

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

79166

LOKAL ve PERİYODİK EĞRİLİĞE SAHİP
KOMPOZİT MALZEMEDEN HAZIRLANMIŞ
KİRİŞ ve PLAKLARIN
DOĞAL TİTREŞİMİ ve STABİLİTESİ

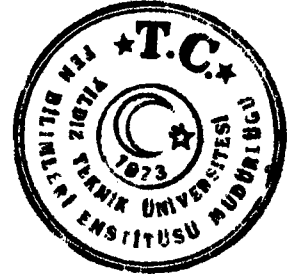
İnşaat Yük. Müh. Zafer KÜTÜĞ

F.B.E. İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Programında
hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 8 Ocak 1998
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV (Y.T.Ü)
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Yalçın AKÖZ (İ.T.Ü)
: Prof. Dr. Ertaç ERGÜVEN (İ.T.Ü)

İSTANBUL, Ocak 1998



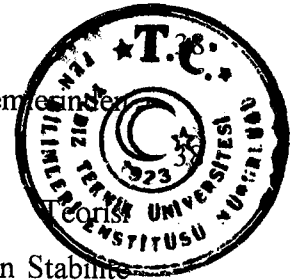
İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ	iv
TABLO LİSTESİ	v
TEŞEKKÜR	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT	x

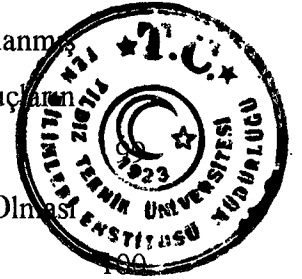
BÖLÜM I. GİRİŞ	1
I.1. Kompozit Malzemelere Ait Genel Bilgiler	1
I.2. Tez Konusuna Ait Araştırmaların Kısa Özeti	6
I.3. Konunun Gerekliliği ve Güncelliği	17
I.4. Yapılan Araştırmaların Amaçları	18

BÖLÜM II. EĞRİSEL YAPIYA SAHİP KOMPOZİT MALZEMELER MEKANIĞININ SÜREKLİLİK TEORİSİ	20
II.1. Süreklilik Teorileri Hakkında Bazı Ön Bilgiler	20
II.2. Gerekli Notasyonlar ve Kabuller	24
II.3. Elastisite Bağlıları	26
II.4. Eğrisel Yapıya Sahip Kompozit Malzemeler Mekaniğinin Bazı Özdeğer Problemlerinin Matematiksel Formülasyonu ve Çözülmesinde Kullanılan Yaklaşık-Analitik Yöntemler	32

BÖLÜM III. PLAKLARIN DOĞAL TİTREŞİM VE STABİLİTE DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ	
III.1. Elastisite Teorisinin 3-Boyutlu Kesin Hareket Denklemlerinde Plak Hareket Denklemlerinin Elde Edilmesi	
III.2. 3-Boyutlu Doğrusallaştırılmış Kesin Stabilité Teorisi Denklemlerinden Eğrisel Yapıya Sahip Plak-Kirişlerin Stabilité Denkleminin Elde Edilmesi	48



BÖLÜM IV. KLASİK , I. ve III. MERTEBEDEN GELİŞTİRİLMİŞ PLAK TEORİLERİ ÇERÇEVESİNDE PLAK-KİRİŞLERİN DOĞAL TİTREŞİM ve STABİLİTE DENKLEMLERİ	54
IV.1. Üçüncü Mertebeden Geliştirilmiş Plak Teorisi Çerçevesinde Plak-Kirişin Titreşim Denklemleri	54
IV.2. Plak-Kirişlerin Kirchhoff-Love Teorisi Çerçevesinde Titreşim Denklemleri	56
IV.3. Plak-Kirişlerin Reissner-Mindlin Teorisi Çerçevesinde Titreşim Denklemleri	58
IV.4. Plak-Kirişlerin Farklı Plak Teorileri Çerçevesinde Stabilitate Denkleminin Elde Edilmesi	61
BÖLÜM V. EĞRİSEL YAPIYA SAHİP KOMPOZİT MALZEMEDEN YAPILMIŞ PLAK-KİRİŞLERİN DOĞAL TİTREŞİM ve STABİLİTE PROBLEMLERİNİN İNCELENMESİNDE KULLANILAN YÖNTEMLER	68
V.1. Galerkin Yöntemi	68
V.2. Pertürbasyon Yöntemi	77
BÖLÜM VI. PLAK-KİRİŞLERİN DOĞAL TİTREŞİM ve STABİLİTELERİNE AİT SAYISAL SONUÇLAR ve YORUMU	90
VI.1. Hesap Algoritması	90
VI.2. Farklı Plak Teorileri Kullanılarak Elde Edilen Sayısal Sonuçların Karşılaştırılması	93
VI.3. Eğrisel Yapıya Sahip Kompozit Malzemedden Hazırlanmış Plak-Kirişlerin Doğal Titreşimlerine Ait Sayısal Sonuçların İncelenmesi	
VI.3.1. Plak-Kiriş Malzemesi Yapısında Periyodik Eğrisellik Olan Hali	



VI.3.2. Plak-Kiriş Malzemesi Yapısında Yerel Eğrisellik Olması Hali	106
VI.4. Eğrisel Yapıya Sahip Kompozit Malzemedeki Hazırlanmış Plak-Kirişlerin Stabilitelerine Ait Sayısal Sonuçların İncelenmesi	110
VI.4.1. Plak-Kiriş Malzemesi Yapısında Periyodik Eğrisellik Olması Hali	111
VI.4.2. Plak-Kiriş Malzemesi Yapısında Yerel Eğrisellik Olması Hali	113

BÖLÜM VII. PLAKLARIN DOĞAL TİTREŞİMLERİNE AİT SAYISAL

SONUÇLAR ve YORUMU

VII.1. Doğal Titreşim Denklemleri	116
VII.2. Hesap Algoritması	124
VII.3. Plak Malzemesi Yapısında Bir Yönde Eğrisellik Olması Halinde Elde Edilen Sayısal Sonuçların İncelenmesi	127
VI.3.1. Plak Malzemesi Yapısında Bir Yönde Periyodik Eğrisellik Olması Hali	127
VI.3.2. Plak-Kiriş Malzemesi Yapısında Bir Yönde Lokal -Yerel- Eğrisellik Olması Hali	132

BÖLÜM VIII. SONUÇLAR ve DEĞERLENDİRİLMESİ

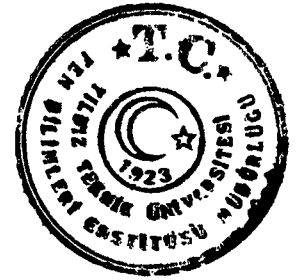
KAYNAKLAR

ÖZGEÇMİŞ



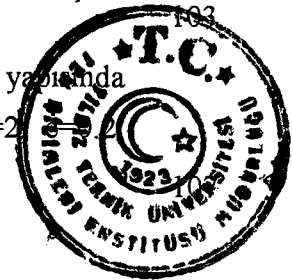
ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1.1. Cam takviyeli liflerden oluşan kumaş tipli kompozit malzeme liflerin periyodik eğriselliği	3
Şekil 1.2. Çok katmanlı boruda ortaya çıkan lokal -yerel- eğrisellikler	4
Şekil 1.3. “Dalgali” lifler ile güçlendirilmiş epoksi matrisli malzemedeki gerilmelerin fotoelastisite yoluyla elde edilen dağılımı	5
Şekil 2.1. Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden hazırlanmış cismin $x_1=sb.$, $x_3=sb.$ kesitleri	24
Şekil 6.1. Plak-kiriş malzemesi yapısında olan periyodik eğriselliğin geometrisi	93
Şekil 6.2. $E_2/E_1 = 50$ ve $\varepsilon = 0$ için plak-kirişin I. ve II. mod şekilleri	101
Şekil 6.3. $E_2/E_1 = 50$, $\delta = \pi/2$ ve $\varepsilon = 0.01$ için plak-kirişin I. ve II. mod şekilleri	101
Şekil 6.4. $E_2/E_1 = 50$, $\delta = \pi/2$ ve $\varepsilon = 0.07$ için plak-kirişin I. ve II. mod şekilleri	102
Şekil 6.5. $E_2/E_1 = 50$, $\delta = \pi/2$ ve $\varepsilon = 0.1$ için plak-kirişin I. ve II. mod şekilleri	104
Şekil 6.6. $E_2/E_1 = 50$, $\delta = \pi/2$ ve $\varepsilon = 0.7$ için plak-kirişin I. ve II. mod şekilleri	104
Şekil 6.7. Plak-kiriş malzemesi yapısında olan yerel eğriselliğin geometrisi.	107

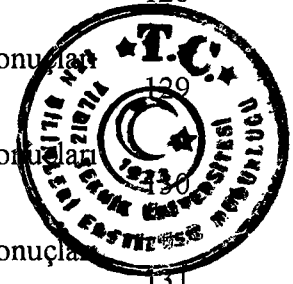


TABLO LİSTESİ

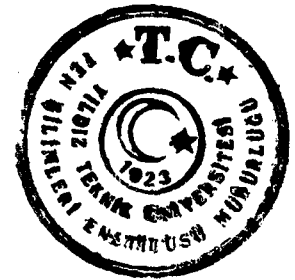
	Sayfa
Tablo 6.1. Kirchhoff-Love hipotezi çerçevesinde çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nin küçük değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).	94
Tablo 6.2. Reissner-Mindlin hipotezi çerçevesinde çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nin küçük değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).	94
Tablo 6.3. Geliştirilmiş 3. mertebeden plak teorileri çerçevesinde çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nin küçük değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).	95
Tablo 6.4. Kirchhoff-Love hipotezi çerçevesinde çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nin büyük değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).	95
Tablo 6.5. Reissner-Mindlin hipotezi çerçevesinde çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nin büyük değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).	96
Tablo 6.6. Geliştirilmiş 3. mertebeden plak teorileri çerçevesinde çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nin büyük değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).	96
Tablo 6.7. Kirchhoff-Love hipotezi çerçevesinde $E_2/E_1 = 100$ ve farklı N değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).	97
Tablo 6.8. Reissner-Mindlin hipotezi çerçevesinde $E_2/E_1 = 100$ ve farklı N değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).	97
Tablo 6.9. Geliştirilmiş 3. mertebeden plak teorileri çerçevesinde $E_2/E_1 = 100$ ve farklı N değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).	97
Tablo 6.10. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nin küçük değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).	100
Tablo 6.11. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nin küçük değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/4$).	102
Tablo 6.12. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nin büyük değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).	103
Tablo 6.13. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nin küçük değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/4$).	103
Tablo 6.14. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nin küçük değerleri için malzeme yapısında yerel eğrisellik olan plak-kirişe ait $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($m=2$, $d=0.4$).	103



Tablo 6.15. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun büyük değerleri için malzeme yapısında yerel eğrisellik olan plak-kirişe ait $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($m=2$, $c=0.2$, $d=0.4$).	108
Tablo 6.16. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun büyük değerleri için malzeme yapısında yerel eğrisellik olan plak-kirişe ait $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($m=2$, $c=0.3$, $d=0.7$).	108
Tablo 6.17. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun büyük değerleri için malzeme yapısında yerel eğrisellik olan plak-kirişe ait $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($m=3$, $c=0.3$, $d=0.7$).	109
Tablo 6.18. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun büyük değerleri için malzeme yapısında yerel eğrisellik olan plak-kirişe ait $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($m=4$, $c=0.3$, $d=0.7$).	109
Tablo 6.19. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun küçük değerleri için malzeme yapısında periyodik eğrisellik olan plak-kirişe ait \bar{P}_{kr} sonuçları .	112
Tablo 6.20. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun büyük değerleri için malzeme yapısında periyodik eğrisellik olan plak-kirişe ait \bar{P}_{kr} sonuçları .	112
Tablo 6.21. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun küçük değerleri için malzeme yapısında yerel eğrisellik olan plak-kirişe ait \bar{P}_{kr} sonuçları ($m=1$, $c=0.0$, $d=0.4$)	113
Tablo 6.22. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun büyük değerleri için malzeme yapısında yerel eğrisellik olan plak-kirişe ait \bar{P}_{kr} sonuçları ($m=1$, $c=0.0$, $d=0.4$)	114
Tablo 6.23. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun büyük değerleri için malzeme yapısında yerel eğrisellik olan plak-kirişe ait \bar{P}_{kr} sonuçları ($m=1$, $c=0.3$, $d=0.7$)	114
Tablo 6.24. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun büyük değerleri için malzeme yapısında yerel eğrisellik olan plak-kirişe ait \bar{P}_{kr} sonuçları ($m=2$, $c=0.3$, $d=0.7$)	114
Tablo 7.1. Çeşitli E_2/E_1 , λ ve ε 'nun küçük değerleri için $\bar{\omega}_I^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).	128
Tablo 7.2. Çeşitli E_2/E_1 , λ ve ε 'nun küçük değerleri için $\bar{\omega}_{II}^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).	129
Tablo 7.3. Çeşitli E_2/E_1 , λ ve ε 'nun büyük değerleri için $\bar{\omega}_I^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).	130
Tablo 7.4. Çeşitli E_2/E_1 , λ ve ε 'nun büyük değerleri için $\bar{\omega}_{II}^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).	131



- Tablo 7.5.** Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun büyük değerleri için malzeme yapısında yerel eğrisellik olan plağa ait $\bar{\omega}_1^2$ sonuçları ($m=2$, $c=0.3$, $d=0.7$). 133
- Tablo 7.6.** Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun büyük değerleri için malzeme yapısında yerel eğrisellik olan plağa ait $\bar{\omega}_{11}^2$ sonuçları ($m=2$, $c=0.3$, $d=0.7$). 134



TEŞEKKÜR

Bu doktora tez çalışması Sayın Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV'un disiplinli idaresi, yönlendirmesi ve hatta fedakarca yapmış olduğu yardımları sayesinde tamamlanmıştır. Kendilerine ne kadar teşekkür etsem azdır. Aynı zamanda yapmış olduğu yardımlardan dolayı sayın Yrd.Doç. Dr. Nazmiye YAHNIOĞLU'na da müteşekkirim.

Sadece eğitim-öğretim değil aynı zamanda hayatım boyunca her konuda desteğini, yardımını ve ilgisini üzerimizden eksik etmeyen, bu amaçla her türlü fedakarlığı gösteren sevgili annem Gülsüm HIZIR'ı minnet ve şükranla zikretmek isterim. Ayrıca R. Oğuz BOZKURT ve bu çalışmayı bizzat kendilerine vermeyi ziyadesiyle istediğim ancak her ikisi de çok genç yaşta Hakk'ın Rahmetine kavuşmuş olan babam Mahmut Ali KÜTÜĞ ile Hülya BOZKURT hanımefendiyi de şükranla yâd ediyorum.

Gerek görevim, gerekse doktora çalışmam nedeniyle geç saatlere kadar üniversitede kalmama sabır gösteren eşim Filiz KÜTÜĞ'e de müteşekkirim.

Bir ara bilgisayarımda ortaya çıkan mekanik arızanın beni ne kadar endişelendirdiğini ve bu arızanın belirlenmesi ve giderilmesi için Ar. Gör. Tevfik İnan ve Sedat Alış'ın gayretlerini hiçbir zaman unutmayacağım, kendilerine minnettarım.

Dolaylı veya dolaysız destek ve yardımlarını gördüğüm Doç.Dr. Mustafa Yıldırım ile asistan arkadaşlarım Ar. Gör. Ayşe E. Koçak, Ar. Gör. Dr. İrfan Coşkun, Ar. Gör. Sükru Özçoban ve eşi Sevim Özçoban'a ayrıca teşekkür ederim.



Zafer KÜTÜĞ -Yıldız 1997

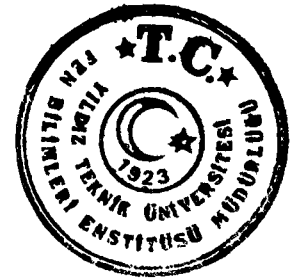
ÖZET

Bu çalışmada lokal -yerel- veya periyodik eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden hazırlanmış, kenarlarından serbest olarak oturan plakların doğal titreşim ve burkulması Akbarov ve Guz' süreklilik teorisi çerçevesinde Galerkin Yöntemi kullanılarak araştırılmıştır. Bu amaçla elastisite teorisinin kesin hareket denklemleri kullanılarak üçüncü mertebeden geliştirilmiş plak titreşim denklemleri ve 3-boyutlu lineerize edilmiş elastik stabilite denklemleri kullanılarak üçüncü mertebeden geliştirilmiş plakların stabilite denklemleri ve bunlara ait uygun sınır koşulları çıkarılmıştır.

Formülasyonu yapılan problemlerin incelenmesi için Galerkin Yöntemi'nin uygulanmasında karşılaşılan bazı zorluklar ortadan kaldırarak bu yöntem ele alınan türdeki problemlerin incelenmesi doğrultusunda geliştirilmiştir. Araştırmalarda esas olarak Galerkin Yöntemi kullanılmakla birlikte Pertürbasyon Yöntemi gibi başka tür yaklaşık yöntemlerin çözüm yöntemi olarak kullanılabilirliği incelenmiştir.

Araştırmalarda üçüncü mertebeden geliştirilmiş plak teorileri kullanılmış olup bazı problemler için elde edilen sonuçlar klasik ve birinci mertebeden plak teorileri olan ve yaygın olarak kullanılan, sırasıyla, Kirchhoff-Love ve Reissner-Mindlin hipotezlerinden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalardan üçüncü mertebeden geliştirilmiş plak teorilerinden elde edilen sonuçların daha kesin olduğu tespit edilmiştir.

Araştırmalardan, plak malzemesi yapısındaki eğriselliklerin doğal titreşim frekanslarını ve stabilite problemlerinde kritik dış basınç yükünü genellikle düşürdüğü sayısal sonuçlarla gösterilmiştir. Bundan başka eğriselliği karakterize eden parametrelerin doğal titreşim frekanslarına, stabilite problemlerinde ise kritik basınç kuvvetlerinin değerlerine etkisi geniş bir biçimde incelenmiştir.



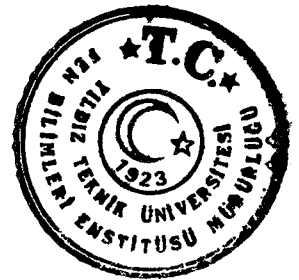
ABSTRACT

In this study, natural -free- vibration and stability of the simply supported composite plates of which material has a local or periodically curved structure have been investigated in the framework of Akbarov and Guz' continuum theory by using Galerkin Method. For this aim, third order refined equations of motion and stability of composite plate have been derived by using exact motion equations of theory of elasticity and three dimensional linearised elastic stability equations, respectively.

Some difficulties which have been met in the applications of Galerkin's Method to investigation of formulated problems, have been removed and this method has been developed for the solution of considered problems. Although Galerkin's Method has been mainly used in this thesis, utilization of other kind of solution methods such as Perturbation Method has also been examined.

In this investigation, third order refined plate theories have mainly been used and comparison of numerical results, obtained by using classic (Kirchhoff-Love) and first order (Reissner-Mindlin) and third order refined plate theories, has been made. From this comparison, it is determined that the numerical results, obtained by using third order refined plate theories, are much more exact than others.

By using obtained numerical results, it has been shown that values of the natural vibration frequencies and the critical loads to be applied to plate decrease due to the local or periodical curvings in the composite plate material. Additionally, effects of the parameters, defining the form of the curvings in the composite plate material structure, to the natural vibration frequencies and critical loads have also been widely investigated.



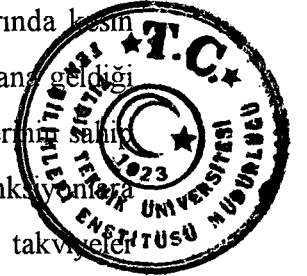
BÖLÜM I

GİRİŞ

I.1. KOMPOZİT MALZEMELERE AİT GENEL BİLGİLER

Günümüzde uçak sanayiinde, gemi sanayiinde, tıp alanında ve çağdaş tekniğin diğer birçok alanlarında kompozit malzemeler yaygın şekilde kullanılmaktadır. Kompozit malzemelerden bu şekilde kullanılması, bu malzemelerin geleneksel malzemelerden birçok yönden üstünlüklere (örneğin, daha düşük ağırlığa, üstün mukavemete ve rijitliğe vs.) sahip olması ile ilgilidir. Bu ve buna benzer diğer pek çok nedenlerden dolayı birçok bilim dalları, örneğin; mekanik, fizik, kimya vs. bu malzemelerin kendi dallarına uygun problemlerini araştırmaktadır. Araştırılan problemler içerisinde en önemli ve gerekli yerlerden biri de kompozit malzemelerin ve bu malzemelerden hazırlanmış yapı elemanlarının mekaniğine ait olan problemlerin, sürekli ortamlar mekaniği çerçevesinde teorik ve deneysel incelenmesidir. Gelişmiş dünya devletlerinde (örneğin; ABD ve diğerleri) bahsedilen konuya ilişkin periyodik bilimsel dergilerin (örneğin; Journal of Composite Materials (ABD), Mechanics of Composite Materials and Structures (ABD), Journal of Reinforcing Plastics Composites (ABD), Mechanics of Composite Materials (Letonya), vs.) yayınlanması, birçok kitabın basılması (örneğin; Composite Materials (Vol: 1-8), eds, Lawrence J. Broutman and Richard H. Krock, 1974, Akad. Press) söylenenleri desteklemektedir.

Mevcut literatürde yapay şekilde oluşturulmuş kompozit malzemelerin aralarında kesin geometrik sınır olan ve kimyasal açıdan en azından iki tür malzemedan meydana geldiği söylenmektedir. Bu tanımdan görüldüğü gibi, kompozit malzemeler, bileşenlerine sahip olmadığı özelliklere sahip olurlar. Kompozit malzemenin bileşenleri yaptığı fonksiyonlara bağlı olarak; takviye (güçlendirici) ve matris diye ikiye ayrılır. Genellikle, takviyeler (güçlendiriciler) kompozit malzeme içerisinde yük taşıma görevini görür. Matris malzemesi ise, takviyelerin birliğini ve karşılıklı etkileşimini sağlar.



Kompozit malzemelerin birçok açıdan sınıflandırılması yapılabilir. Bunlardan en yaygın olanı ve bu malzemelerin mekaniğinde sıkça kullanılanı, kompozit malzemelerin mikro yapısına ilişkin sınıflandırmadır. Adı geçen sınıflandırmaya göre, Modern Composite Materials (1967) kitabında gösterildiği gibi, kompozit malzemeler aşağıdaki gruplara ayrılır:

1. Seyrek, küçük (Dispers) tanecik-takviyeli kompozitler,
2. Tanecik-takviyeli kompozitler,
3. Lifli kompozitler.

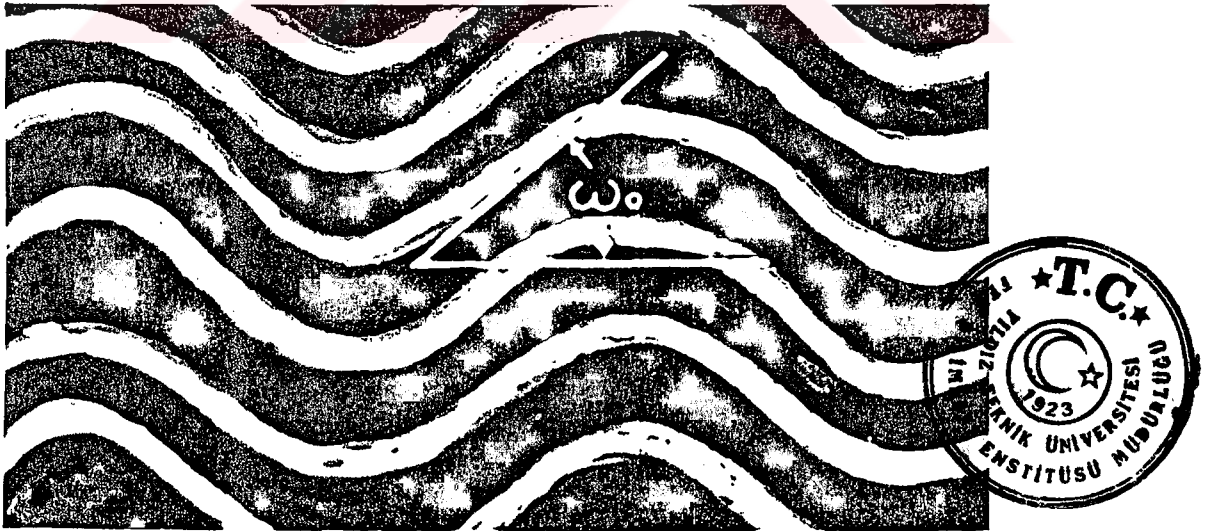
Seyrek, küçük tanecik takviyeli kompozit malzemelerin yapısı, matris ve boyutları 0.01-0.1 mikrometre ve hacim oranı ise, %1-%15 aralığında değişen taneciklerden meydana gelir. Tanecik-takviyeli kompozitlerin yapısında ise, taneciklerin boyutu 1 mikrometreden daha büyük olup, hacim oranı % 25' den fazladır. Lifli kompozit malzemelerde ise liflerin çapı 0.01 mikrometreden 100 mikrometreye kadar değişebilir, hacim oranları ise % 70'e kadar artırılabilir. Tanımlanan bu gruplar içerisinde en yaygın olanı, lifli kompozitlerdir. Lifli kompozit malzemeler içerisinde ise, en önemli yerlerden birini, matrisi polimer malzemedan oluşan lifli kompozitler tutar. Bu türlü kompozitlerde takviye (lif) olarak bor, cam, vs. ve matris malzemesi olarak epoksi, polyester, vs reçineler kullanılır. Adı geçen kompozit malzemeler, lif yönlerine bağlı olarak her bir tabakadaki lifler birbirine paralel ve ayrı ayrı tabakalardaki lifler belirli bir açı yapan *levhali kompozit malzeme* ve yine lifleri birbirine paralel olan *lifli kompozit malzeme* diye gruplara ayrılır. Bu kompozitlerde kullanılan lif ve reçinelerin mekanik özellikleri birçok kaynaklarda (örneğin; Modern Composite Materials, 1967, Eds. Broutman J. and Krock R.M., vs.) verilmiştir. Belirtelim ki, bu çalışmada yapılan araştırmalar da lifli ve levhali kompozitlerden yapılmış plakların bazı dinamik problemlerinin matematiksel açıdan çözülmesine ilişkin araştırmalardır.

Bunlardan başka, kompozit malzemeler, takviyelerin (güçlendiricilerin) şekillerine göre de sınıflandırılırlar. Bu sınıflandırmaya göre (Cristensen, vs.) kompozit malzemeler; küre şekilli güçlendiricili, silindir şekilli güçlendiricili ve plak şekilli güçlendiricili olmak üzere üç sınıfa ayrılır. Bu tür sınıflandırmaya göre, tanecik



güçlendiricili kompozitlere küre şeklinde (bazen de elipsoid şeklinde) güçlendiricisi olan, lifli kompozitlere ise silindir şeklinde ve plak şeklinde güçlendiricisi olan kompozitler gibi bakılabilir. Bundan dolayı kompozit malzemeler mekaniği problemlerinin matematiksel açıdan modellenmesi önemli ölçüde kolaylaşır.

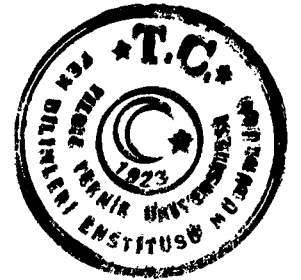
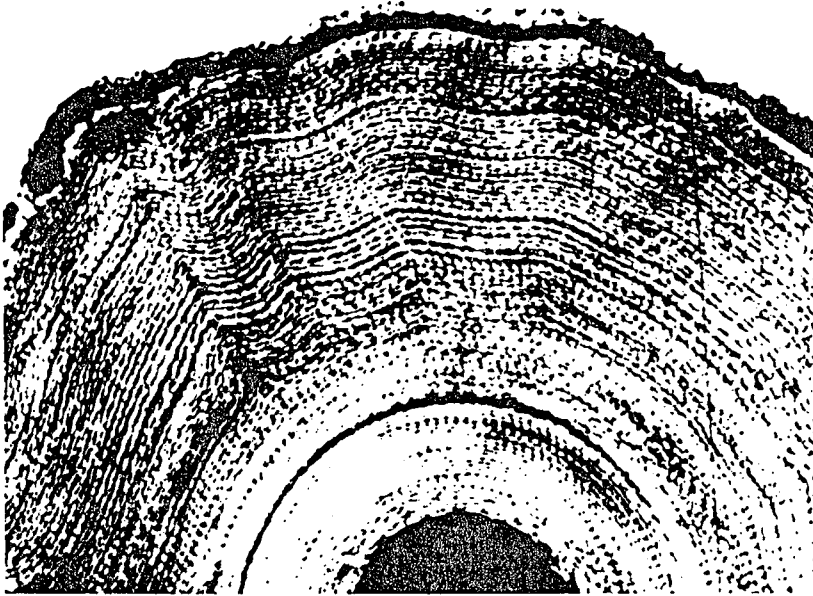
Lifli ve levhali kompozitlerin ve bunlardan yapılan yapı elemanları mekaniğinin en önemli ve güncel problemlerinden biri, bu malzemelerin yapısında olan belirli (specific) özelliklere ilişkin problemlerdir. Bu özelliklerden en önemlisi ise malzemelerdeki liflerin ve levhaların eğrilikli yapıya sahip olmasıdır. Birçok kaynaktan görülebileceği gibi, örneğin; Akbarov and Guz (1992); Guz' (1990); Tarnopolsky and Rose (1969); Manisfield and Purslow (1974); Hyer et al (1988); Chernin and Gul (1964); Pranch and Tamuzh (1967), vs. kompozit malzemedeki lif ve levhaların yapısındaki eğilmeler, bu malzemelerin dizaynından oluştuğu gibi (I. Durum), onların hazırlanma aşamalarında kullanılan teknolojik işlemlerin bir seri uyumsuzluklarının sonucu da olabilir (II. Durum). I. Durumda liflerden hazırlanmış dokuma kumaş tipli levhaları olan levhali kompozitleri örnek göstermek mümkündür, bu halde eğilmeler periyodik şekilli olurlar. II. Durumda ise eğilmeler genellikle yerel (lokal) karakter taşırlar.



Şekil 1.1. Cam takviyeli liflerden oluşan kumaş tipli kompozit malzeme liflerin periyodik eğriselliği

I. Duruma örnek olarak Şekil 1.1.'de (Tarnopolsky and Rose, 1969) cam takviyeli liflerden oluşan kumaş tipli kompozitteki liflerin eğilmesi görülmektedir. Bu eğilmeler teknolojik işlemlerdeki hatadan doğan eğilmeler olmayıp, malzeme yapısının dizaynından doğan eğilmelerdir. II. Durumdaki eğilmelere örnek olarak, Şekil 1.2.'de gösterilen (Guz', 1990) çok katmanlı boruda oluşan lokal eğilmelerdir. Yukarıda söylenenlerden başka birçok araştırma laboratuvarında, tek yönde periyodik eğriliğe sahip lifler ile güçlendirilmiş eğilebilir (flexible) kompozit malzemelerin üretimi yönünde araştırmalar yapılmaktadır. Söylenenlere ilişkin olarak Şekil 1.3.'de (Chou et. al., 1986) "dalgalı" liflerle güçlendirilmiş kompozit malzeme, lifler doğrultusunda çekilmektedir. Matriste oluşan gerilmeler polarize edilmiş ışığın renkli girişimleri sonucunda görülmektedir. Düşük gerilmelerde epoksi matrisli malzemedeki gerilmelerin fotoelastisite yoluyla dağılımı verilmiştir. Bu durumda çok kolaylıkla şekil değiştirebilen bu malzeme, gerilmelerin büyük değerlerinde çok çok sertleşir. Deneysel açıdan elde edilen bu sonucun Akbarov'un (1995) araştırmasında teorik olarak ispatlandığını belirtmek gerekir.

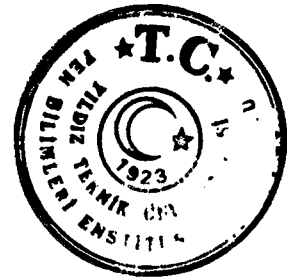
Böylece, eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeler mekaniğinin sürekli ortamlar mekaniği çerçevesinde teorik ve deneysel açıdan ciddi şekilde araştırılması gerekliliği ortaya çıkmaktadır.



Şekil 1.2. Çok katmanlı boruda ortaya çıkan lokal -yerel- eğrisellikler



Şekil 1.3. "Dalgalı" lifler ile güçlendirilmiş epoksi matrisli malzemedeki gerilmelerin fotoelastisite yoluyla elde edilen dağılımı





Şekil 1.3. "Dalgall" lifler ile güçlendirilmiş epoksi matrisli malzemedeki gerilmelerin fotoelastisite yoluyla elde edilen dağılımı

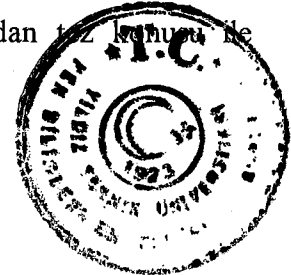


I.2. TEZ KONUSUNA AİT ARAŞTIRMALARIN KISA ÖZETİ

Akbarov and Guz' 1992, Akbarov, Guz' et al.1995 vs. kaynaklarda gösterildiği gibi şimdiye kadar eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeler mekaniği problemlerinin araştırılması iki guruba ayrılmaktadır. Birinci gurup araştırmalarda, güçlendiricilerin eğriliklerinin normalize edilmiş mekanik özelliklere olan etkisini göz önüne alan süreklilik teorisi verilmiştir. Güçlendirici liflerin veya levhaların eğriliklerinin, boyutu eğrilik boyutundan çok büyük olan alanlarda, gerilme veya şekildeğiştirme dağılımlarına etkisinin araştırılmasında bu süreklilik teorileri yararlı olabilirler. Bu gruptaki araştırmalar Bolotin et al.(1980), Bazhant (1968), Vanin (1985), Tarnopolsky et al.(1969), Whitney (1966), Manisfield (1974), vd. tarafından yapılmıştır. Bu yöndeki son araştırmalardan biri de Akbarov (1995) tarafından yapılmış ve periyodik eğrisel yapıya sahip levhalı kompozit malzemelerin normalize edilmiş doğrusal olmayan mekanik özellikleri bulunmuştur.

İkinci guruba ait araştırmalarda kompozit malzemenin yapısında olan eğriliklerin gerilme ve şekildeğiştirme dağılımlarına etkisinde, boyutları eğrilik boyutunda ve daha düşük oranda olan alanlarda göz önüne alınabilecek yöntemler teklif edilmiştir. Bu araştırmalar aynı zamanda parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde hem sürekli ortamlar mekaniğinin kesin denklemleri kullanılarak hem de Akbarov and Guz' (1991)'de verilmiş süreklilik teorisi kullanılarak incelenmiştir. Adı geçen bu süreklilik teorisinin öncekilerden bir önemli farkı da kompozit malzeme yapısındaki eğriliklerin her türünü (yani, 2 boyutta periyodik, yerel eğrilikleri) göz önüne alabilmesidir.

Parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde yapılan araştırmaların geniş özeti Akbarov and Guz' (1992)'de verilmiştir. Bu araştırmalara örnek olarak Akbarov'un (1985-1994) ve Akbarov et al. (1984, 1985), Hyer et al., (1988) ve diğer çalışmalar gösterilebilir. Bunlardan, çalışmalarda kullanılan matematiksel yöntemler açısından tez konusu ile ilişkili olan bazıları üzerinde durulmuştur.



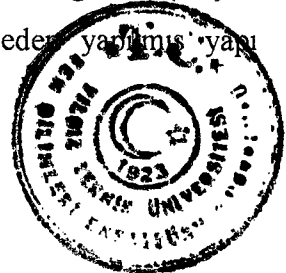
Akbarov and Guz' (1984, 1985) tarafından periyodik eğrisel yapıya sahip levhalı kompozitlerde gerilme ve şekildeğiştirme dağılımlarının araştırılması için parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite teorisinin kesin denklemlerinin kullanıldığı bir yöntem teklif edilmiştir. Burada, ele alınan malzeme yapısındaki eğilmelerin genliğinin diğer boyutlardan küçük olduğu kabul edilmiş ve gerilmeler, şekildeğiştirmeler ve yerdeğiştirmeler eğilme derecesini gösteren küçük parametreye bağlı bir seri şeklinde ifade edilmiştir. Ele alınan problemler için sınır şeklinin pertürbasyon yöntemi geliştirilerek, söylenen serilerin her bir terimi için, kapalı diferansiyel denklemler takımı, uygun sınır ve temas koşulları elde edilmiştir. Eğilmelerin periyodikliği kullanılarak bu terimlerin analitik ifadelerinin bulunabilmesine rağmen, sayısal sonuçların elde edilmesi bilgisayar kullanılması ile mümkün olmuştur. Bu sayısal sonuçların mekanik açıdan yorumları Akbarov (1985, 1987, 1990, vs.)'un yayınlarında verilmiştir. Daha sonraları Akbarov (1986) yukarıda adı geçen yöntemi, eğrisel yapıya sahip visko-elastik matrisli kompozitler için genelleştirmiştir. Burada, zamana göre Laplace dönüşümünü ve sayısal sonuçların elde edilmesinde Schapery (1966) metodu kullanılmıştır. Akbarov ve Guz'un yukarıda söylenen yöntemi, Akbarov (1988)'un çalışmasında lokal eğilmeli yapıya sahip kompozit malzemelere uygulanmıştır. Bu durumda yukarıda gösterilen serilerin terimlerinin bulunması için üstel Fourier dönüşümleri kullanılmıştır. Anizotrop levhalardan oluşmuş ve eğrisel yapıya sahip kompozit malzemelere ilişkin araştırmalar ise, Akbarov (1989) vs., çalışmalarında yapılmıştır. Bir daha belirtelim ki, bu çalışmaların her türlü açıdan daha geniş özeti Akbarov and Guz' (1992) yayınında verilmiştir ve bu özette görülmektedir ki, adı geçen araştırmalarda kullanılan ve geliştirilen yöntemler *analitik-sayısal yöntemler* diye adlandırılabilir. Yani, incelenen uygun sınırdeğer problemlerinin çözümü belirli bir duruma kadar analitik olarak elde edilse de, yorumlanabilecek sayısal sonuçlara bilgisayarların yardımı ile ulaşılabilir. Bundan başka kompozit malzemeler mekaniğinin söz konusu dalında sayısal yöntemler de kullanılmaktadır. Örneğin; Hyer et al. (1988) araştırmasında, lokal eğilmeli yapıya sahip, biri diğerini tekrarlayan 17 katlı levhalardan oluşmuş levhalı kompozitte gerilme dağılımını parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde FEM yöntemi kullanılarak incelemiştir.



Parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde yapılan araştırmaların büyük çoğunluğunda, ele alınan malzemenin sonsuz boyutlu alanı kapsadığı ve malzeme yapısındaki eğilmelerin periyodik olduğu kabul edilmiştir. Bu kabuller incelenen problemlerin matematiksel açıdan çözülebilir veya kolay çözülebilir olmasını önlemiştir. Açıktaır ki, eğrisel yapıya sahip çok katlı ve levhalı kompozit malzemeden hazırlanmış yapı elemanlarının mekaniği ile ilgili problemlerin parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde incelenmesinde matematiksel açıdan birçok zorluklar ortaya çıkar ve çoğu durumda çözüm mümkün olmaz. Bu nedenlerden dolayı eğrisel yapıya sahip çok katlı kompozit malzemeler mekaniğinin sonlu alanlar ile ilişkin problemlerinin daha kesin (örneğin Akbarov and Guz'un, 1991'deki yayınındaki teori) süreklilik teorisi çerçevesinde çözümleri gerekli ve faydalıdır.

Akbarov and Guz (1991) süreklilik teorisine göre, eğrisel yapıya sahip parçalı-homojen malzeme; anizotrop, sürekli-homojen olmayan malzeme haline getirilir. Bu nedenle söylenen teorisinin denklemleri, değişken katsayılı diferansiyel denklemler olur. Akbarov and Guz' (1991) makalesinde, bu denklemlere uygun gelen sınır değer problemlerinin çözümleri için küçük parametreler yöntemi teklif edilir. Küçük parametre olarak eğilme genliğinin eğilmenin başka parametrelere oranı kabul edilir. Uygun sınırdeğer problemlerinin çözümü, küçük parametrenin serisi şeklinde aranır. Böylece değişken katsayılı kısmi türevli diferansiyel denklemler takımı için yapılacak sınırdeğer problemlerinin çözümü uygun sabit katsayılı homojen olmayan, kısmi türevli diferansiyel denklemler takımına ait sınırdeğer problemler serisinin çözümüne getirilir. Söz konusu süreklilik teorisi çerçevesinde ve küçük parametreler yöntemi kullanılarak yapılan araştırmalara gelince , belirtelim ki, bu araştırmaların sayısı çok kısıtlıdır. Bunlardan birkaç tanesini gözden geçirelim.

Akbarov and Gulliyev'in 1991'deki makalesinde küçük ölçekli periyodik eğilmeli (*Küçük ölçeklilik*), malzeme yapısındaki eğilme boyutlarının, bu malzemeden yapılmış yapı

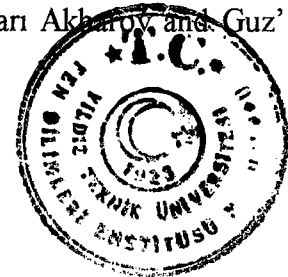


elemanı boyutlarından çok çok küçük olması, diye tanımlanır) yapıya sahip kompozit malzemede, quasi-homojen gerilme dağılımı incelenmiştir.

Akbarov et al. (1992) makalesinde küçük ölçekli eğilmeli yapıya sahip kompozit malzemeden hazırlanmış yapı elemanlarının doğal titreşimlerinin incelenmesinde Hamilton varyasyonel prensibini kullanan bir yöntem teklif edilmiştir.

Taylan and Güven (1995), periyodik yapıya sahip çok katlı levhali kompozitten hazırlanmış şeritin eğilmesinin bazı basit sınır koşulları çerçevesinde Akbarov and Guz' süreklilik teorisi kullanılarak araştırılmasında, küçük parametreler yönteminin uygulanabilmesini incelemişlerdir. Bu araştırmanın sonuçlarından görüldüğü gibi ele alınan sınır koşullarının kesin sağlanması, ancak sıfırıncı yaklaşımda mümkün olmuştur.

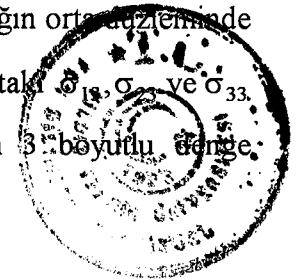
Son zamanlarda Akbarov ve Yahnioğlu (1995-1996) ve Yahnioğlu (1995-1996) tarafından yapılan bir seri araştırmalarda Akbarov and Guz' süreklilik teorisi çerçevesinde eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeler mekaniğinin bazı iki ve üç boyutlu sınır değer problemleri sonlu elemanlar yöntemiyle araştırılmış olup söz konusu araştırmalar bu yöndeki ilk çalışmalar olmuştur. Adı geçen bu çalışmalarda, elastisite teorisinin kesin denklemleri kullanılmış ve hem geometrik hem de fiziksel doğrusal problemler ele alınmıştır. Bu incelemelerde, statik durumlar göz önüne alınmış olup malzeme yapısında olan eğriliklerin bu malzemeden yapılmış yapı elemanlarındaki gerilme ve şekildeğiştirme dağılımına etkisi araştırılmıştır. Akbarov ve Yahnioğlu'nun söz konusu çalışmalarda ele alınan statik problemlere karşı gelen dinamik problemlerin elastisite teorisinin kesin hareket denklemleri çerçevesinde incelenmesinde sayısal yöntemler yardımıyla bile çok büyük zorluklar ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle, eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden yapılmış kiriş ve plak tipli yapı elemanlarının doğal titreşim ve burkulma - stabilite- problemlerinin incelenmesinin bazı geliştirilmiş plak teorileri çerçevesinde yapılması zorunluluğu ortaya çıkmaktadır. Söylenenlerden dolayı bu tezdeki araştırmalarda plak-kiriş ve plakların doğal titreşim ve burkulmaları Akbarov, and Guz'



Süreklilik Teorisi çerçevesinde üçüncü mertebeden geliştirilmiş plak teorisi yardımıyla incelenmektedir.

Şimdi, yukarıda bahsedilen plak teorilerinin geliştirilmesi ve plak titreşimleri hakkındaki son güncel araştırmaların kısa özetini ele alalım. 1940'lı yılların başlarında kompozit malzemelerin uygulanması ve bu malzemelerden yapılmış plak ve kabuk şeklindeki yapı elemanlarının statik ve dinamik hesaplarında klasik Kirchhoff-Love hipotezleri geçersiz veya çok yaklaşık olduğundan bu tür problemler için yeni hipotezlerin geliştirilmesi gerekliliği ortaya çıkmıştır. Klasik hipotezlerin kompozit malzemedan yapılmış plaklar için geçersiz olmasının esas nedeni bu plak malzemelerinin kayma modüllerinin çok düşük ve kompozit (anizotrop) plaklardaki kayma etkilerinin ihmal edilemez olmasıdır. Bu kayma etkilerinden dolayı geliştirilmiş plak teorilerine çoğu zaman *Kayma Şekildeğiştirmeli Plak Teorileri* de denilir. Plak teorilerinin ortaya konmasında esas amaç, genellikle, elastisite teorisinin 3-boyutlu (2-boyutlu) problemlerinin 2-boyutlu (1-boyutlu) problemlere indirgenmesidir. Bu durumda aranan büyüklüklerin boyutlardan birine göre (plak kalınlığını gösteren boyuta göre) yayılımı hipotez şeklinde kabul edilir ve böylece bu büyüklüklerin sağladığı denklem ve sınır koşullarının boyutunun 3'ten 2'e (2'den 1'e) düşürülmesi sağlanır. Literatürde gerilme veya yerdeğiştirmeden hangisinin plak kalınlığı boyunca yayılımının hipotez şeklinde kabul edildiğine bağlı olarak plak teorileri; 1-*Gerilme esaslı teoriler*, 2- *Yerdeğiştirme esaslı teoriler* olarak iki guruba ayrılır.

Birinci gurubu oluşturan gerilme esaslı ve enine (transverse) kayma şekildeğiştirmesi göz önüne alınan plak teorileri Reissner'in (1944,1945,1947) araştırmalarında ortaya konmuştur. Reissner'in plak teorisine göre Ox_1x_2 düzlemindeki bir plakta M_{11}, M_{22}, M_{12} momentlerinden ortaya çıkan, sırasıyla, $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ gerilmeleri plak kalınlığı boyunca doğrusal (lineer) olarak değişmektedir. Bundan başka M_{11}, M_{22}, M_{12} eğilme ve burulma momentleri x_1 ve x_2 'e bağımlı fonksiyonlardır. Plakın orta düzleminde $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ gerilmeleri yukarıda söylenenlerden dolayı sıfırdır. Plaktaki σ_{11}, σ_{22} ve σ_{33} gerilmelerinin plak kalınlığı boyunca değişimi, elastisite teorisinin 3-boyutlu gerilme-



denklemlerinin 0'dan x_3 'e kadar -plak kalınlığı boyunca- integrasyonundan elde edilir. Böylece uygun iki değişkene bağlı denklemleri ve sınır koşulları 3-boyutlu elastisite teorisinin varyasyonel prensiplerinden veya n.inci mertebeden momentlerinin bulunması yoluyla elde edilir. Böylece 3-boyutlu problem 2-boyutlu problem haline indirgenmiş olur. Daha sonraları Goldenveiser (1958) Reissner'in adı geçen teorisini geliştirmiş ve plaktaki $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ gerilmelerinin kalınlık boyunca doğrusal olarak değil keyfi $f(x_3)$ fonksiyonu şeklinde değiştiğini kabul etmiştir. Ayrıca anizotrop -kompozit- plak ve kabukların genel teorisinin elde edilmesinde Hildebrand, Reissner and Thomas (1949) ve Librescu (1964,1966) gibi bazı araştırmacıların birçok çalışmaları da mevcuttur.

Şimdi, ikinci gruba giren yerdeğiştirme esaslı bazı geliştirilmiş plak teorilerini ele alalım. Bu gruptaki çalışmalardan ilkinin Basset (1890) yapmış ve yerdeğiştirmeleri plak kalınlığı boyunca olan x_3 koordinatının bir kuvvet serisi şeklinde ifade etmiştir. Bu durumda x_3 'ün sıfıncı mertebesinin katsayısı plağın orta düzleminin yerdeğiştirmelerini göstermektedir. Daha yüksek mertebelerin katsayıları ise x_1 ve x_2 koordinatlarının fonksiyonları olup bulunması öngörülmektedir. Böylece Basset'in yukarıda adı geçen kuvvet serisi ifadesi, kuvvet serisinden x_3 'ün kaçınıcı mertebesine kadarki terimlerinin göz önüne alınacağına bağlı olarak, farklı mertebelerde plak teorileri teklif etmektedir. Basset'in ifadesini, örneğin u_1 yerdeğiştirmesi için,

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_2) + \sum_{n=1}^N x_3^n \psi_1^{(n)}(x_1, x_2) \quad (1.1)$$

biçiminde gösterilebilir; (1.1)'de $\psi_1^{(n)}(x_1, x_2)$ fonksiyonları $u_1(x_1, x_2, x_3)$ fonksiyonunun $x_3 = 0$ civarında x_3 'e göre Taylor serisine açılımının katsayıları olup,



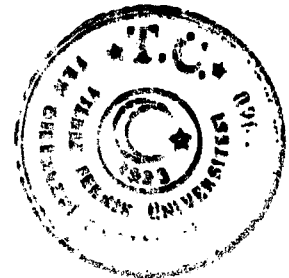
$$\psi_1^{(n)}(x_1, x_2) = \left. \frac{d^n u_1}{dx_3^n} \right|_{x_3=0} ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıda söylenenlerden kullanarak Hildebrand, Reissner and Thomas (1949)'da birinci mertebeden olan yerdeğiştirme esaslı geliştirilmiş plak teorisi teklif etmiştir. Bu teoriye göre yerdeğiştirmeler,

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= u(x_1, x_2) + x_3 \psi_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= v(x_1, x_2) + x_3 \psi_2(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (1.3)$$

biçimindedir. Yerdeğiştirmelerin bu ifadeleri kullanılarak, genel potansiyel enerjinin minimumluğu prensibinden u , v , w , ψ_1 ve ψ_2 bilinmeyen fonksiyonları için alan denklemleri ve bunlara karşı gelen sınır koşulları elde edilir. Belirtmek gerekir ki yerdeğiştirmelerin (1.3)'de verilmiş ifadelerine göre esaslanan plak teorisine literatürde Reissner-Mindlin teorisi denir. Eğer $\psi_1 = -\partial w / \partial x_1$, $\psi_2 = -\partial w / \partial x_2$ gibi kabul edilirse, Reissner-Mindlin teorisi klasik Kirchhoff-Love hipotezine dönüşmüş olur. Buradan da görüldüğü gibi Reissner-Mindlin teorisi, Kirchhoff-Love teorisinin aksine, şekildeğiştirmeden önce plak orta yüzeyine dik olan normalin şekildeğiştirmeden sonra dik olmaması durumunu da göz önüne alırken, aynı normalin doğrusallığı Kirchhoff-Love teorisinde olduğu gibi şekildeğiştirmeden sonra da değişmemektedir. Böylece Reissner-Mindlin plak teorisi geliştirilmiş ve birinci mertebeden olan en basit bir plak teorisidir. Daha sonraları yüksek mertebeden olan yerdeğiştirme esaslı plak teorileri önerilmiştir. Örneğin, Reddy (1984)'te verdiği geliştirilmiş yerdeğiştirme esaslı 3.üncü mertebeden olan plak teorisinde, yerdeğiştirmelerin x_3 koordinatına bağımlılığı aşağıdaki gibi seçilmiştir:

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_2) + x_3 \left[\psi_1 - \alpha \frac{4}{3} \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 \left(\psi_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \right]$$



$$u_2(x_1, x_2, x_3) = v(x_1, x_2) + x_3 \left[\psi_2 - \alpha \frac{4}{3} \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 \left(\psi_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \right]$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2). \quad (1.4)$$

burada u , v , w , ψ_1 ve ψ_2 genelleştirilmiş yerdeğiştirmeler olup, x_1, x_2 'nin fonksiyonlarıdır. Reissner-Mindlin teorisinde olduğu gibi burada da ψ_1 ve ψ_2 fonksiyonları sırasıyla x_1 ve x_2 eksenlerine dik olan kesitlerin dönmesini göstermektedir. Buradaki h plak kalınlığını, α (1.4) formüllerinin genelleştirilmesi amacını taşıyan bir parametredir şöyleki; $\alpha=0$ ve $\psi_1 = -\partial w / \partial x_1$, $\psi_2 = -\partial w / \partial x_2$ olması ifadelerin Kirchhoff-Love hipotezine, sadece $\alpha=0$ olması ise Reissner-Mindlin teorisine, $\alpha=1$ olması ise Reddy teorisine karşı gelmektedir.

Buraya kadar verilen teorilerden başka literatürde daha birçok geliştirilmiş plak teorileri kullanılmaktadır. Bu teoriler arasındaki en önemli farklılık x_3 koordinatının derecelerinin katsayılarının hepsinin farklı fonksiyonlardan meydana gelmesidir. Dolayısıyla aynı mertebeden bir plak teorisindeki serbestlik derecesinin (bilinmeyen fonksiyonların) sayısı artabilmektedir. Buna örnek olarak Lo, Christensen, Wu (1977a, 1977b)'de verilen plak teorisi gösterilebilir. Bu teoriye göre plaktaki yerdeğiştirmeler

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u^0(x_1, x_2) + x_3 \psi_1(x_1, x_2) + x_3^2 \xi_1(x_1, x_2) + x_3^3 \phi_1(x_1, x_2)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = v^0(x_1, x_2) + x_3 \psi_2(x_1, x_2) + x_3^2 \xi_2(x_1, x_2) + x_3^3 \phi_2(x_1, x_2)$$

$$w(x_1, x_2, x_3) = w^0(x_1, x_2) + x_3 \psi_3(x_1, x_2) + x_3^2 \xi_3(x_1, x_2) \quad (1.5)$$

biçiminde gösterilebilirler. Bu teori de (1.4) teorisi gibi üçüncü (x_3^3) mertebeden bir teori olsa da noktadaki genelleştirilmiş yerdeğiştirme sayısı 11'dir. Bu verilerle elde edilen plak denklemlerinde yüksek mertebeden olan momentler hareket denklemlerine girmektedirler. Görüldüğü gibi, (1.3) ve (1.4)'de verilen geliştirilmiş plak teorileri Lo, Christensen, Wu (1977a, 1977b) teorisinin çok özel durumlarından elde edilmektedir.



Bunlardan başka, gerilme esaslı plak teorileri kapsamında yerdeğiştirmelerin plak kalınlığı boyunca olan koordinata bağlı değişimini vererek yapılan plak teorileri de mevcuttur. Bu tür teorilere örnek olarak Kromm (1953,1955)'da teklif edilen plak teorileri gösterilebilir. Bu teoride, Reissner teorisinin Goldenveiser (1958) tarafından genelleştirilmiş biçiminin bir özel hali teklif edilmiş ve

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_2) - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{3}{2} x_3 \left(1 - \frac{4}{3} \frac{x_3^2}{h^2} \right) \psi_1$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = v(x_1, x_2) - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{3}{2} x_3 \left(1 - \frac{4}{3} \frac{x_3^2}{h^2} \right) \psi_2$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2) \quad (1.6)$$

yerdeğiştirme alanı ele alınmıştır. (1.6)'da u , v , w , ψ_1 ve ψ_2 sadece x_1, x_2 'nin fonksiyonları olan genelleştirilmiş yerdeğiştirmeler olup, ψ_1 ve ψ_2 fonksiyonları, sırasıyla, x_1 ve x_2 eksenlerine dik olan kesitlerdeki kayma şekildeğiştirmeleri (veya gerilmeleri) göstermektedir.

Belirtelim ki, tez kapsamında da Kromm tarafından geliştirilen (1.6) teorisi kullanılmaktadır. Bundan başka, yukarıdaki geliştirilmiş plak teorilerinden hem statik, hem de dinamik problemlerde yararlanılmaktadır.

Geliştirilmiş plak teorileri hakkında yukarıda verilen bilgilerle yetinerek, daha birçok başka mevcut geliştirilmiş plak teorilerinin yukarıda bahsedilenlerin řu veya bu şekilde genelleştirilmesi veya özelleştirilmesinden elde edildiğini belirtelim. Bunlardan başka belirtelim ki bu teorilerin kompozit malzemedен yapılmış plaklara uygulanması aşağıdakiler gibi yapılabilir:

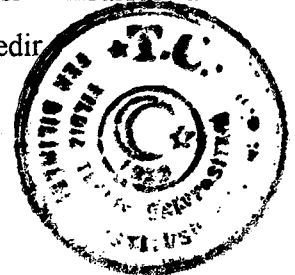


1. Eğer kompozit plak normalize edilmiş mekanik özellikli anizotrop bir malzemededen yapılmış tek katlı (single lamina) bir plak gibi gözönüne alınırsa, bu durumda, yukarıda ele alınan geliştirilmiş plak teorileri kompozit plağın tümüne uygulanır.
2. Eğer kompozit plak, çok katlı (multi-layered), farklı özellikli levhalardan yapılmışsa ve kompozit plağın dinamik ve statik davranışlarında bu katların etkisinin daha hassas bir biçimde araştırılması gerekirse, bu durumda yukarıdaki geliştirilmiş plak teorileri kompozit plağı oluşturan levhaların herbirine ayrı ayrı uygulanır.

Örneğın, çok katlı levhalardan oluşmuş kompozit malzemededen yapılmış bir plağın eğilmesinde levhalar arasındaki gerilme veya kuvvetlerin incelenmesi söz konusu ise o zaman geliştirilmiş plak teorileri 2. maddede belirtildiğı gibi uygulanır. Eğer çok katlı kompozit malzemededen yapılmış bir plağın global (bütün olarak) karakteristikleri, örneğın doğal titreşim frekansı, stabilite sınırını belirten kritik parametreleri vs.'lerin belirtilmesi gerekirse bu durumda geliştirilmiş plak teorilerinin 1. maddede verildiğı biçimde uygulanması mühendislik açısından ve teorik açıdan yüksek mertebeden yeterli olmaktadır.

Yukarıda söylenenleri gözönüne alarak ve tez araştırmasında bazı özelliklere sahip kompozit malzemededen yapılmış plakların global karakteristikleri (doğal titreşim frekansı ve stabilitede kritik parametreleri) incelendiğinden geliştirilmiş plak teorilerinin 1. maddede verildiğı biçimde, yani kompozit plağın tümüne uygulanarak kullanılmıştır.

Şimdi geliştirilmiş plak teorileri hakkında yukarıda bahsedilenlerle yetinerek plak titreşim ve stabilite problemlerindeki son gelişmeleri ele alalım. Öncelikle belirtelim ki plakların titreşimlerine ait klasik problemlerin formülasyonu, çözümü ve yorumlanması birçok kitaplarda örneğın Timoshenko, Wionowski-Krieger (1959), Timoshenko et al. (1974)'da verilmektedir. Bundan başka, kompozit anizotrop plakların stabilite ve titreşim problemlerinin incelenmesine ait birçok problemlerin geniş açıklaması Ambarsumian (1967), Lekhnitskii (1968), Gorman (1982), Leissa (1969) vs. verilmektedir.



Şimdi kompozit plakların titreşim ve stabilitesi ile ilgili olarak son gelişmelerin bazılarını ele alalım. Kompozit malzemeden yapılmış plakların titreşim ve stabilitesi üzerine şimdiye kadar yapılan araştırmalar, bizim bakış açımıza göre, aşağıdaki gruplara ayrılabilir.

1. Kompozit plakların titreşim ve stabilite problemlerinin incelenmesinde geliştirilmiş plak teorilerinin, araştırmaların sayısal sonuçlarına etkisinin incelenmesi. Bu sınıfa dahil olan araştırmalara Rohwer (1992), Anderson and Kennedy (1993), Noor and Peters (1992), Noor and Burton (1992), Reddy and Phan (1985) ve bu yayınlarda gösterilen birçok araştırmalar sayılabilir.

2. Kompozit malzeme özelliklerinin plak titreşimine klasik durumlarda rastlanmayan etkilerinin incelenmesi. Anders et al.(1992), Mahesh et al. (1992), Yu et al. (1994), Abrate (1995b), Koo and Lee (1993), Qatu and Leissa (1993) ve bu yayınlarda gösterilen araştırmalar bu guruba dahil olmaktadır.

3. Klasik plak titreşim problemlerini kompozit plaklar için genelleştirilmiş hallerinin araştırılmasına yönelik incelemeler. Liew and Lam (1992), Bhirmaraddi (1992), Abrate (1995a), vs. ve bu yayınlarda gösterilen araştırmalar bu guruba dahil edilebilir.

4. Tez araştırması açısından daha önemli olan ve klasik durumlarda rastlanmayan araştırmalar. Bu araştırmalarda kompozit malzeme yapısındaki bazı zorunlu kusurların plak titreşimlerine etkisi incelenmektedir. Bugüne kadar, bu konuda yapılan araştırmalarda çok katlı (tabakalı) kompozitten oluşan plakların doğal titreşim ve stabilitesine, malzeme yapısında oluşan tabakaların ayrılmasının (delamination) doğal titreşim frekansları ve stabilite parametrelerine etkisinin incelenmesine daha çok önem verilmiştir. Bu guruba ait son araştırmalara örnek olarak Hu and Hwu (1995), Chen et al.(1995) yayınları gösterilebilir.

Bölüm I.1’de söylendiği gibi, kompozit malzeme yapısında olan diğer önemli kusurlardan birisi de, lif ve levhaların yerel veya periodik eğriselliklere sahip olmasıdır. Yukarıdaki kaynak araştırmalarından görüldüğü üzere bu konuda geliştirilmiş plak teorileri



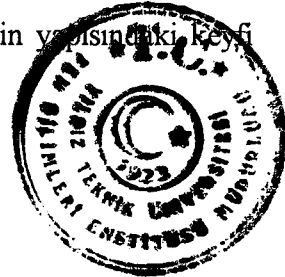
çerçevesinde hemen hemen hiçbir temel araştırma yapılmamıştır. Bu anlamda tezde yapılan çalışmalar, bu alandaki ilk girişimleri oluşturmaktadır.

I.3. KONUNUN GEREKLİLİĞİ VE GÜNCELİĞİ

Bu çalışmanın konusu eğrisel yapıya sahip kompozit malzemedan hazırlanmış plakların doğal titreşim ve burkulmasının Akbarov and Guz' süreklilik teorisi çerçevesinde bazı önemli problemlerinin araştırılması olup, hem teorik hem de uygulama açısından gereklidir. İncelemeler üçüncü mertebeden geliştirilmiş plak teorisi çerçevesinde yapıldığından ve bu geliştirilmiş plak teorilerinin plak malzemesinin yapısında eğrisellik olması halinde de uygulanabilmesi açısından da gereklidir. Ele alınan doğal titreşim ve burkulma problemleri yukarıda söylenenler çerçevesinde değişken katsayılı kısmi türevli diferansiyel denklemler takımının özdeğer problemlerine getirilmesi ve bu problemlerin Galerkin Yöntemi uygulanarak incelenmesi açısından da önemlidir.

Tez konusunun uygulama açısından gerekliliği ise daha birçok nedenlere bağlıdır. Bu nedenlerden birkaçına kısaca bakalım. Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeler mekaniğine ait statik problemlerin araştırılmasından elde edilen sonuçlar göstermektedir ki malzeme yapısındaki eğrisellikler bu malzemedan yapılmış yapı elemanlarındaki gerilme dağılımlarına ciddi bir biçimde etki yapmaktadırlar. Bu araştırmaların dinamik problemlere genelleştirilmesi ise bu malzemedan yapılmış yapı elemanlarının doğal titreşim frekanslarının belirtilmesini öncelikle gerektirir. Bu söylenenler tez konusunu uygulama açısından gerekli kılan nedenlerden biridir. Bir başka neden de eğrisel yapıya sahip kompozit malzemedan hazırlanmış plakların burkulmasına malzeme yapısındaki eğriselliklerin etkisinin araştırılmasına olanak sağlayabilecek matematiksel modellerin bulunması ve uygun problemlerin incelenmesidir.

Tezdeki araştırmalar Akbarov and Guz' süreklilik teorisi çerçevesinde yapıldığından ve bu teori malzeme yapısındaki eğrisellikleri gösteren bir fonksiyon içerdiğinden buradaki araştırmalar plağın doğal titreşim ve burkulmasına plak malzemesinin yapısındaki eğriselliklerin etkisinin araştırılmasına olanak sağlayabilecek matematiksel modellerin bulunması ve uygun problemlerin incelenmesidir.



şekilli yerel eğriselliklerin etkisinin incelenmesine de olanak vermektedir. Plak malzemesi yapısında adı geçen yerel eğrisellikleri malzeme yapısında olabilecek bir hasar gibi göz önüne alırsak, bu durumda tezde yapılan araştırmaların malzeme yapısındaki hasarların plak yapı elemanlarının doğal titreşim ve burkulmasına etkisinin anlaşılması açısından da önemli olduğu söylenebilir.

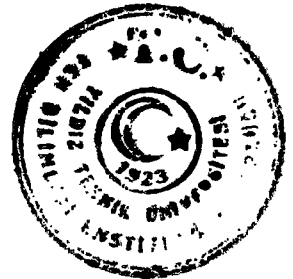
Tez çalışmasını gerekli kılan daha başka bir neden ise burada yapılan çalışmaların bu alandaki ilk teşebbüsleri oluşturması ve araştırmalardan herbirinin tarafımızdan ilk defa yapılmasıdır.

Günümüzde kompozit malzemenin yaygın şekilde kullanılması ve tez çalışmasının yukarıda söylenen gereklilikleri bu konunun güncelliğini ortaya koymaktadır.

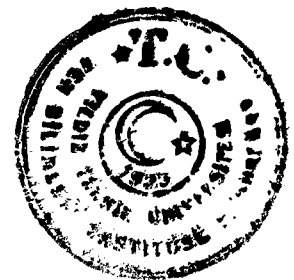
I.4. YAPILAN ARAŞTIRMANIN AMAÇLARI

Bu çalışmada yapılan araştırmaların amaçları aşağıdaki gibi özetlenebilir:

1. Akbarov ve Guz' süreklilik teorisi çerçevesinde üçüncü mertebeden geliştirilmiş plak teorileri denklemleri kullanılarak eğrisel yapıya sahip kompozit malzemedeki yapılmış plakların doğal titreşim ve burkulma problemlerinin formülasyonu, yani
 - a. Elastisite teorisinin kesin hareket denklemleri kullanılarak plak titreşim denklemlerinin ve uygun sınır koşullarının elde edilmesi,
 - b. Elastisite teorisinin 3-boyutlu lineerize edilmiş stabilite denklemleri kullanılarak plakların stabilite denklemlerinin ve uygun sınır koşullarının çıkarılması.
2. Formülasyonu yapılmış problemlerin incelenmesinde Galerkin Yönteminin uygulanması ve bu yöntemin incelenen problemlerde karşılaşılan bazı zorluklarının ortadan kaldırılması.



3. Sayısal sonuçların elde edilmesi için gerekli algoritmaların yapılması ve programlanması.
4. Plak malzeme yapısında olan eğriselliklerin doğal titreşim frekanslarına ve formuna etkisinin incelenmesi ve yorumlanması.
5. Pertürbasyon yönteminin ele alınan titreşim problemlerine uygulanabilirliğinin incelenmesi.
6. Plak malzeme yapısındaki eğriselliklerin plakların stabilitesindeki -burkulmasındaki- kritik dış basınç yüklerine etkisinin araştırılması.



BÖLÜM II.

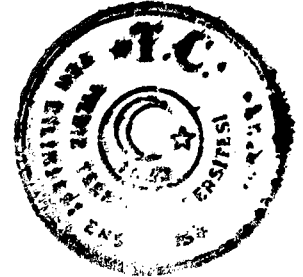
EĞRİSEL YAPIYA SAHİP KOMPOZİT MALZEMELER MEKANİĞİNİN SÜREKLİLİK TEORİSİ

II. 1. SÜREKLİLİK TEORİLERİ HAKKINDA BAZI ÖN BİLGİLER

Kompozit malzemelerin çok çeşitliliğinden dolayı, bu malzemelerin hepsine ait bir süreklilik teorisinin yani; parçalı-homojen malzemeye, anizotrop homojen malzeme gibi bakılmasına imkan sağlayan bir teori yapılması imkansızdır. Bundan dolayı kompozit malzemelerin statik yüklemdeki lineer elastik davranışını göz önüne alabilecek süreklilik teorilerine bakalım. Kompozit malzemenin makroskopik durumu bu malzemenin dağılmasına kadar lineer elastiktir, bundan başka kompozit malzemenin her bileşeninin davranışının da lineer elastik olduğunu kabul edelim.

Kompozit malzemeler mekaniği problemlerinin incelenmesi, bu malzemelerin *mikro-mekaniği* ve *makro-mekaniği* olmak üzere iki açıdan yapılır. Kompozit malzemelerin mikro-mekaniğinde, takviye ve matristen oluşmuş gerçek homojen olmayan malzemeye bakılır ve bu malzemenin mekanik davranışına, onun ince detaylarının etkisinin anlaşılmasına çaba gösterilir. Belirtelim ki, mikro-mekanik kavramı genellikle atom seviyesinde araştırma yapılmasını veya yüksek mertebeli gerilme tensörlerinin kullanılmasını göz önüne almaz.

Kompozit malzemeler mekaniğinin en önemli problemlerinden biri, bu malzemelerin *normalize edilmiş mekanik özellikleri* 'nin yani; belirli sınır koşulları çerçevesinde gerilme tensörünün ortalastırılmış bileşenleri ile şekildeğiştirme tensörünün ortalastırılmış bileşenlerini birbirine bağlayan mekanik sabitlerinin bulunmasıdır. Söylenen sınır koşulları iki tip olabilir:



Sınırdaki yerdeğişmeler verilebilir;

$$u_i(S) = \varepsilon_{ij}^0 x_j \quad (2.1)$$

veya sınırda gerilmeler verilebilir:

$$T_i(S) = \sigma_{ij}^0 n_j \quad (2.2)$$

(2.1) ve (2.2)'de x_j , S yüzey noktalarının koordinatları; n_j , göz önüne alınan malzemeyi sınırlayan bu yüzeyin normal birim vektörünün bileşenleri; ε_{ij}^0 ve σ_{ij}^0 , sabit şekildeğiştirme ve gerilme bileşenleridir. Homojen cisimde, (2.1) ve (2.2) sınır koşullarının verildiği durumlarda gerilme ve şekildeğiştirme tansörleri sabittirler. Yani; eğer, (2.1) sınır koşulu verilirse, o zaman homojen cisimde şekildeğiştirmeler ε_{ij}^0 , eğer (2.2) sınır koşulları verilirse, gerilmeler σ_{ij}^0 'a eşittir. Burada, ele alınan cismin kapsadığı alanın basit bağımlı olduğu kabul edilmektedir. Eğer cisim homojen değilse ve (2.1) koşulları verilirse; o zaman bu cisimde hacme göre ortalatılmış şekildeğiştirmeler ε_{ij}^0 'na, eğer (2.2) sınır koşulları verilirse, bu cisimdeki gerilmelerin hacme göre ortalatılmış değeri σ_{ij}^0 'a eşittir. Bunlar aşağıdaki özdeşliklerden kolayca görülür:

$$\int_V \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_S (u_i n_j + u_j n_i) dS \quad (2.3)$$

$$\int_V \sigma_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_S (T_i x_j + T_j x_i) dS \quad (2.4)$$

(2.3) ve (2.4)'de V, S yüzeyi ile sınırlanan hacmi gösterir. (2.3) özdeşliği, fazlar arasında homojen olmayan malzemenin bileşenlerini ayıran yüzeylerde yerdeğişmelerin sürekli olduğu durumda; (2.4) özdeşliği, gerilmelerin fazlar arasında sürekli olduğu durumlarda



doğrudurlar. (2.3) ve (2.4) özdeşlikleri Gauss integral dönüşüm formülünün kullanılması ile kolayca ispatlanır:

(2.1) ve (2.3) denklemlerinden,

$$\varepsilon_{ij}^0 = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV \quad (2.5)$$

ayrıca (2.3) ve (2.4) kullanılarak,

$$\sigma_{ij}^0 = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \quad (2.6)$$

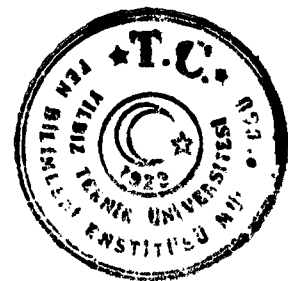
elde edilir. (2.5)'in elde edilmesine bakalım:

(2.1) koşulu ve Gauss integral dönüşüm formülü kullanılarak, (2.3) özdeşliğinden

$$\begin{aligned} \int_V \varepsilon_{ij} dV &= \frac{1}{2} \int_S (u_i n_j + u_j n_i) dS = \frac{1}{2} \int_S (\varepsilon_{ik}^0 x_k n_j + \varepsilon_{jk}^0 x_k n_i) dS \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ik}^0 \int_S x_k n_j dS + \frac{1}{2} \varepsilon_{jk}^0 \int_S x_k n_i dS = \varepsilon_{ik}^0 \int_V \frac{\partial x_k}{\partial x_j} dV + \frac{1}{2} \varepsilon_{jk}^0 \int_V \frac{\partial x_k}{\partial x_i} dV \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ik}^0 V \delta_j^k + \frac{1}{2} \varepsilon_{jk}^0 V \delta_i^k = \varepsilon_{ij}^0 V \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_{ij}^0 = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV$$

yazabiliriz. Aynı şekilde (2.3) ve (2.4) kullanılarak (2.6) formülü bulunur. Böylece (2.1) veya (2.2) sınır koşulları verilirse kompozit malzemenin normalize edilmiş μ_{ijkl} elastisite sabitleri



$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \mu_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl} \rangle \quad (2.8)$$

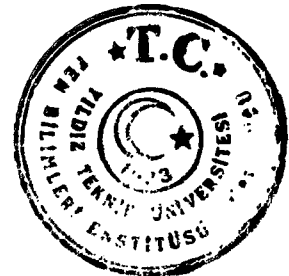
biçiminde elde edilir. Burada,

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \quad ; \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV \quad (2.9)$$

işaretlemeleri kullanılmıştır. Genellikle (2.1) koşulları çerçevesinde elde edilen μ_{ijkl} 'lerin (2.2) koşulları çerçevesinde elde edilenlerden farklı olduğunu vurgulayalım. Eğer bu farklılık yok ise, bulunan μ_{ijkl} 'lere ele alınan kompozit malzemenin *kesin*, eğer bu farklılık var ise, o zaman bakılan kompozit malzemenin *yaklaşık* normalize edilmiş mekanik özellikleri denir.

Birçok kaynakta örneğin; Cristensen (1979), Pagano (1974), Sendekyj (1974) görüldüğü gibi, kompozit malzemenin normalize edilmiş mekanik özellikleri bileşenlerinin formuna, hacim oranlarına ve elastisite özelliklerine bağlıdır.

Kompozit malzemelerin mikro-mekaniğinde kullanılan en önemli kavramlardan biri belirleyici eleman kavramıdır. Belirleyici eleman ele alınan kompozit malzemenin öyle alanını kapsar ki, bu alanda gerilme ve şekildeğiştirme tansörünün bileşenleri, onun - belirleyici elemanın- hacmine göre ortalatılmış değerleri, kompozit malzemenin bütün hacim üzerine ortalatılmış karşı gelen değerlerine eşit olur. Yani, eğer (2.1) veya (2.2) sınır koşulları belirleyici eleman sınırında verilirse, o zaman elde edilen $\langle \sigma_{ij} \rangle$ ve $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ 'ler aynı sınır koşulları çerçevesinde bütün kompozit malzeme için elde edilen $\langle \sigma_{ij} \rangle$ ve $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ 'lere eşittirler. Dolayısıyla, belirleyici eleman için elde edilen μ_{ijkl} 'ler bütün kompozit malzeme için elde edilen μ_{ijkl} 'lerin aynısı olurlar.

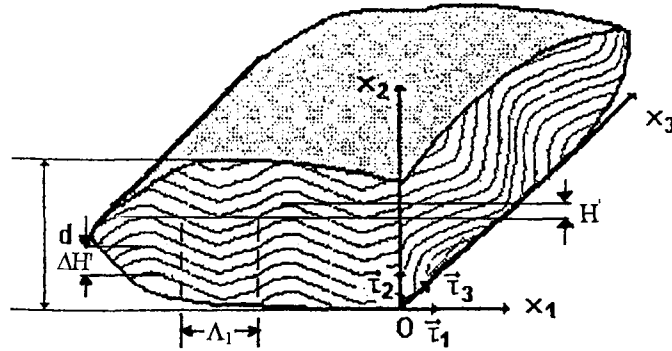


Yukarıda söylenenlerden görüldüğü gibi, (2.8)'deki μ_{ijkl} 'lerin bulunması için (2.1) veya (2.2) sınır koşulları çerçevesinde, uygun sınırdeğer problemlerinin çözülmesi yani, belirleyici elemanda σ_{ij} ve ε_{ij} 'lerin dağılımlarının belirlenmesi gerekir. Bu çözümler ise belirli modeller çerçevesinde yapılır. Bu modeller hakkında bazı bilgiler Yahnioğlu (1996.a)'da Ek 1. ve Ek 2.'de verilmektedir.

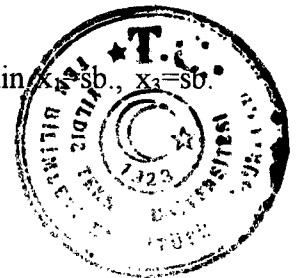
Böylece kompozit malzemelerin normalize edilmiş mekanik özellikleri belirlendikten sonra, onların makro-mekaniği, yani; kompozit malzemenin ve ondan hazırlanan yapı elemanlarının mekaniği, (2.8) elastisite bağıntısı çerçevesinde incelenir. Belirtelim ki, eğer, kompozit malzemede gerilme ve şekildeğiştirme dağılımının araştırılması, boyutu belirleyici eleman boyutundan küçük alanlarda gerekirse, bu durumda bu malzemelerin mikro-mekaniği, gerilme ve şekildeğiştirme dağılımının araştırılması, boyutu belirleyici eleman boyutundan büyük alanlarda yeterli ise, o zaman bu malzemelerin makro-mekaniği kullanılmalıdır.

II.2. GEREKLİ NOTASYONLAR VE KABULLER

Şekil 2.1'de $ox_1x_2x_3$ kartezyen koordinat takımında $x_1 = sb.$ ve $x_3 = sb.$ kesitlerinde yapısı gösterilen kompozit malzemeden hazırlanmış cisme bakalım. Kabul edelim ki, bakılan cisimde güçlendirici lif veya levhalar x_1ox_3 düzlemi içine yerleştirilmiştir.



Şekil 2.1. Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden hazırlanmış cismin $x_1 = sb.$, $x_3 = sb.$ kesitleri



Aşağıdaki notasyonları kabul edelim:

h' - takviyenin en küçük boyutu; H' - malzeme yapısındaki eğilmenin genliğinin boyutu; Λ_1 (Λ_3)-eğilme şeklinin ox_1 (ox_3) eksenine yönündeki yarım dalgasının uzunluğu; d - ele alınan malzemenin kapsadığı alanın en küçük boyutudur. Belirtelim ki, Λ_1 ve Λ_3 parametreleri, bakılan malzeme yapısında lokal eğilme olduğu durumlarda başka anlamlar taşıyacaktır.

Takviye malzemesindeki güçlendirici levhaların ox_2 eksenine yönünde belirli bir periyot ile tekrarlandığını kabul edelim. Bundan başka, eğilmenin karakteri aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar,

$$\Lambda_1 \ll d; \quad \Lambda_3 \ll d; \quad H' < \Lambda_1; \quad H' < \Lambda_3 \quad (2.10)$$

(2.10) eşitsizliklerinin anlamlarına ve onlardan doğan yorumlara bakalım. (2.10)'un birinci ve ikinci eşitsizliği, malzeme yapısındaki eğriselliklerin aynı malzemedeki hazırlanmış yapı elemanının en küçük boyutundan çok çok küçük olmasını gerektirir. Bu koşulları sağlayan eğriselliklere *küçük ölçekli eğrisellikler* denildiğini hatırlatalım. (2.10)'un üçüncü ve dördüncü eşitsizlikleri, eğilme genliğinin onun diğer boyutlarından (periyodik şekilde olan eğriselliklerde, eğilme şeklinin yarım periyodunun uzunluğundan) küçük olmasını gerektirir. Akbarov and Guz' (1991)'un yayınında (2.10)'daki üçüncü ve dördüncü eşitsizliklerin

$$H' \ll \Lambda_1; \quad H' \ll \Lambda_3 \quad (2.11)$$

biçimde kabul edildiğini kaydedelim. (2.11) eşitsizlikleri söz konusu teori ile problemlerin çözülmesinde Küçük Parametreler Yöntemi'nin kullanılabilmesini sağlamıştır. Bu tez kapsamında Küçük Parametreler Yöntemi kullanılmadığından, (2.11) eşitsizlikleri (2.10)'daki üçüncü ve dördüncü eşitsizlikleriyle yer değiştirmiştir.



Bunlardan başka, tezde sıkça indis notasyonları, Kronecker deltası kullanılmaktadır. İndis notasyonu ile yazılmış bir ifadede, iki indis tekrarlanıyorsa ((2.1), (2.2), (2.8)'deki gibi), bu ifadede tekrarlanan indise alabileceği bütün değerleri vererek elde edilen bütün terimlerin toplamı alınacaktır (indislerin alabileceği değerler ifadelerde gösterilmiştir). Yukarıda bahsedilen Einstein Toplama Uyuşumu altı çizilmiş indisler üzerinde uygulanmayacaktır. Kronecker deltası ise, $\delta_{ij} = 0$ ($i \neq j$), $\delta_{ij} = 1$ ($i = j$) veya $\delta_i^j = 0$ ($i \neq j$), $\delta_i^j = 1$ ($i = j$) şeklindedir.

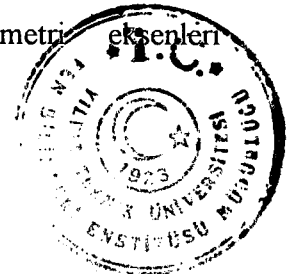
II.3. ELASTİSİTE BAĞINTILARI

Bu kısımda yukarıda verilen kabuller dahilinde, eğrisel yapıya sahip kompozit malzemelerin elastisite bağıntılarının elde edilmesine bakalım. Bu amaçla ele alınan malzemeden $\Delta H'$ kalınlığında, yeterince ince ve eğrisel yapıda olan bir levha alalım. Alınan bu levhanın orta yüzeyinin formunun, ele alınan malzeme yapısındaki eğrisellik formu ile aynı olduğunu ve

$$h' \ll \Delta H'; \quad \Delta H' \ll \Lambda_1; \quad \Delta H' \ll \Lambda_3 \quad (2.12)$$

eşitsizliklerinin sağlandığını kabul edelim. Söz konusu levhanın orta yüzeyinin her bir noktasına $o'x'_1x'_2x'_3$ kartezyen koordinat takımını bağlayalım (Şekil 2.1). Bu durumda $o'x'_2$ eksenini, aynı noktada orta yüzeye normal olan birim \vec{t}'_2 vektörü yönünde, $o'x'_1$ ve $o'x'_3$ eksenleri ise aynı noktada orta yüzeye teğet olan birim \vec{t}'_1 ve \vec{t}'_3 vektörleri yönünde yönlendirilmişlerdir. Belirtelim ki, malzeme yapısında eğilme olmadığı durumda \vec{t}'_1 , \vec{t}'_2 ve \vec{t}'_3 vektörleri Şekil 2.1'de gösterilen \vec{t}_1 , \vec{t}_2 ve \vec{t}_3 vektörleriyle aynı yönde olurlar. \vec{t}'_1 , \vec{t}'_2 ve \vec{t}'_3 vektörlerinin belirlenmesine ileride çalışılacaktır.

(2.12)'deki ilk eşitsizliğe göre, ele alınan eğrisel yapıdaki levhanın, $\approx (\Delta H')^3$ hacmindeki kısmına $o'x'_1x'_2x'_3$ kartezyen koordinat takımında, asal simetri eksenleri



$o'x'_1$, $o'x'_2$ ve $o'x'_3$ olan homojen (normalize edilmiş mekanik özellikli) ortotrop malzeme gibi bakabiliriz. Söylenen nedenden dolayı $\Delta H'$ boyutunu, ele alınan kompozit malzemenin yapısında eğilmeler olmadığı durumda, belirleyici elemanın boyutu olarak almak zorundayız.

Böylece yukarıda seçilmiş eğrisel yapıya sahip levha malzemesine, simetri eksenleri ($o'x'_1$, $o'x'_2$ ve $o'x'_3$) sürekli olarak değişen, eğrisel anizotrop malzeme gibi bakılabilir. Seçilen eğrisel levhadaki herhangi bir noktada, $o'x'_1$, $o'x'_2$ ve $o'x'_3$ koordinat takımına göre, elastisite bağıntıları,

$$\sigma'_{ij} = \mu_{ij\alpha\beta}^{(0)} \varepsilon'_{\alpha\beta} \quad (2.13)$$

gibi yazılır, burada

$$\begin{aligned} \mu_{ij\alpha\beta}^{(0)} &= \delta_i^j \delta_\alpha^\beta A_{i\beta}^0 + (1 - \delta_i^j) (\delta_i^\alpha \delta_j^\beta + \delta_i^\beta \delta_j^\alpha) G_{ij}^0 \\ A_{44}^0 &= G_{13}^0, \quad A_{55}^0 = G_{23}^0, \quad A_{66}^0 = G_{12}^0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

şeklinde tanımlanır. (2.14)'deki A_{ij}^0 ve G_{ij}^0 'ler ortotrop malzemelerin elastisite teorisinde kullanılan elastisite sabitleridir. Yukarıda söylenenlerden dolayı bu sabitlere ele alınan kompozit malzemenin yapısında eğilmeler olmadığı durumda, aynı malzemenin normalize edilmiş mekanik sabitleri gibi bakabiliriz. Bazı kompozitler için A_{ij}^0 ve G_{ij}^0 'ların bulunması Yahnioğlu (1996a)'da verilmiştir. Söylenenlerden dolayı (2.13)'deki σ'_{ij} ve ε'_{ij} 'ler, $\approx (\Delta H')^3$ belirleyici eleman hacminde ortalastırılmış gerilme ve şekildeğiştirme tensörünün $o'x'_1x'_2x'_3$ koordinat takımındaki bileşenleri olurlar.

Seçilen eğrisel yapıdaki levhanın orta yüzeyinin $ox_1x_2x_3$ koordinat takımındaki denklemi (Şekil 2.1)



$$x_2 = F(x_1, x_3) = \varepsilon f(x_1, x_3) \quad (2.15)$$

biçiminde olsun. (2.10)'daki üçüncü ve dördüncü eşitsizliklerinden yola çıkarak (2.15)'de boyutsuz küçük $\varepsilon \in [0,1)$ parametresi dahil edilmiştir. (2.15)'deki $f(x_1, x_3)$ fonksiyonunun ve bu fonksiyonun birinci mertebeden kısmi türevlerinin sürekli fonksiyonlar olduğunu kabul edelim. Akbarov and Guz'un (1991) çalışmasında $F(x_1, x_3)$ fonksiyonu üzerine, söylenen kısıtlamalardan başka göz önüne alınan teoremin problemlerinin çözülmesinde Küçük Parametreler Yöntemi'nin kullanılmasından dolayı bu fonksiyonun,

$$\left| \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| < 1; \quad \left| \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_3} \right| < 1 \quad (2.16)$$

koşullarını sağlaması da ilave edilmiştir.

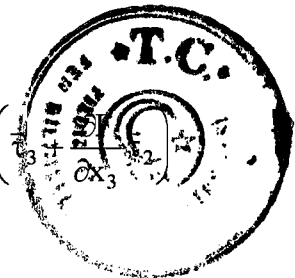
Bu tez araştırmasında Küçük Parametreler Yöntemi kullanılmadığından, $F(x_1, x_3)$ fonksiyonu üzerine konulan (2.16) kısıtlamaları göz önüne alınmamıştır.

Şimdi ise bakılan kompozit malzemenin $ox_1x_2x_3$ koordinat takımındaki elastisite bağıntılarını elde edelim. Bu amaçla $o'x'_i$ ve ox_j eksenleri arasındaki açının kosinüslerini belirleyelim. (2.15) denklemini aşağıdaki vektör formunda yazalım.

$$\vec{r} = x_1 \vec{\tau}_1 + F(x_1, x_3) \vec{\tau}_2 + x_3 \vec{\tau}_3 \quad (2.17)$$

(2.17)'den bilinen işlemler yolu ile aşağıdaki ifadeleri buluruz.

$$\vec{\tau}'_1 = v_1 \left(\vec{\tau}_1 + \frac{\partial F}{\partial x_1} \vec{\tau}_2 \right); \quad \vec{\tau}'_2 = -v_1 v_3 \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \vec{\tau}_1 - \vec{\tau}_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} \vec{\tau}_3 \right); \quad \vec{\tau}'_3 = v_3 \left(\vec{\tau}_3 \right)$$



$$v_1 = \left(1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 \right)^{-1/2} ; \quad v_3 = \left(1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad (2.18)$$

$o'x'_i$ ve ox_j eksenlerinin arasındaki açılardan kosinüslerini $l_{ij} = \vec{\tau}'_i \cdot \vec{\tau}_j$ ($i,j=1,2,3$) formülünün yardımıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} l_{11} &= v_1; & l_{12} &= v_1 \frac{\partial F}{\partial x_1}; & l_{13} &= 0; & l_{21} &= -v_1 v_3 \frac{\partial F}{\partial x_1}; \\ l_{22} &= v_1 v_3; & l_{23} &= -v_1 v_3 \frac{\partial F}{\partial x_3}; & l_{31} &= 0; & l_{32} &= v_3 \frac{\partial F}{\partial x_3}; & l_{33} &= v_3 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Koordinat eksenleri döndürüldüğünde (Lekhnitskii, 1963) elastisite sabitlerini ve diğer birçok kaynaklarda gösterilen dönüşüm formüllerini kullanılarak,

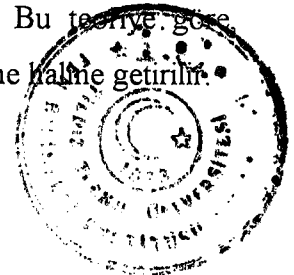
$$\mu_{ij\alpha\beta}(x_1, x_3) = \mu_{nm\alpha\beta}^{(0)} l_{in} l_{jm} l_{\alpha s} l_{\beta p} \quad (i, j, n, m, s, p, \alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (2.20)$$

biçiminde yazılabilir. Böylece, incelenen eğrisel yapıya sahip kompozit malzemelerin $ox_1x_2x_3$ koordinat takımındaki elastisite bağıntıları

$$\sigma_{ij} = \mu_{ij\alpha\beta}(x_1, x_3) \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (2.21)$$

şeklinde yazılabilir. (2.21)'de σ_{ij} ve $\varepsilon_{\alpha\beta}$ 'lar, boyutları $\approx (\Delta H')$ olan belirleyici elemandaki ortalatılmış gerilme ve şekildeğiştirme tansörünün $ox_1x_2x_3$ eksen takımındaki bileşenleridir.

(2.21) bağıntıları, yapı parametreleri bu bölümde söylenen kısıtlamaları sağlayan, eğrisel yapıya sahip kompozit malzemelerin *süreklilik teorisi* diye adlanır. Bu teoriye göre, parçalı-homojen malzeme, sürekli-homojen olmayan anizotrop malzeme haline getirilir.



Bu bölümde yapılan işlemlerden görüldüğü gibi, incelenen süreklilik teorisinin (2.21) bağıntılarının ele alınmasında sürekli ortamlar mekaniğinin geometrik ilişkileri (yani, şekildeğiştirme tansörünün bileşenleri ile yerdeğiştirme vektörü bileşenleri arasındaki bağıntıların lineer olup olmaması) üzerinde hiçbir kısıtlama kullanılmamaktadır. Bu nedenle, ele alınan süreklilik teorisi hem geometrik lineer, hem de geometrik lineer olmayan problemler için geçerli sayılabilir.

Bilindiği gibi, adı geçen bağıntılar lineer problemlerde,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.22)$$

geometrik lineer olmayan problemler de ise,

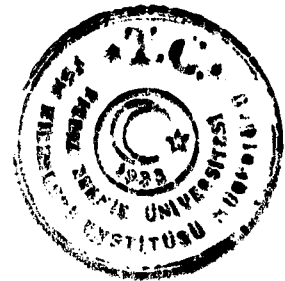
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} \right), \quad i, j, \alpha = 1, 2, 3. \quad (2.23)$$

şeklinde dirler.

Bu çalışmada, kompozit malzeme yapısındaki eğilmelerin ancak bu yönde (ox_1 eksen yönünde) olduğu kabul edilir. Bu nedenle de araştırmalarımızda, (2.21)'deki $\mu_{ij\alpha\beta}$ fonksiyonları ancak x_1 koordinatına bağlıdır. $\mu_{ij\alpha\beta}^{(0)}$ 'lar, (2.14)'deki gibi verildiğinde, (2.21)'deki $\mu_{ij\alpha\beta}(x_1)$ fonksiyonlarının sıfırdan farklı olanlarının açık ifadelerini yazalım:

$$\mu_{1111} = A_{11}^0 \Phi_1^4(x_1) + 2(A_{12}^0 + 2G_{12}^0) \Phi_1^2(x_1) \Phi_2^2(x_1) + A_{22}^0 \Phi_2^4(x_1);$$

$$\mu_{2222} = A_{11}^0 \Phi_2^4(x_1) + 2(A_{12}^0 + 2G_{12}^0) \Phi_1^2(x_1) \Phi_2^2(x_1) + A_{22}^0 \Phi_1^4(x_1);$$



$$\mu_{3333} = A_{33}^0; \quad \mu_{1313} = A_{44}^0 \Phi_1^2(x_1) + A_{55}^0 \Phi_2^2(x_1); \quad \mu_{2323} = A_{44}^0 \Phi_2^2(x_1) + A_{55}^0 \Phi_1^2(x_1);$$

$$\mu_{1212} = (A_{11}^0 + A_{22}^0 - 2A_{12}^0 - 2A_{66}^0) \Phi_1^2(x_1) \Phi_2^2(x_1) + A_{66}^0 (\Phi_1^4(x_1) + \Phi_2^4(x_1));$$

$$\mu_{1122} = (A_{11}^0 + A_{22}^0 - 4A_{66}^0) \Phi_1^2(x_1) \Phi_2^2(x_1) + A_{12}^0 (\Phi_1^4(x_1) + \Phi_2^4(x_1));$$

$$\mu_{1133} = A_{13}^0 \Phi_1^2(x_1) + A_{23}^0 \Phi_2^2(x_1);$$

$$\mu_{1112} = (A_{12}^0 - A_{11}^0 + 2A_{66}^0) \Phi_1^3(x_1) \Phi_2(x_1) + (A_{22}^0 - A_{12}^0 - 2A_{66}^0) \Phi_1(x_1) \Phi_2^3(x_1);$$

$$\mu_{2233} = A_{23}^0 \Phi_1^2(x_1) + A_{13}^0 \Phi_2^2(x_1);$$

$$\mu_{2212} = (A_{12}^0 - A_{11}^0 + 2A_{66}^0) \Phi_1(x_1) \Phi_2^3(x_1) + (A_{22}^0 - A_{12}^0 - 2A_{66}^0) \Phi_1^3(x_1) \Phi_2(x_1);$$

$$\mu_{3312} = (A_{23}^0 - A_{13}^0) \Phi_1(x_1) \Phi_2(x_1); \quad \mu_{1323} = (A_{44}^0 - A_{55}^0) \Phi_1(x_1) \Phi_2(x_1). \quad (2.24)$$

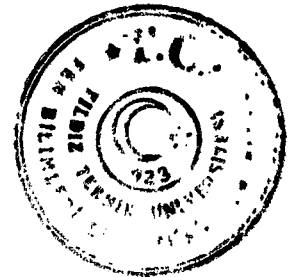
Burada,

$$\Phi_1(x_1) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2}}, \quad \Phi_2(x_1) = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_1} \Phi_1(x_1). \quad (2.25)$$

Burada $\varepsilon f(x_1) = F(x_1)$ biçimindedir.

Yapılacak işlemleri kolaylaştırmak amacıyla aşağıdaki notasyonları kullanalım:

$$A_{11}(x_1) = \mu_{1111}(x_1); \quad A_{22}(x_1) = \mu_{2222}(x_1); \quad A_{33}(x_1) = \mu_{3333}(x_1);$$



$$A_{44}(x_1) = \mu_{1313}(x_1); \quad A_{55}(x_1) = \mu_{2323}(x_1); \quad A_{66}(x_1) = \mu_{1212}(x_1);$$

$$A_{12}(x_1) = \mu_{1122}(x_1); \quad A_{13}(x_1) = \mu_{1133}(x_1); \quad A_{16}(x_1) = \mu_{1112}(x_1);$$

$$A_{23}(x_1) = \mu_{2233}(x_1); \quad A_{26}(x_1) = \mu_{2212}(x_1); \quad A_{36}(x_1) = \mu_{3312}(x_1);$$

$$A_{45}(x_1) = \mu_{1323}(x_1). \quad (2.26)$$

II. 4. EĞRİSEL YAPIYA SAHİP KOMPOZİT MALZEMELER MEKANİĞİNİN BAZI ÖZDEĞER PROBLEMLERİNİN MATEMATİKSEL FORMÜLASYONU VE ÇÖZÜLMESİNDE KULLANILAN YAKLAŞIK-ANALİTİK YÖNTEMLER

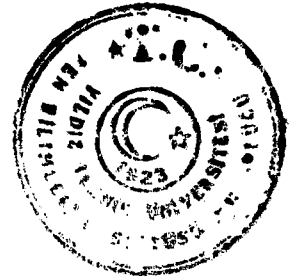
Bu çalışmada incelenen problemlerde, eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeler mekaniğinin, lineer doğal titreşim ve burkulma problemlerine bakıldığından, bu problemlerin matematiksel formülasyonuna (genel olarak) bakalım. Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden hazırlanmış yapı elemanının $ox_1x_2x_3$ koordinat takımında verilen V hacmini kapsadığını düşünelim. S , bu hacmin tüm sınırını; S_1 , dış kuvvetlerin verildiği kısmı; S_2 yerdeğiştirmelerin verildiği sınırlar olsun. Ayrıca $S_1 \cup S_2 = S$ olsun. Bu durumda, V hacminde hareket denklemleri;

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad x_1, x_2, x_3 \in V, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.27)$$

elastisite bağıntıları;

$$\sigma_{ij} = \mu_{ij\alpha\beta}(x_1) \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \quad (2.28)$$

şekildeğiştirme ile yerdeğiştirme arasındaki ilişki;



$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial u_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right) \quad (2.29)$$

biçiminde olur. S yüzeyinin S_1 kısmında gerilmeler ile verilen sınır koşullarını,

$$\sigma_{ij} n_j = 0 \quad , \quad x_1, x_2, x_3 \in S_1 \quad (2.30)$$

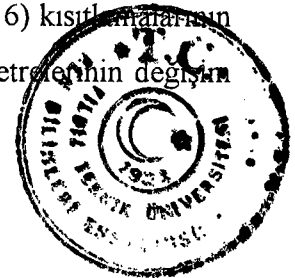
şeklinde, S_2 kısmında yerdeğiştirmeler ile verilen sınır koşullarını ise,

$$u_i = 0 \quad , \quad x_1, x_2, x_3 \in S_2 \quad (2.31)$$

şeklinde yazabiliriz. (2.30)'da n_i , S_1 yüzeyinin normal birim vektörünün bileşenlerini göstermektedir.

Lineer doğal titreşim problemlerinde aranan büyüklüklerin zamana bağımlılığı $\exp(i\omega t)$ ($\omega = \text{sabit}$) şeklinde ele alındığından bu tür dinamik problemlerin incelenmesinde başlangıç koşulları verilmez. Bu nedenle, eğer aranan büyüklüklerin yani σ_{ij} ve u_i 'lerin genliklerini, sırasıyla, $\bar{\sigma}_{ij}$ ve \bar{u}_i ile gösterirsek bu durumda (2.27)-(2.31) denklemleri bu genlikler için ($\rho \partial^2 u_i / \partial t^2 \rightarrow \omega^2 \rho \bar{u}_i$ dönüşümü hariç), aynen sağlanmış olurlar. Böylece doğal titreşim frekanslarının bulunması (2.27)-(2.31) özdeğer probleminin incelenmesine getirilmiş olur.

Şimdi ise, yukarıda adı geçen özdeğer problemlerinin çözülmesinde kullanılabilecek bazı yaklaşık-analitik yöntemleri ele alalım. Bu yöntemlerden ilk göze çarpanı, Akbarov et al. (1991, 1992) çalışmalarında kullanılan Küçük Parametreler Yöntemi'dir. Bu yöntemin kullanılabilmesi için, (2.16) kısıtlamalarının sağlanması zorunludur. (2.16) kısıtlamalarının sağlanması ise, eğrisel yapıya sahip kompozit malzemenin yapı parametrelerinin değeri



aralığını daraltır. Böylece (2.16) kısıtlamaları sağlanırsa, (2.18)'de v_1 ve v_3 'ün ifadelerini, (2.25)'de $\Phi_1(x_1)$ ve $\Phi_2(x_1)$ ifadelerini ε 'nun kuvvet serisi şeklinde yazabiliriz. Bu durumda, $\mu_{ij\alpha\beta}(x_1, x_3)$ 'lar için,

$$\mu_{ij\alpha\beta}(x_1, x_3) = \mu_{ij\alpha\beta}^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k-1} \mu_{ij\alpha\beta}^{(1)2k-1}(a, b) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} \mu_{ij\alpha\beta}^{(2)2k}(a, b) \quad (2.32)$$

burada,

$$a = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad b = \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

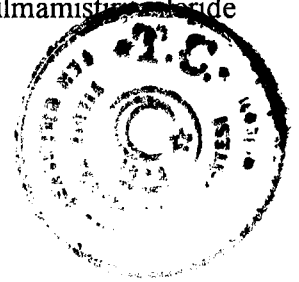
biçimindedir. (2.32)'yi göz önüne alırsak (2.27), (2.28) ve (2.29)'dan yerdeğiştirmelerin genliğine göre yazılan

$$L_{ij}^0 \bar{u}_j + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k-1} K_{ijk} \bar{u}_j + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k-1} R_{ijk} \bar{u}_j = \rho \omega^2 \bar{u}_i \quad (2.33)$$

denklemlerini kullanabiliriz. Burada (2.33)' de L_{ij}^0 'lar,

$$L_{ij}^0 = \left[A_{ij}^0 + (1 - \delta_i^j) G_{ij}^0 \right] \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \delta_i^j (1 - \delta_\alpha^i) G_{\alpha i}^0 \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}; \quad (2.34)$$

şeklinde olan lineer diferansiyel operatörlerdir. (2.33)'deki K_{ijk} ve R_{ijk} 'lar ise değişken katsayılı, lineer diferansiyel operatörlerdir. Bu operatörlerin Akbarov and Guz'un (1991) yayınında verilen ifadeleri çok uzun olduğundan burada yazılmamıştır. İhtiyaçta gerektiğinde bazılarının ifadeleri verilecektir.



Aranan fonksiyonları ve (2.30) ile (2.31)'deki verilenleri ε parametresinin kuvvet serisi şeklinde, yani

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \bar{\sigma}_{ij}^{(n)} ; \quad \bar{u}_j = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \bar{u}_j^{(n)} ; \quad (2.35)$$

biçiminde ifade edersek, bu durumda q . yaklaşımda yerdeğiştirme genlikleriyle yazılan

$$L_{ij}^0 \bar{u}_j^{(q)} + \sum_{k=1}^{[q/2]} K_{ijk} \bar{u}_j^{(q-2k)} + \sum_{k=1}^{\infty} R_{ijk} \bar{u}_j^{(q+1-2k)} = \rho \omega^2 \bar{u}_i^{(q)} \quad (2.36)$$

denklemler takımını alırız. (2.36)'daki $[q/2]$, $q/2$ 'nin tam değerini göstermektedir.

(2.35) ve (2.30) ile (2.31)'den her yaklaşım için uygun sınır koşullarını da elde ederiz.

Böylece, ele alınan özdeğer problemlerinin çözümü, sabit katsayılı, kısmi türevli, homojen olmayan diferansiyel denklemler takımının uygun özdeğer problemleri serisinin çözümüne getirilir. Eğer bu çözümler analitik olarak elde edilebilseydi biz bu çözümleri kullanarak ve onlarda ω 'yı $\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots$ ile yerdeğiştirdikten ve Nayfeh (1973)'de bahsedildiği gibi renormalizasyon tekniğini uyguladıktan sonra ele alınan özdeğer problemlerinin yaklaşık analitik çözümlerini elde edebilirdik.

Bilindiği üzere, kompozit malzemenin kapsadığı alanın şekline ve sınır koşullarının tipine bağlı olarak, söylenen bir seri özdeğer problemlerinin yani (2.36) denklemlerinin (2.30) ve (2.31)'den elde edilen uygun sınır koşulları çerçevesinde analitik çözümünü elde etmek çoğu zaman ya imkansızdır ya da çok zordur.

Yukarıda söylenenlerden görüldüğü gibi ele alınan teorinin sonlu alanlara uygulanabilen, yani (2.36) denklemlerinin, küçük parametreler yöntemini kullanarak yaklaşık analitik



çözümlerinin elde edilmesi çok kısıtlı ve birçok durumlarda ise imkansızdır. Bu söylenenleri çalışmamızda ele alınan problemlere de uygulayabiliriz.

Yukarıda adı geçen süreklilik teorisinin verilen özdeğer problemlerinin çözülmesinde kullanılacak başlıca yaklaşık-analitik yöntemler, varyasyonel yöntemler ve Galerkin Yöntemi olabilir. Varyasyonel yöntemin adı geçen süreklilik teorisinin bazı özdeğer problemlerinin çözülmesi için geliştirilmesi Akbarov et al. (1992) araştırmasında verilmiştir.

Bilindiği üzere, varyasyonel ve Galerkin yöntemlerinin kullanılması aranan fonksiyonları, onların tanımlandığı bütün alanda, muayyen tam fonksiyonların serisi şeklinde olan bir yaklaşımın yapılmasını gerektirir. Böyle bir yaklaşımın yapılması ise, alan şekli, bakılan sınırdeğer probleminin tipi, vs. bağlı olarak belirtilmesini gerektirir.

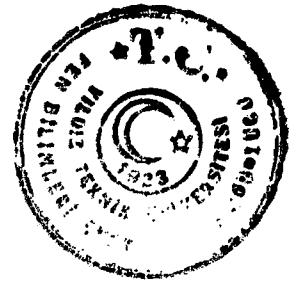
Söylenenlerin elastisite teorisinin yukarıda verilen kesin denklemleri çerçevesinde yapılması çoğu zaman imkansız ve çok zordur. Bu nedenlerden dolayı genel formülasyonu yukarıda yapılan problemlerin özel durumlarda (yani ele alınan kompozit malzemenin kapsadığı alan boyutlarından birinin diğer iki boyutuna göre çok düşük olması hallerinde) incelenmesi bu problemlerin boyutunun, plak teorileri kullanılarak, düşürülmesi yoluyla yapılır. Bu durumda yukarıda adı geçen yaklaşık analitik yöntemlerin uygulanması önemli bir biçimde basitleşir.

Buraya kadar söylenenleri göz önüne alarak, tez çalışmasında ele alınan doğal titreşim problemleri, geliştirilmiş plak teorileri kullanılarak formülasyonu yapılarak ve Galerkin Yöntemi yardımıyla incelenmiştir. Bundan başka tezde ele alınan problemlerin araştırılmasında Pertürbasyon Yönteminin de uygulanabileceği bir şekilde gösterilmektedir.

Belirtelim ki, tez kapsamında ele alınan araştırmalar sadece eğrisel yapıya sahip kompozit malzemedен hazırlanmış plağın doğal titreşimlerine ait özdeğer problemleri değil aynı



zamanda bu plakların burkulmasına -stabilitesine- ait özdeğer problemlerini de içermektedir. Burkulmaya ait özdeğer problemlerinin 3-boyutlu doğrusallaştırılmış (lineerize edilmiş) stabilite denklemleri çerçevesinde yapıldığında yukarıda karşılaşılan zorlukların hepsiyle tekrar karşılaşmaktadır. 3-boyutlu doğrusallaştırılmış stabilite denklemlerinin elde edilmesi ve izahı Biot (1965) ve Guz' (1971) kitaplarında verilmektedir. Bu nedenlerden dolayı tezde bakılan stabilite problemleri de geliştirilmiş plak teorileri çerçevesinde ele alınmaktadır.



BÖLÜM III.

PLAKLARIN DOĞAL TİTREŞİM VE STABİLİTE DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

III. 1. ELASTİSİTE TEORİSİNİN 3-BOYUTLU KESİN HAREKET DENKLEMLERİNDEN PLAK HAREKET DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden hazırlanmış plak,

$$\{0 \leq x_1 \leq l_1; -h/2 \leq x_2 \leq h/2; 0 \leq x_3 \leq l_3\} \quad (3.1)$$

alanını kapsamakta olup, yerdeğişmeleri

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3, t), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3, t), \quad u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3, t), \quad (3.2)$$

biçimindedir. Hareket denklemleri :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.3)$$

Bünye denklemleri:



$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ & & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ & & & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ & & & & A_{55} & A_{56} \\ & & & & & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

biçimindedir. Burada,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.5)$$

(3.4) eşitliğinin sağındaki değişken malzeme parametreleri matrisinin elemanları Bölüm 2.3'te (2.24)-(2.26) eşitliklerinde belirtildiği gibidir. Hatırlanacağı üzere, (2.24)-(2.26) ifadelerindeki $A_{11}^0, A_{22}^0, A_{33}^0, A_{44}^0, A_{55}^0, A_{66}^0, A_{12}^0, A_{13}^0, A_{23}^0$ terimleri göz önüne alınan plakta hiçbir eğriliğin olmadığı ideal durumdaki plak malzemesinin normalize edilmiş mekanik özellikleridir.

Plak kenarlarındaki sınır şartları:

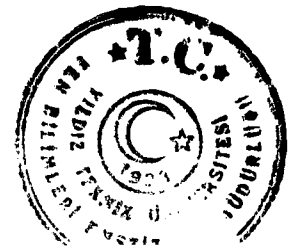
$$u_2 = 0 \quad (x_1 = 0, l_1; x_3 = 0, l_3), \quad \sigma_{11} = 0 \quad (x_1 = 0, l_1), \quad \sigma_{33} = 0 \quad (x_3 = 0, l_3) \quad (3.6)$$

olsun. Plağın üst ve alt yüzeylerinde ise

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{23} = 0 \quad (x_2 = \pm h/2) \quad (3.7)$$

koşulları sağlanır.

Böylece ele alınan plağın doğal titreşiminin elastisite teorisinin kesin hareket denklemleri çerçevesinde incelenmesi (3.3)-(3.7),(2.24)-(2.26) özdeğer probleminin incelenmesine



getirilir. Açıkta ki bu özdeğer probleminin incelenmesi matematiksel açıdan çok zor ve bir çok hallerde de imkansızdır. Bu nedenlerden dolayı ele alınan özdeğer probleminin incelenmesinde geliştirilmiş plak teorilerinin kullanılması gereği ortaya çıkmaktadır. Tez kapsamında ele alınan araştırmalarda geliştirilmiş plak teorisi olarak Bölüm I'de özeti verilen üçüncü mertebeden olan Kromm Teorisi kullanılmaktadır. Bu teoriye göre (3.2) yerdeğıştirmelerinin plak kalınlığı boyunca olan koordinata göre değışimi aşağıdaki şekilde verilir.

Kromm (1953, 1955)'a göre plak yerdeğıştirmeleri:

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = u_i(x_1, 0, x_3, t) - x_2 \frac{\partial w(x_1, x_3, t)}{\partial x_i} + J_i(x_2) \varphi_i(x_1, x_3, t) \quad i = 1, 3. \quad (\Sigma_i),$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3, t) = w(x_1, x_3, t) \quad (3.8)$$

buradaki $\varphi_i(x_1, x_3, t)$, plağın ox_i ($i=1,3$) eksenine dik kesitindeki kayma şekildeğıştirmesinin ortalama değerini ifade eden bir fonksiyon,

$$u(x_1, x_3, t) = u_1(x_1, 0, x_3, t), \quad w(x_1, x_3, t) = u_2(x_1, 0, x_3, t),$$

$$v(x_1, x_3, t) = u_3(x_1, 0, x_3, t) \quad (3.9)$$

ifadeleri plak orta yüzeyinin yerdeğıştirmeleri, $\varphi_i(x_1, x_3, t)$ 'in plak kalınlığı boyunca değışimini gösteren $J_1(x_2)$ ve $J_3(x_2)$ ifadeleri

$$J_1(x_2) = J_3(x_2) = J(x_2) = \frac{1}{4} \left(\frac{h^2}{4} x_2 - \frac{x_2^3}{3} \right). \quad (3.10)$$

biçimindedir.



Şimdi,

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_1} dx_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dx_2, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_3} dx_2 = \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dx_2 \quad (i = 1,3.) \quad (3.11)$$

ifadelerini göz önüne alarak (3.3) hareket denklemlerinin $-h/2$ 'den $+h/2$ 'ye kadar x_2 'ye göre integrasyonu yapılırsa,

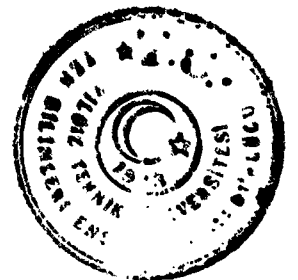
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dx_2 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_2 &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} u_1(x_1, x_2, x_3, t) dx_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dx_2 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_2 &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} u_2(x_1, x_2, x_3, t) dx_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{31} dx_2 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{33} dx_2 &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} u_3(x_1, x_3, x_3, t) dx_2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

plağın alt ve üst yüzeyleri için (3.7)'de verilen koşulları

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} dx_2 = \sigma_{i2} \Big|_{-h/2}^{h/2} = 0 \quad (i = 1,2,3.) \quad (3.13)$$

(3.12)'de kullanılır ve

$$T_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dx_2, \quad T_{13} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_2, \quad T_{33} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{33} dx_2,$$



$$N_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dx_2, \quad N_{23} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_2 \quad (3.14)$$

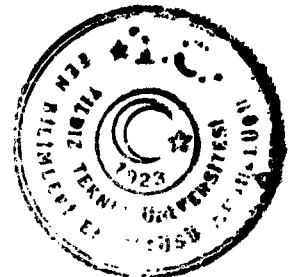
işaretlemeleri yapılırsa,

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_3} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.15)$$

elde edilir. Buradaki T_{11} , N_{12} , T_{13} , N_{23} , T_{33} plaktaki iç kuvvetlerin ortalama değerleri olup birinci indis kuvvetin etki ettiği yüzeyin normalini ikinci indis ise kuvvetin yönünü göstermektedir. (3.3) hareket denklemlerinin x_2 ile çarpımının yine $-h/2$ 'den $+h/2$ 'ye kadar x_2 'ye göre integre edilirse,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} x_2 \sigma_{11} dx_2 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} x_2 dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{-h/2}^{h/2} x_2 \sigma_{13} dx_2 &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} x_2 u_1(x_1, x_2, x_3, t) dx_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} x_2 \sigma_{12} dx_2 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} x_2 dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{-h/2}^{h/2} x_2 \sigma_{23} dx_2 &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} x_2 u_2(x_1, x_2, x_3, t) dx_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} x_2 \sigma_{31} dx_2 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} x_2 dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{-h/2}^{h/2} x_2 \sigma_{33} dx_2 &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} x_2 u_3(x_1, x_3, x_3, t) dx_2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

elde edilir. Plak teorisinde genelde yapılan $\sigma_{22} = 0$ kabulüyle birlikte (3.22) denklemlerinin ikinci terimlerine bilinen kısmi integrasyon kuralı uygulanır ve plağın alt ve üst yüzeyleri için (3.7)'de verilen koşullar göz önünde tutulursa



$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} x_2 dx_2 = \sigma_{12} x_2 \Big|_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dx_2, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} x_2 dx_2 = \sigma_{23} x_2 \Big|_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_2$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} x_2 dx_2 = \sigma_{22} x_2 \Big|_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} dx_2 = 0 \quad (3.17)$$

ayrıca, momentlerin ortalama değerleri

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_2 dx_2, \quad M_{13} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} x_2 dx_2, \quad M_{33} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{33} x_2 dx_2, \quad (3.18)$$

biçiminde gösterilirse

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{13}}{\partial x_3} - N_{12} = -2\rho I_1(h) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2} + \rho I_2(h) \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{33}}{\partial x_3} - N_{23} = -2\rho I_1(h) \frac{\partial^3 w}{\partial x_3 \partial t^2} + \rho I_2(h) \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial t^2} \quad (3.19)$$

elde edilir. Burada,

$$I_1(h) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{dJ(x_2)}{dx_2} dx_2 = \frac{h^3}{24}, \quad I_2(h) = \int_{-h/2}^{h/2} x_2 J(x_2) dx_2 = \frac{h^5}{240}. \quad (3.20)$$

Kuvvet ve momentlerle yerdeğişirmeler arasındaki bağıntıları elde etmek üzere (3.10) ve (3.8) ifadeleri (3.5)'te yerlerine konmasıyla ve (2.25) ifadesinin (2.24) ifadesine yerleştirilmeleriyle alınan yeni ifadelerle (3.4)'e gidilir ve $\sigma_{22} = 0$ olarak kabul edilirse, (3.14)-(3.20) ifadeleri gerçekleşirse,

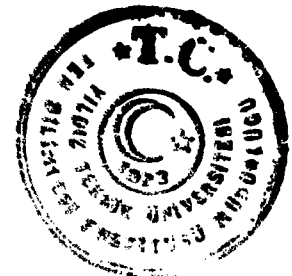


$$\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{33} \\ N_{23} \\ T_{13} \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} & 0 & 0 & A_{16} \\ A_{13} & A_{33} & 0 & 0 & A_{36} \\ 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & 0 \\ 0 & 0 & A_{45} & A_{55} & 0 \\ A_{16} & A_{36} & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} hu_{,1} \\ hv_{,3} \\ I_1(h)\varphi_3 \\ h(u_{,3}+v_{,1}) \\ I_1(h)\varphi_1 \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{33} \\ M_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} & 0 \\ A_{13} & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2I_1(h)w_{,11}+I_2(h)\varphi_{1,1} \\ -2I_1(h)w_{,33}+I_2(h)\varphi_{3,3} \\ -4I_1(h)w_{,13}+I_2(h)(\varphi_{1,3}+\varphi_{3,1}) \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

elde edilir. Bu son ifadeler (2.26) ifadeleriyle birlikte (3.15) ve (3.19) ifadelerinde yerlerine konursa, yerdeğıştirmeler cinsinden, plak hareket denklemleri

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(hA_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} + hA_{13} \frac{\partial v}{\partial x_3} + I_1(h)A_{16}\varphi_1 \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial x_3} \left(I_1(h)A_{45}\varphi_3 + hA_{55} \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) \right) = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(I_1(h)A_{45}\varphi_3 + hA_{55} \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial x_3} \left(hA_{13} \frac{\partial u}{\partial x_1} + hA_{33} \frac{\partial v}{\partial x_3} + I_1(h)A_{36}\varphi_1 \right) = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(hA_{16} \frac{\partial u}{\partial x_1} + hA_{36} \frac{\partial v}{\partial x_3} + I_1(h)A_{66}\varphi_1 \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial x_3} \left(I_1(h)A_{44}\varphi_3 + hA_{45} \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) \right) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.23)$$



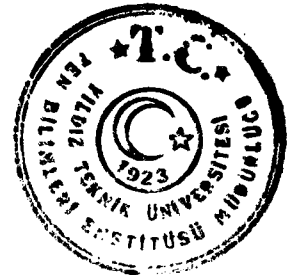
$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_1} \left[A_{11} \left(-2I_1(h) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + I_2(h) \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \right) + A_{13} \left(-2I_1(h) \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} + I_2(h) \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} \right) \right] + \\
& \frac{\partial}{\partial x_3} \left[A_{55} \left(-4I_1(h) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_3} + I_2(h) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \right) \right) \right] - \\
& \left(hA_{16} \frac{\partial u}{\partial x_1} + hA_{36} \frac{\partial v}{\partial x_3} + I_1(h)A_{66}\phi_1 \right) = -\rho I_1(h) \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x_1} + \rho I_2(h) \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \\
& \frac{\partial}{\partial x_1} \left[A_{55} \left(-4I_1(h) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_3} + I_2(h) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \right) \right) \right] + \\
& \frac{\partial}{\partial x_3} \left[A_{13} \left(-2I_1(h) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + I_2(h) \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \right) + A_{33} \left(-2I_1(h) \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} + I_2(h) \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} \right) \right] - \\
& \left(hA_{45} \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) + I_1(h)A_{44}\phi_3 \right) = -\rho I_1(h) \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x_3} + \rho I_2(h) \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

biçiminde elde edilir. (3.14)-(3.18) işlemi plağın (3.6)'deki sınır şartlarına da uygulanırsa:

$$\begin{aligned}
T_{11} = 0 \quad , \quad M_{11} = 0 \quad , \quad w = 0 \quad (x_1 = 0, 1) \\
T_{33} = 0 \quad , \quad M_{33} = 0 \quad , \quad w = 0 \quad (x_3 = 0, 1).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Göz önüne alınan plağın doğal titreşiminin zamana bağlı yerdeğişimleri:

$$\begin{aligned}
u(x_1, x_3, t) = X_u(x_1, x_3)e^{i\omega t} \quad , \quad v(x_1, x_3, t) = X_v(x_1, x_3)e^{i\omega t} \quad , \\
w(x_1, x_3, t) = X_w(x_1, x_3)e^{i\omega t} \quad , \quad \phi_1(x_1, x_3, t) = X_{\phi_1}(x_1, x_3)e^{i\omega t} \quad , \\
\phi_3(x_1, x_3, t) = X_{\phi_3}(x_1, x_3)e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{3.26}$$



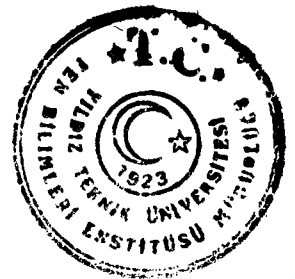
biçiminde olup, burada ω , ele alınan kompozit plağın doğal titreşim frekansdır. (3.26) ifadeleri (3.23) ve (3.24) hareket denklemlerinde yerlerine konursa,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(hA_{11} \frac{\partial X_u}{\partial x_1} + hA_{13} \frac{\partial X_v}{\partial x_3} + I_1(h)A_{16}X_{\varphi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(I_1(h)A_{45}X_{\varphi_3} + hA_{55} \left(\frac{\partial X_u}{\partial x_3} + \frac{\partial X_v}{\partial x_1} \right) \right) = -\omega^2 \rho h X_u$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(I_1(h)A_{45}X_{\varphi_3} + hA_{55} \left(\frac{\partial X_u}{\partial x_3} + \frac{\partial X_v}{\partial x_1} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(hA_{13} \frac{\partial X_u}{\partial x_1} + hA_{33} \frac{\partial X_v}{\partial x_3} + I_1(h)A_{36}X_{\varphi_1} \right) = -\omega^2 \rho h X_v$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(hA_{16} \frac{\partial X_u}{\partial x_1} + hA_{36} \frac{\partial X_v}{\partial x_3} + I_1(h)A_{66}X_{\varphi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(I_1(h)A_{44}X_{\varphi_3} + hA_{45} \left(\frac{\partial X_u}{\partial x_3} + \frac{\partial X_v}{\partial x_1} \right) \right) = -\omega^2 \rho h X_w \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[A_{11} \left(-2I_1(h) \frac{\partial^2 X_w}{\partial x_1^2} + I_2(h) \frac{\partial X_{\varphi_1}}{\partial x_1} \right) + A_{13} \left(-2I_1(h) \frac{\partial^2 X_w}{\partial x_3^2} + I_2(h) \frac{\partial X_{\varphi_3}}{\partial x_3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[A_{55} \left(-4I_1(h) \frac{\partial^2 X_w}{\partial x_1 \partial x_3} + I_2(h) \left(\frac{\partial X_{\varphi_1}}{\partial x_3} + \frac{\partial X_{\varphi_3}}{\partial x_1} \right) \right) \right] - \left(hA_{16} \frac{\partial X_u}{\partial x_1} + hA_{36} \frac{\partial X_v}{\partial x_3} + I_1(h)A_{66}X_{\varphi_1} \right) = \omega^2 \rho I_1(h) \frac{\partial X_w}{\partial x_1} - \omega^2 \rho I_2(h) X_{\varphi_1}$$

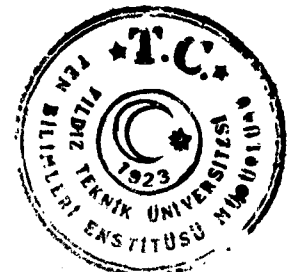


$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_1} \left[A_{55} \left(-4I_1(h) \frac{\partial^2 X_w}{\partial x_1 \partial x_3} + I_2(h) \left(\frac{\partial X_{\varphi_1}}{\partial x_3} + \frac{\partial X_{\varphi_3}}{\partial x_1} \right) \right) \right] + \\
& \frac{\partial}{\partial x_3} \left[A_{13} \left(-2I_1(h) \frac{\partial^2 X_w}{\partial x_1^2} + I_2(h) \frac{\partial X_{\varphi_1}}{\partial x_1} \right) + A_{33} \left(-2I_1(h) \frac{\partial^2 X_w}{\partial x_3^2} + I_2(h) \frac{\partial X_{\varphi_3}}{\partial x_3} \right) \right] - \quad (3.28) \\
& \left(hA_{45} \left(\frac{\partial X_u}{\partial x_3} + \frac{\partial X_v}{\partial x_1} \right) + I_1(h)A_{44}X_{\varphi_3} \right) = \omega^2 \rho I_1(h) \frac{\partial X_w}{\partial x_3} - \omega^2 \rho I_2(h) X_{\varphi_3}
\end{aligned}$$

elde edilir ayrıca (3.26) ifadeleri, (3.21) ve (3.22) göz önünde tutularak, (3.25) sınır koşullarında yerlerine konursa,

$$\begin{aligned}
& \left[A_{11} \left(-2I_1(h) \frac{\partial^2 X_w}{\partial x_1^2} + I_2(h) \frac{\partial X_{\varphi_1}}{\partial x_1} \right) + A_{13} \left(-2I_1(h) \frac{\partial^2 X_w}{\partial x_3^2} + I_2(h) \frac{\partial X_{\varphi_3}}{\partial x_3} \right) \right]_{x_1=0,1} = 0 \quad , \\
& \left[A_{11}h \frac{\partial X_u}{\partial x_1} + A_{13}h \frac{\partial X_v}{\partial x_3} + A_{16}I_1(h)X_{\varphi_1} \right]_{x_1=0,1} = 0 \quad , \\
& \left[A_{13} \left(-2I_1(h) \frac{\partial^2 X_w}{\partial x_1^2} + I_2(h) \frac{\partial X_{\varphi_1}}{\partial x_1} \right) + A_{33} \left(-2I_1(h) \frac{\partial^2 X_w}{\partial x_3^2} + I_2(h) \frac{\partial X_{\varphi_3}}{\partial x_3} \right) \right]_{x_3=0,1} = 0 \quad , \\
& \left[A_{13}h \frac{\partial X_u}{\partial x_1} + A_{33}h \frac{\partial X_v}{\partial x_3} + A_{36}I_1(h)X_{\varphi_1} \right]_{x_3=0,1} = 0 \quad , \quad X_w \Big|_{\substack{x_1=0,1 \\ x_3=0,1}} = 0 \quad . \quad (3.29)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece göz önüne alınan plağın doğal titreşim problemi (3.29) sınır koşulları altında (3.27)-(3.28) özdeğer problemlerinin çözümüne indirgenmiş olur.



III. 2. 3-BOYUTLU DOĞRUSALLAŞTIRILMIŞ KESİN STABİLİTE TEORİSİ DENKLEMLERİNDEN EĞRİSEL YAPIYA SAHİP PLAKLARIN STABİLİTE DENKLEMİNİN ELDE EDİLMESİ

Burkulma öncesi gerilme durumu σ_{in}^0 ile belirlenen bir cismin doğrusallaştırılmış 3-boyutlu stabilite denklemleri, birçok kaynaklarda örneğin Biot (1965), Guz'(1971 ve 1990) kitaplarında,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma_{im} + \sigma_{in}^0 \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \right) = 0 \quad i, m; n = 1, 2, 3. \quad (3.30)$$

biçiminde verilmektedir. Bu denklemler cismin kapsadığı V hacminde sağlanmaktayken bu hacme ait S yüzeyinin S_1 kısmında etki gösteren dış kuvvetlerin burkulmadan dolayı aldığı artımlar,

$$n_i \left(\sigma_{im} + \sigma_{in}^0 \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \right) \Big|_{S_1} = P_m \quad i, m; n = 1, 2, 3. \quad (3.31)$$

şeklinde ; cismin geri kalan S_2 yüzeyinde yerdeğiştirme ile verilen

$$u_m \Big|_{S_2} = 0 \quad m = 1, 2, 3. \quad (3.32)$$

homojen sınır koşulları sağlanmaktadır. Eğer cismin yüzeyine etki eden kuvvetler '*ölü kuvvetler*' ise (3.31)'in sağ tarafı $P_m = 0$ olur, eğer bu kuvvetler '*izleyici-tracking-kuvvetler*' ise P_m terimleri, cismin burkulmasından dolayı ortaya çıkan yerdeğiştirmeler olan, u_m 'ler cinsinden ifadeleri verilerek (Guz', 1971) (3.31) koşulları, doğrusallaştırılmış homojenleştirilmiş olur. Bundan başka, belirtelim ki, (3.30) ve (3.31) denklemlerinde σ_{im} 'ler cisimde burkulmadan dolayı ortaya çıkan gerilmeler olup, bu



olaydan dolayı ortaya çıkan şekildeğiştirmelerle doğrusallaştırılmış ifadelerle bağlantılı olmaktadır. Burkulma öncesi gerilme σ_{in}^0 ve şekildeğiştirme ε_{ij}^0 arasındaki bağıntılar doğrusal ise burkulmadan dolayı ortaya çıkan σ_{im} gerilmeleri ile ε_{ij} şekildeğiştirmeleri arasındaki bağıntılar da doğrusal olmakta ve bu bağıntılar, burkulma öncesi bağıntılardaki σ_{in}^0 ve ε_{ij}^0 terimlerinin yerine bunların burkulmadan dolayı ortaya çıkan karşılıkları olan σ_{im} - ε_{ij} terimlerinin konmasıyla elde edilir.

Bundan başka cismin burkulmasından dolayı ortaya çıkan şekildeğiştirme ve yerdeğiştirmeler arasındaki bağıntılar da doğrusallaştırılır ve bu zamanda, geniş bilgileri (Guz', 1971)'de verilmiş olan, bir kaç tür küçük deformasyon teorileri kullanılmaktadır. Bu teorilerden biri de ε_{ij} ve u_i arasındaki bağıntıları klasik lineer elastisite teorisinde olduğu gibi kabul etmektedir. Belirtelim ki tez kapsamında yapılan işlemlerde bu klasik deformasyon teorisi kullanılacaktır. Yukarıda söylenenleri göz önüne alarak, σ_{im} ve ε_{ij} bağıntılarını (3.4), ε_{ij} ve u_i bağıntılarını (3.5) şeklinde ele alacağız. Yani,

$$\sigma_{ij} = \mu_{ij\alpha\beta}(x_1, x_3)\varepsilon_{\alpha\beta} \quad (3.33)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.34)$$

Başka bir deyişle, cismin 3-boyutlu doğrusallaştırılmış stabilite denklemleri çerçevesinde burkulmasının incelenmesi (3.30)-(3.34) özdeğer probleminin incelenmesine getirilmektedir. Bu problemin incelenmesi ise σ_{in}^0 gerilmelerinin homojen olmadığı durumlarda çok zor olmaktadır. Bu nedenle 3-boyutlu doğrusallaştırılmış stabilite teorisinin en önemli uygulamaları, cisimde burkulma öncesi gerilmelerin homojen olduğu durumlarda yapılmaktadır. (3.30)-(3.34) özdeğer probleminin incelenmesini zorlaştıran başka bir neden de bu denklemlerin 3-boyutlu olmasıdır. Bundan dolayı, tez kapsamında ele alınacak problemlerde (3.30)-(3.34) denklemlerinde önceki bölümde kullanılan



geliştirilmiş plak teorisinden yararlanarak elde edilen 2-boyutlu stabilite denklemleri kullanılacaktır. Şimdi bu denklemlerin (3.30)-(3.34) denklemlerinden elde edilmesine geçelim.

Farz edelim ki eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden hazırlanmış ve (3.1) ile gösterilen bir alanı kapsayan bir plak

$$\sigma_{11}^0 = -p, \quad (x_1 = 0, l_1) \quad , \quad \sigma_{33}^0 = -q, \quad (x_3 = 0, l_3) \quad (3.35)$$

basınç yüklerine maruz olsun. Bu plağın alt ve üst yüzeyleri yüksüzdür. Bundan başka plağın $(x_1 = 0, l_1)$, $(x_3 = 0, l_3)$ kenarları basit mesnetlidir. Söylenenleri göz önüne alırsak, yukarıda verilen (3.31) koşullarını

$$\sigma_{11} + \sigma_{1n}^0 \frac{\partial u_2}{\partial x_n} = 0, \quad (x_1 = 0, l_1) \quad (3.36)$$

$$\sigma_{22} + \sigma_{2n}^0 \frac{\partial u_2}{\partial x_n} = 0, \quad \sigma_{21} + \sigma_{2n}^0 \frac{\partial u_1}{\partial x_n} = 0, \quad (x_2 = \pm h/2) \quad (3.37)$$

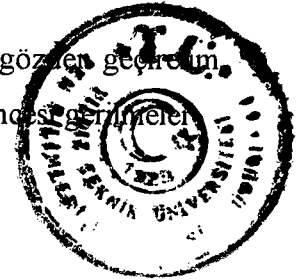
$$\sigma_{33} + \sigma_{3n}^0 \frac{\partial u_3}{\partial x_n} = 0, \quad (x_3 = 0, l_3) \quad (3.38)$$

biçiminde yazılabilir. (3.32) koşulu bakılan durumda

$$u_2 = 0; \quad x_1 = 0, l_1 \quad , \quad -h/2 \leq x_2 \leq h/2 \quad (3.39)$$

$$u_2 = 0; \quad x_3 = 0, l_3 \quad , \quad -h/2 \leq x_2 \leq h/2$$

şeklinde olmaktadır. Ele alınan problemdeki burkulma öncesi durumu gözden geçirelim. Belirtelim ki eğer bakılan plak malzemesi homojen olsaydı, burkulma öncesi gerilmeleri



$$\sigma_{11}^0 = -p \quad , \quad (x_1 = 0, l_1) \quad , \quad \sigma_{33}^0 = -q \quad , \quad (x_3 = 0, l_3) \quad \sigma_{12}^0 = \sigma_{13}^0 = \sigma_{22}^0 = \sigma_{23}^0 = 0 \quad (3.40)$$

şeklinde belirlenmiş olurdu. Ancak ele alınan plak malzemesi homojen olmadığından burkulma öncesi gerilmeler de homojen olmayacaktır. Bu gerilmeler (3.40) homojen gerilmelerden $O(\varepsilon)$ mertebesinde farklı olacaklardır. Bu nedenle, yani burkulma öncesi gerilmelerdeki homojen olmayan kısmın ε mertebesinde ve $\varepsilon < 1$ olmasından dolayı sonraki incelemelerde bu kısım ihmal edilecektir. Dolayısıyla ele alınan problemlerde burkulma öncesi gerilmeleri (3.40) ile belirlenir. (3.40) ifadeleri göz önüne alınırsa (3.37) koşulları

$$\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0 \quad , \quad (x_2 = \pm h/2) \quad (3.41)$$

(3.36) ve (3.38) koşulları da, sırasıyla,

$$\sigma_{11} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \quad , \quad (x_1 = 0, l_1) \quad (3.42)$$

$$\sigma_{33} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \quad , \quad (x_3 = 0, l_3) \quad (3.43)$$

şeklinde olur. Şimdi (3.40) ifadeleri göz önüne alınarak (3.30) denklemleri açık olarak

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sigma_{11} - p \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\sigma_{31} - q \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sigma_{12} - p \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\sigma_{32} - q \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sigma_{13} - p \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\sigma_{33} - q \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = 0 \quad ,$$



biçiminde yazılabilir. Böylece ele alınan plağın bakılan yüklemdeki burkulma probleminin 3-boyutlu doğrusallaştırılmış stabilite teorisi çerçevesinde incelenmesi (3.4), (3.5) ve (3.44) denklemlerinin (3.41)-(3.43) sınır koşulları ile verilen özdeğer probleminin incelenmesine getirilmiş olur. Şimdi önceki kısımda kullanılan geliştirilmiş plak teorisini kullanarak bu problemin boyutunu bir merteye düşürmek için (3.44) denklemleri (3.41) sınır koşulları ve (3.14) ifadeleri de göz önüne alınarak $-h/2$ 'den $+h/2$ 'ye kadar x_2 'ye göre integrali alınırsa, sırasıyla,

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} - hp \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} - hq \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_3^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} - hp \frac{\partial^2 w^0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_3} - hq \frac{\partial^2 w^0}{\partial x_3^2} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} - hp \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} - hq \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_3^2} = 0 \quad , \quad (3.45)$$

elde edilir. Aynı şekilde (3.44) denklemleri x_2 ile çarpılıp, (3.18) ifadeleri de göz önüne alınarak $-h/2$ 'den $+h/2$ 'ye kadar x_2 'ye göre integrali alınırsa, sırasıyla,

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - p \left(-2I_1(h) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + I_2(h) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} \right) - N_{12} +$$

$$\frac{\partial M_{13}}{\partial x_3} - q \left(-2I_1(h) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_3^2} + I_2(h) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_{33}^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial M_{13}}{\partial x_1} - p \left(-2I_1(h) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_3} + I_2(h) \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1^2} \right) - N_{23} +$$

$$\frac{\partial M_{33}}{\partial x_3} - q \left(-2I_1(h) \frac{\partial^3 w}{\partial x_3^3} + I_2(h) \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_{33}^2} \right) = 0 \quad (3.46)$$

elde edilir. (3.39) sınır koşulu (3.8)' in ikinci ifadesine göre



$$w = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0, l_1 \\ x_3 = 0, l_3 \end{cases} \quad (3.47)$$

dönüştürülür ve (3.42), (3.43) sınır koşulları x_2 'e göre $-h/2$ 'den $+h/2$ 'ye kadar integre edilir ve $\sigma_{11}^0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$, $\sigma_{33}^0 \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ katkılarının sırasıyla σ_{11} ve σ_{33} yanında ihmal edilebilir derecede küçük oldukları gözönüne alınırsa bu durumda

$$T_{11} = 0, \quad x_1 = 0, l_1 \quad T_{33} = 0, \quad x_3 = 0, l_3 \quad (3.48)$$

elde edilir. Yukarıda söylenenleri göz önüne alarak (3.42), (3.43) sınır koşulları x_2 ile çarpılıp $-h/2$ 'den $+h/2$ 'ye kadar x_2 'e göre integre edilirse bu durumda,

$$M_{11} = 0, \quad x_1 = 0, l_1 \quad M_{33} = 0, \quad x_3 = 0, l_3 \quad (3.49)$$

elde edilir.

Böylece (3.39)-(3.44) probleminin incelenmesi geliştirilmiş plak teorisi çerçevesinde (3.45)-(3.49) probleminin incelenmesine getirilmiş olur.



BÖLÜM IV.

KLASİK , I. ve III. MERTEBEDEN GELİŞTİRİLMİŞ PLAK TEORİLERİ ÇERÇEVESİNDE PLAK-KİRİŞLERİN DOĞAL TİTREŞİM ve STABİLİTE DENKLEMLERİ

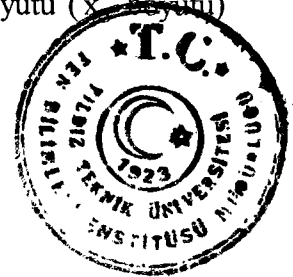
Bu bölümde Kromm, Kirchhoff-Love ve Reissner-Mindlin plak teorileri çerçevesinde plak-kirişlerin doğal titreşim ve stabilite denklemleri elde edilecektir. Bundan böyle Kirchhoff-Love hipotezi çerçevesinde elde edilen denklem ve sonuçlara klasik denklem ve sonuçlar; Reissner-Mindlin ve Kromm plak teorileri çerçevesinde elde edilen denklem ve sonuçlara, sırasıyla, I. ve III. mertebeden geliştirilmiş plak teorileri çerçevesinde elde edilmiş denklem ve sonuçlar denilecektir.

IV. 1. ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN GELİŞTİRİLMİŞ PLAK TEORİSİ ÇERÇEVESİNDE PLAK-KİRİŞİN TİTREŞİM DENKLEMLERİ

Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden hazırlanmış plak-kiriş,

$$\{0 \leq x_1 \leq l_1 ; -h/2 \leq x_2 \leq h/2 ; -\infty \leq x_3 \leq +\infty \} \quad (4.1)$$

alanını kapsasın. Bilindiği üzere bu tip plaklarda, plağın x_3 doğrultusundaki boyutu x_1 doğrultusundakine nazaran çok çok büyük olmaktadır. Eğer bu plağa etki eden dış koşullar (örneğin dış kuvvetler) x_3 'den bağımsız ise o zaman bu plaktaki gerilme ve yerdeğiştirmeler ve bunların sağladığı denklemler x_3 'den bağımsız olmaktadır. Elastisite teorisinden bilindiği üzere, yukarıdaki durumlar düzlem şekildeğiştirme durumları diye adlandırılırlar. Bu durumda x_3 yönündeki yerdeğiştirme sıfır kabul edilerek başka problem büyüklüklerinin x_3 'den bağımsız olduğu varsayılır. Böylece, söylenenleri ele alınan probleme uyguladığımız zaman bakılan plak probleminin bir boyutu (x_3 boyutu) düşürülebildiğinden bu tip yapılara Plak-Kiriş denmektedir.



Bu durumda Bölüm III'de verilmiş olan (3.4) bünye denklemleri, düzlem şekildeğiştirme durumunda yani plak-kiriş problemlerinin incelenmesinde, aşağıdaki şekli alacaktır:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ & A_{22} & A_{26} \\ & & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

(4.2) eşitliğindeki terimler Bölüm III'de bahsedildiği gibidir.

Bölüm III'de yapılan işaretlemeler ve işlemler burada da yapılırsa plak-kirişin doğal titreşimindeki yerdeğiştirme genliklerinin sağladığı denklemler,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_1} \left(hA_{11} \frac{dX_u}{dx_1} + I_1(h)A_{16}X_{\varphi_1} \right) &= -\omega^2 \rho h X_u \\ \frac{d}{dx_1} \left(hA_{16} \frac{dX_u}{dx_1} + I_1(h)A_{66}X_{\varphi_1} \right) &= -\omega^2 \rho h X_w \\ \frac{d}{dx_1} \left[A_{11} \left(-2I_1(h) \frac{d^2 X_w}{dx_1^2} + I_2(h) \frac{dX_{\varphi_1}}{dx_1} \right) \right] - \left(hA_{16} \frac{dX_u}{dx_1} + I_1(h)A_{66}X_{\varphi_1} \right) & \\ = \omega^2 \rho I_1(h) \frac{dX_w}{dx_1} - \omega^2 \rho I_2(h) X_{\varphi_1} & \end{aligned} \quad (4.3)$$

biçiminde yazılabilir. Buradaki işaretlemeler Bölüm III'de verilmiştir.

Yine Bölüm III'de verilmiş olan sınır şartları, yukarıda anlatılanlar çerçevesinde, plak-kiriş için



$$\left[A_{11} \left(-2I_1(h) \frac{d^2 X_w}{dx_1^2} + I_2(h) \frac{dX_{\varphi_1}}{dx_1} \right) \right]_{x_1=0,1} = 0 ,$$

$$\left[A_{11} h \frac{dX_u}{dx_1} + A_{16} I_1(h) X_{\varphi_1} \right]_{x_1=0,1} = 0 , \quad X_w|_{x_1=0,1} = 0 \quad (4.4)$$

şeklinde olmaktadır. Böylelikle göz önüne alınan plak-kirişin doğal titreşim problemi (4.3)-(4.4) özdeğer problemlerinin çözümüne indirgenmiş olur.

IV. 2. PLAK-KİRİŞLERİN KIRCHHOFF-LOVE TEORİSİ ÇERÇEVESİNDE TİTREŞİM DENKLEMLERİ

Plagın Ox_1x_2 düzleminde yer aldığı Bölüm I.2'de (1.4) eşitliği ile verilen yerdeğiştirme ifadelerinde $\alpha = 0$ ve $\psi_1 = -\partial w / \partial x_1$, $\psi_2 = -\partial w / \partial x_2$ olması durumunda

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_2) - x_3 \partial w / \partial x_1$$

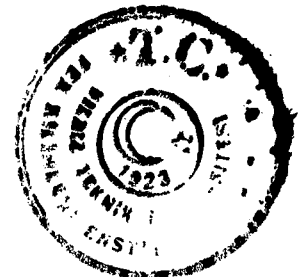
$$u_2(x_1, x_2, x_3) = v(x_1, x_2) - x_3 \partial w / \partial x_2$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2) \quad (4.5)$$

Kirchhoff-Love hipotezi çerçevesinde yerdeğiştirmeler için ifadeler elde edilmiş olur. Bu ifadeler Ox_2x_3 düzlemi içindeki plak için düzenlenirse Kirchhoff-Love hipotezine ait yerdeğiştirmeler

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_3) - x_2 \partial w / \partial x_1$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_3)$$



$$u_3(x_1, x_2, x_3) = v(x_1, x_3) - x_2 \frac{\partial w}{\partial x_3} \quad (4.6)$$

biçiminde elde edilmiş olur. (3.5) ifadesine göre plağın şekildeğiştirmeleri

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \quad \varepsilon_{13} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) - 2x_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial v}{\partial x_3} - x_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2},$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{22} = 0. \quad (4.7)$$

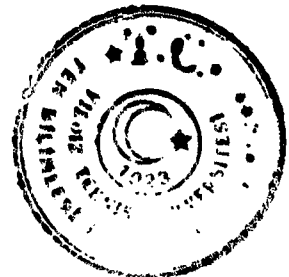
şeklinde olur. Bu durumda (4.7)'e göre $\sigma_{12} = \sigma_{22} = \sigma_{23} = 0$ kabul edilirse (3.4) bünye denklemleri

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} & A_{15} \\ A_{31} & A_{33} & A_{35} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

haline gelir. (4.7), (4.8) ve (3.20) göz önüne alınarak (3.14) ve (3.18) ile ifade edilen işlemler yapılırsa kuvvetlerle yerdeğiştirmeler arasındaki bağıntılar

$$\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{33} \\ T_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} & 0 \\ A_{13} & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} hu_{,1} \\ hv_{,3} \\ h(u_{,3} + v_{,1}) \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{33} \\ M_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} & 0 \\ A_{13} & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2I_1(h)w_{,11} \\ -2I_1(h)w_{,33} \\ -4I_1(h)w_{,13} \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$



$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 M_{33}}{\partial x_3^2} = -2\rho I_1(h) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} - \frac{h}{2I_1(h)} w \right) \quad (4.12)$$

biçiminde elde edilmiş olur. Plak-kiriş için (4.11) ve (4.12) hareket denklemleri Bölüm IV.1'de anlatılanlardan dolayı

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} = -2\rho I_1(h) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{h}{2I_1(h)} w \right) \quad (4.13)$$

biçiminde elde edilir.

IV. 3. PLAK-KİRİŞLERİN MİNDLİN-REİSSNER TEORİSİ ÇERÇEVESİNDE TİTREŞİM DENKLEMLERİ

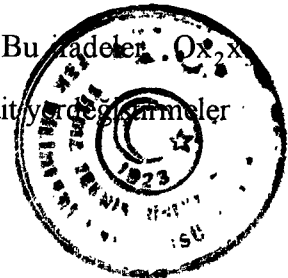
Plakın Ox_1x_2 düzleminde yer aldığı Bölüm I.2'de 1.4 eşitliği ile verilen yerdeğiştirme ifadelerinde $\alpha = 0$ olması durumunda

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_2) + x_3 \psi_1$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = v(x_1, x_2) + x_3 \psi_2$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2). \quad (4.14)$$

Reissner-Mindlin hipotezinin yerdeğiştirmeleri elde edilmiş olunur. Bu ifadeler Ox_1x_2 düzlemi içindeki plak için düzenlenirse Reissner-Mindlin hipotezine ait yerdeğiştirmeler



Reissner-Mindlin hipotezinin yerdeğiştirmeleri elde edilmiş olur. Bu ifadeler Ox_2x_3 düzlemi içindeki plak için düzenlenirse Reissner-Mindlin hipotezine ait yerdeğiştirmeler

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_3) + x_2 \psi_1(x_1, x_3)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = v(x_1, x_3) + x_2 \psi_3(x_1, x_3) \quad (4.15)$$

biçiminde elde edilmiş olur. (3.5) ifadesine göre plağın şekildeğiştirmeleri

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, & \varepsilon_{12} &= \frac{\partial w}{\partial x_1} + \psi_1, & \varepsilon_{13} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) + x_2 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \right), \\ \varepsilon_{22} &= 0, & \varepsilon_{23} &= \frac{\partial w}{\partial x_3} + \psi_3, & \varepsilon_{33} &= \frac{\partial v}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

şeklinde olur. Daha önce olduğu gibi $\sigma_{22} = 0$ kabul edilir ve (4.16) göz önüne alınırsa (3.4) bünye denklemleri

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ & & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ & & & A_{55} & A_{56} \\ & & & & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

haline gelir. (4.16), (4.17) ve (3.20) göz önüne alınarak (3.14) ve (3.18) ile ifade edilen işlemler yapılırsa kuvvetlerle yerdeğiştirmeler arasındaki bağıntılar



$$\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{33} \\ N_{23} \\ T_{13} \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} & 0 & 0 & A_{16} \\ A_{13} & A_{33} & 0 & 0 & A_{36} \\ 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & 0 \\ 0 & 0 & A_{45} & A_{55} & 0 \\ A_{16} & A_{36} & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} hu_{,1} \\ hv_{,3} \\ h(w_{,3} + \psi_3) \\ h(u_{,3} + v_{,1}) \\ h(w_{,1} + \psi_1) \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{33} \\ M_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} & 0 \\ A_{13} & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2I_1(h)\psi_{1,1} \\ 2I_1(h)\psi_{3,3} \\ 2I_1(h)(\psi_{1,3} + \psi_{3,1}) \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

biçiminde olur. Buna göre (3.15) ve (3.19) hareket denklemleri, sırasıyla,

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_3} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (4.20)$$

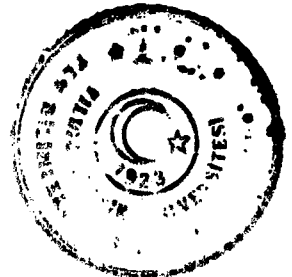
$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{13}}{\partial x_3} - N_{12} = 2\rho I_1(h) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{33}}{\partial x_3} - N_{23} = 2\rho I_1(h) \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial t^2} \quad (4.21)$$

biçiminde elde edilmiş olur. Plak-kiriş için (4.20) ve (4.21) hareket denklemleri Bölüm IV.1'de anlatılanlardan dolayı

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - N_{12} = -2\rho I_1(h) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \quad (4.22)$$

biçiminde elde edilir.



IV. 4. PLAK-KİRİŞLERİN FARKLI PLAK TEORİLERİ ÇERÇEVESİNDE STABİLİTE DENKLEMİNİN ELDE EDİLMESİ

Bölüm III.2'de genel anlamda bir plağın stabilite denklemleri elde edilmişti. Şimdi de hem yapısında eğrisel yapıya sahip ((2.25) eşitliğinde $\varepsilon \neq 0$) ve hem de yapısında eğrisellik olmayan ((2.25) eşitliğinde $\varepsilon = 0$) ortotrop plağın ve yukarıda anlatılanlar çerçevesinde plak-kirişin, bazı özel durumlar için, stabilite denklemleri çıkarılacaktır.

Bu amaçla kuvvetlerle yerdeğiştirmeler arasındaki bağıntıları gösteren (3.21)-(3.22) eşitlikleri yapısında eğrisel yapı olmayan ortotrop bir plak için,

$$\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{33} \\ N_{23} \\ T_{13} \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} hu_{,1} \\ hv_{,3} \\ I_1(h)\varphi_3 \\ h(u_{,3}+v_{,1}) \\ I_1(h)\varphi_1 \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{33} \\ M_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} & 0 \\ A_{13} & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2I_1(h)w_{,11}+I_2(h)\varphi_{1,1} \\ -2I_1(h)w_{,33}+I_2(h)\varphi_{3,3} \\ -4I_1(h)w_{,13}+I_2(h)(\varphi_{1,3}+\varphi_{3,1}) \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

biçiminde olmaktadır. Ayrıca plak stabilite denklemlerini gösteren

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} - hp \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} - hq \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_3^2} = 0, \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} - hp \frac{\partial^2 w^0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_3} - hq \frac{\partial^2 w^0}{\partial x_3^2} = 0,$$

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} - hp \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} - hq \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_3^2} = 0, \quad (3.45)$$



$$\begin{aligned}
& \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - p \left(-2I_1(h) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + I_2(h) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} \right) - N_{12} + \\
& \frac{\partial M_{13}}{\partial x_3} - q \left(-2I_1(h) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_3^2} + I_2(h) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_3^2} \right) = 0 \\
& \frac{\partial M_{13}}{\partial x_1} - p \left(-2I_1(h) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_3} + I_2(h) \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1^2} \right) - N_{23} + \\
& \frac{\partial M_{33}}{\partial x_3} - q \left(-2I_1(h) \frac{\partial^3 w}{\partial x_3^3} + I_2(h) \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_3^2} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.46}$$

eşitlikleri de kullanılacaktır.

Özel Durumlar:

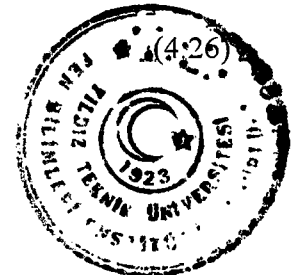
A) $u_1^0 = u_3^0 = 0$ ve $\varphi_1 = \varphi_3 = 0$ olması durumu (Kirchhoff-Love):

Burkulmaya zorlanmış olan plakta kritik yüke ulaşıncaya kadar x_1 ve x_3 doğrultularında hiçbir yerdeğiştirme yapmamaktadır ($u_1^0 = u_3^0 = 0$) ve plakta kayma şekildeğiştirmelerinin etkisi göz önüne alınmamaktadır ($\varphi_1 = \varphi_3 = 0$). Yani Kirchhoff-Love plak teorisi geçerlidir. Bu durumda (3.45)-(3.46) plak stabilite denklemleri

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_3} = hp \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + hq \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2}, \quad \frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} = 0 \tag{4.25}$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{13}}{\partial x_3} - N_{12} = -2I_1(h) \left(p \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + q \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_3^2} \right)$$

$$\frac{\partial M_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{33}}{\partial x_3} - N_{23} = -2I_1(h) \left(p \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_3} + q \frac{\partial^3 w}{\partial x_3^3} \right)$$



biçimine gelir. (4.26) ifadelerinden birincisi x_1 'e ikincisi de x_3 'e göre türevi alınıp (4.25)'in ikinci ifadesi de göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 M_{33}}{\partial x_3^2} - ph \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - qh \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} = \\ - 2I_1(h) \left[p \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} \right) + q \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x_3^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

elde edilir. (4.24) ifadelerinin ilgili değerleri (4.27)'de yerlerine konursa

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + (2A_{13} + 4A_{55}) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} + A_{33} \frac{\partial^4 w}{\partial x_3^4} = \\ - p \frac{12}{h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - q \frac{12}{h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} + \left[p \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \Delta w + q \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \Delta w \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

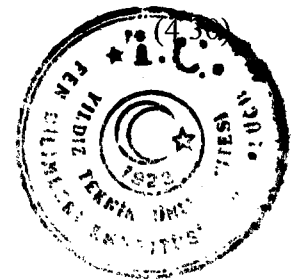
elde edilir. Burada

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (4.29)$$

biçimindedir. (4.25)-(4.29) ifadeleri hem eğrisel yapıya sahip ($\varepsilon \neq 0$) hem de yapısında eğrisellik olmayan ($\varepsilon = 0$) ortotrop plaklar için geçerlidir.

Belirtelim ki (4.28) eşitliğinin son teriminin katkısı ihmal edilebilecek derecede küçük olarak alınır ve izotrop halde, λ ve μ Lamé sabitleri cinsinden, $A_{11} = A_{33} = \lambda + 2\mu$, $2A_{13} + 4A_{55} = 2(\lambda + 2\mu)$, $A_{53} = \mu$ ve $A_{13} = \mu$ olduğu hatırlanırsa (4.28) eşitliği

$$\Delta \Delta w = - \frac{1}{D} \left(p \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + q \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} \right) \quad (4.30)$$



biçimine gelir ki bu da Timoshenko and Woinowski-Krieger (1959) ve Timoshenko and Gere (1961) kitabındaki ile aynıdır. Burada $D = A_{11}h^2 / 12$ plak rijitliğidir. Plak-kirişte ise (4.30) eşitliği $x_1/l_1 = \bar{x}$ boyutsuzlaştırma işlemi yapılırsa

$$\frac{d^4 \bar{w}}{d\bar{x}^4} + \frac{12pl_1^2}{A_{11}h^2} \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} = 0 \quad (4.31)$$

biçiminde olur ki bu $\bar{x} = 0$ ve $\bar{x} = 1$ 'de sınır koşulları verilen basit mesnetli kirişin

$$p_{kr} = \frac{\pi^2 A_{11} h^2}{12 l_1^2} \quad (4.32)$$

değeri biçiminde elde edilir. Bu ise klasik Euler burkulma yükünü vermektedir.

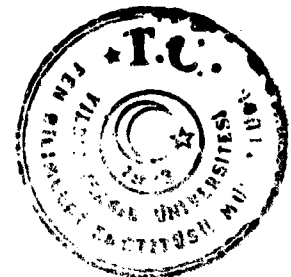
B) Plak-kirişte $u_3^0 = 0$ ve $\varphi_3 = 0$ olması durumu (Klasik Durum):

Klasik durumda plak-kiriş için (3.45)-(3.46) stabilite denklemleri

$$\frac{dT_{11}}{dx_1} - hp \frac{d^2 u_1^0}{dx_1^2} = 0, \quad \frac{dN_{12}}{dx_1} - hp \frac{d^2 w}{dx_1^2} = 0, \quad (4.33)$$

$$\frac{dM_{11}}{dx_1} - p \left(-2I_1(h) \frac{d^3 w}{dx_1^3} + I_2(h) \frac{d^2 \varphi_1}{dx_1^2} \right) - N_{12} = 0 \quad (4.34)$$

haline gelir. Plak-kirişte kritik yüke ulaşıncaya kadar x_1 doğrultusunda yerdeğiştirmenin olmadığı ($u_1^0 = 0$), ancak kayma şekildeğiştirmesinin etkisinin göz önüne alındığı



($\varphi_1 \neq 0$) durumunda (4.33) eşitliğindeki ilk ifade düşer. Bu durumda (4.34) ifadesinin x_1 'e göre türevi alınıp (4.33)'ün ikinci ifadesi burada yerine konursa

$$\frac{d^2 M_{11}}{dx_1^2} - p \left(-2I_1(h) \frac{d^4 w}{dx_1^4} + I_2(h) \frac{d^3 \varphi_1}{dx_1^3} \right) - ph \frac{d^2 w}{dx_1^2} = 0 \quad (4.35)$$

elde edilir. Ortotrop ($\varepsilon = 0$) bir plak-kiriş için (3.21)-(3.22) ifadelerinden ilgili terimler (4.33)'ün ikinci ifadesi ve (4.35) için kullanılırsa

$$A_{66} I_1(h) \frac{d\varphi_1}{dx_1} = hp \frac{d^2 w}{dx_1^2}, \quad (4.36)$$

$$(A_{11} - p) \left(-2I_1(h) \frac{d^4 w}{dx_1^4} + I_2(h) \frac{d^3 \varphi_1}{dx_1^3} \right) - A_{66} I_1(h) \frac{d\varphi_1}{dx_1} = 0 \quad (4.37)$$

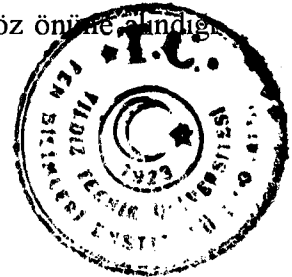
elde edilir. (4.36) eşitliği (4.37)'de yerine konursa

$$A_{11} \left(1 - \frac{p}{A_{11}} \right) \left(-2I_1(h) + \frac{hp}{A_{66}} \frac{I_2(h)}{I_1(h)} \right) \frac{d^4 w}{dx_1^4} - hp \frac{d^2 w}{dx_1^2} = 0 \quad (4.38)$$

biçiminde bir ifadeye ulaşılır. $p/A_{11} \ll 1$ olduğu göz önüne alınır ve $x_1/l_1 = \bar{x}$ boyutsuzlaştırma işlemi yapılırsa

$$\frac{d^4 \bar{w}}{d\bar{x}_1^4} + \frac{pl_1^2}{h^2 \left[\frac{A_{11}}{12} - \frac{A_{11}p}{10A_{66}} \right]} \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}_1^2} = 0 \quad (4.39)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Buradan kayma şekildeğiştirmesinin göz önüne alındığında ortotrop bir plak-kirişin boyutsuz kritik burkulma yükü



$$\frac{p_{kr}}{A_{22}^0} = \frac{\pi^2 h^2 A_{11}^0 / A_{22}^0}{12 I_1^2 \left[1 + 0.1 \frac{\pi^2 h^2 A_{11}^0}{I_1^2 A_{66}^0} \right]} \quad (4.40)$$

biçiminde bulunur. (4.40) ifadesi incelendiğinde ve (4.32) ile karşılaştırıldığında görülüyor ki plak-kirişin $h/l_1 \ll 1$ olduğunda her zaman $0.1 \frac{\pi^2 h^2 A_{11}^0}{I_1^2 A_{66}^0} \ll 1$ olmayabilir ve bu durumlarda klasik sonuçların gerçek sonuçlardan daha uzak olduğu gözükmemektedir.

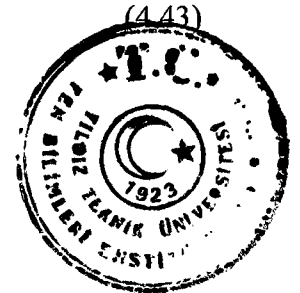
Ele alınan bu basit örnek anizotrop (kompozit) malzemelerden yapılmış plakların incelenmesinde geliştirilmiş plak teorilerinin uygulanmasının ne kadar önem taşıdığını açıkça göstermektedir.

Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden yapılmış bir plak-kirişin ele alınacak burkulma problemi için ise (4.33) ve (4.34)'de (3.21) ve (3.22) ifadeleri göz önüne alınırsa

$$h \left(A_{11} \frac{d^2 u_1^0}{dx_1^2} + \frac{dA_{11}}{dx_1} \frac{du_1^0}{dx_1} \right) + I_1(h) \left(A_{16} \frac{d\phi_1}{dx_1} + \frac{dA_{16}}{dx_1} \phi_1 \right) - ph \frac{d^2 u_1^0}{dx_1^2} = 0 \quad (4.41)$$

$$h \left(A_{16} \frac{d^2 u_1^0}{dx_1^2} + \frac{dA_{16}}{dx_1} \frac{du_1^0}{dx_1} \right) + I_1(h) \left(A_{66} \frac{d\phi_1}{dx_1} + \frac{dA_{66}}{dx_1} \phi_1 \right) - ph \frac{d^2 w}{dx_1^2} = 0 \quad (4.42)$$

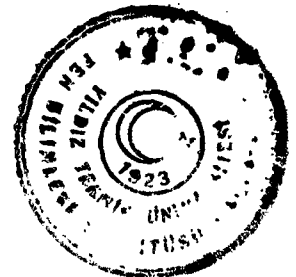
$$\begin{aligned} & (A_{11} - p) \left(-2I_1(h) \frac{d^3 w}{dx_1^3} + I_2(h) \frac{d^2 \phi_1}{dx_1^2} \right) + \\ & + \frac{dA_{11}}{dx_1} \left(-2I_1(h) \frac{d^2 w}{dx_1^2} + I_2(h) \frac{d\phi_1}{dx_1} \right) - hA_{16} \frac{du_1^0}{dx_1} = 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$



denklemleri ve (3.48)-(3.49)'dan

$$T_{11} = 0, \quad M_{11} = 0 \quad x_1 = 0, 1_1 \quad (4.44)$$

sınır koşulları elde edilir.



BÖLÜM V.

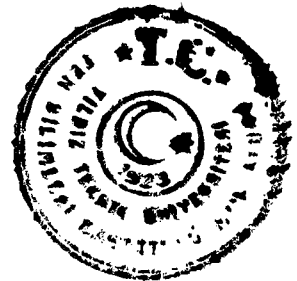
EĞRİSEL YAPIYA SAHİP KOMPOZİT MALZEMEDEN YAPILMIŞ PLAK-KİRİŞLERİN DOĞAL TİTREŞİM ve STABİLİTE PROBLEMLERİNİN İNCELENMESİNDE KULLANILAN YÖNTEMLER

V. 1. GALERKİN YÖNTEMİ

Bu yöntemin tezde yapılan araştırmalara uygulanmasını eğrisel yapıya sahip kompozit malzemedен yapılmış plak-kirişlerin doğal titreşimlerinin, yerdeğiştirme genliklerinin sağladığı (4.3) denklemlerini (4.4) sınır koşulları çerçevesinde verilen özdeğer probleminin incelenmesi örneğinde açıklayalım.

Görüldüğü gibi (4.3) denklemleri değişken katsayılı diferansiyel denklemlerdir. Bu yüzden ele alınan problemlerin matematiksel açıdan incelenmesi çok zorlaşır ve bu problemlerin kesin analitik çözümlerinin elde edilmesi imkansızlaşır. Bilindiği üzere bu veya buna benzer durumlarda yaklaşık analitik çözümler elde edilmesine çalışılır. Bunun için varyasyonel yöntemler ve daha başka bir yöntem olarak Galerkin Yöntemi kullanılabilir. Adı geçen bu yöntemlerin uygulanabilmesi için aranan fonksiyonların belli bir sınıf tam fonksiyonlarla ifade edilebilmesi ve bu tam fonksiyonlar sınıfını oluşturan herbir fonksiyonun aranan fonksiyonların sağladığı sınır koşullarını otomatik olarak sağlaması gerekmektedir. Dolayısıyla, bakılan problemlerin ve (4.3)-(4.4) probleminin incelenmesinde Galerkin Yönteminin uygulanması X_w , X_u ve X_{ϕ_1} fonksiyonlarının öyle tam fonksiyonlarla ifade edilmesini gerektirir ki bu tam fonksiyonlar (4.4) koşullarını otomatik olarak sağlasınlar.

Adı geçen tam fonksiyonların belirlenebilmesi için diferansiyel denklemler konusundan bilindiği üzere aşağıdaki gibi bir uygulama yapılır:



(4.3) denklemlerinin değişken katsayıları (sabit katsayı+bir fonksiyon) gibi gösterilebildiğini varsayalım. (4.3)-(4.4) denklemlerini adı geçen sabit katsayılarla, yani katsayılara eklenen fonksiyonları göz önüne almadan, yazalım. Sonuçta, sabit katsayılı denklem ve sabit katsayılarla verilen sınır koşulları elde edilir. Elde edilen bu sabit katsayılı denklemin ve buna karşı gelen özdeğer probleminin sayılabilir sayıda özdeğer ve özfonksiyonun ifadesi analitik şekilde yazılır. Bundan sonra (4.3)-(4.4) probleminin çözümünde aranan X_w , X_u ve X_{φ_1} fonksiyonları yukarıdaki sabit katsayılı, özfonksiyonların serisi şeklinde aranır. (4.4) sınır koşullarında katsayıların değişken veya sabit olması bu koşulların sağlanmasına bir engel yaratmadığı hallerde bu koşullar X_w , X_u ve X_{φ_1} için yukarıda adı geçen özfonksiyonlarla yazılmış seri ifadeleri için de aynı hassasiyet sağlanacaktır.

Söylenenleri (4.3)-(4.4) örneğinde yazarsak ve eğer $A_{11} = A_{11}^0$, $A_{16} = A_{16}^0$ ve $A_{66} = A_{66}^0$ kabul edilirse, $X_{u_n}^0 = \cos(n\pi x_1/l_1)$, $X_{w_n}^0 = \sin(n\pi x_1/l_1)$ ve $X_{\varphi_{1n}}^0 = \cos(n\pi x_1/l_1)$ özfonksiyonları elde edilir. Bu öz fonksiyonlar (4.4) sınır koşullarını ($A_{16} = 0$ olduğundan) otomatik olarak sağlarlar. Böylece (4.3)-(4.4) probleminin incelenmesi için X_w , X_u ve X_{φ_1} fonksiyonlarının

$$X_u = \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_{u_n}^0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi x_1}{l_1}, \quad X_w = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_{w_n}^0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x_1}{l_1}$$

$$X_{\varphi_{1n}} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n X_{\varphi_{1n}}^0 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} \quad (5.1)$$

seçilmesini gerektirirler.

Şimdi bu X_w , X_u ve X_{φ_1} fonksiyonlarının (4.4) koşullarını otomatik olarak sağlayıp sağlamadığına bakalım. (4.4) koşullarından görüldüğü gibi birinci ve üçüncü sınır



koşulları otomatik olarak sağlanmaktadır. (4.4)'ün ikinci denklemi ise bu fonksiyonlarla her zaman sağlanmadığı açıkça görülmektedir. Ancak öyle özel bir durum var ki bu durumda bu sınır koşulu da otomatik olarak sağlanabilir. Bu durum $A_{16}(x_1)$ fonksiyonunun

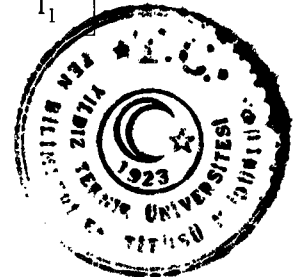
$$A_{16}(0) = A_{16}(l_1) = 0 \quad (5.2)$$

olmasıdır. Bu ise malzeme yapısındaki eğriselliğin formunun verilmesine bağlıdır. Böylece, Galerkin Yönteminin ele alınan (4.3)-(4.4) problemine kesin bir şekilde uygulanabilmesi için yapılan araştırmalarda öyle eğrisellik formları ele alınmalıdır ki (5.2) koşulu sağlansın. Bu koşul sağlanmadığında (4.4)'ün ikinci denklemi X_w , X_u ve X_{ϕ_1} 'nin seçilen ifadeleri ile ancak yaklaşık sağlanabilir. Şimdilik (5.2) koşulunun sağlandığını kabul edelim ve (4.3) ile verilen problemin çözümünü (5.1) şeklinde arayalım.

(5.1) ifadesini (4.3)'te yerine koyup, $\sin(n\pi x_1/l_1)$ ve $\cos(n\pi x_1/l_1)$ fonksiyonlarının da ortogonalliğini göz önüne alıp (4.3) denklemlerinde (5.1) ifadelerindeki bilinmeyen B_n , C_n , D_n sabitleri için homojen, lineer, cebrik denklemler sistemi elde edilir. Bu denklemlerin sıfırdan farklı çözümünün olabilmesi için ise bunların başdeterminantı sıfıra eşit olmalıdır. Bu determinantın sıfıra eşitlenmesinden elde edilen denkleme *frekans denklemi* denir. Frekans denkleminin çözümlerini bilgisayar yardımıyla elde edip, ele alınan plak-kirişin doğal titreşim frekansları belirlenir.

Şimdi söylenenleri sırasıyla yazalım. İlk önce (5.1)'i (4.3)'te yerine koyarsak

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n h \left[-A_{11}(x_1) \left(\frac{n\pi}{l_1} \right)^2 \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} - \frac{dA_{11}(x_1)}{dx_1} \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} + \rho \omega^2 \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} D_n I_1(h) \left[-A_{16}(x_1) \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} + \frac{dA_{16}(x_1)}{dx_1} \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] = 0$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n h \left[-A_{16}(x_1) \left(\frac{n\pi}{l_1} \right)^2 \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} - \frac{dA_{16}(x_1)}{dx_1} \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[\rho h \omega^2 \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} D_n I_1(h) \left[-A_{66}(x_1) \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} + \frac{dA_{66}(x_1)}{dx_1} \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n h \left[A_{16}(x_1) \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n 2I_1(h) \left[A_{11}(x_1) \left(\frac{n\pi}{l_1} \right)^3 \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} + \frac{dA_{11}(x_1)}{dx_1} \left(\frac{n\pi}{l_1} \right)^2 \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} - \rho \omega^2 \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n I_2(h) \left[-A_{11}(x_1) \left(\frac{n\pi}{l_1} \right)^2 \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} - \frac{dA_{11}(x_1)}{dx_1} \left(\frac{n\pi}{l_1} \right) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{I_1(h)}{I_2(h)} A_{66}(x_1) \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} + \rho \omega^2 \cos \frac{n\pi x_1}{l_1} \right] = 0$$

(5.3)

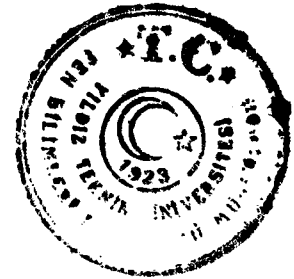
elde edilir. (5.3) denklemlerinde

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\rho \omega^2 l_1^2}{A_{22}^0}, \quad x = \frac{x_1}{l_1} \quad (5.4)$$

boyutsuzlaştırmaları yapılırsa, bu denklemler

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{1}{l_1} \left[-A'_{11}(x) (n\pi)^2 \cos n\pi x - n\pi \frac{dA'_{11}(x)}{dx} \sin n\pi x + \bar{\omega}^2 \cos n\pi x \right] +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n I_1^2 \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[-n\pi A'_{16}(x) \sin n\pi x + \frac{dA'_{16}(x)}{dx} \cos n\pi x \right] = 0$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{1}{l_1} \left(\frac{h}{l_1} \right) \left[-(n\pi)^2 A'_{16}(x) \cos n\pi x - n\pi \frac{dA'_{16}(x)}{dx} \sin n\pi x \right] +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{1}{l_1} \left(\frac{h}{l_1} \right) \left[\bar{\omega}^2 \sin n\pi x \right] + \sum_{n=1}^{\infty} D_n l_1^2 \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^3 \left[-n\pi A'_{66}(x) \sin n\pi x + \frac{dA'_{66}(x)}{dx} \cos n\pi x \right] = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{1}{l_1} \left(\frac{h}{l_1} \right) \left[n\pi A'_{16}(x) \sin n\pi x \right] +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{1}{l_1} \frac{1}{12} \left(\frac{h}{l_1} \right)^3 \left[(n\pi)^3 A'_{11}(x) \cos n\pi x + (n\pi)^2 \frac{dA'_{11}(x)}{dx_1} \sin n\pi x - n\pi \bar{\omega}^2 \cos n\pi x \right] +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n l_1^2 \frac{1}{240} \left(\frac{h}{l_1} \right)^5 \left[-(n\pi)^2 A'_{11}(x) \cos n\pi x - n\pi \frac{dA'_{11}(x)}{dx_1} \sin n\pi x - \right.$$

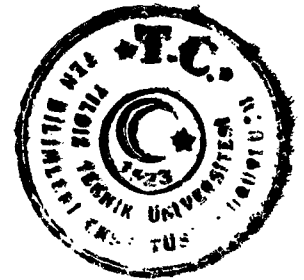
$$\left. -10 \left(\frac{h}{l_1} \right)^{-2} A'_{66}(x) \cos n\pi x + \bar{\omega}^2 \cos n\pi x \right] = 0$$

(5.5)

haline gelir. Burada,

$$A'_{11}(x) = \frac{A_{11}(x)}{A_{22}^0}, \quad A'_{16}(x) = \frac{A_{16}(x)}{A_{22}^0}, \quad A'_{66}(x) = \frac{A_{66}(x)}{A_{22}^0} \quad (5.6)$$

işaretlemeleri kabul edilmiştir. (5.5)'in birinci ifadesini $\cos n\pi x$, ikinci ifadesini $\sin n\pi x$ ve üçüncü ifadesini $\cos n\pi x$ ile çarpıp 0'dan 1'e kadar x 'e göre entegre edilirse, burada B_n , C_n , D_n 'ler için aşağıdaki denklemler, yani,



$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \frac{1}{l_1} \left[- (n\pi)^2 \int_0^1 (A'_{11}(x) \cos n\pi x \cos m\pi x) dx - n\pi \int_0^1 \left(\frac{dA'_{11}(x)}{dx} \sin n\pi x \cos m\pi x \right) dx + \right. \\ \left. + \bar{\omega}^2 \int_0^1 \cos n\pi x \cos m\pi x dx \right] + \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{nm} l_1^2 \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[- n\pi \int_0^1 (A'_{16}(x) \sin n\pi x \cos m\pi x) dx + \int_0^1 \left(\frac{dA'_{16}(x)}{dx} \cos n\pi x \cos m\pi x \right) dx \right] = 0$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \frac{1}{l_1} \left[- (n\pi)^2 \int_0^1 (A'_{16}(x) \cos n\pi x \sin m\pi x) dx - n\pi \int_0^1 \left(\frac{dA'_{16}(x)}{dx} \sin n\pi x \sin m\pi x \right) dx \right] + \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{nm} \frac{1}{l_1} \left[\bar{\omega}^2 \int_0^1 \sin n\pi x \sin m\pi x dx \right] + \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{nm} l_1^2 \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[- n\pi \int_0^1 (A'_{66}(x) \sin n\pi x \sin m\pi x) dx + \int_0^1 \left(\frac{dA'_{66}(x)}{dx} \cos n\pi x \sin m\pi x \right) dx \right] = 0$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \frac{1}{l_1} \left[n\pi \int_0^1 (A'_{16}(x) \sin n\pi x \cos m\pi x) dx \right] + \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{nm} \frac{1}{l_1} \frac{1}{12} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[(n\pi)^3 \int_0^1 (A'_{11}(x) \cos n\pi x \cos m\pi x) dx + \right. \\ \left. (n\pi)^2 \int_0^1 \left(\frac{dA'_{11}(x)}{dx_1} \sin n\pi x \cos m\pi x \right) dx - n\pi \bar{\omega}^2 \int_0^1 (\cos n\pi x \cos m\pi x) dx \right] + \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{nm} l_1^2 \frac{1}{240} \left(\frac{h}{l_1} \right)^4 \left[- (n\pi)^2 \int_0^1 (A'_{11}(x) \cos n\pi x \cos m\pi x) dx - \right. \\ \left. - n\pi \int_0^1 \left(\frac{dA'_{11}(x)}{dx_1} \sin n\pi x \cos m\pi x \right) dx - 10 \left(\frac{h}{l_1} \right)^{-2} \int_0^1 (A'_{66}(x) \cos n\pi x \cos m\pi x) dx + \right. \\ \left. + \bar{\omega}^2 \int_0^1 (\cos n\pi x \cos m\pi x) dx \right] = 0$$



elde edilir. Burada

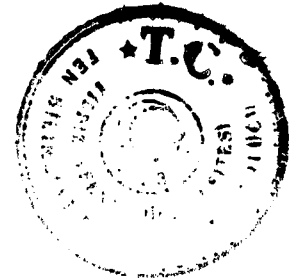
$$\begin{aligned}
 I_{1nm} &= \int_0^1 (A'_{11}(x) \cos n\pi x \cos m\pi x) dx & I_{2nm} &= \int_0^1 \left(\frac{dA'_{11}(x)}{dx} \sin n\pi x \cos m\pi x \right) dx \\
 I_{3nm} &= \int_0^1 (A'_{16}(x) \sin n\pi x \cos m\pi x) dx & I_{4nm} &= \int_0^1 \left(\frac{dA'_{16}(x)}{dx} \cos n\pi x \cos m\pi x \right) dx \\
 I_{5nm} &= \int_0^1 (A'_{16}(x) \cos n\pi x \sin m\pi x) dx & I_{6nm} &= \int_0^1 \left(\frac{dA'_{16}(x)}{dx} \sin n\pi x \sin m\pi x \right) dx \\
 I_{7nm} &= \int_0^1 (A'_{66}(x) \sin n\pi x \sin m\pi x) dx & I_{8nm} &= \int_0^1 \left(\frac{dA'_{66}(x)}{dx} \cos n\pi x \sin m\pi x \right) dx \\
 I_{9nm} &= \int_0^1 (A'_{66}(x) \cos n\pi x \cos m\pi x) dx & &
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

biçiminde işaretlemeler kabul edilirse (5.7) denklemleri

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \frac{1}{l_1} \left[-(n\pi)^2 I_{1nm} - n\pi I_{2nm} + \frac{1}{2} \delta_{nm} \bar{\omega}^2 \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{nm} l_1^2 \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[-n\pi I_{3nm} + I_{4nm} \right] = 0$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \frac{1}{l_1} \left[-(n\pi)^2 I_{5nm} - n\pi I_{6nm} \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{nm} \frac{1}{l_1} \left[\frac{1}{2} \delta_{nm} \bar{\omega}^2 \right] +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{nm} l_1^2 \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[-n\pi I_{7nm} + I_{8nm} \right] = 0$$



$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \frac{1}{l_1} [n\pi I_{3nm}] + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{nm} \frac{1}{l_1} \frac{1}{12} \left(\frac{h}{l_1}\right)^2 \left[(n\pi)^3 I_{1nm} + (n\pi)^2 I_{2nm} - n\pi \frac{1}{2} \delta_{nm} \bar{\omega}^2 \right] +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{nm} l_1^2 \frac{1}{240} \left(\frac{h}{l_1}\right)^4 \left[-(n\pi)^2 I_{1nm} - n\pi I_{2nm} - 10 \left(\frac{h}{l_1}\right)^{-2} I_{9nm} + \frac{1}{2} \delta_{nm} \bar{\omega}^2 \right] = 0$$

(5.9)

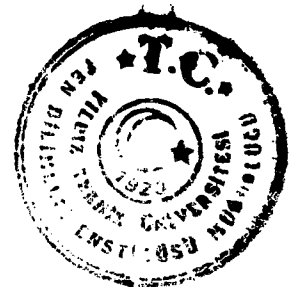
haline gelir. (5.9)'da δ_{nm} Kronecker Deltası olup;

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \quad (5.10)$$

biçimindedir.

Yukarıda bahsedildiği gibi (5.9) homojen, lineer, cebrik denklemler sisteminin sıfırdan farklı çözümünün olabilmesi için bu sistemin başdeterminantının sıfıra eşit olması gerekir. Açıkça görüldüğü gibi (5.9) sistemi sonsuz sayıda denklem içermektedir. Bu nedenle bu denklemin başdeterminantının mertebesi de sonsuzdur. Bu tür denklemlerle fizik, matematik ve mekanikte sık sık karşılaşılır. Bu denklemlerin incelenmesinde '*Kesme Yöntemi*' denilen bir yöntemden faydalanılır. Bu yönetime göre sonsuz sayıdaki denklem uygun sonlu sayıdaki denklemle yer değiştirip, bu sonlu sayıdaki denklem veya sonlu sayıdaki denklemin başdeterminantının sıfıra eşitlenmesinden elde edilen denklem incelenir. Daha sonra sonlu sayıdaki denklemlerin sayısı artırılarak elde edilen yeni sonuçlar daha önce elde edilenlerle karşılaştırılır. Karşılaştırmada elde edilen sayısal sonuçların yeteri kadar birbirine yakın olduğu kanaatine gelindiğinde bu işlem durdurulur. Böylece elde edilen sonuçlar inceleme sonuçları olarak kabul edilir.

Söylenenler (5.9) denklemler sistemine uygulanırsa aşağıdakileri söylenebilir:



Farzedelim ki bu denklemlerdeki $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty}$, $\sum_{m=1}^5 \sum_{n=1}^5$ ile değiştirilirse, böylece (5.9)

denklemler sisteminden 15 denklem alınır. İlk önce bu 15 denklemin başdeterminantı sıfıra eşitlenip $\bar{\omega}^2$ değerleri bulunur. Daha sonra n ve m değerlerini (5.9)'da 1'den 5'e kadar değil de 1'den 10'a kadar değiştirip aynı işlem yapılarak $\bar{\omega}^2$ değerleri aranır. Daha sonra bu iki $\bar{\omega}^2$ değerleri karşılaştırılır. Eğer bu değerler birbirlerine yeteri kadar yakınsa, yani bunlar arasındaki fark $10^{-4} - 10^{-5}$ mertebesinde ise, aranan öz değerlerin (frekansların) aranma işlemleri ele alınan durumda bitmiş kabul edilebilir.

Eğer bu karşılaştırmada elde edilen $\bar{\omega}^2$ değerleri birbirlerinden çok farklı iseler, (5.9) denklemlerinde m ve n'nin değişim aralığını büyüterek yeterli derecede sayısal yakınsaklık elde edilene kadar bu işlemlere devam ettirilir. Böylece, Galerkin Yöntemi ve bu yöntemin tezde ele alınan problemlere uygulanması açıklanmış olmaktadır.

Galerkin Yönteminin üç boyutlu plaklara ve plak-kirişlerin stabilitesi problemlerine uygulanması, plak-kirişler için yukarıda açıklandığı biçime benzer şekilde yapılacağından, burada ele alınmasına gerek görülmemiştir.

Ele alınan problemlere Galerkin Yönteminin uygulanmasındaki bir konuyu da not edelim ki, bu yöntemin pratik açıdan uygulanabilmesi (5.8)'deki $A_{11}(x)$, $A_{16}(x)$ ve $A_{66}(x)$ fonksiyonlarının ifadelerine dahil olan ε parametresinin çok da küçük değerler almasını gerektirmez. Ancak ele alınan problemlere pertürbasyon yönteminin uygulanması ve bunun pratik açıdan geçerli olması yukarıda adı geçen ε parametresinin değerce çok küçük olmasını gerektirebilir. Söylenenlerden dolayı tez kapsamında ele alınan araştırmaların Galerkin Yöntemi ile yapılması daha uygun görülmektedir.

Yukarıda söylenenleri daha iyi bir şekilde görmek için (4.3)-(4.4) problemine pertürbasyon yönteminin uygulanmasını aşağıda ele alalım.



V. 2. PERTÜRBASYON YÖNTEMİ

Bilindiği üzere bu yöntem çok sayıda lineer ve nonlineer problemlerin incelenmesinde kullanılmış ve bu yöntem hakkında yeterince bilimsel araştırma yapılmış ve yapılmaktadır. Örneğin, bu yöntemin geliştirilmesi ve uygulanması geniş bir biçimde Nayfeh (1973)'de verilmiştir. Şimdi bu yöntemin (4.3)-(4.4) problemlerine uygulanması için (2.24)-(2.26) ifadeleri ile belirlenen $A_{ij}(x_1)$ fonksiyonlarından (4.3)'deki $A_{11}(x_1)$, $A_{16}(x_1)$ ve $A_{66}(x_1)$ fonksiyonlarını ε 'nin serisi şeklinde (2.32) formunda yazarak bu denklemleri (2.33) şekline sokmak gerekir. (2.24) ifadelerini (2.32) serisi şeklinde yazabilmek için ise (2.25)'deki $\varepsilon \frac{df}{dx_1}$ teriminin $\varepsilon \left| \frac{df}{dx_1} \right| < 1$ koşulunu sağlaması gerekmektedir. Söylenenleri (4.3)-(4.4) problemine uygulamak için ilk önce $A_{11}(x_1)$, $A_{16}(x_1)$ ve $A_{66}(x_1)$ 'i küçük ε parametresinin (2.24)-(2.26)'dan elde edilen (2.32) serisinin ifadesi

$$\begin{aligned} A_{11}(x) &= A_{11}^0 + \varepsilon^2 (a(x))^2 A_{111} + \dots & A_{16}(x) &= \varepsilon a(x) A_{161} + \varepsilon^3 (a(x))^3 A_{162} + \dots \\ A_{66}(x) &= A_{66}^0 + \varepsilon^2 (a(x))^2 A_{661} + \dots \end{aligned} \quad (5.11)$$

şeklinde yazılır. Daha sonra pertürbasyon yönteminin uygulama tekniğine ve ele alınan problemin mekaniksel özelliklerine göre (4.3) denklemlerindeki X_w , X_u , X_{φ_1} ve $\lambda = \rho \omega^2 l_1^2 / A_{22}^0$ ifadelerini küçük ε parametresinin serisi şeklinde, yani

$$\begin{aligned} X_u &= \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots & X_w &= w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots \\ X_{\varphi_1} &= \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots & \lambda &= \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots \end{aligned} \quad (5.12)$$

şeklinde arayalım. Bu ifadeleri (4.3)-(4.4) denklemlerinde yerine yazıp ε 'nin aynı mertebelerine göre gruplandırma yaparsak aşağıdakiler elde ederiz:



(4.3) denkleminin ε^0 mertebesinin katsayılarından

$$I_1(h)l_1^2 A'_{66} \frac{d\varphi_0}{dx_1} = -h\lambda_0 w_0,$$

$$I_2(h)l_1^2 A'_{11} \frac{d^2\varphi_0}{dx_1^2} - I_1(h)l_1^2 A'_{66} \varphi_0 - 2I_1(h)l_1^2 A'_{11} \frac{d^3 w_0}{dx_1^3} = 2I_1(h)\lambda_0 \frac{dw_0}{dx_1} - I_2(h)\lambda_0 \varphi_0 \quad (5.13)$$

(4.4) sınır koşullarının ε^0 mertebesinin katsayılarından

$$I_2(h)A'_{11} \frac{d\varphi_0}{dx_1} \Big|_{x_1=0,1} = 0, \quad w_0 \Big|_{x_1=0,1} = 0 \quad (5.14)$$

elde edilir.

(4.3) denkleminin ε^1 mertebesinin katsayılarından

$$hl_1^2 A'_{11} \frac{d^2 u_1}{dx_1^2} + I_1(h)l_1^2 A'_{66} \frac{d}{dx_1} (a(x_1)\varphi_0) = -h\lambda_0 u_1,$$

$$I_1(h)l_1^2 A'_{66} \frac{d\varphi_1}{dx_1} = -h(\lambda_0 w_1 + \lambda_1 w_0)$$

$$\begin{aligned} +I_2(h)l_1^2 A'_{11} \frac{d^2 \varphi_1}{dx_1^2} - I_1(h)l_1^2 A'_{66} \varphi_1 - 2I_1(h)l_1^2 A'_{11} \frac{d^3 w_1}{dx_1^3} = \\ = 2I_1(h) \left(\lambda_0 \frac{dw_1}{dx_1} + \lambda_1 \frac{dw_0}{dx_1} \right) - I_2(h)(\lambda_0 \varphi_1 + \lambda_1 \varphi_0) \end{aligned} \quad (5.15)$$



(4.4) sınır koşullarının ε^1 mertebesinin katsayılarından

$$I_2(h)A_{11}^0 \frac{d\varphi_1}{dx_1} \Big|_{x_1=0,l_1} = 0,$$

$$hA_{11}^0 \frac{du_1}{dx_1} + I_1(h)A_{161}a(x_1)\varphi_0 \Big|_{x_1=0,l_1} = 0, \quad w_1 \Big|_{x_1=0,l_1} = 0 \quad (5.16)$$

yazılabilir.

(4.3) denklemden ε^2 mertebesinin katsayılarından

$$hl_1^2 A_{11}^{\prime 0} \frac{d^2 u_2}{dx_1^2} + I_1(h)l_1^2 A_{161}^{\prime} \frac{d}{dx_1} (a(x_1)\varphi_1) = -h(\lambda_0 u_2 + \lambda_1 u_1)$$

$$hl_1^2 A_{161}^{\prime} \frac{d}{dx_1} \left(a(x_1) \frac{du_1}{dx_1} \right) + I_1(h)l_1^2 A_{661}^{\prime} \frac{d}{dx_1} \left((a(x_1))^2 \varphi_0 \right) + I_1(h)l_1^2 A_{66}^{\prime} \frac{d\varphi_2}{dx_1}$$

$$= -h(\lambda_0 w_2 + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_0)$$

$$-hl_1^2 A_{161}^{\prime} a(x_1) \frac{du_1}{dx_1} + I_2(h)l_1^2 A_{11}^{\prime 0} \frac{d^2 \varphi_2}{dx_1^2} + I_2(h)l_1^2 A_{111}^{\prime} \frac{d}{dx_1} \left((a(x_1))^2 \frac{d\varphi_0}{dx_1} \right) -$$

$$-I_1(h)l_1^2 \left(A_{66}^{\prime 0} \varphi_2 + (a(x_1))^2 A_{661}^{\prime} \varphi_0 \right) - 2I_1(h)l_1^2 \left[A_{11}^{\prime 0} \frac{d^3 w_1}{dx_1^3} + A_{111}^{\prime} \frac{d}{dx_1} \left((a(x_1))^2 \frac{d^2 w_0}{dx_1^2} \right) \right] =$$

$$= 2I_1(h) \left(\lambda_0 \frac{dw_2}{dx_1} + \lambda_1 \frac{dw_1}{dx_1} + \lambda_2 \frac{dw_0}{dx_1} \right) - I_2(h)(\lambda_0 \varphi_2 + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_0)$$

(5.17)



(4.4) sınır koşullarının ε^2 mertebesinde katsayılarından ise

$$I_2(h) \left(A_{11}^0 \frac{d\varphi_2}{dx_1} + A_{111} (a(x_1))^2 \frac{d\varphi_0}{dx_1} \right) \Big|_{x_1=0,1} = 0,$$

$$\left[h \left(A_{11}^0 \frac{du_2}{dx_1} \right) + I_1(h) A_{161} a(x_1) \varphi_1 \right] \Big|_{x_1=0,1} = 0, \quad w_2 \Big|_{x_1=0,1} = 0 \quad (5.18)$$

yazılabilirler. Burada $A'_{ij} = A_{ij}/A_{22}^0$ biçimindedir.

(5.13)-(5.14) ifadeleri $\varepsilon = 0$ durumuna yani plak-kiriş malzemesi yapısında hiçbir eğriselliğin olmadığı, tüm tabakaların plak-kirişin orta yüzeyine paralel olduğu ideal durumda plak-kirişin enine titreşimlerine karşı gelmektedir. φ_0 ve w_0 fonksiyonlarını

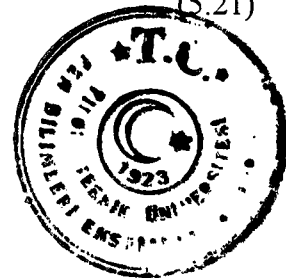
$$\varphi_{0n}(x_1) = a_{0n} \cos \frac{n\pi x_1}{l_1}, \quad w_{0n}(x_1) = b_{0n} \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} \quad (5.19)$$

şeklinde seçersek (5.14) sınır koşulları otomatik olarak sağlanmış olur. w_{0n} 'lerin ortonormal olduğu kabul edilirse (5.19)'dan

$$w_{0n} = \sqrt{2} \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} \quad (5.20)$$

olarak alınır ve (5.13)'ün birinci ifadesinden

$$\frac{d\varphi_{0n}}{dx_1} = - \frac{h}{I_1(h) l_1^2 A_{66}^0} \lambda_0 w_{0n} \quad (5.21)$$



çekilip aynı eşitlikteki ikinci denklemde yerine konur ve $x = x_1/l_1$ boyutsuzlaştırması yapılırsa,

$$\frac{d^4 w_{0n}}{dx^4} + \left[\left(\frac{1.2}{A'_{66}} + \frac{1}{A'_{11}} \right) \frac{d^2 w_{0n}}{dx^2} - \frac{12}{(h/l_1)^2 A'_{11}} w_{0n} \right] \lambda_0 + \frac{1.2}{A'_{11} A'_{66}} w_{0n} \lambda_0^2 = 0 \quad (5.22)$$

elde edilir. (5.20) ifadesi (5.22)'de yerine konursa,

$$(n\pi)^4 + \left[- \left(\frac{1.2}{A'_{66}} + \frac{1}{A'_{11}} \right) (n\pi)^2 - \frac{12}{(h/l_1)^2 A'_{11}} \right] \lambda_0 + \frac{1.2}{A'_{11} A'_{66}} \lambda_0^2 = 0 \quad (5.23)$$

şeklinde ikinci dereceden bir denklem elde edilir ki (5.23)'den her bir n.inci moda karşı gelen λ_{0n} frekansı elde edilir.

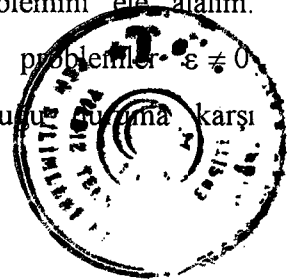
$$\lambda_{0n} = \frac{- \left[- \left(\frac{1.2}{A'_{66}} + \frac{1}{A'_{11}} \right) (n\pi)^2 - \frac{12}{(h/l_1)^2 A'_{11}} \right] \pm \sqrt{\Delta}}{2(n\pi)^4} \quad (5.24)$$

Burada,

$$\Delta = \left[- \left(\frac{1.2}{A'_{66}} + \frac{1}{A'_{11}} \right) (n\pi)^2 - \frac{12}{(h/l_1)^2 A'_{11}} \right]^2 - \frac{4.8(n\pi)^4}{A'_{11} A'_{66}}$$

biçimindedir. (5.24)'den elde edilen λ_{0n} köklerinden küçük olanı kullanılır.

Şimdi birinci yaklaşıma karşı gelen (5.15)-(5.16) özdeğer problemini ele alalım. Belirtelim ki bu ve bundan sonraki yaklaşımlarda ele alınacak problemler $\varepsilon \neq 0$ durumuna yani plak-kiriş malzemesi yapısında eğriselliğin olduğu duruma karşı



gelmektedirler. Bilindiği üzere (5.15)-(5.16) tipinde olan özdeğer probleminin özfonksiyonları (5.19) da göz önüne alınarak

$$\varphi_{1n}(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{nk} \cos \frac{k\pi x_1}{l_1}, \quad w_{1n}(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{nk} \sin \frac{k\pi x_1}{l_1} \quad (5.25)$$

şeklinde seçilebilir. (5.25) özfonksiyonları (5.16) sınır koşullarının birincisi ve üçüncüsünü otomatik olarak sağlarken, ikinci sınır koşulu, ancak eğriselliğin formunu ifade eden $a(x_1)$ fonksiyonunun $a(0) = a(l_1) = 0$ koşulunu sağlaması durumunda $u_1(x_1)$ fonksiyonunun da,

$$u_{1n}(x_1) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{nk} \cos \frac{k\pi x_1}{l_1} \quad (5.26)$$

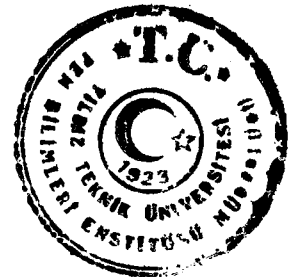
biçiminde seçildiğinde otomatik olarak sağlanmaktadır. Böylece (5.21) ifadesi, (5.15)'in birinci denklemine konur ve (5.20) ile birlikte $x = x_1/l_1$ boyutsuzlaştırması göz önüne alınır,

$$A'_{11} \frac{d^2 u_{1n}}{dx^2} + \frac{\sqrt{2}}{n\pi} \frac{A'_{161}}{A'_{66}} \lambda_{0n} \frac{d}{dx} (a(x) \cos n\pi x) = -\lambda_{0n} u_{1n} \quad (5.27)$$

elde edilir. Bundan başka $x = x_1/l_1$ boyutsuzlaştırması (5.26)'te göz önüne alınır,

$$u_{1n}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{nk} \cos k\pi x \quad (5.28)$$

şeklinde yazılırsa (5.27)'dan



$$\sum_{k=1}^{\infty} d_{nk} \left(-A'_{11}(k\pi)^2 + \lambda_{0n} \right) \cos k\pi x = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{A'_{161}}{A'_{66}} \lambda_{0n} \frac{d}{dx} (a(x) \cos n\pi x) \quad (5.29)$$

denklemini elde edilir. (5.29) denkleminde d_{nk} terimleri

$$d_{nk} = \frac{\sqrt{2}}{\pi \left(A'_{11}(k\pi)^2 - \lambda_{0n} \right)} \frac{A'_{161}}{A'_{66}} \lambda_{0n} \int_0^1 \left(\frac{d}{dx} (a(x) \cos n\pi x) \cos k\pi x \right) dx \quad (5.30)$$

biçiminde bulunurlar. (5.15)'in ikinci denkleminde

$$\frac{d\varphi_{1n}}{dx_1} = -\frac{h}{I_1(h)l_1^2 A'_{66}} (\lambda_{0n} w_{1n} + \lambda_{1n} w_{0n}) \quad (5.31)$$

elde edilir. Bundan sonra (5.31) ile (5.15)'in üçüncü denklemine gidilir ve $x = x_1/l_1$ boyutsuzlaştırması yapılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w_{1n}}{dx^4} + \left[\left(\frac{1.2}{A'_{66}} + \frac{1}{A'_{11}} \right) \frac{d^2 w_{1n}}{dx^2} - \frac{12}{(h/l_1)^2 A'_{11}} w_{1n} \right] \lambda_{0n} + \frac{1.2}{A'_{11} A'_{66}} w_{1n} \lambda_{0n}^2 = \\ = -\lambda_{1n} \left[\left(\frac{1.2}{A'_{66}} + \frac{1}{A'_{11}} \right) \frac{d^2 w_{0n}}{dx^2} - \frac{12}{(h/l_1)^2 A'_{11}} w_{0n} + \frac{2.4}{A'_{11} A'_{66}} w_{0n} \lambda_{0n} \right] \end{aligned} \quad (5.32)$$

elde edilir. (5.25) ifadesini λ_{0n} 'in her n değerindeki ifadesine uygun olarak yazılırsa, $x = x_1/l_1$ boyutsuzlaştırması (5.25)'de yerine konursa, yani,

$$\varphi_{1n} = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} \cos k\pi x, \quad w_{1n} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} \sin k\pi x \quad (5.33)$$

şeklinde yazılırsa ve bu ifadeler (5.32)'de göz önüne alınırsa, o zaman (5.32)den



$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \left[(k\pi)^4 - \lambda_{0n} \left[\left(\frac{1.2}{A'_{66}} + \frac{1}{A'_{11}} \right) (k\pi)^2 + \frac{12}{(h/l_1)^2 A'_{11}} \right] + \frac{1.2}{A'_{66} A'_{11}} \lambda_{0n}^2 \right] c_{nk} \sin k\pi x = \\
= \lambda_{1n} \sin n\pi x \left[\left(\frac{1.2}{A'_{66}} + \frac{1}{A'_{11}} \right) (n\pi)^2 + \frac{12}{(h/l_1)^2 A'_{11}} - \frac{2.4}{A'_{66} A'_{11}} \lambda_{0n} \right] \quad (5.34) \\
n = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

denklemleri çıkarılır.

(5.34)'ün her iki tarafı $\sin k\pi x$ ile çarpılıp 0'dan 1'e kadar entegre edilirse $n \neq k$ için

$$\begin{aligned}
c_{nk} = \lambda_{1n} \frac{\left[\left(\frac{1.2}{A'_{66}} + \frac{1}{A'_{11}} \right) (n\pi)^2 + \frac{12}{(h/l_1)^2 A'_{11}} - \frac{2.4}{A'_{66} A'_{11}} \lambda_{0n} \right]}{\left[(k\pi)^4 - \lambda_{0n} \left[\left(\frac{1.2}{A'_{66}} + \frac{1}{A'_{11}} \right) (k\pi)^2 + \frac{12}{(h/l_1)^2 A'_{11}} \right] + \frac{1.2}{A'_{66} A'_{11}} \lambda_{0n}^2 \right]} \delta_{nk} \quad (5.35) \\
n = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada δ_{nk} (5.10)'da belirtilen Kronecker sembolüdür. Bundan dolayı $n \neq k$ için $c_{nk} \equiv 0$ olur. $n = k$ için, (5.23)'e göre (5.34)'ün sol tarafı özdeş olarak sıfıra eşit olduğundan,

$$\lambda_{1n} \equiv 0 \quad (5.36)$$

elde edilir. Böylece

$$w_1 = \sum_{k=1}^{\infty} c_{kk} \sin k\pi x \quad (5.37)$$

olduğu ispatlanmış olur. Şimdi $w_n = w_{0n} + \varepsilon w_{1n}$ 'in ortonormal olması koşulundan yani



$$\int_0^1 (w_{0n} + \varepsilon w_{1n})(w_{0k} + \varepsilon w_{1k}) dx = \delta_{nk} \quad (5.38)$$

koşulundan $c_{kk} \equiv 0$ olduğu kolayca bulunur. Böylece,

$$w_{1n} \equiv 0, \quad \varphi_{1n} \equiv 0, \quad \lambda_{1n} \equiv 0 \quad (5.39)$$

olduğu sonucuna varılır.

Şimdi yukarıda elde edilen sonuçları göz önüne alarak (5.17) denklemlerinden λ_{2n} 'lerin bulunmasına bakalım. Herşeyden önce belirtmek gerekir ki, (5.17) denklemlerinden birincisi u_2 'lere ait olduğundan burada ilgilenilmeyecek, sadece (5.17)'nin son iki denklemi ele alınacaktır. Bu son iki denklem λ_{2n} 'lerin belirlenmesi için yeterlidir. Eğer (5.12) ifadelerinin sonuncusu olan λ 'nın ε 'a göre serisindeki $\lambda_3, \lambda_4, \dots$ terimleri bizi ilgilendirmiş olsaydı o zaman (5.17)'nin birinci denklemini de incelemek zorunda kalırdık.

Böylece (5.17)'nin son iki denklemi yukarıdaki sonuçları da göz önüne alınarak yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned} h l_1^2 A'_{161} \frac{d}{dx_1} \left(a(x_1) \frac{du_1}{dx_1} \right) + I_1(h) l_1^2 A'_{661} \frac{d}{dx_1} \left((a(x_1))^2 \varphi_0 \right) + I_1(h) l_1^2 A'_{66} \frac{d\varphi_2}{dx_1} \\ = -h(\lambda_0 w_2 + \lambda_2 w_0) \end{aligned}$$



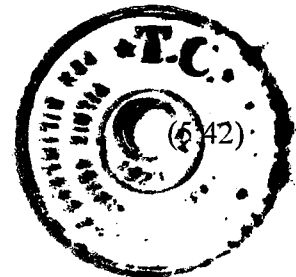
$$\begin{aligned}
& -hl_1^2 A'_{161} a(x_1) \frac{du_1}{dx_1} + I_2(h) l_1^2 A'_{11} \frac{d^2 \varphi_2}{dx_1^2} + I_2(h) l_1^2 A'_{111} \frac{d}{dx_1} \left((a(x_1))^2 \frac{d\varphi_0}{dx_1} \right) - \\
& -I_1(h) l_1^2 \left(A'_{66} \varphi_2 + (a(x_1))^2 A'_{661} \varphi_0 \right) - 2I_1(h) l_1^2 \left[A'_{111} \frac{d}{dx_1} \left((a(x_1))^2 \frac{d^2 w_0}{dx_1^2} \right) \right] = \\
& = 2I_1(h) \left(\lambda_0 \frac{dw_2}{dx_1} + \lambda_2 \frac{dw_0}{dx_1} \right) - I_2(h) (\lambda_0 \varphi_2 + \lambda_2 \varphi_0)
\end{aligned} \tag{5.40}$$

elde edilir. (5.40) denklemlerinden birincisinden,

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi_2}{dx_1} = & -\frac{1}{I_1(h) l_1^2 A'_{66}} \left[hl_1^2 A'_{161} \frac{d}{dx_1} \left(a(x_1) \frac{du_1}{dx_1} \right) + h(\lambda_0 w_2 + \lambda_2 w_0) \right. \\
& \left. + I_1(h) l_1^2 A'_{661} \frac{d}{dx_1} \left((a(x_1))^2 \varphi_0 \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.41}$$

bulunur. (5.41) eşitliği (5.40)'in ikinci denkleminde yerine konur ve $x = x_1/l_1$ boyutsuzlaştırması yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{d^4 w_2}{dx^4} + & \left[\left(\frac{1.2}{A'_{66}} + \frac{1}{A'_{11}} \right) \frac{d^2 w_2}{dx^2} - \frac{12}{(h/l_1)^2 A'_{11}} w_2 \right] \lambda_0 + \frac{1.2}{A'_{66} A'_{11}} \lambda_0^2 w_2 = \\
= & - \left[\frac{1.2 A'_{161}}{A'_{66} A'_{11}} \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du_1}{dx} \right) + \frac{h^2 l_1 A'_{661}}{20 A'_{66} A'_{11}} \frac{d}{dx} \left((a(x))^2 \varphi_0 \right) \right] \lambda_0 + \\
+ & \left[-\frac{1.2}{A'_{66}} \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{12}{(h/l_1)^2 A'_{11}} w_0 - \frac{1}{A'_{11}} \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{h^2 l_1}{20 A'_{11}} \frac{d\varphi_0}{dx} \right] \lambda_2 - \\
- & \frac{1.2 A'_{161}}{A'_{66}} \frac{d^3}{dx^3} \left(a(x) \frac{du_1}{dx} \right) - \frac{h^2 l_1 A'_{661}}{20 A'_{66}} \frac{d^3}{dx^3} \left((a(x))^2 \varphi_0 \right) + \\
+ & \frac{h^2 l_1 A'_{111}}{20 A'_{11}} \frac{d^2}{dx^2} \left((a(x))^2 \frac{d\varphi_0}{dx} \right) - \frac{A'_{111}}{A'_{11}} \frac{d^2}{dx^2} \left((a(x))^2 \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)
\end{aligned}$$



elde edilir. (5.42)'de λ_0 , λ_2 , w_0 , w_2 ve φ_0 terimleri, sırasıyla, λ_{0n} , λ_{2n} , w_{0n} , w_{2n} ve φ_{0n} ile yer değiştirilirse ve w_{2n} 'ler,

$$w_{2n} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{nk} \sin k\pi x \quad (5.43)$$

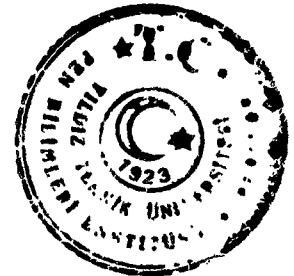
şeklinde aranırsa, o zaman (5.42)'den

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} f_{nk} \left[(k\pi)^4 - \left[\left(\frac{1.2}{A'_{66}} + \frac{1}{A'_{11}} \right) (k\pi)^2 + \frac{12}{(h/l_1)^2 A'_{11}} \right] \lambda_{0n} + \frac{1.2}{A'_{66} A'_{11}} \lambda_{0n}^2 \right] \sin k\pi x = \\ & = \lambda_{2n} \left[\left(\frac{1.2}{A'_{66}} + \frac{1}{A'_{11}} \right) (n\pi)^2 + \frac{12}{(h/l_1)^2 A'_{11}} - \frac{1.2\sqrt{2}}{A'_{66} A'_{11}} \lambda_{0n} \right] \sin n\pi x - \\ & - \lambda_{0n} \left[\frac{1.2\sqrt{2} A'_{161}}{A'_{66} A'_{11}} \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du_1}{dx} \right) + \lambda_{0n} \frac{2.4 A'_{661}}{(n\pi) A'_{66} A'_{11}} \frac{d}{dx} \left((a(x))^2 \cos n\pi x \right) + \right. \\ & \left. + \frac{2.4 A'_{661}}{(n\pi) (A'_{66})^2} \frac{d^3}{dx^3} \left((a(x))^2 \cos n\pi x \right) + \frac{2.4 A'_{111}}{A'_{66} A'_{11}} \frac{d^2}{dx^2} \left((a(x))^2 \sin n\pi x \right) \right] \sin n\pi x - \\ & - \frac{1.2\sqrt{2} A'_{161}}{A'_{66}} \frac{d^3}{dx^3} \left(a(x) \frac{du_1}{dx} \right) \sin n\pi x + \frac{2(n\pi)^2 A'_{111}}{A'_{11}} \frac{d^2}{dx^2} \left((a(x))^2 \sin n\pi x \right) \sin n\pi x \end{aligned} \quad (5.44)$$

elde edilir. (5.44)'ün her iki tarafı $\sin k\pi x$ ile çarpılıp 0'dan 1'e kadar entegre edilirse $n \neq k$ için

$$f_{nk} = \frac{G_1(x)}{(k\pi)^4 - \left[\left(\frac{1.2}{A'_{66}} + \frac{1}{A'_{11}} \right) (k\pi)^2 + \frac{12}{(h/l_1)^2 A'_{11}} \right] \lambda_{0n} + \frac{1.2}{A'_{66} A'_{11}} \lambda_{0n}^2} \quad (5.45)$$

bulunur. Burada,

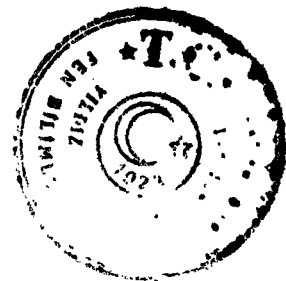


$$\begin{aligned}
G_1(x) = & \lambda_{2n} \left[\left(\frac{12}{A'_{66}} + \frac{1}{A'_{11}} \right) (n\pi)^2 + \frac{12}{(h/l_1)^2 A'_{11}} - \frac{12\sqrt{2}}{A'_{66} A'_{11}} \lambda_{0n} \int_0^1 \sin n\pi x \sin k\pi x dx - \right. \\
& - \lambda_{0n} \int_0^1 \frac{12\sqrt{2} A'_{161}}{A'_{66} A'_{11}} \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du_1}{dx} \right) + \lambda_{0n} \frac{2.4 A'_{661}}{(n\pi) A'_{66} A'_{11}} \frac{d}{dx} \left((a(x))^2 \cos n\pi x \right) + \\
& + \frac{2.4 A'_{661}}{(n\pi) (A'_{66})^2} \frac{d^3}{dx^3} \left((a(x))^2 \cos n\pi x \right) + \frac{2.4 A'_{111}}{A'_{66} A'_{11}} \frac{d^2}{dx^2} \left((a(x))^2 \sin n\pi x \right) \left. \right] \sin n\pi x \sin k\pi x dx - \\
& - \frac{12\sqrt{2} A'_{161}}{A'_{66}} \int_0^1 \frac{d^3}{dx^3} \left(a(x) \frac{du_1}{dx} \right) \sin n\pi x \sin k\pi x dx + \\
& + \frac{2(n\pi)^2 A'_{111}}{A'_{11}} \int_0^1 \frac{d^2}{dx^2} \left((a(x))^2 \sin n\pi x \right) \sin n\pi x \sin k\pi x dx
\end{aligned} \tag{5.46}$$

işaretlemesi kullanılmıştır. λ_{0n} 'ler (5.24) ifadelerine göre, $n = k$ için (5.44)'in sol tarafı, özdeş olarak sıfır olduğundan

$$\lambda_{2n} = \frac{G_2(x)}{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{12}{A'_{66}} + \frac{1}{A'_{11}} \right) (n\pi)^2 + \frac{12}{(h/l_1)^2 A'_{11}} - \frac{12\sqrt{2}}{A'_{66} A'_{11}} \lambda_{0n} \right]} \tag{5.47}$$

elde edilir. Burada $G_2(x)$,



$$\begin{aligned}
G_2(x) = & \lambda_{0n} \int_0^1 \left[\frac{1.2\sqrt{2}A'_{161}}{A'_{66}A'_{11}} \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du_1}{dx} \right) + \lambda_{0n} \frac{2.4A'_{661}}{(n\pi)A'_{66}A'_{11}} \frac{d}{dx} \left((a(x))^2 \cos n\pi x \right) + \right. \\
& \left. + \frac{2.4A'_{661}}{(n\pi)(A'_{66})^2} \frac{d^3}{dx^3} \left((a(x))^2 \cos n\pi x \right) + \frac{2.4A'_{111}}{A'_{66}A'_{11}} \frac{d^2}{dx^2} \left((a(x))^2 \sin n\pi x \right) \right] \sin n\pi x \sin n\pi x dx + \\
& + \frac{1.2\sqrt{2}A'_{161}}{A'_{66}} \int_0^1 \frac{d^3}{dx^3} \left(a(x) \frac{du_1}{dx} \right) \sin n\pi x \sin n\pi x dx - \\
& - \frac{2(n\pi)^2 A'_{111}}{A'_{11}} \int_0^1 \frac{d^2}{dx^2} \left((a(x))^2 \sin n\pi x \right) \sin n\pi x \sin n\pi x dx \quad (5.48)
\end{aligned}$$

biçimindedir. Buraya kadar yapılan hesaplamaların sonunda malzeme yapısında eğrisellik bulunan kompozit plak-kirişin enine titreşim frekansı

$$\lambda \approx \lambda_{0n} + \varepsilon^2 \lambda_{2n} \quad (5.49)$$

şeklinde bulunmuş olur.

Böylece yukarıdaki işlem sırası uygulanarak yapılan hesaplamalar devam ettirilirse (5.12)'deki λ_{3n} , λ_{4n} ve diğerlerinin hesaplanması için de gerekli formüller elde edilebilir. Ancak, her sonraki yaklaşımda yapılacak olan işlemlerin hacmi bir öncekine göre çok çok büyümüş olur ve bundan dolayı bazı zorluklarla karşılaşılır. Belirtmek gerekir ki pertürbasyon yöntemi, λ_{2n} ve diğerlerinin hesap edilmesinde analitik ifadeler elde edilmesine imkan verirse de, bu ifadeler, (5.47)-(5.48)'den de görüleceği gibi, çok karmaşık olduğundan mekaniksel yorum yapılması ancak bilgisayar yardımıyla yapılan hesaplamalar sonucunda mümkün olur. Bu ve diğer nedenlerden dolayı tezde ele alınan problemlere pertürbasyon yönteminin geniş bir biçimde uygulanması gerekli ve yararlı görülmemiştir. Ancak, ele alınan örneklerden görüldüğü gibi tezde araştırılan problemlerin çözümünde bu yöntemlerden de kullanılmasının prensip olarak mümkün olduğu gösterilmiş olmaktadır.



BÖLÜM VI.

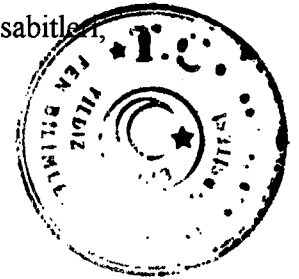
PLAK-KİRİŞLERİN DOĞAL TİTREŞİM ve STABİLİTELERİNE AİT SAYISAL SONUÇLAR ve YORUMU

VI. 1. HESAP ALGORİTMASI

Bölüm V.1.'de, Galerkin Yönteminin tez kapsamında ele alınan problemlere nasıl uygulanacağı malzeme yapısında eğrisellik bulunan plak-kirişin hareket denklemleri örneğinde anlatılmıştı. Bu örnek üzerinde yapılan işlemler sonucu (5.9) denklemleri elde edilmişti. (5.9) denkleminin katsayılar determinantını sıfır yapan $\bar{\omega}^2$ değerleri aranan sonuçlar olmaktadır. Bu amaçla FTN77 fortran programlama dilinde programlar yapılmıştır. Şimdi hazırlanan programların hesaplama algoritmalarını yukarıda bahsedilen (5.9) problemi üzerinde kısaca açıklayalım.

Bunun için (5.8) ile gösterilen I_{inn} ($i=1,2,\dots,9$) integral terimlerinin öncelikle hesaplanması gerekmektedir. Söz konusu integral terimlerinin sayısal hesabı Gauss Noktaları yöntemi ile yapıp sayısal sonuçları bir dosyaya yerleştirilmektedir. Buradaki n ve m 1'den, (5.9) serilerinde ele alınan terimlerin sayısı olan, N 'e kadar değişebilmektedir.

Tezde ele alınan plak-kirişlerin ve plakların ox_2 eksen yönünde biri diğerini tekrarlayan levhalardan oluşmuş kompozit malzemelerden yapıldığı varsayılmaktadır. Bu levhaların malzemesinin izotrop ve homojen olduğu kabul edilir ve elastisite modülleri E_1 ve E_2 , Poisson oranları ν_1 ve ν_2 , Lamé sabitleri λ_1, μ_1 ve λ_2, μ_2 ; hacim oranları η_1 ve η_2 ile gösterilirse (5.8)'deki $A'_{11}(x)$, $A'_{16}(x)$, $A'_{66}(x)$ malzeme değişkenlerinin (2.24) ile verilen ifadelerindeki $A_{11}^0, A_{12}^0, A_{22}^0, A_{66}^0$ normalize edilmiş elastisite sabitleri,



$$A_{11}^0 = \mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2 + (\mu_1 + \eta_1) \eta_1 + (\mu_2 + \eta_2) \eta_2 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + 2\mu_1) \eta_2 + (\lambda_2 + 2\mu_2) \eta_1}$$

$$A_{12}^0 = \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 - (\lambda_1 - \lambda_2) \eta_1 \eta_2 \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2)}{(\lambda_1 + 2\mu_1) \eta_2 + (\lambda_2 + 2\mu_2) \eta_1}$$

$$A_{22}^0 = (\lambda_1 + 2\mu_1) \eta_1 + (\lambda_2 + 2\mu_2) \eta_2 - \eta_1 \eta_2 \frac{[(\lambda_1 + 2\mu_1) - (\lambda_2 + 2\mu_2)]^2}{(\lambda_1 + 2\mu_1) \eta_2 + (\lambda_2 + 2\mu_2) \eta_1}$$

$$A_{66}^0 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \eta_2 + \mu_2 \eta_1} \quad (6.1)$$

formülleri yardımıyla bulunur. Bu formüllerin çıkarılış yöntemi Christensen, 1979'da açıkça verildiğinden burada üzerinde durulmayacaktır. Sonuçları alınan örneklerde $v_1 = v_2 = 0.25$, $\eta_1 = \eta_2 = 0.5$ olarak kabul edilmiştir..

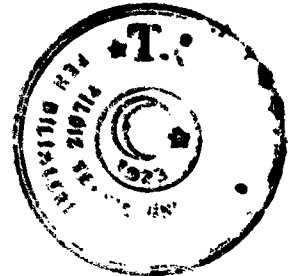
Daha sonra Galerkin Yöntemi kullanılarak seri halinde yazılan (5.9) hareket denklemlerindeki B_{nm}/l_1 , C_{nm}/l_1 , $D_{nm} l_1^2$ terimlerinin katsayılarından

$$[A]_{3N \times 3N} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{1nm} & \bar{C}_{1nm} & \bar{D}_{1nm} \\ \bar{B}_{2nm} & \bar{C}_{2nm} & \bar{D}_{2nm} \\ \bar{B}_{3nm} & \bar{C}_{3nm} & \bar{D}_{3nm} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

biçiminde $3N \times 3N$ boyutlu bir $[A]$ matrisi oluşturulmaktadır. Burada

$$\bar{B}_{1nm} = \left[-(n\pi)^2 I_{1nm} - n\pi I_{2nm} + \frac{1}{2} \delta_{nm} \bar{\omega}^2 \right], \quad \bar{B}_{2nm} = \left[-(n\pi)^2 I_{5nm} - n\pi I_{6nm} \right],$$

$$\bar{B}_{3nm} = [n\pi I_{3nm}], \quad \bar{C}_{1nm} = [0], \quad \bar{C}_{2nm} = \left[\frac{1}{2} \delta_{nm} \bar{\omega}^2 \right],$$

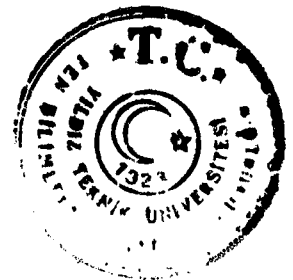


$$\begin{aligned}
\bar{C}_{3nm} &= \frac{1}{12} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[(n\pi)^3 I_{1nm} + (n\pi)^2 I_{2nm} - n\pi \frac{1}{2} \delta_{nm} \bar{\omega}^2 \right] \\
\bar{D}_{1nm} &= \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[-n\pi I_{3nm} + I_{4nm} \right] \quad , \quad \bar{D}_{2nm} = \frac{1}{24} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \left[-n\pi I_{7nm} + I_{8nm} \right] \quad , \\
\bar{D}_{3nm} &= \frac{1}{240} \left(\frac{h}{l_1} \right)^4 \left[-(n\pi)^2 I_{1nm} - n\pi I_{2nm} - 10 \left(\frac{h}{l_1} \right)^{-2} I_{9nm} + \frac{1}{2} \delta_{nm} \bar{\omega}^2 \right] \quad (6.3)
\end{aligned}$$

biçiminde (5.9)'daki 3 adet hareket denklemindeki, sırasıyla, B_{nm}/l_1 , C_{nm}/l_1 , $D_{nm} l_1^2$ terimlerinin katsayılarından oluşan $N \times N$ ($n=m=1,2,\dots,N$) boyutlu matrislerin terimlerinin ifadelerini göstermektedir.

Böylece elde edilen (6.2) katsayılar matrisinin determinantını sıfır yapan $\bar{\omega}^2$ değerleri aranan sonuçlar olacaktır. Bu değerleri bulmak amacıyla program içinde sıfıra çok çok yakın bir değerden başlayarak, $\bar{\omega}^2$ 'ye küçük artımlar (0.005) verilerek katsayılar determinantının işaretinin değişmesine bakılır. Determinantın işaretinin değiştiği kök civarında daha küçük artımlar verilerek istenilen hassasiyete kadar birinci modun frekansı olan $\bar{\omega}_I^2$ değeri saptanır. Bilindiği üzere bir sonraki modun frekansı bir öncekinden daha büyük olduğundan, bulunan bu değere bir miktar artım verilip aynı işlemler gerçekleştirilerek, ikinci moda karşı gelen $\bar{\omega}_II^2$ değeri saptanır. Bu işlem istenilen moda kadar sürdürülür. Belirtelim ki, bu tür -doğal titreşim veya stabilite gibi- problemlerde, yapı ilk önce birinci moda ulaşacağından, en önemli değer birinci moda karşı gelen değerdir.

Burada, plak malzemesi yapısındaki eğriselliğin $\varepsilon \cdot f(x_1)$ formu ileride gösterileceği gibi seçilecektir.



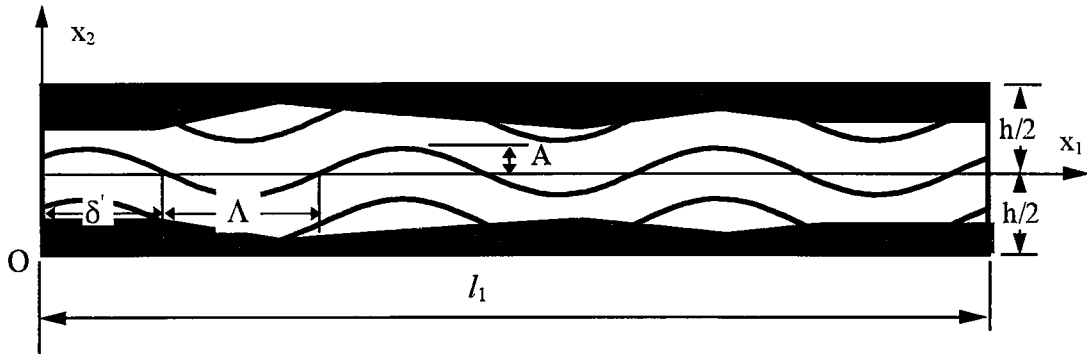
VI. 2. FARKLI PLAK TEORİLERİ KULLANILARAK ELDE EDİLEN SAYISAL SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI

Plak-kirişlerin Bölüm IV.1, IV.2 ve IV.3'te, sırasıyla, üçüncü mertebeden geliştirilmiş plak teorisi, Kirchhoff-Love hipotezi ve Reissner-Mindlin hipotezi çerçevesinde hareket denklemleri ve sınır koşulları çıkarılmıştır. Bu hareket denklemlerinin yukarıda anlatılanlar çerçevesinde malzeme yapısında periyodik eğrisellik bulunan plak-kiriş için yapılan bilgisayar programından elde edilen sayısal sonuçlar aşağıda tablolar halinde verilmiştir.

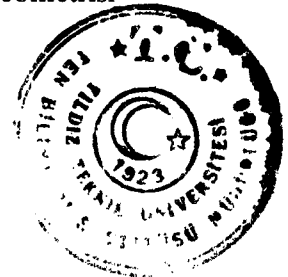
Burada, plak malzemesi yapısındaki eğriselliğin $\varepsilon \cdot f(x_1)$ formu $x = x_1/l_1$ boyutsuzlaştırması yapılarak:

$$\varepsilon \cdot f(x) = \varepsilon \cdot \sin(\gamma\pi x + \delta) \quad (6.4)$$

biçiminde alınmıştır, Şekil 6.1'de görüldüğü gibi, (6.4) eşitliğindeki, γ terimi $\gamma = [l_1/\Lambda]$ biçiminde olup l_1 boyutundaki tam yarım dalga sayısıdır, burada Λ yarım dalganın boyudur. δ ise $\delta = \pi\delta'/l_1$ biçiminde olup, burada δ' $x_1 = 0$ 'dan $f(x_1) = 0$ 'a karşı gelen birinci noda kadar olan uzaklıktır. Hesaplamalarda $\gamma = 10$ olarak alınmıştır.



Şekil 6.1 Plak-kiriş malzemesi yapısında olan periyodik eğriselliğin geometrisi



Tablo 6.1. Kirchhoff-Love hipotezi çerçevesinde çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun küçük değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).

E_2/E_1	m (Mod)	ε							
		0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
10	1	0.2254	0.2539	0.3383	0.4766	0.6650	0.8990	1.1727	1.4795
20		0.4035	0.4668	0.6549	0.9631	1.3830	1.9045	2.5141	3.1979
50		0.9397	1.1080	1.6086	2.4283	3.5459	4.9328	6.5549	8.3740
100		1.8340	2.1777	3.1994	4.8725	7.1533	9.9840	13.2949	17.0078
10	2	3.5207	3.6299	3.9547	4.4864	5.2109	6.1098	7.1610	8.3393
20		6.3010	6.5444	7.2680	8.4526	10.0672	12.0705	14.4129	17.0383
50		14.6754	15.3229	17.2481	20.3994	24.6951	30.0246	36.2563	43.2410
100		28.6440	29.9655	33.8946	40.3270	49.0942	59.9721	72.6908	86.9469

Tablo 6.2. Reissner-Mindlin hipotezi çerçevesinde çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun küçük değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).

E_2/E_1	m (Mod)	ε							
		0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
10	1	0.2110	0.2356	0.3063	0.4151	0.5513	0.7038	0.8642	1.0253
20		0.3597	0.4085	0.5444	0.7409	0.9696	1.2087	1.4456	1.6749
50		0.7319	0.8280	1.0763	1.3999	1.7444	2.0894	2.4325	2.7780
100		1.1798	1.3110	1.6339	2.0405	2.4835	2.9577	3.4696	4.0233
10	2	2.7926	2.8604	3.0675	3.3659	3.7610	4.2164	4.7084	5.2180
20		4.2911	4.4022	4.7192	5.2012	5.7975	6.4639	7.1678	7.8893
50		6.9940	7.1518	7.5991	8.2770	9.1272	10.1084	11.1979	12.3821
100		9.0797	9.2819	9.8727	10.8172	12.0815	13.6387	15.4666	17.5438



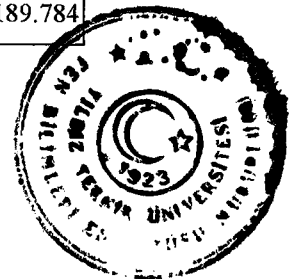
Tablo 6.3. Geliştirilmiş 3. mertebeden plak teorileri çerçevesinde çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun küçük değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).

E_2/E_1	m (Mod)	ε							
		0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
10	1	0.2084	0.2082	0.2080	0.2074	0.2067	0.2059	0.2047	0.2033
20		0.3520	0.3518	0.3512	0.3504	0.3490	0.3473	0.3453	0.3430
50		0.7008	0.7006	0.7000	0.6988	0.6971	0.6949	0.6924	0.6893
100		1.1010	1.1010	1.1010	1.1010	1.1008	1.1006	1.1000	1.0992
10	2	2.6810	2.6802	2.6782	2.6747	2.6700	2.6638	2.6564	2.6474
20		4.0318	4.0314	4.0304	4.0288	4.0265	4.0230	4.0185	4.0128
50		6.3259	6.3284	6.3357	6.3476	6.3636	6.3835	6.4068	6.4325
100		7.9814	7.9814	8.0056	8.0655	8.0767	8.1286	8.1907	8.2620

Tablo 6.4. Kirchhoff-Love hipotezi çerçevesinde çeşitli E_2/E_1

ve ε 'nun büyük değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).

E_2/E_1	m (Mod)	ε							
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
10	1	0.2254	2.5291	5.6576	6.5828	6.1191	5.2973	4.5348	3.9664
20		0.4035	5.5371	12.5086	14.5701	13.5369	11.7057	10.0063	8.7393
50		0.9397	14.5973	33.1443	38.6285	35.8797	31.0080	26.4869	23.1147
100		1.8340	29.7094	67.5645	78.7578	73.1477	63.2041	53.9768	47.0928
10	2	3.5207	12.3649	24.2672	27.5899	25.5682	22.2135	19.1340	16.8407
20		6.3010	26.0092	52.5323	59.9367	55.4317	47.9559	41.0934	35.9803
50		14.6754	67.1067	137.668	157.367	145.382	125.494	107.236	93.6283
100		28.6440	135.657	279.675	319.881	295.419	254.826	217.563	189.784

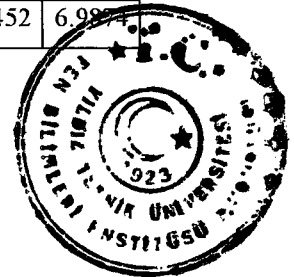


Tablo 6.5. Reissner-Mindlin hipotezi çerçevesinde çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun büyük değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).

E_2/E_1	m (Mod)	ε							
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
10	1	0.2110	1.4792	2.5284	2.9780	3.0118	2.8397	2.6063	2.3938
20		0.3597	2.3101	4.0333	5.0407	5.3183	5.1560	4.8173	4.4681
50		0.7319	3.8589	7.6890	10.4124	11.4761	11.4218	10.8456	10.1444
100		1.1798	5.9331	13.4140	18.9987	21.3687	21.5081	20.5607	19.2937
10	2	2.7926	6.7305	10.5823	12.3213	12.4469	11.7655	10.8448	10.0073
20		4.2911	10.0700	16.6778	20.6739	21.7647	21.0987	19.7325	18.3319
50		6.9940	16.4116	31.6461	42.5831	44.8741	39.6014	35.5420	32.3200
100		9.0797	25.0266	55.1469	77.6540	79.5557	69.4268	61.4903	55.1165

Tablo 6.6. Geliştirilmiş 3. mertebeden plak teorileri çerçevesinde çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun büyük değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).

E_2/E_1	m (Mod)	ε							
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
10	1	0.2084	0.1985	0.1768	0.1553	0.1389	0.1274	0.1192	0.1131
20		0.3520	0.3342	0.2918	0.2473	0.2123	0.1869	0.1688	0.1553
50		0.7008	0.6766	0.6031	0.5090	0.4260	0.3627	0.3162	0.2817
100		1.1010	1.0942	1.0291	0.8992	0.7610	0.6455	0.5567	0.4891
10	2	2.6810	2.6124	2.4253	2.1995	2.0042	1.8550	1.7439	1.6603
20		4.0318	3.9859	3.7618	3.3880	3.0124	2.7046	2.4681	2.2874
50		6.3259	6.5177	6.6640	6.3398	5.7251	5.0915	4.5493	4.1116
100		7.9814	8.5206	9.4851	9.8359	9.4009	8.5937	7.7452	6.9857



Tablo 6.7. Kirchhoff-Love hipotezi çerçevesinde $E_2/E_1 = 100$ ve farklı N değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).

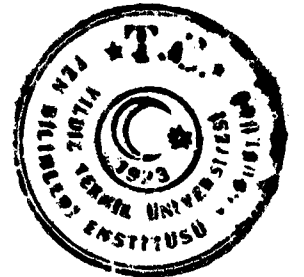
N	m (Mod)	ε				
		0	0.01	0.07	0.1	0.7
5	1	1.8340	2.1777	17.0078	29.7094	47.1076
8		1.8340	2.1777	17.0078	29.7094	47.1076
10		1.8340	2.1777	17.0078	29.7094	47.0928
5	2	28.6440	29.9655	86.9469	135.657	189.852
8		28.6440	29.9655	86.9469	135.657	189.852
10		28.6440	29.9655	86.9469	135.657	189.784

Tablo 6.8. Reissner-Mindlin hipotezi çerçevesinde $E_2/E_1 = 100$ ve farklı N değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).

N	m (Mod)	ε				
		0	0.01	0.07	0.1	0.7
5	1	1.1798	1.3294	5.5114	8.8138	21.7228
8		1.1798	1.3294	5.5114	8.8138	21.7228
10		1.1798	1.3110	4.0233	5.9331	19.2937
5	2	9.0797	9.4112	23.8239	36.7684	61.9858
8		9.0797	9.2819	17.5438	25.0266	61.9858
10		9.0797	9.2819	17.5438	25.0266	55.1165

Tablo 6.9. Geliştirilmiş 3. mertebeden plak teorileri çerçevesinde $E_2/E_1 = 100$ ve farklı N değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).

N	m (Mod)	ε				
		0	0.01	0.07	0.1	0.7
5	1	1.1010	1.1143	1.3949	1.4469	0.4983
8		1.1010	1.1143	1.3949	1.4469	0.4983
10		1.1010	1.1078	1.2934	1.3529	0.4955
5	2	7.9814	8.1642	13.7337	16.2136	7.4698
8		7.9814	8.0763	11.5083	13.5831	7.4052
10		7.9814	8.0763	11.5083	13.5831	7.4052



Tablo 6.1, Tablo 6.2, Tablo 6.4 ve Tablo 6.5’de verilen sonuçlar elde edilirken $N=10$, Tablo 6.3 ve Tablo 6.6’da ise $N=15$ kabul edilmiştir. Belirtelim ki elde edilen sayısal sonuçların pratik açıdan yakınsaklığını, yani N 'in değerce değişmesinin elde edilen sayısal sonuçlara etkisini gösteren sayısal değerler Tablo 6.7-Tablo 6.9’da verilmektedir. Bundan başka, bu incelemelerde plak-kiriş malzemesini oluşturan levhaların Poisson oranları $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$, hacim oranları $\eta_1 = \eta_2 = 0.50$ olarak kabul edilmiştir. Gerekli olan diğer verilerin değerleri ise her bir tablonun üzerinde gösterilmiştir.

Şimdi, elde edilen sayısal sonuçların karşılaştırılmasına ve bu karşılaştırmada elde edilenlerin yorumlanmasına bakalım. İlk önce ε 'nin $0 \leq \varepsilon \leq 0.07$ aralığında değişmesi halini ele alalım (Tablo 6.1-6.3). Bu sonuçların karşılaştırılmasından açıkça görülmektedir ki plak teorisi geliştirildikçe aynı bir durumdaki $\bar{\omega}_m^2$ değeri yeterli derecede küçülmektedir. Kirchhoff-Love hipotezi, Reissner-Mindlin hipotezi ve tezde kullanılan Üçüncü mertebeden plak teorileri çerçevesinde elde edilen sonuçlar, sırasıyla, $\bar{\omega}_{mKL}^2$, $\bar{\omega}_{mRM}^2$ ve $\bar{\omega}_m^2$ ile gösterilirse bu değerler arasındaki ilişki arasındaki

$$\bar{\omega}_{mKL}^2 \geq \bar{\omega}_{mRM}^2 \geq \bar{\omega}_m^2 \quad (6.5)$$

eşitsizliği ile güvenli bir şekilde verilebilir. Söylenenleri E_2/E_1 'nin büyük değerleri için daha ciddi bir önem taşıması Tablo 6.1-6.3'teki sonuçlardan gözükmektedir. Bundan başka, yukarıda bahsedilenler aynen $0.1 \leq \varepsilon \leq 0.7$ aralığında elde edilen sayısal sonuçlar için de geçerlidir (Tablo 6.4-6.6). Böylece yukarıda elde edilen sonuçlar ele alınan özel durumda ε 'nin çok farklı değerlerinde gösterir ki, tez kapsamında geniş bir biçimde kullanılan, Üçüncü mertebeden olan geliştirilmiş plak teorisinin doğal titreşim için verdiği sayısal sonuçlar yukarıda adı geçen farklı iki plak teorisinden elde edilenlerden yeterince, daha doğrusu, önemli bir ölçüde küçük olmaktadır. Bu farklılıklar o boyuttadır ki bir çok durumlarda bu farklılıkları mühendislik açısından göz ardı etmek imkansızdır. Bunlardan başka, Tablo 6.1-6.6'dan gözüküğü gibi, tez kapsamında kullanılan Üçüncü mertebeden olan geliştirilmiş plak teorisi çerçevesinde elde edilen sayısal sonuçlar sadece



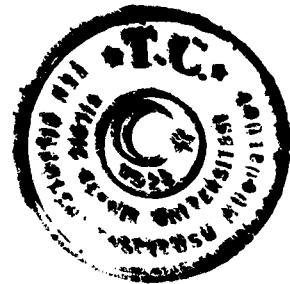
değil aynı zamanda niceliksel bakımdan da Kirchhoff-Love ve Reissner-Mindlin teorisi çerçevesinde elde edilen sonuçlardan farklıdır. Örneğin Tablo 6.1-Tablo 6.2 ile Tablo 6.4-Tablo 6.5'te verilen sonuçlardan görüldüğü gibi, ε değerleri büyüdükçe Kirchhoff-Love ve Reissner-Mindlin plak teorisi çerçevesinde elde edilen doğal titreşim frekanslarının değerleri büyürken Üçüncü mertebeden olan plak teorisi çerçevesinde elde edilenler (Tablo 6.3 ile Tablo 6.6), genelde, küçülmektedir.

Yukarıda söylenenlerin tümü yani, Tablo 6.7-Tablo 6.9'da verilen sayısal sonuçların pratik açısından yakınsak olmasına olan güvenilirlik, Üçüncü mertebe plak teorisi çerçevesinde elde edilenlerin geleneksel fizik ve mühendislik bilgi ve görüşlerine çok daha uygun gelmesi, bu teori çerçevesinde $\varepsilon > 0$ olduğu durumlarda elde edilen sayısal sonuçların daha çok güvenilir olması kanaatine imkan verir. Söylenen nedenlerden dolayı tezdeki araştırmaların bu teori çerçevesinde yapılması elde edilen sonuçların güvenli olmasını garanti etmektedir.

VI.3. EĞRİSEL YAPIYA SAHİP KOMPOZİT MALZEMEDEN

HAZIRLANMIŞ PLAK-KİRİŞLERİN DOĞAL TİTREŞİMLERİNE AİT SAYISAL SONUÇLARIN İNCELENMESİ

Bölüm IV.1'de, tezde ele alınan üçüncü mertebeden geliştirilmiş plak teorisi çerçevesinde eğrisel yapıya sahip kompozit malzemedan hazırlanmış plak-kirişlerin doğal titreşim denklemleri [eşl.(4.3)] ve sınır koşulları [eşl.(4.4)] çıkarılmıştı. Dikkat edilirse, bu eşitliklerde malzeme yapısındaki eğriselliklerin formlarından bahsedilmemektedir. Şimdi, bu denklemler kullanılarak değişik eğrisellik formları için elde edilen sayısal sonuçlar verilecek ve onların yorumlanması yapılacaktır.

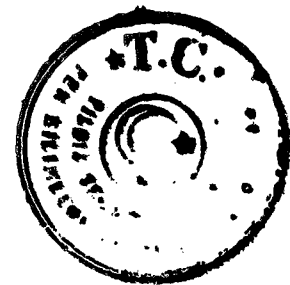


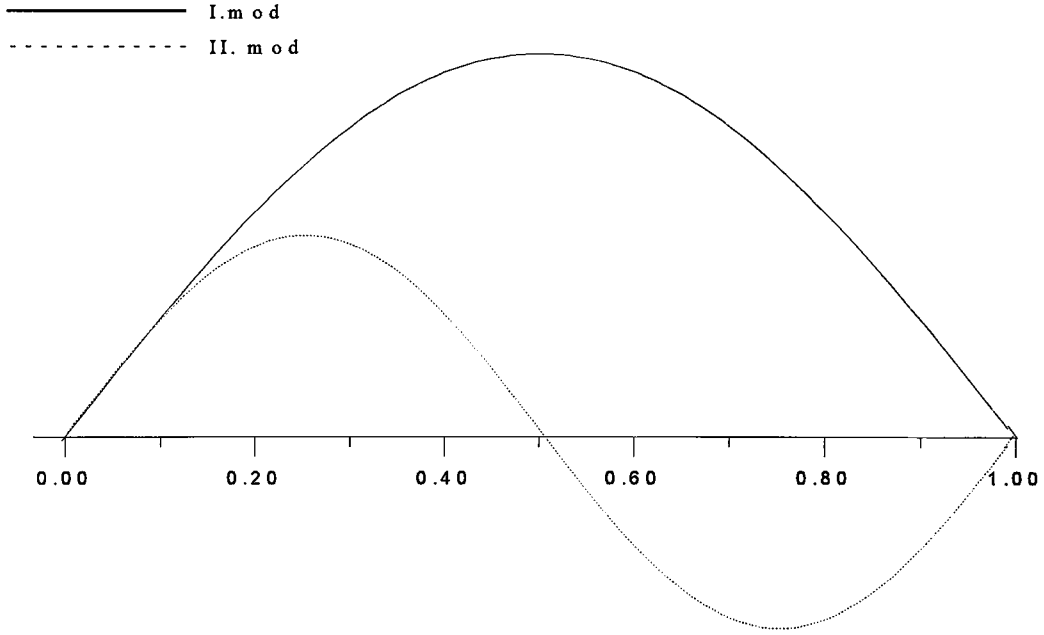
VI. 3. 1. PLAK-KİRİŞ MALZEMESİ YAPISINDA PERİYODİK EĞRİSELLİK OLMASI HALİ

Plak malzemesi yapısındaki eğriselliğin formu olan (6.4) eşitliğindeki δ terimi $0 \leq \delta \leq \pi$ aralığında değerler alabilmektedir. $\delta = \pi/2$ durumunda (5.1) yerdeğiştirme fonksiyonları (4.4) sınır koşullarını otomatik olarak sağlarlar. Bu durumda, hesaplama sonunda elde edilen sonuçlar kesin olacaktır. Aksi halde, söz konusu sınır şartı sağlanmadığından, elde edilecek sonuçlar yaklaşık olacaktır. Bu çalışmada $\delta = \pi/4$ ve $\delta = \pi/2$ değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ değerleri elde edilmiş olup aşağıda tablolar halinde verilmektedir. Hesaplamalarda $N=20$ olarak alınmıştır. Şekil 6.2-Şekil 6.6'da malzeme yapısındaki eğrisellik parametreleri $\delta = \pi/2$, $E_2/E_1 = 50$ için, sırasıyla, $\varepsilon = 0.0$, $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.07$, $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.7$ olduğu durumlarda I. ve II. modlara ait doğal titreşim formları gösterilmektedir.

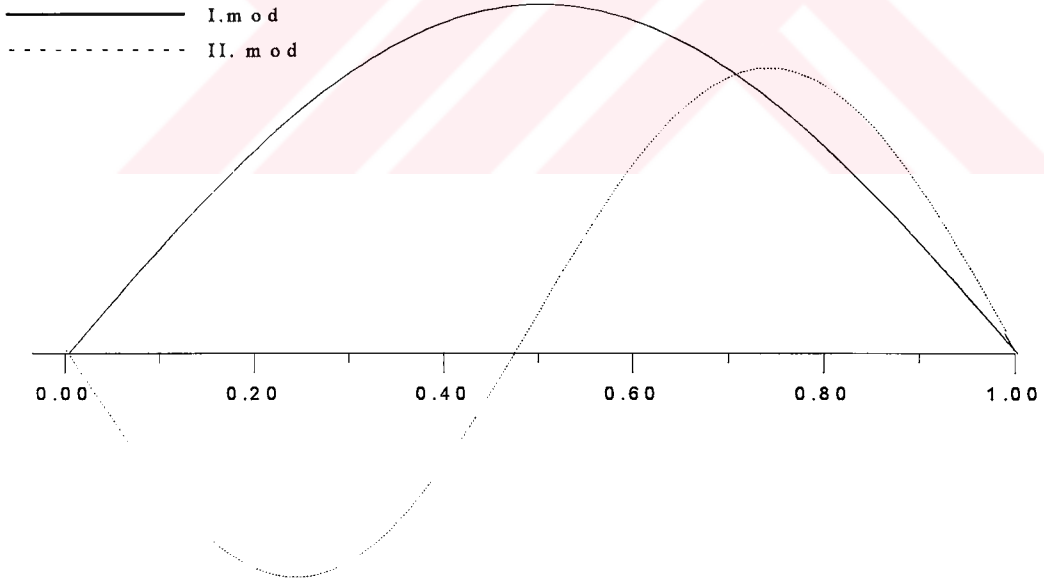
Tablo 6.10. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nin küçük değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları
($\delta = \pi/2$).

E_2/E_1	m (Mod)	ε							
		0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
10	1	0.2084	0.2082	0.2080	0.2074	0.2067	0.2059	0.2047	0.2033
20		0.3520	0.3518	0.3512	0.3504	0.3490	0.3473	0.3453	0.3428
50		0.7008	0.7006	0.7000	0.6988	0.6971	0.6949	0.6922	0.6889
100		1.1010	1.1010	1.1010	1.1010	1.1008	1.1004	1.0998	1.0987
10	2	2.6810	2.6802	2.6782	2.6747	2.6698	2.6636	2.6558	2.6466
20		4.0318	4.0314	4.0304	4.0288	4.0261	4.0226	4.0175	4.0111
50		6.3259	6.3284	6.3357	6.3474	6.3632	6.3823	6.4046	6.4286
100		7.9814	7.9874	8.0056	8.0353	8.0761	8.1273	8.1880	8.2575

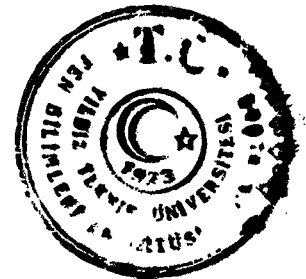


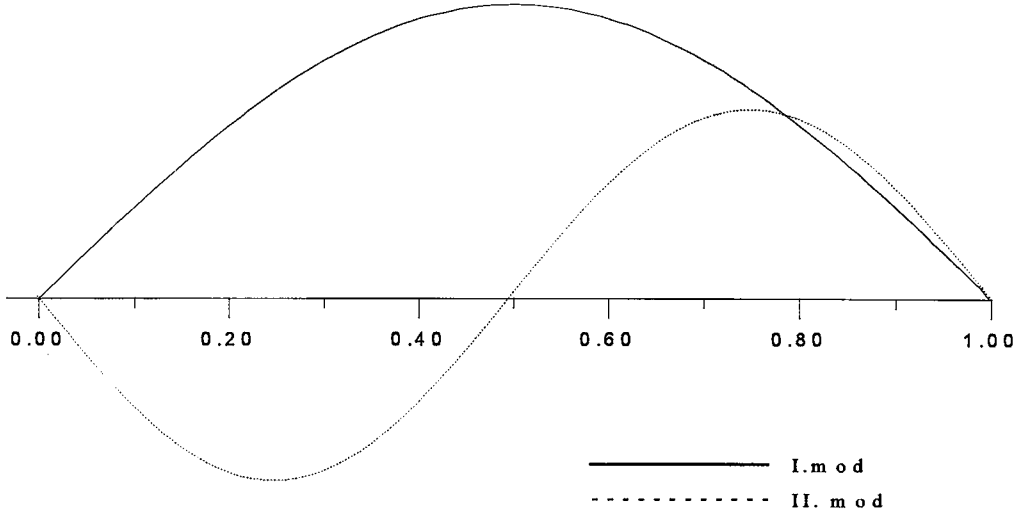


Şekil 6.2. $E_2/E_1 = 50$ ve $\varepsilon = 0$ için plak-kirişin I. ve II. mod şekilleri



Şekil 6.3. $E_2/E_1 = 50$, $\delta = \pi/2$ ve $\varepsilon = 0.01$ için plak-kirişin I. ve II. mod şekilleri

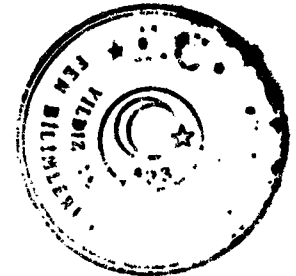




Şekil 6.4. $E_2/E_1 = 50$, $\delta = \pi/2$ ve $\varepsilon = 0.07$ için plak-kirişin I. ve II. mod şekilleri

Tablo 6.11. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun küçük değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/4$).

E_2/E_1	m (Mod)	ε							
		0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
10	1	0.2084	0.2082	0.2080	0.2074	0.2067	0.2057	0.2047	0.2033
20		0.3520	0.3518	0.3512	0.3504	0.3490	0.3473	0.3451	0.3428
50		0.7008	0.7006	0.7000	0.6988	0.6973	0.6949	0.6918	0.6883
100		1.1010	1.1012	1.1014	1.1012	1.1006	1.0992	1.0975	1.0953
10	2	2.6810	2.6802	2.6782	2.6747	2.6698	2.6636	2.6558	2.6464
20		4.0318	4.0314	4.0306	4.0288	4.0259	4.0216	4.0157	4.0079
50		6.3259	6.3286	6.3357	6.3456	6.3571	6.3693	6.3816	6.3639
100		7.9814	7.9878	8.0038	8.0236	8.0444	8.0671	8.0933	8.1241



Tablo 6.12. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun büyük değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları

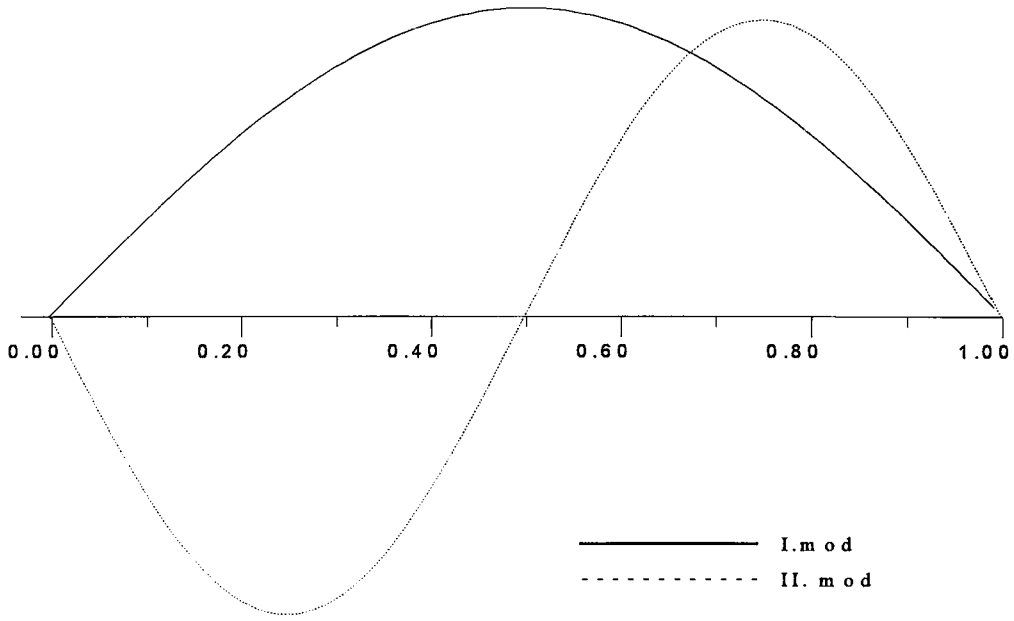
$$(\delta = \pi/2).$$

E_2/E_1	m (Mod)	ε							
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
10	1	0.2084	0.1985	0.1752	0.1518	0.1338	0.1217	0.1135	0.1080
20		0.3520	0.3336	0.2875	0.2365	0.1961	0.1680	0.1494	0.1371
50		0.7008	0.6754	0.5914	0.4762	0.3725	0.2965	0.2447	0.2106
100		1.1010	1.0920	1.0088	0.8358	0.6490	0.4992	0.3932	0.3219
10	2	2.6810	2.6099	2.4042	2.1505	1.9351	1.7782	1.6681	1.5900
20		4.0318	3.9796	3.7091	3.2517	2.7995	2.4495	2.2021	2.0300
50		6.3259	6.5052	6.5554	5.9958	5.0900	4.2370	3.5829	3.1193
100		7.9814	8.5064	9.3532	9.3206	8.2646	6.8738	5.6480	4.7228

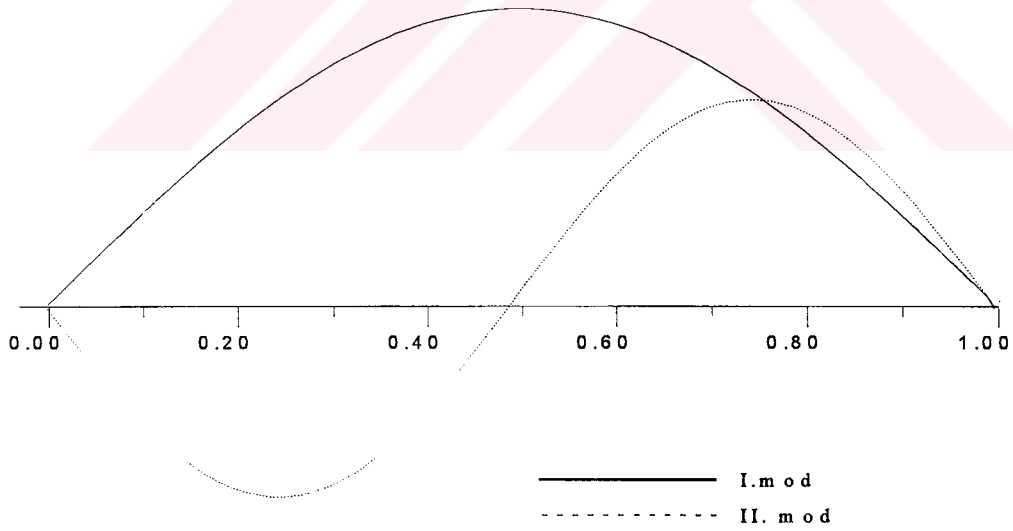
Tablo 6.13. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun büyük değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/4$).

E_2/E_1	m (Mod)	ε							
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
10	1	0.2084	0.1983	0.1740	0.1490	0.1303	0.1180	0.1100	0.1047
20		0.3520	0.3332	0.2840	0.2285	0.1852	0.1563	0.1383	0.1268
50		0.7008	0.6733	0.5807	0.4516	0.3377	0.2584	0.2082	0.1770
100		1.1010	1.0844	0.9819	0.7840	0.5754	0.4174	0.3141	0.2494
10	2	2.6810	2.6089	2.4013	2.1486	1.9343	1.7780	1.6681	1.5898
20		4.0318	3.9714	3.6909	3.2404	2.7954	2.4486	2.2019	2.0292
50		6.3259	6.4298	6.4007	5.8915	5.0499	4.2259	3.5804	3.1157
100		7.9814	8.2446	8.7019	8.7304	7.9974	6.7917	5.6263	4.7105

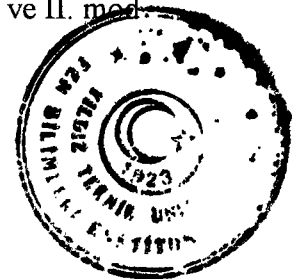




Şekil 6.5. $E_2/E_1 = 50$, $\delta = \pi/2$ ve $\varepsilon = 0.1$ için plak-kirişin I. ve II. mod şekilleri



Şekil 6.6. $E_2/E_1 = 50$, $\delta = \pi/2$ ve $\varepsilon = 0.7$ için plak-kirişin I. ve II. mod şekilleri

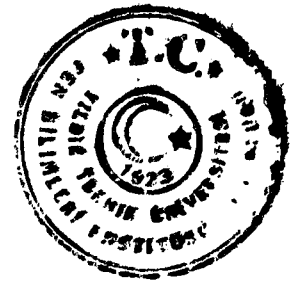


Tablo 6.10-6.13'ün incelenmesinden görüleceği üzere genel olarak aynı E_2/E_1 oranı için elde edilen $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ε değerleri arttıkça azalmaktadır. Dikkat çeken bir nokta da $E_2/E_1 = 10$, $E_2/E_1 = 20$ ve $E_2/E_1 = 50$ oranlarında ε 'nun büyük değerleri için elde edilen $\bar{\omega}_1^2$ sonuçları ε 'nun küçük değerleri için elde edilenlerden daha küçük olmasındır.

Bunlardan başka, aynı ε değeri için E_2/E_1 oranı büyüdükçe $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları da devamlı olarak artmaktadır. ε parametresinin katkısı küçük değerlerinde az iken $0.1 \leq \varepsilon \leq 0.7$ gibi büyük değerlerinde bu katkı daha büyüktür.

Elde edilen sayısal sonuçların tümünün gözden geçirilmesinden plak-kiriş malzemesi yapısındaki eğriselliğin, genelde, doğal titreşim frekanslarının değerinin düşmesine neden olduğu sonucu çıkarılabilir. Adı geçen sayısal sonuçların plak-kiriş malzemesi yapısındaki eğrisellikle bu tür monoton olmayan bağımlılığı, tarafımızdan aşağıdaki gibi izah edilmektedir :

Bilindiği üzere yapı elemanının malzemesinin rijitliği değerce küçülürse, diğer koşullar aynen saklandığında, bu yapı elemanının doğal titreşim frekansları da küçülür. Yukarıda bakılan problemlerde plak-kiriş malzemesi yapısında eğriselliğin olması bu malzemenin rijitliğini azaltmaktadır. Bunu, $\varepsilon > 0$ olması hallerinde ε büyüdükçe malzeme yapısındaki eğriselliğin plak-kirişin doğal titreşim frekanslarının değerlerini küçültecek yönde etki göstermesinden anlaşılmaktadır. Bununla birlikte, malzeme yapısındaki söz konusu eğriselliklerden dolayı, (4.3) denklemlerinden de görüleceği gibi, plak-kirişin x_2 doğrultusundaki enine ve x_1 doğrultusundaki boyuna olan doğal titreşimleri birbirlerine bağımlı hale gelmekte diğer bir deyişle birbirlerine girişim yapmaktadırlar. Bundan dolayı, fikrimizce, yapı malzemesindeki eğrisellikler doğal titreşim frekanslarının değerlerini artırıcı yönde de etki göstermektedirler.



VI. 3. 2. PLAK-KİRİŞ MALZEMESİ YAPISINDA YEREL EĞRİSELLİK OLMASI HALİ

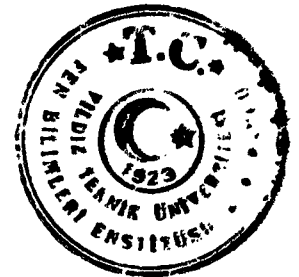
Farz edelim ki, plak-kiriş malzemesi yapısındaki eğrisellik ancak $0 < c_1 \leq x_1 \leq d_1 < l_1$, $-h/2 \leq x_2 \leq +h/2$ bölgesinde olmaktadır. Bu bölgenin dışında ise plak-kiriş malzemesi yapısında hiç bir eğrisellik yoktur. Bir çok araştırma sonuçlarına dayanarak, örneğin Akbarov (1988) vb., bu tür durumlarda plak-kiriş malzemesi yapısındaki eğriselliği gösteren $\varepsilon \cdot f(x_1)$ fonksiyon $x = x_1/l_1$, $c = c_1/l_1$, $d = d_1/l_1$ boyutsuzlaştırması yapılarak:

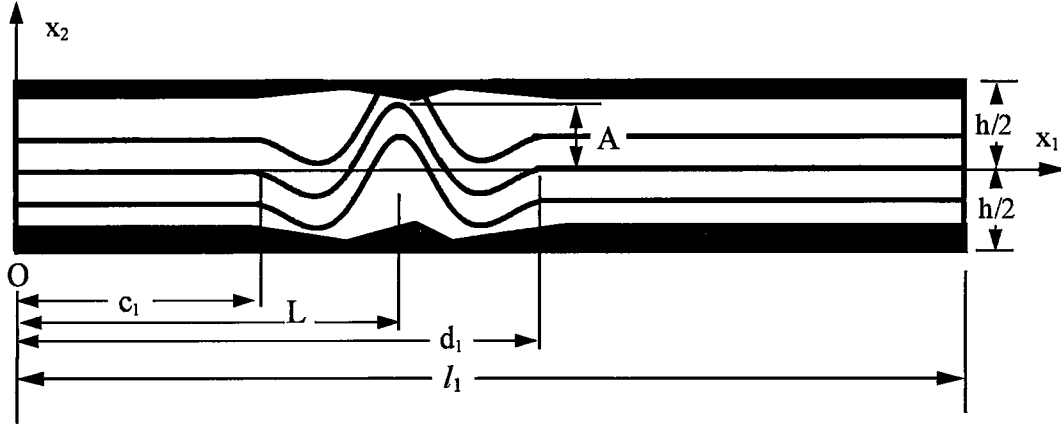
$$\varepsilon \cdot f(x) = l_1 \begin{cases} \varepsilon \xi^3 (x - c)^2 (x - d)^2 \exp\left[-(\xi(x - \delta))^{2n}\right] \cos m\pi\xi(x - \delta) & x \in [c, d] \\ 0 & x \in [0, c) \cup (d, 1] \end{cases} \quad (6.6)$$

biçiminde seçilebilir. (6.6) fonksiyonu ile verilen eğrisellik Şekil 6.7'de şematik olarak gösterilmektedir. Bundan başka, belirtelim ki (6.6)'da $[c, d]$ yerel eğriselliğin mevcut olduğu aralığı, δ yerel eğriliğin en büyük olduğu yeri göstermektedir; ayrıca

$$\xi = \frac{l_1}{d_1 - c_1} = \frac{1}{d - c} \quad (6.7)$$

biçimindedir. Burada, Şekil 6.7'den görüldüğü üzere $\varepsilon = A/(d - c)$, $\delta = L/l_1$ ayrıca A -yerel eğriselliğin tepe noktasının maksimal yüksekliğini, L -bu maksimal yüksekliğe karşı gelen noktanın Ox_1 doğrultusunda başlangıç noktasına olan uzaklığını, n ve m parametreleri ise yerel eğrisellik formundaki anlamları açık olan bazı farklılıkları göstermektedir.





Şekil 6.7. Plak-kiriş malzemesi yapısında olan yerel eğriselliğin geometrisi.

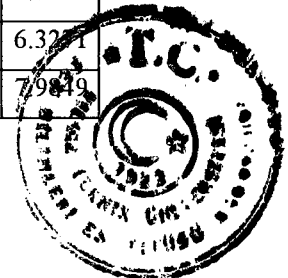
Plak malzemesi yapısındaki eğriselliğin formu olan (6.6) eşitliği sınırlarda $\varepsilon \cdot f(0) = \varepsilon \cdot f(1) = 0$ değerlerini aldığından (5.1) yerdeğiştirme fonksiyonları (4.4) sınır koşullarını otomatik olarak sağlarlar. Bu nedenle hesaplama sonunda elde edilen sonuçlar kesin olacaktır.

Bu çalışmada çeşitli m , c , d değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ değerleri elde edilmiş olup aşağıda tablolar halinde verilmektedir. Ayrıca tüm hesaplamalarda (6.5) eşitliğinde $n=1$ olarak alınmıştır.

Tablo 6.14. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nin küçük değerleri için malzeme yapısında

yerel eğrisellik olan plak-kirişe ait $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($m=2$, $c=0.2$, $d=0.4$).

E_2/E_1	m (Mod)	ε							
		0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
10	1	0.2084	0.2084	0.2084	0.2084	0.2084	0.2084	0.2084	0.2084
20		0.3520	0.3520	0.3520	0.3520	0.3520	0.3520	0.3520	0.3520
50		0.7008	0.7008	0.7010	0.7010	0.7010	0.7010	0.7010	0.7010
100		1.1010	1.1010	1.1012	1.1012	1.1012	1.1012	1.1012	1.1014
10	2	2.6810	2.6810	2.6810	2.6810	2.6810	2.6810	2.6810	2.6808
20		4.0318	4.0318	4.0318	4.0318	4.0318	4.0318	4.0318	4.0318
50		6.3259	6.3261	6.3261	6.3263	6.3263	6.3267	6.3269	6.3271
100		7.9814	7.9816	7.9818	7.9821	7.9825	7.9831	7.9841	7.9849



Tablo 6.15. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun büyük değerleri için malzeme yapısındayerel eğrisellik olan plak-kirişe ait $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($m=2$, $c=0.2$, $d=0.4$).

E_2/E_1	m (Mod)	ε							
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
10	1	0.2084	0.2084	0.2084	0.2082	0.2082	0.2080	0.2078	0.2076
20		0.3520	0.3520	0.3520	0.3520	0.3518	0.3516	0.3514	0.3510
50		0.7008	0.7010	0.7014	0.7018	0.7022	0.7026	0.7026	0.7024
100		1.1010	1.1016	1.1033	1.1053	1.1074	1.1090	1.1100	1.1102
10	2	2.6810	2.6808	2.6806	2.6800	2.6792	2.6780	2.6767	2.6749
20		4.0318	4.0320	4.0325	4.0333	4.0343	4.0353	4.0359	4.0361
50		6.3259	6.3284	6.3351	6.3454	6.3583	6.3724	6.3870	6.4013
100		7.9814	7.9886	8.0085	8.0384	8.0741	8.1126	8.1515	8.1892

Tablo 6.16. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun büyük değerleri için malzeme yapısındayerel eğrisellik olan plak-kirişe ait $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($m=2$, $c=0.3$, $d=0.7$).

E_2/E_1	m (Mod)	ε							
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
10	1	0.2084	0.2084	0.2082	0.2080	0.2078	0.2074	0.2071	0.2067
20		0.3520	0.3520	0.3520	0.3518	0.3514	0.3510	0.3506	0.3498
50		0.7008	0.7010	0.7016	0.7026	0.7037	0.7053	0.7069	0.7088
100		1.1010	1.1020	1.1051	1.1102	1.1174	1.1268	1.1383	1.1520
10	2	2.6810	2.6809	2.6800	2.6788	2.6773	2.6753	2.6730	2.6704
20		4.0318	4.0312	4.0298	4.0275	4.0245	4.0208	4.0167	4.0120
50		6.3259	6.3239	6.3181	6.3083	6.2954	6.2800	6.2624	6.2439
100		7.9814	7.9745	7.9540	7.9206	7.8755	7.8196	7.7550	7.6837

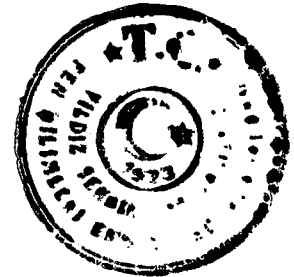


Tablo 6.17. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun büyük değerleri için malzeme yapısındayerel eğrisellik olan plak-kirişe ait $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($m=3$, $c=0.3$, $d=0.7$).

E_2/E_1	m (Mod)	ε							
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
10	1	0.2084	0.2084	0.2080	0.2076	0.2071	0.2065	0.2055	0.2045
20		0.3520	0.3520	0.3516	0.3512	0.3504	0.3494	0.3483	0.3467
50		0.7008	0.7012	0.7022	0.7035	0.7053	0.7072	0.7090	0.7106
100		1.1010	1.1029	1.1084	1.1174	1.1295	1.1440	1.1600	1.1764
10	2	2.6810	2.6806	2.6798	2.6784	2.6767	2.6743	2.6718	2.6689
20		4.0318	4.0314	4.0300	4.0280	4.0255	4.0224	4.0191	4.0155
50		6.3260	6.3239	6.3177	6.3081	6.2962	6.2831	6.2700	6.2581
100		7.9814	7.9726	7.9466	7.9062	7.8542	7.7954	7.7343	7.6753

Tablo 6.18. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun büyük değerleri için malzeme yapısındayerel eğrisellik olan plak-kirişe ait $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($m=4$, $c=0.3$, $d=0.7$).

E_2/E_1	m (Mod)	ε							
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
10	1	0.2084	0.2082	0.2078	0.2071	0.2061	0.2049	0.2033	0.2016
20		0.3520	0.3518	0.3512	0.3502	0.3487	0.3467	0.3442	0.3412
50		0.7008	0.7012	0.7022	0.7033	0.7041	0.7045	0.7039	0.7022
100		1.1010	1.1035	1.1108	1.1213	1.1340	1.1471	1.1594	1.1699
10	2	2.6810	2.6806	2.6798	2.6784	2.6767	2.6743	2.6714	2.6681
20		4.0318	4.0316	4.0310	4.0302	4.0290	4.0279	4.0265	4.0249
50		6.3260	6.3243	6.3200	6.3138	6.3075	6.3027	6.3007	6.3021
100		7.9814	7.9716	7.9437	7.9023	7.8538	7.8052	7.7628	7.7308



Tablo 6.14 ve Tablo 6.15'in karşılaştırılmasından ε parametresi büyüdükçe $E_2/E_1 = 10$ ve $E_2/E_1 = 20$ oranları için $\bar{\omega}_I^2$ sonuçları küçülürken, $E_2/E_1 = 50$ ve $E_2/E_1 = 100$ oranlarında büyüdüğü görülmektedir. Ancak $\bar{\omega}_{II}^2$ sonuçları ise ε parametresi arttıkça genelde büyümektedir.

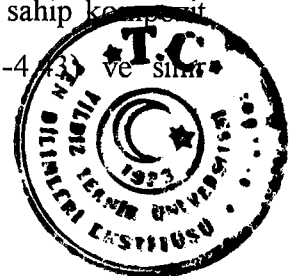
Kompozit malzeme yapısında yerel eğriselliğinin ε parametresinin $\bar{\omega}_m^2$ sonuçlarına katkısı çok az olduğundan adı geçen parametrenin büyük $0 \leq \varepsilon \leq 0.7$ değerlerinde elde edilen sonuçlar tablolar halinde verilmiştir (Tablo 6.15- 6.18). Tablo 6.15 ve Tablo 6.16'nın karşılaştırılmasından malzeme yapısındaki yerel eğrisellik plak-kirişin ortasına doğru geldikçe $E_2/E_1 = 10$ ve $E_2/E_1 = 20$ için $\bar{\omega}_I^2$ sonuçlarında azalma, $E_2/E_1 = 50$ ve $E_2/E_1 = 100$ oranları için ise artma görülmektedir. Ayrıca $\bar{\omega}_{II}^2$ sonuçları ise her durumda azalmaktadır.

Yerel eğriselliğin formunu gösteren (6.6) eşitliğinde, *eğrisellik formunun "titreşimini"* karakterize eden m parametresi, Tablo 6.16- 6.18'in incelenmesinden görüleceği üzere, doğal titreşim frekanslarının I. moduna karmaşık etki gösterdiği hâde, II. mod değerleri m 'nin büyümesiyle monoton olarak artmaktadır.

Malzeme yapısında yerel eğrisellik bulunan plak-kirişlerin doğal titreşim formları malzeme yapısında periyodik eğrisellik bulunan plak-kirişlere benzer olduğundan burada verilmemiştir.

VI. 4. EĞRİSEL YAPIYA SAHİP KOMPOZİT MALZEMEDEN HAZIRLANMIŞ PLAK-KİRİŞLERİN STABİLİTESİNE AİT SAYISAL SONUÇLARIN İNCELENMESİ

Bölüm IV.4'de farklı plak teorileri çerçevesinde plakların stabilite denklemleri çıkarılmış, üçüncü mertebeden geliştirilmiş plak teorisi çerçevesinde eğrisel yapıya sahip kompozit malzemedeki hazırlanmış plak-kirişlerin stabilite denklemleri eşl.(4.41-4.43) ve eşl.

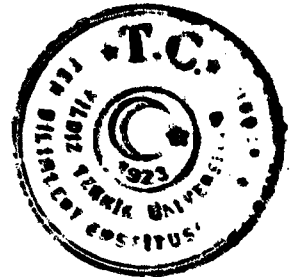


koşulları eş.(4.44) ile verilmişti. Bilinen nedenlerden ve Bölüm VI.2’de elde edilen sayısal sonuçlardan dolayı belirtelim ki, tezde stabilite konusunda yapılan sayısal araştırmalarda, sadece üçüncü mertebeden olan geliştirilmiş plak teorisi çerçevesindeki (4.41)-(4.43) denklemleri ve çözüm yöntemi olarak Galerkin Yöntemi kullanılmıştır. Galerkin Yönteminin (4.41-4.43) stabilite denklemlerine uygulanması ve çözüm algoritması doğal titreşim problemleri için anlatıldığı gibi olduğundan burada tekrarlamaya gerek görülmemiştir.

Dikkat edilirse, (4.41-4.43) denklemlerinde malzeme yapısındaki eğriselliklerin formlarından bahsedilmemektedir. Şimdi, bu denklemler kullanılarak değişik eğrisellik formları için elde edilen sayısal sonuçları ele alalım.

VI. 4.1. PLAK-KİRİŞ MALZEMESİ YAPISINDA PERİYODİK EĞRİSELLİK OLMASI HALİ

Bölüm VI. 4. 1’de bahsedilen (5.1) yerdeğiştirme fonksiyonlarının, $0 \leq \delta \leq \pi$ aralığında değerler alan δ terimine bağlı olarak, sınır koşullarını otomatik sağlaması konusu plak-kirişin stabilitesi problemine ait (4.44) sınır koşulları için de aynı şekilde geçerlidir. Plak malzemesi yapısındaki periyodik eğriselliğin formu olan (6.4) eşitliğinde $\delta = \pi/2$ olması durumunda (5.1) yerdeğiştirme fonksiyonları (4.44) sınır koşullarını otomatik olarak sağlar. Bu durumda elde edilen sayısal sonuçlar kesin, aksi durumlarda yaklaşık olacaktır. Bu çalışmada $\delta = 0$, $\delta = \pi/4$ ve $\delta = \pi/2$ için $\bar{P}_{kr} = P_{kr} / A_{22}^0$ değerleri elde edilmiş olup aşağıda tablolar halinde verilmektedir. Galerkin Yöntemiyle elde edilen serilerde $N=20$ olarak alındığında sayısal sonuçlar yeter yaklaşıklıkla bulunmuştur.

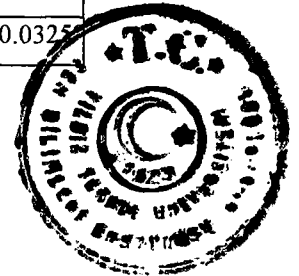


Tablo 6.19. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun küçük değerleri için malzeme yapısında periyodik eğrisellik olan plak-kirişe ait \bar{P}_{kr} sonuçları .

E_2/E_1	δ	ε							
		0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
10	0	0.0211	0.0211	0.0211	0.0211	0.0209	0.0209	0.0209	0.0206
20		0.0356	0.0356	0.0356	0.0355	0.0353	0.0351	0.0350	0.0347
50		0.0711	0.0709	0.0709	0.0708	0.0706	0.0703	0.0700	0.0697
100		0.1115	0.1115	0.1115	0.1114	0.1112	0.1109	0.1105	0.1100
10	$\pi/4$	0.0211	0.0211	0.0211	0.0211	0.0209	0.0209	0.0208	0.0206
20		0.0356	0.0356	0.0356	0.0355	0.0353	0.0351	0.0350	0.0347
50		0.0711	0.0709	0.0709	0.0708	0.0706	0.0703	0.0700	0.0697
100		0.1115	0.1115	0.1115	0.1115	0.1114	0.1112	0.1109	0.1106
10	$\pi/2$	0.0211	0.0211	0.0211	0.0211	0.0209	0.0209	0.0208	0.0206
20		0.0356	0.0356	0.0356	0.0355	0.0353	0.0351	0.0350	0.0347
50		0.0711	0.0709	0.0709	0.0708	0.0706	0.0703	0.0701	0.0697
100		0.1115	0.1115	0.1115	0.1115	0.1114	0.1114	0.1112	0.1111

Tablo 6.20. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun büyük değerleri için malzeme yapısında periyodik eğrisellik olan plak-kirişe ait \bar{P}_{kr} sonuçları .

E_2/E_1	δ	ε							
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
10	0	0.0211	0.0201	0.0178	0.0153	0.0136	0.0123	0.0115	0.0109
20		0.0356	0.0337	0.0290	0.0239	0.0198	0.0170	0.0151	0.0139
50		0.0711	0.0681	0.0594	0.0480	0.0376	0.0300	0.0247	0.0211
100		0.1115	0.1078	0.0837	0.0820	0.0648	0.0501	0.0395	0.0322
10	$\pi/4$	0.0211	0.0201	0.0176	0.0151	0.0133	0.0120	0.0111	0.0106
20		0.0356	0.0337	0.0287	0.0231	0.0187	0.0158	0.0140	0.0128
50		0.0711	0.0681	0.0586	0.0456	0.0340	0.0261	0.0211	0.0178
100		0.1115	0.1094	0.0984	0.0787	0.0580	0.0422	0.0317	0.0251
10	$\pi/2$	0.0211	0.0201	0.0178	0.0153	0.0136	0.0123	0.0115	0.0109
20		0.0356	0.0337	0.0290	0.0239	0.0198	0.0170	0.0151	0.0139
50		0.0711	0.0683	0.0598	0.0481	0.0376	0.0300	0.0247	0.0212
100		0.1115	0.1101	0.1014	0.0840	0.0655	0.0505	0.0397	0.0325



Tablo 6.19-6.20'nin incelenmesinden görüleceği üzere periyodik eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeli plak-kirişte boyutsuz \bar{P}_{kr} sonuçları ε 'nin küçük değerlerinde daha az, büyük değerlerinde ise daha belirgin bir şekilde monoton olarak azalma göstermektedir. Bu azalmalar E_2/E_1 oranı büyüdükçe daha belirgin olmaktadır.

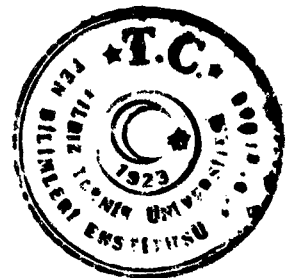
VI. 4. 2. PLAK-KİRİŞ MALZEMESİ YAPISINDA YEREL EĞRİSELLİK OLMASI HALİ

Plak malzemesi yapısındaki yerel eğriselliğin formu olan (6.6) eşitliği sınırlarda $\varepsilon.f(0) = \varepsilon.f(1) = 0$ değerlerini aldığından (5.1) yerdeğiştirme fonksiyonları (4.4) sınır koşullarını otomatik olarak sağlarlar. Bu nedenle hesaplama sonunda elde edilen sonuçlar kesin olacaktır.

Bu çalışmada çeşitli m, c, d değerleri için \bar{P}_{kr} değerleri elde edilmiş olup aşağıda tablolar halinde verilmektedir. Ayrıca tüm hesaplamalarda (6.5) eşitliğinde $n=1$ alınmıştır. Galerkin Yöntemiyle elde edilen serilerde $N=20$ olarak alındığında sayısal sonuçlar yeter yaklaşıklıkla bulunmuştur.

Tablo 6.21. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nin küçük değerleri için malzeme yapısında yerel eğrisellik olan plak-kirişe ait \bar{P}_{kr} sonuçları ($m=1, c=0.0, d=0.4$).

E_2/E_1	ε							
	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
10	0.0211	0.0211	0.0211	0.0211	0.0211	0.0211	0.0211	0.0211
20	0.0356	0.0356	0.0356	0.0356	0.0356	0.0356	0.0356	0.0356
50	0.0711	0.0711	0.0711	0.0711	0.0711	0.0711	0.0711	0.0711
100	0.1115	0.1115	0.1115	0.1115	0.1115	0.1115	0.1115	0.1115



Tablo 6.22. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun büyük değerleri için malzeme yapısında yerel eğrisellik olan plak-kirişe ait \bar{P}_{kr} sonuçları ($m=1$, $c=0.0$, $d=0.4$).

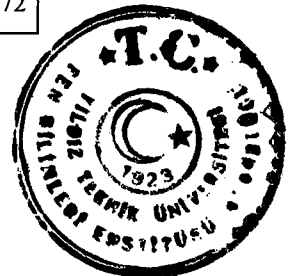
E_2/E_1	ε							
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
10	0.0211	0.0211	0.0211	0.0211	0.0211	0.0211	0.0211	0.0211
20	0.0356	0.0356	0.0356	0.0356	0.0356	0.0356	0.0355	0.0355
50	0.0711	0.0711	0.0709	0.0709	0.0709	0.0708	0.0706	0.0705
100	0.1115	0.1115	0.1115	0.1114	0.1111	0.1108	0.1100	0.1090

Tablo 6.23. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun büyük değerleri için malzeme yapısında yerel eğrisellik olan plak-kirişe ait \bar{P}_{kr} sonuçları ($m=1$, $c=0.3$, $d=0.7$).

E_2/E_1	ε							
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
10	0.0211	0.0211	0.0211	0.0211	0.0211	0.0211	0.0211	0.0211
20	0.0356	0.0356	0.0356	0.0358	0.0358	0.0358	0.0358	0.0358
50	0.0711	0.0711	0.0711	0.0712	0.0715	0.0717	0.0720	0.0723
100	0.1115	0.1117	0.1120	0.1126	0.1134	0.1142	0.1151	0.1159

Tablo 6.24. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nun büyük değerleri için malzeme yapısında yerel eğrisellik olan plak-kirişe ait \bar{P}_{kr} sonuçları ($m=2$, $c=0.3$, $d=0.7$).

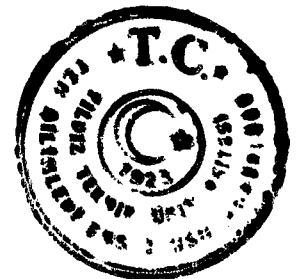
E_2/E_1	ε							
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
10	0.0211	0.0211	0.0211	0.0211	0.0211	0.0211	0.0209	0.0209
20	0.0356	0.0356	0.0356	0.0356	0.0356	0.0356	0.0355	0.0355
50	0.0711	0.0711	0.0711	0.0712	0.0712	0.0714	0.0717	0.0719
100	0.1115	0.1117	0.1120	0.1125	0.1133	0.1144	0.1156	0.1172



Tablo 6.21-Tablo 6.22'den görüleceği üzere yerel eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeli plak-kirişte \bar{P}_{kr} sonuçları, ε 'nin küçük değerlerinde hemen hiç bir değişim göstermezken ε 'nin büyük ($0.1 \leq \varepsilon \leq 0.7$) değerlerinde sürekli azalmaktadır.

Tablo 6.22 ile Tablo 6.23'ün karşılaştırılmasından, malzeme yapısındaki yerel eğriselliğin yeri plak-kirişin ortasına doğru geldikçe \bar{P}_{kr} sonuçlarında bir artış olduğu gözlenmektedir.

Tablo 6.23 ile Tablo 6.24'den görüldüğü gibi malzeme yapısındaki yerel eğriselliğin salınım sayısının artması \bar{P}_{kr} sonuçlarında, genel olarak, azalmaya neden olmaktadır.



BÖLÜM VII.

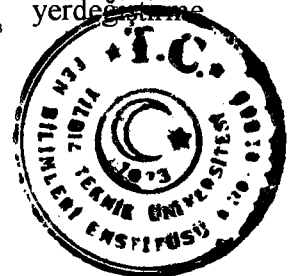
PLAKLARIN DOĞAL TİTREŞİMLERİNE AİT SAYISAL SONUÇLAR ve YORUMU

VII. 1. DOĞAL TİTREŞİM DENKLEMLERİ

Bölüm III. 2. 2’de eğrisel yapıya sahip kompozit malzemedan hazırlanmış $0 \leq x_1 \leq l_1$, $-h/2 \leq x_2 \leq +h/2$, $0 \leq x_3 \leq l_3$ alanını kapsayan plağın hareket denklemleri (3.27)-(3.28) ve tez kapsamında ele alınacak sınır koşulları (3.29) çıkarılmıştı. Adı geçen plağın doğal titreşim problemlerinin sayısal çözümünde daha önce bahsedilen Galerkin Yöntemi kullanılacaktır, yani (3.26)’daki X_w , X_u , X_v , X_{φ_1} ve X_{φ_3} bilinmeyenleri öyle fonksiyonlar (ki bu fonksiyonlar tam fonksiyonlar kümesini oluşturur) yardımıyla ifade edilmelidir ki (3.29) sınır koşulları bu fonksiyonların herbiri için otomatik olarak sağlansın. Bölüm V.1 de anlatılan Galerkin Yöntemine göre (3.27)-(3.28) hareket denklemlerinde ideal durumda (yani, $\Phi_1(x_1) = 1$ ve $\Phi_2(x_1) = 0$) $A_{11} = A_{11}^0$, $A_{33} = A_{33}^0$, $A_{44} = A_{44}^0$, $A_{55} = A_{55}^0$, $A_{66} = A_{66}^0$, $A_{13} = A_{13}^0$, $A_{16} = A_{16}^0 = 0$, $A_{36} = A_{36}^0 = 0$, $A_{45} = A_{45}^0 = 0$ olarak kabul edilirse,

$$\begin{aligned} X_{u_{mn}}^0 &= \cos(m\pi x_1/l_1)\sin(n\pi x_3/l_3), & X_{v_{mn}}^0 &= \sin(m\pi x_1/l_1)\cos(n\pi x_3/l_3), \\ X_{w_{mn}}^0 &= \sin(m\pi x_1/l_1)\sin(n\pi x_3/l_3), & X_{\varphi_{1mn}}^0 &= \cos(m\pi x_1/l_1)\sin(n\pi x_3/l_3), \\ X_{\varphi_{3mn}}^0 &= \sin(m\pi x_1/l_1)\cos(n\pi x_3/l_3) & & (7.1) \end{aligned}$$

özfonksiyonları elde edilir. Bu özfonksiyonlar keyfi m ve n için (3.29) sınır koşullarını otomatik olarak sağlarlar. Böylece yukarıda söylenenleri göz önüne alarak (3.27)-(3.29) probleminin incelenmesi için aranan, X_w , X_u , X_v , X_{φ_1} ve X_{φ_3} yerdeğıştirme fonksiyonları



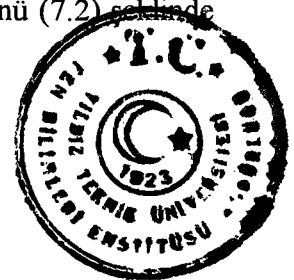
$$\begin{aligned}
X_u(x_1, x_3) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} X_{u_{mn}}^0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos \frac{m\pi x_1}{l_1} \sin \frac{n\pi x_3}{l_3} \\
X_v(x_1, x_3) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} X_{v_{mn}}^0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{l_1} \cos \frac{n\pi x_3}{l_3} \\
X_w(x_1, x_3) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} X_{w_{mn}}^0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{l_1} \sin \frac{n\pi x_3}{l_3}, \\
X_{\varphi_1}(x_1, x_3) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1mn} X_{\varphi_{1mn}}^0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1mn} \cos \frac{m\pi x_1}{l_1} \sin \frac{n\pi x_3}{l_3}, \\
X_{\varphi_3}(x_1, x_3) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{3mn} X_{\varphi_{3mn}}^0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{3mn} \sin \frac{m\pi x_1}{l_1} \cos \frac{n\pi x_3}{l_3}
\end{aligned} \tag{7.2}$$

biçiminde ifade edilir.

Şimdi X_w , X_u , X_v , X_{φ_1} ve X_{φ_3} yerdeğiştirme fonksiyonlarının (3.29) koşullarını otomatik olarak sağlayıp sağlamadığına bakılacak olursa, bu sınır koşullarından ikincisinin diğerlerinin aksine her zaman otomatik olarak sağlanmadığı açıkça görülür. Ancak, daha önce plak-kirişte de olduğu gibi öyle özel bir durum var ki bu durumda bu sınır koşulu da kesin olarak sağlanabilir. Bu durum

$$A_{16}(0) = A_{16}(l_1) = 0, \tag{7.3}$$

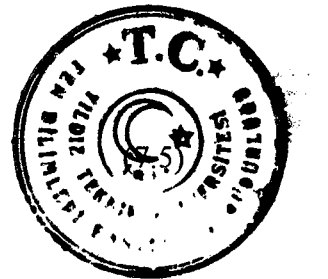
olması durumudur. Bu ise malzeme yapısındaki eğriselliğin formunun yani $\varepsilon \cdot f(x_1)$ fonksiyonunun verilmesine bağlıdır. Böylece, Galerkin Yönteminin ele alınan (3.27)-(3.29) problemine kesin bir şekilde uygulanabilmesi için yapılan araştırmalarda öyle eğrisellik formları ele alınmalıdır ki (7.3) koşulu kesin olarak sağlansın. Bu koşul sağlanmadığında (3.27)'nin ikinci ve dördüncü denklemleri X_w , X_u , X_v , X_{φ_1} ve X_{φ_3} 'nin seçilen ifadeleri ile ancak yaklaşık olarak sağlanabilir. Şimdilik (7.3) koşullarının sağlandığını kabul edelim ve (3.27)-(3.28) ile verilen problemin çözümünü (7.2) şeklinde arayalım.



Bunun için (7.2) ifadesini (3.27) ve (3.28)'te yerine koyup, $\sin(m\pi x_1/l_1)$ ve $\cos(m\pi x_1/l_1)$ ile $\sin(n\pi x_3/l_3)$ ve $\cos(n\pi x_3/l_3)$ fonksiyonlarının da ortogonalliğini göz önüne alıp (3.27)-(3.28) denklemlerinde (7.2) ifadelerindeki bilinmeyen U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} , φ_{1mn} , φ_{3mn} sabitleri için homojen, lineer, cebrik denklemler sistemini elde ederiz. Bilindiği üzere, bu denklemlerin sıfırdan farklı çözümünün olabilmesi için ise bunların katsayılar determinanı sıfıra eşit olmalıdır. Bu determinantın sıfıra eşitlenmesinden elde edilen denkleme önceki bölümlerde olduğu gibi *frekans denklemi* diyeceğiz. Frekans denkleminin çözümlerini bilgisayar yardımıyla elde edip, ele alınan plağın doğal titreşim frekansları belirlenir. $x = x_1/l_1$, $y = x_3/l_3$, $\lambda = l_1/l_3$ ve $\bar{\omega}^2 = \rho\omega^2 l_1^2/A_{22}^0$ boyutsuzlaştırmaları yapılarak söylenenler (3.27)-(3.28) denklemlerine uygulanırsa

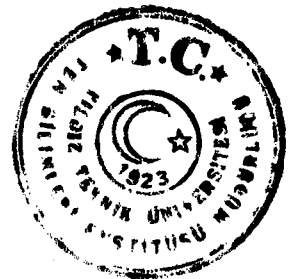
$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \frac{1}{l_1^3} \left[-(m\pi)A'_{11,1} \sin m\pi x \sin n\pi y - \left((m\pi)^2 A'_{11} + (\lambda n\pi)^2 A'_{55} - \bar{\omega}^2 \right) \cos m\pi x \sin n\pi y \right] + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \frac{1}{l_1^3} \left[-(\lambda n\pi)A'_{13,1} \sin m\pi x \sin n\pi y - (A'_{13} + A'_{55})(m\pi)(\lambda n\pi) \cos m\pi x \sin n\pi y \right] + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1mn} \frac{(h/l_1)^2}{24} \left[A'_{16,1} \cos m\pi x \sin n\pi y - A'_{16}(m\pi) \sin m\pi x \sin n\pi y \right] + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{3mn} \frac{(h/l_1)^2}{24} \left[-A'_{45}(\lambda n\pi) \sin m\pi x \sin n\pi y \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \frac{1}{l_1^3} \left[(\lambda n\pi)A'_{55,1} \cos m\pi x \cos n\pi y - (A'_{13} + A'_{55})(m\pi)(\lambda n\pi) \sin m\pi x \cos n\pi y \right] + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \frac{1}{l_1^3} \left[(m\pi)A'_{55,1} \cos m\pi x \cos n\pi y - \left((m\pi)^2 A'_{55} + (\lambda n\pi)^2 A'_{33} - \bar{\omega}^2 \right) \sin m\pi x \cos n\pi y \right] + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1mn} \frac{(h/l_1)^2}{24} \left[A'_{36}(\lambda n\pi) \cos m\pi x \cos n\pi y \right] + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{3mn} \frac{(h/l_1)^2}{24} \left[A'_{45,1} \sin m\pi x \cos n\pi y + A'_{45}(m\pi) \cos m\pi x \cos n\pi y \right] = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \frac{1}{l_1^3} \left[-(m\pi) A'_{16,1} \sin m\pi x \sin n\pi y - \left((m\pi)^2 A'_{16} + (\lambda n\pi)^2 A'_{45} \right) \cos m\pi x \sin n\pi y \right] + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \frac{1}{l_1^3} \left[-(\lambda n\pi) A'_{36,1} \sin m\pi x \sin n\pi y - (A'_{36} + A'_{45})(m\pi)(\lambda n\pi) \cos m\pi x \sin n\pi y \right] + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{1mn} \frac{(h/l_1)^2}{24} \left[A'_{66,1} \cos m\pi x \sin n\pi y - A'_{66}(m\pi) \sin m\pi x \sin n\pi y \right] + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{3mn} \frac{(h/l_1)^2}{24} \left[-A'_{44}(\lambda n\pi) \sin m\pi x \sin n\pi y \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \frac{1}{l_1^3} \left[\bar{\omega}^2 \sin m\pi x \sin n\pi y \right] = 0
\end{aligned} \tag{7.6}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \frac{1}{l_1^3} \left[(m\pi) A'_{16} \sin m\pi x \sin n\pi y \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \frac{1}{l_1^3} \left[(\lambda n\pi) A'_{36} \sin m\pi x \sin n\pi y \right] + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{1mn} \frac{(h/l_1)^4}{240} \left[- \left(\frac{10}{(h/l_1)^2} A'_{66} + (m\pi)^2 A'_{11} + (\lambda n\pi)^2 A'_{55} - \bar{\omega}^2 \right) \cos m\pi x \sin n\pi y - \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - A'_{11,1}(m\pi) \sin m\pi x \sin n\pi y \right] + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{3mn} \frac{(h/l_1)^4}{240} \left[-(\lambda n\pi) A'_{13,1} \sin m\pi x \sin n\pi y - (A'_{13} + A'_{55})(m\pi)(\lambda n\pi) \cos m\pi x \sin n\pi y \right] + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \frac{1}{l_1^3} \left(-\frac{(h/l_1)^2}{12} \right) \left[- \left((m\pi)^2 A'_{11,1} + (\lambda n\pi)^2 A'_{13,1} \right) \sin m\pi x \sin n\pi y - \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - (m\pi) \left((\lambda n\pi)^2 (2A'_{55} + A'_{13}) + (m\pi)^2 A'_{11} - \bar{\omega}^2 \right) \cos m\pi x \sin n\pi y \right] = 0
\end{aligned} \tag{7.7}$$

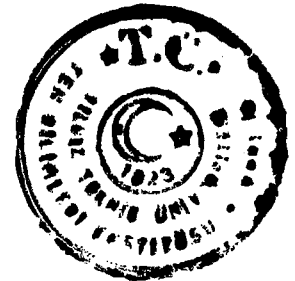


$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1n=1}^{\infty} \sum_{m=1n=1}^{\infty} U_{mn} \frac{1}{l_1^3} [-(\lambda n \pi) A'_{45} \cos m \pi x \cos n \pi y] + \sum_{m=1n=1}^{\infty} \sum_{m=1n=1}^{\infty} V_{mn} \frac{1}{l_1^3} [-(m \pi) A'_{45} \cos m \pi x \cos n \pi y] + \\
& \sum_{m=1n=1}^{\infty} \sum_{m=1n=1}^{\infty} \Phi_{1mn} \frac{(h/l_1)^4}{240} [(\lambda n \pi) A'_{55,1} \cos m \pi x \cos n \pi y - (A'_{13} + A'_{55})(m \pi)(\lambda n \pi) \sin m \pi x \cos n \pi y] + \\
& \sum_{m=1n=1}^{\infty} \sum_{m=1n=1}^{\infty} \Phi_{3mn} \frac{(h/l_1)^4}{240} \left[- \left(\frac{10}{(h/l_1)^2} A'_{44} + (m \pi)^2 A'_{55} + (\lambda n \pi)^2 A'_{33} - \bar{\omega}^2 \right) \sin m \pi x \cos n \pi y + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. + (m \pi) A'_{55,1} \cos m \pi x \cos n \pi y \right] + \\
& \sum_{m=1n=1}^{\infty} \sum_{m=1n=1}^{\infty} W_{mn} \frac{1}{l_1^3} \left(- \frac{(h/l_1)^2}{12} \right) \left[2(m \pi)(\lambda n \pi) A'_{55,1} \cos m \pi x \cos n \pi y - \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. - (\lambda n \pi) \left((m \pi)^2 (2A'_{55} + A'_{13}) + (\lambda n \pi)^2 A'_{33} - \bar{\omega}^2 \right) \sin m \pi x \cos n \pi y \right] = 0
\end{aligned} \tag{7.8}$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
A'_{11}(x) &= \frac{A_{11}(x)}{A_{22}^0}, & A'_{13}(x) &= \frac{A_{13}(x)}{A_{22}^0}, & A'_{16}(x) &= \frac{A_{16}(x)}{A_{22}^0}, \\
A'_{33}(x) &= \frac{A_{33}(x)}{A_{22}^0}, & A'_{36}(x) &= \frac{A_{36}(x)}{A_{22}^0}, & A'_{44}(x) &= \frac{A_{44}(x)}{A_{22}^0}, \\
A'_{45}(x) &= \frac{A_{45}(x)}{A_{22}^0}, & A'_{55}(x) &= \frac{A_{55}(x)}{A_{22}^0}, & A'_{66}(x) &= \frac{A_{66}(x)}{A_{22}^0}.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

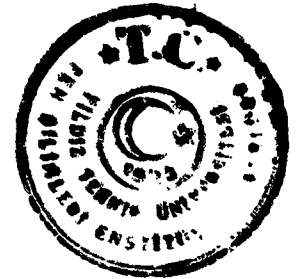
işaretlemeleri kabul edilmiştir. Ayrıca (7.4)-(7.8)'de $A'_{ij,1} = dA'_{ij}/dx$ biçimindedir. Şimdi, (7.4)'ü $\cos p \pi x \sin q \pi y$, (7.5)'i $\sin p \pi x \cos q \pi y$, (7.6)'yı $\sin p \pi x \sin q \pi y$, (7.7)'yi $\cos p \pi x \sin q \pi y$, (7.8)'ü $\sin p \pi x \cos q \pi y$ ile çarpıp 0'dan 1'e kadar x 'e göre ve 0'dan 1'e kadar y 'e entegre edilirse, (7.4)-(7.8)'deki U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} , Φ_{1mn} , Φ_{3mn} 'ler için aşağıdaki denklemler,



$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \frac{1}{l_1^3} \left[-(m\pi)I_{1mp} - (m\pi)^2 I_{2mp} - (\lambda n\pi)^2 I_{3mp} + \frac{1}{2} \delta_{mp} \bar{\omega}^2 \right] \delta_{nq} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \frac{1}{l_1^3} \left[-(\lambda n\pi)(I_{4mp} + (m\pi)I_{5mp}) \right] \delta_{nq} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1mn} \frac{(h/l_1)^2}{24} \left[I_{6mp} - (m\pi)I_{7mp} \right] \delta_{nq} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{3mn} \frac{(h/l_1)^2}{24} \left[-I_{8mp} (\lambda n\pi) \right] \delta_{nq} = 0
\end{aligned} \tag{7.10}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \frac{1}{l_1^3} \left[(\lambda n\pi)(I_{9mp} - (m\pi)I_{10mp}) \right] \delta_{nq} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \frac{1}{l_1^3} \left[(m\pi)I_{9mp} - \left((m\pi)^2 I_{11mp} + (\lambda n\pi)^2 I_{12mp} - \frac{1}{2} \delta_{mp} \bar{\omega}^2 \right) \right] \delta_{nq} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1mn} \frac{(h/l_1)^2}{24} \left[(\lambda n\pi)I_{13mp} \right] \delta_{nq} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{3mn} \frac{(h/l_1)^2}{24} \left[I_{14mp} + (m\pi)I_{15mp} \right] \delta_{nq} = 0
\end{aligned} \tag{7.11}$$

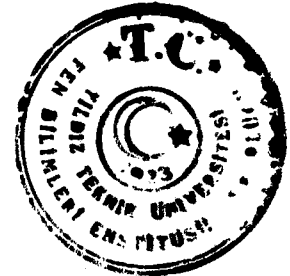
$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \frac{1}{l_1^3} \left[-(m\pi)I_{16mp} - (m\pi)^2 I_{17mp} - (\lambda n\pi)^2 I_{15mp} \right] \delta_{nq} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \frac{1}{l_1^3} \left[-(\lambda n\pi)(I_{18mp} + (m\pi)(I_{13mp} + I_{15mp})) \right] \delta_{nq} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1mn} \frac{(h/l_1)^2}{24} \left[I_{19mp} - (m\pi)I_{20mp} \right] \delta_{nq} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{3mn} \frac{(h/l_1)^2}{24} \left[-(\lambda n\pi)I_{21mp} \right] \delta_{nq} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \frac{1}{l_1^3} \left[\frac{1}{2} \delta_{mp} \bar{\omega}^2 \right] \delta_{nq} = 0
\end{aligned} \tag{7.12}$$



$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \frac{1}{l_1^3} \left[(m\pi) I_{7mp} \right] \delta_{nq} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \frac{1}{l_1^3} \left[(\lambda n \pi) I_{22mp} \right] \delta_{nq} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1mn} \frac{(h/l_1)^4}{240} \left[-\frac{10}{(h/l_1)^2} I_{23mp} - (m\pi)^2 I_{2mp} - (\lambda n \pi)^2 I_{3mp} - (m\pi) I_{1mp} + \frac{1}{2} \delta_{mp} \bar{\omega}^2 \right] \delta_{nq} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{3mn} \frac{(h/l_1)^4}{240} \left[-(\lambda n \pi) (I_{4mp} + (m\pi) I_{5mp}) \right] \delta_{nq} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \frac{1}{l_1^3} \left(\frac{(h/l_1)^2}{12} \right) \left[((m\pi)^2 I_{1mp} + (\lambda n \pi)^2 I_{4mp}) + \right. \\
& \quad \left. + (m\pi) \left((\lambda n \pi)^2 (I_{3mp} + I_{5mp}) + (m\pi)^2 I_{2mp} - \frac{1}{2} \delta_{mp} \bar{\omega}^2 \right) \right] \delta_{nq} = 0
\end{aligned} \tag{7.13}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \frac{1}{l_1^3} \left[-(\lambda n \pi) I_{15mp} \right] \delta_{nq} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \frac{1}{l_1^3} \left[-(m\pi) I_{15mp} \right] \delta_{nq} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1mn} \frac{(h/l_1)^4}{240} \left[(\lambda n \pi) (I_{9mp} - (m\pi) I_{10mp}) \right] \delta_{nq} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{3mn} \frac{(h/l_1)^4}{240} \left[-\frac{10}{(h/l_1)^2} I_{21mp} - (m\pi)^2 I_{11mp} - (\lambda n \pi)^2 I_{12mp} - (m\pi) I_{9mp} + \frac{1}{2} \delta_{mp} \bar{\omega}^2 \right] \delta_{nq} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \frac{1}{l_1^3} \left(-\frac{(h/l_1)^2}{12} \right) \left[2(m\pi)(\lambda n \pi) I_{9mp} - \right. \\
& \quad \left. (\lambda n \pi) \left((m\pi)^2 (I_{10mp} + I_{11mp}) + (\lambda n \pi)^2 I_{12mp} - \frac{1}{2} \delta_{mp} \bar{\omega}^2 \right) \right] \delta_{nq} = 0
\end{aligned} \tag{7.14}$$

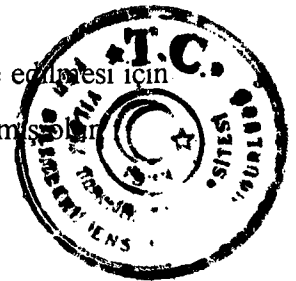
(p,q=1,2,3,..... ∞) elde edilir. Burada, δ_{mp} ve δ_{nq} Kronecker Deltası olup (5.10) ile ifade edilmektedir. Ayrıca,



$$\begin{aligned}
I_{1mp} &= \int_0^1 \left(\frac{dA'_{11}(x)}{dx} \sin m\pi x \cos p\pi x \right) dx & I_{2mp} &= \int_0^1 (A'_{11}(x) \cos m\pi x \cos p\pi x) dx \\
I_{3mp} &= \int_0^1 (A'_{55}(x) \cos m\pi x \cos p\pi x) dx & I_{4mp} &= \int_0^1 \left(\frac{dA'_{13}(x)}{dx} \sin m\pi x \cos p\pi x \right) dx \\
I_{5mp} &= \int_0^1 (A'_{13}(x) + A'_{55}(x)) \cos m\pi x \cos p\pi x dx & I_{6mp} &= \int_0^1 \left(\frac{dA'_{16}(x)}{dx} \cos m\pi x \cos p\pi x \right) dx \\
I_{7mp} &= \int_0^1 (A'_{16}(x) \sin m\pi x \cos p\pi x) dx & I_{8mp} &= \int_0^1 (A'_{45}(x) \sin m\pi x \cos p\pi x) dx \\
I_{9mp} &= \int_0^1 \left(\frac{dA'_{55}(x)}{dx} \cos m\pi x \sin p\pi x \right) dx & I_{10mp} &= \int_0^1 (A'_{13}(x) + A'_{55}(x)) \sin m\pi x \sin p\pi x dx \\
I_{11mp} &= \int_0^1 (A'_{55}(x) \sin m\pi x \sin p\pi x) dx & I_{12mp} &= \int_0^1 (A'_{33}(x) \sin m\pi x \sin p\pi x) dx \\
I_{13mp} &= \int_0^1 (A'_{36}(x) \cos m\pi x \sin p\pi x) dx & I_{14mp} &= \int_0^1 \left(\frac{dA'_{45}(x)}{dx} \sin m\pi x \sin p\pi x \right) dx \\
I_{15mp} &= \int_0^1 (A'_{45}(x) \cos m\pi x \sin p\pi x) dx & I_{16mp} &= \int_0^1 \left(\frac{dA'_{16}(x)}{dx} \sin m\pi x \sin p\pi x \right) dx \\
I_{17mp} &= \int_0^1 (A'_{16}(x) \cos m\pi x \sin p\pi x) dx & I_{18mp} &= \int_0^1 \left(\frac{dA'_{36}(x)}{dx} \sin m\pi x \sin p\pi x \right) dx \\
I_{19mp} &= \int_0^1 \left(\frac{dA'_{66}(x)}{dx} \cos m\pi x \sin p\pi x \right) dx & I_{20mp} &= \int_0^1 (A'_{66}(x) \sin m\pi x \sin p\pi x) dx \\
I_{21mp} &= \int_0^1 (A'_{44}(x) \sin m\pi x \sin p\pi x) dx & I_{22mp} &= \int_0^1 (A'_{36}(x) \sin m\pi x \cos p\pi x) dx \\
I_{23mp} &= \int_0^1 (A'_{66}(x) \cos m\pi x \cos p\pi x) dx & &
\end{aligned}$$

(7.15)

biçimindedir. Böylece yapılacak sayısal araştırmaların genel bir biçimde elde edilmesi için gereken cebirsel homojen denklemler takımı (7.10)-(7.15) şeklinde elde edilmiştir.



VII. 2. HESAP ALGORİTMASI

Yukarıda ele alınan probleme ait (7.10)-(7.14) denklemler takımının katsayılar determinantını sıfır yapan $\bar{\omega}^2$ değerleri aranan sayısal sonuçlar olmaktadır. Bu amaçla FTN77 fortran programlama dilinde programlar yapılmıştır. Şimdi hazırlanan programların hesaplama algoritmalarını yukarıda bahsedilen (7.10)-(7.14) problemi üzerinde kısaca açıklayalım.

Bunun için (7.15) ile gösterilen I_{imp} ($i=1,2,\dots,23$) integral terimlerinin öncelikle hesaplanması gerekmektedir. Söz konusu integral terimlerinin sayısal hesabı Gauss Noktaları yöntemi ile yapıp sayısal sonuçları bir dosyaya yerleştirilmektedir. Buradaki m ve p l'den, (7.10)-(7.14) serilerinde ele alınan terimlerin sayısı olan, N 'e kadar değişebilmektedir. Bundan başka belirtelim ki, ele alınan A'_{ij} 'ler sadece x 'in fonksiyonu olduklarından, incelenen plağın Ox_3 eksenine doğrultusundaki her bir n sayılı salınımlı için ayrı ayrı frekans denklemi elde edilecektir. Dolayısıyla, eğer ele alınan plağın Ox_3 eksenine doğrultusunda iki salınımlı bir duruma karşı gelen doğal titreşimleri araştırılacak olursa bu durumda (7.10)-(7.14)'lerde $n=2$ olarak kabul edilmelidir.

Tezde önceki bölümlerde ele alınan plak-kirişlerde olduğu gibi, plakların da Ox_2 eksenine yönünde biri diğerini tekrarlayan levhalardan oluşmuş bir kompozit malzemedeki yapıldığı varsayılmaktadır. Bu levhaların malzemesinin izotrop ve homojen olduğu kabul edilir ve elastisite modülleri E_1 ve E_2 , Poisson oranları ν_1 ve ν_2 , Lamé sabitleri λ_1 , μ_1 ve λ_2 , μ_2 ; hacim oranları η_1 ve η_2 ile gösterilirse (7.15)'deki $A'_{11}(x)$, $A'_{33}(x)$, $A'_{44}(x)$, $A'_{55}(x)$, $A'_{66}(x)$, $A'_{13}(x)$, $A'_{16}(x)$, $A'_{36}(x)$, $A'_{45}(x)$ malzeme değişkenlerinin (2.24) ile verilen ifadelerindeki A_{11}^0 , A_{22}^0 , A_{33}^0 , A_{44}^0 , A_{55}^0 , A_{66}^0 , A_{12}^0 , A_{13}^0 , A_{23}^0 normalize edilmiş elastisite sabitleri, (6.1)'e ilave olarak,

$$A_{33}^0 = A_{11}^0, \quad A_{44}^0 = \eta_1 \mu_1 + \eta_2 \mu_2, \quad A_{55}^0 = A_{66}^0, \quad A_{13}^0 = A_{11}^0 - 2A_{44}^0, \quad A_{23}^0 = A_{12}^0 \quad (7.16)$$



formüllerini yardımıyla bulunur. Bu formüllerin çıkarılış yöntemi Christensen, 1979'da açıkça verildiğinden burada üzerinde durulmayacaktır. Sonuçları alınan örneklerde $v_1 = v_2 = 0.25$, $\eta_1 = \eta_2 = 0.5$ olarak kabul edilmiştir..

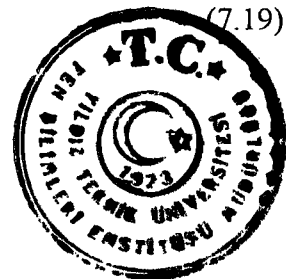
Daha sonra Galerkin Yöntemi kullanılarak seri halinde yazılan (7.10)-(7.14) hareket denklemlerindeki U_{nm}/l_1^3 , V_{nm}/l_1^3 , W_{nm}/l_1^3 , Φ_{1nm} , Φ_{3nm} terimlerinin katsayılarından, seçilen n için,

$$[A]_{5N \times 5N} = \begin{bmatrix} \bar{U}_{1mp} & \bar{V}_{1mp} & \bar{\Phi}_{11mp} & \bar{\Phi}_{31mp} & \bar{W}_{1mp} \\ \bar{U}_{2mp} & \bar{V}_{2mp} & \bar{\Phi}_{12mp} & \bar{\Phi}_{32mp} & \bar{W}_{2mp} \\ \bar{U}_{3mp} & \bar{V}_{3mp} & \bar{\Phi}_{13mp} & \bar{\Phi}_{33mp} & \bar{W}_{3mp} \\ \bar{U}_{4mp} & \bar{V}_{4mp} & \bar{\Phi}_{14mp} & \bar{\Phi}_{34mp} & \bar{W}_{4mp} \\ \bar{U}_{5mp} & \bar{V}_{5mp} & \bar{\Phi}_{15mp} & \bar{\Phi}_{35mp} & \bar{W}_{5mp} \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

biçiminde $5N \times 5N$ boyutlu bir $[A]$ matrisi oluşturulmaktadır. Burada

$$\begin{aligned} \bar{U}_{1mp} &= \left[-(m\pi)I_{1mp} - (m\pi)^2 I_{2mp} - (\lambda n\pi)^2 I_{3mp} + \frac{1}{2} \delta_{mp} \bar{\omega}^2 \right], \\ \bar{U}_{2mp} &= \left[(\lambda n\pi)(I_{9mp} - (m\pi)I_{10mp}) \right], \quad \bar{U}_{3mp} = \left[-(m\pi)I_{16mp} - (m\pi)^2 I_{17mp} - (\lambda n\pi)^2 I_{15mp} \right], \\ \bar{U}_{4mp} &= \left[(m\pi)I_{7mp} \right], \quad \bar{U}_{5mp} = \left[-(\lambda n\pi)I_{15mp} \right], \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_{1mp} &= \left[-(\lambda n\pi)(I_{4mp} + (m\pi)I_{5mp}) \right], \\ \bar{V}_{2mp} &= \left[(m\pi)I_{9mp} - \left((m\pi)^2 I_{11mp} + (\lambda n\pi)^2 I_{12mp} - \frac{1}{2} \delta_{mp} \bar{\omega}^2 \right) \right], \\ \bar{V}_{3mp} &= \left[-(\lambda n\pi)(I_{18mp} + (m\pi)(I_{13mp} + I_{15mp})) \right], \quad \bar{V}_{4mp} = \left[(\lambda n\pi)I_{22mp} \right], \\ \bar{V}_{5mp} &= \left[-(m\pi)I_{15mp} \right]. \end{aligned} \quad (7.19)$$

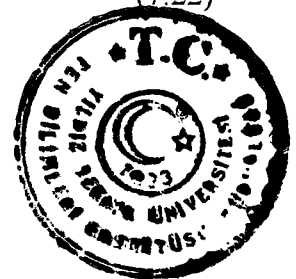


$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}_{11mp} &= \frac{(h/l_1)^2}{24} \left[I_{6mp} - (m\pi)I_{7mp} \right] , & \bar{\Phi}_{12mp} &= \frac{(h/l_1)^2}{24} \left[(\lambda n\pi)I_{13mp} \right] , \\
\bar{\Phi}_{13mp} &= \frac{(h/l_1)^2}{24} \left[I_{19mp} - (m\pi)I_{20mp} \right] , \\
\bar{\Phi}_{14mp} &= \frac{(h/l_1)^4}{240} \left[-\frac{10}{(h/l_1)^2} I_{23mp} - (m\pi)^2 I_{2mp} - (\lambda n\pi)^2 I_{3mp} - (m\pi)I_{1mp} + \frac{1}{2} \delta_{mp} \bar{\omega}^2 \right] , \\
\bar{\Phi}_{15mp} &= \frac{(h/l_1)^4}{240} \left[(\lambda n\pi)(I_{9mp} - (m\pi)I_{10mp}) \right] .
\end{aligned} \tag{7.20}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}_{31mp} &= \frac{(h/l_1)^2}{24} \left[-I_{8mp} (\lambda n\pi) \right] , & \bar{\Phi}_{32mp} &= \frac{(h/l_1)^2}{24} \left[I_{14mp} + (m\pi)I_{15mp} \right] , \\
\bar{\Phi}_{33mp} &= \frac{(h/l_1)^2}{24} \left[-(\lambda n\pi)I_{21mp} \right] , & \bar{\Phi}_{34mp} &= \frac{(h/l_1)^4}{240} \left[-(\lambda n\pi)(I_{4mp} + (m\pi)I_{5mp}) \right] , \\
\bar{\Phi}_{35mp} &= \frac{(h/l_1)^4}{240} \left[-\frac{10}{(h/l_1)^2} I_{21mp} - (m\pi)^2 I_{11mp} - (\lambda n\pi)^2 I_{12mp} - (m\pi)I_{9mp} + \frac{1}{2} \delta_{mp} \bar{\omega}^2 \right]
\end{aligned} \tag{7.21}$$

$$\begin{aligned}
\bar{W}_{1mp} &= 0 , & \bar{W}_{2mp} &= 0 , & \bar{W}_{3mp} &= \left[\frac{1}{2} \delta_{mp} \bar{\omega}^2 \right] , \\
\bar{W}_{4mp} &= \left(\frac{(h/l_1)^2}{12} \right) \left[\left((m\pi)^2 I_{1mp} + (\lambda n\pi)^2 I_{4mp} \right) + (m\pi) \left((\lambda n\pi)^2 (I_{3mp} + I_{5mp}) + (m\pi)^2 I_{2mp} - \frac{1}{2} \delta_{mp} \bar{\omega}^2 \right) \right] \\
\bar{W}_{5mp} &= \left(-\frac{(h/l_1)^2}{12} \right) \left[2(m\pi)(\lambda n\pi)I_{9mp} - (\lambda n\pi) \left((m\pi)^2 (I_{10mp} + I_{11mp}) + (\lambda n\pi)^2 I_{12mp} - \frac{1}{2} \delta_{mp} \bar{\omega}^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

(7.22)



biçimindedirler. (7.10)-(7.14)'deki 5 adet hareket denklemindeki, sırasıyla U_{nm}/l_1^3 , V_{nm}/l_1^3 , W_{nm}/l_1^3 , ϕ_{1nm} , ϕ_{3nm} terimlerinin herbirinin katsayılarından oluşan $N \times N$ ($m, p=1, 2, \dots, N$) boyutlu matrislerin terimlerinin ifadelerini göstermektedir.

Böylece elde edilen (7.17) katsayılar matrisinin determinantını sıfır yapan $\bar{\omega}^2$ değerleri aranan sonuçlar olacaktır. Bu değerleri bulmak amacıyla program içinde sıfıra çok çok yakın bir değerden başlayarak, $\bar{\omega}^2$ 'ye küçük artımlar (0.005) verilerek katsayılar determinantının işaretinin değişmesine bakılır. Determinantın işaretinin değiştiği kök civarında daha küçük artımlar verilerek istenilen hassasiyete kadar birinci modun frekansı olan $\bar{\omega}_I^2$ değeri saptanır. Bilindiği üzere, bir sonraki modun frekansı bir öncekinden daha büyük olduğundan, bulunan bu değere bir miktar artım verilip aynı işlemler gerçekleştirilerek, ikinci moda karşı gelen $\bar{\omega}_{II}^2$ değeri saptanır. Bu işlem istenilen moda kadar sürdürülebilir.

VII. 3. PLAK MALZEMESİ YAPISINDA BİR YÖNDE EĞRİSELLİK OLMASI HALİNDE ELDE EDİLEN SAYISAL SONUÇLARIN İNCELENMESİ

Bölüm III. 2. 2'de tezde ele alınan üçüncü mertebeden geliştirilmiş plak teorisi çerçevesinde eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden hazırlanmış plakların doğal titreşim denklemleri [eşl. (3.27-3.28)] ve sınır koşulları [eş. (3.29)] çıkarılmıştı. Dikkat edilirse, bu eşitliklerde malzeme yapısındaki eğriselliklerin formlarından bahsedilmemektedir. Şimdi, bu denklemler kullanılarak değişik eğrisellik formları için elde edilen sayısal sonuçlar verilecek ve onların yorumlanması yapılacaktır.

VII. 3. 1. PLAK MALZEMESİ YAPISINDA BİR YÖNDE PERİYODİK EĞRİSELLİK OLMASI HALİ

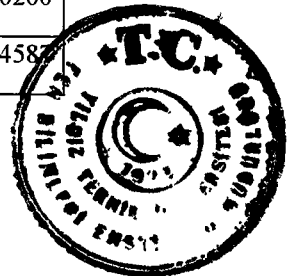
Plak malzemesi yapısındaki eğriselliğin (6.4) eşitliği ile verildiğini kabul edelim. Belirtelim ki (6.4)'deki δ terimi $0 \leq \delta \leq \pi$ aralığında değerler alabilmektedir. (7.3) eşitlikleri göz



önüne alındığında $\delta = \pi/2$ olması durumunda (7.2) yerdeğiştirme fonksiyonları (3.29) sınır koşullarını otomatik olarak sağlarlar. Bu durumda, hesaplama sonunda elde edilen sayısal sonuçlar kesin olacaktır. Aksi halde, söz konusu sınır şartı kesin olarak sağlanmadığından, elde edilecek sonuçlar yaklaşık olacaktır. Bundan başka belirtelim ki aşağıdaki sayısal sonuçlar (7.2) yerdeğiştirme fonksiyonlarında $n=1$ alarak Ox_3 (y) doğrultusunda bir titreşim salınımı olması halinde ve $\delta = \pi/2$ durumunda $\bar{\omega}_1^2$ değerleri elde edilmiş olup aşağıda tablolar halinde verilmektedir. Hesaplamalarda $N=20$ olarak alınmıştır.

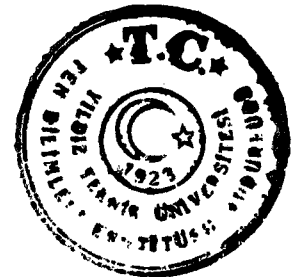
Tablo 7.1. Çeşitli E_2/E_1 , λ ve ε 'nun küçük değerleri için $\bar{\omega}_1^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).

E_2/E_1	λ l_1/l_3	ε							
		0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
10	0.0	0.2085	0.2083	0.2079	0.2075	0.2067	0.2058	0.2046	0.2034
20		0.3521	0.3519	0.3513	0.3503	0.3489	0.3474	0.3452	0.3429
50		0.7009	0.7007	0.6999	0.6987	0.6972	0.6950	0.6923	0.6890
100		1.1011	1.1011	1.1011	1.1011	1.1009	1.1005	1.0997	1.0987
10	0.1	0.2106	0.2104	0.2101	0.2097	0.2089	0.2079	0.2067	0.2056
20		0.3548	0.3546	0.3540	0.3532	0.3519	0.3501	0.3481	0.3458
50		0.7054	0.7052	0.7044	0.7032	0.7017	0.6995	0.6968	0.6937
100		1.1075	1.1075	1.1075	1.1075	1.1073	1.1071	1.1065	1.1056
10	0.5	0.2749	0.2749	0.2745	0.2741	0.2735	0.2728	0.2720	0.2708
20		0.4454	0.4454	0.4448	0.4442	0.4433	0.4419	0.4403	0.4386
50		0.8659	0.8659	0.8655	0.8651	0.8644	0.8634	0.8620	0.8603
100		1.3651	1.3653	1.3661	1.3673	1.3688	1.3708	1.3729	1.3751
10	1.0	0.6282	0.6282	0.6282	0.6280	0.6278	0.6276	0.6272	0.6269
20		1.0042	1.0042	1.0040	1.0040	1.0038	1.0034	1.0032	1.0026
50		2.0138	2.0138	2.0144	2.0149	2.0159	2.0171	2.0185	2.0200
100		3.4300	3.4306	3.4323	3.4354	3.4396	3.4448	3.4513	3.4587



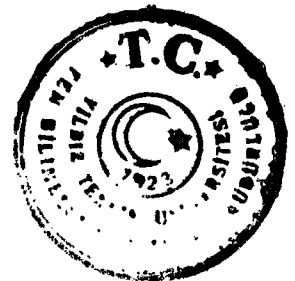
Tablo 7.2. Çeşitli E_2/E_1 , λ ve ε 'nin küçük değerleri için $\bar{\omega}_{II}^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).

E_2/E_1	λ l_1/l_3	ε							
		0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
10	0.0	2.6809	2.6803	2.6781	2.6748	2.6699	2.6637	2.6559	2.6467
20		4.0316	4.0314	4.0305	4.0287	4.0262	4.0225	4.0176	4.0109
50		6.3260	6.3285	6.3355	6.3473	6.3631	6.3824	6.4045	6.4287
100		7.9814	7.9814	8.0055	8.0352	8.0760	8.1271	8.1881	8.2574
10	0.1	2.6877	2.6869	2.6850	2.6814	2.6768	2.6705	2.6627	2.6535
20		3.7252	3.7273	3.7338	3.7447	3.7600	3.7795	3.8035	3.8316
50		4.3441	4.3469	4.3549	4.3686	4.3879	4.4133	4.4447	4.4828
100		5.3725	5.3754	5.3842	5.3992	5.4209	5.4500	5.4871	5.5332
10	0.5	2.8596	2.8590	2.8572	2.8543	2.8502	2.8449	2.8381	2.8303
20		4.2492	4.2492	4.2488	4.2482	4.2472	4.2455	4.2428	4.2391
50		6.6240	6.6270	6.6357	6.6498	6.6689	6.6926	6.7199	6.7502
100		8.3682	8.3750	8.3953	8.4289	8.4752	8.5336	8.6029	8.6822
10	1.0	3.5311	3.5307	3.5299	3.5283	3.5264	3.5234	3.5197	3.5152
20		5.1576	5.1582	5.1598	5.1621	5.1650	5.1686	5.1721	5.1754
50		8.1391	8.1434	8.1557	8.1758	8.2033	8.2377	8.2781	8.3236
100		10.7592	10.7678	10.7936	10.8359	10.8945	10.9688	11.0578	11.1606



Tablo 7.3. Çeşitli E_2/E_1 , λ ve ε 'nin büyük değerleri için $\bar{\omega}_1^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).

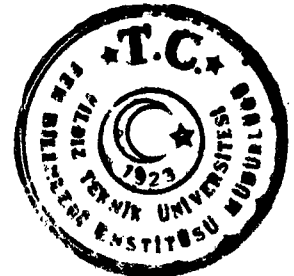
E_2/E_1	λ l_1/l_3	ε							
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
10	0.0	0.2085	0.1983	0.1753	0.1517	0.1339	0.1218	0.1136	0.1079
20		0.3521	0.3337	0.2876	0.2366	0.1960	0.1681	0.1495	0.1370
50		0.7009	0.6753	0.5915	0.4761	0.3726	0.2964	0.2446	0.2106
100		1.1011	1.0921	1.0087	0.8358	0.6489	0.4991	0.3931	0.3218
10	0.1	0.2106	0.2007	0.1776	0.1542	0.1366	0.1245	0.1165	0.1110
20		0.3548	0.3366	0.2909	0.2403	0.2001	0.1724	0.1540	0.1419
50		0.7054	0.6804	0.5976	0.4833	0.3806	0.3052	0.2540	0.2204
100		1.1075	1.0995	1.0185	0.8481	0.6634	0.5151	0.4103	0.3401
10	0.5	0.2749	0.2669	0.2479	0.2286	0.2144	0.2050	0.1991	0.1954
20		0.4454	0.4315	0.3948	0.3534	0.3206	0.2989	0.2853	0.2771
50		0.8659	0.8526	0.7956	0.7073	0.6257	0.5669	0.5290	0.5060
100		1.3651	1.3808	1.3552	1.2435	1.1071	0.9962	0.9200	0.8726
10	1.0	0.6282	0.6253	0.6169	0.6083	0.6028	0.6005	0.5999	0.6005
20		1.0042	1.0009	0.9874	0.9694	0.9560	0.9489	0.9470	0.9478
50		2.0138	2.0249	2.0310	2.0108	1.935	1.9651	1.9571	1.9571
100		3.4300	3.4864	3.5935	3.6384	3.6288	3.6095	3.5991	3.6001



Tablo 7.4. Çeşitli E_2/E_1 , λ ve ε 'nin büyük değerleri için $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ($\delta = \pi/2$).

E_2/E_1	λ l_1/l_3	ε							
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
10	0.0	2.6809	2.6100	2.4041	2.1506	1.9352	1.7781	1.6682	1.5900
20		4.0316	3.9795	3.7092	3.2516	2.7996	2.4496	2.2020	2.0301
50		6.3260	6.5053	6.5555	5.9957	5.0900	4.2369	3.5830	3.1193
100		7.9814	8.5064	9.3533	9.3205	8.2646	6.8738	5.6480	4.7227
10	0.1	2.6877	2.6170	2.4121	2.1594	1.9445	1.7881	1.6783	1.6006
20		3.7252	3.9430	3.7197	3.2641	2.8135	2.4646	2.2180	2.0465
50		4.3441	4.6398	5.7354	6.0176	5.1164	4.2668	3.6152	3.1533
100		5.3725	5.7357	7.4318	9.3545	8.3088	6.9262	5.7061	4.7852
10	0.5	2.8596	2.7980	2.6129	2.3793	2.1793	2.0338	1.9322	1.8605
20		4.2492	4.2176	3.9928	3.5814	3.1658	2.8428	2.6150	2.4580
50		6.6240	6.8498	7.0145	6.5859	5.7910	5.0201	4.4254	4.0053
100		8.3682	8.9697	10.0205	10.2531	9.4482	8.2535	7.1691	6.3445
10	1.0	3.5311	3.4961	3.3668	3.1873	3.0293	2.9141	2.8344	2.7789
20		5.1576	5.1807	5.0783	4.7918	4.4738	4.2215	4.0447	3.9248
50		8.1391	8.4818	8.9467	8.8689	8.3689	7.8131	7.3689	7.0553
100		10.7592	11.5398	13.1123	14.0461	13.9045	13.2223	12.4994	11.9248

Tablo 7.1-7.4'ün incelenmesinden görüleceği üzere plak-kiriş probleminde genel olarak aynı E_2/E_1 ve $\lambda = l_1/l_3$ oranları için elde edilen $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları ε değerleri arttıkça azalmaktadır. Bu azalma ε 'nin büyük değerlerinde küçük değerlerindeki oranla daha fazla olmaktadır. Ayrıca aynı E_2/E_1 oranı ve ε değeri için $\lambda = l_1/l_3$ parametresi büyüdükçe $\bar{\omega}_m^2$ sonuçları da beklenildiği gibi artmaktadır. $\lambda = 0$ değeri, plak-kirişe karşı gelen, Ox_3 doğrultusunda sonsuz uzunluğa sahip plağı göstermektedir. Tablolardaki

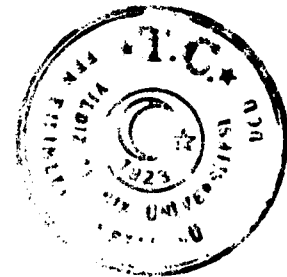


$\lambda = 0$ 'a karşı gelen $\bar{\omega}_I^2$ ve $\bar{\omega}_{II}^2$ sonuçlarıyla plak-kiriş için elde edilenler karşılaştırıldığında sayısal sonuçların aynı olduğu görülmektedir.

Elde edilen sayısal sonuçlardan gözüktüğü gibi λ parametresinin her bir seçilmiş değerinde ε , E_2/E_1 ve δ parametrelerinin plağın doğal titreşim frekanslarına etkisi plak-kirişte olduğu gibidir. Burada ise λ 'nın değeri büyüdükçe ele alınan her bir durumda frekansların değerleri, önceden de beklenildiği gibi, monoton olarak artmaktadır.

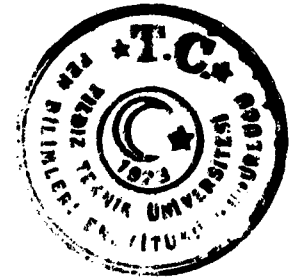
VII. 3. 2. PLAK MALZEMESİ YAPISINDA BİR YÖNDE LOKAL -YEREL- EĞRİSELLİK OLMASI HALİ

Plak-kiriş malzemesi yapısında bir doğrultuda (Ox_1 doğrultusu) yerel eğriselliğin olması durumu ve bu durumdaki doğal titreşime ait sayısal sonuçlar Bölüm VI.4.2'de verilmişti. Bu başlık altında, plak malzemesindeki eğrisellik formunun (6.5) biçiminde verilmesi halinde çeşitli m , c , d değerleri için, plak doğal titreşimine $\bar{\omega}_m^2$ sayısal sonuçları tablolar halinde verilmektedir. Burada da Bölüm VI.4.2'de olduğu gibi (6.5) ifadesinde $n=1$ olarak alınmıştır. Bunlara ilaveten (7.2) yerdeğiştirme fonksiyonlarındaki n terimi de $n=1$ şeklinde alınarak plakta Ox_3 (y) doğrultusunda bir titreşim salınımı olması sağlanmıştır. Bir önceki problemde yani malzeme yapısında periyodik eğrisellik bulunan kompozit plağın doğal titreşim probleminde olduğu gibi bu problemde de serilerdeki terim sayısı $N=20$ olarak alınmıştır.



Tablo 7.5. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nin büyük değerleri için malzeme yapısında yerel eğrisellik olan plağa ait $\bar{\omega}_1^2$ sonuçları ($m=2$, $c=0.3$, $d=0.7$).

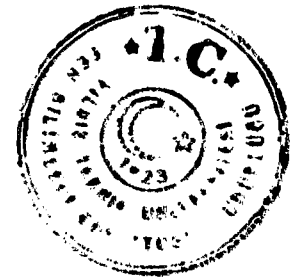
E_2/E_1	λ l_1/l_3	ε							
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
10	0.0	0.2085	0.2083	0.2083	0.2081	0.2079	0.2075	0.2071	0.2065
20		0.3521	0.3521	0.3519	0.3517	0.3515	0.3511	0.3505	0.3499
50		0.7009	0.7011	0.7017	0.7024	0.7038	0.7052	0.7069	0.7089
100		1.1011	1.1021	1.1050	1.1101	1.1173	1.1267	1.1384	1.1519
10	0.1	0.2106	0.2104	0.2104	0.2103	0.2101	0.2097	0.2093	0.2087
20		0.3548	0.3548	0.3548	0.3546	0.3542	0.3538	0.3534	0.3526
50		0.7054	0.7056	0.7061	0.7069	0.7083	0.7097	0.7114	0.7134
100		1.1075	1.1085	1.1114	1.1165	1.1237	1.1333	1.1448	1.1585
10	0.5	0.2749	0.2749	0.2747	0.2747	0.2743	0.2741	0.2737	0.2731
20		0.4454	0.4454	0.4454	0.4452	0.4450	0.4446	0.4440	0.4435
50		0.8659	0.8663	0.8669	0.8679	0.8692	0.8710	0.8729	0.8751
100		1.3651	1.3661	1.3694	1.3749	1.3827	1.3929	1.4054	1.4200
10	1.0	0.6282	0.6282	0.6282	0.6280	0.6278	0.6274	0.6271	0.6265
20		1.0042	1.0042	1.0040	1.0040	1.0036	1.0032	1.0028	1.0021
50		2.0138	2.0140	2.0146	2.0157	2.0171	2.0190	2.0210	2.0233
100		3.4300	3.4312	3.4347	3.4405	3.4489	3.4601	3.4737	3.4899



Tablo 7.6. Çeşitli E_2/E_1 ve ε 'nin büyük değerleri için malzeme yapısında yerel eğrisellik olan plağa ait $\bar{\omega}_{II}^2$ sonuçları ($m=2$, $c=0.3$, $d=0.7$).

E_2/E_1	λ l_1/l_3	ε							
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
10	0.0	2.6809	2.6807	2.6799	2.6789	2.6771	2.6754	2.6730	2.6705
20		4.0316	4.0313	4.0299	4.0275	4.0244	4.0209	4.0166	4.0121
50		6.3260	6.3240	6.3180	6.3084	6.2955	6.2801	6.2625	6.2438
100		7.9814	7.9746	7.9541	7.9207	7.8754	7.8197	7.7551	7.6836
10	0.1	2.6877	2.6873	2.6867	2.6855	2.6840	2.6820	2.6797	2.6773
20		3.7252	3.7256	3.7268	3.7287	3.7314	3.7348	3.7387	3.7434
50		4.3441	4.3449	4.3477	4.3520	4.3580	4.3654	4.3744	4.3844
100		5.3725	5.3740	5.3791	5.3871	5.3984	5.4123	5.4289	5.4475
10	0.5	2.8596	2.8594	2.8588	2.8578	2.8566	2.8551	2.8533	2.8512
20		4.2492	4.2488	4.2477	4.2459	4.2434	4.2404	4.2373	4.2338
50		6.6240	6.6223	6.6166	6.6078	6.5961	6.5818	6.5660	6.5492
100		8.3682	8.3613	8.3414	8.3090	8.2650	8.2107	8.1482	8.0793
10	1.0	3.5311	3.5309	3.5309	3.5305	3.5301	3.5297	3.5293	3.5289
20		5.1576	5.1576	5.1572	5.1566	5.1559	5.1551	5.1545	5.1539
50		8.1391	8.1380	8.1334	8.1266	8.1178	8.1074	8.0961	8.0846
100		10.7592	10.7529	10.7342	10.7037	10.6627	10.6125	10.5549	10.4918

Tablo 7.5-7.6'da $\lambda = 0$ değeri, plak-kirişe karşı gelen, Ox_3 doğrultusunda sonsuz uzunluğa sahip plağı göstermektedir. Plak-kiriş ve plak problemleri için yapılan hesaplamalarda 10^{-4} mertebesindeki bir hassasiyete kadar sayısal sonuçlar elde edildiği dikkate alınrsa, tablolardaki $\lambda = 0$ 'a karşı gelen $\bar{\omega}_I^2$ ve $\bar{\omega}_{II}^2$ sonuçlarıyla plak-kiriş için elde edilenler karşılaştırıldığında sayısal sonuçların aynı olduğu görülmektedir.



Elde edilen sayısal sonuçlardan gözüktüğü gibi λ parametresinin her bir seçilmiş değerinde ε , E_2/E_1 ve δ parametrelerinin plağın doğal titreşim frekanslarına etkisi plak-kirişte olduğu gibidir. Burada ise λ 'nın değeri büyüdükçe elde alınan her bir durumda frekansların değerleri, önceden de beklenildiği gibi, monoton olarak artmaktadır.

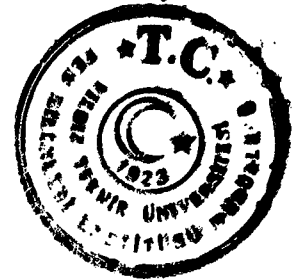


BÖLÜM VIII.

SONUÇLAR ve DEĞERLENDİRİLMESİ

Tezde yapılan araştırmalardan elde edilen sonuçlar kısaca özetlenirse aşağıdakiler söylenebilir.

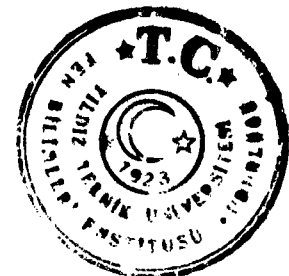
1. Akbarov ve Guz' süreklilik teorisi çerçevesinde üçüncü mertebeden geliştirilmiş plak teorileri denklemleri kullanılarak eğrisel yapıya sahip kompozit malzemedeki yapılmış plakların doğal titreşim ve burkulma problemlerinin formülasyonu yapılmıştır. Bu formülasyonda, plak teorisinin denklemleri ve buna uygun sınır koşulları elastisite teorisinin kesin hareket denklemleri ve sınır koşullarından, burkulma denklemleri ise lineerize edilmiş üç boyutlu elastik stabilite denklemleri kullanılarak çıkarılmıştır. Elde edilen denklemlerden, özel haller olarak, plakların klasik titreşim ve burkulma denklemleri ve birinci mertebeden geliştirilmiş plak teorisi çerçevesinde olan titreşim ve burkulma denklemleri de çıkarılmıştır.
2. Formülasyonu yapılmış problemlerin incelenmesi için Galerkin Yönteminin uygulanmasında karşılaşılan bazı zorluklar aradan kaldırılmış ve böylece bu yöntem bakılan türdeki problemlerin incelenmesi doğrultusunda geliştirilmiştir.
3. Sayısal sonuçların elde edilmesi için gerekli algoritmalar ve programları yapılmıştır.
4. Ele alınan problemlerin incelenmesine Pertürbasyon Yönteminin uygulanabilmesi de özel örneklerle gösterilmiştir.
5. Plak malzemesi yapısında olan eğriselliklerin doğal titreşim frekanslarına etkisini gösteren çok sayıda sayısal sonuç elde edilmiş ve bunların yorumları yapılmıştır.
6. Yapısında eğrisellik olan kompozit malzemedeki hazırlanmış plakların doğal titreşim ve burkulma problemlerinin üçüncü mertebeden geliştirilmiş plak teorisi çerçevesinde incelenmesinden elde edilen sonuçların daha kesin olduğu tespit edilmiştir. Bu nedenle adı geçen kompozit malzemedeki yapılmış plak-kirişlerin doğal titreşimi her üç teorisi, a) Klasik plak teorisi, b) Birinci mertebeden geliştirilmiş plak teorisi, c) Üçüncü mertebeden geliştirilmiş plak teorisi, çerçevesinde araştırılarak elde edilen sayısal sonuçlar karşılaştırılmıştır.



7. Plak malzemesi yapısındaki eğriselliklerin plakların stabilitesine -burkulmasına- kritik dış basınç yüklerinin etkisi incelenmiştir.
8. Elde edilen sayısal sonuçların esaslandırılması ve mühendislik açısından yorumları yapılmıştır.

Elde edilen sonuçların değerlendirilmesi hakkında aşağıdakileri söyleyebiliriz:

- I. Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemedan yapılmış plak ve plak-kirişlerin bazı doğal titreşim ve stabilite problemlerinin geliştirilmiş plak teorileri çerçevesinde incelenmesi ilk kez yapılmıştır.
- II. Bu araştırmalarda esas olarak Galerkin Yöntemi kullanılmış ve bu yöntem ele alınan problemler için bazı yönlerden geliştirilmiştir.
- III. Göz önüne alınan kompozit malzeme örnekleri çerçevesinde elde edilen sayısal sonuçlar mühendislik açısından yorumlanmış ve bu yorumların bazı önerilerde bulunması için imkan yaratılmıştır.
- IV. Açıkça anlaşılabilir ve tablolar şeklinde ortaya konan çok sayıda sayısal sonuç verilmiştir.



KAYNAKLAR

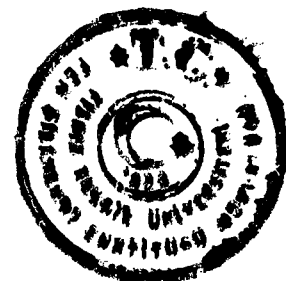
- 1- *Abrate, S.*, 1995. Design of multispan composite plates to maximize the fundamental natural frequency. *Composites*. 26:691-697.
- 2- *Abrate, S.*, 1995. Vibration of point-supported rectangular composite plates. *Composite Science and technology*. 53:325-332.
- 3- *Akbarov, S.D. and Babich, I.Yu.*, 1980. Three dimensional theory of stability of bars, plates and shells. *Vishaya Shkola, Kiev.*-168p.
- 4- *Akbarov, S.D. and Guliyev, G.M.*, 1991. Quasihomogeneous states in composite materials with small-scale space periodic distortions in a structure, *Dep. in VINITI* 01.02.1991. N. 511-1391:60.
- 5- *Akbarov, S.D. and Guz', A.N.*, 1984. On the method of problems solution in mechanics of composite materials with curved layers, *Prikl. mekh.* 20(4): 3-9 (in Russian).
- 6- *Akbarov, S.D. and Guz', A.N.*, 1991. On the continual theory in mechanics of composite materials with small-scale curved structures, *Prikl. Mekh.* 27(2): 3-13.
- 7- *Akbarov, S.D. and Guz', A.N.*, 1992. Statics of laminated and fibrous composites with curved structures, *appl. Mech. Rev.* (published by the American Society of Mechanical Engineers) 45: 17-35.
- 8- *Akbarov, S.D. and Yahnioglu, N.*, 1995. Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden hazırlanmış şeritin gerilme durumunun FEM ile araştırılması., IX. Ulusal Mekanik Kongresi-Ürgüp, Cilt 1: 68-77.
- 9- *Akbarov, S.D.*, 1985. On normal stresses in the fibrous composite material with curved structures, with low filler concentration, *Prikl. Mekh.* 21 (11): 50-55 (in Russian).
- 10- *Akbarov, S.D.*, 1986. The influence of rheological parameters of matrix material on the distribution of self-equilibrated stresses in multilayered composite with curved structures, *Mek. komp. Mat.* 4: 610-617 (in Russian).
- 11- *Akbarov, S.D.*, 1987. On the distribution of self-equilibrated stresses in multilayered composite material with curved structures, in: *Mathematical methods and physical mechanics of the field*, series 26: 83-89 (in Russian).



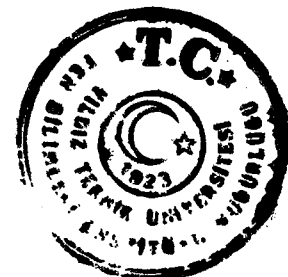
- 12-Akbarov, S.D.**, 1988. The influence of the forms of the small-scale local curving in the laminated composites structure on the distribution of self-equilibrated stresses, *Prikl. Mekh.* 24 (7): 30-37 (in Russian).
- 13-Akbarov, S.D.**, 1994a. On the crack problems in composite materials with locally curved layers, *Mechanics of Comp. Mater.* 30 (6): 750-759.
- 14-Akbarov, S.D.**, 1994b. On the row cracks problem in composite materials with periodically curved layers, *Bull. Tech. Univ., İstanbul*, 47:577-593.
- 15-Akbarov, S.D.**, 1995. On the determination of normalized nonlinear mechanical properties of composite materials with periodically curved layers, *Int. J. Solids and Structures*, 32 (21): 3129-3143.
- 16-Akbarov, S.D., Guz', A.N. and Zamanov, A.D.**, 1992. On eigen oscillations of the composite materials with small-scale deformations in the structure, *Prikl. Mekh.* 28(9): 3-9 (in Russian).
- 17-Akbarov, S.D., Guz', A.N., Movsumov, E.A. and Mustafayov, S.M.**, 1995. *Mechanics of composite materials with curved structures*, Naukova Dumka. Kiev.-320p. (in Russian).
- 18-Ambarsumian, S.A.**, 1967. *Theory of anisotropic plates*. Izdat. Nauka, Moskova. Eng. Translation by Technomic Publishing Co.(1969)
- 19-Anders, W.S., Rodgers, C.A. and Fuller, C.R.**, 1992. Vibration and low frequency acoustic analysis of piecewise-activated adaptive composite panels. *Journal of Comp. Mat.* 26:103-121
- 20-Anderson, M.S. and Kennedy, D.**, 1993. Transverse shear deformation in exact buckling and vibration of composite plate assemblies. *AIAA J.* 31:1963-1965.
- 21-Bazhant, Z.P.**, 1968. The influence of the curvature of reinforced fibres on the elasticity modulus and strength of composite materials. *Mekh. Polim.* 2: 314-321.
- 22-Bhimaraddi, A.**, 1992. Nonlinear free vibration of laminated composite plates. *J. of Eng. Mech. ASCE.* 118:174-189.
- 23-Biot, M.A.**, 1965. *Mechanics of incremental deformations*. John-Wiley and Sons.-504p



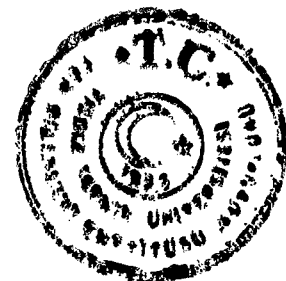
- 23-*Biot, M.A.*, 1965. Mechanics of incremental deformations. John-Wiley and Sons.-
504p
- 24-*Bolotin, V.V. and Novichkov, Yu.N.*, 1980. Mechanics of multilayered structures,
Mashinostroyeniye, Moscow.
- 25-*Broutman, L.J. and Krock, R.M.*, 1967. Modern composite materials. Addison-
Wesley, Reading, Massachusetts.
- 26-*Chen, H.P., Tracy, J.J. and Nonato, R.*, 1995. Vibration analysis of delaminated
composite laminates in prebuckled states based on a new constrained model. J. of
Composite Materials. 29:229-256.
- 27-*Chou, T.W., Mc Cullough, R.L. and Pipes, R.B.*, 1986. Composites, in: Scientific
American 10: 193-203.
- 28-*Christensen, R.M. and Lo, K.H.*, 1979. Solutions for effective shear properties in
three phase sphere and cylinder models, J. Mech. and Phys. Solids, 27(4).
- 29-*Christensen, R.M.*, 1979. Mechanics of composite materials, John Wiley and Sons,
Inc.
- 30-*Gol'denveizer, A.L.*, 1958. On Reissner's theory of the bending of plates. Izvestiya
AN SSSR. OTN. 4:102-109.
- 31-*Gorman, D.J.*, 1982. Free vibration analysis of rectangular plates. Elsevier publ.
- 32-*Guz', A.N.*, 1971 Stability of three-dimensional deformable bodies. Naukov Dumka,
Kiev: 276 (in Russian).
- 33-*Guz', A.N.*, 1990 Mechanics of compressive failure of composite materials. Naukov
Dumka, Kiev: 630 (in Russian).
- 34-*Hashin, Z. and Rosen, B.W.*, 1964. The elastic moduli of fiber-reinforced materials,
J. Appl. Mech., 31: 223.
- 35-*Hildebrand, F.B., Reissner, E. and Thomas, G.E.*, 1949. Notes on the foundations
of the theory of small displacements of orthotropic shells. NACA Technical Note. N:
1983.
- 36-*Hu, J.S. and Hwu, C.B.*, 1995. Free vibration of delaminated composite sandwich
beams. AIAA J. 33:1911-1918.



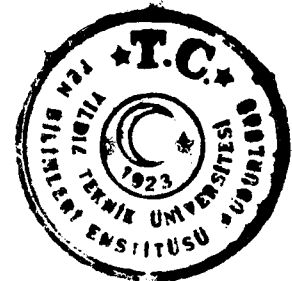
- 38-*Koo, K.N. and Lee, I.*, 1993. Vibration and damping analysis of composite laminates using shear deformable finite element. AIAA J. 31:728-735.
- 39-*Kromm, A.*, 1953. Verallgemeinerte Theori der Plattenstatik. Ing.Arch. 21:266-286.
- 40-*Kromm, A.*, 1955. Über die Randquerkräfte biegestützter Platten. ZAMM.35:231-242.
- 41-*Kütüğ, Z.*, 1996a. Natural vibration of the beam-strip fabricated from a composite material with small-scale curvings in the structure. Mechanics of Composite Materials, 32:502-512.
- 42-*Kütüğ, Z.*, 1996b. Kompozit malzemelerden üretilmiş lokal -yerel- eğrisel yapıya sahip plağın doğal titreşimi.. II. Ulusal Hesaplamalı Mekanik Kongresi.. Trabzon. (Basımda)
- 43-*Kütüğ, Z.*, 1996c. Kısmi türevli değişken katsayılı diferansiyel denklemler takımına ait bir özdeğer probleminin Galerkin yöntemi ile incelenmesi. Diferansiyel Denklemler Semp.İst. (Basımda)
- 44-*Leissa, A.W.*, 1969. Vibration of plates. NASA SP.-160.
- 45-*Lekhnitskii, S.G.*, 1963. Theory of elasticity of an anisotropic elastic body, Holden Day, San Francisco, CA.
- 46-*Lekhnitskii, S.G.*, 1968. Anisotropic plates. Gordon&Breach,New York.
- 47-*Librescu, L.*, 1964a. On the theory of elastic anisotropic shells and.Inzh.Zhurnal 4.
- 48-*Librescu, L.*, 1964b. On the thermoelastic problem of shells treated by eliminating the Love-Kirchhoff Hypothesis, non-clasical shell problems. North-Holland Publ. Amsterdam,P.W.N., Warsaw.
- 49-*Librescu, L.*, 1966. On the thermoelastic problem of shells and platesapproached by eliminating the Love-Kirchhoff Hypothesis. St Cer.Mec.Appl. 21:351-365.
- 50-*Liew, K.M., Lam, K.Y.*, 1992. Vibrational response of symmetrically laminated trapezoidal composite plates with point constraints. Int. J. Solids Structures. 29:1535-1547.
- 51-*Lo, K.H., Christensen, R.M. and Wu, E.M.*, 1977a. A high order theory of plate deformation. Part 1: Homogeneous Plates. J. Appl. Mech. 44:663-



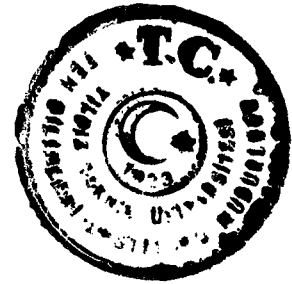
- 52-Lo, K.H., Christensen, R.M. and Wu, E.M., 1977b. A high order theory of plate deformation. Part 1: Laminated Plates. J. Appl. Mech. 44:669-
- 53-Mahesh, P.D. and Archibald, S.N., 1992. Stability analysis of inhomogeneous, fibrous composite plates. Int. J. Solids Structures. 30:37-60.
- 54-Manisfield, E.H. and Puslow, D., 1974. The influence of fibre waviness on the moduli of unidirectional fibre reinforced composites, Aeronautical Research Council Current Paper, N 1339: 30.
- 55-Mindlin, R.D., 1951. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. J. Appl. Mech. 18:31-38.
- 56-Nahfeh, A.H., 1973. Perturbation methods. John-Wiley&Sons.-425p.
- 57-Noor, A.K. and Burton, W.S., 1992. Three-dimensional solutions for thermal buckling of multilayered anisotropic plates. J. of Eng. Mech. ASCE. 118:683-701.
- 58-Noor, A.K. and Peters, J.M., 1992. Thermomechanical buckling of multilayered composite plates. J. of Eng. Mech. ASCE. 118:351-366
- 59-Pagano, N.J., 1974. Exact moduli of anisotropic laminates. In: G.P. Sendeckyj (Editor) Mechanics of Composite Materials. Academic Press, New York: 23-44.
- 60-Pecknold, D.A. and Rahman, S., 1994. Micro-mechanics-based structural analysis of thick laminated composites, Comput. and Struct. 51: 163-179.
- 61-Qatu, M.S. and Leissa, A.W., 1993. Buckling or transverse deflections of unsymmetrically laminated plates subjected to in-plane loads. AIAA J. 31:189-194.
- 62-Reddy, J.N. and Phan, N.D., 1985. Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher order deformation theory. J. of Sound and Vibration 98:157-170.
- 63-Reddy, J.N., 1979. Free vibration of antisymmetric, angle ply laminated plates including transverse shear deformation by the finite element method. J. Sound&Vibration 66:565-576
- 64-Reddy, J.N., 1984. Energy and variational methods in applied mechanics. John Wiley&Sons. New York.
- 65-Reddy, J.N., 1990. A refined theories of laminated composite plates. Shock Vibration Dig. 22:3-13.



- 66-*Reissner, E.*, 1947. On the bending of elastic plates. J. of Appl. Mech. 5:55-68.
- 67-*Reissner, E.*, 1944. On the theory of bending of elastic plates. J. of Math.Phys. 23:184-191.
- 68-*Reissner, E.*, 1945. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J. of Applied Mechanics. 12:69-77.
- 69-*Rohwer, K.*, 1992. Application of higher order theories to the bending analysis of layered composite plates. Int. J. Solids Structures. 29:105-119.
- 70-*Sendeckyj, G.P.*, 1974. The elastic properties of composite materials. In: G.P. Sendeckyj (Editor) Mechanics of Composite Materials. Academic Press, New York: 45-70.
- 71-*Sun, C.T. and Li, S.*, 1988. Three-dimensional effective elastic constants for thick laminates. J. Composite Mater. 22. 629-639.
- 72-*Tarnopolsky, Yu.M. and Rose, A.V.*, 1969. Special features of design of parts fabricated from reinforced plastics, Zinatne, Riga: 274 (in Russian).
- 73-*Timoshenko, S.P. and Woinowski-Krieger S.*, 1959. Theory of plates and shells.-NY. Mc Graw-Hill, -580p.
- 74-*Timoshenko, S.P. and Gere J.*, 1961. Theory of Elastic Stability.-NY. Mc Graw-Hill, 2. ed.
- 75-*Timoshenko, S.P., Young, D.H. and Weaver, W.Jr.*, 1974. Vibration problems in engineering. John Wiley&Sons.-472p.
- 76-*Vanin, G.A.*, 1985. Micromechanics of composite materials. Naukov Dumka, Kiev. 303 (in Russian).
- 77-*Vasudeva, R.Y. and Rao,P.G.*, 1992. Influence of Voids interface zones on Lamb-mode spectra in fiber-reinforced composite laminates. Jour. of Applied Physics 71:612-619
- 78-*Whitney, J.M.*, 1966. Geometrical effects of filament twist on the modulus and strength of graphite fiber, Reinforced Composites Textil. Res., J. 36: 765-770.
- 79-*Yahnioğlu, N.*, 1995. Bir ucu rijit tutturulmuş eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden hazırlanmış şeritin eğilmesinin FEM ile araştırılması., II. Ulusal Matematik Mühendisliği Semp.-İstanbul, (basımda).



- 80- *Yahnioglu, N.*, 1996a. Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemedan hazırlanmış yapı elemanlarının statığıne uygun sınırdeğer problemlerinin FEM ile incelenmesi. YTÜ F.B. Enst. Doktora Tezi.
- 81- *Yahnioglu, N.*, 1996b. FEM analysis of the stress and displacement distribution in the cantilever plate fabricated from the composite material with small-scale periodically curved structure. Y.T.Ü. Dergisi, 1996/1, p.61-73.
- 82- *Yu, S.D., Cleghorn, W.L. and Fenton, R.G.*, 1994. Free vibration and buckling of symmetric cross-ply rectangular laminates. AIAA J. 32:2300-2308.



ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi : 2 Mart 1967
Doğum Yeri : İstanbul
Eğitim : 1973-1978 Nişantaşı Selim Sırrı Tarcan İlkokulu
1978-1981 Kadıköy Kâzım İşmen Ortaokulu
1981-1984 Kadıköy Kâzım İşmen Lisesi
1984 -1988 İTÜ İnşaat Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü
1988 -1992 İTÜ. Fen Bilimleri Enst. İnşaat-Mekanik
Görevi : Araştırma Görevlisi - Asistan (Mayıs 1991)
Kurum : Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi
Bölüm : İnşaat - Mekanik
Yabancı Dil : İngilizce
Medeni Hali : Evli

