürlüğe girecektir.

Yeni standart yönetmelik esaslarına göre, boyutlandırma hesabı yapacak mühendis, mimar ve öğrencilerin konuyu iyice kavrayabilmeleri için taşıyıcı sistem malzemelerinin (plastik davranışı ile ilgili) Teorik bilgileri yeterli derecede bilmeleri gerekir. Birçok ülkelerde malzemelerin (plastik davranışı ile ilgili birçok yayın olmasına karşın, ülkemizde bu tür yayın çok azdır.

Bu nedenle, taşıyıcı sistem malzemelerinin plastik davranışları ile ilgili bazı kaynaklardan yararlanılarak, kısa da olsa, bu çalışmamızda bilgi verilmeye çalışılmıştır.

Taşıyıcı sistem malzemelerinin yükler karşısındaki (plastik davranışı) bugünün tekniği ile yakın olarak ilgilidir.

Plastik şekil değişimi teorisi Navier, Saint-Venant, M.Levy, Tresca gibi bilginlerce geçen yüzyılda geliştirilmişti. Bu teorinin taşıyıcı sistemlere uygulanmış olan "Limit Analiz" yöntemi yeni olup, klâsik teoriye oranla çok basittir. Elâstik cisimlerin davranışını inceliyen Mukavemet, Elâstisite, Yapı Statiği gibi bilim dallarına paralel olarak, "genel plastisite", "taşıyıcı sistem plastisitesi" ve "plastisite teorisi" olarak yeni bilim dalları gelişmiştir.

Plastisite teorisi, incelenen katı cismin hem elastik

hem de plastik bölgeler içermesi nedeni ile, karışık ve zordur. Konu ile ilgili birçok yayın yapılmıştır. Plastisitenin matematik teorisi oldukça zor olup, formüllerin uygulama sınırlarının belirtilmesi gerekir. Günümüzde kompüterle hesap yapma sistemlerinin gelişmesiyle, birçok yararlı problemlerin çözümü mümkün olmuştur. Çeşitli kaynaklardan derlenmiş bu küçük kitapçığın, meslekdaşlarıma, mühendislik ve mimarlık öğrenimi yapan öğrencilere yararlı olmasını dilerim.

Dr.Nafiz ÇAMLIBEL

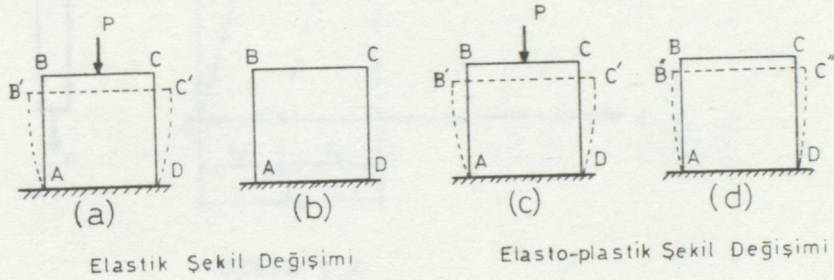
YILDIZ - 1983

B Ö L Ü M I

CİSİMLERİN PLASTİK DAVRANIŞI

1.1- Plastik Şekil Değişimi :

Bir kuvvet etkisinde kalan katı bir cisim genellikle bir şekil değişimine uğrar. Kuvvetin kalkması ise şekil değişimi tamamen ortadan kalkarsa, bu şekil değişimine (Elastik şekil değişimi) ve katı cisme de "Tam elastik cisim" adı verilir. Şekil 1.a,b. Bazı katı cisimler kuvvetin kalkması ile, eski durumlarına tamamen dönüşemez, şekil değişiminin bir miktarı ortadan kalkar;

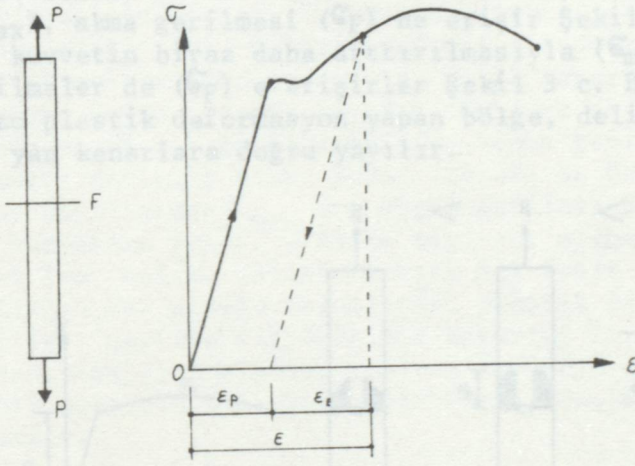


ŞEKİL: 1- Elastik şekil değişimi

Fakat bir miktar şekil değişimi cisimde kalır (Şekil 1.d). Ortadan kalkan şekil değişimi (elastik şekil değişimi), kalan şekil değişimine de (plastik şekil değişimi) adı verilir. Bu durumda cismin şekil değişimine (elasto-plastik şekil değişimi) denir.

Bu tür şekil değiştirmelere, sünek (düktil) malzemelerde rastlanır. Bazı çelik türleri ile, metal ve metal alaşımları bu özelliği gösterirler.

Şekil 2 de, görüldüğü gibi (basit çekme) etkisinde bir çubuğun şekil değişimi incelendiğinde, (σ_e) elastik sınıır gerilmesini göstermek üzere, $\sigma = P/F > \sigma_e$ değerleri için elde edilecek şekil değişimi (ϵ), birim boy uzaması ile belirlenirse, (P) kuvvetinin kalkması ile, Şekil 2 deki (ϵ_E) uzaması ortadan kalkar, çubukta yalnız ϵ_p gibi bir uzama kalır.



ŞEKİL : 2

Burada;

ϵ_E : elastik birim boy değişimi

ϵ_p : plastik birim boy değişimi

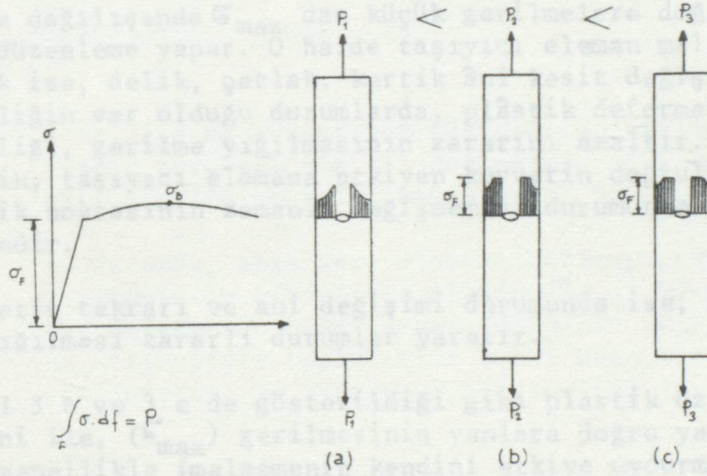
adını alır. O halde toplam birim boy değişimi

$$\epsilon = \epsilon_E + \epsilon_p \quad (1.1)$$

olarak gösterilir.

Şekil 2 de verilen örnekteki Elasto-plastik şekil değişimi, (üniform gerilme) durumundaki şekil değişimi

olduğundan, elemanın her noktasında aynı şekil değişimi (üniform şekil değişimi) oluşur. Bu tür bir şekil değişimi etkisinde kalmıyan elemanlarda, gerilmelerin artması halinde (Bölgesel Elasto-Plastik) şekil değişimi oluşur. Buna ait iyi bir örnek Şekil (3) te gösterilmiştir. Ortasında bir delik bulunan çelik bir çubuk, eksenel bir çekme kuvveti etkisinde kaldığında, delik kenarında en büyük gerilme oluşur. Şekil 3 a. P kuvvetinin arttırılması sonucu en büyük gerilme (ϵ_{max}), akma gerilmesi (σ_F) ne erişir Şekil 3 b. Eksenel kuvvetin biraz daha arttırılmasıyla (σ_{max}) a yakın gerilmeler de (σ_F) e erişirler Şekil 3 c. Böylece elasto plastik deformasyon yapan bölge, delik kenarından yan kenarlara doğru yayılır.



ŞEKİL : 3

O halde üniform olmayan bir gerilme dağılımı oluşturan bir etki sonucu, (elâsto-plastik) bir deformasyon bölgesi, etki arttıkça büyür.

1.2- Plastik Deformasyonun Yararları :

Sünek malzemenin elasto-plastik özelliği, çelik yapı elemanlarının işlenmesinde (kesmek, delmek, bükmek v.b.)

büyük olanaklar sağlar. Bu özellik olmamış olsa idi, kuvvet kalkınca, kesilmesi istenen çelik bir levha, eski durumuna döner, açılan bir delik, kapanırdı.

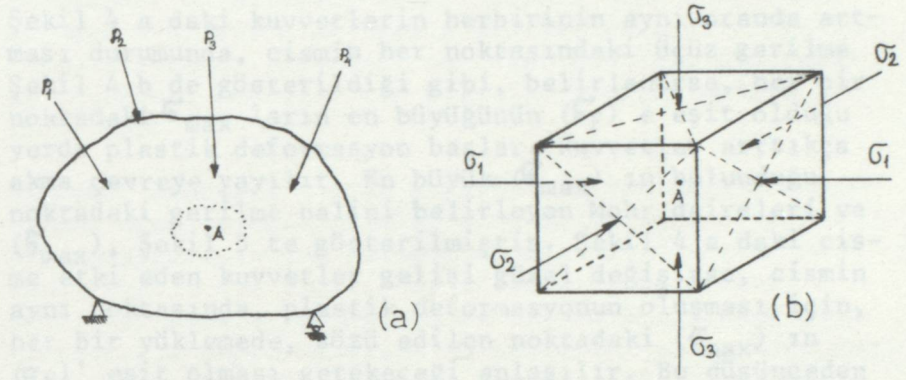
Plâstik deformasyonun sağladığı diğer bir yarar, taşıyıcı elemanlarda gerilme yığılmasının sakıncasını azaltmasıdır. Yine Şekil 3 teki durum incelendiğinde, (σ_{max}) gerilmesinin (σ_B) kopma gerilmesine erişmesi ile taşıyıcı elemanın kopması gerekir. Oysa (P) çekme kuvvetinin artması durumunda, (Şekil 3.b ve c) den anlaşılacağı gibi, delik kenarında oluşan gerilmeler, plastik deformasyon nedeniyle, delik kenarından çubuk kenarına doğru artarak yayılır. Böylece delik kenarında oluşan (σ_{max}) gerilmesinin σ_B kopma gerilmesine erişmesi gecikmiş olur. Sonuç olarak; bu özellik, gerilme dağılımında σ_{max} dan küçük gerilmelere doğru bir tür düzenleme yapar. O halde taşıyıcı eleman malzemesi sünek ise, delik, çatlak, kertik âni kesit değişimi ve eğriliğin var olduğu durumlarda, plâstik deformasyon özelliği, gerilme yığılmasının zararını azaltır. Bu özellik, taşıyıcı elemana etkiyen kuvvetin doğrultu ve tatbik noktasının zamanla değişmemesi durumunda yürürlüktedir.

Kuvvetin tekrarı ve ani değişimi durumunda ise, gerilme yığılması zararlı durumlar yaratır.

Şekil 3 b ve 3 c de gösterildiği gibi plastik özellik nedeni ile, (σ_{max}) gerilmesinin yanlara doğru yayılması, genellikle (malzemenin kendini etkiye uydurması) veya (Adaptasyon) olarak yorumlanır. Birçok etki durumlarına göre incelenen bu (Adaptasyon) durumundan yararlanarak (LİMİT ANALİZ) yöntemi ile kesitler boyutlandırılabilir.

1.3- PLASTİK DEFORMASYON KRİTERİ :

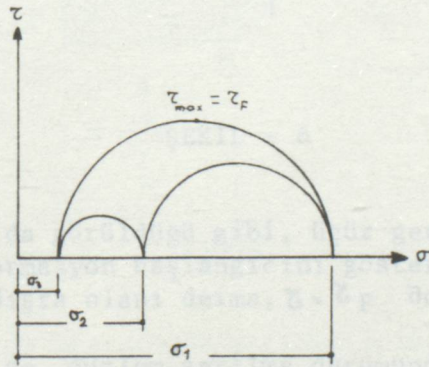
Plastik deformasyon kriteri, "Kırılma Teorileri" adı altında incelenir. Sünek malzemedeki akma olayı gevrek malzemedeki kopmanın karşıtıdır.



ŞEKİL : 4

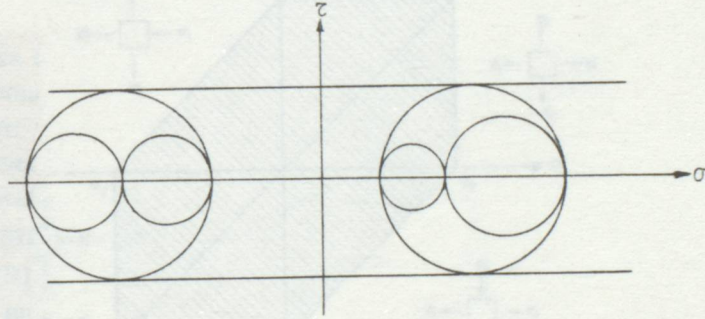
Şekil 4 a da gösterilen kuvvetlerin etkimesi halinde, cismin herhangi bir (A) noktasında oluşan üç doğrultudaki gerilmeler belirlenmiş olsun Şekil 4.b.

Bu durumda, akma veya plastik deformasyonun bu üçüz gerilmelerin etkisi ile oluşan (τ_{max}) kayma gerilmesinin malzemenin basit kayma halindeki (τ_F) akma sınırına erişmesiyle başladığını kabul eden bir teori geliştirilmiştir. Bu teoriye GUEST teorisi adı verilir.



ŞEKİL : 5

Şekil 4 a daki kuvvetlerin herbirinin aynı oranda artması durumunda, cismin her noktasındaki üçüz gerilme Şekil 4 b de gösterildiği gibi, belirlenirse, her bir noktadaki σ_{max} ların en büyüğünün (σ_F) e eşit olduğu yerde plastik deformasyon başlar. Kuvvetler arttıkça akma çevreye yayılır. En büyük (σ_{max}) ın bulunduğu noktadaki gerilme halini belirleyen Mohr daireleri ve (σ_{max}), Şekil 5 te gösterilmiştir. Şekil 4 a daki cisme etki eden kuvvetler gelişi güzel değişirse, cismin aynı noktasında, plastik deformasyonun oluşması için, her bir yüklemde, sözü edilen noktadaki (σ_{max}) ın (σ_F)' e eşit olması gerekeceği anlaşılır. Bu düşünceden hareketle, bu noktada her bir yüklemeye tekabül eden gerilme durumunu gösteren Mohr dairelerinin, Şekil 6 da gösterildiği gibi $\tau = \tau_F$ doğrusuna teğet kalacağı sonucuna varılır.



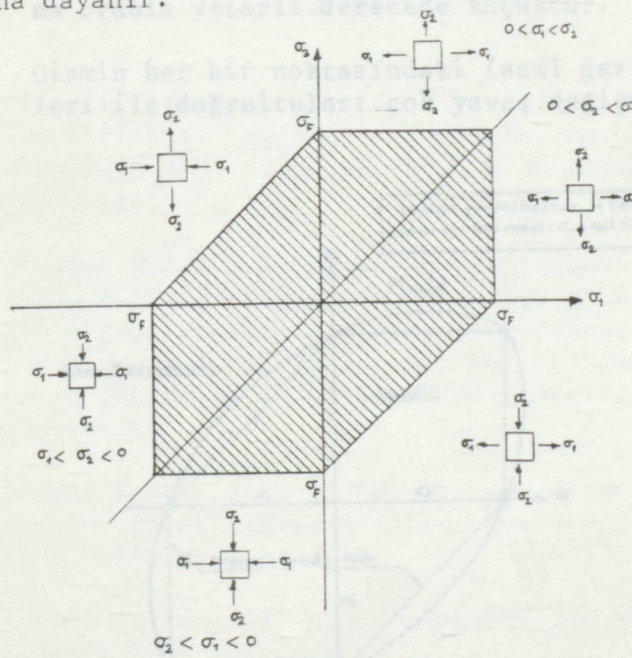
ŞEKİL : 6

Şekil 6 da görüldüğü gibi, üçüz gerilme halinde plastik deformasyon başlangıcını gösteren Mohr dairelerinin en dışta olanı daima, $\tau = \tau_F$ doğrusuna teğet olur.

Şekil 7 de, düzlem gerilme durumunda (çekme durumu için bulunan σ_F , basınç durumu için bulunan σ_F e eşit malzemede) asal gerilmelerin çeşitli değerleri için

plastikleşmeye tekabül eden noktaların geometrik yeri görülüyor. Bu altıgen, Guest Teorisi veya Mohr teorisi veya aynı şey olan Tresca Teorisi esas alınması durumunda bulunur. İçerdeki noktalar elâstik, dışırdaki ve çevredeki noktalar ise plâstik deformasyonlara tekabül eder.

Bu teori deneysel olarak yeterli bir yaklaşımla kanıtlanmış olup, birçok problemlerde kullanılır. Plastik deformasyon için çok kullanılan bir başka kriter maksimum enerji ile ilgili bir kriterdir. Bu kriter, Beltrami, Huber, Von Mises, Hencky ve Schleicher adlı bilginlerce incelenmiştir. Bu kriterin esası, üçüz gerilme halindeki bir elemanda (Şekil 4 b), birim hacmin yaptığı şekil değişimi işinin, belli bir değere erişmesi ile plastik deformasyonun başladığı varsayımına dayanır.



ŞEKİL : 7

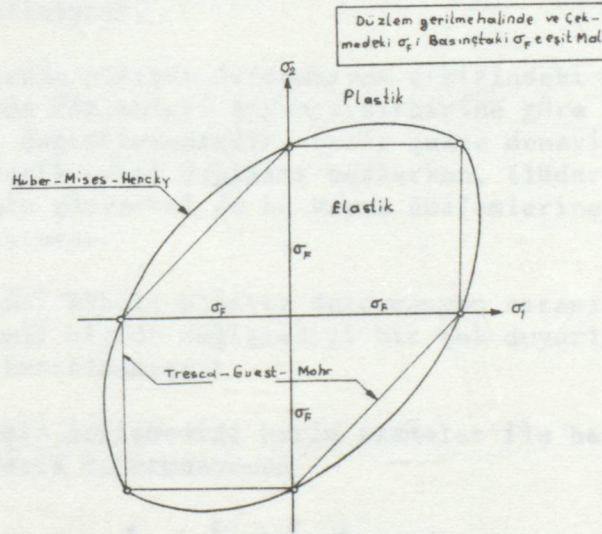
Şekil 7 de gösterilen malzeme için, düzlem gerilme durumunda plastik deformasyonun oluşmasına tekabül eden noktalar, Maximum Distorsiyon Enerjisi teorisine göre

Şekil 8 de gösterilmiştir. Bunlar Şekil 7 deki altıgenin köşelerinden geçen bir elips meydana getirirler.

1.4- PLASTİK DEFORMASYONUN ÖZELLİKLERİ :

Plastik deformasyon, devam süresince yürürlükte olan bir yasaya göre gelişir. Bunu incelemek için genellikle aşağıdaki varsayımlar yapılır.

- Cismin plastik deformasyon etkisinde kalan bölgedeki birim uzamalar bu bölge boyutlarına oranla çok küçüktür.
- Elastik bölge boyutları, plastik bölge boyutlarına oranla yeterli derecede küçüktür.
- Cismin her bir noktasındaki (asal gerilme) şiddetleri ile doğrultuları çok yavaş değişmektedir.



ŞEKİL : 8

Katı cisimdeki deformasyonun incelenmesi için, içindeki her bir noktada, yüzeyleri asal gerilmelerin oluşturacağı birbirine dik üç yüzeyle çakışan bir (küp eleman) alınacaktır. Sonra, bu elemanın verilmiş bir gerilme durumu için nasıl bir deformasyon yapacağı incelenecektir. Bunun için ayrıca deneysel olarak sağlanmış aşağıdaki kabuller de yapılacaktır.

- a- Asal gerilme doğrultuları, deformasyon sırasında, asal birim uzama doğrultuları ile çakışır.
- b- Plastik deformasyon bölgesinde malzeme yoğunluğu büyük ölçüde değişmez.
- c- Asal gerilmeleri gösteren Mohr Daireleri, deformasyon sırasında, deformasyonları gösteren Mohr dairelerinin benzeridir Şekil 9.

- Plastik deformasyonla ilgili yapılmış bu kabullerden birincisi, çeşitli deneylerde, en büyük açı değişiminin max doğrultusunda elde edilmesi sonucu yapılmıştır.

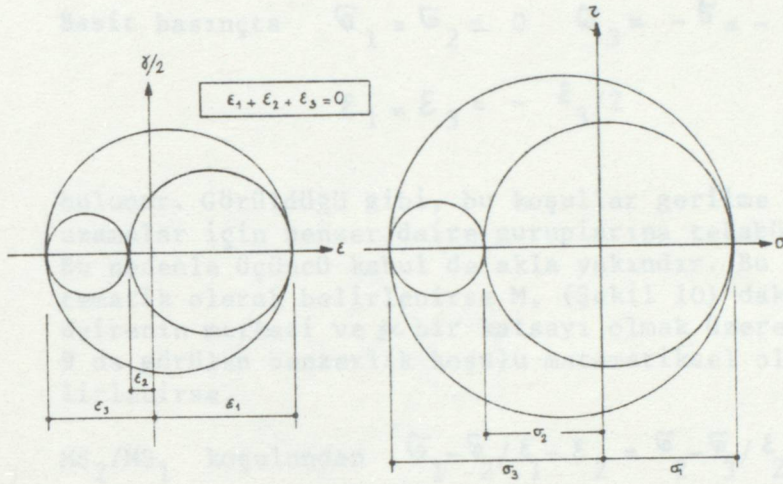
Nitekim plâstik deformasyon etkisindeki malzeme, kayma düzlemleri boyunca birbirine göre kayarak şekil değiştirmektedir. Basit çekme deneyinde de, plâstik şekil değişimi başlarken, (lüders) çizgilerinin görünmesi de bu kayma düzlemlerine bir örnek oluşturur.

- İkinci kabul; plâstik deformasyon sırasında hacmin önemli ölçüde değişmediği bir çok duyarlı deneylerle kanıtlanmıştır.

Hacmin değişmediği birim uzamalar ile belirlenirse, plâstik deformasyonda

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0$$

olur. Bu nedenle Şekil 9 daki birim boy uzamalarını



ŞEKİL : 9

gösteren daire bu koşulu sağlayacak biçimde çizilmiştir.

- Üçüncü kabul de; deneylerdeki gözlemler, esas alınarak yapılmıştır. Bu deneyler basit çekme, kayma ve basınç durumları olarak alınacak olursa:

Basit çekmede $\sigma_1 = \sigma = \frac{P}{F}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

$$\epsilon_2 = \epsilon_3 = -\epsilon_1/2 \quad (1.2)$$

Basit kaymada $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma$

$$\epsilon_1 = -\epsilon_3, \quad \epsilon_2 = 0 \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \text{Basit basınçta } \sigma_1 = \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -\sigma = -\frac{P}{F} \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_2/2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

bulunur. Görüldüğü gibi, bu koşullar gerilme ve birim uzamalar için benzer daire guruplarına tekabül ederler. Bu nedenle üçüncü kabul de akla yakındır. Bu kabul matematik olarak belirlenirse M, (Şekil 10) daki büyük dairenin merkezi ve μ bir katsayı olmak üzere : Şekil 9 da görülen benzerlik koşulu matematiksel olarak belirlenirse,

MS_2/MS_1 koşulundan $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}$ elde edilir.

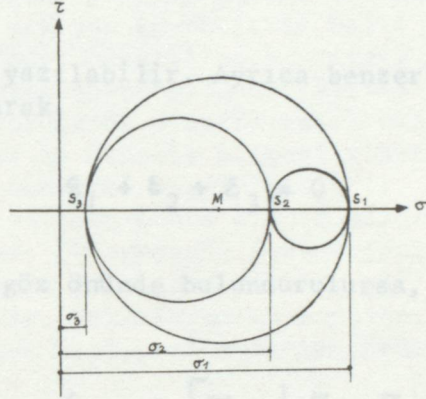
$$\mu = MS_2/MS_1 = \frac{\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}} \quad (1.5)$$

bağıntısı, birim uzamalara ait Mohr dairelerinde teka-bül eden noktalar için yazılan (μ) oranına, yani

$$\mu = \frac{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2}}{\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}} \quad (1.6)$$

bağıntısına eşit olmalıdır.

Örneğin yukardaki basit mukavemet durumları ele alınır-
sa :



ŞEKİL : 10

Basit çekmede $\mu = \nu = -1$

Basit kaymada $\mu = \nu = 0$

Basit basınçta $\mu = \nu = 1$

olduğu görülür. O halde plastik deformasyon sırasında $\mu = \nu$ olup ve bu eşitlik

$$\frac{(\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_2 - \sigma_3)}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3}{\epsilon_1 - \epsilon_3} \quad (1.7)$$

şeklinde belirlenir. Bu bağıntının iki tarafına bir ekler ve çıkarırsak;

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 - \epsilon_3} \quad \text{ve} \quad \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{\epsilon_1 - \epsilon_3} \quad (1.8)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca benzerlik koşullarından yararlanarak,

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0$$

olduğu göz önünde bulundurulursa, yukardaki bağıntılardan

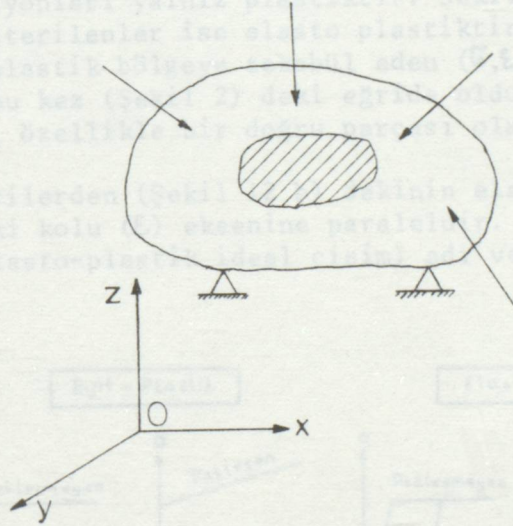
$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= c \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] \\ \epsilon_2 &= c \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right] \\ \epsilon_3 &= c \left[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \end{aligned} \quad (1.9)$$

bulunur. Burada (C) benzerlikle ilgili bir katsayıdır. Görüldüğü gibi plastik boy uzamaları ($\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$) denklemleri, elastisitedeki Hook yasasına benzemektedir. Yalnız (E) elastisite modülü yerini $1/c$ gibi bir katsayı almış ve $\nu = 1/m$ büzülme katsayısının yerine de $(1/2)$ değeri gelmiştir.

1.5- GENEL GERİLME DURUMUNDA ELASTO-PLASTİK PROBLEMLER :

Üçüz gerilme durumunda, elasto-plastik problemlerin çözümü oldukça zor ve bazı durumlarda olanaksızdır. Bu tür problemlerin çözümün de amaç, elastik bölgeyi plâstik bölgeden ayıran yüzeyin denklemini bulmaktır.

Hesaplarda, cisme etkiyen kuvvetlerin elastik şekil değişimi sırasında oluşturduğu gerilmeleri belirleyerek işe başlanır. Belli sınır koşulları göz önüne alınarak, elastisitenin bilinen kısmi türev denklemleri çözülerek, gerilme durumu bulunabilir. Bundan sonra cisme etkiyen kuvvetlerin belli bir orantıda artması durumunda, plastikleşme kriteri kullanılarak akmanın başladığı nokta bulunur. Ayrıca dış kuvvetlerin artması durumunda plastik şekil değişiminin yayılması incelenir ve elastik bölgeyi plastik bölgeden ayıran yüzeyin denklemi aranır Şekil 11. Bu yüzeyin denklemi elde edildikten sonra cismin deformasyon problemleri incelenir. Deformasyon denklemlerinin elastik ve plastik bölgelere göre, hacim entegrali alınıp ötelenmeler belirlenir. Belirlenen bu konular, bazı kabuller yapılarak bazı özel problemlerin çözümünde kullanılabilmiş-



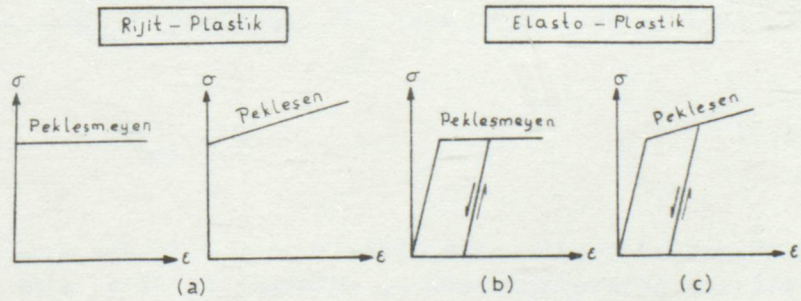
ŞEKİL : 11

tir. Ayrıca birçok problem de çözülememiştir. Problemin bir zorluğu da (Şekil 2) de gösterilen (σ - ϵ) gerilme-deformasyon eğrisinin biçiminden ileri gelir. Eğrinin (σ_F) den sonraki biçimi karışıklık gösterdiğinden, hesaplar oldukça zorlaşır. Bu nedenle hesapları kolaylaştırmak için yollar aranmış (ideal cisim) denen ve gerçekte bulunmayan, fakat (σ , ϵ) eğrisi incelenecek cismin eğrisine benzeyen katı cisimlerin varlığı kabul edilir.

1.6- Plastik İdeal Cisimler :

İdeal cisimlerin özellikleri kullanılan gerçek cisme benzeyen, fakat hesap bakımından kolaylık sağlayacak şekilde basitleştirilmiş olmalıdır. (Şekil 12 de) ideal cisimlerden üç tip verilmiştir. (Şekil 12 a) daki tipler (Rijit-plâstik) cisimlerdir. Yani bunların deformasyonları yalnız plâstiktir. Şekil (12 b ve 12 c) de gösterilenler ise elasto plâstiktirler. Görüldüğü gibi plastik bölgeye tekabül eden (σ , ϵ) eğrisinin kolları bu kez (Şekil 2) deki eğride olduğu gibi bir eğri değil, özellikle bir doğru parçası olarak seçilmiştir.

Bu eğrilerden (Şekil 12 b) dekinin elastik bölgeden sonraki kolu (ϵ) eksenine paraleldir. Buna (pekleşmeyen Elasto-plastik ideal cisim) adı verilir. Buradaki



ŞEKİL : 12

pekleşme kelimesi yapı malzemesi biliminde bilinen (pekleşme) ile eş anlamdadır. Örneğin: Bir çelik çubuk öncelikle çekilir, sonra çekme kuvveti sıfıra indirilip tekrar çekilirse ($\sigma-\epsilon$) eğrisindeki elastik sınırdan bir artma olur. Yani malzemenin mukavemeti bir miktar artar. Bu tür bir malzemeye (pekişen) malzeme adı verilir. (Şekil 12 c) deki ideal cisimde plastik bölgeye tekabül eden ($\sigma-\epsilon$) kolu ise yine bir doğru parçasıdır. Fakat bu kısım (ϵ) eksenine paralel değildir. Plastik bölgede kuvvet kaldırıldıktan sonra, deney çubuğu tekrar yüklenirse, elastik sınırın yükseldiği, yani bir tür pekleşmenin olduğu görülür.

B Ö L Ü M 2

TAŞIYICI ELEMANLARDA ELASTO-PLASTİK
DEFORMASYON

Taşıyıcı elemanlarda elasto plastik deformasyon burada çeşitli etki durumlarına göre incelemek ve konunun daha iyi kavranması için basit taşıyıcı sistemlerden örnekler verilecektir.

2.1- Eğilme Etkisinde Basit Bir Kirişte Elasto-Plastik Deformasyon :

Basit bir kirişin çeşitli yüklerle yüklenmesi halinde tarafsız eksenden en uzak noktalarda yalnız kesite dik doğrultuda gerilmeler oluşur. Bu durumlarda yalnız (bir boyutlu gerilme durumundan) söz edilir. Örneğin (Şekil 13) te maksimum momentin bulunduğu kesitte tarafsız eksenden en uzak olan noktada gerilme, (W) kesitin mukavemet momenti olduğuna göre,

$$\sigma_{\max} = \max M/W \quad (1.10)$$

dir. Kirişe etkiyen yüklerin belli bir oranda artması sonucu σ_{\max} gerilmesi σ_F akma gerilmesine eşit olunca,

$$\sigma_{\max} = \sigma_F \quad (1.11)$$

bir noktada akma yani plastik deformasyon başlar. Bu durumda tarafsız eksenden en uzak noktalarda bir boyutlu gerilme durumu olması nedeni ile

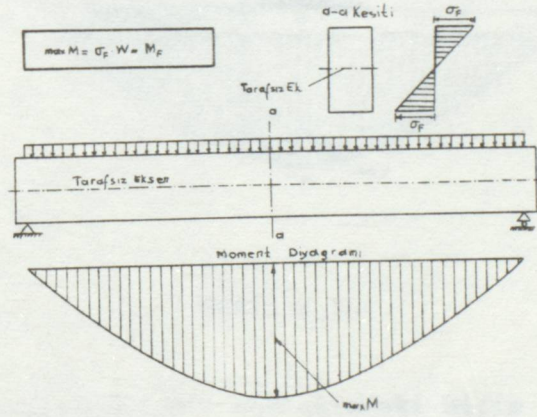
$$\sigma_{\max} = \sigma_{\max} / 2 = \sigma_F \quad (1.12)$$

olur.

Burada ζ_F kayma gerilmesinin akma sınırını gösterir. Kesit tarafsız eksene göre simetrikse, plastik deformasyon en üst ve en alt noktalarda aynı anda başlar. Bu anda momentin alacağı değer ζ_F akma sınırı olduğuna göre;

$$M_F = \zeta_F \cdot W \quad (1.12)$$

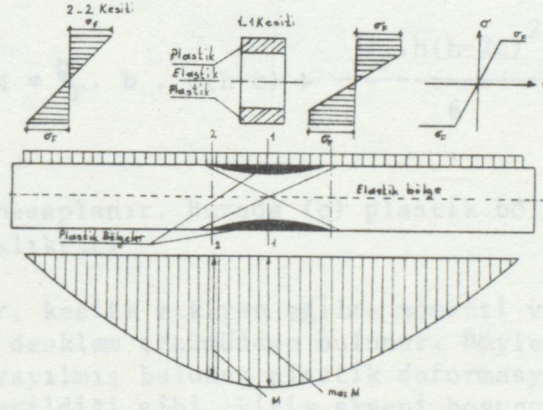
olur. Burada (W) kesitin mukavemet momentidir. Kirişe etkiyen yükleri belli bir oranda (n) $n > 1$ olacak şekilde arttırsak, bu durumda plastik bölgenin genişlediği görülür. Yapılan inceleme ve gözlemlere göre eğilme sırasında kesitin düzlem kaldığı anlaşılmıştır. Bu bulgu hesapları oldukça kolaylaştırır.



ŞEKİL : 13

Kiriş malzemesinin pekleşmeyen malzeme olduğu kabulüne göre, kiriş yükleri arttıkça, max M in bulunduğu kesit daha fazla döner. Fakat Şekil 13 te gösterilen (ζ_F) değerinden sonra pekleşmeyen malzemedeki (ζ, ε) eğrisinin (Şekil 14) teki durumu nedeni ile, tarafsız

eksenden en uzak noktalarda σ_F olarak kalır. Bununla birlikte ϵ_F birim uzamaları da artar. Bunun karşıtı olarak (ϵ) ların artması nedeni ile, dış liflerden daha içerde bulunan liflerdeki birim uzama (σ_F) in başlangıç değerine tekabül eden (ϵ_F) değerine erişmiş ve bazı noktalarda da geçmiş olacaktır (Şekil 15). (Şekil 13) deki σ_{max} , σ_F değerini aldıktan sonra, kirişin taşıdığı yük artarsa, kirişte plastik bölgeler yayılır ve Elastik bölgeyi, plastik bölgeden ayıran eğri, dikdörtgen kesit ve yayılı yük için, hiperbol çikar (Şekil 14).



ŞEKİL : 14

Kesitin herhangi bir noktasındaki birim uzama (ϵ) olduğuna göre,

$$-\epsilon_0 < \epsilon < \epsilon_0$$

ise, (ϵ) plastik bölgede $\epsilon_0 < \epsilon$ veya $\epsilon < -\epsilon_0$ ise elastik bölgede olacaktır (Şekil 14).

Kesitin düzlem kalması nedeni ile elastik ve plastik bölgeleri ayıran sınır, tarafsız eksene paralel bir doğru olarak elde edilir Şekil 15. Anlaşıldığına göre, kesitteki eğilme momentinin artmasıyla kirişin en çok etkilenen bölümleri yani tarafsız eksenden en uzak olan lifler artık fazla gerilme almamışlar ve gerilmeleri tarafsız eksene doğru yaymışlardır. Bu duruma (Kesit içinde Adaptasyon) denir.

Gerilme dağılımı ve geometrisi bilinen bir kesitte, bu gerilme dağılımına tekabül eden eğilme momenti (Şekil 15) e göre,

$$M = \sigma_F \cdot b \cdot c(h-c) + \frac{\sigma_F \cdot h(h-2c)^2}{6} \quad (1.3)$$

olarak hesaplanır. Burada (c) plastik bölgeyi belirten uzaklıktır.

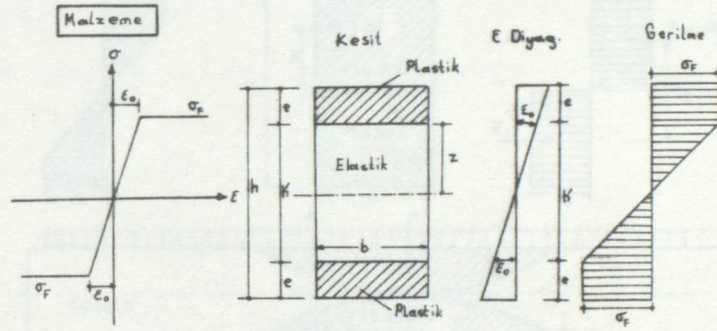
Bu değer, kesite etkiyen eğilme momenti verilirse, yukarıki denklem çözümünden bulunur. Böylece kesit içinde, yayılmış bulunan plastik deformasyon, Şekil 14 de gösterildiği gibi, kiriş eksenini boyunca da yayılır. Bunun nedeni (maxM) in bulunduğu kesite yakın bulunan kesitlerin artan moment değerlerine karşı elasto-plastik deformasyon etkisinde kalmalarıdır. Buna (Kesit dışında Adaptasyon) denir.

Kirişe etkiyen kuvvetlerin artması sonucu (Max M) etkisi ile malzeme deforme olarak kopmazsa, plastik bölgeler yayılmaya devam ederek (Şekil 16) da gösterilen durum oluşur. Bu durumda (max M), şekildeki gerilme durumuna göre,

$$M_{ult} = \sigma_F \cdot \frac{b h^2}{4} \quad (1.4)$$

olarak hesaplanır. Bu durumda kesitte (Tam plastik bir

eğilme) oluşur. Böylece kesitte herhangi bir elastik bölgeden söz edilemez.



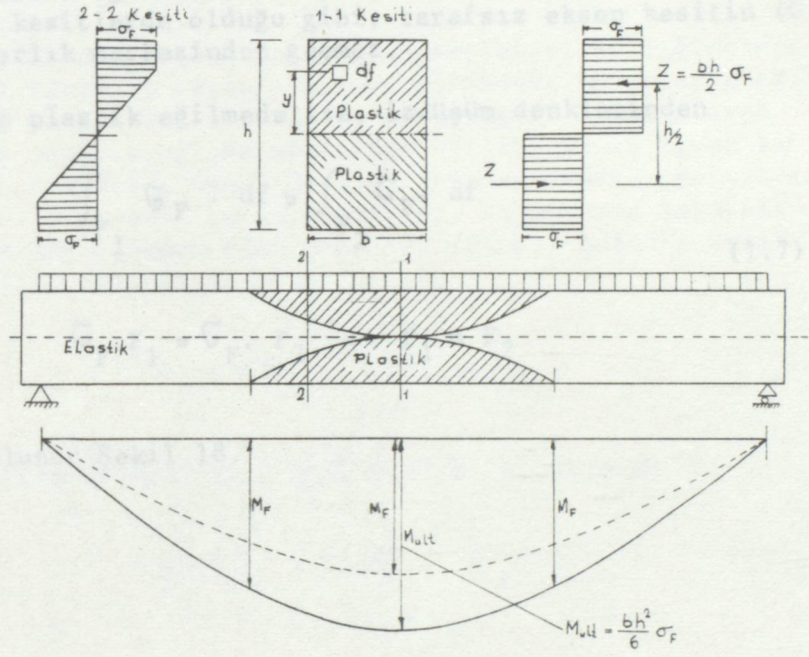
ŞEKİL : 15

Kirişe etkileyen kuvvetler daha da artacak olursa, artık moment artmaz. Bu nedenle (Mult) değerine tekabül eden (q_{ult}) yükünden daha büyük bir yükü kiriş taşıyamaz.

(Şekil 16) da görülebileceği gibi, tam plastik deformasyon etkisindeki kesit (σ_F) in değişmez kalması ile, kolayca dönebilen bir kesit yani bir tür (mafsal) olur. Buna (plastik mafsal) adı verilir. Artık bu taşıyıcı eleman statik bakımdan (Stabil) sayılamaz. Bu durumda kararsız (lâbil) bir sistem oluşmuş olur.

Taşıyıcı eleman kesitinin tarafsız eksene göre simetrik olmaması, yalnız bu eksene dik eksene göre simetrik olması durumunda yukardaki incelemeyi tekrarlayabiliriz. Örneğin; (Şekil 17 de), elasto-plastik eğilme etkisindeki simetrik bir kesitteki denge koşullarını inceleyelim. Kiriş eksenini boyunca izdüşüm koşulu

yazılarak tarafsız eksenin yeri belirlenir. Şekil 17 de, F_1 ve F_2 tarafsız eksenin iki tarafındaki alanlar olduğuna göre,



ŞEKİL : 16

$$\int_{F_1} \sigma \cdot d f = \int_{F_2} \sigma \cdot d f \quad (1.5)$$

eşitliğinden tarafsız eksen yeri bulunduktan sonra, bu eksene göre moment koşulu yazılarak eğilme momenti

$$\int_F \sigma \cdot y \cdot d f = M \quad (1.6)$$

olarak bulunur.

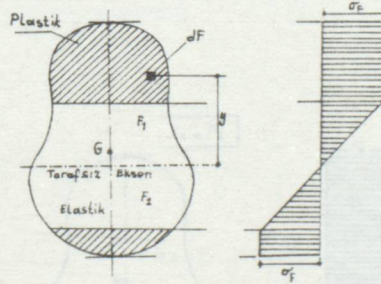
Kesitin geometrisi belli ise bu denklemler kolaylıkla yazılabilir. Bu durumda artık elastik veya elastoplastik eğilmeye, dikdörtgen gibi iki simetri eksensiz kesitlerde olduğu gibi, tarafsız eksen kesitin (G) ağırlık merkezinden geçmez.

Tam plastik eğilmeye ise, izdüşüm denkleminde

$$\int_{F_1} \sigma_F \cdot df = \int_{F_2} \sigma_F \cdot df \quad (1.7)$$

$$\sigma_F \cdot F_1 = \sigma_F \cdot F_2 \quad F_1 = F_2$$

bulunur Şekil 18.



ŞEKİL : 17

Tam plastik eğilmeye tekabül eden, Mult eğilme momenti,

$$\text{Mult} = \sigma_F \cdot F_1 \cdot \eta$$

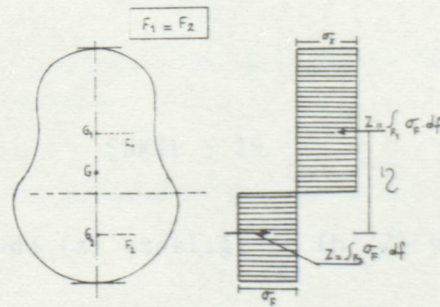
olarak denge denkleminde hesaplanır. Bu bağıntıdaki (η) tarafsız eksenin üst ve altındaki bölgelerin ağırlık merkezleri arasındaki uzaklıktır. Örnek olarak tam plastik eğilme etkisinde bir ikizkenar üçgen kesit alınır, denge denklemlerinden izdüşüm koşulu tarafsız eksenin yerini belirler. Bu durumda tarafsız eksenin tepeden olan uzaklığı ($h \cdot \sqrt{2}$) bulunur Şekil 19. (Mult) momenti de

$$\text{Mult} = \sigma_F \cdot \frac{bh}{4} \cdot \eta$$

olarak hesaplanır. $\eta \cong 0,37 h$ olduğundan

$$\text{Mult} = \frac{0.37 bh^2}{4} \cdot \sigma_F \quad (1.8)$$

olarak bulunur.



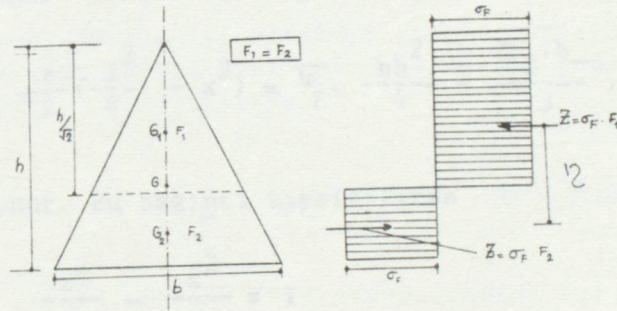
ŞEKİL : 18

Elasto plastik eğilmede deformasyonlarla ilgili problemleri çözebilmek için, elastik bölgeyi, plastik bölgeden ayıran eğrinin denklemini bilmek gerekir.

Örneğin: Şekil 16 daki dikdörtgen kesitli kirişte (x) uzaklığı kirişin orta noktasından ölçülmek koşulu ile eğilme momenti

$$M_x = -\frac{q}{2} \left(\frac{1}{4} x^2 - x^2 \right)$$

yazılabilir.



ŞEKİL : 19

Şekil 15 te de (z) uzaklığı da (h'/2) yi gösterdiğine göre

$$M = \sigma_F \cdot b \cdot (h-c) + \frac{\sigma_F \cdot b \cdot (h-2c)^2}{6}$$

$$M = \frac{\sigma_F \cdot b \cdot z^2}{1.5} + \sigma_F \cdot b \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (1.9)$$

veya

$$M = \sigma_F \cdot \frac{bh^2}{4} = \sigma_F \cdot b \left(\frac{z^2}{1.5} - z^2 \right) \quad (2.0)$$

$$M = \sigma_F \cdot \frac{bh^2}{4} - \sigma_F \cdot \frac{b}{3} \cdot z^2 \quad (2.4)$$

bulunur. Burada iki bağıntı eşitlenirse;

$$\frac{z}{2} \left(\frac{1}{4} - x^2 \right) = \sigma_F \cdot \frac{bh^2}{4} - \frac{\sigma_F \cdot b}{3} \cdot z^2 \quad (2.1)$$

bulunur. Bu bağıntı kısaltılırsa

$$\frac{z^2}{A} - \frac{x^2}{B} = 1 \quad (2.2)$$

formunda bir bağıntı elde edilir. Bu bağıntı bir hiperbol denklemdir.

2.2- Elasto-Plastik Deformasyonda Kiriş Ekseninin Şekil Değişimi :

Elasto-plastik deformasyon yapan bir kirişte, eğildikten sonra da kesitin düzlem kaldığı hipotezinden hareket ederek, kiriş ekseninin şekil değişimi incelenebilir. Şekil 20 de gösterildiği gibi, basit bir kirişte,

birbirinden (dx) uzaklıkta iki kesit alındığında, şeklin geometrisinden

$$\frac{\varepsilon_1}{h_1} = \frac{1}{f} \quad \frac{\varepsilon_2}{h_2} = -\frac{1}{f} \quad (2.3)$$

sonuçları elde edilir. Burada (ε_1) çekme ve (ε_2) de basınç bölgelerinde tarafsız eksenden en uzak liflerdeki birim boy değişimlerini, (h_1) ve (h_2) de ki liflerin tarafsız eksenden olan uzaklıklarını gösterir. Moment denge denklemi yazılırsa,

$$\int_F \sigma \cdot y \cdot df = M \quad (2.4)$$

bulunur. Burada (y) tarafsız eksenden ölçülen uzaklıklardır. Bu noktadaki uzamalar ε ile gösterilirse yine şeklin geometrisinden:

$$\frac{\varepsilon}{y} = -\frac{1}{f} \quad y = f \cdot \varepsilon \quad dy = f \cdot d\varepsilon \quad (2.5)$$

elde edilir. Burada (df) yüzey elemanı için β , (y) uzaklığındaki genişlik olduğuna göre, $df = \beta \cdot dy = \beta \cdot f \cdot d\varepsilon$ yazılabilir.

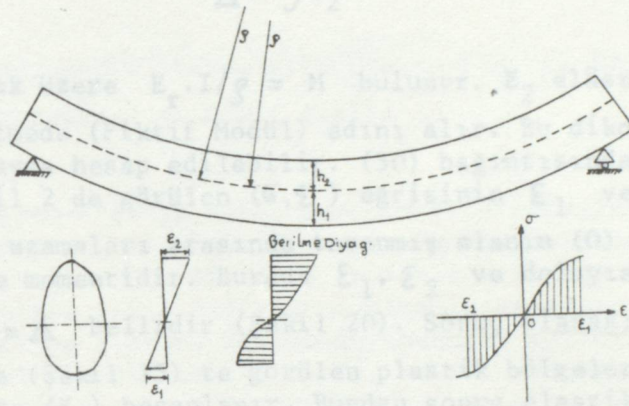
O halde

$$f^2 \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \beta \cdot \sigma \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon = M \quad (2.6)$$

bulunur. $|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| = \Delta$ ile gösterilirse, $\frac{\Delta}{h} = \frac{1}{f}$ olduğu göz önüne alınarak

$$\frac{h^2}{\Delta^2} \cdot \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \beta \cdot \sigma \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon = M \quad (2.7)$$

bağıntısı ile kararlaştırıldığında:



ŞEKİL : 20

bulunur. Bu bağıntı, kesitin geometrisi belli ise, kolayca hesap edilir.

Örneğin; Kesit, genişliği (b) olan bir dikdörtgen ise $\beta = b$ yazarsak

$$\frac{bh^2}{\Delta^2} \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma \cdot \epsilon \cdot d\epsilon = M \quad (2.8)$$

veya

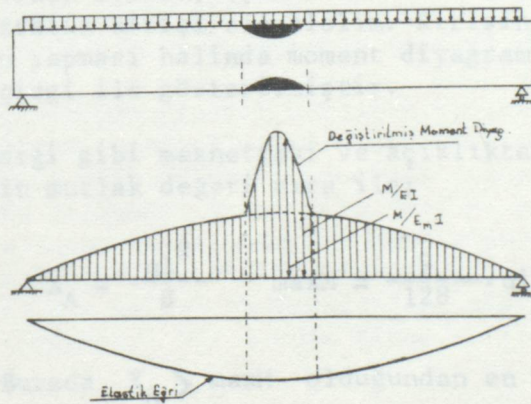
$$\frac{bh^3}{12} \cdot \frac{1}{\int} \cdot \frac{12}{\Delta^3} \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma \cdot \epsilon \cdot d\epsilon = M \quad (2.9)$$

bulunur. Bu bağıntı Elastik deformasyondaki $\frac{EI}{\int} = M$

bağıntısı ile karşılaştırıldığında;

$$E_r = -\frac{12}{\Delta^3} \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \sigma \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon \quad (30)$$

olmak üzere $E_r \cdot I / \rho = M$ bulunur. E_2 elâsto-plâstik eğilmede (Fiktif Modül) adını alır. Bu dikdörtgen için kolayca hesap edilebilir. (30) bağıntısındaki entegral, Şekil 2 de görülen (σ, ε) eğrisinin ε_1 ve ε_2 kenar lif uzamaları arasında tarammış alanın (0) merkezine göre momentidir. Burada $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ve dolayısıyla $|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| = \Delta$ bellidir (Şekil 20). Sonuç olarak; (Şekil 14) veya (Şekil 15) te görülen plastik bölgelerdeki her kesitte (E_r) hesaplanır. Bundan sonra elastik deformasyon durumunda kirişlerin elastik eğrisi için kullanılan (Mohr) yöntemi yardımı ile (değiştirilmiş) moment diyagramı çizilir. Bu diyagram, yük olarak aynı açıklıktaki fiktif bir kiriş yüklendiğinde, elde edilecek moment di-



ŞEKİL: 21

yagramı kiriş ekseninin şekil değiştirmiş durumunu verir (Şekil 21). Bu eğrinin incelenmesi sonucu, plastik bölgeye rastlayan bölümde, deformasyonun çokluğu nedeni ile, eğriliğin büyük bir hızla arttığı görülür.

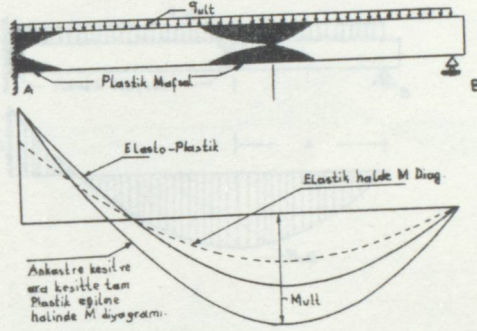
2.3- Hiperstatik Sistemlerin Elasto-Plastik Eğilmedeki Adaptasyonu ve Limit Analiz :

Elasto-Plastik deformasyonun incelenmesinde tanımlanan (Adaptasyon) olayı Hiperstatik Sistemlerde ilginç sonuçlar verir. Sistemin en fazla zorlanan kesiti tam plastik şekil değişimine uğradıktan sonra, daha fazla gerilme alamaz. Eğilme durumundaki eğilme momenti, (Mult) a ulaştıktan sonra, artık artamaz. Bu kez kuvvetlerin artması durumunda bu kesit bir tür mafsal görevi görür. Dolayısıyla (hiperstatik sistem) bir (izostatik sisteme) dönüşür. Kuvvetler artmaya devam ediyorsa, (max M) değerinden sonra, mutlak değer olarak kesite gelen eğilme momenti, sonra (Mult) değerine kadar artar. Bu durumda kesit bir tür (Plastik mafsal) görevi görür ve kuvvetlerin artması ile çoğalan eğilme momenti diğer kesite gider. Böylece adaptasyon olayı sistemdeki momentler arasında bir eşitleme işlemi yapar. Örnek olarak; (Şekil 22) deki birinci dereceden hiperstatik kirişi ele alalım. Kirişin elastik deformasyon yapması halinde moment diyagramı kesikli bir eğri çizgi ile gösterilmiştir.

Bilindiği gibi mesnetteki ve açıklıktaki eğilme momentlerinin mutlak değeri sıra ile;

$$X_A = -\frac{ql^2}{8} \quad \max M = -\frac{9}{128} \cdot ql^2 \quad (31)$$

dir. Burada $X_A > \max M$ olduğundan en büyük gerilme (A) kesitinde, tarafsız eksenden en uzak noktalardaki liflerde, meydana gelir. Bu gerilmenin, (q) yükünün artması sonucu, (σ_F) akma limitine erişmesi ile elastik de-

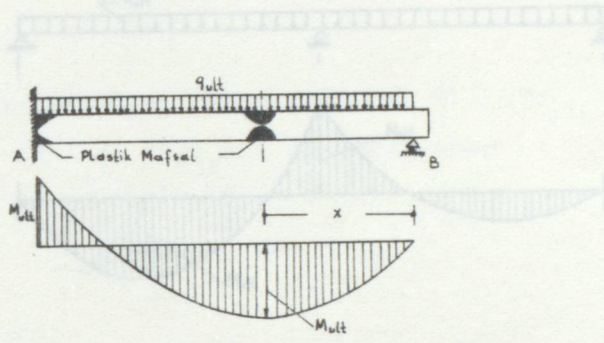


ŞEKİL : 22

formasyon sona erer. Bundan sonra (q) yükü artmaya devam ederse, (A) kesitinde başlayan akma yayılmaya başlar. Kesitte tam plastik deformasyon olduğu anda (XA) daki artma durur. Bu durumda ($\max M$) artmaya başlar.

(A) mesnetinde plastik mafsəlın oluşması ile, hiperstatik sistem, basit bir kiriş gibi çalışmaya başlayarak izostatik hale döner. Bu durumda (q) arttığında, malzemenin dayanması koşulu ile ($\max M$) değeri (M_{ult}) değerine kadar artar. $\max M = M_{ult}$ olduğu anda, malzeme dayanmış olsa da, kirişin maksimum moment noktasında, plastik bir mafsəl oluşacağından, sistem artık (labil) yani (kararsız) bir duruma girer ve sistemde bir denge kalmaz.

Bu duruma tekabül eden (q_{ult}) yükünün bir güvenlik katsayısına bölünmesi ile bu durumu gözönüne alan yeni bir



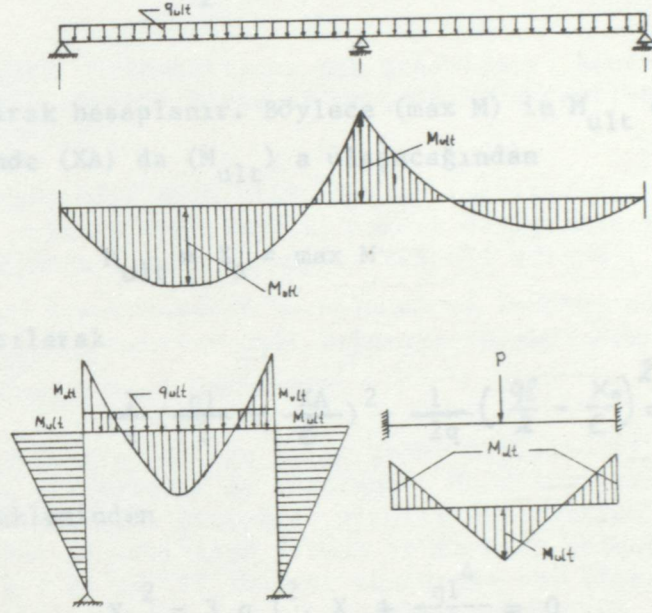
ŞEKİL : 23

hesap şekli geliştirilmiştir. Bu anlayışa göre Hiperstatik sistemlerin boyutlandırılmasını kabul eden hesap şekline (Limit Analiz) adı verilir.

Bu hesap şekline, yukarıki açıklamada da belirtildiği gibi, mesnet ve açıklık momentlerinin eşit oluncaya dek yüklemenin başarılı olarak devam edebilmesi için, malzemenin kırılmaya dayanabilmesi gerekir.

Eğer malzeme şekil değişimi sırasında kırılmıyorsa, Örneğin; (Şekil 22) de görülen kiriş, momentler (M_{ult}) değerini alıncaya dek yüklenmiş ise, buna tekabül eden (q_{ult}) yükü denge koşullarından yararlanılarak hesap edilebilir, (Şekil 23) te görüldüğü gibi, mesnet momentini (X_A) ile gösterilirse (B) mesnet kuvveti

$$B = \frac{q_1 l}{2} - \frac{X_A}{e} \quad (32)$$



ŞEKİL : 24

olarak hesap edilebilir. Açıklık momentinin maksimum olduğu kesit (B) mesnetinden (X) uzaklıkta bulunuyorsa, bunun değeri

$$B - qx = 0 \quad x = \frac{1}{q} \left(\frac{ql}{2} - \frac{XA}{e} \right) \quad (33)$$

olur.

Bu noktadaki açıklık momentini,

$$\max M = Bx - \frac{qx^2}{2} = \frac{1}{q} \left(\frac{ql}{2} - \frac{x}{2} \right)^2 - \frac{1}{2q} \left(\frac{ql}{2} - \frac{x}{2} \right)^2 \quad (34)$$

olarak hesaplanır. Böylece ($\max M$) in M_{ult} olması halinde (X_A) da (M_{ult}) a ulaşacağından

$$M_{ult} = X_A = \max M \quad (35)$$

yazılarak

$$\frac{1}{q} \left(\frac{ql}{2} - \frac{X_A}{2} \right)^2 - \frac{1}{2q} \left(\frac{ql}{2} - \frac{X_A}{2} \right)^2 = X_A \quad (36)$$

denkleminde

$$X_A^2 - 3ql^2 \cdot X_A + \frac{ql^4}{4} = 0 \quad (37)$$

bulunur. Bu denklemin çözümü sonucu (X_A) nın (q) cinsinden

$$X_A = \frac{3ql^2 - 2ql^2 \cdot \sqrt{2}}{2} \approx \frac{ql^2}{10} \quad (38)$$

değeri elde edilir.

$X_A = M_{ult}$ yazılacağından

$$q_{ult} = \frac{10 M_{ult}}{l^2} \quad (39)$$

olarak bulunur. Bu değer seçilen bir (G) güvenlik sayısına bölünerek,

$$q = \frac{q_{ult}}{G} \quad (40)$$

kiriş yüklenilecek yük hesaplanır. Benzer problemlere, sürekli kiriş ve çerçevelerde rastlanabilir (Şekil 24).

Burada görüldüğü gibi, benzer taşıyıcı sistemlerde aynı prensip uygulanarak, moment diyagramları üzerinde, dengenin (limit durumuna) tekabül eden M_{ult} momentlerini işaretleyerek hesaplamak ve kesitin alabileceği (M_{ult}) momentine eşit kılarak, tekabül eden limit yüklemeyi bulmak mümkündür.

Benzer problemlere basit çekme etkisindeki hiperstatik sistemlerde de rastlanır. Bu durumda sisteme gelen dış etki arttıkça, plastik deformasyon en fazla çekme kuvveti alan eleman da meydana gelmeye başlar. Şekil 25 te (P) kuvveti etkisinde iki sistem gösterilmiştir. Kuvvet doğrultusundaki çubuklarda, (P) kuvveti arttıkça, akma başladığı anda, kuvvet artık artmaz. Kuvvet artması diğer elemanlara geçer ve orada akma başlayıncaya dek devam eder. (Şekil 25 a) da iki yan çubukta tam uzama olması durumunda, (P) değeri (P_{ult}) değerine erişir. (P) kuvveti bu değeri geçtiği durumda da sistem (labil) bir sisteme dönüşmüş olur. (Şekil 25 b) de de, (a) çubuğunda plastik akma başladığı andan itibaren, kuvvet artmaz. (P) kuvveti, (b) çubuğunda plastik basınç oluşturuncaya dek, arttırılabilir. Bu çubuktada plastik akma başladığı anda, (P) değeri (P_{uet}) değerine ulaşır. Bu değer aşılması halinde sistem de (labil) duruma geçer.

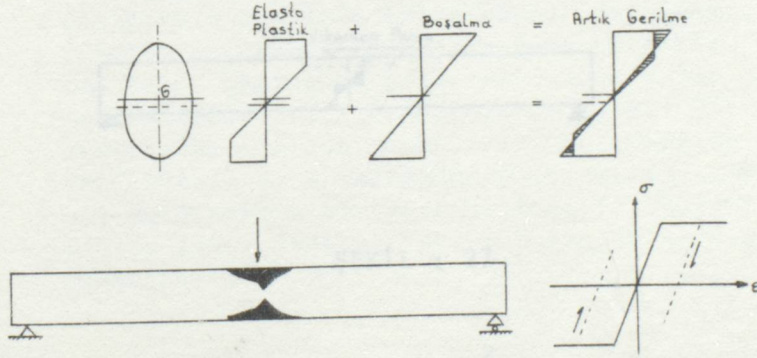
2.4- Taşıyıcı Sistemlerde Artık Gerilmeler :

Elasto plastik şekil değişimi sağlandıktan, sisteme etkileyen kuvvetler kaldırılınca elastik deformasyonları oluşturan bileşen kalktıktan sonra, plastik deformasyonu oluşturan bileşenler kalır. Bu kalan deformasyon-

lar, elastik deformasyon yapan bölgeleri etkisi altında bırakarak, bir çok gerilmelerin oluşmasına neden olur. Bu gerilmelere (artık gerilme) adı verilir.

2.4.1- Eğilme Etkisindeki Elemanlarda Artık Gerilmeler :

Elasto plastik eğilme etkisinde kalan bir sistemde, etkinin kaldırılması demek, sisteme aynı şiddette fakat ters yönde bir eğilme momentinin etki ettirilmesi demektir. Bu nedenle ters moment etkisi ile, çekme bölgelerine ilave basınç gerilmeleri eklenerek, çekme gerilmeleri azalır. Aynı şekilde, basınç bölgeleride çekme etkisinde kalarak, basınç gerilmeleri de azalır. (Şekil 26). Etkinin kaldırılması sonunda, kesit elastik bir deformasyon yaparak dönecektir. Bu durumda Elasto-Plastik gerilme dağılışına ters yönde, fakat lineer olarak yayılı gerilmeler eklemek gerekecektir. Böylece her iki gerilme diyagramı birbirine eklendiğinde, kesitte boşalmadan sonra bir takım gerilmelerin kalması gerekir.



ŞEKİL : 26

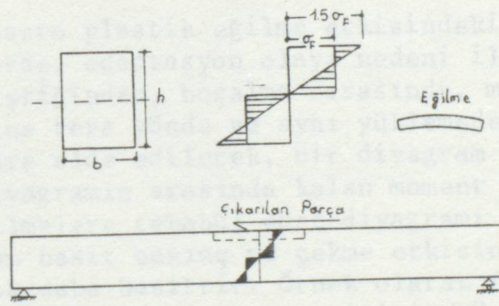
Bu gerilmelere (artık gerilme) adı verilir. İki simetrik eksenli kesitlerde artık gerilmelerin incelenmesi özel bir kolaylık sağlar. Çünkü elasto-plastik eğilme

durumunda ve elastik eğilme durumunda tarafsız eksenin yeri aynıdır. (Şekil 27 de) tam plastik eğilme etkisinde dikdörtgen bir kesitte boşalmadan sonra oluşan (artık gerilmeler) görülmektedir.

En üst ve alt kenardaki gerilmelerin boşalma nedeni ile aldığı değer,

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= + \frac{M_{\text{ult}}}{W} = + \frac{M_{\text{ult}}}{bh^2/6} \\ \sigma_{\min} &= - \frac{M_{\text{ult}}}{W} = - \frac{M_{\text{ult}}}{bh^2/6} \end{aligned} \quad (41)$$

olur.



ŞEKİL : 27

$$M_{\text{ult}} = \sigma_F \cdot \frac{bh^2}{4} \quad (42)$$

yazılarak (Şekil 27) ye göre

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= + 1,5 \sigma_P \\ \sigma_{\min} &= - 1,5 \sigma_P \end{aligned} \quad (43)$$

bulunur. O halde artık gerilmelerin sınır değerleri

$$\frac{\sigma_{\text{üst}}}{\sigma_{\text{alt}}} = \pm 0,5 \sigma_F \quad (44)$$

olur.

Artık gerilmeler teorik ve deneysel olarak incelenmiş olup, bu konuda yabancı ülkelerde bir çok yayın yapılmıştır.

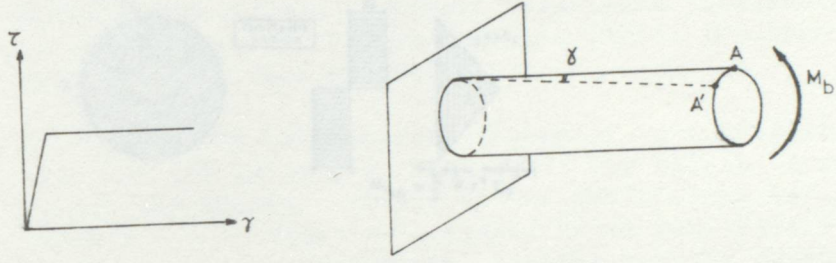
2.4.2- Hiperstatik Sistemlerde Artık Gerilmeler :

Elasto plastik eğilme etkisindeki hiperstatik sistemlerde, adaptasyon olayı nedeni ile sınır koşulları değiştiğinden, boşalma sırasında, mevcut moment diyagramına ters yönde ve aynı yüklemeyen, elastik varsayıma göre elde edilecek, bir diyagram eklemelidir. Bu iki diyagramın arasında kalan moment diyagramı, artık gerilmelere tekabül eden diyagramı gösterir. Bu diyagram basit basınç ve çekme etkisinde kalan sistemlerde çok daha basittir. Örnek olarak (Şekil 25) de gösterilen sistemleri gösterebiliriz. Üç çubuktan oluşan sistemi (Şekil 25 a) gözönüne alırsak, (a) çubuğunda plâstik deformasyon oluşacak biçimde (P) kuvveti arttırılır ve sonra azaltılırsa, çubuklarda (artık gerilmeler) oluşabilir.

2.4.3-Elasto Plastik (Burulma) Etkisinde Artık Gerilmeler :

Burulma etkisindeki elasto-plastik deformasyonun kolayca anlaşılabilmesi için, burada taşıyıcı sistemin (Pekleşmeyen) malzemenen yapıldığı varsayılacaktır. Burulma etkisindeki bir sisteme ait (Σ) eğrisi (Şekil 28) de gösterilmiştir. Bu duruma göre (M_b) burulma momenti gelen bir daire kesitte, kayma gerilmesi τ_F (akma kayma gerilmesi) değerine erişinceye dek, de-

formasyon elastik kalır. Bu durumda dış yüzdeki elemanlarda $\tau_{\max} = \tau_F$ olması ile plastikleşme koşulu sağlanır.



ŞEKİL : 28

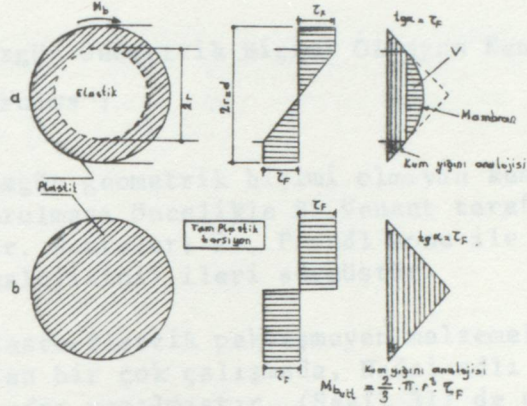
Burulma momenti değeri (MF)

$$M_F = \tau_F \cdot \frac{\pi l^3}{2} = \tau_F \cdot \frac{\pi d^3}{16} \quad (45)$$

olur.

Kesite etki eden (Mb) momentinin MF değerini geçmesi ile, elasto-plastik burulmada kesit düzlem kalır. Kesitin çevresinde daire biçiminde kalıp deplasmanlarının küçük kaldığı kabulü ile, (Şekil 29 a) daki görülen gerilme dağılışı elde edilir.

Burulma etkisindeki kesitin merkezinden aynı uzaklıkta bulunan noktalardaki gerilme durumlarının aynı oluşu nedeni ile, çevredeki taralı kısımda (plastik şekil değişimi) meydana gelir.



ŞEKİL : 29

2.4.4- Elasto-Plastik Burulma Etkisinin Kalkması İle Oluşan Artık Gerilmeler :

Bir elemana etkiyen (M_b) burulma momentine eşit fakat ters yönde bir momentin etkimesi ile, elemenda bir boşalma olur. Bu durumda, kayma gerilmesi elâstik lineer olup ters yöndedir. Bu dağılım elasto-plastik durumdaki dağılıma eklendiğinde (artık gerilme) dağılışı elde edilir (Şekil 30 a). Tam plastik durumdaki boşalma ise (Şekil 30 b de) gösterilmiştir. Bu durumda kenar gerilmelerin değeri

$$\tau_o = \frac{M_B \text{ ult}}{\pi R^2 \frac{L}{2}} - \tau_F = \frac{2 \pi \tau_F \cdot r^3}{\pi R^3 \frac{L}{2}} - \tau_F$$

(46)

$$\tau_o = \frac{4}{3} \tau_F - \tau_F = \frac{1}{3} \tau_F$$

olarak bulunur.

2.4.5- Düzgün Geometrik Biçimi Olmayan Kesitlerde

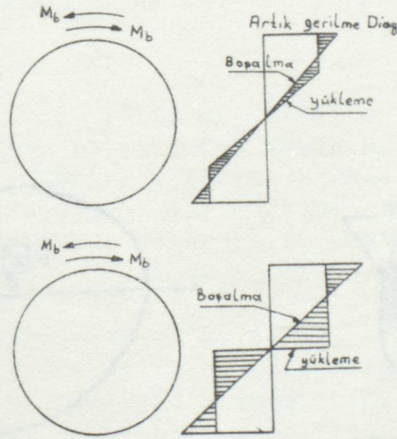
Burulma :

Düzgün geometrik biçimi olmayan kesitlerin elastik burulması öncelikle St.Venant tarafından incelenmiştir. Sonraları da, Prandl konu ile ilgili (Membran Analojisini) ileri sürmüştür.

Elasto-Plastik pekleşmeyen malzemeler için gerekli olan bir çok çalışmada, Nadai adlı bir bilgin tarafından yapılmıştır. (Şekil 31) de gösterilmiş bir kesitte x ve y doğrultularındaki kayma gerilmeleri τ_x, τ_y olarak gösterilirse, elastik burulma halinde

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 = \tau^2 \quad (47)$$

olduğu bilinmektedir.



ŞEKİL : 30

(Şekil 31) deki kesitteki elemanter bir parçada plastik şekil değiştirmenin başlaması için, σ_F kayma gerilmesi akma sınırı olduğuna göre, plastikleşme kriterince

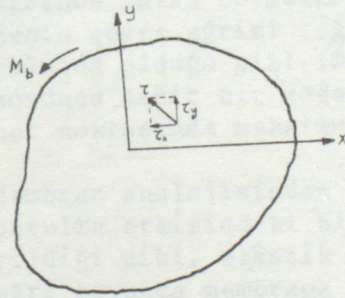
$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 = \sigma_F^2$$

olması gerekir.

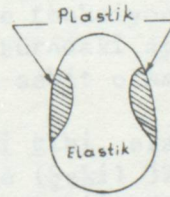
Bu bağıntıdaki σ_x ve σ_y kayma gerilmeleri denklemi olan

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

bağıntısını da sağlar.



ŞEKİL : 31



ŞEKİL : 32

Ayrıca gerilme fonksiyonu Φ olarak alınacak olursa,

$$\tau_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (49)$$

yazılarak, plastikleşme koşulu

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]^2 = \tau_F^2 \quad (50)$$

olarak gösterilebilir.

Bu bağıntının bir tarafındaki τ_F sabit bir değerdir.

Ayrıca,

$$-\tau_y \cdot dx + \tau_x \cdot dy = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot dy = 0 \quad (51)$$

olduğu gözönüne alınırsa, plastik şekil değişimi etkisinde kalan bölgelerde, kayma gerilmeleri, bu bölgenin çevre eğrisi teğetine paraleldir. Elastik burulmada olduğu gibi (\odot) gerilme fonksiyonu da çevre boyunca sabit bir değerdedir. Buradaki ayrıcalık, her noktasında maksimum eğimin sabit olmasıdır.

Membran analogisinden bilindiği gibi, elasto-plastik burulma etkisindeki bir kesitte (Şekil 32) de gösterildiği gibi, elâstik bölgeyi plastik bölgeden ayıran eğri boyunca membrana ait en büyük eğimli teğetlerin tümünün eğimi $\text{tg } \alpha = \tau_F$ olmalıdır. Ayrıca, elastik ve plastik bölgedeki kayma akımı eğrileri, elastik bölge ile plastik bölgeyi ayıran eğri boyunca, birbirine teğettir. Bir bölgeden diğerine geçerken, gerilme doğrultusunda süreksizlik yoktur, yani elastik bölgeye ait burulma-gerilme fonksiyonu Φ_1 , plastik bölgedeki

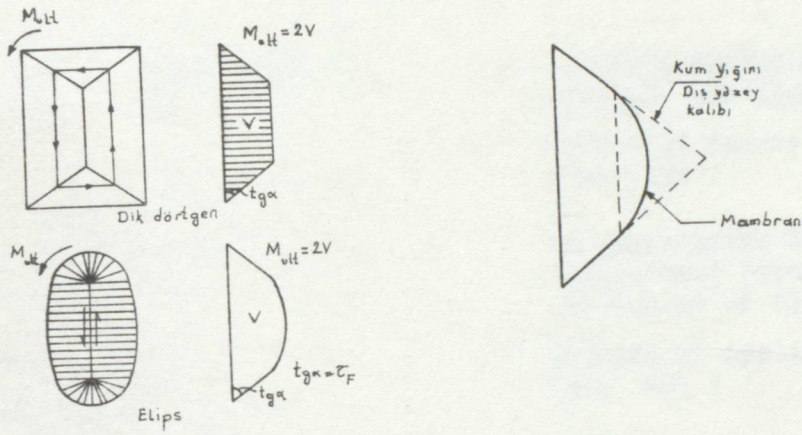
(Φ) ise bu bölgeleri ayıran eğri boyunca $\Phi = \Phi_1$ olur.

Membran analojisinde olduğu gibi, gerilme fonksiyonunun belirlediği bir yüzey düşünüldüğünde bu yüzeyin her yerindeki eğimi sabit ve (ζ_F) e eşit bir yüzey olması gerekir. Nadai ye göre daire bir kesitin burulma etkisinde, plastik şekil değişimine uğraması durumunda, gerilme fonksiyonu eğimi $t\phi = \sigma_F$ olan bir koni olur. Şekil (33) de çeşitli kesitler için bu koniye benzer (tümsek) yüzey gösterilmiştir. Kesit üstüne yığılmış ve ζ_F eğimindeki yüzeylerin ara kesitine (süreksizlik çizgileri) adı verilir. Bu çizgilerin iki yanındaki (ζ) ların ani olarak yön değiştirdiği görülür. Denge koşullarından momentlerin eşitliği yazılırsa, bu tümsek hacminin iki katının (Mult) değerine eşit olduğu sonucu elde edilir. Elasto-plastik burulma durumunda ise, yukarda belirtilen nedenlerle, kesit üzerine gerilmiş bulunan membranın, elastik bölgeyi plastik bölgeden ayıran eğri boyunca tümsek dış yüzeyine teğet olacağı anlaşılır (Şekil 34).

2.4.6- Pekleşen Malzemeden Oluşan Elemanlarda Elasto-Plastik Problemler :

Buraya kadar pekleşmeyen malzeme ile ilgili plastik şekil değişime ait problemler incelendi. Bazı çelik cinsleri ile metal alaşımlarına ait (ζ, ξ) eğrileri, (Şekil 12 c) deki eğriye benzer. Pekleşmeyen malzeme olduğu gibi, pekleşen malzemede de problemler biraz karışık olmakla beraber, denklemler yazılarak incelenebilir.

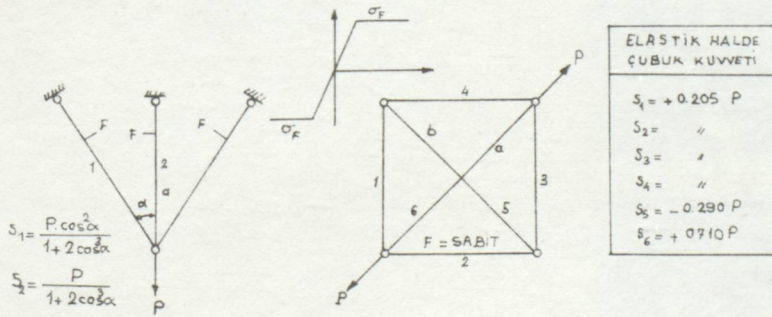
Burada fazla ayrıntıya girilmemiştir. Fazla bilgi için Nadai'nin (Theory of Flow and Fracture of solids, 1950) eserinde, (348) ve (364) sahifeye başvurulmasında yarar vardır.



ŞEKİL : 33

ŞEKİL : 6

ŞEKİL : 34



ŞEKİL : 25

K A Y N A K L A R

- DRUCKER, D.C : (PLASTIC DESIGN Methods Advantages and Limitations)
Technical Report No: 24,
Brown 1957.
- HILL, R. : (A Comparative Study of Some Variational Principles in the Theory of Plasticity)
Journal of Applied Meehanics
1950 No: 1
- HILL, R. : (Lecture Proceedings, International Congress of Applied Mechanics, Brussels 1956).
- NADAI, A. : (Theory of Flow and Fracture of Solids) New-York 1950
- ÜNSAÇ, ORHAN : İ.T.Ü. İNŞ.FAK.(Plastisite Ders notları, 1958)
- ÜNSAÇ, ORHAN : Plastik şekil değişimi mekanizması ve teorisi (15.3.1957, İ.T.Ü. Makine Fakültesi'nde verdiği Konferans). (Berksoy Matbaası 1958 İstanbul).
- PRAGER, W : The Teheory of Plasticity, A Survey of Recent Achievements Journal of the Instution of Mechanical Engineers, Vol. 169, No:21 1955)
- Von Den Broeks : (Theory of Limit Design) New-York-1948.

