

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

79172

**SONLU ŞEKİL DEĞİŞTİRME VE / VEYA SONLU
DÖNME YAPAN YÜZEYSEL TAŞIYICI SİSTEMLERİN
TEORİK VE SAYISAL ANALİZİ**

İnş. Y. Müh. Ayşe Erdölen KOÇAK

**F.B.E. İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Programında
Hazırlanan**

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi

: 6 Temmuz 1998

Tez Danışmanı

: Prof. Dr. R.Faruk YÜKSELER (YTÜ) *RF*

Jüri Üyeleri

: Prof. Dr. Vural CİNEMRE (İTÜ) *Vural Cinemre*

: Prof. Dr. Ali Rana ATILGAN (BÜ) *Ali Rana Atilgan*

İSTANBUL, 1998



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	ix
ÖNSÖZ	xiv
ÖZET	xv
ABSTRACT.....	xvi
1. GİRİŞ.....	1
2. DÖNEL SİMETRİK SONLU ŞEKİL DEĞİŞTİRME VE/VEYA SONLU DÖNME YAPAN KAÜÇUK BENZERİ, DÖNEL YÜZEYSEL TAŞIYICILARA AİT TEMEL BAĞINTILAR	6
2.1. Geometri	6
2.2. Denge Denklemleri	10
2.3. İki Boyutlu Şekil Değişirme Enerjisi Fonksiyonu	11
2.4. Bünye Bağlıntıları	12
2.5. Sınır Koşulları	13
3. İNTEGRASYON MATRİSLERİ İLE ÇÖZÜM VE TEMEL DENKLEMLERİN UYGUN ŞEKİLDE İFADE EDİLMESİ	14
3.1. İntegrasyon Matrisleri ile Çözüm	14
3.2. Temel Denklemlerin Uygun Şekle Dönüştürülmesi	15
3.3. İntegrasyon Matrisleriyle İlgili Diferansiyel Denklemlerin Cebirsel Denklemler Haline Dönüştürülmesi.....	20
3.4. Elde Edilmiş Olan Cebirsel Denklemlerin Sınır Koşullarıyla Birlikte Toplu Olarak İfade Edilmesi	31
4. SAYISAL UYGULAMALAR	33
4.1. Düzgün Yayılan İç Basınç Etkimesi Halinde Küresel Kabuk	34
4.2. Tekil Yük Etkisi Altındaki Küresel Kabuk	49
4.3. Çembersel Yük Etkisindeki Küresel Kabuk	63
4.4. Düzgün Yayılı İç Basınç Etkisinde Silindirik Kabuk	75
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	92



KAYNAKLAR	94
EK 1	101
EK2	102
EK3	104
ÖZGEÇMİŞ	105



SİMGE LİSTESİ

- $[A_D]$: (3.5 a,b,c,d) diferansiyel denklemleri (3.14) şeklinde yazıldığında lineer katsayılar matrisi
- $[A]^*$: (3.5 e,f,g) cebirsel denklemleri (3.46) şeklinde yazıldığında lineer katsayılar matrisi
- a : Silindirik kabuğun yarıçapı
- $\{a_D\}$: (3.5 a,b,c,d) diferansiyel denklemlerinde esas değişkenleri içermeyen ve lineer terimleri içeren vektör
- C : Malzeme sabiti
- E : Elastisite modülü
- g : Enine kayma şekil değiştirmesi düzeltme faktörü
- H : Yatay kesit kuvveti
- h : Adım aralığı
- $[I]$: Birim matris
- K_ϕ, K_θ : Eğrilik değişim ölçüleri ((2.9 a) ve (2.9 b) denklemlerine bakınız.)
- k_ϕ, k_θ : Şekil değişimi sonrasındaki eğrilikler
- k_{ϕ_0}, k_{θ_0} : Şekil değişimi öncesindeki eğrilikler
- M_ϕ, M_θ : Kesit eğilme momentleri (bkz. Şekil 2.2b)
- N : Alt aralık sayısı
- $\{N_D\}$: (3.5 a,b,c) diferansiyel denklemlerindeki doğrusal olmayan cebirsel terimleri içeren vektör
- $\{N\}^*$: (3.5 e,f,g) cebirsel denklemlerindeki doğrusal olmayan terimleri içeren vektör
- N_θ : Paralel çember teğeti doğrultusundaki normal kesit kuvveti
- N_ϕ : Meridyenel normal kesit kuvveti
- n : Nokta sayısı



m	: $f(x)$ 'e yaklaşmak için kullanılan polinom derecesi
P	: Düşey tekil kuvvet
P_{ϕ}	: Çizgisel yük
p	: Düzgün yayılan iç basınç
p_H	: Şekil değiştirmemiş karşılaştırma yüzeyinin birim alanına etkiyen yatay yük
p_v	: Şekil değiştirmemiş karşılaştırma yüzeyinin birim alanına etkiyen düşey yük
R	: Küresel kabuğun yarıçapı
r	: Şekil değişimi sonrasında radyal koordinat
r_0	: Şekil değişimi öncesinde radyal koordinat
S	: Şekil değişimi sonrasında karşılaştırma yüzeyi
S_0	: Şekil değişimi öncesinde karşılaştırma yüzeyi
t	: Şekil değiştirmemiş kabuk kalınlığı
V	: Düşey kesit kuvvet
y	: Şekil değişimi sonrasındaki düşey koordinat
$\{y\}$: Durum vektörü
z	: Şekil değişimi sonrasında enine koordinat
z_0	: Şekil değişimi öncesinde enine koordinat
Q	: Enine kesme kuvveti
q	: 1'a eşit olduğunda Teori I, 0'e eşit olduğunda Teori II söz konusu edilmektedir.
W	: Üç boyutlu şekil değiştirme enerjisi
w	: İki boyutlu şekil değiştirme enerjisi
$[L]$: İntegrasyon matrisi
θ	: Paralel merkez açısı
Λ_{ϕ}	: Karşılaştırma yüzeyinden z_0 uzaklığındaki bir elemandaki meridyenin teğeti doğrultusundaki germe



- Λ_θ : Karşılaştırma yüzeyinden z_0 uzaklığındaki bir elemandaki paralel çember teğeti doğrultusundaki germe
- Λ_z : S_0 'a dik doğrultudaki (enine) germe
- $\lambda_\phi, \lambda_\theta$: Karşılaştırma yüzeyi üzerindeki germeler
- ϕ : Şekil değişiminden sonraki meridyenel açı
- ϕ_0 : Şekil değişiminden önceki meridyenel açı
- Γ : S' den z_0 uzaklığındaki enine kayma açısı
- γ : Karşılaştırma yüzeyi üzerindeki enine kayma açısı
- ν : Poisson oranı
- η : Enine kayma şekil değiştirmesi
- ω : Dönme açısı
- $[0]$: 4x4 boyutlarında bir sıfır matrisi
- $[0']$: 4x3 boyutlarında bir sıfır matrisi



ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1 Bir Kabuk Elemanının Şekil Değişimi Öncesi Ve Sonrasındaki Geometrilere	6
Şekil 2.2 Kesit Kuvvetleri	11
Şekil 2.3 Kesit Momentleri	11
Şekil 3.1 Toplam İntegrasyon Aralığının N Adet Alt Aralığa Bölünmesi	22
Şekil 4.1 Düzgün Yayılan İç Basınç Etkimesi Halinde Küresel Kabuk	34
Şekil 4.2 Şekil Değişimi Sonrasındaki Radyal Koordinat r 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açısı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20, \alpha = 2$)	37
Şekil 4.3 Şekil Değişimi Sonrasındaki Düşey Koordinat y 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açısı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20, \alpha = 2$)	37
Şekil 4.4 Şekil Değişimi Sonrasındaki Radyal Koordinat r 'nin Düşey Koordinat y 'e Göre Değişimi (Şekil Değiştirmiş Küresel Kabuk) ($\beta = 20, \alpha = 2$)	38
Şekil 4.5 Şekil Değişimi Sonrasındaki Meridyenel Açısı ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açısı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20, \alpha = 2$)	38
Şekil 4.6 Meridyenel Germe λ_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açısı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20, \alpha = 2$)	39
Şekil 4.7 Paralel Çember Germesi λ_θ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açısı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20, \alpha = 2$)	39
Şekil 4.8 Enine Kayma Şekil Değiştirmesi η 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açısı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20, \alpha = 2$)	40
Şekil 4.9 Enine Kayma Açısı γ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açısı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20, \alpha = 2$)	40
Şekil 4.10 $(\omega - \gamma)$ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açısı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20, \alpha = 2$)	41
Şekil 4.11 Meridyenel Eğilme Momenti M_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açısı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20, \alpha = 2$)	41
Şekil 4.12 Meridyenel Eğilme Momenti M_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açısı ϕ_0 'a Göre $\phi_0 = 85^\circ - 95^\circ$ Arasında Değişimi ($\beta = 20, \alpha = 2$)	42
Şekil 4.13 Paralel Çember Eğilme Momenti M_θ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açısı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20, \alpha = 2$)	42
Şekil 4.14 Dönme Açılarının ω 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açısı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20, \alpha = 2$)	43
Şekil 4.15 Düşey Kesit Kuvveti V 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açısı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20, \alpha = 2$)	43



Şekil 4.16	Enine Kesme Kuvveti Q'nun Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20, \alpha = 2$)	44
Şekil 4.17	Meridyenel Normal Kesit Kuvveti N_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20, \alpha = 2$)	44
Şekil 4.18	Ankastre Mesnet Civarında Meridyenel Normal Kesit Kuvveti N_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20, \alpha = 2$)	45
Şekil 4.19	Paralel Çember Teğeti Doğrultusundaki Normal Kesit Kuvveti N_θ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20, \alpha = 2$)	45
Şekil 4.20	Yatay Kesit Kuvveti H'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20, \alpha = 2$)	46
Şekil 4.21	Meridyenel Eğrilik Değişim Ölçüsü K_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20, \alpha = 2$)	46
Şekil 4.22	Enine Eğrilik Değişim Ölçüsü K_θ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20, \alpha = 2$)	47
Şekil 4.23	Tekil Yük Etkisindeki Küresel Kabuk	49
Şekil 4.24	Şekil Değişimi Sonrasında Radyal Koordinat r'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi (P=45,61 N)	52
Şekil 4.25	Şekil Değişimi Sonrasında Düşey Koordinat y'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi (P=45,61 N)	52
Şekil 4.26	Şekil Değişimi Öncesinde ve Sonrasında Küresel Kabuğun Konumu (P=45,61 N)	53
Şekil 4.27	Şekil Değişimi Sonrasındaki Meridyenel Açılı ϕ 'nin, Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi (P=45,61 N)	53
Şekil 4.28	Enine Kayma Şekil Değiştirilmesi η 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi (P=45,61 N)	54
Şekil 4.29	Enine Kayma Açısı γ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi (P=45,61 N)	54
Şekil 4.30	Şekil Değişimi Sonrasında Dönme Açısı ω 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi (P=45,61 N)	55
Şekil 4.31	Meridyenel Germe λ_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi (P=45,61 N)	55
Şekil 4.32	Paralel Çember Germesi λ_θ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi (P=45,61 N)	56
Şekil 4.33	Meridyenel Eğrilik Değişim Ölçüsü K_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi (P=45,61 N)	56
Şekil 4.34	Enine Eğrilik Değişim Ölçüsü K_θ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi (P=45,61 N)	57

Şekil 4.35	Yatay Kesit Kuvveti H 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($P=45,61$ N)	57
Şekil 4.36	Düşey Kesit Kuvveti V 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($P=45,61$ N)	58
Şekil 4.37	Enine Kesme Kuvveti Q 'nun Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($P=45,61$ N)	58
Şekil 4.38	Meridyenel Normal Kesit Kuvveti N_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($P=45,61$ N)	59
Şekil 4.39	Paralel Çember Teğeti Doğrultusundaki Normal Kesit Kuvveti N_θ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($P=45,61$ N)	59
Şekil 4.40	Meridyenel Eğilme Momenti M_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($P=45,61$ N)	60
Şekil 4.41	Paralel Çember Eğilme Momenti M_θ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($P=45,61$ N)	60
Şekil 4.42	Tepe Noktasındaki Düşey Yerdeğiştirme Δ 'nın Tepe Noktasında Uygulanan Düşey Kuvvet P 'ye Göre Değişimi	61
Şekil 4.43	Çizgisel Yük Etkisinde Küresel Kabuk	63
Şekil 4.44	Şekil Değişimi Sonrasında Radyal Koordinatın Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)	65
Şekil 4.45	Şekil Değişimi Sonrasında Düşey Koordinatın Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)	65
Şekil 4.46	Şekil Değişimi Sonrasında Düşey Koordinatın Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)	66
Şekil 4.47	Şekil Değişimi Sonrasındaki Meridyenel Açının Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)	66
Şekil 4.48	Meridyenel Germe λ_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)	67
Şekil 4.49	Paralel Çember Germe λ_θ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)	67
Şekil 4.50	Kayma Şekil Değiştirmesi η 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)	68
Şekil 4.51	Enine Kayma Açısı γ 'nın Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)	68



Şekil 4.52	Dönme Açısı ω 'nın Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)	69
Şekil 4.53	Düşey Kesit Kuvveti V 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)	69
Şekil 4.54	Meridyenel Normal Kesit Kuvveti N_ϕ 'nın Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)	70
Şekil 4.55	Paralel Çember Teğeti Doğrultusundaki Normal Kesit Kuvveti N_θ 'nın Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)	70
Şekil 4.56	Enine Kesme Kuvveti Q 'nun Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)	71
Şekil 4.57	Meridyenel Eğrilik Değişim Ölçüsü K_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)	71
Şekil 4.58	Enine Eğrilik Değişim Ölçüsü K_θ 'nın Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)	72
Şekil 4.59	Yatay Kesit Kuvveti H 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)	72
Şekil 4.60	Meridyenel Eğilme Momenti M_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)	73
Şekil 4.61	Eğilme Gerilmesi $\sigma (= 6M_\phi / t^2)$ 'nın Şekil Değişimi Sonrasındaki Meridyenel Açı ϕ 'e Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)	73
Şekil 4.62	Paralel Çember Eğilme Momenti M_θ 'nın Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)	74
Şekil 4.63	Tepe Noktasındaki Düşey Yer Değiştirmenin Çizgisel Yüke Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)	74
Şekil 4.64	Düzgün Yaylı Yük Etkisinde Silindirik Kabuk	75
Şekil 4.65	Şekil Değişimi Sonrasındaki Radyal Koordinatın Silindirik Kabuk Boyunca Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)	79
Şekil 4.66	Şekil Değişimi Sonrasındaki Düşey Koordinatın Kabuk Boyunca Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)	80
Şekil 4.67	Şekil Değişimi Sonrasındaki Düşey Koordinatın Şekil Değişimi Sonrasındaki Radyal Koordinata Göre Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)	80



Şekil 4.68	Radyal Doğrultudaki Yer Değiştirme ($r-a$)'nın Şekil Değişimi Sonrasındaki Düşey Koordinata Göre Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)	81
Şekil 4.69	Şekil Değişimi Sonrasındaki Meridyenel Açının Kabuk Boyunca Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)	81
Şekil 4.70	Meridyenel Germenin Kabuk Boyunca Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)	82
Şekil 4.71	Meridyenel Germenin Ankastre Mesnet Civarında Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)	82
Şekil 4.72	Paralel Çember Germesinin Kabuk Boyunca Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)	83
Şekil 4.73	Enine Kayma Şekil Değiştirmesinin η 'nin Kabuk Boyunca Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)	83
Şekil 4.74	Kayma Açısının Kabuk Boyunca Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)	84
Şekil 4.75	Dönme Açısının Kabuk Boyunca Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)	84
Şekil 4.76	Meridyenel Eğrilik Değişim Ölçüsünün Kabuk Boyunca Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)	85
Şekil 4.77	Enine Eğrilik Değişim Ölçüsünün Kabuk Boyunca Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)	85
Şekil 4.78	Yatay Kesit Kuvvetinin Kabuk Boyunca Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)	86
Şekil 4.79	Düşey Kesit Kuvvetinin Kabuk Boyunca Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)	86
Şekil 4.80	Enine Kesme Kuvvetinin Kabuk Boyunca Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)	87
Şekil 4.81	Meridyenel Normal Kesit Kuvvetinin Kabuk Boyunca Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)	87
Şekil 4.82	Meridyenel Normal Kesit Kuvvetinin Ankastre Mesnet Civarında Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)	88
Şekil 4.83	Paralel Çember Teğeti Doğrultusundaki Normal Kesit Kuvvetinin Kabuk Boyunca Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)	88
Şekil 4.84	Meridyenel Eğilme Momentinin Kabuk Boyunca Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)	89
Şekil 4.85	Meridyenel Eğilme Momentinin Ankastre Mesnet Civarında Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)	89
Şekil 4.86	Paralel Çember Eğilme Momentinin Kabuk Boyunca Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)	90
Şekil 4.87	Ankastre Mesnet Civarında Radyal Doğrultudaki Yerdeğiştirmenin Yük Parametresine Göre Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$)	90



ÖNSÖZ

Çalışmalarım sırasındaki bilimsel ve insani katkılarından dolayı birlikte çalışmaktan büyük zevk duyduğum kıymetli Hocam Sayın Prof. Dr. R. Faruk YÜKSELER'e en derin şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Sıkışık anlarımda yardımlarını esirgemeyen Sayın Prof.Dr Surkay D. AKBAROV'a teşekkürlerimi sunarım.

Tezin, özellikle, son aşamalarında göstermiş olduğu büyük anlayıştan dolayı Sayın Prof. Dr.ERCÜMENT KÖKSAL'a müteşekkirim.

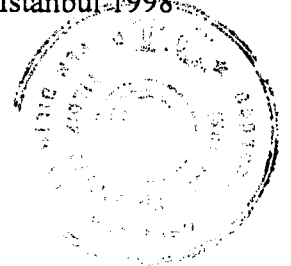
Tez yazım organizasyonunu büyük bir fedakarlık ile yüklenen sevgili arkadaşlarım Ar. Gör. Dr. Zafer Kütüğ'e ve Filiz Kütüğ'e çok teşekkür ederim.

Tez yazımı esnasında yardımlarını esirgemeyen Ar. Gör. Serap Çabuk Timur ve öğrencimiz Süreyya Dalka'ya bilhassa teşekkür ederim. Grafik çizimlerinde ki yardımlarından dolayı Yasemin Yılanlıoğlu'na ve Tolga Tiryaki'ye teşekkür ederim.

Manevi desteğini hiç bir zaman esirgemeyen Sayın Şemsettin YEŞİL ve Sayın Rezzan Şağmıt'a teşekkür ederim.

Hayatım boyunca, çalışmamı ve doğruluktan ayrılmamamı salık veren anne ve babama, özellikle bilgisayar programlarında yapmış olduğu büyük yardımları ve göstermiş olduğu büyük sabır ve anlayıştan dolayı sevgili hayat arkadaşım Murat Tanfer Koçak'a ebediyyen minnettar kalacağım.

Ayşe Erdölen KOÇAK- İstanbul-1998



ÖZET

Bu çalışmada, dönel simetrik sonlu Şekil değiştirme ve/veya sonlu dönme yapan dönel yzeyssel taşıyıcı Őistemlerin teorik ve sayısal analizi yapılmıştır. İncelenen malzemenin kauçuk benzeri (hiperelastik ve Şekil değişimini öncesi izotrop) olduğu varsayılmaktadır. Enine (karşılaştırma yüzeyi normali doğrultusundaki) normal Şekil değiştirmeler (dolayısıyla kalınlık deęiŐimleri) ve enine kayma Şekil değiştirmeleri gözönüne alınmaktadır. Problem, hem fiziksel hem de geometrik olarak kuvvetle nonlineerdir. İlgili cebirsel ve diferansiyel denklemlerin kapalı czm mümkün olmadığından sayısal czm yöntemlerine baŐvurulmuŐtur. İlgili doğrusal olmayan diferansiyel denklemler, integrasyon matrisleri ile doğrusal olmayan cebirsel denklemlere dönüŐtürülmüŐ ve cebirsel denklemlerin Newton-Raphson yöntemi ile sayısal czm yapılmıştır. Sonlu Şekil değiştirme ve/veya sonlu dönme yapan kabuklar için önerilmiŐ olan iki teoninin konuyla ilgili ceitli problemler üzerinde sayısal karŐılaŐtırmaları yapılmıştır.



ABSTRACT

In this study, a theoretical and numerical analysis of rubber-like shells of revolution undergoing axisymmetrical finite strains and finite rotations is made. The material is assumed to be rubber-like (isotropic in the unstrained state and hyperelastic). Transverse normal strains (therefore, thickness changes) and transverse shear strains are taken into consideration. The problem is strongly nonlinear both physically and geometrically. The closed form solution of the corresponding algebraical and differential equations is not possible. Therefore, consulting some numerical approaches has become unavoidable. Corresponding nonlinear differential equations are converted into nonlinear algebraical equations by integrating matrices. The algebraical equations are, then, numerically solved by using Newton-Raphson Method. Two shell theories which have been recommended for the shells undergoing finite strains and finite rotations are compared numerically on some problems related with the subject.



1. GİRİŞ

Kabuk yapılar, yapı sistemlerinden uzay ve uçak sanayine, boru ve basınç kaplarından kimyasal aygıtların dizaynına kadar uzanan modern teknolojinin geniş bir yelpazesinde artan bir şekilde kullanılmaktadır. Bundan dolayı, kabuk teorileri son yıllarda tasarım ve analiz maksatları için gittikçe daha fazla önemli olmaktadır. Bu çalışmada, dönele simetrik dış yükler altında sonlu şekil değiştirme ve sonlu dönme yapan yüzeysel taşıyıcıların teorik ve sayısal analizi yapılmıştır. İlgili uluslararası süreli yayınlardan da görülebileceği gibi, konu bilim dünyasında son yılların en yaygın konularından biridir. Konu, inşaat mühendisliğinin sınırlarını aşmakta diğer mühendisliklerin ve biyomekaniğin (dolayısı ile tıbbın) ilgi alanları içine girmektedir. Sonlu şekil değiştirme ve/veya sonlu dönme yapan bütün yüzeysel taşıyıcı sistemler (örneğin basınç kapları, şişme yapılar, kalp, kırmızı kan hücreleri) konunun uygulama alanlarına girmektedir. Bu çalışmada, dönele simetrik etkiler altındaki dönele yüzeyler ele alınmaktadır. Keyfi geometriye sahip yüzeylerin incelenmesi bu çalışmanın bir uzantısı olacaktır.

Büyük şekil değiştirmeler ve büyük dönmelerin incelenmesi, doğrusal olmayan bir hesaba gerektirmektedir. Doğrusal olmayan diferansiyel ve cebirsel denklemlerin çözümünde kaçınılmaz bir şekilde sayısal yöntemlere başvurulması gerekmektedir. Bilgisayar teknolojisinin çok büyük bir hızla büyümesi, doğrusal olmayan davranışlara yaklaşımı kolaylaştırmaktadır.

Bu çalışmada, malzemenin kauçuk benzeri (hiperelastik, şekil değişimi öncesi izotrop) olduğu varsayılmaktadır. Kauçuk benzeri, sıkıştırılmaz malzemeler için şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu Rivlin et al., (1951) tarafından teorik ve deneysel olarak incelenmiştir. Üç boyutlu şekil değiştirme enerjisi, şekil değiştirme değişmezlerinin (İnvariantlar : I_1, I_2, I_3) bir fonksiyonudur (Treloar, 1975):

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \quad (1.1)$$

Malzemenin sıkışmaz olması durumunda ($I_3 = 1$), üç boyutlu şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu

$$W = W(I_1, I_2) \quad (1.2)$$

şeklinde ifade edilmektedir (Taber,1987). Rivlin ve Saunders (1951), deneysel çalışmalar sonrasında

$$W = C[(I_1 - 3) + \alpha(I_2 - 3)^b] \quad (1.3)$$

şeklinde bir üç boyutlu şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu önermişlerdir (Treloar, 1975). (1.3) denkleminde C, α, b malzeme sabitleri olup $\alpha = 0$ durumunda Neo - Hookeon malzemesi için şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu

$$W = C[(I_1 - 3)] \quad (1.4)$$

elde edilmektedir. $b = 1$ durumunda, Mooney-Rivlin şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu

$$W = C[(I_1 - 3) + \alpha(I_2 - 3)] \quad (1.5)$$

elde edilmektedir (Taber, 1988).

Büyük şekil değiştirmelerle 1950'li yıllardan beri uğraşıldığı halde, çıkarılan bağıntıların (Naghdi, 1972) son derece karmaşık oluşu araştırmacıyı membran çözümlerine yöneltmiştir. Koiter (1966), Shapovalov (1968), Stein et al (1982), Pietroszkiewicz (1984), Başar ve Kratzig (1985), Taber (1985), Taber (1987),

Makowski ve Stumpf (1989), Bathe ve Bolourchi (1980), Hughes ve Liu (1981), Surana (1983), Oliver ve Onate (1984), Yükseler (1996 a, b) gibi araştırmacılar çeşitli doğrusal olmayan kabuk teorilerini incelemişlerdir. Aşağıda doğrusal olmayan kabuk teorilerinin gelişimi çok kısa olarak özetlenmeye çalışılmaktadır:

Klasik Love teorisinin dayandığı varsayımlar aşağıda belirtilmektedir (Saada, 1974):

- 1) Kabuk kalınlığı incedir.
- 2) Yer değiştirmeler ve dönmeler küçüktür.
- 3) Kabuğın orta yüzeyindeki normaller şekil değişiminden sonra normal kalırlar.
- 4) Enine normal gerilmeler ihmal edilebilir.

Bu varsayımlar aynı zamanda Kirchhoff plak teorisinin devamı olarak gösterilen ince kabuk teorisine de yön vermiştir. Love kabuk teorisinin, hem doğrusal hemde doğrusal olmayan gösterimleri yüzey teorisini tanımlarından (Marlowe ve Flügge, 1968) veya üç boyutlu elastisiteden elde edilebilir (Saada, 1974) . Dong et al. (1962), ince anizotrop plak ve kabukların eğilme analizleri için küçük yer değiştirmeli Love teorisini kullanmışlardır. Koiter (1960), klasik teori üzerinde yapılacak herhangi bir eklemenin enine şekil değiştirme etkilerini de içermesi gerektiğini belirtmiştir. Enine kayma şekil değişimini içeren ilk teoriler, kabuğın orta yüzeyinin şekil değiştirmiş normallerindeki kabulleri esneklemiştir. Küçük şekil değiştirme ve orta büyüklükte dönme yapan kabuklara ait bir yaklaşım, Librescu ve Schmid (1988) taraflarından verilmiştir. Schmit ve Monforton (1970), orta dereceli geometrik nonlineerliği serbest bırakan, klasik teori üzerine kurulu, anizotrop silindirik kabuk elemanını formüle etmiştir. Stolarki (1984), orta dereceli nonlineerliği içeren basit üçgen kabuk elemanının sonlu elemanlar formülasyonunu sunmuştur. Noor ve Peters (1986), anizotrop silindirik panellerin doğrusal olmayan tepkisini enine kayma şekil değiştirmesini de dikkate alarak incelemişlerdir. Meroueh (1986), Surana (1983, 1986) enine kayma şekil değişimini içeren doğrusal olmayan kabukların sonlu elemanlar yaklaşımını geliştirmişlerdir. Cook (1982), Reissner (1969)'in büyük şekil değiştirmeler için olan denklemlerini geliştirerek simetrik kalınlık değişimine izin vermiştir. Fakat, (Libai ve Simmonds, 1981)'de belirtildiği gibi, eğilme büyük olduğu zaman orta yüzeyin yerinin değişimi gerilme bileşenleri üzerinde büyük ölçüde etkili olabilmektedir. Taber (1987)' da hiperelastik, sıkışmaz malzemelerden oluşan dönel kabukları, enine normal gerilme ve enine kayma

şekil değiştirmelerini ihmal ederek büyük eğilme ve büyük membran gerilmeleri altında şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunu kullanarak incelemiştir. Taber (1987 a,b), kauçuk benzeri dairesel plakların ve silindirik kabukların büyük şekil değişimleri için asimtotik açılımlarını vermiştir. Taber (1987), büyük şekil değiştirme ve dönme yapan, enine kayma şekil değiştirmelerinin de göz önüne alındığı dönel kabuk teorisini sunmuştur. Taber (1987), esasen Reissner (1969, 1972) tarafından geliştirilen dönel kabuk denklemlerinin ve Simmonds (1986)'ın iki boyutlu şekil değiştirme enerjisi fonksiyonun birleşimini temsil etmektedir. Enine kayma şekil değiştirmesine izin verilmesiyle, Reissner-Simmonds (R-S) kabuk teorisi, karşılaştırma yüzeyine başlangıçta normal olan doğruların, şekil değişiminden sonra normal kalması gerekmediğini kabul etmektedir. (Taber, 1987)' da şekil değiştirmemiş kabuğun karşılaştırma yüzeyi olarak kabuğun orta yüzeyi alınırken, şekil değiştirmiş kabuğun karşılaştırma yüzeyi için iki teori önerilmiştir:

Teori I: Dinamik (veya statik) uygunluk koşulu (Simmond, 1986).

Şekil değiştirmiş kabuğun karşılaştırma yüzeyini oluşturan noktalar ile şekil değiştirmemiş kabuğun karşılaştırma yüzeyini oluşturan maddesel noktalar aynı olmak zorunda değildir ve

$$\int_{-t/2}^{t/2} z dz_0 = 0 \quad (1.6)$$

denklemini sağlamalıdır. (1.6) eşitliğinde, t kabuk kalınlığını, z_0 şekil değişiminden önceki enine koordinatı, z şekil değişiminden sonraki enine koordinatı göstermektedir.

Teori II: Şekil değişimi sonrasındaki karşılaştırma yüzeyi, şekil değişimi öncesinde karşılaştırma yüzeyi üzerinde bulunan maddesel noktalardan meydana gelmektedir.

Makowski ve Stumpf (1989), enine kayma şekil değiştirmeleri ve enine normal şekil değiştirmeleri içeren, büyük elastik şekil değiştirmelere ve büyük dönmelere maruz kalan dönel kabuklar için çok ayrıntılı bir teori sunmuşlardır. Bu sunuşlarında, (Taber, 1987)' daki Teori II' yi kullanmışlardır. Makowski ve Stumpf (1989), özellikle kalın kabuklar için enine kayma şekil değişimlerinin etkilerinin önemine değinmişler ve Teori

I' in uygun olmadığını belirtmişlerdir. Yükseler (1996 b), Makowski ve Stumpf (1989)'un şekil değiştirmeler (enine kayma şekil değiştirmesi ve enine normal şekil değiştirmeler de dahil olmak üzere) ve dönmeler üzerinde hiçbir kısıtlama getirmeyen yaklaşımını geliştirerek Teori I ve Teori II' yi içeren sonlu şekil değiştirme ve sonlu dönme yapan döneel yüzeysel taşıyıcıların analizini yapmıştır. Yükseler, bu çalışmasında sıkışmaz kabuklar üzerinde çalışmıştır. Yükseler (1996 a), sonlu şekil değiştirme (enine kayma şekil değiştirmeleri de dahil olmak üzere) ve sonlu dönme yapan sıkışabilir kabuklar için Teori I ve Teori II' yi içeren iki boyutlu şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunun elde edilmesi üzerine bir yaklaşımda bulunmuştur. (Yükseler, 1996a,b)'de dairesel plakların burkulma problemi üzerinde, üç boyutlu elastisite sonuçları baz alındığında Teori I'in Teori II'ye göre daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür.

Bölüm 2'de sonlu şekil değiştirme ve sonlu dönme yapan, kauçuk benzeri döneel yüzeysel taşıyıcılara ait temel bağıntılar verilmektedir. İlgili temel bağıntılar diferansiyel ve cebirsel denklemlerden oluşmaktadır. Bölüm 3'de temel denklemlerin çözüm için uygun şekle dönüştürülmesinden, ilgili diferansiyel denklemlerin integrasyon matrisleri yöntemi yardımıyla cebirsel denklemlere dönüştürülmesinden, elde edilmiş olan cebirsel denklemlerin hepsinin toplu olarak ifadesinden ve de ardışık yaklaşım yöntemleriyle yaklaşık sayısal çözümünden bahsedilmektedir.

Bölüm 4'de, döneel simetrik yüklemeler etkisinde sonlu şekil değiştirme ve sonlu dönme yapan bazı döneel simetrik kabuk problemlerinin Teori I ve Teori II'yi içeren sayısal çözümünden, elde edilen değerlerin diğer araştırmacıların elde etmiş olduğu sonuçlar ile karşılaştırılmasından bahsedilmektedir.

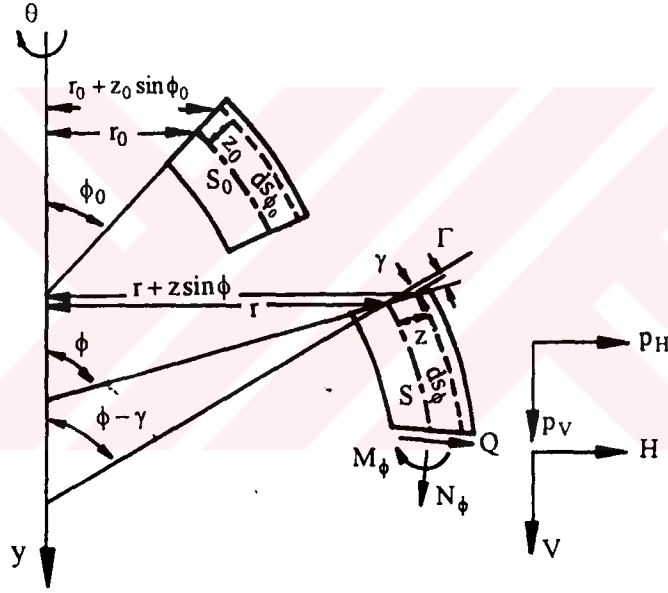
Bölüm 5'te, bu çalışmada elde edilen sonuçların genel bir değerlendirilmesi yapılmış ve bu çalışmadan sonra yapılması düşünülen konulara değinilmiştir.



2. DÖNEL SİMETRİK SONLU ŞEKİL DEĞİŞTİRME VE/VEYA SONLU DÖNME YAPAN KAÇUK BENZERİ, DÖNEL YÜZEYSEL TAŞIYICILARA AİT TEMEL BAĞINTILAR

2.1. Geometri

Şekil 2.1'de, bir kabuk elemanının şekil değişiminden önceki ve sonraki geometrileri gösterilmektedir. Burada, sıfır indisi şekil değişiminden önceki konum için geçerlidir.



Şekil 2.1 Bir Kabuk Elemanının Şekil Değişimi Öncesi ve Sonrasındaki Geometrileri

Burada, S karşılaştırma yüzeyi, ϕ meridyenel açı, r radyal koordinat, z enine koordinat, Γ S 'den z uzaklığındaki enine kayma açısı, θ paralel merkez açısı olarak tanımlanmaktadır. Bu tanımlar, şekil değişimi sonrası için yapılmıştır. Şekil değişimi öncesinde aynı terimler sıfır indisi ile birlikte gösterilmektedir (S_0, ϕ_0, r_0, z_0 gibi) (Taber, 1987). S_0 şekil değiştirmemiş orta yüzey olarak alınmıştır.



Karşılaştırma yüzeyinden z_0 uzaklığındaki bir elemandaki meridyen teğetine paralel germe Λ_ϕ , paralel çember teğetine paralel germe Λ_θ ve S_0 'a dik doğrultudaki (enine) germe Λ_z (Taber, 1987),

$$\Lambda_\phi = ds_\phi / ds_{\phi_0} \quad (2.1a)$$

$$\Lambda_\theta = ds_\theta / ds_{\theta_0} \quad (2.1b)$$

$$\Lambda_z = \partial z / \partial z_0 \quad (2.1c)$$

denklemleriyle tanımlanmaktadır. Burada $ds_\phi, ds_\theta, ds_{\phi_0}$ ve ds_{θ_0} Şekil 2.1'deki geometriden aşağıdaki şekilde elde edilmektedir (Taber, 1987):

$$ds_\phi = d(r + z \sin \phi) / \cos(\phi - \Gamma) = d(y - z \cos \phi) / \sin(\phi - \Gamma) \quad (2.2a)$$

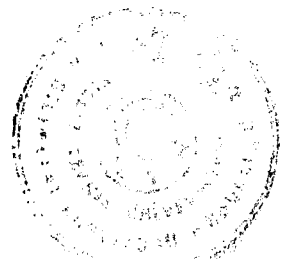
$$ds_\theta = (r + z \sin \phi) d\theta \quad (2.2b)$$

$$ds_{\phi_0} = d(r_0 + z_0 \sin \phi_0) / \cos \phi_0 \quad (2.2c)$$

$$ds_{\theta_0} = (r_0 + z_0 \sin \phi_0) d\theta \quad (2.2d)$$

(2.2) denklemleri, (2.1) denklemlerinde yerlerine konulup gerekli kısaltmalar ve düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki eşitlikler bulunmaktadır (Taber, 1987):

$$\Lambda_\phi = \frac{\bar{\lambda}_\phi + z k_\phi}{1 + z_0 k_{\phi_0}} \cdot \frac{1}{\cos \Gamma} \quad (2.3a)$$



$$\Lambda_{\theta} = \frac{\lambda_{\theta} + zk_{\theta}}{1 + z_0k_{\theta 0}} \quad (2.3b)$$

$$\bar{\Gamma} = \Lambda_{\phi} \sin \Gamma = \frac{\eta + z'}{1 + z_0k_{\phi_0}} \quad (2.3c)$$

Burada, (...) işaretinin anlamı

$$(\dots)' \equiv d(\dots)/(ds_{\phi_0})_{S_0}$$

olmaktadır. $\bar{\lambda}_{\phi}$ ve η karşılaştırma yüzeyi üzerinde tanımlanan şekil değiştirme ölçüleri olup aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Taber, 1987):

$$\bar{\lambda}_{\phi} = \lambda_{\phi} \cos \gamma = r' \cos \phi + y' \sin \phi \quad (2.4)$$

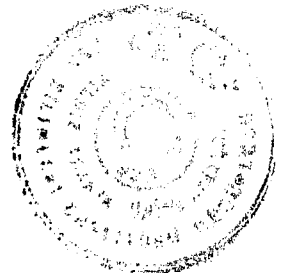
$$\eta = \lambda_{\phi} \sin \gamma = r' \sin \phi - y' \cos \phi \quad (2.5)$$

Bu denklemlerde, γ karşılaştırma yüzeyi üzerindeki enine kayma açısını, y şekil değişimi sonrasında düşey koordinatı, λ_{ϕ} ve λ_{θ} karşılaştırma yüzeyi üzerindeki germeleri göstermektedirler ve

$$\lambda_{\theta} = \frac{r}{r_0} \quad (2.6)$$

olarak ifade edilmektedir. k_{ϕ_0} , k_{θ_0} şekil değişimi öncesi; k_{ϕ} , k_{θ} şekil değişimi sonrasındaki eğriliklerdir ve

$$k_{\phi_0} = \phi'_0 \quad (2.7a)$$



$$k_{\phi} = \phi' \quad (2.7b)$$

$$k_{\theta_0} = \sin \phi_0 / r_0 \quad (2.7c)$$

$$k_{\theta} = \sin \phi / r_0 \quad (2.7d)$$

denklemleri ile tanımlanmaktadır.

Taber (1987), sonlu eğilme şekil değiştirmesi, sonlu mambran şekil değiştirmesi ve orta büyüklükteki enine kayma şekil değiştirmeleri için, t şekil değişimi öncesi kabuk kalınlığı olmak üzere, ince kabuk yaklaşımını $(tk_{\phi_0}, tk_{\theta_0}) \ll 1$ ve $\Gamma^2 \ll 1$ dikkate alarak (2.3) denklemlerini yaklaşık olarak aşağıdaki şekilde ifade etmiştir:

$$\bar{\lambda}_{\phi} \approx \lambda_{\phi} \quad (2.8a)$$

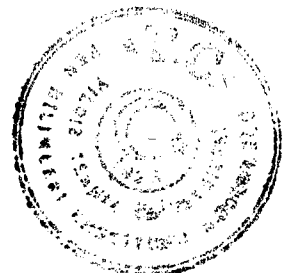
$$\Lambda_{\phi} \approx \lambda_{\phi} + zK_{\phi} \quad (2.8b)$$

$$\Lambda_{\theta} \approx \lambda_{\theta} + zK_{\theta} \quad (2.8c)$$

$$\bar{\Gamma} \approx \lambda_{\phi} \Gamma \approx \eta \approx \lambda_{\phi} \gamma \quad (2.8d)$$

(2.3c) denklemi yaklaşık olarak (2.8d) şeklinde ifade edilirken z' terimi ihmal edilmektedir. (2.8) denklemlerinde, K_{ϕ} ve K_{θ} eğrilik değişimi ölçülerini göstermektedir ve

$$K_{\phi} = k_{\phi} - \lambda_{\phi}^2 \lambda_{\theta} k_{\phi_0} \quad (2.9a)$$



$$K_{\theta} = k_{\theta} - \lambda_{\theta}^2 \lambda_{\phi} k_{\theta_0} \quad (2.9b)$$

denklemleriyle tanımlanmaktadır (Taber, 1987).

2.2. Denge Denklemleri

Karşılaştırma yüzeyinin şekil değiştirmemiş her birim uzunluğu için düşey ve yatay kuvvetlerin dengesi ve de moment dengesi şu şekildedir (Taber, 1987; Makowski and Stumpf, 1989):

$$(r_0 V)' + r_0 p_V = 0 \quad (2.10)$$

$$(r_0 H)' - N_{\theta} + r_0 p_H = 0 \quad (2.11)$$

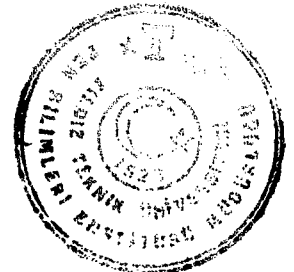
$$(r_0 M_{\phi})' - M_{\theta} \cos \phi - r_0 (Q \bar{\lambda}_{\phi} - N_{\phi} \eta) = 0 \quad (2.12)$$

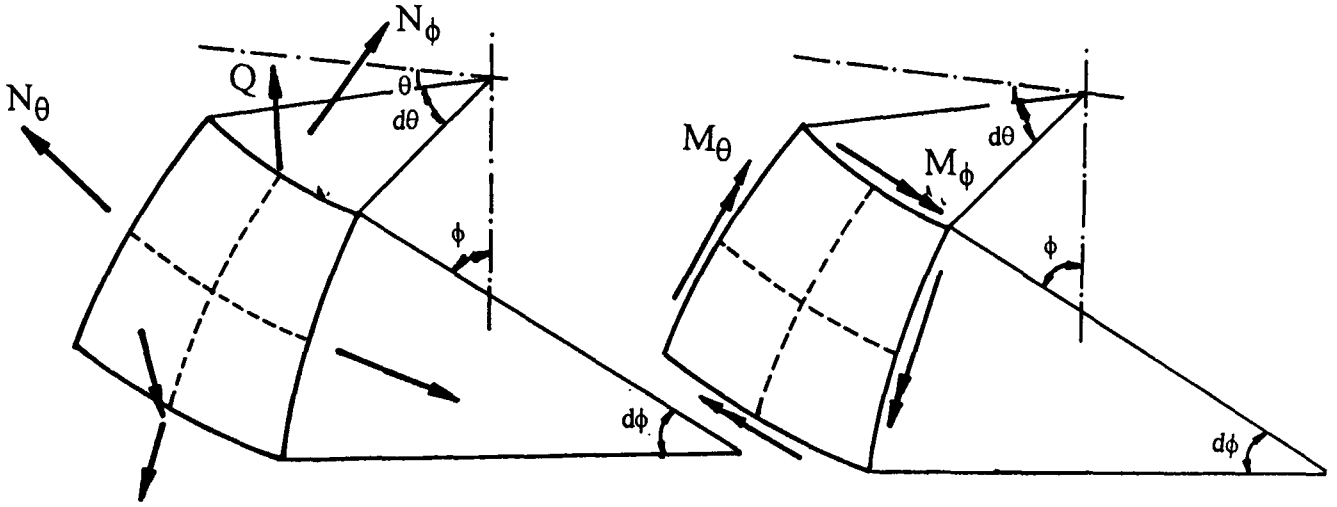
Burada V düşey kesit kuvveti, H yatay kesit kuvveti, p_V şekil değiştirmemiş kabuğun karşılaştırma yüzeyinin birim alanına (S_0 üzerinde) etkiyen düşey yük ve p_H şekil değiştirmemiş kabuğun karşılaştırma yüzeyinin birim alanına etkiyen yatay yüküdür (Şekil 2.1). N_{θ} paralel çember teğeti doğrultusundaki normal kesit kuvvetini, N_{ϕ} meridyenel normal kesit kuvvetini, M_{ϕ} ve M_{θ} kesit eğilme momentlerini, Q enine kesme kuvvetini göstermektedirler (Şekil 2.2 ve Şekil 2.3). Şekil 2.1'deki geometriden de

$$N_{\phi} = H \cos \phi + V \sin \phi \quad (2.13)$$

$$Q = H \sin \phi - V \cos \phi \quad (2.14)$$

olduğu görülebilir.





Şekil 2.2 Kesit Kuvvetleri

Şekil 2.3 Kesit Momentleri

2.3. İki Boyutlu Şekil Değiştirme Enerjisi Fonksiyonu

Bünye denklemleri, iki boyutlu şekil değiştirme enerjisi w yardımıyla ifade edilmektedir (Taber, 1987). Bir kabuk malzemesi için, S_0 'ın birim alanında tanımlanan iki boyutlu şekil değiştirme enerjisi w 'nin belirlenmesinde iki yöntem kullanılabilir. Birinci yol, malzemenin iki boyutlu örnekleri üzerinde deneyler yapmayı gerektirmektedir (direk yöntem). Diğer yöntem ise, (2.15) bağıntısı yardımıyla w 'nin elde edilmesidir (indirgeme yöntemi). (Makowski and Stumpf, 1989; Schieck et al., 1992):

$$w = \int_{-t/2}^{t/2} W \beta' dz_0 \quad (2.15)$$

(2.15) eşitliğindeki β' ifadesi:

$$\beta' = 1 + (k_{\phi_0} + k_{\theta_0})z_0 + k_{\phi_0} k_{\theta_0} z_0^2 \quad (2.16)$$



olarak tanımlanmaktadır.

Simmonds (1985), orta büyüklükteki eğilme şekil değiştirmeleri $(tK)^2 \ll 1$ olması durumunda bir kabuğun iki boyutlu şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunun şeklinin bir dairesel plağın iki boyutlu şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunun şekli ile aynı olduğunu göstermiştir. Bu durumda, orta büyüklükteki eğilme şekil değiştirmeleri bulunması halinde bir kabuğun iki boyutlu şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu yaklaşık olarak

$$w = \int_{-t/2}^{t/2} W dz_0 \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlanabilir (Taber, 1987).

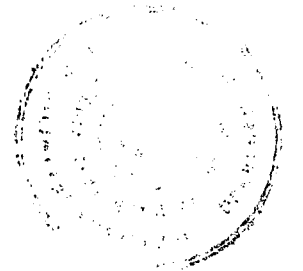
2.4. Bünye Bağlılıkları

Hiperelastik malzemeden yapılmış bir kabuk için iki boyutlu bir şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu w , S_0 'ın birim alanı için 2.3 alt bölümünde tanımlanmıştır. Reissner (1972) tarafından Virtüel İş ilkesi yardımıyla temel bünye denklemlerinin aşağıdaki gibi yazılabileceği belirtilmektedir:

$$N_\phi = \frac{\partial w}{\partial \lambda_\phi} \quad (2.18)$$

$$N_\theta = \frac{\partial w}{\partial \lambda_\theta} \quad (2.19)$$

$$M_\phi = \frac{\partial w}{\partial K_\phi} \quad (2.20)$$



$$M_{\theta} = \frac{\partial w}{\partial K_{\theta}} \quad (2.21)$$

$$Q = \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad (2.22)$$

2.5. Sınır Koşulları

Taber (1987)'de olduğu gibi, sınır koşullarının ayrıntılı olarak incelenmesi bu çalışmanın amacı dışındadır. Alan denklemleri ile uyumlu sınır koşulları sayısal çözümlerde kullanılacaktır. Doğal sınır koşullarının elde edilmesi problemi sonraki çalışmalara bırakılmıştır.



3. İNTEGRASYON MATRİSLERİ İLE ÇÖZÜM VE TEMEL DENKLEMLERİN UYGUN ŞEKİLDE İFADE EDİLMESİ

Bölüm 2’de sonlu şekil değiştirme ve/veya sonlu dönme yapan kauçuk benzeri dönel kabuklara ait temel ifadeler sunulmuştur. Bu ifadelerden bazıları diferansiyel (non-linear), bazıları ise cebirseldir (non-linear). Bu bölümde; ilgili diferansiyel denklemlerin, Parnell (1984) ve Taber (1988)’de olduğu gibi integrasyon matrisleri ile cebirsel denklemlere dönüştürülmesi ve doğrusal olmayan cebirsel denklemlerin sayısal çözümünün yapılmasından bahsedilecektir. Bölüm (3.1)’de integrasyon matrislerinden bahsedilmektedir. Bölüm (3.2)’de temel denklemlerin çözüm için uygun şekle dönüştürülmesinden, Bölüm (3.3)’de ilgili diferansiyel denklemlerin integrasyon matrisleri yöntemi yardımıyla cebirsel denklemlere dönüştürülmesinden bahsedilmektedir. Bölüm (3.4)’de ise elde edilmiş olan bütün cebirsel denklemlerin sınır koşullarını da gözönüne alarak toplu olarak ifadesinden ve de sayısal çözümünden bahsedilmektedir.

3.1. İntegrasyon Matrisleri ile Çözüm

Parnell (1984), dönel kabuk problemlerinin çözümü için analitik ve sayısal metodu birlikte kullanmış ve ilk yaklaşım olarak asimtotik çözümü ve gereken bölgelerde (asimtotik çözümün geçerli olmadığı bölgelerde) integrasyon matrislerini kullanmıştır.

Parnell (1984), integral matris yöntemini; düz, izotrop ve elastik bir çubuğun gerilme problemine uygulamış ve çözümleri integral matris operatörüne göre formüle etmiştir. Bu formülasyon, daha küçük bant genişliğine sahip denklem takımları sağladığı için ve genel sınır şartlarını ilave etme kolaylığı açısından avantajlı olmaktadır.

Taber (1988), integral matris yöntemini, düzgün yayılı iç basınç etkisinde sonlu şekil değiştirme yapan ankastre mesnetli dairesel bir silindire (doğrusal olmayan bir problem)



uygulamıştır. Elde ettiği sonuçları analitik ve deneysel olarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırmış ve genelde yakın sonuçlar elde etmiştir.

Integral matrisi, integral operatörünün farklı bir versiyonudur. Integral operatörü; bir $f(x)$ fonksiyonunu $f(x)$ 'in integrali olan $F(x)$ 'e dönüştüren lineer bir operatördür. Integral matrisleri, matris çarpım işlemleri ile bir fonksiyonun yaklaşık integralini elde etmek için kullanılmaktadır (Parnell,1984).

Parnell (1984), doktora çalışmasında lineer, quadratik ve kübik ($m=1,2,3$) polinomlara dayalı Newton integral matrislerini kullanarak diferansiyel denklem sistemlerini cebirsel denklem sistemlerine dönüştürmüştür. Bu dönüştürme işleminde, kabuğun toplam integrasyon bölgesi parçalara ayrılarak her parçada $f(x)$ fonksiyonunun ayrı ayrı integralleri alınmış ve elde edilen bu integraller toplanarak $f(x)$ fonksiyonunun yaklaşık toplam integrali hesaplanmıştır. İntegrasyon matrisleri ile ilgili ayrıntılı bilgiler için Parnell (1984)'e başvurulabilir.

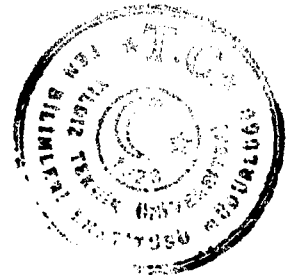
İntegrasyon matrislerinin uygulanabilmesi için ilgili diferansiyel denklemlerin sol taraflarında, bilinmeyen bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkene göre birinci türevleri; sağ taraflarında ise, cebirsel ifadeler olacak şekilde ifade edilmesi gerekmektedir.

3.2 Temel Denklemlerin Uygun Şekle Dönüştürülmesi

Bölüm 2'de verilen (2.4) ve (2.5) eşitlikleri sırasıyla $\cos\phi$ ve $\sin\phi$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa ve (2.8a) denklemini de gözönüne alınırsa

$$r' = \lambda_{\phi} \cos\phi + \eta \sin\phi \quad (3.2a)$$

elde edilmektedir. Sonraki ifadelerde de (2.8a) yaklaşık ifadesi kullanılmıştır. (2.9a) eşitliğinde, (2.7a) ve (2.7b) ifadeleri yerlerine konularak,



$$\phi' = K_{\phi} + \lambda_{\phi}^2 \lambda_{\theta} \phi_0' \quad (3.2b)$$

diferansiyel denklemi elde edilmektedir. (2.11) denkleminde N_{θ} ifadesinin yerine (2.19) denklemi kullanılarak

$$\bar{H}' = \frac{\partial w}{\partial \lambda_{\theta}} - r_0 p_H \quad (3.2c)$$

bulunmaktadır. Burada,

$$\bar{H} = r_0 H \quad (3.2d)$$

olarak gösterilmektedir. (2.12) denkleminde; N_{ϕ} , M_{θ} ve Q ifadelerinin yerlerine sırasıyla (2.13), (2.14) ve (2.21) denklemleri yazılarak

$$\bar{M}'_{\phi} = \frac{\partial w}{\partial K_{\theta}} \cos \phi + \bar{H}(\lambda_{\phi} \sin \phi - \eta \cos \phi) - r_0 V(\lambda_{\phi} \cos \phi + \eta \sin \phi) \quad (3.2e)$$

elde edilmektedir. Bu eşitlikte,

$$\bar{M}_{\phi} = r_0 M_{\phi} \quad (3.2f)$$

olarak gösterilmektedir. (2.13) ifadesinde, N_{ϕ} yerine (2.18) eşitliği yazılarak

$$0 = \frac{\partial w}{\partial \lambda_{\phi}} - H \cos \phi - V \sin \phi \quad (3.2g)$$

denklemi elde edilmektedir. (3.2f) ifadesinde, M_{ϕ} yerine (2.20) eşitliği yazılarak

$$0 = r_0 \frac{\partial w}{\partial K_\phi} - \bar{M}_\phi \quad (3.2h)$$

denklemini elde edilmektedir. (2.14) denkleminde, (2.22) ifadesi kullanılarak

$$0 = \frac{\partial w}{\partial \eta} - H \sin \phi - V \cos \phi \quad (3.2i)$$

elde edilebilir. (2.10) denklemini

$$\bar{V}' = -r_0 p_V \quad (3.3a)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\bar{V} = r_0 V \quad (3.3b)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. (3.2a, 3.2b, 3.2c, 3.2e, 3.3a) denklemlerinin sol taraflarında bilinmeyen değişkenlerden r , ϕ , \bar{M}_ϕ , \bar{H} ve \bar{V} 'nin bağımsız değişken s_ϕ 'a göre birinci türevleri, sağ taraflarında ise non-lineer cebirsel ifadeler bulunmaktadır (Verilen bir malzeme için, iki boyutlu şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu w şekil değişimi ölçülerinin ($\lambda_\theta, \lambda_\phi, K_\theta, K_\phi$ ve η 'nın) cebirsel bir fonksiyonudur. Dolayısıyla w 'nin şekil değişimi ölçülerine göre türevleri cebirsel ifadelerdir.). (3.2g, 3.2h ve 3.2i) denklemleri non-lineer cebirsel denklemlerdir. r_0, ϕ_0, p_H, p_V ve w 'nin bilinmesi durumunda (3.2a, 3.2b, 3.2c, 3.2e, 3.3a, 3.2g, 3.2h, 3.2i) denklemleri ile r , ϕ , \bar{M}_ϕ , \bar{H} , \bar{V} , λ_ϕ, η ve K_ϕ esas bilinmeyenlerin (değişkenlerin) hesaplanması düşünülebilir (Bu denklemlerde doğrudan olarak içerilen λ_θ ve w 'nin türevlerinde yer alan

λ_θ ve K_θ bilinmeyenleri (2.6), (2.7c), (2.7d) ve (2.9b) denklemleri ile esas değişkenler cinsinden ifade edilebilmektedir.).

Düşey doğrultudaki kuvvetlerin dengesinden elde edilen (3.3a) denkleminin çözülebilmesi durumunda, söz konusu yaklaşımda \bar{V} esas değişkenler listesinden çıkartılabilmektedir:

$$\bar{V} = -\int r_0 p_V ds_{\phi_0} \quad (3.4)$$

Bu durumda; ilgili denklemler, esas değişkenler r , ϕ , \bar{M}_ϕ , \bar{H} , λ_ϕ , η ve K_ϕ cinsinden ((3.2) denklemlerinin düzenlenmesiyle)

$$r' = \lambda_\phi \cos \phi + \eta \sin \phi \quad (3.5a)$$

$$\phi' = K_\phi + \lambda_\phi^2 r \phi_0' / r_0 \quad (3.5b)$$

$$\bar{H}' = \frac{\partial w}{\partial \lambda_\theta} - r p_H \quad (3.5c)$$

$$\bar{M}_\phi' = \cos \phi \frac{\partial w}{\partial K_\theta} + \bar{H}(\lambda_\phi \sin \phi - \eta \cos \phi) - r_0(\lambda_\phi \cos \phi + \eta \sin \phi)V \quad (3.5d)$$

$$0 = r_0 \frac{\partial w}{\partial \lambda_\phi} - \bar{H} \cos \phi - r_0 V \sin \phi \quad (3.5e)$$

$$0 = r_0 \frac{\partial w}{\partial K_\phi} - \bar{M}_\phi \quad (3.5f)$$

$$0 = r_0 \frac{\partial w}{\partial \eta} - \bar{H} \sin \phi + r_0 V \cos \phi \quad (3.5g)$$

şeklinde ifade edilebilir. r_0, ϕ'_0, p_H ve V 'nin verilmesi durumunda (3.5a,b,c,d,e,f,g) denklemleri çözülebilir. Esas değişkenler dışında kalan bilinmeyenler, aşağıda topluca sunulan (Bölüm 2'de verilmiş olan denklemler)

$$\lambda_\theta = \frac{r}{r_0}, \quad (3.6)$$

$$K_\theta = \frac{\sin \phi}{r_0} - \lambda_\phi \frac{r^2 \sin \phi_0}{r_0^3}, \quad (3.7)$$

$$N_\phi = \frac{\bar{H}}{r_0} \cos \phi + V \sin \phi \quad \text{veya} \quad N_\phi = \frac{\partial w}{\partial \lambda_\phi}, \quad (3.8)$$

$$Q = \frac{\bar{H}}{r_0} \sin \phi - V \cos \phi \quad \text{veya} \quad Q = \frac{\partial w}{\partial \eta}, \quad (3.9)$$

$$M_\theta = \frac{\partial w}{\partial K_\theta}, \quad (3.10)$$

$$N_\theta = \frac{\partial w}{\partial \lambda_\theta}, \quad (3.11)$$

$$\omega = \phi - \phi_0, \quad (3.12)$$

$$y' = \lambda_\phi \sin \phi - \eta \cos \phi \quad (3.13)$$



denklemlerinden elde edilebilir. Burada ω , meridyen teğetinin dönmesini göstermektedir. (3.13) denklemi, bir başlangıç değeri yöntemi veya bir sayısal integrasyon yöntemi ile çözülebilir.

Bu çalışmada, \bar{V} esas değişkenler listesinden çıkartılmış ve (3.5a,b,c,d,e,f,g) denklemleri yardımı ile Bölüm 4’de sunulan problemlerin sayısal çözümüne gidilmiştir.

3.3. İntegrasyon Matrisleriyle İlgili Diferansiyel Denklemlerin Cebirsel Denklemler Haline Dönüştürülmesi

Bölüm (3.2)’de ifade edilen (3.5a,b,c,d) numaralı diferansiyel denklemler

$$\frac{d}{ds} \{y_D\} = [A_D] \{y\} + \{N_D\} + \{a_D\} \quad (3.14)$$

matris denklemi ile ifade edilebilir. Burada, s şekil değişimi öncesi meridyen uzunluğunu (s_{ϕ_0}), $\{y\}$ durum vektörünü göstermektedir. $\{y\}$, esas değişkenleri içermektedir:

$$\{y\}^T = [r \quad \phi \quad \bar{H} \quad \bar{M}_{\phi} \quad \lambda_{\phi} \quad \eta \quad K_{\phi}] \quad (3.15)$$

ve bir nokta için (7x1) boyutundadır.

$[A_D]$: (3.5a,b,c,d) nolu diferansiyel denklemler, (3.14) şeklinde yazıldığında elde edilen lineer katsayılar matrisidir ve (4x7) boyutundadır. $[A_D]$ matrisinin Neo-Hookean malzemesi için (İlgili iki boyutlu şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu (4.1) denklemiyle sunulmaktadır.) açık ifadesi Ek 1’de verilmektedir.

$\{N_D\}$: (3.5a,b,c,d) nolu diferansiyel denklemlerin sağ taraflarında bulunan nonlineer cebirsel terimleri içeren vektör matristir ve (4x1) boyutundadır. Örnek olması



açısından $\{N_D\}$ vektörüne ait bağıntılar Neo-Hookean malzemesi için Ek 2'de verilmektedir.

$\{a_D\}$: (3.5a,b,c,d) nolu diferansiyel denklemlerdeki lineer cebirsel terimleri içeren vektördür ve (4x1) boyutundadır. $\{a_D\}$ matrisinin hakkındaki daha ayrıntılı açıklamalar Ek 1'de verilmektedir.

$\{y_D\}$ vektörü,

$$\{y_D\}^T = [r \ \phi \ \bar{H} \ \bar{M}_\phi] \quad (3.16)$$

şeklinde ifade edilmektedir. $\{y_D\}$ 'nin boyutu (4x1) olup, diferansiyel denklem sayısı kadardır.

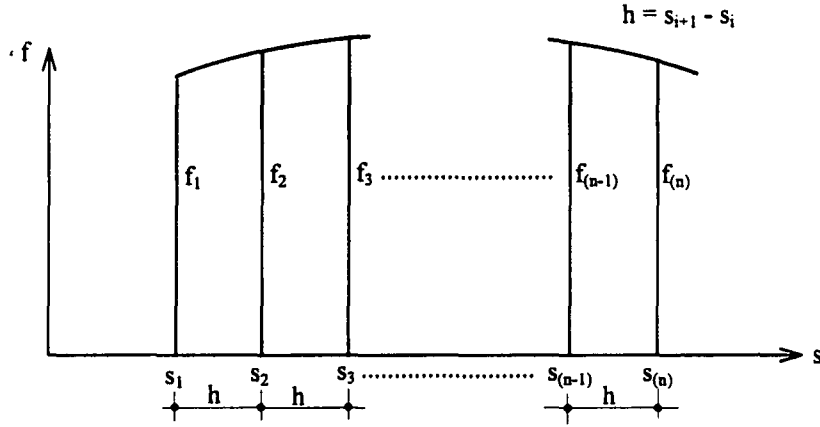
$$\{f\} = [A_D]\{y\} + \{N_D\} + \{a_D\} \quad (3.17)$$

tanımı ile (3.14) denklemi

$$\frac{d}{ds}\{y_D\} = \{f\} \quad (3.18)$$

şeklinde ifade edilebilmektedir. Fonksiyonun tanımlı olduğu toplam aralık, N adet alt aralığa bölünerek N+1 adet düğüm noktası elde edilmektedir (Şekil 3.1). Düğüm noktaları arasındaki uzaklıklar sonuçlarda istenen hassaslığa bağlı olarak belirlenmektedir. Noktaların eşit uzaklıkta alınması işlemleri kolaylaştırmakla birlikte, hassasiyeti azaltmaktadır (Parnell, 1984). Bu çalışmada, daha hassas sonuçlar sağlamak amacıyla hassasiyetin daha önemli olduğu bölgelerde düğüm noktaları arasındaki uzaklıklar daha küçük tutulmuştur.





Şekil 3.1 Toplam integrasyon aralığının N adet alt aralığa bölünmesi

Şekil 3.1'de h adım aralığını, n düğüm nokta sayısını (=N+1) ifade etmektedir. Bir $[s_i, s_{i+1}]$ alt aralığı için (3.18) denklemi

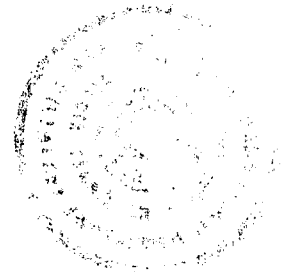
$$\int_{\{y_{D_i}\}}^{\{y_{D_{i+1}}\}} d\{y_D\} = \int_{s_i}^{s_{i+1}} \{f\} ds \quad (3.19)$$

şeklinde yazılabilir. İkinci dereceden ($m = 2$) sayısal integrasyon formüllerini (Parnell, 1984) kullanarak, (3.19) ifadesi yaklaşık olarak aşağıdaki gibi yazılabilir (Parnell, 1984):

$$\{y_{D_{i+1}}\} - \{y_{D_i}\} = \int_{s_i}^{s_{i+1}} \{f\} ds = \frac{1}{12} h (5\{f_i\} + 8\{f_{i+1}\} - \{f_{i+2}\}) \quad (i = 1, 2, \dots, n-2) \quad (3.20)$$

Son adım için,

$$\{y_{D_n}\} - \{y_{D_{n-1}}\} = \frac{1}{12} h (8\{f_{n-1}\} + 5\{f_n\} - \{f_{n-2}\}) \quad (3.21)$$



(3.20) denklemleri açık olarak yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} r_{i+1} \\ \phi_{i+1} \\ \overline{H}_{i+1} \\ \overline{M}_{\phi,i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_i \\ \phi_i \\ \overline{H}_i \\ \overline{M}_{\phi,i} \end{bmatrix} = \frac{h}{12} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{i,1} \\ f_{i,2} \\ f_{i,3} \\ f_{i,4} \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} f_{i+1,1} \\ f_{i+1,2} \\ f_{i+1,3} \\ f_{i+1,4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{i+2,1} \\ f_{i+2,2} \\ f_{i+2,3} \\ f_{i+2,4} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n-2). \quad (3.22)$$

Her alt aralıkta integral alınarak elde edilen denklemler biraraya getirilecek olursa,

$$[J]\{\tilde{y}_D\} = [L]\{\tilde{f}\} \quad (3.23)$$

ifadesi yazılabilir. Burada $[J]$ matrisi ve $\{\tilde{y}_D\}$ vektörü,

$$[J] = \begin{bmatrix} -[I] & [I] & [0] & \cdot & \cdot & [0] & [0] \\ [0] & -[I] & [I] & [0] & \cdot & \cdot & [0] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [0] & \cdot & \cdot & \cdot & -[I] & [I] & \cdot \\ [0] & [0] & \cdot & \cdot & \cdot & -[I] & [I] \end{bmatrix}_{4(n-1) \times 4n} \quad (3.24)$$

$$\{\tilde{y}_D\} = \begin{bmatrix} \{y_{D_1}\} \\ \{y_{D_2}\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \{y_{D_n}\} \end{bmatrix}_{(4n)} \quad (3.25)$$

şeklinde ifade edilebilir. $[L]$ integral matrisi, $m = 2$ için aşağıdaki gibi verilmektedir (Parnell, 1984):



$$[L] = \frac{h}{12} \begin{bmatrix} 5[I] & 8[I] & -[I] & [0] & [0] & [0] & \cdot & \cdot & \cdot & [0] \\ [0] & 5[I] & 8[I] & -[I] & [0] & [0] & \cdot & \cdot & \cdot & [0] \\ [0] & [0] & 5[I] & 8[I] & -[I] & [0] & \cdot & \cdot & \cdot & [0] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [0] & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [0] & [0] & -[I] & 8[I] & 5[I] \end{bmatrix}_{4(n-1) \times 4n} \quad (3.26)$$

Burada $[I]$ ve $[0]$ matrisleri, 4×4 boyutlarında sırasıyla birim ve sıfır matrisleridir. $\{\tilde{f}\}$ vektörü,

$$\{\tilde{f}\} = \begin{bmatrix} \{f_1\} \\ \{f_2\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \{f_n\} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada, (3.17) yardımıyla

$$\{f_k\} = [A_{D_k}] \{y_k\} + \{N_{D_k}\} + \{a_{D_k}\} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.28)$$

ve

$$\{\tilde{f}\} = [\tilde{A}_D] \{\tilde{y}\} + \{\tilde{N}_D\} + \{\tilde{a}_D\} \quad (3.29)$$

tanımları yapılabilir. $\{\tilde{y}\}$, $\{\tilde{A}_D\}$, $\{\tilde{a}_D\}$ ve $\{\tilde{N}_D\}$ vektörleri sırasıyla

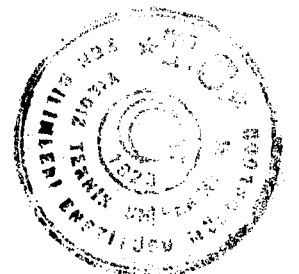


$$\{\tilde{y}\} = \begin{bmatrix} \{y_1\} \\ \{y_2\} \\ \vdots \\ \{y_n\} \end{bmatrix}_{(7n)}, \quad (3.30)$$

$$[\tilde{A}_D] = \begin{bmatrix} [A_{D_1}] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [A_{D_2}] & \dots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & \vdots & \dots & [A_{D_n}] \end{bmatrix}_{(4n \times 7n)}, \quad (3.31)$$

$$\{\tilde{a}_D\} = \begin{bmatrix} \{a_{D_1}\} \\ \{a_{D_2}\} \\ \vdots \\ \{a_{D_n}\} \end{bmatrix}_{(4n)}, \quad (3.32)$$

$$\{\tilde{N}_D\} = \begin{bmatrix} \{N_{D_1}\} \\ \{N_{D_2}\} \\ \vdots \\ \{N_{D_n}\} \end{bmatrix}_{(4n)} \quad (3.33)$$



şeklinde tanımlanabilirler. $\{N_{D_k}\}$ daha açık olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\{N_{D_k}\} = \begin{bmatrix} N_{D_k}^1 \\ N_{D_k}^2 \\ N_{D_k}^3 \\ N_{D_k}^4 \end{bmatrix}_{(4 \times 1)} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (3.34)$$

(3.34) bağıntısındaki $N_{D_k}^1, N_{D_k}^2, N_{D_k}^3$ ve $N_{D_k}^4$, (3.5a,b,c,d) no.'lu denklemlerin sağ taraflarında bulunan nonlinear terimlerin k'inci düğüm noktasındaki değerlerini göstermektedir. (3.23) denklemini açık olarak; (3.29) denklemini yardımıyla

$$[J]\{\bar{y}_D\} = [L] \left([\tilde{A}_D]\{\bar{y}\} + \{\tilde{N}_D\} + \{\tilde{a}_D\} \right) \quad (3.35)$$

veya

$$[J]\{\bar{y}_D\} = [\tilde{A}']\{\bar{y}\} + \{\tilde{b}\} + \{\tilde{c}\} \quad (3.36)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, $[\tilde{A}']$ matrisi ve $\{\tilde{b}\}, \{\tilde{c}\}$ vektörleri, sırasıyla

$$[\tilde{A}'] = [L][\tilde{A}_D] = \frac{h}{12} \begin{bmatrix} 5[A_{D_1}] & 8[A_{D_2}] & -[A_{D_3}] & [0] & \cdot & \cdot & \cdot & [0] \\ [0] & 5[A_{D_2}] & 8[A_{D_3}] & -[A_{D_4}] & [0] & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [0] & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -[A_{D_{n-2}}] & 8[A_{D_{n-1}}] & 5[A_{D_n}] \end{bmatrix}_{4(n-1) \times 7n} \quad (3.37)$$

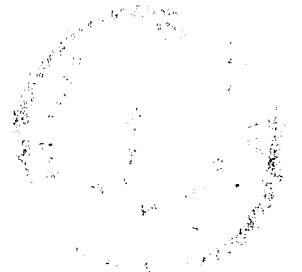
$$\begin{aligned}
\{\tilde{\mathbf{b}}\} &= [\mathbf{L}]\{\tilde{\mathbf{N}}_D\} = \\
&= \frac{h}{12} \begin{bmatrix} 5\{N_{D_1}\} + 8\{N_{D_2}\} - \{N_{D_3}\} \\ 5\{N_{D_2}\} + 8\{N_{D_3}\} - \{N_{D_4}\} \\ \vdots \\ -\{N_{D_{n-2}}\} + 8\{N_{D_{n-1}}\} + 5\{N_{D_n}\} \end{bmatrix}_{4(n-1)}, \quad (3.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\tilde{\mathbf{c}}\} &= [\mathbf{L}]\{\tilde{\mathbf{a}}_D\} = \\
&= \frac{h}{12} \begin{bmatrix} 5\{a_{D_1}\} + 8\{a_{D_2}\} - \{a_{D_3}\} \\ 5\{a_{D_2}\} + 8\{a_{D_3}\} - \{a_{D_4}\} \\ \vdots \\ -\{a_{D_{n-2}}\} + 8\{a_{D_{n-1}}\} + 5\{a_{D_n}\} \end{bmatrix}_{4(n-1)} \quad (3.39)
\end{aligned}$$

şekillerinde tanımlanabilirler. (3.36) ifadesinde, eşitliğin sol tarafında $\{\tilde{\mathbf{y}}_D\}$ vektörü yerine $\{\tilde{\mathbf{y}}\}$ durum vektörünün kullanılması istenirse,

$$[\mathbf{J}]\{\tilde{\mathbf{y}}_D\} = [\mathbf{J}']\{\tilde{\mathbf{y}}\} \quad (3.40)$$

olacak şekilde bir $[\mathbf{J}']$ matrisi tanımlanmalıdır:



$$[J'] = \begin{bmatrix} -[I] & [0'] & [I] & [0'] & [0] & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [0'] \\ \cdot & \cdot & -[I] & [0'] & [I] & [0'] & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [0'] \\ [0] & [0'] & [0] & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -[I] & [0'] & [I] & [0'] \end{bmatrix}_{4(n-1) \times 7n} \quad (3.41)$$

Burada, $[0']$ matrisi 4×3 boyutlarında bir sıfır matrisidir. (3.36) ve (3.40) denklemlerinden

$$[J']\{\tilde{y}\} = [\tilde{A}']\{\tilde{y}\} + \{\tilde{b}\} + \{\tilde{c}\} \quad (3.42)$$

ifadesi yazılabilir. Daha kısa bir ifade ile, (3.42) denklemini

$$[\tilde{B}]\{\tilde{y}\} = \{\tilde{b}\} \quad (3.43)$$

durumuna getirilebilir. Burada,

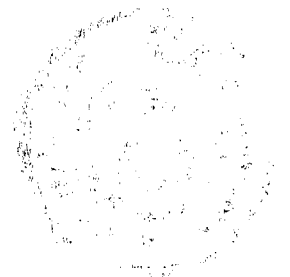
$$[\tilde{B}] = [J'] - [\tilde{A}'] \quad (3.44)$$

ve

$$\{\tilde{b}\} = \{\tilde{b}\} + \{\tilde{c}\} \quad (3.45)$$

şeklindedir ve $[\tilde{B}]$ matrisinin boyutları $4(n-1) \times 7n$ 'dir.

(3.5 e,f,g) cebirsel denklemleri



$$[A]^* \{y\} + \{N\}^* = \{0\} \quad (3.46)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,

$[A]^*$: (3.5 e,f,g) cebirsel denklemleri (3.46) matris denklemi şeklinde yazıldığında lineer katsayılar matrisidir ve (3x7) boyutundadır. İlgili matrisin açık ifadesi Ek 1'de sunulmaktadır.

$\{N\}^*$: (3.5 e,f,g) cebirsel denklemlerindeki doğrusal olmayan terimleri içeren vektör matrisidir ve (3x1) boyutundadır. Örnek olması açısından $\{N\}^*$ vektörüne ait bağıntılar, Neo-Hookean mazemesi için Ek 2'de sunulmaktadır.

Burada verilen boyut değerleri tek bir nokta içindir. Tüm noktalar için

$$[\tilde{A}]^* \{\tilde{y}\} = -\{\tilde{N}\}^* \quad (3.47)$$

yazılabilir. Burada,

$$[\tilde{A}]^* = \begin{bmatrix} [A_1]^* & [0] & \dots & [0] & [0] \\ \cdot & [A_2]^* & \dots & \cdot & [0] \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ [0] & \cdot & \dots & [A_{n-1}]^* & [0] \end{bmatrix}_{3(n-1) \times 7n} \quad (3.48)$$

şeklindedir. $\{\tilde{N}\}^*$ vektörü,



$\{\tilde{N}\}^*$ vektörü,

$$\{\tilde{N}\}^* = \begin{bmatrix} \{N_1\}^* \\ \{N_2\}^* \\ \vdots \\ \vdots \\ \{N_{n-1}\}^* \end{bmatrix}_{3(n-1)} \quad (3.49)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $\{N_k\}^*$,

$$\{N_k\}^* = \begin{bmatrix} N_k^{*1} \\ N_k^{*2} \\ N_k^{*3} \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} \quad (k=1,2,\dots,n-1) \quad (3.50)$$

şeklinde yazılabilir. (3.46) denklemini

$$\{\tilde{b}\}^* = -\{\tilde{N}\}^* \quad (3.51)$$

olmak üzere

$$[\tilde{A}]^* \{\tilde{y}\} = \{\tilde{b}\}^* \quad (3.52)$$

şeklinde yazılabilir.



3.4 Elde Edilmiş Olan Cebirsel Denklemlerin Sınır Koşullarıyla Birlikte Toplu Olarak İfade Edilmesi

Sınır koşulları

$$[B_{e_1}]\{y_1\} = \{e_1\} \quad (3.53)$$

$$[B_{e_n}]\{y_n\} = \{e_n\} \quad (3.54)$$

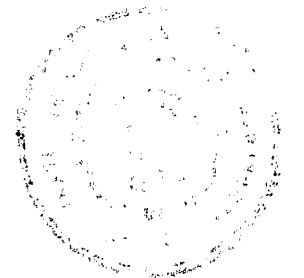
şeklinde ifade edilebilir. Burada (3.53) matris denklemi sınırlardan birindeki, (3.54) matris denklemi diğer sınırdaki sınır koşullarını temsil etmektedir. Sınır koşullarının nonlineer olması durumunda, $\{e_1\}$ ve $\{e_n\}$ vektörleri nonlineer terimleri de içermektedir. (3.53, 3.54) sınır koşulları, (3.43) denklemleri ve (3.52) denklemleri ile birlikte toplu olarak

$$[\tilde{C}]\{\tilde{y}\} = \{\tilde{d}\} \quad (3.55)$$

şeklinde yazılabilir. Burada;

$$[\tilde{C}] = \begin{bmatrix} [B_{e_1}] & [0] & \cdot & \cdot & [0] \\ & [\tilde{B}] & & & \\ & [\tilde{A}]^* & & & \\ [0] & \cdot & \cdot & [0] & [B_{e_n}] \end{bmatrix}_{(7n \times 7n)} \quad (3.56)$$

$$\{\tilde{d}\}^T = \left[\{e_1\} \quad \{\tilde{b}\} \quad \{\tilde{b}\}^* \quad \{e_n\} \right]_{(7n \times 1)} \quad (3.57)$$



(3.55) doğrusal olmayan cebirsel denklemleri Newton-Raphson Yöntemi ile çözümlenerek her noktadaki durum vektörü belirlenebilmektedir. Newton-Raphson Yöntemi ile ilgili ayrıntılar (14,39,59) no.'lu kaynaklardan bulunabilir.



4. SAYISAL UYGULAMALAR

Bu bölümde, dönele simetrik yüklemeler etkisinde sonlu şekil değiştirme ve sonlu dönme yapan bazı dönele kabuk problemlerinin sayısal çözümünden bahsedilmektedir. Sayısal çözüm için Visual Basic programlama dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. İlgili bilgisayar programına ait bilgiler Ek 3’de sunulmaktadır.

Problemlerde, aşağıda sunulduğu üzere Taber (1987) tarafından elde edilmiş olan Neo-Hookean malzemesine ait iki boyutlu şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu kullanılmıştır:

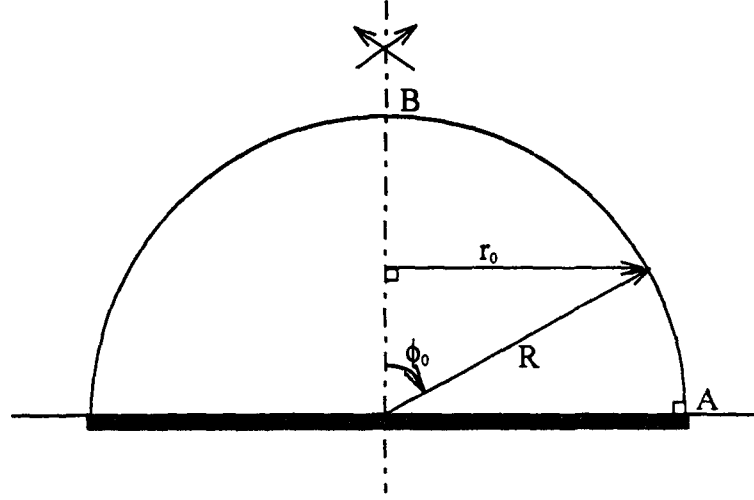
$$\begin{aligned} w = C t [& \lambda_{\phi}^2 + \lambda_{\theta}^2 + \lambda_{\phi}^{-2} \lambda_{\theta}^{-2} + \frac{\eta^2}{g} \lambda_{\phi}^{-2} + \frac{t^2}{12} \{ K_{\phi}^2 [q (\lambda_{\phi}^{-2} \lambda_{\theta}^{-2} - \lambda_{\phi}^{-6} \lambda_{\theta}^{-4}) + 4 \lambda_{\phi}^{-6} \lambda_{\theta}^{-4}] \\ & + K_{\phi} K_{\theta} [\lambda_{\phi}^{-5} \lambda_{\theta}^{-5} - (1-q) (\lambda_{\phi}^{-1} \lambda_{\theta}^{-3} + \lambda_{\phi}^{-3} \lambda_{\theta}^{-1} - 2 \lambda_{\phi}^{-5} \lambda_{\theta}^{-5})] + \\ & + K_{\theta}^2 [q (\lambda_{\phi}^{-2} \lambda_{\theta}^{-2} - \lambda_{\phi}^{-4} \lambda_{\theta}^{-6}) + 4 \lambda_{\phi}^{-4} \lambda_{\theta}^{-6}] \}] \end{aligned} \quad (4.1)$$

Burada C malzeme sabitidir. $q = 1$ Bölüm 1’de bahsedilen *Teori I* e, $q = 0$ ise *Teori II* ye karşı gelmektedir. g , enine kayma şekil değiştirmesi düzeltme faktörüdür. Lineer kabuk teorisinde, enine kayma gerilmesi dağılışının kabuk kalınlığı boyunca parabolik olmasından dolayı g faktörü 1,2 olarak alınmaktadır (Reissner, 1952). Taber (1987)’de $g = 1,2$ varsayımı yapılmıştır. Bu faktörün sonlu şekil değiştirmeler halindeki daha doğru değerlerinin elde edilmesi problemi sonraki çalışmalara bırakılmıştır.

Ardışık yaklaşımlarda; esas değişkenlerin ilk değerlerinin seçiminde sınır koşullarının sağlanmasına dikkat edilmiştir ve lineer teoriye karşı gelen değerler göz önüne alınmıştır.



4.1. Düzgün Yayılan İç Basınç Etkimesi Halinde Küresel Kabuk



Şekil 4.1 Düzgün Yayılan İç Basınç Etkimesi Halinde Küresel Kabuk

Şekil (4.1)'de R yarıçaplı, küresel bir kabuğun geometrik özellikleri verilmektedir. Bu geometride; şekil değişimi öncesindeki meridyenel açı ϕ_0 , 0 ile $\pi/2$ radyan arasında değişmektedir. Yine geometriden, (3.5b) de kullanmak üzere

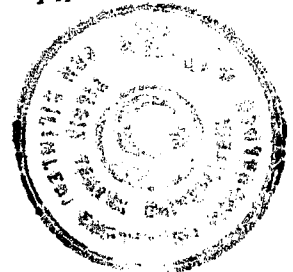
$$\phi_0' = \frac{1}{R} = \text{sabit} \quad , \quad (4.2)$$

yazılabilir. Şekil değişimi öncesinde, radyal koordinat r_0

$$r_0 = R \sin \phi_0 \quad (4.3)$$

bağıntısı ile tanımlanabilmektedir. Küresel kabuk, $\phi_0 = \pi/2$ sınırında ankastre olarak mesnetlenmektedir. Problemden düzgün yayılı iç basınç p etkisi dikkate alınmaktadır.

Düzgün yayılı iç basınç p özel halinde, (3.5c) bağıntısında kullanmak üzere p_H



$$p_H = p \lambda_\phi \lambda_\theta \sin(\phi - \gamma) \quad (4.4)$$

olarak ifade edilmektedir (Taber 1987). (2.10) denkleminde

$$p_V = -p \lambda_\phi \lambda_\theta \cos(\phi - \gamma) \quad (4.5)$$

konularak integrasyon yapılırsa,

$$V = \frac{pr^2}{2r_0} \quad (4.6)$$

elde edilebilir. (4.6) denklemi (3.5d,e,g) bağıntılarında ilgili problemin çözümü için kullanılmıştır.

Sınır koşulları aşağıdaki şekilde kullanılmıştır:

$$\begin{aligned} r|_A = r_0|_A, \quad \phi|_A = \phi_0|_A = \frac{\pi}{2}, \quad r|_B = 0, \quad \overline{M}_\phi|_B = 0 \\ \eta|_B = 0, \quad \phi|_B = 0, \quad \overline{H}|_B = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Burada, $|_A$ sembolü ankastre mesnetteki sınır koşulları için ($\phi_0 = \pi/2$), $|_B$ sembolü ise tepe noktasındaki ($\phi_0 = 0$) sınır koşulları için kullanılmaktadır.

Problem önce boyutlu olarak çözülmüş ve daha sonra sonuçlar boyutsuz olarak sunulmuştur. Boyutsuzlaştırmada,



$$\beta = \frac{R}{t} \quad (4.8)$$

$$\alpha = \frac{p}{C} \beta \quad (4.9)$$

biçiminde ifade edilen parametreler kullanılmıştır. Tepe noktasında ϕ_0 ve r_0 'ın sıfıra eşit olmasından dolayı ilgili noktada tekillikler ($1/0 = \infty$) oluşmaktadır. İlgili tekilliklerden kurtulmak için tepe noktası ve civarında

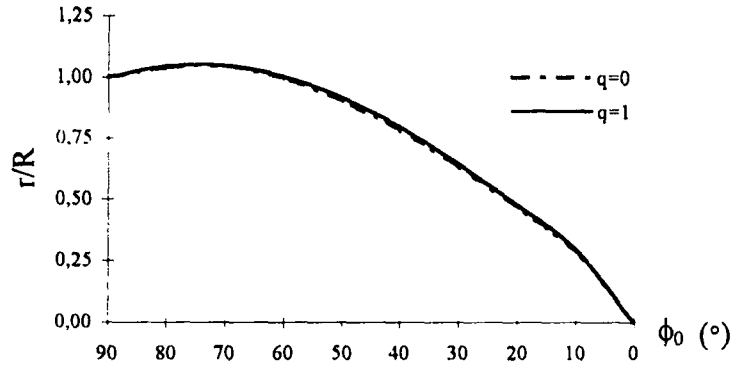
$$\lambda_\theta \approx \lambda_\phi \quad (4.10)$$

$$K_\theta \approx K_\phi \quad (4.11)$$

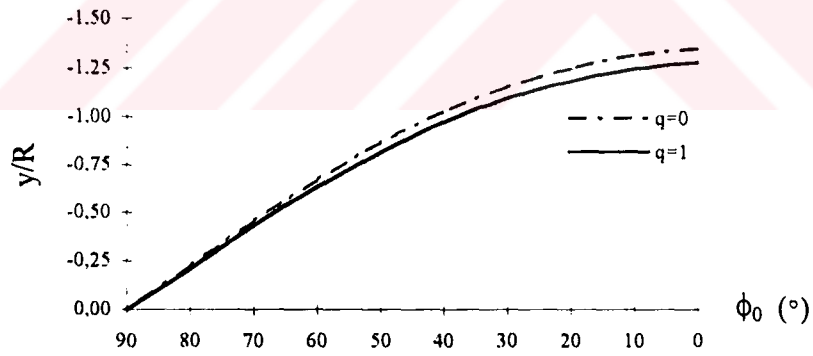
$$N_\theta \approx N_\phi \quad (4.12)$$

yaklaşımlarında bulunulmuştur. Problemden yakınsama 13 ardışık yaklaşım ile sağlanmıştır.

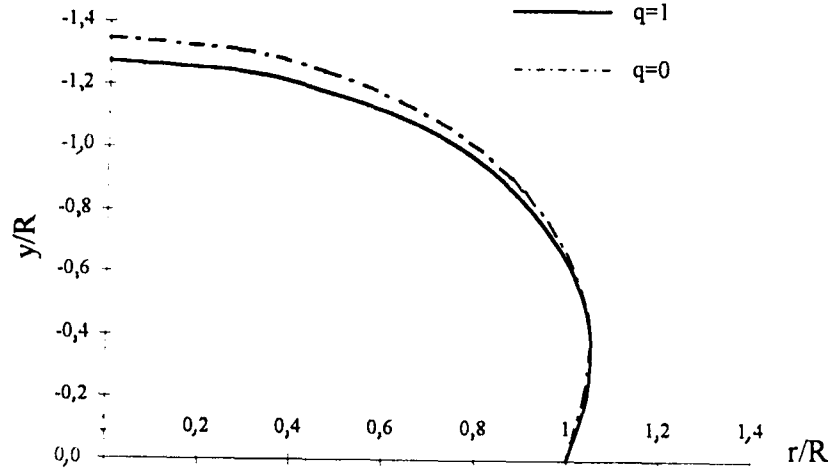
Düzgün yayılı iç basınç etkisindeki küresel kabuk probleminde Teori I ve Teori II'ye karşı gelen sonuçlar ve Taber (1987)'nin büyük şekil değiştirme ve dönmeleri, enine kayma şekil değiştirmeleri göz önüne aldığı asimtotik çözümüne karşı gelen sonuçların karşılaştırılması Şekil (4.2-4.22)'deki grafiklerde sunulmaktadır.



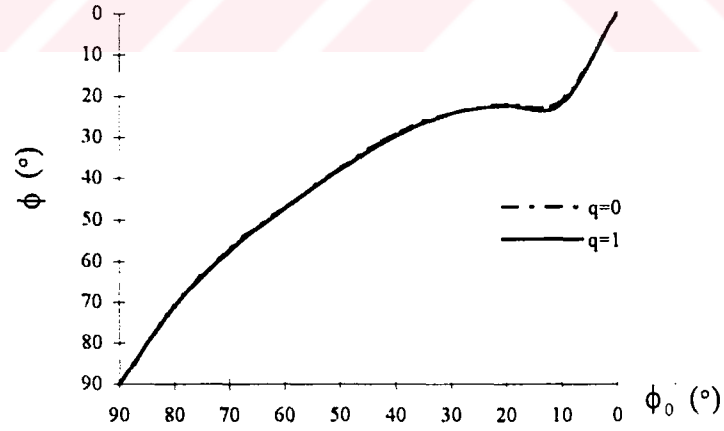
Şekil 4.2 Şekil Değişimi Sonrasındaki Radyal Koordinat r 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Aç ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20$, $\alpha = 2$)



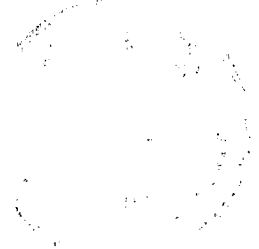
Şekil 4.3 Şekil Değişimi Sonrasındaki Düşey Koordinat y 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Aç ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20$, $\alpha = 2$)

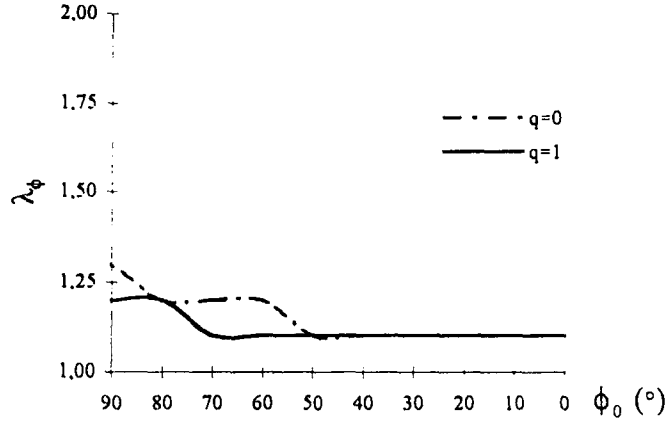


Şekil 4.4 Şekil Değişimi Sonrasındaki Radyal Koordinat r 'nin
Düsey Koordinat y 'e Göre Değişimi
(Şekil Değiştirmiş Küresel Kabuk) ($\beta = 20$, $\alpha = 2$)

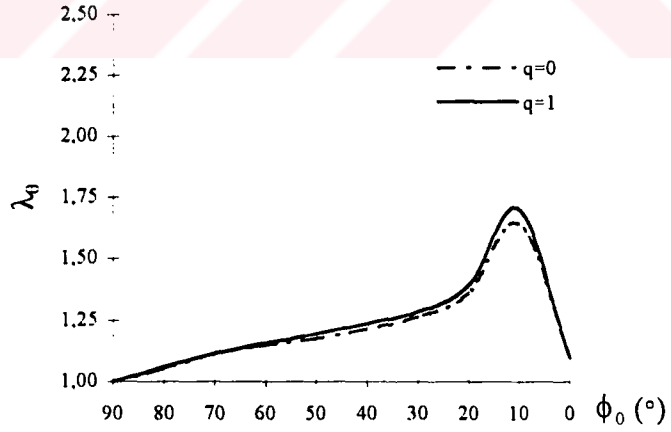


Şekil 4.5 Şekil Değişimi Sonrasındaki Meridyenel Açılı ϕ 'nin
Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi
($\beta = 20$, $\alpha = 2$)



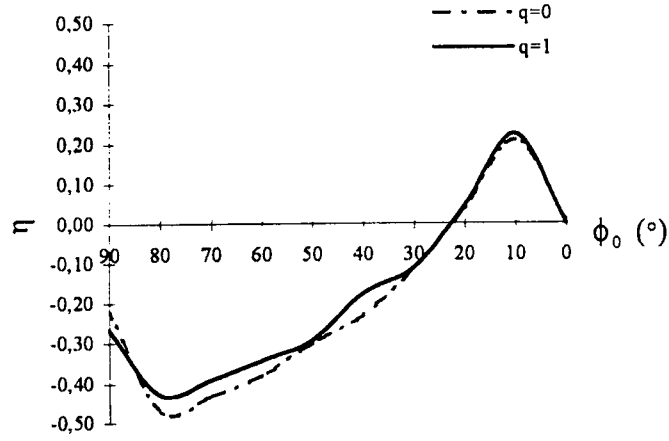


Şekil 4.6 Meridyenel Germe λ_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açısı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20$, $\alpha = 2$)

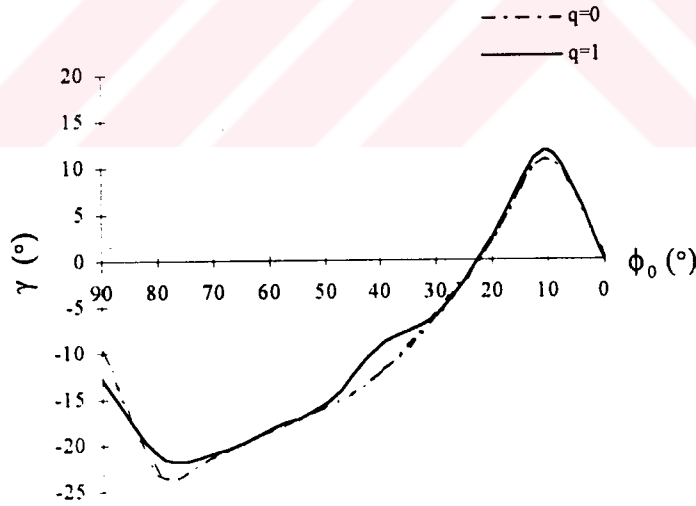


Şekil 4.7 Paralel Çember Germesi λ_θ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açısı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20$, $\alpha = 2$)

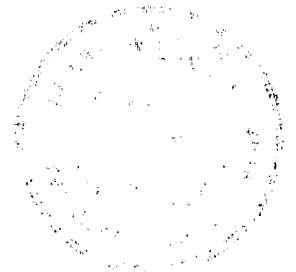


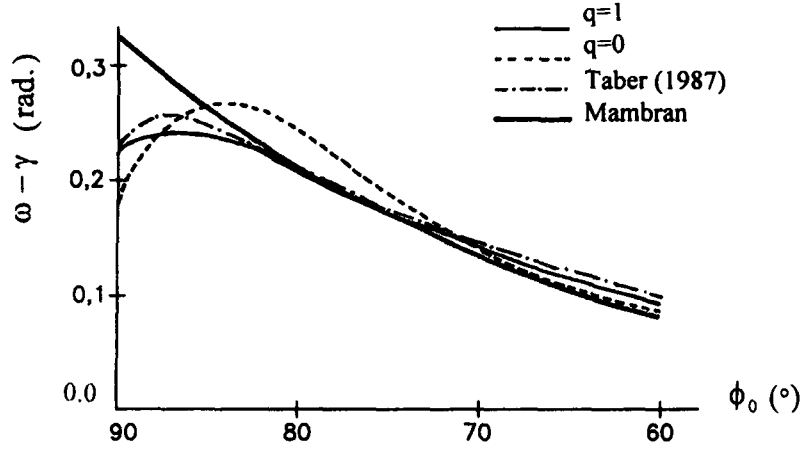


Şekil 4.8 Enine Kayma Şekil Değişirmesi η 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20$, $\alpha = 2$)

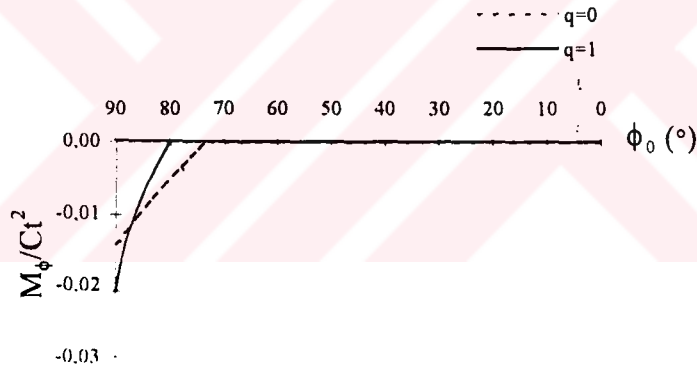


Şekil 4.9 Enine Kayma Açısı γ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20$, $\alpha = 2$)



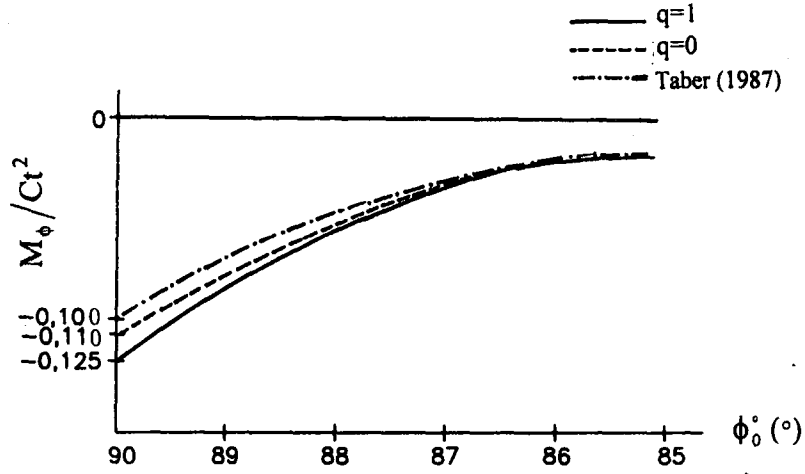


Şekil 4.10 $(\omega - \gamma)$ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20$, $\alpha = 2$)

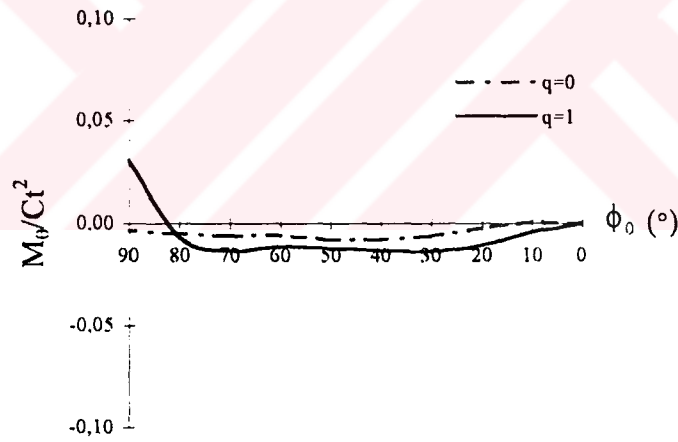


Şekil 4.11 Meridyenel Eğilme Momenti M_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20$, $\alpha = 2$)

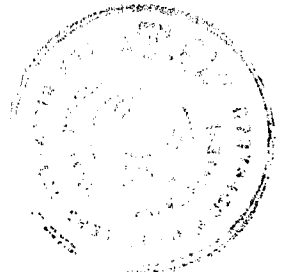


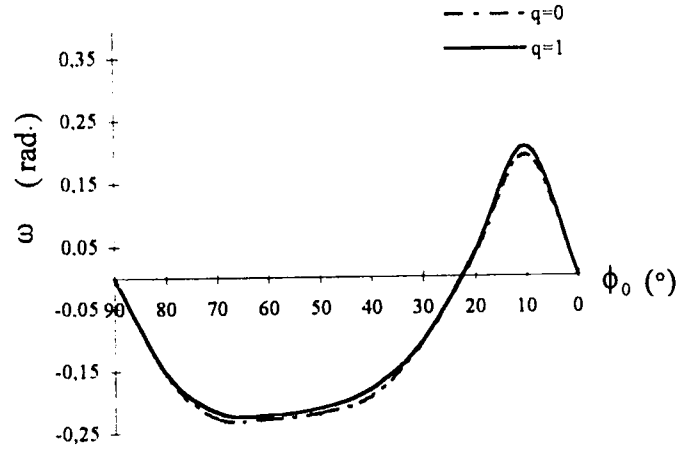


Şekil 4.12 Meridyenel Eğilme Momenti M_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre $\phi_0 = 85^\circ - 95^\circ$ Arasında Değişimi ($\beta = 50, \alpha = 2$)

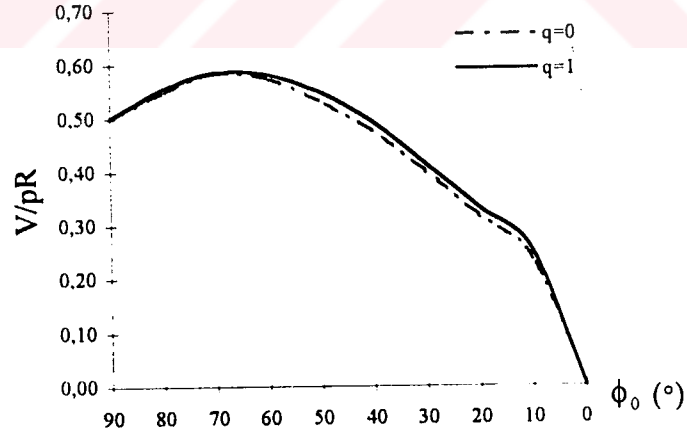


Şekil 4.13 Paralel Çember Eğilme Momenti M_θ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20, \alpha = 2$)

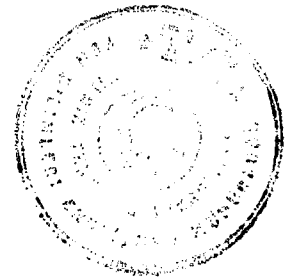


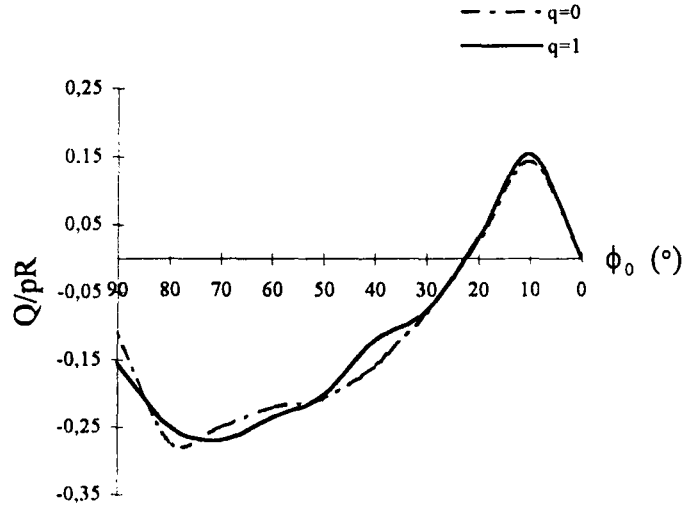


Şekil 4.14 Dönme Açısı ω 'nın Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20$, $\alpha = 2$)

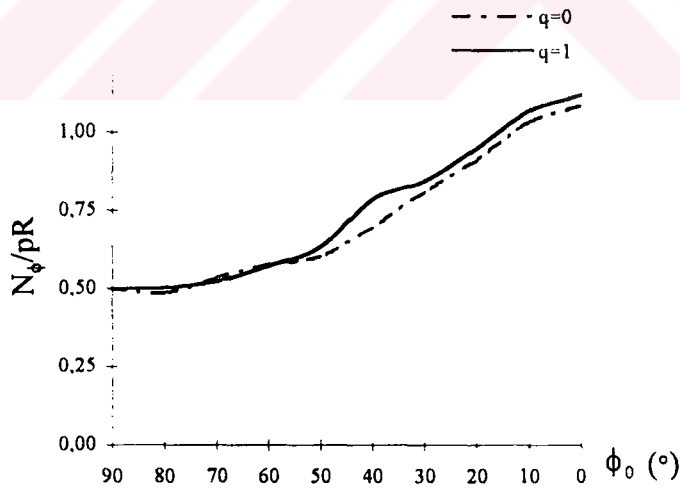


Şekil 4.15 Düşey Kesit Kuvveti V 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20$, $\alpha = 2$)



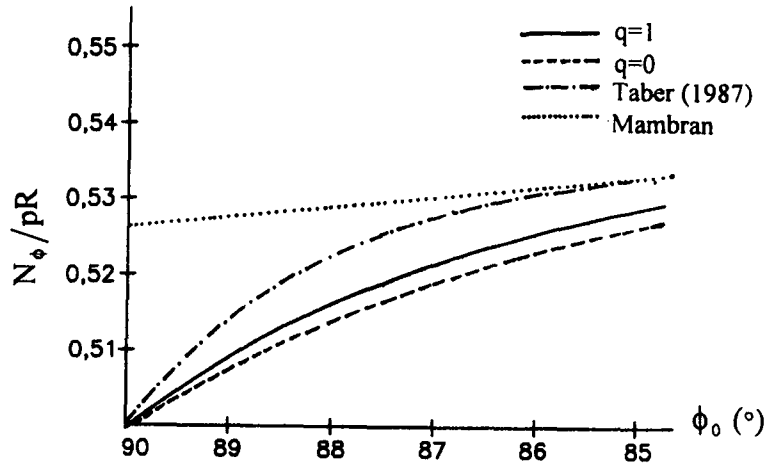


Şekil 4.16 Enine Kesme Kuvvetlerinin Q 'nun Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20$, $\alpha = 2$)

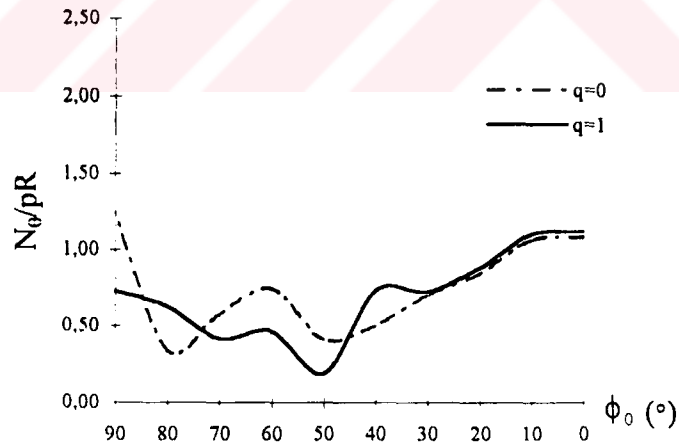


Şekil 4.17 Meridyenel Normal Kesit Kuvveti N_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20$, $\alpha = 2$)

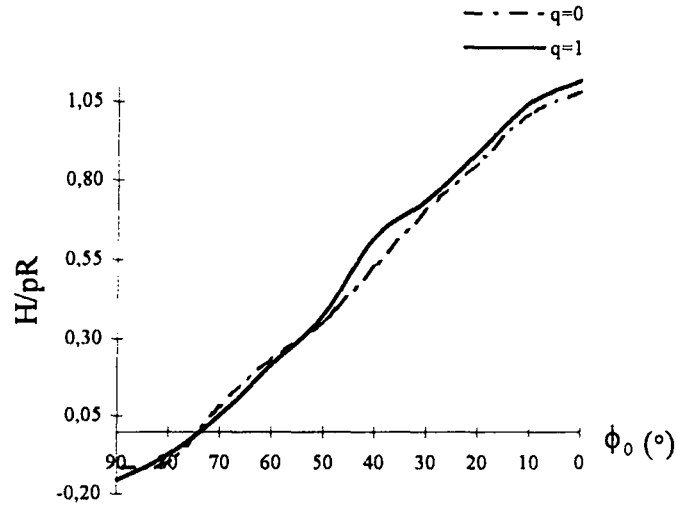




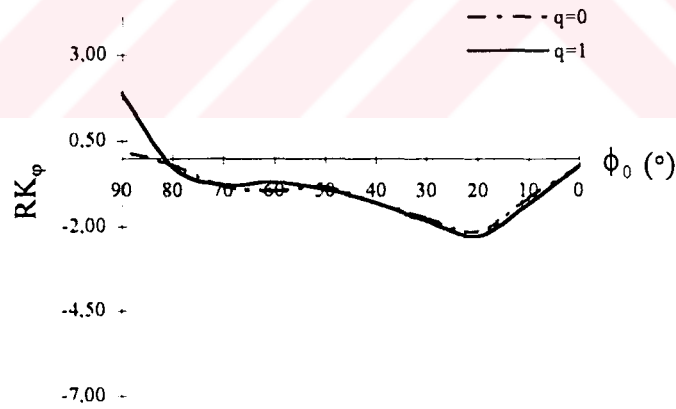
Şekil 4.18 Ankastre Mesnet Civarında Meridyenel Normal Kesit Kuvveti N_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Aç ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20$, $\alpha = 2$)



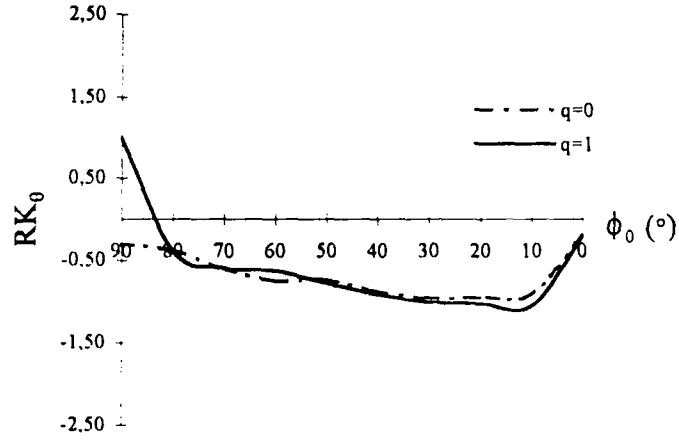
Şekil 4.19 Paralel Çember Teğeti Doğrultusundaki Normal Kesit Kuvveti N_θ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Aç ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20$, $\alpha = 2$)



Şekil 4.20 Yatay Kesit Kuvveti H 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20$, $\alpha = 2$)



Şekil 4.21 Meridyenel Eğrilik Değişim Ölçüsü K_{ϕ} 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20$, $\alpha = 2$)

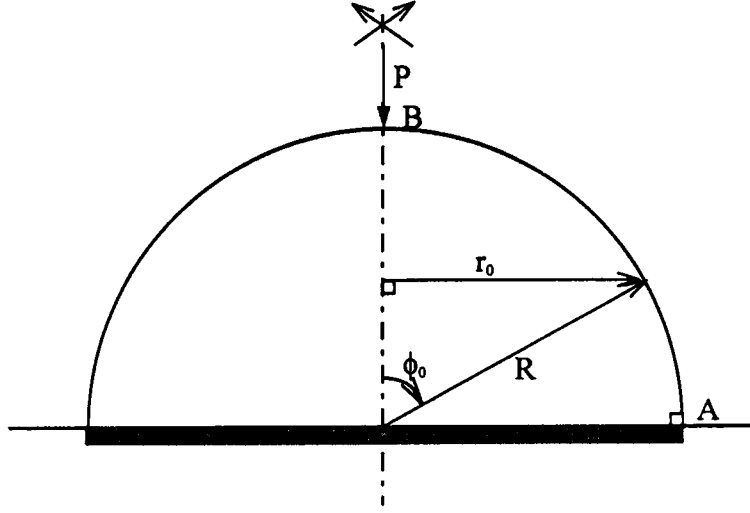


Şekil 4.22 Enine Eğrilik Değişim Ölçüsü K_0 'nın Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($\beta = 20$, $\alpha = 2$)

Teori I ve Teori II'nin uygulanması ile elde edilen sonuçlar birbirine çok yakın olmakla birlikte bazı farklılıklar gözlenmiştir. Şekil 4.3'te şekil değişimi sonrasındaki düşey koordinat y 'nin ϕ_0 'a göre değişimini gösteren grafikte Teori II'ye karşı gelen değerlerin Teori I'e karşı gelen değerlerden mutlak değerce daha büyük olduğu görülmüştür. Benzer şekilde, Şekil 4.4'te sunulan şekil değişimi sonrasındaki küresel kabuğun konumuna bakıldığında Teori II'ye karşı gelen yatay ve düşey yer değiştirmelerin Teori I'e karşı gelen yatay ve düşey yer değiştirmelere göre daha büyük oldukları görülmüştür. Şekil 4.21 ve 4.22'de eğrilik değişim ölçüleri K_ϕ ve K_θ 'ya bakıldığında ankastre mesnet civarında Teori I'e karşı gelen değerlerin Teori II'ye karşı gelen değerlerden daha büyük oldukları görülmüştür.

Düzgün yayılı iç basınç etkisindeki küresel kabuk problemine ait bazı sonuçlar, Taber (1987)'nin büyük şekil değiştirme ve dönmeleri, enine kayma şekil değiştirmeleri göz önüne aldığı asimtotik çözümü ile karşılaştırılmıştır. Şekil 4.10'da $\phi_0 = 90^\circ$ ve $\phi_0 = 70^\circ$ arasında $\omega - \gamma$ değerlerinin karşılaştırılması yapıldığında Teori I'e karşı gelen değerlerin Teori II'ye karşı gelen değerlere göre Taber (1987)'ye daha yakın oldukları görülmüştür. Yine Şekil 4.10'da $\phi_0 = 70^\circ$ ile $\phi_0 = 60^\circ$ arasında Taber (1987), Teori I, Teori II ve membran çözüme karşı gelen değerlerin yaklaşık olarak çakıştığı görülmüştür. Şekil 4.12'de; $\beta = 50$, $\alpha = 2$ için eğilme momenti M_ϕ için ankastre mesnet civarında Teori II'ye karşı gelen değerlerin Teori I'e karşı gelen değerlere göre Taber (1987)'ye daha yakın olduğu görülmüştür. Şekil 4.18'e bakıldığında; Teori I ve Teori II'ye karşı gelen normal kesit kuvveti N_ϕ değerlerinin, ankastre mesnette Taber (1987) ile yaklaşık olarak aynı değerden başladığı mesnetten uzaklaştıkça Taber (1987)'den farklı değerler alarak membran çözüme yaklaştıkları görülmüştür.

4.2. Tekil Yük Etkisi Altındaki Küresel Kabuk



Şekil 4.23 Tekil Yük Etkisindeki Küresel Kabuk

Bu bölümde Şekil 4.1'de gösterilen R yarıçaplı $\phi_0 = 0$ noktasında bir tekil yük P etkisindeki küresel bir kabuk incelenmiştir. Küresel kabuk $\phi_0 = \pi/2$ sınırında ankastre olarak mesnetlenmiştir. Geometrinin önceki problemde söz konusu edilen problemle aynı olmasından dolayı, (4.2) ve (4.3) bağıntıları bu problem için de geçerli olmaktadır. Küresel kabuğun tepe noktasına etkiyen P tekil yükünden dolayı, (3.5c) bağıntısında p_H ifadesi yerine

$$p_H = 0 \quad (4.13)$$

kullanılmıştır. Düşey kesit kuvveti V , (3.5d,e,g) bağıntılarında

$$V = -\frac{P}{2\pi r_0} \quad (4.14)$$

denklemleri ile tanımlanabilmektedir.

Sınır koşulları, Bölüm 4.1'de sunulan problemin sınır koşulları ((4.7) denklemleri) ile aynı olmaktadır. Taber (1982)'de verilen deneysel sonuçlarla karşılaştırabilmek için ilgili kaynakta verilen

$$R=26,3 \text{ mm}, \quad t=4,4\text{mm}, \quad E=4,0 \text{ N/mm}^2 \quad \nu = 0,5 \quad (4.15)$$

değerleri kullanılmıştır. Burada; E kullanılan malzemenin elastisite modülünü, ν kullanılan malzemenin Poisson oranını göstermektedir. Problemden tekil kuvvet (Şekil 4.42 dışında) $P=45,61\text{N}$ olarak alınmıştır. Sonuçların bazıları, Ranjan ve Steele (1977)'de sunulan yaklaşık analitik çözüm ve Parnell (1984) tarafından sunulan küçük şekil değiştirme ve orta büyüklükteki dönmeleri kapsayan enine kayma şekil değiştirmelerinin ihmal edildiği çalışması ile karşılaştırılmıştır. Taber (1982)'de kullanılan malzemenin E elastisite modülü yerine alınacak eşdeğer C malzeme sabitinin değeri aşağıdaki şekilde belirlenmiştir.

Lineer kabuk teorisinde; ε_ϕ ve ε_θ sırasıyla, orta yüzeydeki meridyen ve paralel çemberin birim uzama oranlarını gösterdiğine göre, meridyenel normal kuvvet N_ϕ

$$N_\phi = \frac{Et}{1-\nu^2} (\varepsilon_\phi + \nu\varepsilon_\theta) \quad (4.16)$$

bağıntısı ile ifade edilebilmektedir (Parnell, 1984). (4.16) bağıntısının ε_ϕ 'ye göre kısmi türevi,

$$\frac{\partial N_\phi}{\partial \varepsilon_\phi} = \frac{Et}{1-\nu^2} \quad (4.17)$$

bağıntısını vermektedir. Bu çalışmada sunulan sonlu şekil değiştirme ve sonlu dönme yapan kabuk teorisinde Bölüm 2’de (2.18) bağıntısı ile verilen N_ϕ değeri Neo-Hookean malzemesi için ((4.1) denklemi kullanılarak)

$$N_\phi = 2\lambda_\phi Ct + \text{Nonlinear terimler} \quad (4.18)$$

şeklinde ifade edilebilmektedir. (4.18) ifadesinin lineer terimlerinin λ_ϕ ’ye göre kısmi türevinden

$$\frac{\partial N_\phi}{\partial \lambda_\phi} = 2Ct \quad (4.19)$$

elde edilebilmektedir. λ_ϕ ve ε_ϕ ’nin tanımlarından

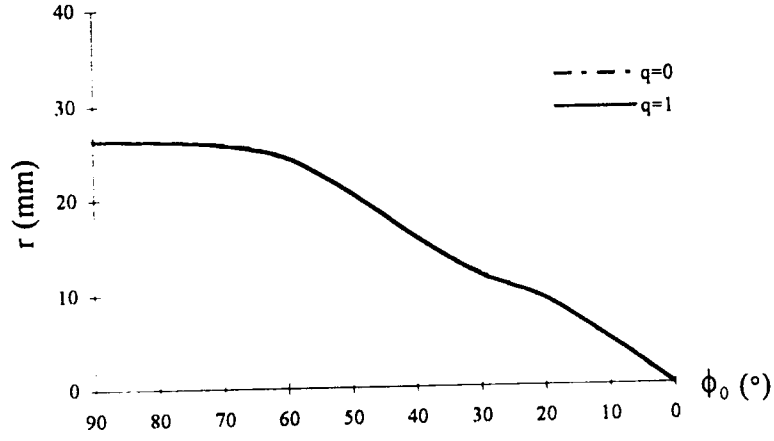
$$\varepsilon_\phi = \lambda_\phi - 1 \quad (4.20)$$

denklemleri elde edilebilir. (4.17), (4.19) ve (4.20) denklemlerinden

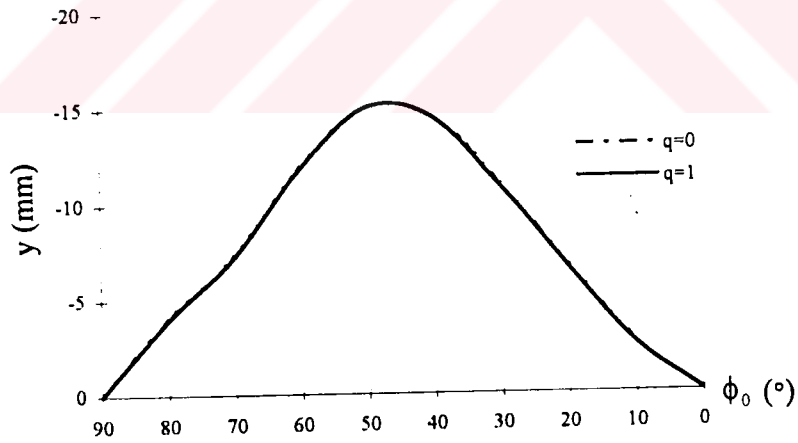
$$2Ct = \frac{Et}{1 - \nu^2} \quad (4.21)$$

elde edilebilir. Taber (1982)’de kullanılan deney malzemesine ait veriler ((4.15) değerleri) kullanıldığında Neo-Hookean malzemesine karşı gelen C malzeme sabiti değeri $2,667 \text{ N/mm}^2$ olmaktadır.

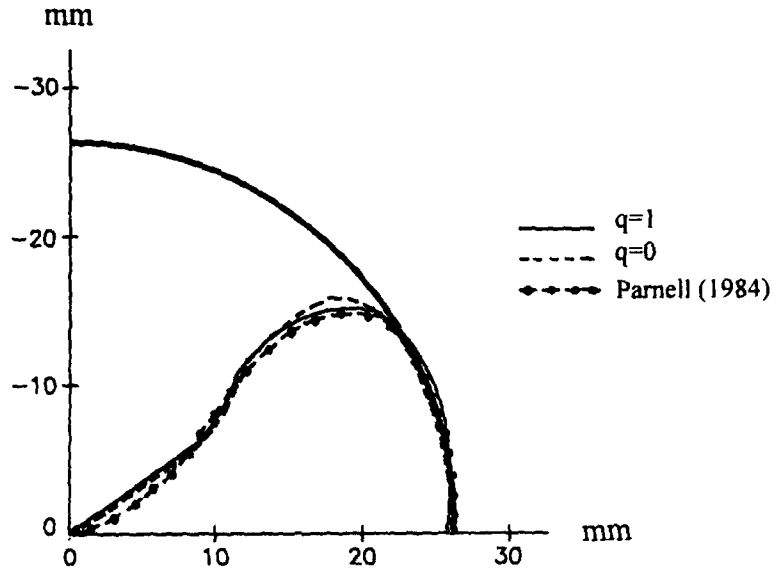
ϕ_0 ve r_0 ’in sifıra yaklaşmasından dolayı tepe noktası ve civarında oluşan tekillik Bölüm 4.1’de belirtildiği gibi (4.10), (4.11) ve (4.12) bağıntıları ile giderilmiştir. Problemden yakınsama 9 ardışık yaklaşım ile sağlanmıştır. Tekil yük etkimesi durumunda küresel kabuk problemine ait Teori I ve Teori II’ye karşılık gelen sonuçlar ve de daha önce sözü edilen çalışmalar ile karşılaştırmalar Şekil 4.24’ten Şekil 4.42’ye kadar sunulmaktadır.



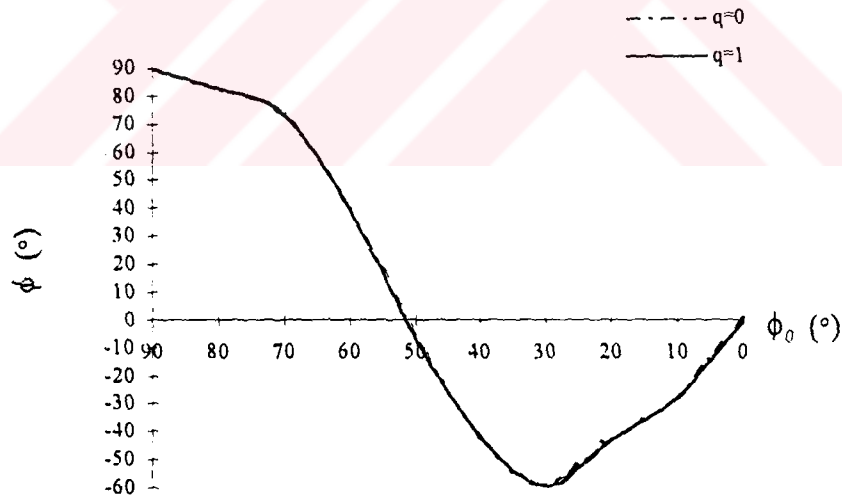
Şekil 4.24 Şekil Değişimi Sonrasında Radyal Koordinat r 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($P=45,61$ N)



Şekil 4.25 Şekil Değişimi Sonrasında Düşey Koordinat y 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($P=45,61$ N)

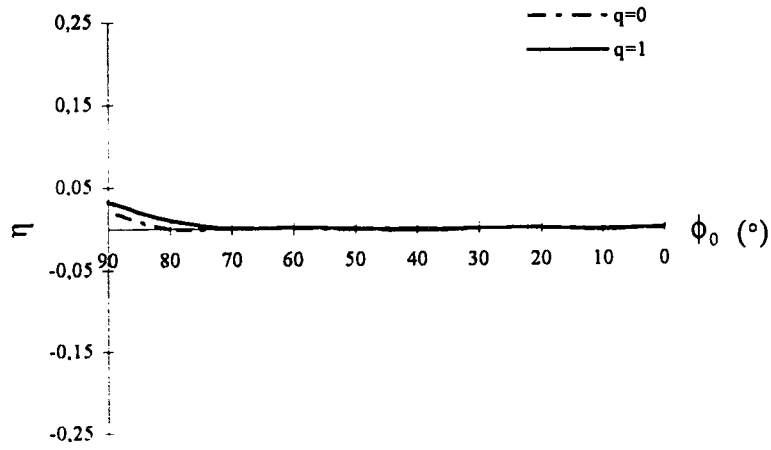


Şekil 4.26 Şekil Değişimi Öncesinde ve Sonrasında
Küresel Kabuğun Konumu ($P=45,61$ N)

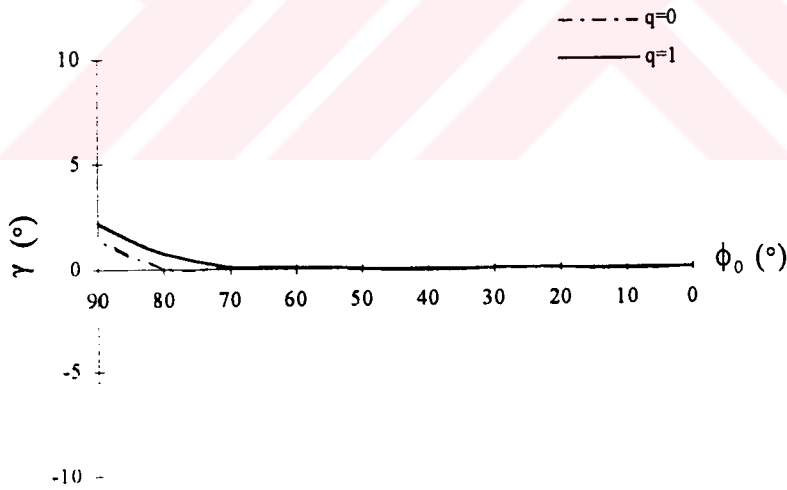


Şekil 4.27 Şekil Değişimi Sonrasındaki Meridyenel Açılı ϕ 'nin Şekil Değişimi
Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($P=45,61$ N)



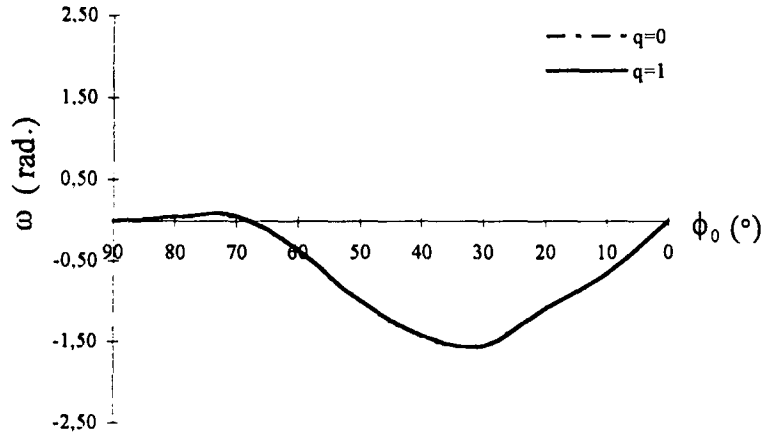


Şekil 4.28 Enine Kayma Şekil Değişirmesi η 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açığı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($P=45,61$ N)

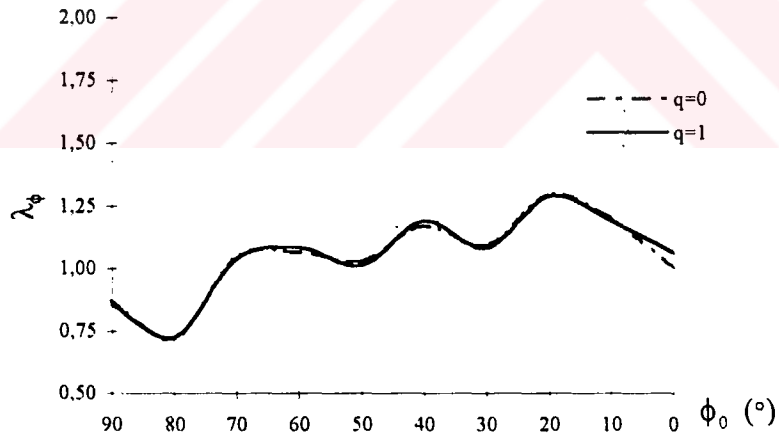


Şekil 4.29 Enine Kayma Açısı γ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açığı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($P=45,61$ N)



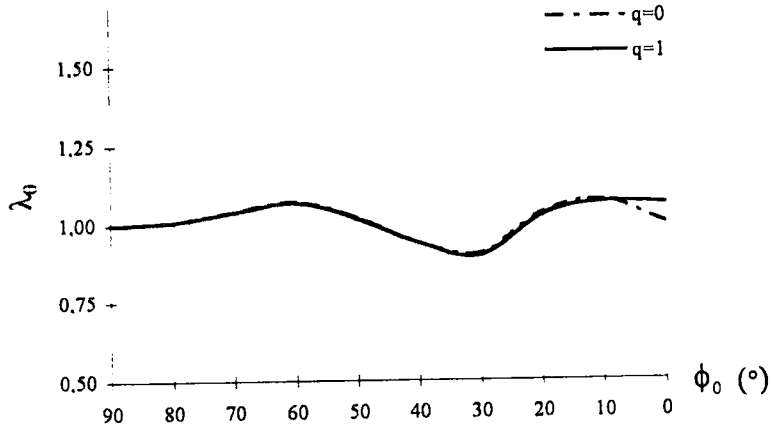


Şekil 4.30 Şekil Değişimi Sonrasında Dönme Açısı ω 'nın Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi (P=45,61 N)

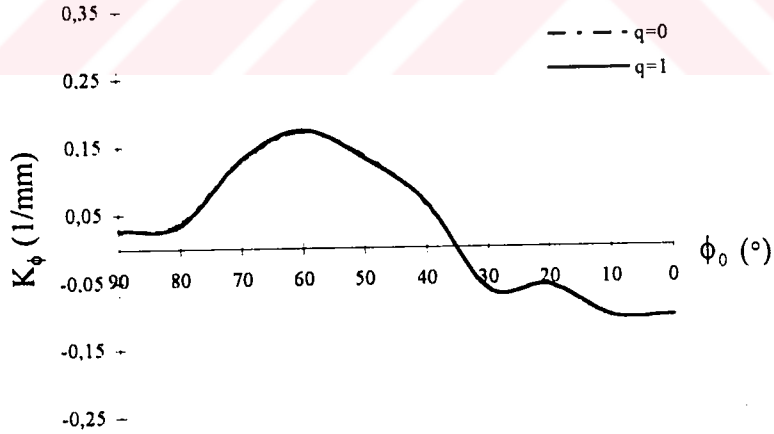


Şekil 4.31 Meridyenel Germe λ_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi (P=45,61 N)



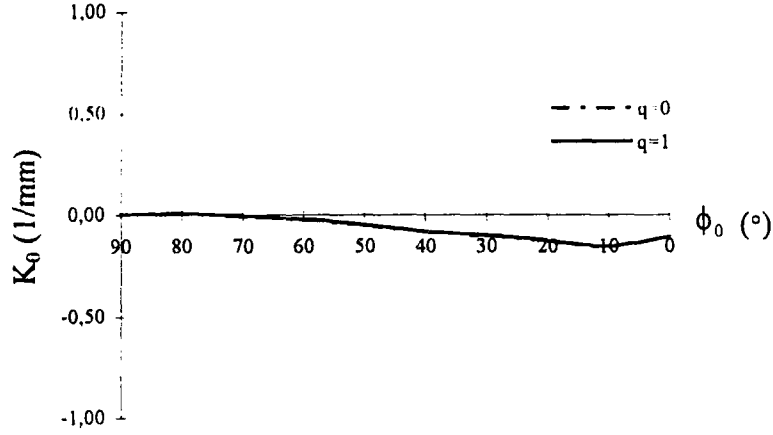


Şekil 4.32 Paralel Çember Germesi λ_0 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($P=45,61$ N)

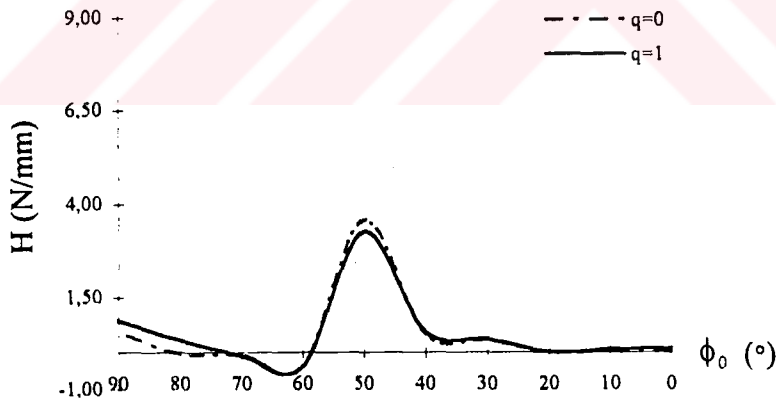


Şekil 4.33 Meridyenel Eğrilik Değişim Ölçüsü K_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($P=45,61$ N)

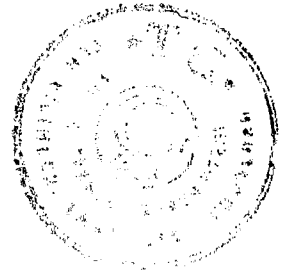


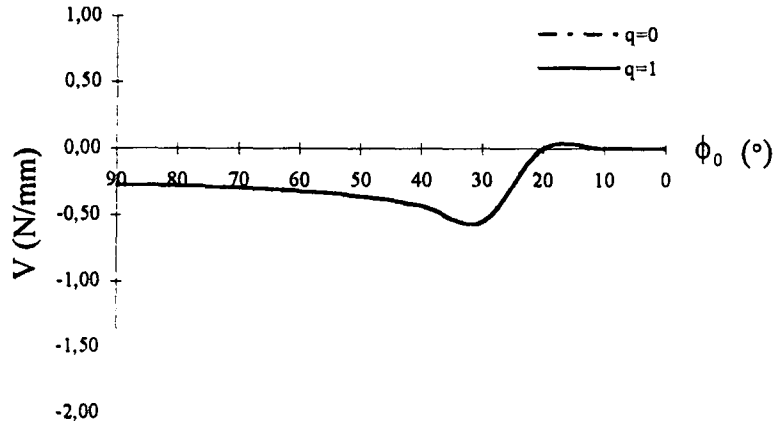


Şekil 4.34 Enine Eğrilik Değişim Ölçüsü K_θ 'nın Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($P=45,61$ N)

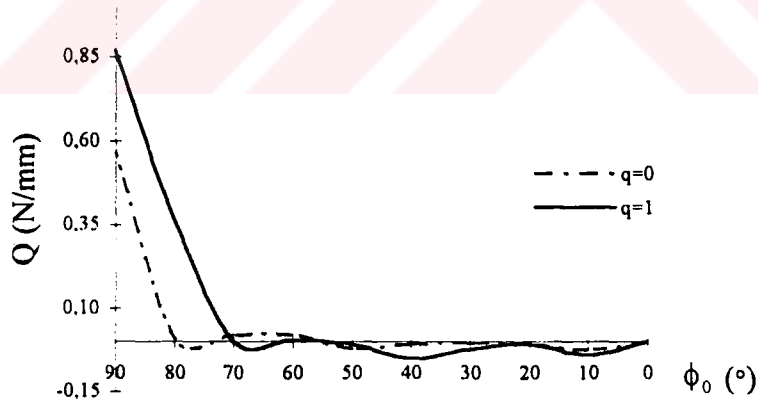


Şekil 4.35 Yatay Kesit Kuvveti H 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($P=45,61$ N)



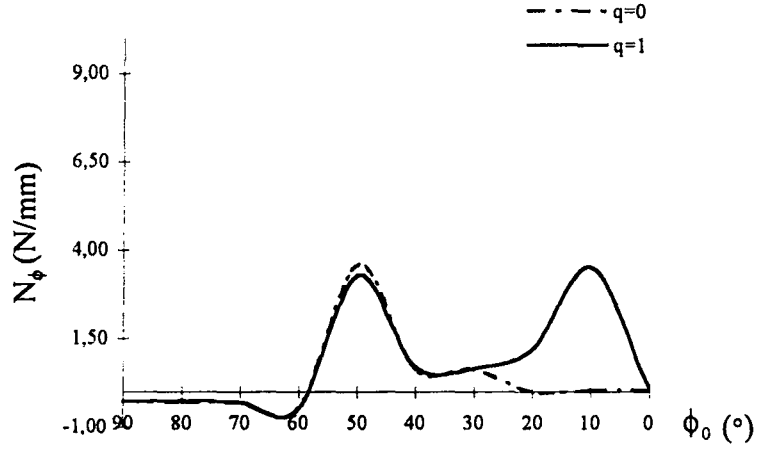


Şekil 4.36 Düşey Kesit Kuvveti V 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($P=45,61$ N)

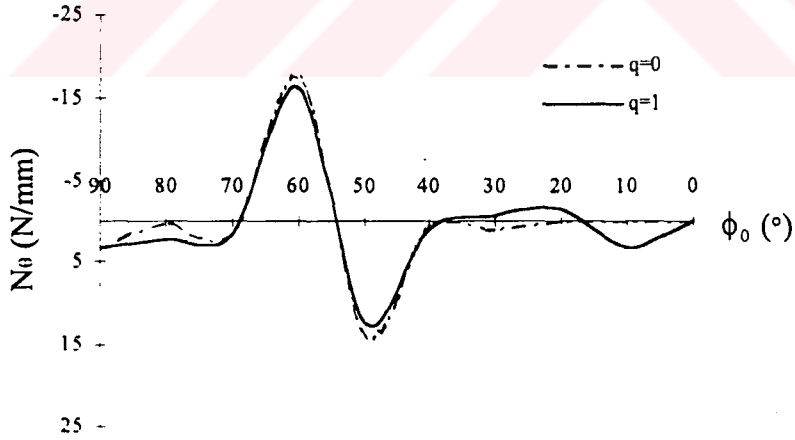


Şekil 4.37 Enine Kesme Kuvveti Q 'nun Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($P=45,61$ N)

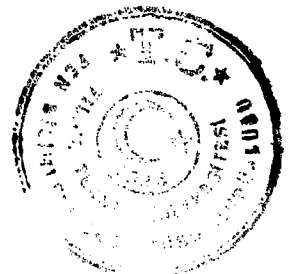


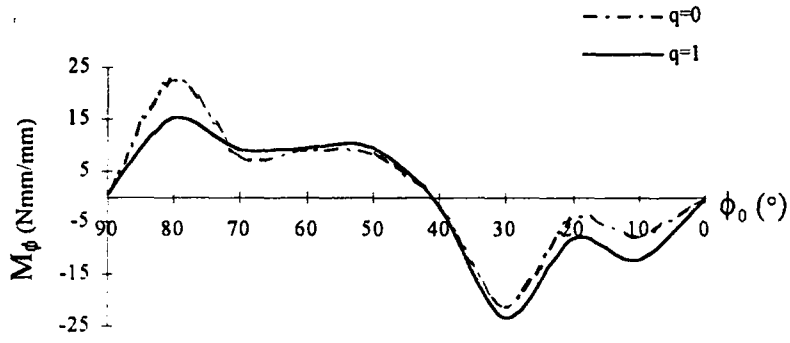


Şekil 4.38 Meridyenel Normal Kesit Kuvveti N_ϕ 'nın Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Aç ϕ_0 'a Göre Değişimi ($P=45,61$ N)

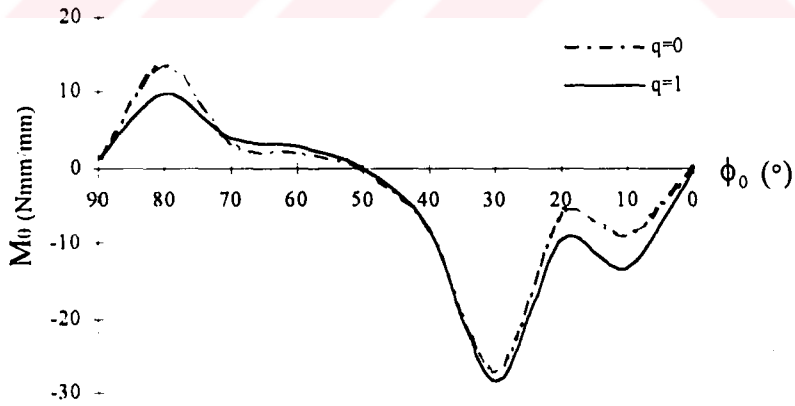


Şekil 4.39 Paralel Çember Teğeti Doğrultusundaki Normal Kesit Kuvveti N_θ 'nın Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Aç ϕ_0 'a Göre Değişimi ($P=45,61$ N)

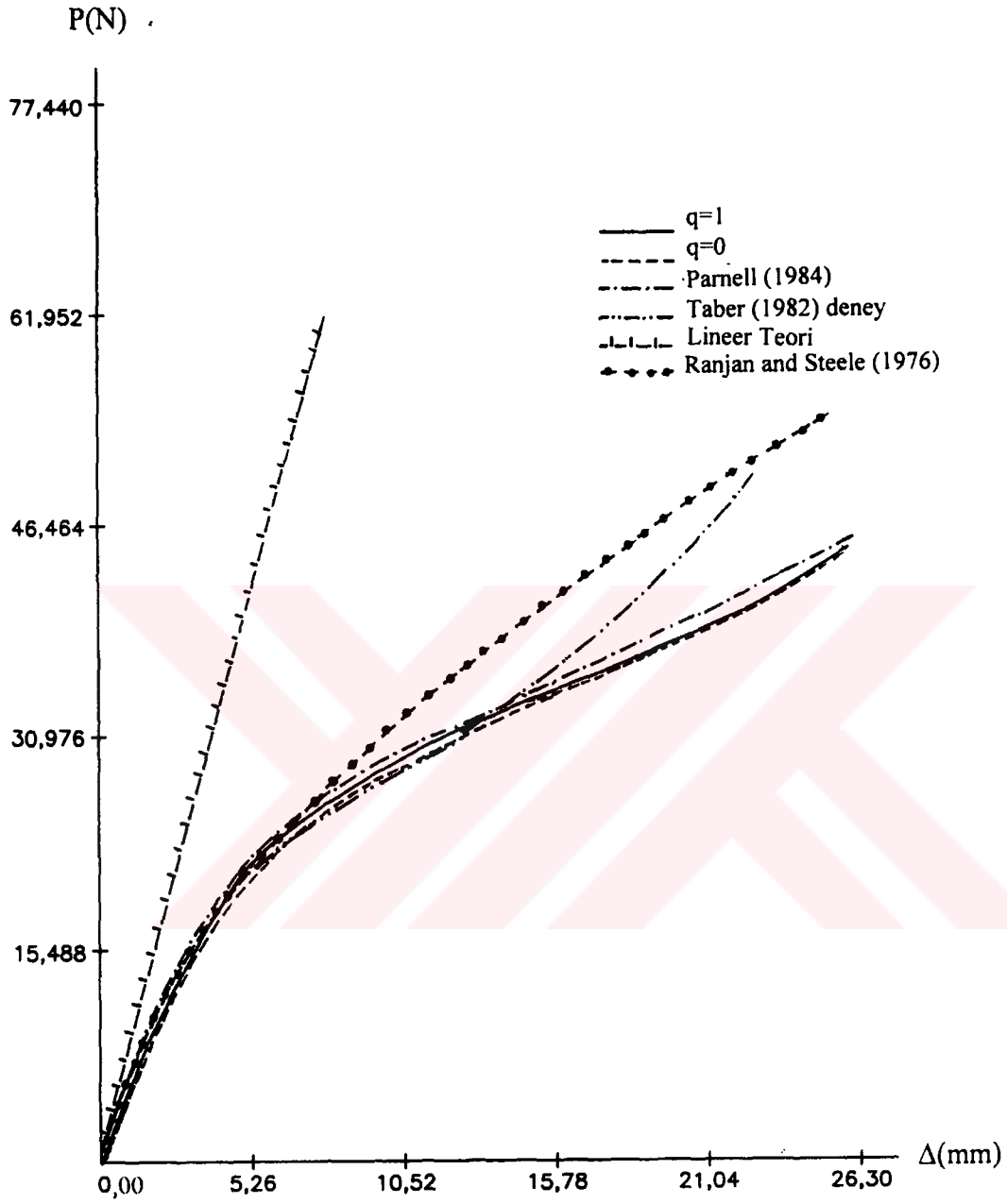




Şekil 4.40 Meridyenel Eğilme Momenti M_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($P=45,61$ N)



Şekil 4.41 Paralel Çember Eğilme Momenti M_θ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($P=45,61$ N)



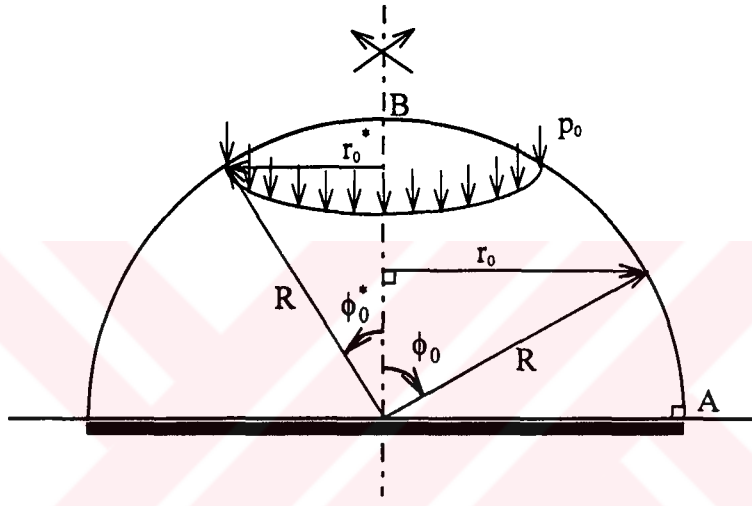
Şekil 4.42 Tepe Noktasındaki Düşey Yerdeğiştirme Δ 'nın Tepe Noktasında Uygulanan Düşey Kuvvet P 'ye Göre Değişimi



Tekil yük etkisindeki küresel kabuk problemine ait Teori I ve Teori II'yi kapsayan sonuçlar birbirine oldukça yakın değerler taşımakla birlikte, bazı farklılıklar göstermiştir. Şekil 4.28'de enine kayma şekil değiştirmesi η 'nın ϕ_0 'a göre değişimini gösteren grafikte ankastre mesnet civarında Teori I'e karşı gelen değerlerin Teori II'ye karşı gelen değerlerden daha büyük olduğu görülmektedir. Şekil 4.35'de yatay kesit kuvveti H'nın ϕ_0 'a göre değişimini gösteren grafiğe bakıldığında $\phi_0 = 90^\circ$ ile $\phi_0 = 70^\circ$ arasında Teori I'e karşı gelen değerlerin Teori II'ye karşı gelen değerlerden daha büyük olduğu görülmektedir. $\phi_0 = 70^\circ$ ile $\phi_0 = 0^\circ$ arasında ise Teori I ve Teori II'ye karşı gelen değerler yaklaşık olarak birbirinin aynısıdır. Şekil 4.37'de enine kesme kuvveti diyagramında, mesnetlenme bölgesinde $\phi_0 = 90^\circ$ ile $\phi_0 = 70^\circ$ arasında Teori I'e karşı gelen değerlerin Teori II'ye karşı gelen değerlerden büyük olduğu gözlenmektedir. Şekil 4.38'e bakıldığında ise meridyenel normal kesit kuvveti N_ϕ 'nin grafiğinde; $\phi_0 = 90^\circ$ ile $\phi_0 = 40^\circ$ arasında Teori II'ye karşı gelen değerlerin, $\phi_0 = 40^\circ$ ile tekil kuvvetin etkime noktası olan $\phi_0 = 0^\circ$ 'a kadar olan bölgede Teori I'e karşı gelen değerlerin daha büyük olduğu görülmüştür. Şekil 4.26'da; şekil değişimi öncesinde ve sonrasında kabuğun konumu, Teori I ve Teori II'nin uygulanması neticesinde çıkan sonuçlarla ve Parnell (1984) tarafından küçük şekil değiştirme ve orta büyüklükte dönmeleri kapsayan ve enine kayma şekil değiştirmelerinin ihmal edildiği asimtotik çözüme (Asimtotik çözümün geçerli olmadığı bölgelerde integrasyon matrisleri kullanılmıştır.) karşı gelen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Her üç teoriye karşı gelen değerlerin birbirine çok yakın olduğu gözlenmiştir. Şekil değişimi öncesindeki kabuğun konumuna bakıldığında şekil değişiminin büyüklüğü dikkat çekmektedir. Tekil kuvvetin uygulandığı tepe noktası küresel kabuğun yarıçapı büyüklüğünde düşey yer değiştirme yapmaktadır. Şekil 4.42'de; Ranjan ve Steele (1976)'nin kapalı çözümüne, Taber (1982)'nin deneysel sonuçlarına, Parnell (1984)'ün asimtotik çözüm ve asimtotik çözümün geçerli olmadığı bölgelerde integrasyon matrislerini kullandığı çalışmasına, Parnell (1984)'in lineer teoriye göre çözümüne ve de Teori I ve Teori II'ye karşı gelen değerler sunulmaktadır. Bu grafikten de görüleceği gibi; tepe noktasındaki düşey yerdeğiştirme $\Delta \cong 10,52\text{mm}$ 'ye kadar, lineer teoriye karşı gelen değerler dışında diğer

teorilere karşı gelen değerlerin birbirine çok yakın olduğu görülmüştür. Tepe noktasındaki düşey yerdeğiştirme Δ 'nın 10,52 mm'den daha büyük olduğu bölgede Teori I'e ve Teori II'ye karşı gelen değerler Parnell (1984)'e karşı gelen değerler ile büyük benzerlik göstererek Taber (1982)'nin deneysel çalışmasından ve Ranjan ve Steele (1976)'nin kapalı çözümünden uzaklaşmaktadır.

4.3. Çembersel Yük Etkisinde Küresel Kabuk

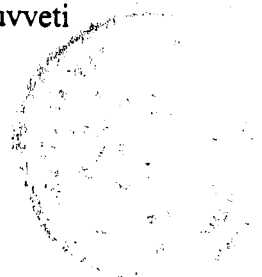


Şekil 4.43 Çizgisel Yük Etkisinde Küresel Kabuk

Şekil 4.43'te R yarıçaplı, $\phi_0 = \phi_0^*$ 'da çembersel, dönel simetrik bir yayılı yük etkileyen ankastre olarak mesnetlenmiş bir küresel kabuk gösterilmektedir. Bu geometride şekil değişimi öncesindeki meridyenel açı ϕ_0 , 0 ile $\pi/2$ radyan arasında değişmektedir. Geometrinin aynı olmasından dolayı (4.2) ve (4.3) bağıntıları bu problem için de geçerli olmaktadır. Küresel kabuğa etkileyen çizgisel yükten dolayı (4.13) bağıntısı da geçerli olmaktadır.

Problemi, çembersel yükün etkime konumuna göre düşey kesit kuvveti V açısından iki bölgeye ayırmak mümkün olmaktadır:

I. Bölge, $\frac{\pi}{2} \leq \phi_0 \leq \phi_0^*$ ile tanımlanmaktadır ve bu bölgede düşey kesit kuvveti



$$V = -\frac{P_C}{2\pi r_0} \quad (4.22)$$

olmaktadır. Burada P_C , ϕ_0^* meridyenel açısına karşı gelen paralel çemberin birim uzunluğu başına gelen düşey kuvvetlerin (p_0 'ların) bileşkesidir:

$$P_C = p_0 2\pi r_0^* \quad (4.23)$$

Burada, r_0^* ilgili paralel çemberin yarıçapını göstermektedir.

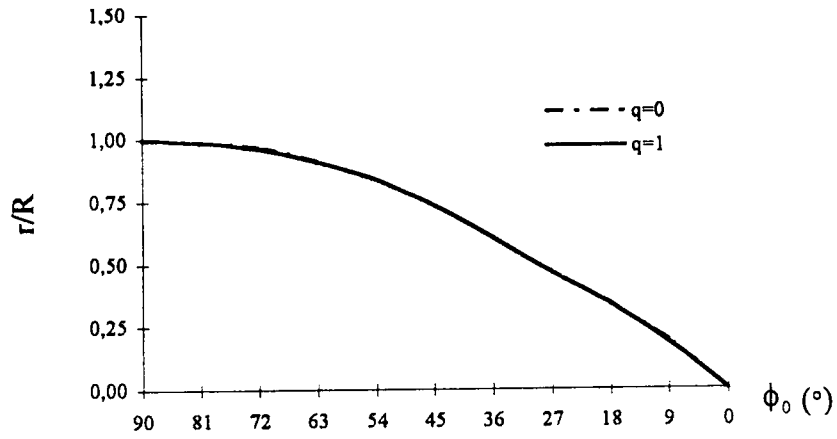
II . Bölge, $\phi_0^* \leq \phi_0 \leq 0$ ile tanımlanmaktadır ve bu bölgede düşey kesit kuvveti

$$V = 0 \quad (4.24)$$

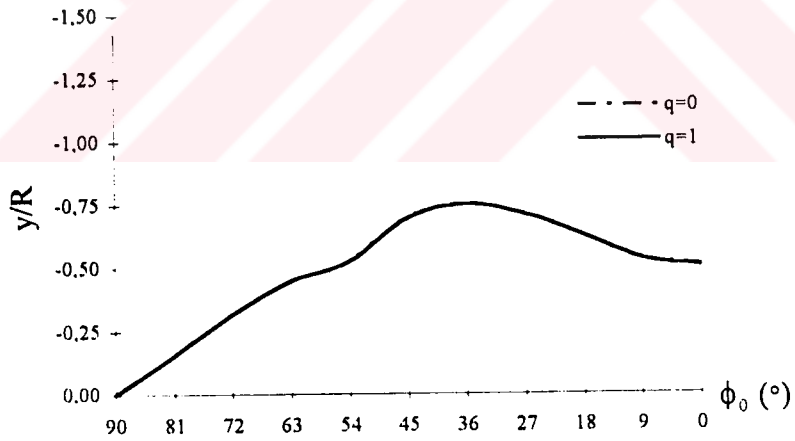
olmaktadır.

Sınır koşulları, önceki iki problemdeki sınır koşullarının ((4.7) denklemlerinin) aynısıdır. Problem önce boyutlu olarak çözülmekte daha sonra grafik çizimlerinde boyutsuzlaştırma yapılmıştır. Evan-Iwonowski et al.(1963), söz konusu problemle ilgili olarak bir deneysel çalışma yapmıştır. Taber (1986)'da ilgili problem; malzemenin lineer elastik olduğu varsayımıyla, orta büyüklükteki dönmelerin göz önüne alındığı, enine kayma şekil değiştirmelerin ihmal edildiği bir teoriyle ve integrasyon matrisleriyle sayısal olarak çözülmüştür. İlgili çalışmalarda $E = 4,0 \text{ N/mm}^2$ ve $\nu = 0,5$ alınmıştır. Şekil değiştirmelerin ve dönmelerin sonlu olarak göz önüne alındığı bu çalışmada, ilgili çalışmalarda elde edilen sonuçlarla karşılaştırma yapmak amacıyla (4.21) denklemi kullanılarak $C = 2,667 \text{ N/mm}^2$ alınmıştır. ϕ_0 ve r_0 'in sifira yaklaşmasından dolayı tepe noktası ve civarında oluşan belirsizlikten kurtulmak amacıyla bu bölgede (4.10), (4.11) ve (4.12) bağıntıları kullanılmıştır. Yakınsama 11 ardışık yaklaşım ile sağlanmıştır.

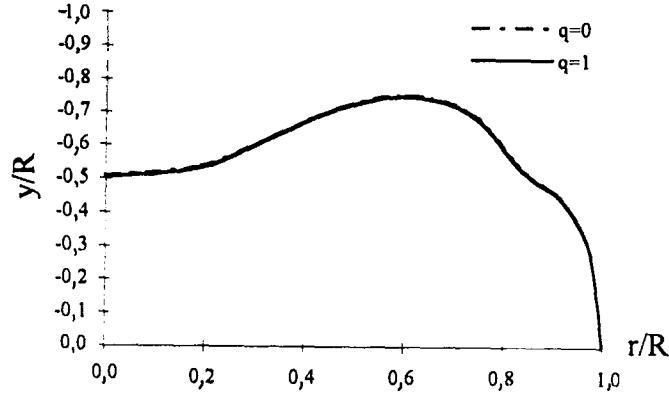
Şekil 4.44 - Şekil 4.63'deki grafik çizimlerinde, çembersel yük etkisindeki küresel kabuk probleminin çözümünde Teori I ve Teori II'ye karşı gelen sonuçlar, Taber (1986)'da sunulan küçük şekil değiştirme ve orta büyüklükteki dönmelerin göz önüne alındığı enine kayma şekil değiştirmelerinin ihmal edildiği integrasyon matrisleriyle çözüme karşı gelen sonuçlar, Evan-Iwonowski et al. (1963)'ün ilgili deneysel çalışmasına karşı gelen sonuçlar sunulmaktadır.



Şekil 4.44 Şekil Değişimi Sonrasındaki Radyal Koordinatın
Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre
Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)



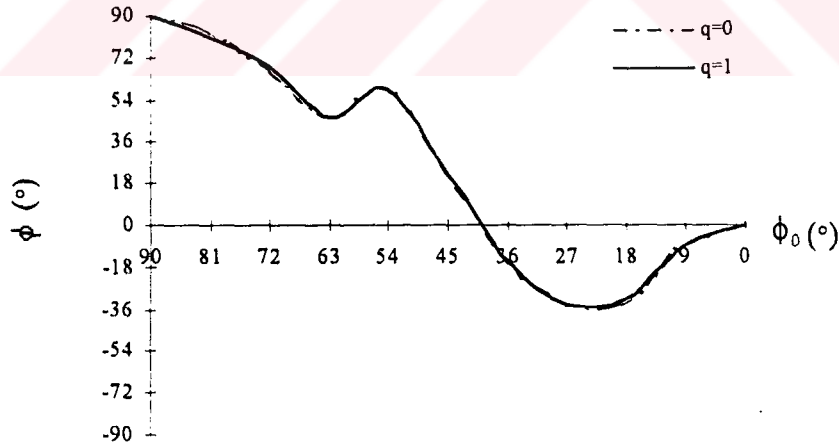
Şekil 4.45 Şekil Değişimi Sonrasında Düşey Koordinatın
Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre
Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)



Şekil 4.46 Şekil Değişimi Sonrasındaki Düşey Koordinatın

Şekil Değişimi Sonrasındaki Radyal Koordinata Göre Değişimi

($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)

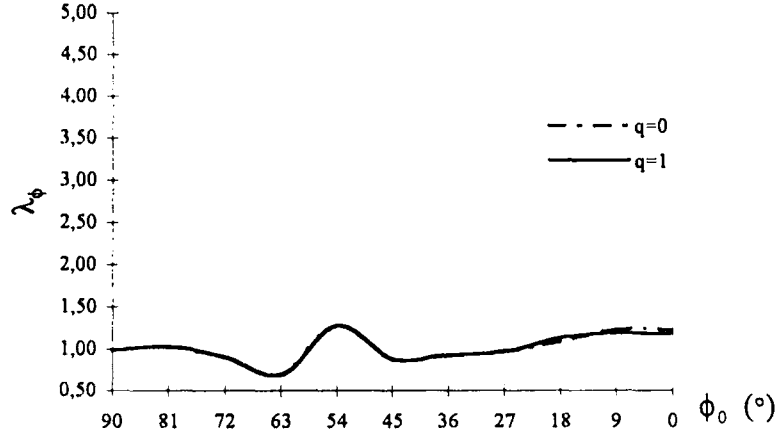


Şekil 4.47 Şekil Değişimi Sonrasındaki Meridyenel Açının

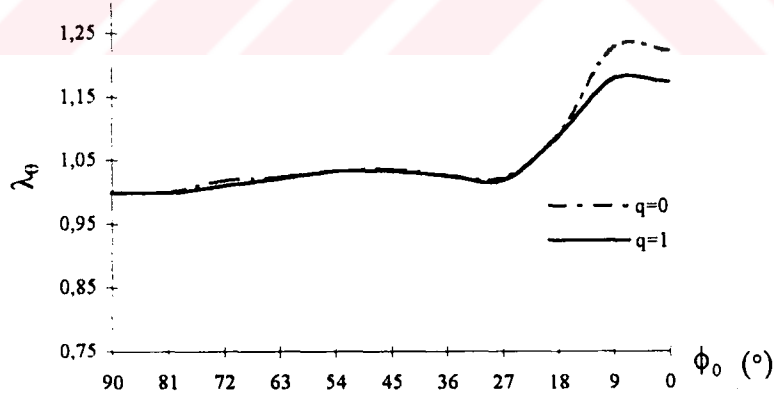
Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açıya Göre Değişimi

($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)

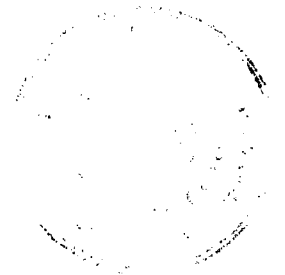


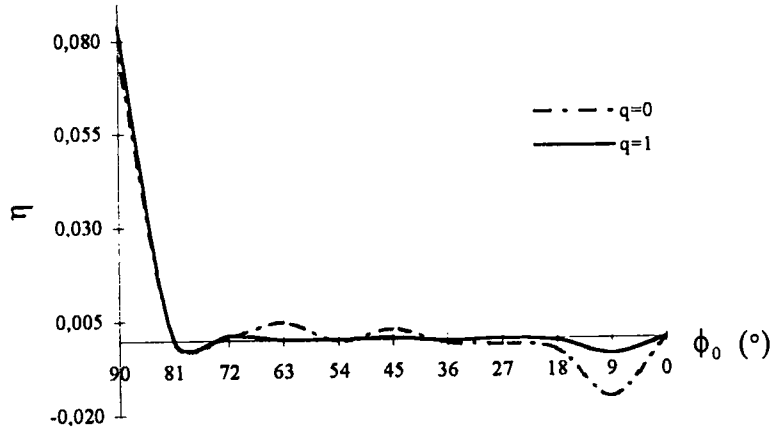


Şekil 4.48 Meridyenel Germe λ_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açığı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)

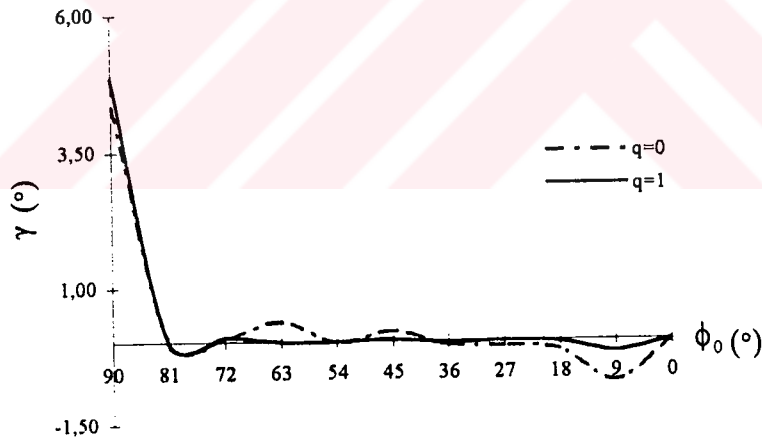


Şekil 4.49 Paralel Çember Germesi λ_θ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açığı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)





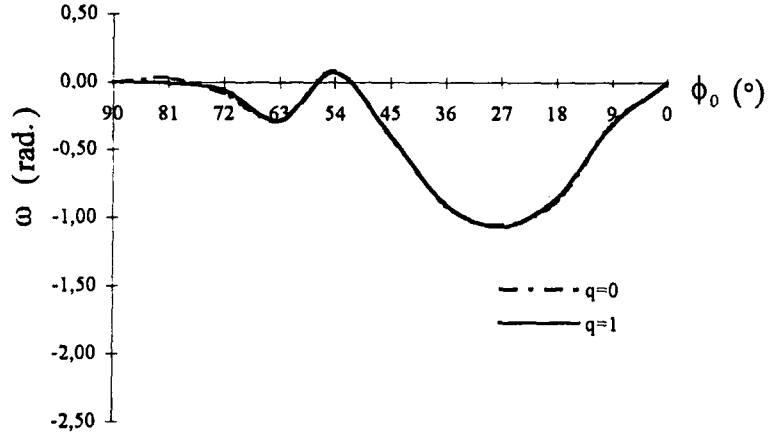
Şekil 4.50 Kayma Şekil Değiştirmesi η 'nın Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)



Şekil 4.51 Enine Kayma Açısı γ 'nın Şekil Değişimi Öncesindeki

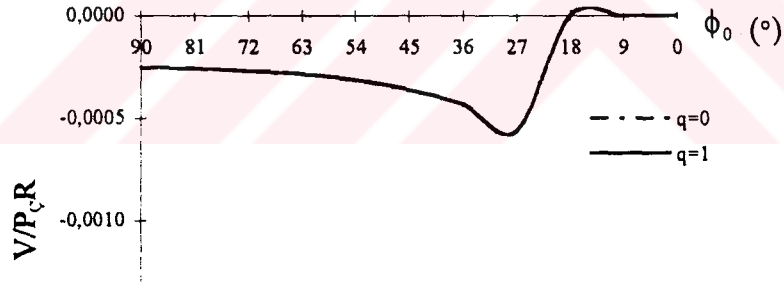
Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)





Şekil 4.52 Dönme Açısı ω 'nın Şekil Değişimi Öncesindeki

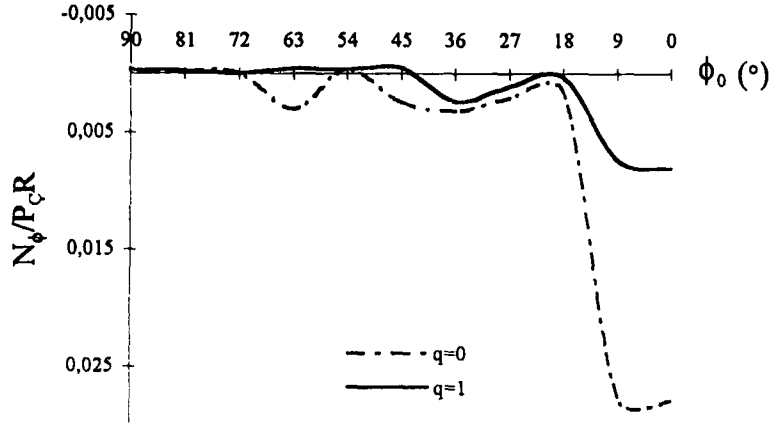
Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)



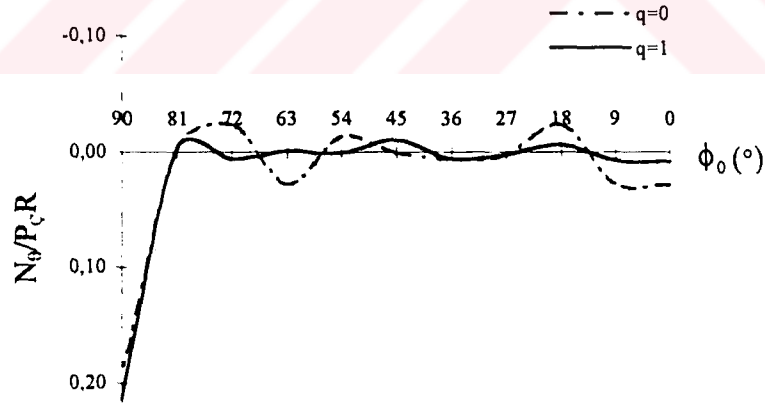
Şekil 4.53 Düşey Kesit Kuvveti V 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki

Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)



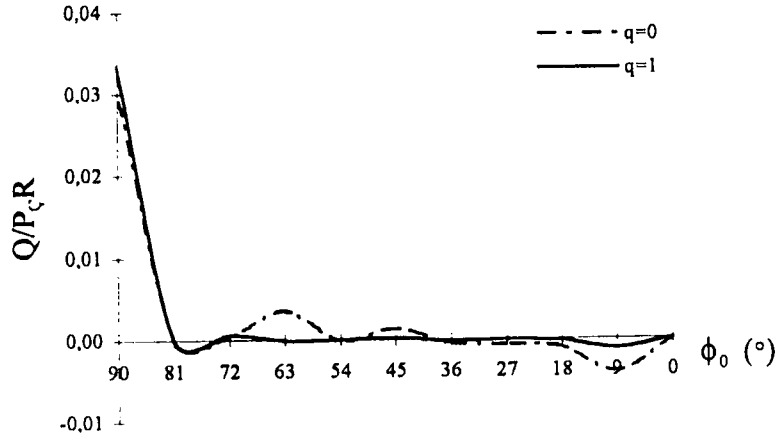


Şekil 4.54 Meridyenel Normal Kesit Kuvveti N_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Aç ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)

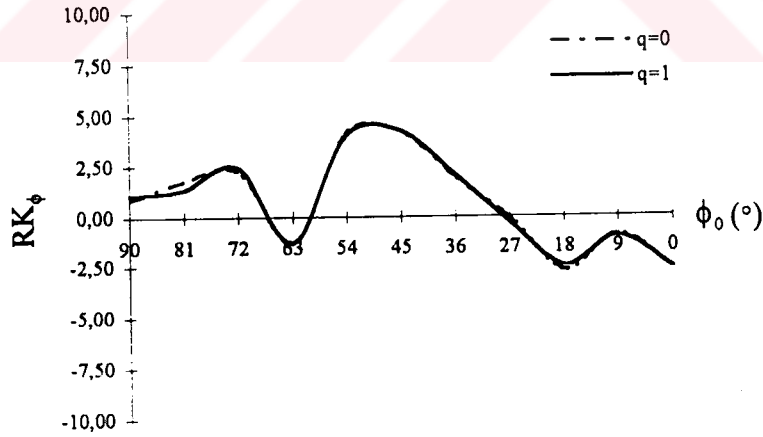


Şekil 4.55 Paralel Çember Teğeti Doğrultusundaki Normal Kesit Kuvveti N_θ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Aç ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)



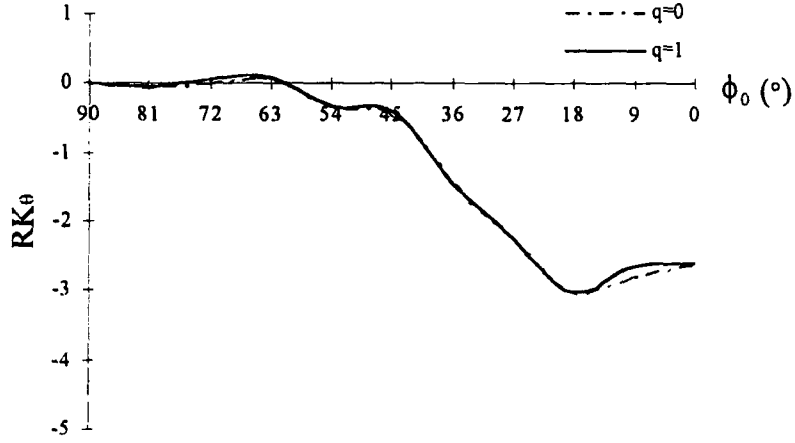


Şekil 4.56 Enine Kesme Kuvveti Q 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)

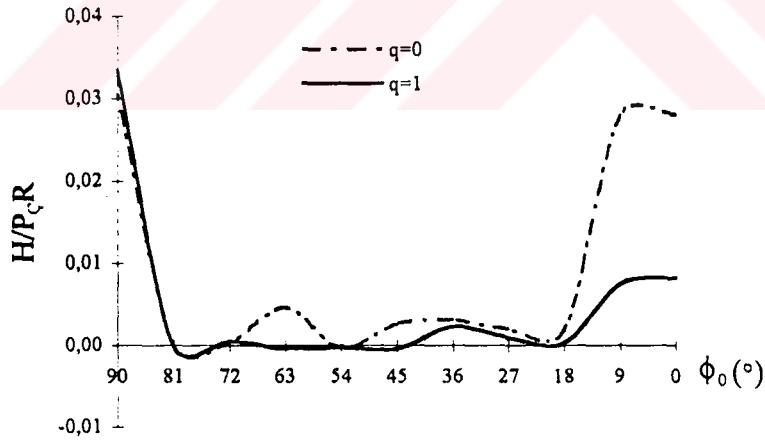


Şekil 4.57 Meridyenel Eğrilik Değişim Ölçüsü K_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki

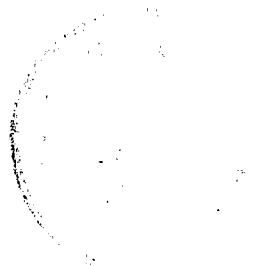
Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)

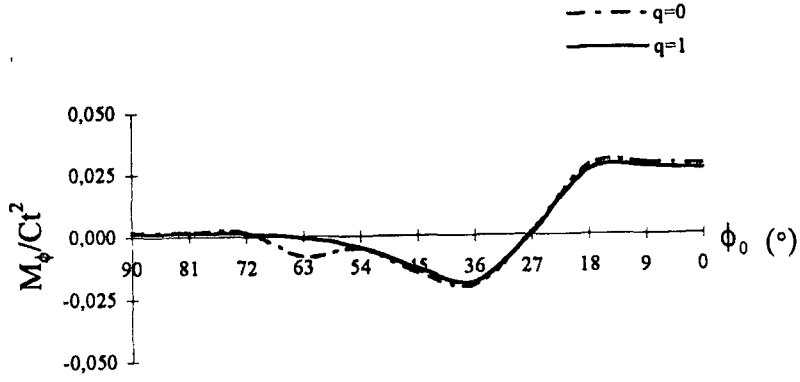


Şekil 4.58 Enine Eğrilik Değişim Ölçüsü K_{θ} 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)



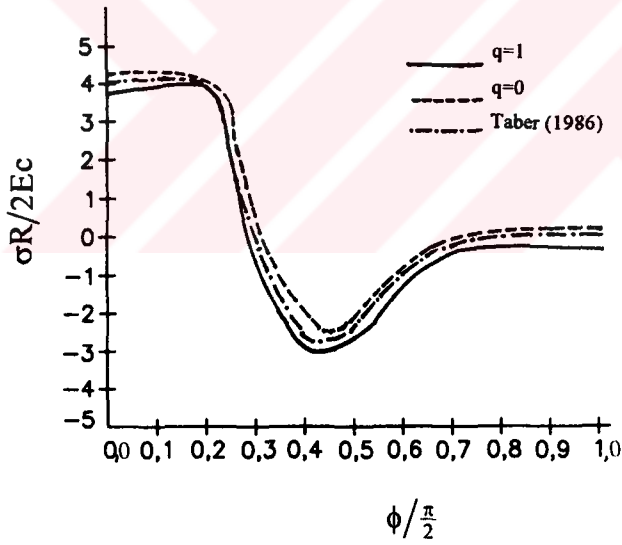
Şekil 4.59 Yatay Kesit Kuvveti H 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)



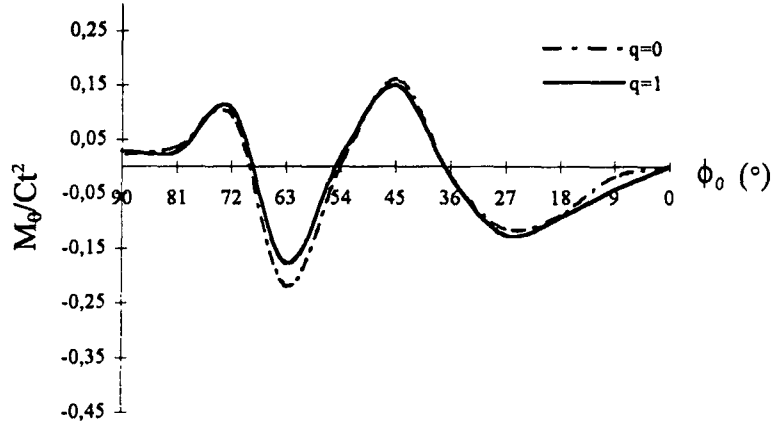


Şekil 4.60 Meridyenel Eğilme Momenti M_ϕ 'nin Şekil Değişimi Öncesindeki

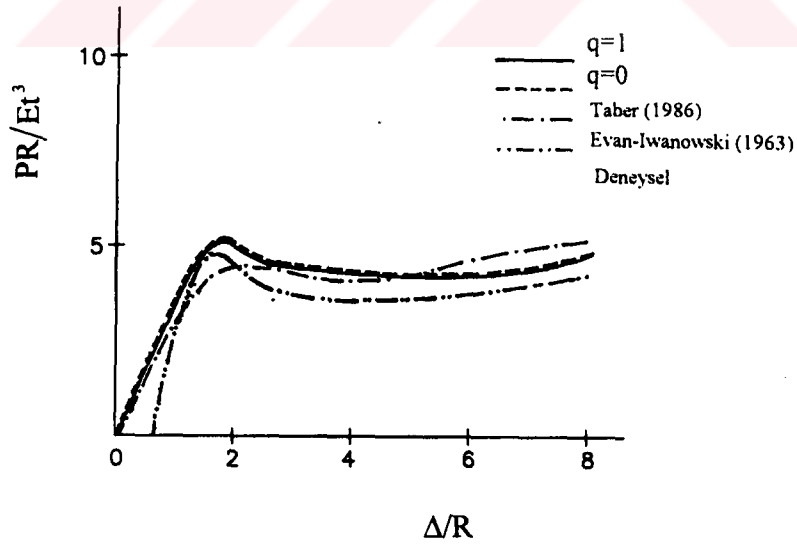
Meridyenel Açı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)



Şekil 4.61 Eğilme Gerilmesi $\sigma (= 6M_\phi / t^2)$ 'nin
Şekil Değişimi Sonrasındaki Meridyenel Açı ϕ 'e göre Değişimi
($c^2 = t^2 / 12(1 - \nu^2)$), $R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)



Şekil 4.62 Paralel Çember Eğilme Momenti M_0 'nın Şekil Değişimi Öncesindeki Meridyenel Açılı ϕ_0 'a Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)

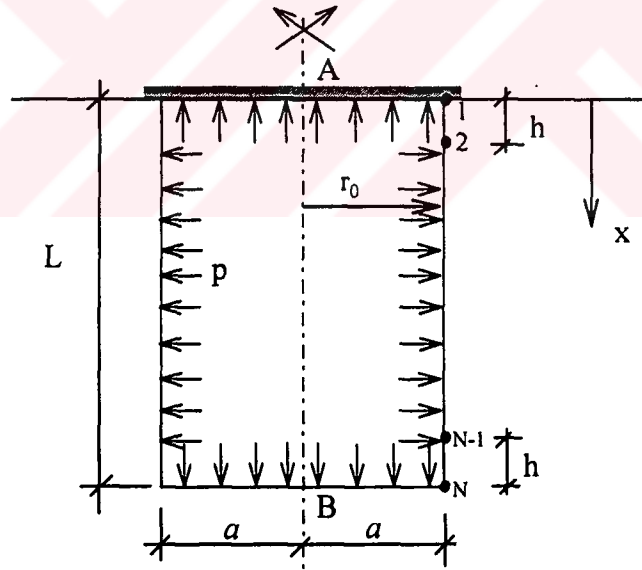


Şekil 4.63 Tepe Noktasındaki Düşey Yer Değiştirmenin

Çizgisel Yüke Göre Değişimi ($R/t = 12,9$, $r_0^*/R = 0,3$)

Çizgisel yük etkimesi durumunda küresel kabuk problemine ait Teori I ve Teori II'ye karşı gelen sonuçların, önceki iki problemde olduğu gibi birbirine çok yakın değerlerde olduğu gözlenmektedir. Şekil (4.51)'de karşılaştırma yüzeyi üzerindeki kayma açılarını (γ) gösteren grafikte Teori II'ye karşı gelen sonuçların Teori I'e karşı gelen sonuçlardan daha büyük olduğu görülmüştür. Şekil 4.61'de verilen eğilme gerilmesi $\sigma = 6M_\phi / t^2$ grafiğine bakıldığında Teori I ve Teori II'e karşı gelen değerlerin Taber (1986)'ya karşı gelen değerler ile yaklaşık olarak aynı sonuçları taşıdıkları gözlenmektedir. Şekil 4.63'de yük-tepe noktasındaki düşey yer değiştirme grafiği görülmektedir. Bu grafikte Teori I ve Teori II'ye karşı gelen sonuçlar Taber (1986) ve Evan-Iwonowski et al. (1963)'e ait deneysel çalışma ile karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmada Teori I ve Teori II'ye karşı gelen sonuçların, Taber (1986)'ya göre ilgili deneysel sonuçlara daha yakın olduğu gözlenmektedir.

4.4 Düzgün Yayılı İç Basıncı Etkisinde Silindirik Kabuk



Şekil 4. 64 Düzgün Yayılı Yük Etkisinde Silindirik Kabuk

Şekil (4.64)'de a yarıçaplı silindirik bir kabuğun geometrik özellikleri verilmektedir. Şekil değişimi öncesindeki meridyenel açı ϕ_0 bütün noktalarda $\pi/2$ radyandır. Bu durumda (3.5) denklemlerinde kullanmak üzere

$$\phi'_0 = 0 \quad (4.25)$$

yazılmıştır. Problemden d6nel simetrik i basınç etkisi dikkate alınmaktadır. Düzg6n yayılı i basınç p 6zel halinde, (3.5c) bağıntısında p_H yerine (4.4), (3.5d,e,g) bağıntılarında V yerine (4.6) bağıntısı kullanılabilir.

Silindirik kabuk A ucunda ankastre olarak mesnetlenmiştir. Kabuk B ucunda ise, d6nmeye ve yatay harekete izin vermeyen fakat d6şey yer değiştirmeye izin veren rijit bir plağa tutturulmuştur. Bu problemde, lineer sınır koşulları yanında nonlineer sınır koşullarına da gerek duyulmuştur.

A ankastre mesnedinde kullanılan sınır koşulları

$$\phi|_A = \frac{\pi}{2} \quad (4.26)$$

$$r|_A = r_0|_A = a \quad (4.27)$$

şeklinde yazılabilmektedir. A sınırında diğer bir sınır koşulu ise şu şekilde elde edilmektedir; (3.3a) bağıntısı sonlu fark y6ntemiyle ifade edilmeye çalışılmıştır. Bunun için A mesnedindeki d6ę6m noktası 1 numaralı d6ę6m noktası ve hemen ardından gelen (1 numaralı d6ę6m noktasına h uzaklığındaki) 2 numaralı d6ę6m noktasındaki değerler kullanılmıştır;

$$\bar{V}'_1 = \frac{\bar{V}_2 - \bar{V}_1}{h} = -r_0 p_{V_1} \quad (4.28)$$

p_{V_1} , (4.5) bağıntısından yararlanarak



$$p_{v_1} = -p\lambda_{\phi_1}\lambda_{\theta_1}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_1\right) \quad (4.29)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\lambda_{\theta_1} = 1 \quad (4.30a)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_1\right) = \sin \gamma_1 \cong \gamma_1 \quad (4.30b)$$

ifadeleri, (4.29) denkleminde kullanılıp (2.8d) denklemi de göz önüne alınırsa

$$p_{v_1} = -p\eta_1 \quad (4.31)$$

denklemi elde edilebilir. (4.28) bağıntısında, (3.3b), (4.6) ve (4.31) bağıntıları kullanılarak A sınırında

$$r_2^2 - a^2 = 2ah\eta_1 \quad (4.32)$$

nonlineer sınır koşulu elde edilebilir (Burada, $r_1 = r_0 = a$ olduğu göz önüne alınmıştır.).

A sınırındaki başka bir sınır koşulu da şu şekilde elde edilebilir:

(3.13) ve (3.2a) bağıntıları A ankastre mesnedindeki 1 numaralı düğüm noktası için yazıldığında

$$y'_1 = \lambda_{\phi_1} \quad (4.33)$$

$$r'_1 = \eta_1 \quad (4.34)$$



bağıntıları elde edilmektedir. (2.2a) bağıntıları $z=0$ için yazılıp (4.33) ve (4.34) denklemlerinde kullanıldığında

$$\frac{y'_1}{r'_1} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_1\right) = \frac{\lambda_{\phi_1}}{\eta_1} \quad (4.35)$$

yazılabilir. (4.35) denklemini düzenlenip (2.8d) denkleminde yararlanılacak olunursa,

$$\eta_1 = \lambda_{\phi_1} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\lambda_{\phi_1}}{\eta_1} \right) \quad (4.36)$$

şeklinde esas değişkenler cinsinden ifade edilebilmektedir.

Silindir kabuğun B ucunda ise,

$$\phi|_B = \frac{\pi}{2} \quad (4.37)$$

$$r|_B = r_0|_A \quad (4.38)$$

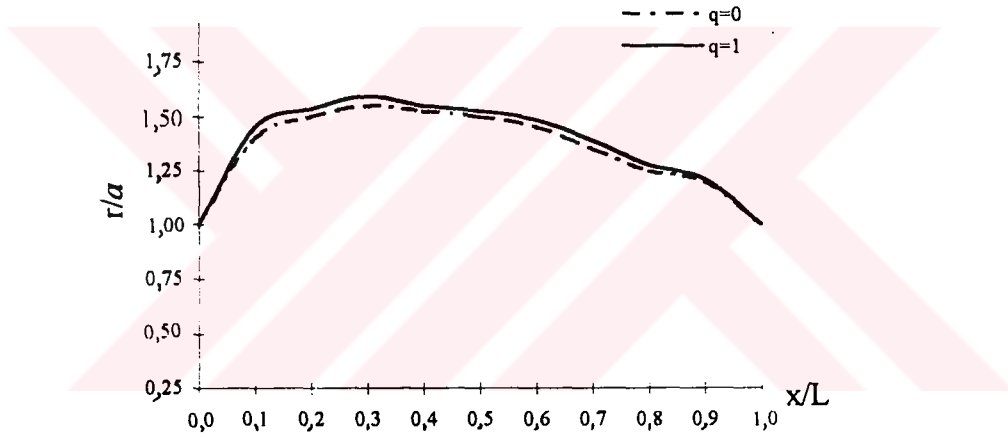
lineer sınır koşulları ve

$$a^2 - r_{N-1}^2 = -2ha\eta_N \quad (4.39)$$

nonlineer sınır koşulu yazılabilmektedir. (4.39) sınır koşulu B mesnedinde (N numaralı düğüm noktası) (3.3a) denkleminin sonlu fark yöntemiyle ((4.32) sınır koşulunun elde edildiği gibi) ifade edilmesi ile elde edilmiştir.

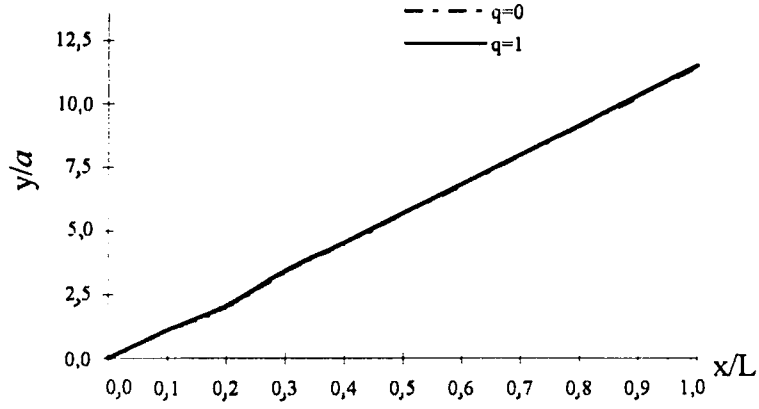


Yakınsama, 12 ardışık yaklaşım ile sağlanmıştır. Şekil (4.65)-(4.87)'de düzgün yayılı iç basınç etkimesi durumunda silindirik kabuk problemine ait Teori I ve Teori II'ye ait değerleri kapsayan grafikler ve Taber (1987b)'nin enine kayma şekil değiştirmesinin ihmal edildiği, büyük şekil değiştirme ve dönmelerin katıldığı ve de Simmonds (1986)'nın Neo-Hookean malzemesi için iki boyutlu şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunun kullanıldığı çalışmasına ait bazı grafikler sunulmaktadır. Problemden boyutsuzlaştırmada kullanılan α parametresi için (4.9) bağıntısı, R yerine a alınarak kullanılmıştır.

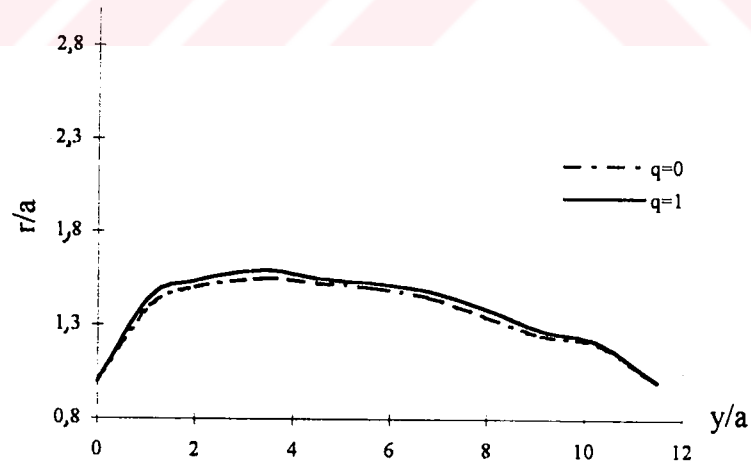


Şekil 4.65 Şekil Değişimi Sonrasındaki Radyal Koordinatın Silindirik Kabuk Boyunca Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)



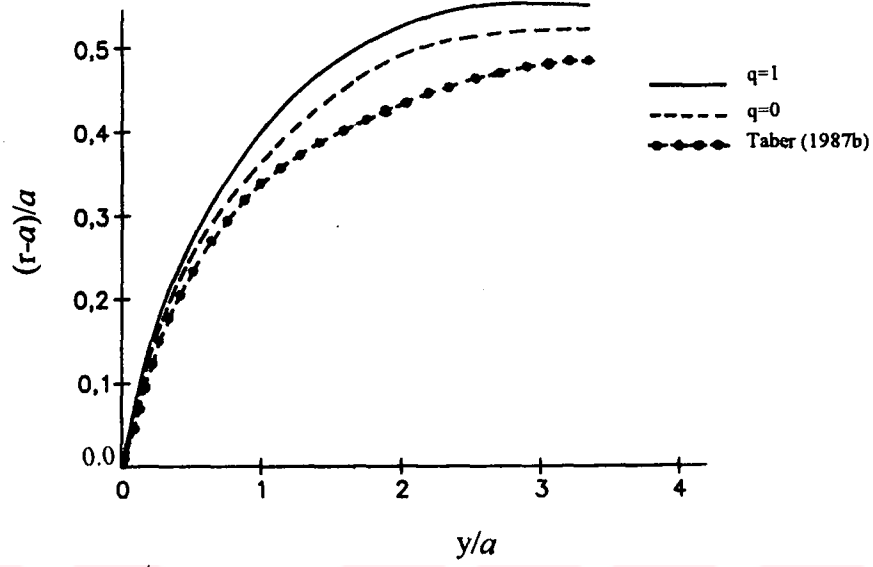


Şekil 4.66 Şekil Değişimi Sonrasındaki Düşey Koordinatın Kabuk Boyunca Değişimi
($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)

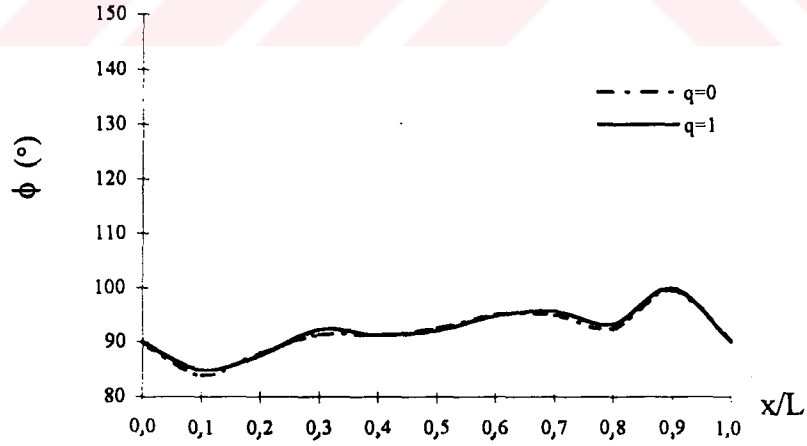


Şekil 4.67 Şekil Değişimi Sonrasındaki Düşey Koordinatın Şekil Değişimi Sonrasındaki
Radyal Koordinata Göre Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)

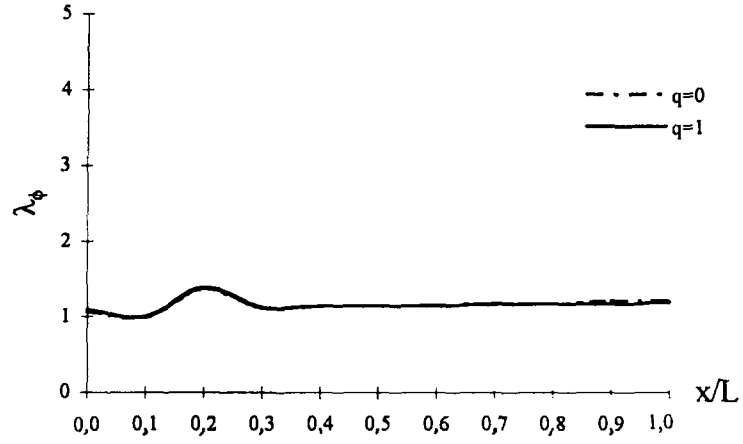




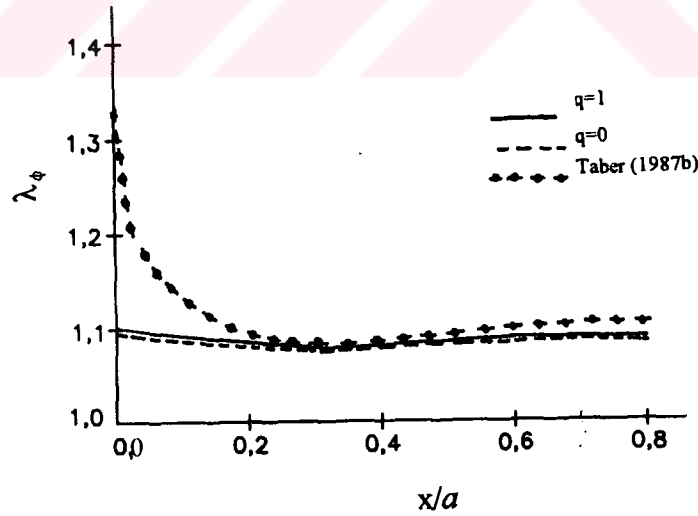
Şekil 4.68 Radyal Doğrultudaki Yer Değiştirme $(r-a)$ 'nın Şekil Değişimi Sonrasındaki Düşey Koordinata Göre Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)



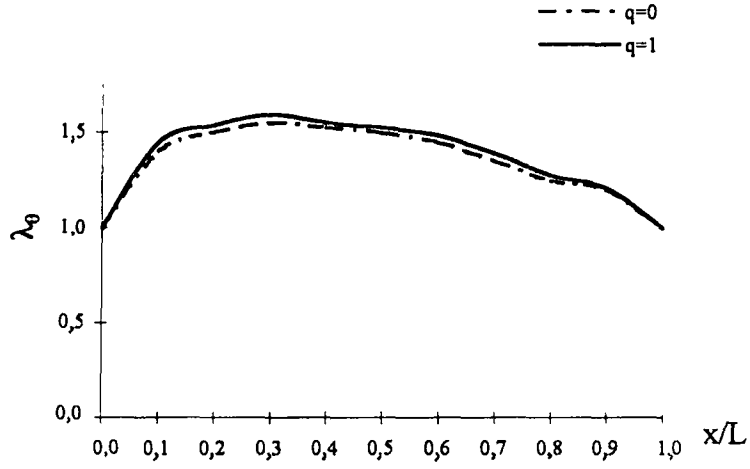
Şekil 4.69 Şekil Değişimi Sonrasındaki Meridyenel Açının Kabuk Boyunca Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)



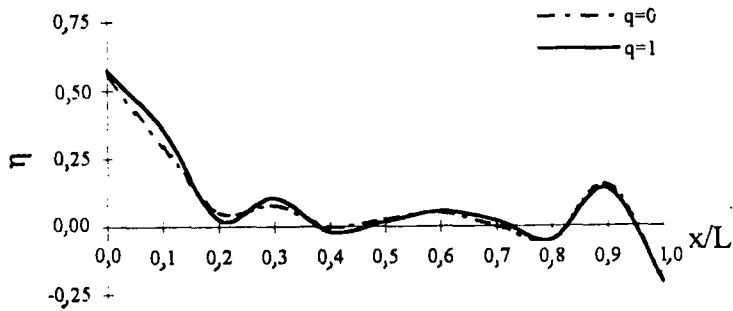
Şekil 4.70 Meridyenel Germenin Kabuk Boyunca Değişimi
($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)



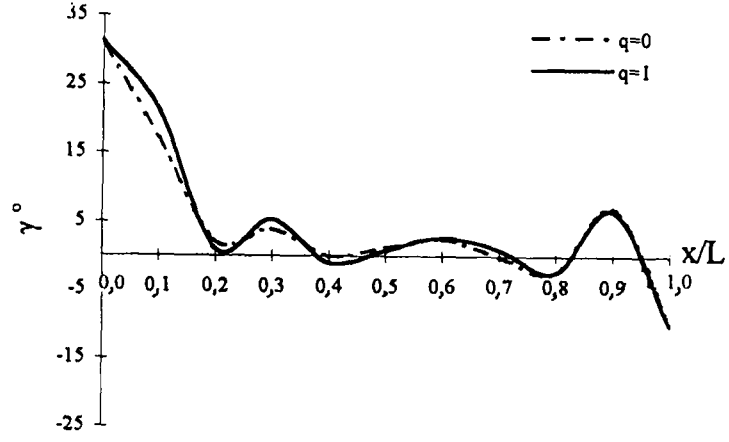
Şekil 4.71 Meridyenel Germenin Ankastre Mesnet Civarında Değişimi
($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)



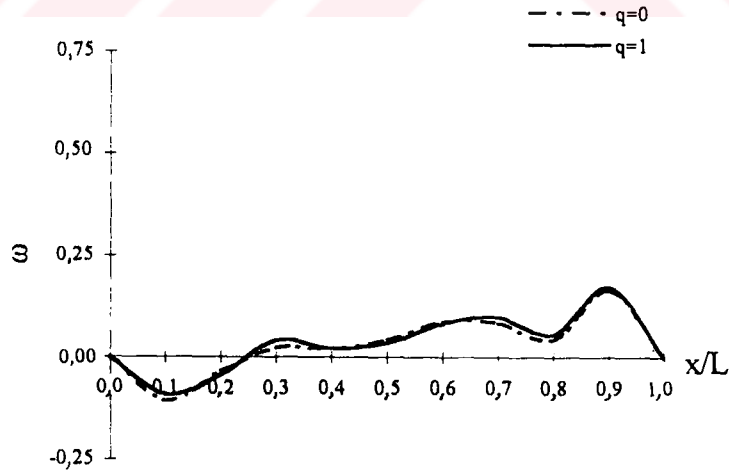
Şekil 4.72 Paralel Çember Germesinin Kabuk Boyunca Değişimi
($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)



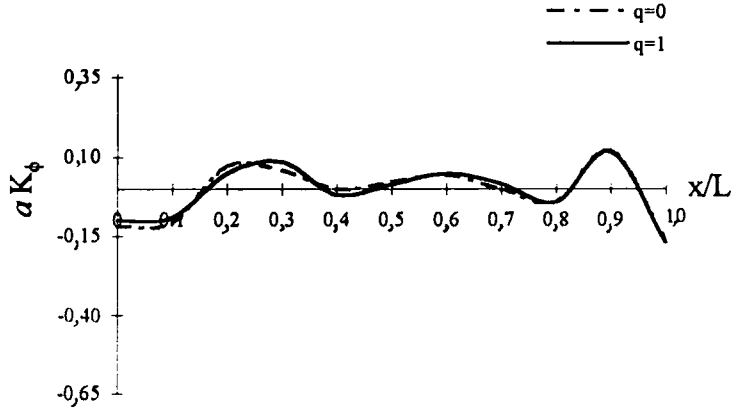
Şekil 4.73 Enine Kayma Şekil Değiştirmesi η 'nin Kabuk Boyunca Değişimi
($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)



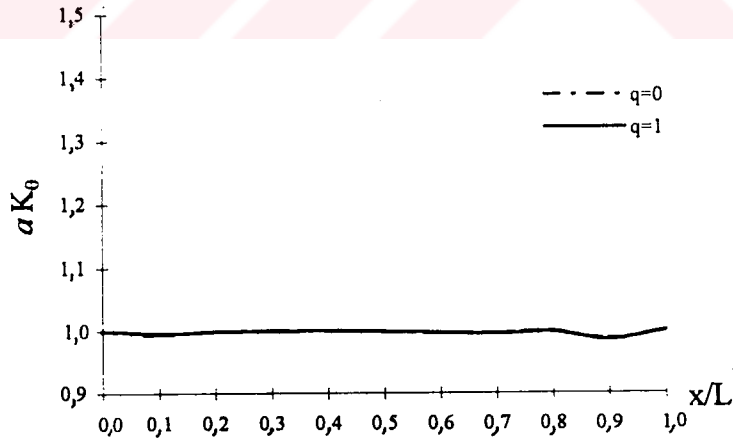
Şekil 4.74 Kayma Açısının Kabuk Boyunca Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)



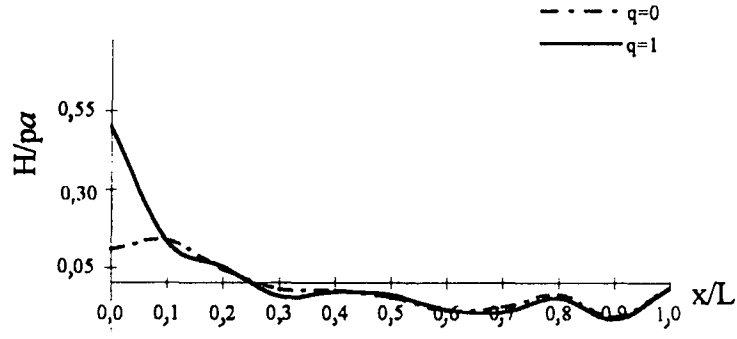
Şekil 4.75 Dönme Açısının Kabuk Boyunca Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)



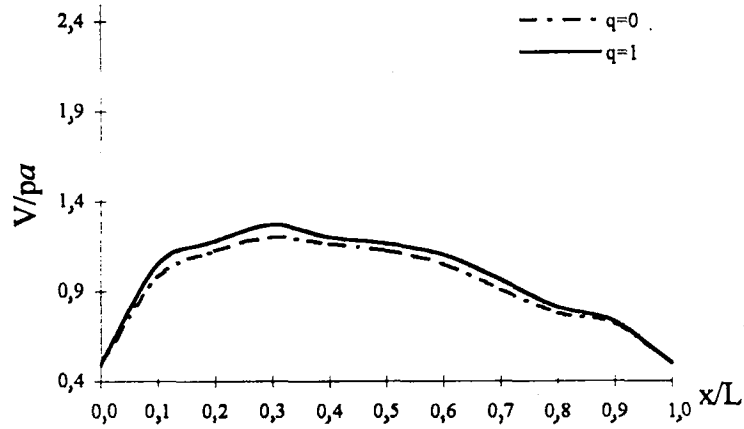
Şekil 4.76 Meridyenel Eğrilik Değişim Ölçüsünün Kabuk Boyunca Değişimi
($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)



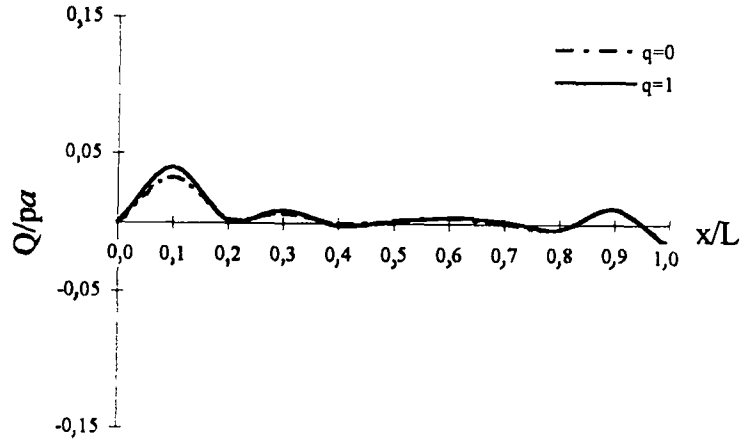
Şekil 4.77 Enine Eğrilik Değişim Ölçüsünün Kabuk Boyunca Değişimi
($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)



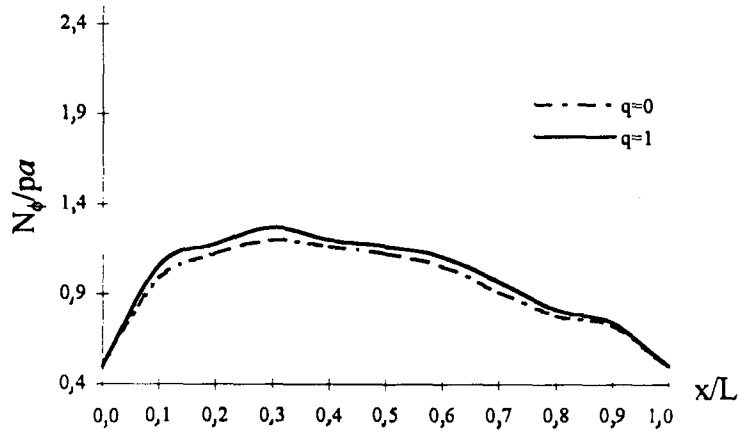
Şekil 4.78 Yatay Kesit Kuvvetinin Kabuk Boyunca Değişimi
($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)



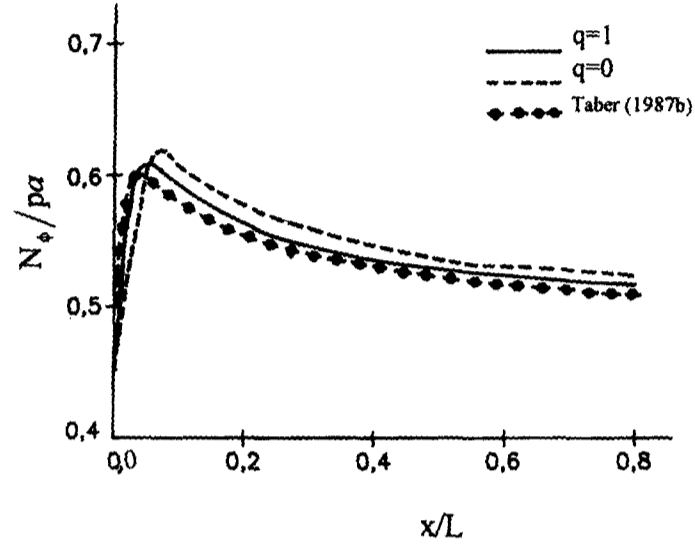
Şekil 4.79 Düşey Kesit Kuvvetinin Kabuk Boyunca Değişimi
($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)



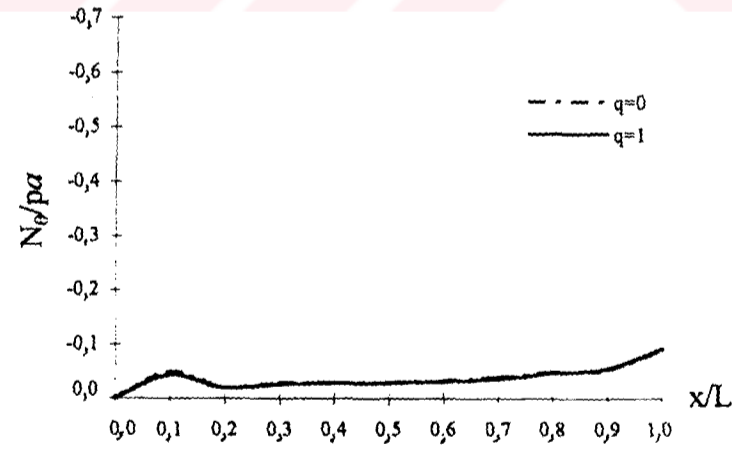
Şekil 4.80 Enine Kesme Kuvvetinin Kabuk Boyunca Değişimi
($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)



Şekil 4.81 Meridyenel Normal Kesit Kuvvetinin Kabuk Boyunca Değişimi
($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)

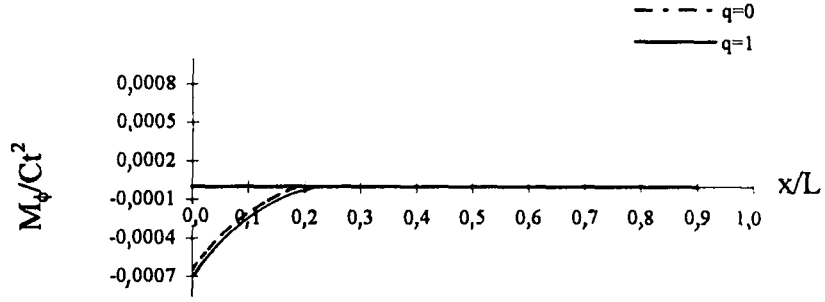


Şekil 4.82 Meridyenel Normal Kesit Kuvvetinin Ankastre Mesnet Civarında Değişimi
($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)

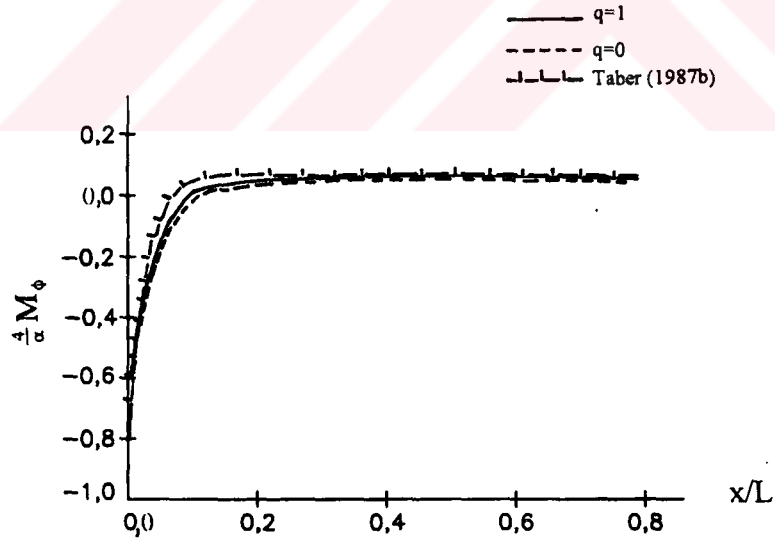


Şekil 4.83 Paralel Çember Teğeti Doğrultusundaki Normal Kesit Kuvvetinin Kabuk
Boyunca Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)

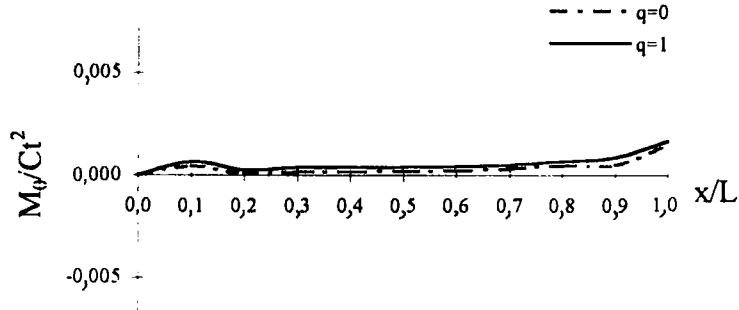




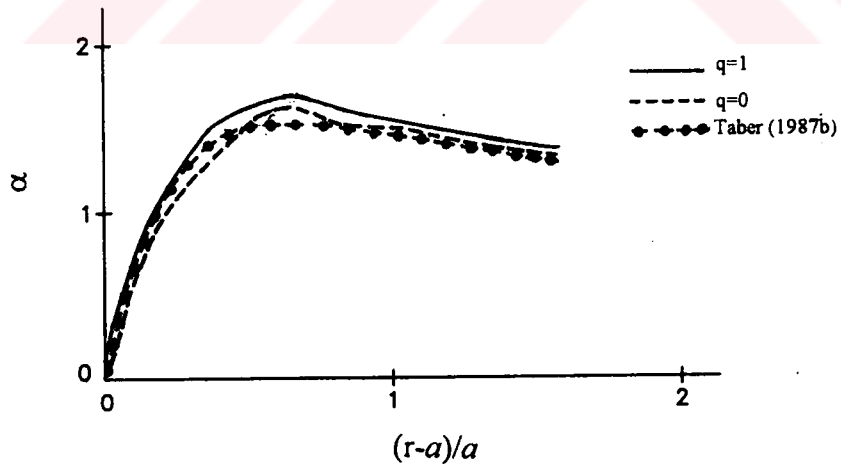
Şekil 4.84 Meridyenel Eğilme Momentinin Kabuk Boyunca Değişimi
($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)



Şekil 4.85 Meridyenel Eğilme Momentinin Ankastre Mesnet Civarında Değişimi
($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)



Şekil 4.86 Paralel Çember Eğilme Momentinin Kabuk Boyunca Değişimi
($a/t = 20$, $L/a = 10$, $\alpha = 1,5$)



Şekil 4.87 Ankastre Mesnet Civarında Radyal Doğrultudaki Yerdeğiştirmenin Yük Parametresine Göre Değişimi ($a/t = 20$, $L/a = 10$)

(4.1), (4.2) ve (4.3)'de sunulan küresel kabuk problemlerinin çözümlerine ait grafikler dikkatlice incelendiğinde görülen Teori I ve Teori II'ye karşı gelen değerlerdeki farklılıklar, iç basınç etkisi altındaki silindirik kabuk probleminde neredeyse tamamen yok olmaktadır. Şekil (4.68)'de radyal doğrultudaki yerdeğiştirme $(r-a)$ 'nın şekil değişiminden sonrasındaki düşey koordinata göre değişimini gösteren grafikte, Teori I ve Teori II'ye karşı gelen değerler ve Taber (1987b)'nin büyük şekil değiştirme yapan, enine normal şekil değiştirmelerinin dahil edildiği, enine kayma şekil değiştirmelerinin ihmal edildiği asimtotik çözümüne ait değerler verilmiştir. Bu grafikte, Teori I'e karşı gelen değerlerin Taber (1987b)'nin asimtotik çözümüne daha yakın olduğu görülmüştür. Şekil (4.71)'de meridyenel germe λ_ϕ 'nin grafiğinde, Teori I ve Teori II'ye karşı gelen değerlerin ankastre mesnet bölgesi civarında Taber (1987b)'den küçük değerler aldığı $(x/R) > 0,2$ için ise yaklaşık olarak aynı sonuçları taşıdığı görülmüştür. Şekil (4.82)'de meridyenel normal kesit kuvveti N_ϕ 'nin ankastre mesnet civarında değişimini gösteren grafikte, Teori I ve Teori II'ye karşı gelen değerlerin Taber (1987b)'den daha küçük bir değerden başladığı, $(x/R) > 0,2$ için ise hemen hemen aynı değerleri aldıkları gözlenmiştir. Şekil (4.85)'deki meridyenel eğilme momentinin ankastre mesnet civarındaki değişimini gösteren grafiğinde, Teori I ve Teori II'ye karşı gelen değerlerin Taber (1987b)'ye göre daha küçük negatif sonuçlar verdiği, $(x/R) > 0,2$ bölgesinde ise üç teoriye karşı gelen değerlerin beraberce sifıra yaklaştığı görülmüştür.

Şekil 4.87 kuvvet-radyal yer değiştirme grafiğinde; Taber (1987b), Teori I ve Teori II'ye karşı gelen değerlerin benzerliği dikkat çekmiştir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada, sonlu şekil değiştirme ve/veya sonlu dönme yapan yüzeysel taşıyıcı sistemlerin teorik ve sayısal analizi yapılmıştır. Çalışmada dönele simetrik etkiler altında dönele yüzeyle incelenmiştir. Bundan sonraki çalışmalarda keyfi yükler altında keyfi geometriye sahip yüzeylelerin incelenmesi düşünülmektedir.

Enine normal şekil değiştirmeler ve enine kayma şekil değiştirmeleri göz önüne alınmıştır. İncelenen malzemenin kauçuk benzeri olduğu varsayılmıştır. Uygulamalarda Neo-Hookean malzemesi söz konusu edilmiştir. Ancak, yaklaşım geneldir ve herhangi bir kauçuk benzeri malzeme (ilgili şekil değiştirme enerji fonksiyonunun biliniyor olması durumunda) sonlu şekil değiştirme ve/veya sonlu dönme yapan yüzeysel taşıyıcı sistemlere ait problemler de söz konusu edilebilir.

Problem hem fiziksel hem de geometrik olarak kuvvetle nonlineerdir ve nonlinear diferansiyel denklemler, nonlinear cebirsel denklemler ve lineer ve nonlinear sınır koşullarını içermektedir. İlgili nonlinear diferansiyel denklemler integrasyon matrisleri yöntemi ile cebirsel hale getirilebilmiştir. Cebirsel denklemlerin çözümü için Newton-Raphson yöntemi ardışık yaklaşımlarla kullanılmış, çok büyük şekil değiştirmelerin ve çok büyük dönmelerin bulunduğu problemlerde bile yakınsama sağlanabilmiştir.

Küresel kabuk problemlerinin çözümünde, tepe noktalarında tekillikler ile karşılaşmıştır. Bu sorun bu bölgelerde $\lambda_\theta \approx \lambda_\phi$, $K_\theta \approx K_\phi$ ve $N_\theta \approx N_\phi$ yaklaşımlarıyla giderilmiştir.

Sayısal çözüm aşamasında nokta sayısının azlığı hassasiyeti azaltmakta, nokta sayısının fazlalığı da bilgisayar programında boyut yetersizliği problemini çıkarmaktadır. Bu sorun; hassasiyetin daha önemli olduğu mesnetler ve yüklemelerde süreksizliğin olduğu

bölgelerde daha küçük adım uzunlukları diğer bölgelerde göreceli olarak daha büyük adım uzunlukları seçilerek giderilmiştir.

Çalışmada, enine kayma şekil değiştirmesi düzeltme faktörü (g), sonsuz küçük şekil değiştirmeye karşı gelen sabit bir değer olarak alınmıştır. g faktörünün, sonlu şekil değiştirmeler için daha doğru ve hassas olarak göz önüne alınması daha sonraki çalışmalara bırakılmıştır.

Sınır koşullarının ayrıntılı olarak incelenmesi bu çalışmanın dışında bırakılmıştır. İlgili problemlerde yaklaşık sınır koşullarının kullanılması gerekebilmektedir (Bölüm 4.4'te olduğu gibi). Doğal sınır koşulları ile ilgili çalışmaların daha sonra yapılması düşünülmektedir.

Küresel kabuk problemine ait grafikler ((4.1) , (4.2) ve (4.3) bölümlerinde sunulan sonuçlar) dikkatlice incelendiğinde Teori I ve Teori II'ye karşı gelen değerlerdeki farklılıkların çok küçük mertebelerde oldukları gözlenmiştir. Teori I ve Teori II'ye karşı gelen değerlerdeki farklılıkların mertebeleri, iç basınç etkisi altındaki silindirik kabuk probleminde oldukça azaldığı görülmektedir.

Deneysel çalışmalar baz alındığında; sonlu şekil değiştirme ve sonlu dönme yapan, enine normal şekil değiştirmelerin ve de enine kayma şekil değiştirmelerinin gözönüne alındığı Teori I ve Teori II'ye karşı gelen değerlerle, küçük şekil değiştirmeler ve orta büyüklükteki dönmeleri kapsayan, enine kayma şekil değiştirmelerinin ihmal edildiği teorilere karşı gelen değerlerin, deneysel çalışmalarda elde edilen değerlere çok yakın olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

1. Bathe, K.J. and Bolourchi, S., 1980, " A Geometric and Material Non-Linear Plate and Shell Element", *Comput. Struct.*, 11, pp.23-48.
2. Bathe, K.J., 1982, "Finite Element Procedures In Engineering Analysis", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
3. Bathe, K.J., Bolourchi, S., 1980, " A Geometric and Material Nonlinear Plate and Shell Element", *Computers and Structures*, Vol.11, pp.23-48.
4. Başar, Y. Ding, Y., 1990, "Finite-Rotation Elements for the Non-Linear Analysis of Thin Shell Structures", *Int. J. Solids Structures*, Vol.26, No.1, pp. 83-97.
5. Başar, Y., 1987, "A Consistent Theory of Geometrically Non-Linear Shells with an Independent Rotation Vector", *Int.J.Solids Structures*, Vol.23, No.10, pp.1401-1415.
6. Başar, Y., Krätzig, W.B, 1985, "Mechanik der Flachentragwerke-Theorien, Berechnungsmethoden", *Anwendungsbeispiele*, Friedr., Vieweg und Sohn, Braunschweig / Wiesbaden.
7. Başar, Y., Krätzig, W.B., 1989, "A Consistent Shell Theory for Finite Deformations", *Acta Mechanica*, Vol.76, pp.73-87.
8. Başar, Y., 1993, "Modelling of Shells", Part I, *Cahers De Mecanique-Lille*.
9. Bergmann, V.L., Mukherjee, S., 1990, "A Hybrid Strain Finite Element for Plates and Shells", *Int. Jour. for Num. Met. In Eng.*, Vol. 30, pp.233-257.
10. Biricikoğlu, V., Kalnins, A., 1971, "Large Elastic Deformations of Shells with the Inclusion of Transverse Normal Strain ", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 7, pp. 431-444.
11. Brodland, G. W., Cohen, H., 1987, "Large- Strain Axisymmetric Deformation of Clindrical Shells", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 54, pp. 287-291.
12. Brodland, G., W., 1986, "Non-Linear Deformation of Uniformly Loaded Circular Plates", *Solid Mech. Arc.*, Vol.11, pp.219-256.
13. Brodland, G.W., Cohen, H., 1987, "Deflection and Snapping of Spherical Caps", *Int.J.Solids Structures*, Vol. 23, No.10, pp.1341-1356.
14. ağal, B., 1989, "Sayısal Analiz", Se Kitap Dağıtım, İstanbul.

15. Chang, B., Shabana, A.A., 1990, "Non-Linear Finite Element Formulation for the Large Displacement Analysis of Plates", *Journal of Applied Mechanics*, Vol.57, pp.707-718.
16. Cohen, H., Pastrone, F., 1986. "Axisymmetric Equilibrium States of Non-Linear Elastic Cylindrical Shells", *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol.21, No.1, pp.37-50.
17. Cook, R., D., 1981, "Concepts and Application of Finite Element Analysis", John Wiley, New York.
18. Dennis, S.T., Palazotto, A.N., 1990, "Large Displacement and Rotational Formulation for Laminated Shells Including Parabolic Transverse Shear", *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol.25, No.1, pp.67-85.
19. Dong, S., B., Pister, K., S., Taylor, R., L., 1962, "On the Theory of Laminated Anisotropic Shells and Plates", *J.Aeronaut. Sei*, pp. 969-998.
20. Eberlein, R., Wriggers, P., Taylor, R.L., 1993, "A Fully Non-Linear Axisymmetrical Quasi-Kirchhoff-Type Shell Element for Rubber-Like Materials", *Int.J.For.Num.Mek.in Eng.*, Vol.36, pp. 4027-4043.
21. Evan-Iwanowski, R.M., et al., (1963), "Local Buckling of Shells", *Developments in Mechanics*, Vol. 2, Ostrach, S., and Scanlan, R.H., eds., Pergamon, New York, pp.221-251.
22. Flügge, W., 1973, "Stresses in Shells", Second Edition, Springer-Verleg New York.
23. Fu, D., Rajagapol, K.R., Szeri, A.Z., 1990, "Non-Homogeneous Deformations in A Wedge of Mooney-Rivlin Material", *Int.J. Non-Linear Mechanics*, Vol.25, No.4, pp.375-387.
24. Girkmann, K., Çev.;Tameröglu,S., 1965, "Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler I", Matbaa Tek. Baş., İstanbul.
25. Girkmann, K., Çev.;Tameröglu,S., 1991,"Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler", İ.T.Ü., İnş. Fak. Mat., İstanbul.
26. Green, A. E., Zerna, W., Çev.;Cinemre, V., 1971, "Teorik Elastisite", Çağlayan Basımevi, İstanbul.
27. Grutmann, F., Stein, E., Wriggers, P., 1989, "Theory and Numerics of Thin Elastic Shells with Finite Rotations ", *Ingenieur Archiv*, Vol.59, pp.54-67.
28. Harszman, M., 1977, "Finite Element Static Analysis of Axisymmetric Solids with Material and Geometric Nonlinearities", *Journal of Pressure Vessel Techeology*, August 1977, pp. 387-393.

- 29.Hsiao, K., 1987, "Nonlinear Analysis of General Shell Structures by Flat Triangular Shell Element", Computers and Structures, Vol.25, No.5, pp.665-675.
- 30.Hughes, T., Carnoy, E., 1983, "Non-Linear Finite Element Shell Formulation Accounting for Large Membrane Strains", Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering, Vol.39, pp.69-82.
- 31.Hughes, T., J., R. and Liu, W., K., 1981, "Non-Linear Finite Element Analysis of Shells", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 26(3), pp.331-362.
- 32.Kampski, M.H., Taber, L.A., Fong-ChinSu, 1988, "Large Elastic Deformation of Shear Deformable Shells of Revolution: Numerical and Experimental Results", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 55, pp. 629-634.
- 33.Keppel, W., J., 1984, "Finite Axisymmetric Deformation of a Thin Shell of Revolution", Ph.D. Dissertation, University of Arizona.
- 34.Keskinel, F., Kumbasar, N., 1976, "Sürekli Temeller ve Dönel Kabuklar", Matbaa. Tek. Bas., İstanbul.
- 35.Koiter, W., T., 1960, "A Consistent First Approximation in the General Theory of Thin Elastic Shells", Proc.Symp. Theory of Thin Elastic Shells, p.12, North-Holland, Amsterdam.
- 36.Koiter, W.T., 1966, "On the Non-Linear Theory of Thin Elastic Shells", Proc. Kon. Ned. Ak. Wet., Ser B, 69, 1-54.
- 37.Köksal, E., 1975, "Silindirik Kabukların Başlangıç Değerleri Metodları İle Hesabı", Doktora Tezi, İ. T. Ü. Mimarlık Fakültesi Baskı Atölyesi, İstanbul.
- 38.Kraus, H, 1967, "Thin Elastic Shells", John Wiley and Sons, Inc., New York.
- 39.Kumbasar, N., Pala, S. Aydoğan, M., Altan, M., Yardımcı, N., Yıldırım, H., 1992, "Bilgisayar Programları İle Sayısal Hesap", TMMOB.
- 40.Kumbasar, N., 1992, "Kabuk Teorisi Ders Notları", İstanbul Teknik Üniversitesi.
- 41.Lau, J. H., Jeans, A.H., 1989, "Nonlinear Analysis of Elastomeric Keyboard Domes", Journal of Applied Mechanics, Vol.56,pp. 751-755.
- 42.Libai, A., Simmonds, J., G., 1981, "Large-Strain Constitutive Laws for the Cylindrical Deformation of Shells" Int.J. of Non-Linear Mechanics., Vol 16, pp.91-103.
- 43.Librescu, L., Schmidt, R., 1988, "Refined Theories of Elastic Anisotropic Shells Accounting for Small Strains and Moderate Rotations", Int. J. Non-Linear Mech, 23, pp. 217.

44. Lukaszewicz, S., Szyszkowski, W., 1979, "Geometrical Analysis of Large Elastic Deflections of Axially Compressed Cylindrical and Conical Shells", *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol. 14, pp.273-284.
45. Makowski, J., Stumpf, H., 1986. "Finite Strains and Rotations in Shells" *Euromech Colloquium 197*, pp. 175-194.
46. Makowski, J., Stumpf, H., 1989, "Finite Axisymmetric Deformation of Shells of Revolution with Application to Flexural Buckling of Circular Plates", *Ingenieur-Archiv* 59, pp. 456-472.
47. Marlowe, M., B. And Flügge, W., 1968, "Some New Developments in the Foundations of Shell Theory ", *ISMC*.
48. Merouch, K., A., 1986, "On a Formulation of a Non-Linear Theory of Plates and Shells with Applications", *Comput. Struct.*, pp.691-705.
49. Mungan, I., 1988, "Nonlinearity of R/C Shells", *Bull. Tech. Univ. İstanbul*, Vol. 41, pp. 285-302.
50. Naghdi, P.M., 1972, "The Theory of Plates and Shells", *Encyclopedia of Physics*, 2nd ed., Vol. VI a/2, Flügge, S., ed., Springer-Verlag, New York, pp.425-640.
51. Nolte, J. P., Chrocielcwskr, J., 1987, "On the Non-Linear Analysis of Thin Shells Undergoing Small Strains and Large Rotations", *ZAMM 2 angew. Math. Mech.* 67, pp.226-228.
52. Noor, A. And Peters, J., 1986, "Non-Linear Analysis of Anisotropic Panels", *AIAA*, pp.1545-1569.
53. Oden, J.T., 1969, "Finite Element Applications In Nonlinear Structural Analysis", *Symposium on Application of Finite Element Methods in Civil Engineering*, Nashville, pp. 419-456.
54. Oliver, J. and Onate, E., 1984, "A Total Lagrangian Formulation for the Geometrically Non-Linear Analysis of Structures Using Finite Elements", *Int.J. Num. Meth. Eng.*, 20, pp.2253-2281.
55. Orgill, G., Wilson, J.F., 1986, "Finite Deformations of Nonlinear Orthotropic Cylindrical Shells", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, pp. 257-265.
56. Palazotto, A.N., Dennis, S.T., 1992, "Nonlinear Analysis of Shell Structures", *American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc.*, Washington.
57. Parisch, H., 1981, "Large Displacements of Shells Including Material Nonlinearities", *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering*, Vol.27, pp.183-214.

58. Parisch, H., 1991, "An Investigation of a Finite Rotation Four Node Assumed Strain Shell Element", *Int. Jour for Num. Met. In. Eng.*, Vol. 31, pp.127-150
59. Parnell, T.K., 1984, "Numerical Improvement of Asymptotic Solutions and Nonlinear Shell Analysis"; Ph.D.Thesis, Stanford University.
60. Pietraszkiewicz, W., 1984, "Lagrangian Description and Incremental Formulation in the Non-Linear Theory of Thin Shells", *Int. J. Non-Linear Mech.*, 19, pp. 115-140.
61. Polak, M., A., Vecchio, F., J., 1993, "Non linear Analysis of Reinforced-Concrete Shells", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 119, No: 12, pp. 3439-3462.
62. Press, W., H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., 1986, "Numerical Recipes", Cambridge University Press, Cambridge.
63. Ranjan, G.V., Steele, C.R., 1977, "Large Deflection of Deep Spherical Shells under Concentrated Load" , *AIAA/ASME/ASCE/AHS 18th Structures, Structural Dynamics and Materials Conf.*, pp.269-347.
64. Reissner, E., 1969, "On Finite Symmetrical Deflections of Thin Shells of Revolution", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 36, pp. 267-270.
65. Reissner, E., 1972, "On Finite Symmetrical Strain in Thin Shells of Revolution", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 39, pp. 1137-1138.
66. Reulen, F., 1993, "A Geometrically Nonlinear Curved Shell Element with Constant Stress Resultants", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 106, pp. 315-352.
67. Rivlin, R.S., Saunders, D.W., 1951, "Large Elastic Deformations of Isotropic Materials VII Experiments on the Deformation of Rubber", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series a/t = 20 , L/a = 10 , $\alpha = 1.5$* , Vol.243, pp.251-288
68. Roca, P., Mari, A.R., 1993, "Nonlinear Geometric and Material Analysis of Prestressed Concrete General Shell Structures", *Computers and Structures*, Vol. 46, No.5, pp. 917-929.
69. Saada, A., S., 1974, "Elasticity Theory and Applications", Pergaman Press, Oxford.
70. Salvadori, M., G., Baron, M., L., 1966, "Numerical Methods in Engineering", Prentice-Hall of India L. T. D., New Delhi.
71. Schmit, L., A., and Monforton, B., R., 1970, "Finite Deflection Discrete Element Analysis of Sandwich Plates and Cylindrical Shells with Laminated Faces", *AIAAJ.*, pp.1454-1468.

72. Simmonds, J., G., 1986b, "The Strain-Energy Density of Rubber-Like Shells of Revolution Undergoing Torsionless, Axisymmetric Deformation (Axishells)", *Journal of Applied Mechanics*, Vol.53, pp.583-586.
73. Simmonds, J.,G., Danielson, D.A., 1972, "Non-Linear Shell Theory With Finite Rotations and Stress-Function Vectors", *Journal of Applied Mechanics*, pp. 1085-1090.
74. Simmonds, J.G., 1986a, "A New Displacement Form for the Nonlinear Equations of Motion of Shells of Revolution", *Journal of Applied Mechanics*, Vol.52 ,pp. 507-521.
75. Simmonds, J.G., 1987, "The Strain-Energy Density of Compressible Rubber-Like Axishells", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 54, pp.453-454.
76. Saleeb, A.F., Chang, T.Y., Graf, W., Yingyeunyong, S., 1990, "A Hybrid/Mixed Model for Non-Linear Shell Analysis and Its Applications to Large-Rotation Problems", *Int. Jour. for. Num. Meth. in Eng.*, Vol. 29, pp. 407-446.
77. Steele, C.R., 1976, "Application of the WKB Method in Solid Mechanics", *Mechanics Today 3*, pp.243-295.
78. Stein, E., Berg, A. and Wagner, W., 1982, "Buckling of Shells", *Proc. of a State-of -the-Art Colloquium*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
79. Stolarski, H., Beyschtco, T., Carpenters, N. And Kennedy, J., 1984, "Colloapse Analysis of Sructures", Edited by Sobel, Press. Vess. Piping 84.
80. Surana, K., S., 1983, "Geometrically Non-Linear Formulation for the Curve Shell Elements", *Int.J.Num. Meth.Eng.*, 19, pp.581-615.
81. Surana, K.S., 1986, "A Generalized Geometrically Non-Linear Formulation with Large Rotations for Finite Elements with Rotational Degrees of Freedom", *Comput. Struct.*, pp.24-47.
82. Taber, L.A., 1982, "Large Deflection of a Fluid-Filled Spherical Shell Under a Point Load", *J. Appl. Mech.*, 49, pp.121-128.
83. Taber, L. A., 1987b, "On Boundary Layers in a Pressurized Mooney Cylinder", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 54, pp.280-286.
84. Taber, L., 1985, "On Approximate Large Strain Relations for Shell of Revolution", *Int. J. Nonlinear Mechanics*, Vol. 20, No 1, pp. 27-32.
85. Taber, L., A., 1988, "On A Theory for Large Elastic Deformation of Shells of Revolution Including Torsion and Thick-Shell Effects", *Int.J.Solids Structures*, Vol.24, No.9, pp.973-985.

86. Taber, L. A., 1989, "Comparison of Elasticity and Shell Theory Results for Large Deformation of Rubber Like Shells", *Int.J.Non-Linear Mechanics*, Vol.24, No.3, pp.237-248.
87. Taber, L.A., 1987, "Large Elastic Deformation of Shear Deformable Shells of Revolution", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.54, pp. 578 - 584.
88. Taber, L.A., 1987a, "Asymptotic Expansions for Large Elastic Strain of a Circular Plate", *Int.J.Solids Structures*, Vol.23, No.6, pp.719-731.
89. Timoshenko, S., Çev.; İnan, M., Sönmez, F., 1964, "Plak ve Kabuklar Teorisi", İ.T.Ü., İnş.Fak. Matbaası. İstanbul.
90. Tottenham, H., Barony, S., Y., 1978, "Mixed Finite Element Formulation For Geometrically Non-Linear Analysis of Shells of Revolutions", *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, pp. 195-201.
91. Treloar, L. R. G., 1975, "The Physics of Rubber Elasticity", 3rd ed., Clarendon Press, Oxford.
92. Wagner, W., 1990, "A Finite Element Model for Non-Linear Shells of Revolution. with Finite Rotations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.29, pp. 1455-1471.
93. Yükseler, F., 1986, "İnce Dönel Kabukların Dönel Simetrik Olan ve Olmayan Yükler Altında Statik Hesabı ile İlgili Bir Yaklaşım", Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi.
94. Yükseler, F., Dikmen, M., 1989, "New Approaches in the Application of the Initial Value Methods to Problems of Thin Shells of Revolution with Long Meridians", Vol. 42, Num.2, pp.221-234 *Bulletin of the Technical University of İstanbul*.
95. Yükseler, R.F., 1996a, "The Strain Energy Density of Compressible, Rubber-like Shells of Revolution", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 63, pp.419-423.
96. Yükseler, R.F., 1996b, "On the Definition of the Deformed Reference Surface of Rubber -Like Shells of Revolution", *Journal of Applied Mechanics*, Vol.63, pp.424-428.



EK 1

$[A_D]$, $[A]^*$, $\{a_D\}$ matrislerinin Neo-Hookean malzemesi için açık ifadeleri:

$$[A_D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2Ct/r_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(4 \times 7)}, \quad (E1.1)$$

$$[A]^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2r_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(3 \times 7)}, \quad (E1.2)$$

$$\{a_D\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(4 \times 1)} \quad (E1.3)$$

$\{a_D\}$, Neo-Hookean malzemesi söz konusu olduğunda sıfıra eşit olmaktadır. Ancak başka bir malzeme söz konusu edilerek hesap yapıldığında ilgili iki boyutlu şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunun λ_θ ve K_θ 'ya göre türevlerinde (3.5c,d) lineer terimler olabilmektedir.



EK 2

Düzgün yayılan iç basınç özel durumunda $\{N_D\}, \{N\}^*$ vektör matrislerinin bileşenleri, Neo-Hookean malzemesi için aşağıdaki şekilde belirlenmektedir:

$$N_D^1 = \lambda_\phi \cos \phi + \eta \sin \phi \quad (E2.1)$$

$$N_D^2 = 0 \quad (E2.2)$$

$$\begin{aligned} N_D^3 = & C \cdot t [-2\lambda_\phi^{-2}\lambda_\theta^{-3} + \frac{t^2}{12} \{K_\phi^2 [q(-2\lambda_\phi^{-2}\lambda_\theta^{-3} + 4\lambda_\phi^{-6}\lambda_\theta^{-5}) - 16\lambda_\phi^{-6}\lambda_\theta^{-5}] \\ & + K_\phi K_\theta [-20\lambda_\phi^{-5}\lambda_\theta^{-6} - (1-q)(-3\lambda_\phi^{-1}\lambda_\theta^{-4} - \lambda_\phi^{-3}\lambda_\theta^{-2} + 10\lambda_\phi^{-5}\lambda_\theta^{-6})] \\ & - K_\theta 2\lambda_\phi \lambda_\theta \sin \phi_0 r_0^{-1} [4\lambda_\phi^{-5}\lambda_\theta^{-5} - (1-q)(\lambda_\phi^{-1}\lambda_\theta^{-3} + \lambda_\phi^{-3}\lambda_\theta^{-1} - 2\lambda_\phi^{-5}\lambda_\theta^{-5})] \\ & + K_\theta^2 [q(-2\lambda_\phi^{-2}\lambda_\theta^{-3} + 6\lambda_\phi^{-4}\lambda_\theta^{-7}) - 24\lambda_\phi^{-4}\lambda_\theta^{-7}] + \frac{1}{r_0^2} (-4 \sin \phi \sin \phi_0 \lambda_\phi \lambda_\theta \\ & + 4 \sin^2 \phi_0 \lambda_\phi^2 \lambda_\theta^3) [q(\lambda_\phi^{-2}\lambda_\theta^{-2} - \lambda_\phi^{-4}\lambda_\theta^{-6}) + 4\lambda_\phi^{-4}\lambda_\theta^{-6}] \} - pr(\lambda_\phi \sin \phi - \eta \cos \phi) \end{aligned} \quad (E2.3)$$

$$\begin{aligned} N_D^4 = & C \cdot t \cdot \cos \phi [\frac{t^2}{12} \{K_\phi [4\lambda_\phi^{-5}\lambda_\theta^{-5} - (1-q)(\lambda_\phi^{-1}\lambda_\theta^{-3} + \lambda_\phi^{-3}\lambda_\theta^{-1} - 2\lambda_\phi^{-5}\lambda_\theta^{-5})] \\ & + K_\theta [q(\lambda_\phi^{-2}\lambda_\theta^{-2} - \lambda_\phi^{-4}\lambda_\theta^{-6}) + 4\lambda_\phi^{-4}\lambda_\theta^{-6}] \} + \bar{H}(\lambda_\phi \sin \phi - \eta \cos \phi) \\ & - pr^2(\lambda_\phi \cos \phi + \eta \sin \phi) / 2 \end{aligned} \quad (E2.4)$$

$$\begin{aligned} N^{*1} = & C \cdot t \cdot r_0 [-2\lambda_\phi^{-3}\lambda_\theta^{-2} - 2\frac{\eta^2}{g}\lambda_\phi^{-3} + \frac{t^2}{12} \{K_\phi^2 [q(-2\lambda_\phi^{-3}\lambda_\theta^{-2} + 6\lambda_\phi^{-7}\lambda_\theta^{-4}) \\ & - 24\lambda_\phi^{-7}\lambda_\theta^{-4}] - \lambda_\theta^2 \sin \phi_0 r_0^{-1} K_\phi [4\lambda_\phi^{-5}\lambda_\theta^{-5} - (1-q)(\lambda_\phi^{-1}\lambda_\theta^{-3} + \lambda_\phi^{-3}\lambda_\theta^{-1} \\ & - 2\lambda_\phi^{-5}\lambda_\theta^{-5})] + K_\phi K_\theta [-20\lambda_\phi^{-6}\lambda_\theta^{-5} - (1-q)(-\lambda_\phi^{-2}\lambda_\theta^{-3} - 3\lambda_\phi^{-4}\lambda_\theta^{-1} \\ & + 10\lambda_\phi^{-6}\lambda_\theta^{-5})] + \frac{1}{r_0^2} (-2 \sin \phi \sin \phi_0 \lambda_\theta^2 + 2\lambda_\phi \lambda_\theta^4 \sin^2 \phi_0) [q(\lambda_\phi^{-2}\lambda_\theta^{-2} \\ & - \lambda_\phi^{-4}\lambda_\theta^{-6}) + 4\lambda_\phi^{-4}\lambda_\theta^{-6}] + K_\theta^2 [q(-2\lambda_\phi^{-3}\lambda_\theta^{-2} + 4\lambda_\phi^{-5}\lambda_\theta^{-6}) - 16\lambda_\phi^{-5}\lambda_\theta^{-6}] \} \\ & - \bar{H} \cos \phi - pr^2 \sin \phi / 2 \end{aligned} \quad (E2.5)$$



$$N^{*2} = C \cdot t \cdot r_0 \left[\frac{t^2}{12} \{ 2K_\phi [q(\lambda_\phi^{-2} \lambda_\theta^{-2} - \lambda_\phi^{-6} \lambda_\theta^{-4}) + 4\lambda_\phi^{-6} \lambda_\theta^{-4}] + K_\theta [4\lambda_\phi^{-5} \lambda_\theta^{-5} - (1-q)(\lambda_\phi^{-1} \lambda_\theta^{-3} + \lambda_\phi^{-3} \lambda_\theta^{-1} - 2\lambda_\phi^{-5} \lambda_\theta^{-5})] \} \right] \quad (\text{E2.6})$$

$$N^{*3} = C \cdot t \cdot r_0 \left[\frac{2\gamma}{g} \lambda_\phi^{-2} \right] - \bar{H} \sin \phi + pr^2 \cos \phi / 2 \quad (\text{E2.7})$$



EK 3

Bilgisayar programı Microsoft Visual Basic 4.0'da, geniş bellek ihtiyacını karşılamak amacıyla Extended Memory'i kullanabilen bir programlama lisanında yazılmıştır ve Windows 95'te, 32 bit olarak çalışmaktadır.

Bilinmeyenlerin hesabında Newton Raphson Yöntemi kullanılmış, neticeler Microsoft Excel'e aktarılmış ve grafikleri hazırlanmıştır.



ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi	19. 07. 1966	
Doğum Yeri	İstanbul	
Lise	1980-1983	Yahya Kemal Beyathı Lisesi
Lisans	1983 - 1988	Yıldız Üniversitesi Mühendislik Fak. İnşaat Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	1988 - 1990	Yıldız Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Doktora	1990 - 1998	Yıldız Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Mekanik Programı
Çalıştığı Kurum(lar)		
	1985-1986	Endem İnşaat ve Sanayii Tic.A.Ş
	1989-Devam ediyor	Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Mühendisliği, Araştırma Görevlisi

