

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

106208

KONİK KABUĞUN DİNAMİK STABİLİTE
ANALİZİ

İnş.Yük.Müh. Serap ÇABUK

F.B.E İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Programında
Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

106208

Tez Savunma Tarihi : 30.03.2001
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ercüment KÖKSAL
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. İlhan EREN
: Prof. Dr. Antonio TRUPIA

İSTANBUL, 2001

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iv
ÖNSÖZ	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
2. İNCE KABUK TEORİSİ VE KONİK KABUK DENKLEMLERİ	3
2.1 İnce Kabuk Teorisi Kabulleri	3
2.1.1 Birinci mertbe teorisi kabulleri	3
2.1.2 İkinci mertbe teorisi kabulleri	3
2.2 Dairesel Konik Kabuk Denklemleri	4
3. DİNAMİK BURKULMA ANALİZİ	9
3.1 Budiansky-Roth Kriteri	9
3.2 Faz-Düzlem Kriteri	9
3.3 Kritik Zaman Artımı	10
3.4 Dinamik Analiz	10
3.4.1 Sönümsüz serbest titreşim	11
3.4.2 Zorlanmış titreşim	12
3.4.2.1 Newmark yöntemi	12
3.4.2.2 Wilson θ yöntemi	14
3.4.3 Kütle matrisi	16
4. TOPLAM POTANSİYEL ENERJİ VE SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ	18
4.1 Toplam Potansiyel Enerji Yöntemi	18
4.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi	23
4.2.1 Sonlu elemanlar yönteminde yakınsama kriterleri	23
4.2.2 Konik ve silindirik sonlu eleman	24
4.2.2.1 I. Tip sonlu eleman	24
4.2.2.2 II. Tip sonlu eleman	29
5. SAYISAL UYGULAMALAR	32
5.1 I. Tip ve II. Tip Sonlu Eleman ile Konik Kabuğun Statik Kritik Yük Hesabı	32
5.2 I. Tip Sonlu Eleman ile Konik Kabuğun Dinamik Kritik Yük Hesabı	33
5.2.1 Eksenel basınç etkisindeki konik kabukların dinamik kritik yük hesabı	33
5.2.2 Hidrostatik basınç etkisindeki konik kabukların dinamik kritik yük hesabı	36
5.2.3 α ve L/R oranına bağlı olarak eksenel basınç etkisindeki konik kabukların dinamik kritik yük hesabı	39
5.2.4 α ve L/R oranına bağlı olarak hidrostatik basınç etkisindeki konik kabukların dinamik kritik yük hesabı	42

5.3	I. Tip Sonlu Eleman ile Silindirik Kabuğun Dinamik Kritik Yük Hesabı.....	45
5.3.1	Eksenel basınç etkisindeki silindirik kabukların dinamik kritik yük hesabı.....	45
5.3.2	Hidrostatik basınç etkisindeki silindirik kabukların dinamik kritik yük hesabı....	46
5.3.3	L/R oranına bağlı olarak eksenel basınç etkisindeki silindirik kabukların dinamik kritik yük hesabı	47
5.3.4	L/R oranına bağlı olarak hidrostatik basınç etkisindeki silindirik kabukların dinamik kritik yük hesabı.....	48
5.4	II. Tip Sonlu Eleman ile Konik Kabuğun Dinamik Kritik Yük Hesabı	50
6.	SONUÇ VE ÖNERİLER.....	53
KAYNAKLAR.....		56
EKLER.....		59
Ek 1 I. Tip silindirik kabuk sonlu elemana ait $[\Delta N_L]$ ve $[\Delta N_{NL}]$ matrisleri		60
Ek 2 I. Tip konik kabuk sonlu elemana ait $[\Delta N_L]$ ve $[\Delta N_{NL}]$ matrisleri		62
Ek 3 Konik kabuğun Newmark yöntemiyle dinamik kritik yüklerinin bulunması için hazırlanan programın akış diyagramı.....		64
Ek 4 II. Tip konik kabuk elemana ait $[F]$, $[G]$ türev matrisleri ve $[A]$ bağ matrisi		67
ÖZGEÇMİŞ.....		81

SİMGE LİSTESİ

ν	Poisson oranı
E	Elastisite modülü
D	Eğilme rijitliği
C	Mambran rijitliği
h	Kabuk kalınlığı
α	Koniklik açısı
r	Yarıçap
l	Kabuk boyu
θ	Açısal koordinat
u	x doğrultusundaki yer değiştirme
v	θ doğrultusundaki yer değiştirme
w	Radyal doğrultudaki yer değiştirme
φ	Dönme cinsinden yer değiştirme
w_i	Yer değiştirmeler
t	Kütlesel kuvvet
p	Yüzeysel kuvvet
q	Çizgisel kuvvet
Q	Tekil kuvvet
$(\dot{\quad})$	Zamana göre türev
m	Kütle matrisi
c	Sönüm matrisi
k	Rijitlik matrisi
$\{p\}$	Yük vektörü
\ddot{u}	İvme vektörü
\dot{u}	Hız vektörü
u	Yer değiştirme vektörü
F_I	Atalet kuvvetleri
F_D	Sönüm kuvvetleri
F_E	Elastik kuvvetler
ε	Şekil değiştirmeler
κ	Eğrilikler
σ	Normal gerilme
τ	Kayma gerilmesi

N	Kuvvet kesit tesiri
M	Moment kesit tesiri
$[N_0]_m$	Mambran kesit tesirleri
V	Toplam potansiyel enerji
V_i	İç kuvvetlerin işi
V_d	Dış kuvvetlerin işi
V_m	Mambran şekil değiştirme işi
V_e	Eğilme şekil değiştirme işi
δ	Varyasyon
u_0, v_0, w_0	Gerçek denge konumuna karşı gelen yer değiştirmeler
u, v, w	Komşu denge konumuna karşı gelen yer değiştirmeler
u_1, v_1, w_1	Gerçek denge konumuna karşı gelen yer değiştirmeler
$[N]$	Şekil fonksiyonu matrisi
$[\Delta N_L]$	Lineer türev matrisi
$[\Delta N_{NL}]$	Nonlineer türev matrisi
ρ	Birim kütle
$[\beta]$	Kinematik bağıntıların nonlineer terimlerini içeren matris
p_h	Hidrostatik basınç yükü
P	Eksenel basınç yükü
dyk	Dinamik yük katsayısı
Δt_{kr}	Kritik zaman artımı
Δt	Zaman artımı
p_{skr}	Statik kritik yük
p_{dkr}	Dinamik kritik yük
Ω	Hidrostatik basınç yükünün toplam potansiyel enerjisi

ÖNSÖZ

Danışmanım olarak öneri ve yardımları için, Anabilim Dalı Başkanı olarak bana karşı hep anlayışlı ve sabırlı davranıp destek olduğu için Prof.Dr. Ercüment KÖKSAL'a teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında, çıkmaza girdiğimde kapısını aşındırdığım ve kendime ikinci bir danışman olarak gördüğüm Prof.Dr. Türkan KÖKSAL'a teşekkür ederim.

İnternette rastlantı sonucu çalışmalarını bulduğum ve sorularıma verdiği yanıtlarla büyük ilerlemeler kaydetmeme neden olan Dr.Romil TANOVA, çalıştığım konuda en önemli kaynaklardan biri olan ve Türkiye'de bulamadığım makaleyi arayıp bulan ve ilgili başka makalelerle birlikte bana ulaştıran sevgili arkadaşım Hakan Paşa PARTAL'a teşekkür ederim.

Umutsuzluğa kapılıp bitiremeyeceğimi, bir sonuç alamayacağımı düşündüğüm anlarda kendime gelip devam etmemi sağlayan sevgili babam Ferhat ÇABUK, sevgili annem Saadet ÇABUK ve sevgili eşim Timurhan TİMUR'a teşekkür ederim. Hep yanımda oldukları için mutluyum.



ÖZET

Konik kabukların sonlu elemanlar yöntemiyle dinamik burkulma analizi yapılmıştır. Bu amaçla, hem silindirik kabuk için hem de konik kabuk için geliştirilmiş bir sonlu eleman tipi kullanılmıştır. Kullanılan elemana ait kütle, rijitlik ve geometrik rijitlik matrislerinin çıkarılışı ve probleme uyarlanması hem silindirik kabuk hem de konik kabuk için ayrıntılı olarak anlatılmıştır. Dinamik stabilite analizi yapmak için kabuğun, çeşitli yük kademelerine ait nonlinear terimleri de içeren hareket denklemlerini çözmek gereklidir. Her kademede yüke bağlı olarak belirlenen geometrik rijitlik matrisi, rijitlik matrisine eklenerek, nonlinear terimler probleme dahil edilmiştir. Bu çalışmada kabuğun, dinamik stabilitesini belirlemek için Budiansky-Roth kriteri kullanılmıştır. Bir referans noktası sağlamak amacıyla, membran denge denklemlerinden elde edilen ön burkulma membran gerilmeleri kullanılarak kabuğun, statik kritik yükü Trefftz kriterine göre belirlenmiştir. Kabuğun sönümsüz serbest titreşimi için hareket denklemi çözümlenerek buradan doğal titreşim frekansları ve modları elde edilmiştir. Bu sonuçlar kullanılarak dinamik burkulma analizi için gerekli olan kritik zaman artımı değerleri belirlenmiştir. Silindirik ve konik kabukların zorlanmış titreşim problemini çözmek için iki farklı dinamik analiz yöntemiyle çözüm yapılmıştır. Bunlar sırasıyla; doğrudan integrasyon yöntemlerinden, Newmark (nonlinear) ve Wilson θ (nonlinear) yöntemleridir. Bir bilgisayar programı hazırlanarak çözüm yapılmış ve sonuçlar grafiklerle verilmiştir. Sayısal örneklerde aksenal basınç ve hidrostatik basınç yükleri altındaki kabuklar çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar daha önce yapılmış çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

ABSTRACT

Dynamic buckling of shells is analysed by using finite elements method. For this purpose, a conical shell element which is valid on either cylindrical or conical shells is used. The finite element implementation of this element is described in details, including boundary conditions and consistent mass calculation. For dynamic stability analysis, equations of motion, including non-linear terms, must be solved for various load levels. In order to include nonlinear terms into problem, geometric stiffness matrix is calculated and added into the stiffness matrix at each load level. The Budiansky-Roth criteria is used to assess dynamic buckling behaviour of shell. For supplying a reference point, static critical load of the shell is obtained due to Trefftz criteria by using prebuckling membrane forces. First, equation of motion of the element subjected to undamped free vibration is solved and the natural vibration frequencies and modes are obtained. Then, by using these results, critical time step values, which is required for dynamic buckling analysis, is assessed. Forced vibration problems of various cylindrical and conical shells are solved with two different dynamic analysis methods: Newmark (nonlinear) and Wilson θ (nonlinear) methods. A computer program is prepared in MATLAB, mathematical analysis software, and the problems are solved with this program. Finally the results are represented with graphics and compared with past studies.



1. GİRİŞ

Doğada oldukça sık rastlanan kabuk formu; kapalı çok amaçlı salonların çatıları, büyük açıklıkların geçilmesi, silolar, boru hatları, uzay araçları, sputnikler, füzeler, uçak ve gemi gövdeleri, makina parçaları, kubbe ve minareler gibi geniş bir kullanım alanına sahiptir. Bunun sonucu olarak da kabuk yapılar, yıllardır bir çok araştırmaya konu olmuştur bundan sonra da konu olmaya devam edecektir.

Kabuk yapılar, statik ve dinamik olmak üzere çeşitli yüklere maruz kalırlar. Bu yükler, yapının büyük şekil değiştirmeler yapmasına ve kararlılığını kaybedip göçmesine neden olabilirler. Araştırmacılar son yıllarda statik ve dinamik yüklenmiş kabuklar üzerine bir çok çalışma yapmışlardır. Yapıların statik veya dinamik dengesini ve bu dengenin kararlı olup olmadığını incelemişlerdir. Bu konuda teoriler geliştirilmiş ve deneyler yapılmıştır.

İlk olarak Volmir (Volmir,1958) aksenal yüklü kabukların dinamik burkulma problemini ortaya koymuş ve Galerkin yöntemiyle çözmüştür. Humphrey ve Bodner (Humphrey,1962) darbe yükü altında ankastre küresel kapakların aksenal simetrik dinamik burkulma problemini çözmüşlerdir. Budiansky ve Roth (Budiansky,1962) ve Simites (Simites,1967), aniden uygulanan adım yük altındaki küresel kapakların dinamik burkulmasını incelemişlerdir. Budiansky ve Roth'un bu çalışması daha sonra yapılan çalışmalara önemli bir kaynak olmuş ve yazarların adıyla anılan bir kriter haline gelmiştir. Bu çalışmalarda Rayleigh-Ritz ve Galerkin yöntemlerini kullanmışlardır. Coppa ve Nash (Coppa,1964) ve Roth ve Klosner (Roth,1964) silindirik kabukların dinamik burkulması problemi üzerinde potansiyel enerji yöntemini kullanarak çalışmışlardır. Archer ve Lange (Archer, 1965) basık küresel kabukların dinamik stabilite davranışını sonlu farklar tekniği ve Potter yöntemiyle sayısal olarak incelemişlerdir. Al-Hassani vd (Al-Hassani,1970) basınç etkisine maruz ince cidarlı metal silindirik tüplerin dinamik burkulma davranışına ait teorik ve deneysel çalışmalar yapmış ve yayınlamışlardır. Svalbonas ve Klanins (Svalbonas, 1977), Hsu (Hsu,1974) ve Simites (Simites,1987) silindirik kabukların dinamik burkulmasını değişik açılardan incelemişlerdir. Simites (Simites,1983 ve 1989) ani yüklenen tabakalı silindirik kabukların dinamik stabilitesini ve statik ön yüklemenin kritik dinamik burkulma yüküne etkisini incelemiştir. Mustafa vd (Mustafa, 1993) hidrostatik basınca maruz tüplerin dinamik burkulma davranışı üzerine çalışmışlardır.

Dinamik burkulma davranışı üzerine yapılan çalışmalar genellikle silindirik ve küresel kabuklar ele alınarak yapılmıştır. Çözüm için ise Rayleigh-Ritz, Galerkin ve Runge-Kutta gibi

başlangıç değer yöntemleri kullanılmıştır.

Bu çalışmada konik ve silindirik kabukların dinamik burkulma davranışı, varyasyon yöntemlerinden toplam potansiyel enerji yöntemi kullanılarak sonlu elemanlar tekniği ile incelenmiştir. Sonlu elemanlar tekniği bu gibi doğrusal olmayan terimleri de içeren problemlerin çözümü için iyi sonuç veren önemli bir araçtır. Bu teknik ile konik ve silindirik kabukların statik kritik burkulma yükleri bulunmuştur. Bunun için ön burkulma dönmelerini içermeyen membran denge denklemlerinden elde edilen ön burkulma membran gerilmeleri kullanılmıştır. Dairesel konik kabuğun toplam potansiyel enerjisinin ikinci varyasyonu yazılarak, Trefftz kriteri ile stabilite denklemleri elde edilmiş ve katsayılar determinantını sıfır yapan özdeğer problemi çözülerek statik kritik yük belirlenmiştir. Statik kritik yük değerleri referans alınarak değişik yük kademeleri altında kabukların, nonlinear terimleri de içeren hareket denklemleri çözülmüştür. Her yük kademesinde hesaplanan geometrik rijitlik matrisi, rijitlik matrisine eklenerek nonlinear terimler probleme dahil edilmiştir. Dinamik kritik burkulma yükünü belirlemek için Budiansky-Roth kriteri kullanılmıştır. Dinamik analiz için ise, doğrusal olmayan çözüm yöntemlerinden Wilson θ , Newmark'ın sabit ortalama ivme ve doğrusal ivme değişimi yöntemleri kullanılmıştır.

Kabukların nonlinear yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları için Novozhilov yaklaşımı kullanılmıştır. Önce elemanın şekil fonksiyonundan yararlanarak, silindirik ve konik sonlu elemana ait kütle matrisi, rijitlik matrisi ve geometrik rijitlik matrisleri elde edilmiştir. Eleman için elde edilen matrislerden biriktirme yöntemiyle sistem matrisleri elde edilmiştir. Konik kabuk için kaç adet elemana bölündüyse o sayıda eleman matrisi bulunmuştur. Sistem matrisleri kullanılarak kabukların, statik yük ve dinamik adım yükü altında kritik yükleri bulunmuştur. Çözümün yakınsaklığı için önemli bir yere sahip olan kritik zaman artımı değeri kabuğun serbest titreşim hareket denkleminde öz değer problemi çözülerek elde edilmiştir.

Sayısal uygulamalarda iki yük tipi için çözümler yapılmıştır: aksenal basınç ve sabit hidrostatik basınç yükü. Çözümler için bir bilgisayar programı hazırlanmış ve sonuçlar daha önce yapılmış çalışmalarla karşılaştırmalı olarak grafiklerle verilmiştir.

2. İNCE KABUK TEORİSİ VE KONİK KABUK DENKLEMLERİ

2.1 İnce Kabuk Teorisi Kabulleri

2.1.1 Birinci merteye teorisi kabulleri

- i. Kabuğun kalınlığı orta yüzeyin en küçük eğrilik yarıçapına oranla ihmal edilebilecek kadar küçüktür.
- ii. Kabuk kalınlığına oranla elastik deformasyonlar küçüktür. Denge denklemleri ve kinematik bağıntılarda ikinci mertebeden terimler ihmal edilir ve böylece süperpozisyon kuralı uygulanabilir.
- iii. Malzeme homojen ve lineer elastiktir. Hooke kanunu geçerlidir. Bu şekilde süreklilik hipotezinden yararlanılarak, kuvvet ve deplasmanlar, sürekli fonksiyon ya da polinomlarla ifade edilebilir.
- iv. Kirchhoff-Love kabulleri,

Kabuk orta yüzeyine dik doğrultudaki normal gerilmeler ihmal edilebilecek kadar küçüktür. ($\sigma_z \cong 0$)

Şekil değişiminden önce kabuk orta yüzeyine dik olan bir doğru, şekil değişiminden sonra da kabuk orta yüzeyine dik ve doğru olarak kalır.

2.1.2 İkinci merteye teorisi kabulleri

İnce elastik kabukların ikinci merteye teorisinde yapılan kabulleri kısaca verilmiştir. Kabuk kalınlığının diğer kabuk boyutları yanında, çok küçük olmasından dolayı yapının narinliği arttığından, deplasmanlar büyük olur. Bu nedenle ikinci merteye hesabı yapmak gerekir. Dolayısıyla denge denklemleri şekil değiştirmiş eleman üzerinde kurulur ve şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntılarında ikinci dereceden terimler dikkate alınır. Kinematik bağıntılar şekil değiştirmiş sistem üzerinde kurulmayabilir. (Köksal,1982).

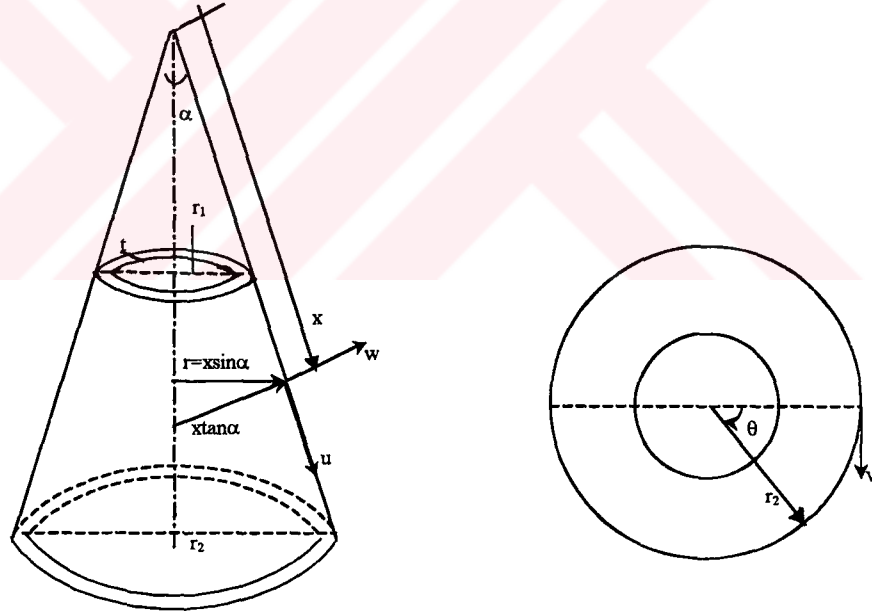
- i. Deplasmanlar kabuk kalınlığı yanında küçük olmadığından, şekil değiştirmelerin geometrik uygunluk şartlarında etkisi yine terk edilmesine karşın, denge denklemlerinde göz önüne alınır. Denge denklemleri şekil değiştirmiş sistem üzerinde yazıldığı için lineer elastik stabilite teorisi, lineer olmayan bir teoridir. Yük-deplasman arasında artık bir orantılık bulunmaz. Bu nedenle, dış yüklerin

aralarındaki oran sabit kalacak şekilde arttıkları kabul edilir.

- ii. Sistem lineer olmadığından süperpozisyon prensibi geçerli değildir.
- iii. Kabukta membran kesit tesirlerinin büyük değerler aldığı göz önüne alınarak yalnızca bunların $[N_0]$ etkileri hesaba katılacaktır. Stabilite probleminde, eğilme ve burulma momentlerinin etkileri terk edilecektir.
- iv. Betty teoremi geçerli değildir.
- v. Hiperstatik problem olmasına karşın, esas sistem seçilerek hesaplar yapılamaz.

2.2 Dairesel Konik Kabuk Denklemleri

Daha önce yapılan çalışmalarda, kabukların eğilme, stabilite veya dinamik problemlerinin sonlu elemanlar yöntemiyle çözümünde özellikle Novozhilov teorisinde önerilen bağıntıların kullanıldığı gözlenmiştir. Burada da bu yaklaşım kullanılmıştır (Novozhilov, 1970). İşaret kabulü Şekil 2.1'de gösterildiği gibidir.



Şekil 2.1 Konik kabuk

Yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (2.1a)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u \sin \alpha}{r} + \frac{w \cos \alpha}{r} + \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \quad (2.1b)$$

$$\varepsilon_{x\theta} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v \sin \alpha}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (2.1c)$$

$$\kappa_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.1d)$$

$$\kappa_{\theta\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\cos \alpha}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (2.1e)$$

$$\kappa_{x\theta} = -2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{\sin \alpha}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r^2} v - \frac{\cos \alpha}{r} \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (2.1f)$$

Elastisite bağıntıları:

$$\sigma_x = \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{\theta\theta}) \quad (2.2a)$$

$$\sigma_\theta = \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu \varepsilon_{xx}) \quad (2.2b)$$

$$\tau_{x\theta} = \left(\frac{E}{2(1+\nu)} \right) \gamma_{x\theta} \quad (2.2c)$$

İnce kabuklar için kesit tesirleri:

$$N_x = C(\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{\theta\theta}) \quad (2.3a)$$

$$N_\theta = C(\varepsilon_{\theta\theta} + \nu \varepsilon_{xx}) \quad (2.3b)$$

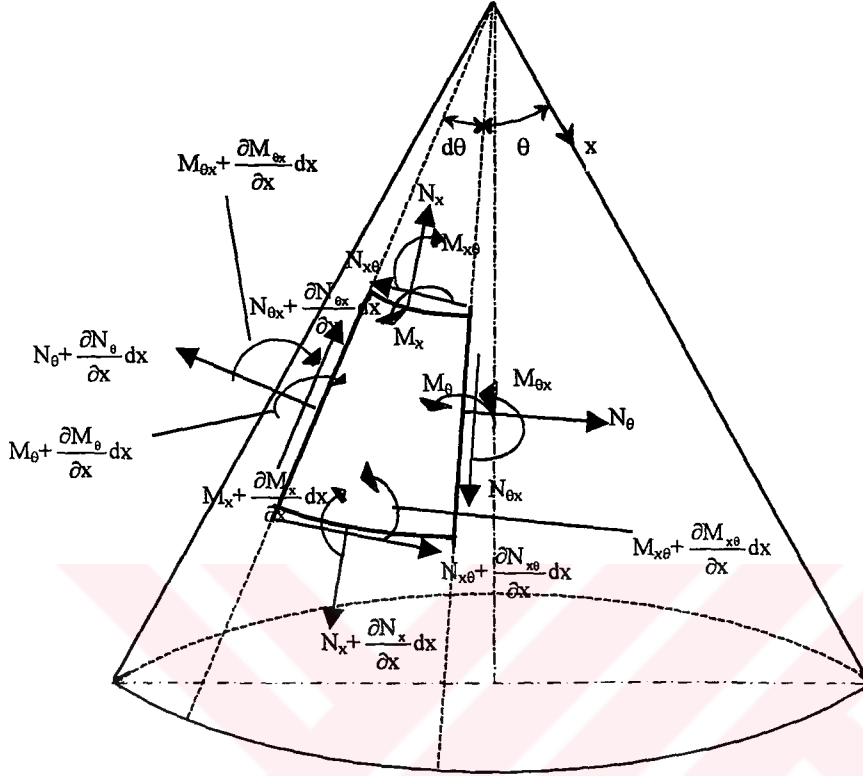
$$N_{x\theta} = N_{\theta x} = \left(\frac{1-\nu}{2} \right) C \gamma_{x\theta} \quad (2.3c)$$

$$M_x = -D(\kappa_{xx} + \nu \kappa_{\theta\theta}) \quad (2.3d)$$

$$M_\theta = -D(\kappa_{\theta\theta} + \nu \kappa_{xx}) \quad (2.3e)$$

$$M_{x\theta} = -M_{\theta x} = D(1-\nu) \kappa_{x\theta} \quad (2.3f)$$

Burada; $C = \frac{Et}{1-\nu^2}$ ve $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ 'dir.



Şekil 2.2 Sonsuz küçük elemana etkiyen kuvvet ve moment kesit tesirleri

Nonlinear denge denklemleri:

$$\frac{\partial(x N_x)}{\partial x} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial(N_{x\theta})}{\partial \theta} - N_\theta = -x p_x \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial(N_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{x} \frac{\partial(x^2 N_{x\theta})}{\partial x} = -x p_\theta \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2(x M_x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{\partial M_x}{\partial \theta} + \frac{2}{\sin \alpha} \left(\frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{x} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} \right) - N_{x\theta} \cot \alpha = -x P_z \quad (2.6)$$

Linear denge denklemleri

$$\frac{\partial(x N_x)}{\partial x} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial(N_{x\theta})}{\partial \theta} - N_\theta = -r p_x \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{\sin\alpha} \frac{\partial(N_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{x} \frac{\partial(x^2 N_{x\theta})}{\partial x} = -r p_\theta \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2(xM_x)}{\partial x^2} - \frac{\partial M_\theta}{\partial x} - N_\theta \cot\alpha - \frac{\partial(x \cdot N_x \beta_x)}{\partial x} = -r p_z \quad (2.9)$$

Mambran Linear Denge Denklemleri

$$\frac{\partial(xN_x)}{\partial x} + \frac{1}{\sin\alpha} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial\theta} - N_\theta = -x p_x \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{\sin\alpha} \frac{\partial N_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial(xN_{x\theta})}{\partial x} = -x p_\theta \quad (2.11)$$

$$N_\theta \cdot \cot\alpha = x p_z \quad (2.12)$$

Ön burkulma dönmelerini içermeyen lineer stabilite denklemleri

$$\frac{\partial(xN_x)}{\partial x} + \frac{1}{\sin\alpha} \frac{\partial^2 N_{x\theta}}{\partial\theta^2} - N_\theta = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{\sin\alpha} \frac{\partial N_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{x} \frac{\partial(x^2 N_{x\theta})}{\partial x} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial^2(xM_x)}{\partial x^2} + \frac{2}{\sin\alpha} \left(\frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial\theta} + \frac{1}{x} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{x \sin^2\alpha} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial\theta^2} - \frac{\partial M_\theta}{\partial x} - N_\theta \cdot \cot\alpha - \left[\frac{\partial(xN_{x\theta}\beta_x + xN_{x\theta\theta})}{\partial x} + \frac{1}{\sin\alpha} \frac{\partial(N_{x\theta\theta}\beta_x + N_{\theta\theta}\beta_\theta)}{\partial\theta} \right] = 0 \quad (2.15)$$

Yer değistirmeler cinsinden stabilite ana diferansiyel denklemleri

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{x} + \frac{1-v}{2x \sin^2\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1+v}{2 \sin\alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial\theta} - \frac{3-v}{2x \sin\alpha} \frac{\partial v}{\partial\theta} + \left(v \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{w}{x} \right) \cot\alpha = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{1+v}{2 \sin\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial\theta} + \frac{3-v}{2x \sin\alpha} \frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{1-v}{2} x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1-v}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v}{x} \right) + \frac{1}{x \sin^2\alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} + \frac{\cot\alpha}{x \sin\alpha} \frac{\partial w}{\partial\theta} = 0 \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}
& Dx \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{x^3} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{2}{x^3 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} + \frac{2}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{3}{x^4 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{x^4 \sin^4 \alpha} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right. \\
& + C \left(\frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{x} + \frac{w \cot \alpha}{x} + v \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cot \alpha - \\
& \left. \left[\frac{\partial \left(N_{x0} x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{x\theta 0} \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)}{\partial x} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \left(N_{x\theta 0} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{\theta 0} \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} \right] = 0 \quad (2.18)
\end{aligned}$$

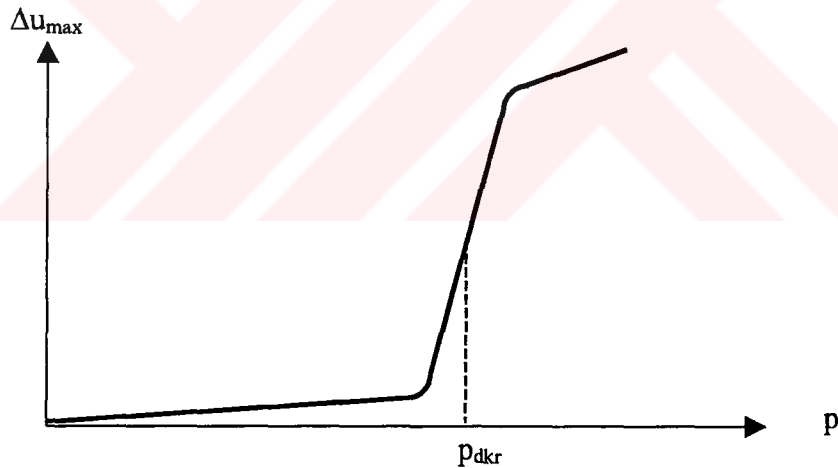
(Köksal, 1996).

3. DİNAMİK BURKULMA ANALİZİ

Dinamik burkulma analizi, statik burkulmada olduğu gibi belirli bir tanıma sahip değildir. Bu konuda çeşitli araştırmacılar tarafından ortaya konmuş bazı kriterler vardır. Hangi kriter kullanılırsa kullanılsın, sistemin hareket denkleminin değişik yük durumları için çözülmesi gerekmektedir. Sistemin statik kritik burkulma yükünün bulunması bir referans noktası oluşturması açısından önemlidir.

3.1 Budiansky-Roth Kriteri

Budiansky-Roth kriteri gözleme bağlı bir kriterdir. Sistemde, seçilen noktalardaki yer değiştirmelerin küçük yük artımları ile orantılı olarak arttığı görülür. Uygulanan yük kritik değere ulaştığında, sistemin maksimum yer değiştirme genliğinin büyük bir sıçrama yaptığı gözlenir (Şekil 3.1). Bu gözlemi yapabilmek için, çeşitli yük değerleri için hareket denklemleri çözülür ve yer değiştirme artımlarının yüke bağlı grafiği çizilir. Grafiklerde yer değiştirme artımlarının keskin ve büyük bir sıçrama yaptığı yük değeri, dinamik kritik yük olarak kabul edilir. (Budiansky,1962)

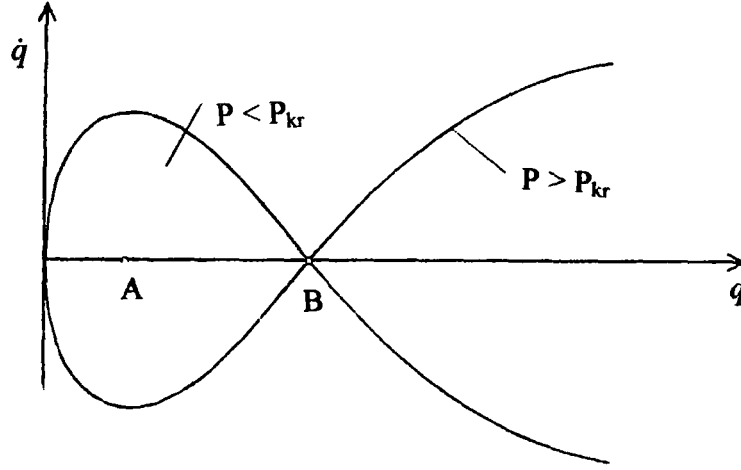


Şekil 3.1 Budiansky-Roth kriteri ile kritik yükün belirlenmesi

3.2 Faz-Düzlem Kriteri

Sistemin gözlenen davranışına (özellikle yer değiştirmeler) q denirse, faz düzlemi, q değerlerine karşılık gelen dq/dt değerlerinin oluşturduğu grafikdir (Şekil 3.2). Dinamik kritik yükten daha küçük değerler için, sistem A statik denge noktasında basit salınım yapar. Dinamik kritik yüke eşit veya daha büyük değerler için sistemin davranışında, kararsız denge

noktası B'ye doğru sapmalar gözlenir. (Hutchinson,1966)



Şekil 3.2 Faz-düzlem kriteri ile kritik yükün belirlenmesi

3.3 Kritik Zaman Artımı

Dinamik problemlerin çözümünde kullanılan integrasyon yöntemlerinde zaman artımı önemli bir rol oynar. Genellikle, çözüm için göreceli olarak küçük zaman artımları kullanılmalıdır. Dinamik burkulma problemi için zaman artımı değeri daha da önem kazanmaktadır. Daha büyük zaman artımları bilgisayar programının performansını etkilemekte ve çözümün hızla ıraksamasına neden olmaktadır. Yapılan çalışmalar sonucunda kritik zaman artımı için

$$\Delta t_{kr} = \frac{T_n}{\pi} \quad (3.1)$$

değeri belirlenmiştir. Burada T_n , sistemin serbest titreşim hareket denkleminin çözümünden bulunan en küçük periyot değeridir. Hesaplarda kullanılacak zaman artımı değerinin, Δt_{kr} 'den daha küçük olması gereklidir (Chopra,1995).

$$\Delta t \leq \Delta t_{kr} \quad (3.2)$$

3.4 Dinamik Analiz

Eğer bir sisteme etkiyen yük, dinamik özelliğe sahipse zamana bağlı olarak meydana gelecek yer değiştirmelerin ivmeleri, atalet kuvvetleri meydana getirirler. Bu durumda sistem iki tür yükün etkisi altında düşünülebilir. Harekete neden olan dış yük ve hareketin ivmelenmesine karşı duran kuvvetler. D'Alambert prensibine göre; sisteme etki eden atalet kuvvetleri, sönüm

kuvvetleri ve deformasyonlar sonucunda meydana gelen elastik kuvvetler ile dış kuvvetler her an denge halinde olmalıdır. Bu problemi çözebilmek, sistemin hareketi için yazılacak diferansiyel denklemin uygun sınır ve başlangıç koşulları altında çözülmesi ile mümkün olur. Hareket denklemi;

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{p\} \quad (3.3)$$

ya da

$$F_1(t) + F_D(t) + F_E(t) = p(t) \quad (3.4)$$

şeklinde ifade edilir. Burada zamana bağlı dış yük çeşitli şekillerde olabilir; basamak yükü, darbe yükü, sinüzoidal yük ya da deprem gibi keyfi yük. Dinamik yüke maruz sistemlerin denge problemi şu şekilde sınıflandırılabilir:

- i. **Sönümsüz serbest titreşim** ($[m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = 0$),
- ii. **Sönümlü serbest titreşim** ($[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = 0$),
- iii. **Sönümsüz zorlanmış titreşim** ($[m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = \{p\}$),
- iv. **Sönümlü zorlanmış titreşim** ($[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{p\}$).

Bu çalışmada dinamik burkulma analizi için gerekli olan sönümsüz serbest titreşim ve sönümsüz, sönümlü zorlanmış titreşimden bahsedilecektir.

3.4.1 Sönümsüz serbest titreşim

Kritik zaman artımını belirlemek için doğal titreşim periyotlarını belirlemek, bunun için de sistemin serbest titreşim analizini yapmak gereklidir.

Sönümsüz serbest titreşimde sönüm: $[c] = 0$ ve dış yük: $\{p\} = 0$ 'dır. Bu durumda (3.3) denklemi:

$$[m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = 0 \quad (3.5)$$

şeklini alır . Titreşim basit harmonik hareket olduğu için

$$\{u\} = \{a\} \sin(\omega t + \theta) \quad (3.6)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,

$\{a\}=\{a(x,y)\}$: Kütlelerin ötelenme genlikleri, ω : dairesel frekans ve θ : faz açısıdır.

(3.6) kabulü (3.5) denkleminde yerine koyulursa,

$$([k] - \omega^2 [m])\{a\} = 0 \quad (3.7)$$

şeklinde lineer homojen denklem takımı elde edilir. $\{a\} \neq 0$ çözümü için

$$|[k] - \omega^2 [m]| = 0 \quad (3.8)$$

olmalıdır .Bu denklemde $\lambda = \omega^2$ kısaltması yapılırsa

$$|[k] - \lambda [m]| = 0 \quad (3.9)$$

haline gelir. (3.9) denklemini genel öz değer problemidir. Bu öz değer problemi çözülerek öz değerler yani doğal titreşim frekanslarının kareleri ve özvektörler yani doğal titreşim frekanslarına karşılık gelen $\{a\}$ yer değiştirmeleri bulunur.

3.4.2 Zorlanmış titreşim

(3.3) diferansiyel denge denkleminin çözümü için bir çok sayısal çözüm yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden bazıları şu şekilde sıralanabilir:

Lineer çözüm için,

- i. Doğrudan integrasyon yöntemleri; merkez fark yöntemi, Houbolt yöntemi, Wilson θ yöntemi, Newmark yöntemi,
- ii. Mod süperpozisyonu yöntemi.

nonlineer çözüm için,

- i. Doğrudan integrasyon yöntemleri; merkez fark yöntemi, Newmark yöntemi, Wilson θ yöntemi
- ii. Mod süperpozisyonu yöntemi.

Bu çalışmada nonlineer çözüm için Newmark ve Wilson θ yöntemleri kullanılmıştır.

3.4.2.1 Newmark yöntemi

Dinamik analiz yöntemlerinden gerçek çözüme en yakın çözümü veren ve bu nedenle en çok

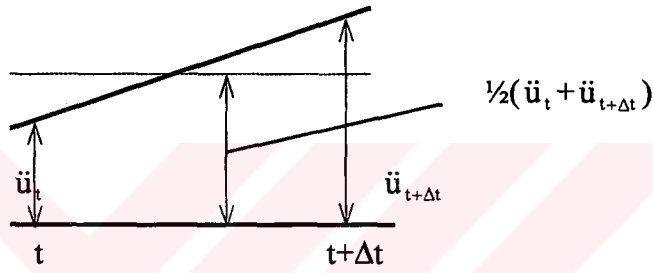
tercih edileni Newmark yöntemidir. Bu yöntemde şu iki varsayımdan hareket edilir:

$$i. \dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_{(t)} + [(1-\delta)\ddot{u}_{(t)} + \delta\ddot{u}_{(t+\Delta t)}]\Delta t \quad (3.10)$$

$$ii. u_{t+\Delta t} = u_{(t)} + \dot{u}_{(t)}\Delta t + [(1/2-\alpha)\ddot{u}_{(t)} + \alpha\ddot{u}_{(t+\Delta t)}]\Delta t^2. \quad (3.11)$$

Bu denklemlerde δ ve α integrasyonun doğruluğunun ve stabilitesinin sağlanması için kullanılan parametrelerdir. $\delta=1/2$ ve $\alpha=1/6$ olduğunda (3.10)ve (3.11) denklemleri lineer ivme artımı yöntemini ifade ederler.

Newmark, başlangıçta $\delta=1/2$ ve $\alpha=1/4$ alarak koşulsuz stabil sabit ortalama ivme çözüm şemasını amaçlamıştır. Bu yönteme trapezoidal yöntem de denilmektedir.



Şekil 3.3 Sabit ortalama ivme değişimi

$(t+\Delta t)$ anındaki yer değiştirme, hız ve ivmelerin çözümü için (3.10)ve (3.11) denklemlerine ek olarak, $(t+\Delta t)$ anı için yazılan (3.3) denge denklemi kullanılır:

$$m\ddot{u}_{(t+\Delta t)} + c\dot{u}_{(t+\Delta t)} + ku_{(t+\Delta t)} = p_{(t+\Delta t)} \quad (3.12)$$

(3.10) ve (3.11) varsayımları (3.12)'te yerine koyularak $u_{(t+\Delta t)}$ elde edilir. Buradan da $\dot{u}_{(t+\Delta t)}$ ve $\ddot{u}_{(t+\Delta t)}$ bulunabilir (Bathe,1996).

Newmark yöntemi için adım adım çözüm şeması:

- Ortalama ivme yöntemi için . $\delta=1/2$ ve $\alpha=1/4$
- Lineer ivme değişimi yöntemi için . $\delta=1/2$ ve $\alpha=1/6$ alınır.

1. Ön hesaplamalar:

1.1 Başlangıç yükü: p_0 , yer değiştirmesi: u_0 , ve hızı: \dot{u}_0 belirlenir,

1.2 (3.1) denkleminden \ddot{u}_0 bulunur,

1.3 Δt seçilir,

$$1.4 \ a = \frac{1}{\alpha \Delta t} m + \frac{\delta}{\alpha} c \quad \text{ve} \quad b = \frac{1}{2\alpha} m + \Delta t \left(\frac{\delta}{2\alpha} - 1 \right) c \quad \text{hesaplanır,}$$

2. Her zaman adımı için;

$$2.1 \ \Delta \hat{p}_i = \Delta p_i + a \dot{u}_i + b \ddot{u}_i,$$

$$2.2 \ \hat{k}_i = k_i + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} c + \frac{1}{\alpha (\Delta t)^2} m.$$

2.3 \hat{k}_i ve $\Delta \hat{p}_i$ 'den iterasyon yapılarak Δu_i bulunur,

$$2.4 \ \Delta \dot{u}_i = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \Delta u_i - \frac{\delta}{\alpha} \dot{u}_i + \Delta t \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha} \right) \ddot{u}_i,$$

$$2.5 \ \Delta \ddot{u}_i = \frac{\delta}{\alpha (\Delta t)^2} \Delta u_i - \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \dot{u}_i - \frac{1}{2\alpha} \ddot{u}_i$$

$$2.6 \ u_{i+1} = u_i + \Delta u_i, \quad \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta \dot{u}_i, \quad \ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta \ddot{u}_i \quad \text{hesaplanır (Chopra, 1995).}$$

2.2'de k_i yerine, $\bar{k}_i = k_i + p_i n_i$ yazılarak nonlineer etkiler de probleme dahil edilmiştir. Uygulamalarda sabit adım yükü kullanıldığı halde nonlineer dinamik analiz yapıldığı için sisteme etkileyen yük her zaman artımında değişmektedir. Burada p_i her adımdaki yük artımı dikkate alınarak belirlenmiştir. Burada n_i ; daha sonra bölüm 4.2'de bahsedilecek olan geometrik rijitlik matrisidir.

3.4.2.2 Wilson θ yöntemi

Wilson θ yönteminde, ivmenin t anından $t+\theta\Delta t$ anına kadar lineer olduğu kabul edilir. Koşulsuz stabilite için $\theta \geq 1.37$ olmalıdır. Genellikle $\theta=1.4$ alınır. τ ,

$$0 \leq \tau \leq \theta \Delta t \quad (3.13)$$

olacak şekilde tanımlı zaman aralığını gösterebilir. t - $t+\theta\Delta t$ zaman aralığı için ,

$$\ddot{u}_{t+\tau} = \ddot{u}_t \frac{\tau}{\theta \Delta t} (\ddot{u}_{t+\theta \Delta t} - \ddot{u}_t) \quad (3.14)$$

olduğu kabul edilir. (3.14) denkleminin integrasyonu ile,

$$\dot{u}_{t+\tau} = \dot{u}_t + \ddot{u}_t \tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t} (\ddot{u}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{u}_t) \quad (3.15)$$

ve

$$u_{t+\tau} = u_t + \dot{u}_t \tau + \frac{1}{2} \ddot{u}_t \tau^2 + \frac{1}{6\theta\Delta t} \tau^3 (\ddot{u}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{u}_t) \quad (3.16)$$

bulunur. (3.15) ve (3.16) denklemleri kullanılarak $t+\theta\Delta t$ anı için,

$$\dot{u}_{t+\theta\Delta t} = \dot{u}_t + \frac{\theta\Delta t}{2} (\ddot{u}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{u}_t) \quad (3.17)$$

ve

$$u_{t+\theta\Delta t} = u_t + \theta\Delta t \dot{u}_t + \frac{(\theta\Delta t)^2}{6} (\ddot{u}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{u}_t) \quad (3.18)$$

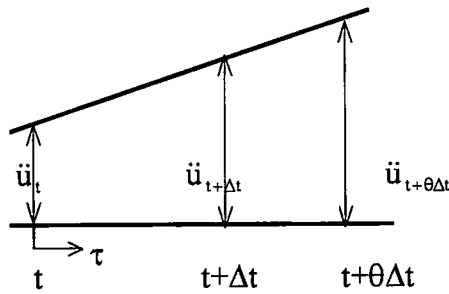
yazılabilir ve buradan $\ddot{u}_{t+\theta\Delta t}$ ve $\dot{u}_{t+\theta\Delta t}$ ifadeleri $u_{t+\theta\Delta t}$ cinsinden bulunabilir.

$$\ddot{u}_{t+\theta\Delta t} = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2} (u_{t+\theta\Delta t} - u_t) - \frac{6}{\theta\Delta t} \dot{u}_t - 2\ddot{u}_t \quad (3.19)$$

$$\dot{u}_{t+\theta\Delta t} = \frac{3}{\theta\Delta t} (u_{t+\theta\Delta t} - u_t) - 2\dot{u}_t - \frac{\theta\Delta t}{2} \ddot{u}_t \quad (3.20)$$

$t+\Delta t$ anındaki yer değiştirme, hız ve ivmeleri bulmak için (3.3) denklemini kullanılır. Burada p yerine \hat{p} kullanılır:

$$\hat{p}_{t+\theta\Delta t} = p_t + \theta(p_{t+\Delta t} - p_t). \quad (3.21)$$



Şekil 3.4 Wilson θ yönteminin lineer ivme değişimi varsayımı

Wilson θ yöntemi için adım adım çözüm şeması:

1. Ön hesaplamalar:

1.1 Başlangıç yükü: p_0 , yer değiştirmesi: u_0 , ve hızı: \dot{u}_0 belirlenir,

1.2 (3.1) denkleminde \ddot{u}_0 bulunur,

1.3 Δt seçilir,

1.4 $a = \frac{6}{\theta \Delta t} m + 3c$ ve $b = 3m + \frac{\theta \Delta t}{2} c$ hesaplanır,

2. Her zaman adımı için;

2.1 $\delta \hat{p}_i = \theta(\Delta p_i) + a \dot{u}_i + b \ddot{u}_i$

2.2 $\hat{k}_i = k_i + \frac{3}{\theta \Delta t} c + \frac{6}{(\theta \Delta t)^2} m$. Burada k_i Newmark yöntemindeki gibi hesaplanmıştır.

2.3 \hat{k}_i ve $\delta \hat{p}_i$ 'den iterasyon yapılarak Δu_i bulunur,

2.4 $\Delta \ddot{u}_i = \frac{1}{\theta} \left(\frac{6}{(\theta \Delta t)^2} \delta u_i - \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{u}_i - 3 \ddot{u}_i \right)$,

2.5 $\Delta \dot{u}_i = \Delta t \ddot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} \Delta \ddot{u}_i$ ve $\Delta u_i = \Delta t \dot{u}_i + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{u}_i + \frac{(\Delta t)^2}{6} \Delta \ddot{u}_i$

2.6 $u_{i+1} = u_i + \Delta u_i$, $\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta \dot{u}_i$, $\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta \ddot{u}_i$ hesaplanır.

(Chopra, 1995).

3.4.3 Kütle matrisi

Yapı sistemlerinin çözümünde genellikle iki tip kütle matrisi kullanılır :

i. Nokta kütle matrisi:

Taşıyıcı sistemin sürekli bir şekilde yayılı olan kütlesi istenildiği kadar sıklıkta düğüm noktalarına yığılmış nokta kütleler ile ifade edilebilir . Bu şekilde elde edilen kütle matrisi diyagonaldir . Sonlu elemanlar yönteminde ise bant matris şeklindedir .

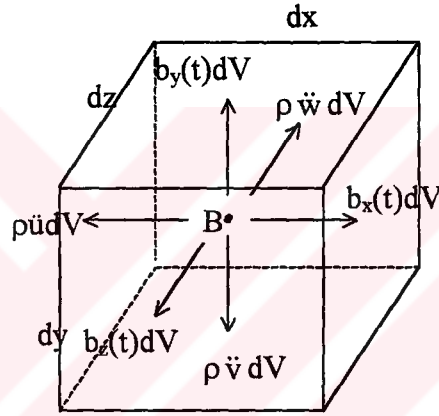
Her serbestlik derecesinde bir kütle olması şart değildir. Genellikle dönme rijitliği

doğrultularında kütle koyulmaz. Çünkü nokta kütlelerin dönel kütle atalet momentleri ihmal edilebilir. Bu durumda rijitlik matrisi sadece yer değiştirmeler dikkate alınarak yeniden düzenlenir.

ii. Yaylı kütle matrisi:

Sistemlerin dinamik analizlerindeki doğruluk derecesi, idealleştirmedeki kütle sayısı ile yakından ilgilidir. Hesapların doğruluk derecesini artırmak için nokta kütle sayısını artırmak ve mümkün olduğu kadar yaylı kütle haline yaklaşmak gerekir. Bu ise bilinmeyen sayısını artırır. Araştırmacılar, bilinmeyen sayısını artırmadan yaylı kütle haline daha yaklaşık bir kütle matrisi oluşturmuşlardır .

Kartezyen koordinatlarda sonsuz küçük bir elemanın titreşimi incelenirse ;



Şekil 3.5 Sonsuz küçük bir elemana etkiyen kuvvetler

Herhangi bir B noktasına etki eden kuvvetler: $b_x(t)dV$, $b_y(t)dV$, $b_z(t)dV$ ve bu kuvvetlere karşı doğrultuda etki eden atalet kuvvetleri: $\rho \ddot{u}dV$, $\rho \ddot{v}dV$, $\rho \ddot{w}dV$ ve ρ : birim kütle için yoğunluğu olsun. Bu eleman için virtüel iş prensibi yazılırsa :

$$\delta(\epsilon^T \cdot \sigma \cdot dV) = \delta(d^T \cdot P(t)) + \delta(u^T \cdot b(t)) \cdot dV - \delta(\ddot{u}^T \cdot \rho \cdot \ddot{u}) \cdot dV \quad (3.22)$$

Burada eşitliğin sağ tarafındaki üçüncü terim kütle matrisini verir.

$$m = \iint (\ddot{u}^T \cdot \rho \cdot \ddot{u}) \cdot dV \quad (3.23)$$

4. TOPLAM POTANSİYEL ENERJİ VE SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

4.1 Toplam Potansiyel Enerji Yöntemi

Varyasyon hesabı metotlarından toplam potansiyel enerji yöntemi geometrik açıdan lineer ve non-lineer sistemlere uygulanabilirken, fiziksel açıdan yalnızca lineer sistemlere uygulanabilir.

Toplam potansiyel enerji yönteminde, gerçek denge konumuna sonsuz yakın ikinci bir konumdan hareket edilir. Buna komşu denge konumu da denir. Böylece bir sistemde iç ve dış kuvvetlerin yaptığı işlerden oluşan toplam potansiyel enerjinin minimum olması, deplasman ve gerilmelerin gerçek denge konumuna karşı gelen değerleri aldığını gösterir (Köksal,1995).

Toplam potansiyel enerji denklemi,

$$V = V_i + V_d \quad (4.1)$$

Burada, V_i şekil değiştirme enerjisi yani iç kuvvetlerin işidir. V_d dış kuvvetlerin işidir.

$$V_i = V_m + V_e \quad (4.2)$$

Burada, V_m membran şekil değiştirme enerjisi, V_e eğilme şekil değiştirme enerjisidir. Bunlar, konik kabukta,

$$V_m = \frac{C}{2} \iint \left(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{\theta\theta}^2 + 2\nu\varepsilon_{xx}\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy}^2 \right) r dx d\theta \quad (4.3)$$

$$V_e = \frac{D}{2} \iint \left(\kappa_{xx}^2 + \kappa_{\theta\theta}^2 + 2\nu\kappa_{xx}\kappa_{\theta\theta} + 2(1-\nu)\kappa_{x\theta}^2 \right) r dx d\theta \quad (4.4)$$

Sistem konservatifse dış kuvvetlerin işi daima negatiftir.

$$V_d = - \left[\iiint_w t \cdot w_i \cdot dv + \iint_F p \cdot w_i \cdot dF + \oint_s q \cdot w_i \cdot ds + Q \cdot w_i \right] \quad (4.5)$$

Bu denklemde yer değiştirmelerle kuvvetler aynı yöndedirler. Komşu denge için, yer değiştirmelerdeki sonsuz küçük artımlar,

$$u = u_0 + u_1 \quad (4.6a)$$

$$v = v_0 + v_1 \quad (4.6b)$$

$$w = w_0 + w_1 \quad (4.6c)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada u_0 , v_0 , w_0 gerçek denge konumuna karşı gelen yer değiştirmelerdir. u_1 , v_1 , w_1 ikinci bir konum elde etmek için verilen sonsuz küçük virtüel artımlardır. u , v , w ikinci yani komşu konumuna karşı gelen yer değiştirmelerdir.

(4.6) bağıntılarını (4.3), (4.4) ve (4.5) bağıntılarında yerlerine koyup, denge konumundaki potansiyel enerji çıkarılırsa, potansiyel enerjideki ΔV değişmesi elde edilir. Yani, sistemin gerçek denge konumunun çok yakınındaki komşu bir konum için, deplasmanlarına verilen artımlar nedeniyle, toplam potansiyel enerjide ilk konuma göre ΔV kadar bir değişim meydana gelir. Toplam potansiyel enerjideki bu değişimin birinci varyasyonu denge denklemini, ikinci varyasyonu da stabilite denklemini verir. Birinci varyasyonun sıfıra eşit olması toplam potansiyel enerjinin ekstrem bir değer aldığını, ikinci varyasyonun, sıfırdan büyük, küçük ve pozitif olması ise bu ekstrem değer minimum olduğunu gösterir. Buna potansiyel enerjinin minimizasyon prensibi de denir ve buradan diferansiyel denge denklemleri elde edilir. Potansiyel enerjinin ikinci varyasyonunun birinci türevinin sıfıra eşit olması, ikinci varyasyonun ekstrem bir değer olduğunu, ikinci varyasyonun ikinci türevinin pozitif ve küçük bir değer olması ise bu ekstrem değer minimum olduğunu gösterir. Buna Trefftz kriteri de denir ve buradan stabilite diferansiyel denge denklemleri elde edilir. O halde, toplam potansiyel enerjinin değişimi ΔV , Taylor serisine açılırsa,

$$\Delta V = \delta V + \frac{\delta^2 V}{2!} + \frac{\delta^3 V}{3!} + \dots \quad (4.7)$$

Burada, δV potansiyel enerjideki değişiminin birinci varyasyonu ve $\frac{\delta^2 V}{2!}$ de ikinci varyasyonudur. Denge problemi için minimizasyon kriteri,

$$\left. \begin{array}{l} \delta V = 0 \\ \text{ve} \\ \frac{\delta^2 V}{2!} > 0 \end{array} \right\} \text{ ise } V \text{ minimumdur.} \quad (4.8)$$

Burkulma problemi için Trefftz kriteri yani ikinci stasyoner değer ilkesi,

$$\left. \begin{array}{l} \partial(\delta^2 V) = 0 \\ \text{ve} \\ \partial^2(\delta^2 V) > 0 \end{array} \right\} \text{ ise } \delta^2 V \text{ minimumdur.} \quad (4.9)$$

Toplam potansiyel enerji yöntemiyle stabilite probleminin çözümünde dengenin kararlı, kararsız, farksız olup olmadığına ve farksız dengenin de kritik farksız denge durumuna bakılır. Statik kritik burkulma yükü için aranan denge konumu, kritik farksız durumdur. Kritik farksız denge,

$$\delta V = 0, \partial(\delta^2 V) = 0, \partial^2(\delta^2 V) > 0 \quad (4.10)$$

şeklinindedir. Bu denklemler elde edildikten sonra burkulma kriteri yazılır; $\Delta_k=0$ yani, potansiyel enerji prensibinde birinci mertebeden lineer denklem takımının katsayılar determinantını sıfır yapan değer bulunur. Burada elde edilen yük değeri, statik kritik yüke karşı gelir (Köksal,1982).

Konik kabuğa ait (2.1) yer değiştirme şekil değiştirme bağıntıları kullanılarak şekil değiştirme enerjisinin birinci ve ikinci varyasyonu şöyle hesaplanabilir; (sadece ϵ_{xx} için işlem yapılacaktır)

$$\epsilon_{xx}^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4 \quad (4.11)$$

(3.10) denkleminde (3.6) değerleri yerine koyulursa $V_i+\Delta V_i$ elde edilir. u_0, v_0, w_0 yer değiştirmelerinden oluşan denge konumundaki potansiyel enerji, $V_i+\Delta V_i$ 'den çıkarılırsa ΔV_i elde edilir. Burada ϵ_{xx} 'in ikinci varyasyonu (1) indisli ve ikinci dereceden terimlerin toplanmasıyla elde edilir:

$$\frac{1}{2!} \delta^2(\epsilon_{xx}^2) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u_0}{\partial x} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 \quad (4.12)$$

$\epsilon_{\theta\theta}, \epsilon_{x\theta}, \kappa_{xx}, \kappa_{\theta\theta}$ ve $\kappa_{x\theta}$ için aynı işlemler yapılır ve (3.3)ve (3.4)'te yerine koyulup gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} \delta^2 V_i &= \frac{C}{2} \iint \left(\epsilon_{x1}^2 + \epsilon_{\theta1}^2 + 2\nu \epsilon_{x1} \epsilon_{\theta1} + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{x\theta1}^2 \right) dx dy \\ &+ \frac{1}{2} \iint \left(N_{x0} \beta_{x1}^2 + N_{\theta0} \beta_{\theta1}^2 + 2N_{x\theta0} \beta_{x1} \beta_{\theta1} \right) dx dy \\ &+ \frac{D}{2} \iint \left(\kappa_{xx1}^2 + \kappa_{\theta\theta1}^2 + 2\nu \kappa_{xx1} \kappa_{\theta\theta1} + 2(1-\nu) \kappa_{x\theta1}^2 \right) dx dy \end{aligned} \quad (4.13)$$

elde edilir.Burada

$\epsilon_x, \epsilon_\theta, \gamma_{x\theta}, \kappa_{xx}, \kappa_{\theta\theta}$ ve $\kappa_{x\theta}$, (2.1) bağıntılarındaki lineer terimler,

β_x ve β_θ , (2.1) bağıntılarındaki nonlinear terimlerdir:

$$\begin{aligned}\beta_{x1} &= -\frac{\partial w_1}{\partial x} \\ \beta_{\theta 1} &= -\frac{\partial w_1}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (4.14)$$

$N_{x0}, N_{\theta 0}$ ve $N_{x\theta 0}$ ise membran denge denklemlerinden elde edilen membran kuvvetleridir:

$$\begin{aligned}N_{x0} &= C(\epsilon_{x0} + \nu\epsilon_{\theta 0}) \\ N_{\theta 0} &= C(\epsilon_{\theta 0} + \nu\epsilon_{x0}) \\ N_{x\theta 0} &= C \frac{1-\nu}{2} \epsilon_{x\theta 0}\end{aligned}\quad (4.15)$$

Eksenel yük etkimesi halinde dış kuvvetlerin enerji ifadesinde nonlinear terimler olmadığı için, dış kuvvetlerin potansiyel enerjisinin ikinci varyasyonu sıfır olur.

Hidrostatik yük etkimesi halinde dış kuvvetlerin toplam potansiyel enerjisi:

Sistem konservatif olduğu için hidrostatik basınç etkisinde toplam potansiyel enerjideki değişim negatiftir. Etkiyen yükün yaptığı iş, yaklaşık olarak şekil değişimi sırasında etkileyen basıncın potansiyel enerjisindeki değişime eşittir.

$$\Omega = -p(A_i - A_s) \quad (4.16)$$

Burada A_i ; orta yüzeyin şekil değişiminden önce kapattığı kesit alan ve A_s ; orta yüzeyin şekil değişiminden sonra kapattığı kesit alanıdır.

Şekil değişiminden sonra orta yüzeyde herhangi bir H noktasının koordinatları,

$$H_x = (r + w) \cos \theta - \nu \sin \theta \quad (4.17)$$

$$H_y = (r + w) \sin \theta + \nu \cos \theta \quad (4.18)$$

dır. Orta yüzeyin kapattığı alan, çevre integrali alınarak bulunabilir:

$$A_s = \frac{1}{2} \oint_c (H_x dx + H_y dy) \quad (4.19)$$

(4.17) ve (4.18) ifadeleri (4.19)'da yerine koyulup düzenlenirse;

$$A_s = \pi r^2 + \int \left[w + \frac{1}{2r} \left(v^2 - v \frac{\partial w}{\partial y} r + w \frac{\partial v}{\partial y} r + w^2 \right) \right] dy \quad (4.20)$$

Bu ifade (4.16)'da yerine koyulursa;

$$\Omega = p \iint \left[w + \frac{1}{2r} \left(v^2 - v \frac{\partial w}{\partial y} r + w \frac{\partial v}{\partial y} r + w^2 \right) \right] dx dy \quad (4.21)$$

elde edilir. Burada (4.6) eşitliklerinden yararlanarak hidrostatik basınç yükünün toplam potansiyel enerjisinin ikinci varyasyonu şu şekilde bulunur:

$$\frac{1}{2!} \delta^2 V_{d1} = \frac{p}{2r} \iint \left(v_1^2 - v_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} r + w_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} r + w_1^2 \right) dx dy \quad (4.22)$$

Bu durumda toplam potansiyel enerjinin ikinci varyasyonu (4.13) ve (4.22)'den "1" indisleri atılarak kapalı matris formunda yazılırsa,

$$\frac{1}{2!} \delta^2 V = \frac{1}{2} \iint [\varepsilon]^T [D] [\varepsilon] dx dy + \frac{1}{2} \iint [\beta]^T [N_0] [\beta] dx dy + \frac{1}{2} \frac{p}{r} \iint [Q_h] dx dy \quad (4.23)$$

elde edilir. Burada [D] ve [Q_h] matrislerinin açık halleri,

$$[D] = \begin{bmatrix} C & C_v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_v & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C \frac{1-v}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & D_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_v & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D \frac{1-v}{2} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$[Q_h] = \begin{bmatrix} v - r \frac{\partial w}{\partial y} \\ w + r \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

dir (Köksal, 1995).

4.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Günümüzde hemen hemen bütün mühendislik dallarında, problemlerin çözümünde sonlu elemanlar yöntemi kullanılmaktadır. Bilgisayar teknolojisinin ilerlemesi ve kullanımının yaygın hale gelmesi ile sonlu elemanlar yöntemine ilgi artmıştır .

Yapı sistemlerinin çözümünde karşılaşılan statik denge problemi, stabilite problemi ve dinamik denge problemlerinde sonlu elemanlar yönteminden yararlanılabilir. Bu yöntem, herhangi üniform olmayan yük ve sınır şartlarına uygulanabilir. Kompleks çözümler ve yüksek dereceden problemler için kullanımı uygundur.

Sonlu elemanlar yönteminde sürekli sistemler ayırık sistemler haline getirilerek çözüm yapılır. Sürekli ortam hayali çizgilerle veya yüzeylerle sonlu sayıda elemana bölünür. Elemanların düğüm noktaları ile birbirine bağlı olduğu düşünülür. Elde edilen elemanlar üzerinde iç ve dış kuvvetlerin enerjisinin minimizasyonu ile problem çözülür ve eleman için bulunan değerler uygun şekilde toplanarak toplam sisteme ait değerler bulunur. Sınır şartları sisteme kolayca uygulanabilir. Herhangi statik veya dinamik dış yük, ön gerilme, ön şekil değiştirme ya da sıcaklık değişimi gibi etkiler probleme rahatça katılabilir.

Sürekli ortam ne kadar çok sayıda elemana bölünürse gerçek çözüme o kadar yaklaşmış olunur.

4.2.1 Sonlu elemanlar yönteminde yakınsama kriterleri

- i. Komşu elemanların kenarları boyunca yer değiştirmelerde süreklilik sağlanmalıdır. Eğer kenar yer değiştirmeler sadece bitişik düğüm noktalarının fonksiyonu ise bu şart sağlanmış olur.
- ii. Üniform yer değiştirmeleri gösteren köşe yer değiştirmeler için gerilmeler ve şekil değiştirmeler üniform olmalıdır.
- iii. Rijit cisim hareketinden dolayı gerilme ve şekil değiştirme olmamalı, sabit şekil değiştirme şartı sağlanmalıdır .

(Köksal,1995).

4.2.2 Konik ve silindirik sonlu eleman

Bu çalışmada iki sonlu eleman tipi ile hesaplar yapılmıştır.

4.2.2.1 I. Tip sonlu eleman

Hem konik kabuk hem de silindirik kabuk için kullanılabilen bir sonlu eleman tipidir. İki düğüm noktasına sahip bir kabuk sonlu eleman seçilmiştir. Her bir düğüm noktasında ise dört adet serbestlik tanımlanmıştır. Kabuğa ait yer değiştirmeler, orta yüzey yer değiştirmeleri u, v, w cinsinden ifade edilebilirler. Bu yer değiştirmeler, meridyenel koordinat x ve dairesel koordinat θ cinsinden aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} u &= [(1 - \xi)u_i + \xi u_j] \cos n\theta \\ v &= [(1 - \xi)v_i + \xi v_j] \sin n\theta \\ w &= [(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)w_i + 1(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\varphi_i + (3\xi^2 - 2\xi^3)w_j + 1(-\xi^2 + \xi^3)\varphi_j] \cos n\theta \end{aligned} \quad (4.26)$$

Burada,

$$\xi = \frac{x}{l} \quad (4.27)$$

dir. (4.23) denklemleri matris formda şu şekilde yazılabilir:

$$u = \begin{Bmatrix} u(x, \theta) \\ v(x, \theta) \\ w(x, \theta) \end{Bmatrix} = [N(x, \theta)] \{u_i\} \quad (4.28)$$

Burada, $[N]$: şekil fonksiyonu matrisi, ve $\{u_i\}$: bir elemandaki yer değiştirme bileşenleridir.

Bir elemana ait yer değiştirme bileşenleri açık olarak,

$$\{u_i\}^T = \{u_i \quad v_i \quad w_i \quad \varphi_i \quad u_j \quad v_j \quad w_j \quad \varphi_j\} \quad (4.29)$$

(4.16) bağıntısında,

$$\{\varepsilon\} = [\Delta N_L] \{d\} \quad (4.30)$$

$$\{\beta\} = [\Delta N_{NL}] \{d\} \quad (4.31)$$

tanımlamaları yapıp denklem tekrar düzenlenirse,

$$\delta^2 V = \{d\}^T \iint [\Delta N_L]^T [D] [\Delta N_L] \{d\} dx dy + \{d\}^T \iint [\Delta N_{NL}]^T [N_0] [\Delta N_{NL}] \{d\} dx dy \quad (4.32)$$

elde edilir. Burada, eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim rijitlik matrisini verir:

$$[k] = \iint [\Delta N_L]^T [D] [\Delta N_L] dx dy \quad (4.33)$$

eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terim ise geometrik rijitlik matrisini verir:

$$[\bar{n}] = \iint [\Delta N_{NL}]^T [N_0] [\Delta N_{NL}] dx dy \quad (4.34)$$

Burada $[N_0]$, sistemde dış yüklerin etkisiyle oluşan membran kesit tesirleridir. Bu çalışmada aksenal yük ve hidrostatik yük altındaki kabuklar için çözüm yapılacaktır.

(4.33) ve (4.34)'de tanımlanan bağıntılar (4.32)'te yerine koyulursa,

$$\delta^2 V = \{d\}^T ([k] + p[n]) \{d\} \quad (4.35)$$

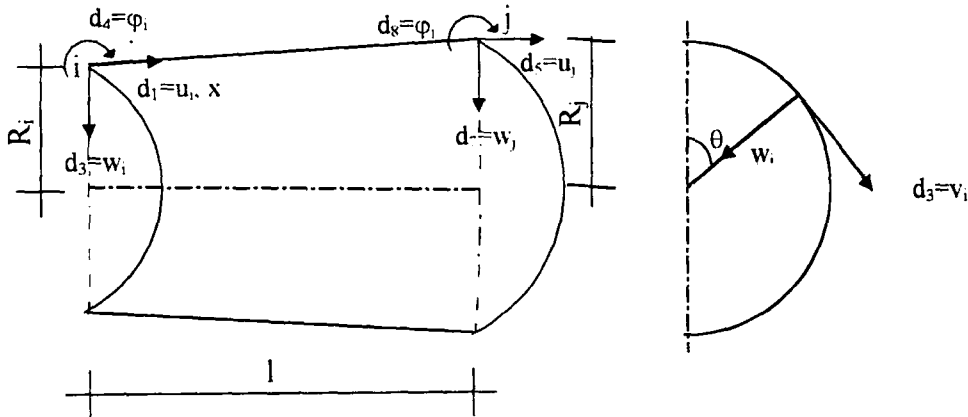
elde edilir. Statik kritik yük, p 'nin belirlenebilmesi için sonlu elemana ait rijitlik ve geometrik rijitlik matrislerinin oluşturulması gerekir.

Serbest titreşim analizi için kütle matrisi sonlu eleman formunda oluşturulmalıdır. (4.28) bağıntısı (3.21)'de yerine koyulursa,

$$[m] = \rho \iint [N]^T [N] dx dy \quad (4.36)$$

elde edilir.

Konik kabuk sonlu eleman



Şekil 4.1 Dairesel konik sonlu eleman

Konik kabuk için Novozhilov yaklaşımı ile lineer yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları ve nonlinear terimler:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.37a)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u \sin \alpha}{r} + \frac{w \cos \alpha}{r} \quad (4.37b)$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v \sin \alpha}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (4.37c)$$

$$\kappa_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.37d)$$

$$\kappa_{\theta\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\cos \alpha}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (4.37e)$$

$$\kappa_{x\theta} = -2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{\sin \alpha}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r^2} v - \frac{\cos \alpha}{r} \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (4.37f)$$

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \beta_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (4.37g)$$

(4.37a,b,c,d,e,f) bağıntıları kullanılarak $[\Delta N_L]$ oluşturulur ve (4.33)'de yerine koyularak konik sonlu elemana ait rijitlik matrisi elde edilir. Silindirik koordinatlarda,

$$[k] = [T]^T \iint [\Delta N_L]^T [D] [\Delta N_L] [T] R \, dx d\theta \quad (4.38)$$

olur. Burada, $R = R_1(1-\xi) + R_2\xi$ ve (4.39)

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

dır. (4.38) bağıntısında (4.19) dönüşümü yapılırsa,

$$[k] = [T]^T \iint [\Delta N_L]^T [D] [\Delta N_L] [T] R_1 d\xi d\theta \quad (4.41)$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.34) denklemi,

$$[n] = [T]^T \iint [\Delta N_{NL}]^T [N_0] [\Delta N_{NL}] [T] R_1 d\xi d\theta \quad (4.42)$$

ve (4.36) denklemi,

$$[m] = \rho [T]^T \iint [N_L]^T [N_L] [T] R_1 d\xi d\theta \quad (4.43)$$

halini alır (Ross, 1975).

(4.42) denkleminde $[N_0]$ membran kesit tesirleri, P eksenel yüküne maruz konik kabuklar için:

$$N_{0x} = \frac{-P}{2\pi r \cos\alpha}, \quad N_{0x\theta} = N_{0\theta} = 0, \quad (4.44)$$

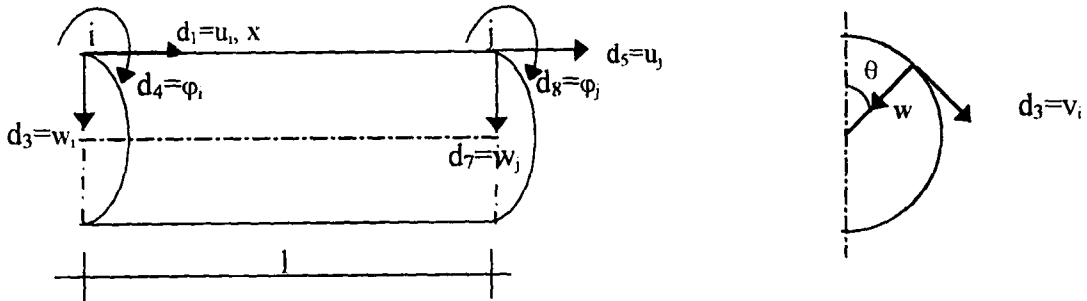
p_h hidrostatik basınç yüküne maruz konik kabuklar için:

$$N_{0x} = -\frac{1}{2 \cos\alpha} p_h r, \quad N_{0x\theta} = 0, \quad N_{0\theta} = -p_h r / \cos\alpha \quad (4.45)$$

şeklindedir (Köksal, 1996).

Silindirik kabuk sonlu eleman

Silindirik konik kabuğun $\alpha=0$ için özel bir halidir. Bu çalışmada, daha önce yapılan çalışmalarla karşılaştırma yapabilmek için silindirik kabuğun da dinamik burkulma analizi yapılacaktır.



Şekil 4.2 Dairesel silindirik sonlu eleman

Silindirik kabuk için Novozhilov yaklaşımı ile lineer yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları ve nonlineer terimler:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.46a)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r} \quad (4.46b)$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (4.46c)$$

$$\kappa_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.46d)$$

$$\kappa_{\theta\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (4.46e)$$

$$\kappa_{x\theta} = -2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (4.46f)$$

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.46g)$$

$$\beta_\theta = \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (4.46h)$$

(4.46a,b,c,d,e,f) bağıntıları kullanılarak $[\Delta N_L]$ oluşturulur ve (4.33)'de yerine koyularak silindirik sonlu elemana ait rijitlik matrisi elde edilir. Silindirik koordinatlarda,

$$[k] = \iint [\Delta N_L]^T [D] [\Delta N_L] r dx d\theta \quad (4.47)$$

olur. Burada (4.19) dönüşümü yapılırsa,

$$[k] = \iint [\Delta N_L]^T [D] [\Delta N_L] r d\xi d\theta \quad (4.48)$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.34) denklemi,

$$[n] = \iint [\Delta N_{NL}]^T [N_o] [\Delta N_{NL}] r d\xi d\theta \quad (4.49)$$

ve (4.36) denklemi,

$$[m] = \rho \iint [N_L]^T [N_L] r d\xi d\theta \quad (4.50)$$

halini alır. (4.49) denkleminde $[N_o]$ membran kesit tesirleri, P aksenal yüküne maruz silindirik kabuklar için:

$$N_{0x} = -P/2\pi r, \quad N_{0x\theta} = N_{0\theta} = 0, \quad (4.51)$$

p_h hidrostatik basınç yüküne maruz silindirik kabuklar için:

$$N_{0\theta} = -p_h r, \quad N_{0x\theta} = N_{0x} = 0 \quad (4.52)$$

şeklindedir (Köksal,1995).

4.2.2.2 II. Tip sonlu eleman

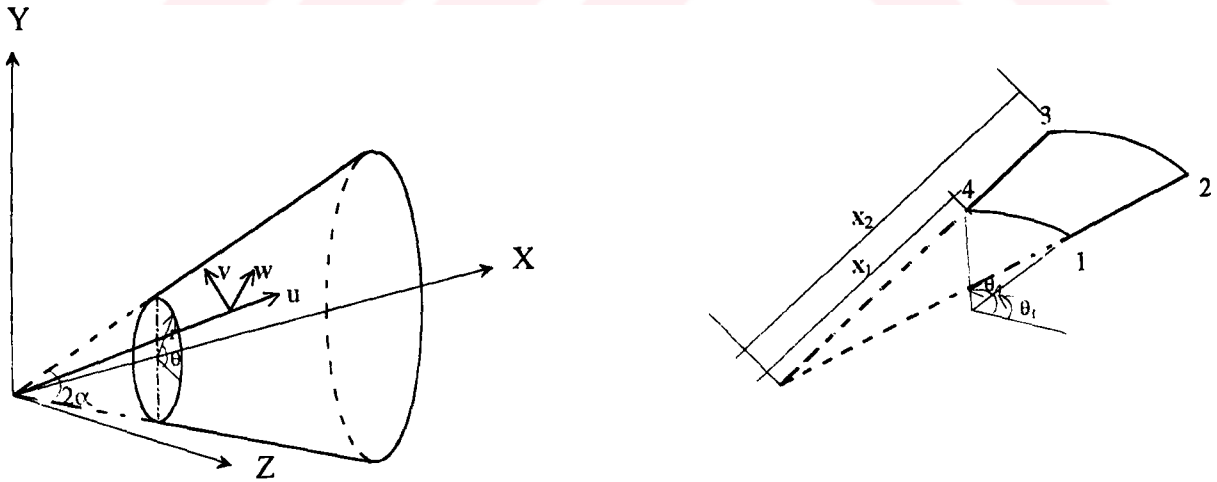
Konik kabuk, silindirik kabuk ve dairesel plak problemlerinde kullanılabilen bir sonlu eleman tipidir. Deplasman fonksiyonları polinom olarak seçilmiştir.

$$u = a_{13} + a_{14}x + a_{15}\theta + a_{16}x\theta + a_{17}\theta^2 + a_{18}x\theta^2 + a_{19}\theta^3 + a_{20}x\theta^3$$

$$v = a_{21} + a_{22}x + a_{23}\theta + a_{24}x\theta + a_{25}\theta^2 + a_{26}x\theta^2 + a_{27}\theta^3 + a_{28}x\theta^3 \quad (4.53)$$

$$w = a_1 + a_2x + a_3\theta + a_4x\theta + a_5x^2 + a_6\theta^2 + a_7x^2\theta + a_8x\theta^2 + a_9x^3 + a_{10}\theta^3 + a_{11}x^3\theta + a_{12}x\theta^3$$

Rijit cisim hareketi ve sabit deformasyon şartını sağlamak için polinomlara yeni düzeltme terimleri eklenmiştir.



Şekil 4.3 Konik sonlu eleman

Seçilen koordinat sistemine göre rijit ötelenmeler ile deplasman fonksiyonları arasındaki bağıntı şu şekilde verilmiştir.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cot \alpha & 0 & 1 \\ \sin \theta & \cos \theta / \sin \alpha & \sin \theta \cot \alpha \\ \cos \theta & -\sin \theta / \sin \alpha & \cos \theta \cot \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{13} \\ a_{21} \\ a_1 \end{Bmatrix} \quad (4.54)$$

Seçilen koordinat eksenleri etrafındaki rijit cisim dönmeleri ile deplasman fonksiyonları arasındaki bağıntı şu şekilde verilmiştir

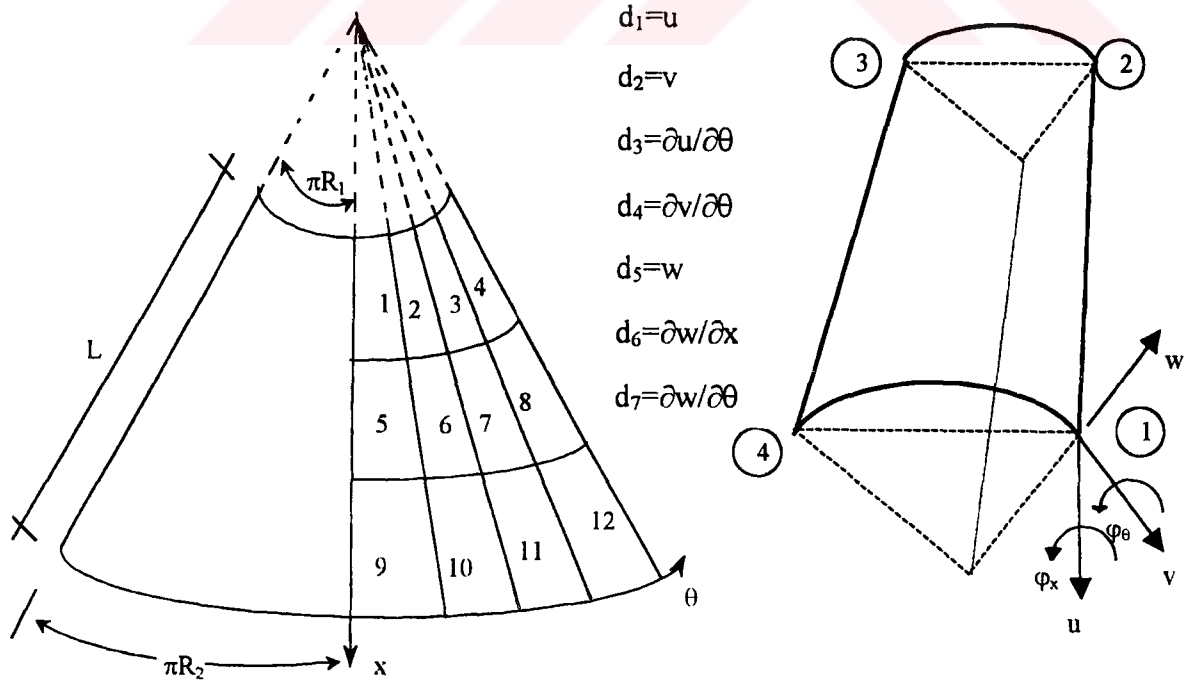
$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & -x \cos \alpha \sin \theta & x \cos \theta \\ 0 & x \cos \alpha \cos \theta & x \sin \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_3 \\ -a_2 \\ a_{22} \end{Bmatrix} \quad (4.55)$$

(4.45) ve (4.46) kullanılarak deplasman fonksiyonları şu şekilde elde edilir:

$$u = a_1 - a_2 x - a_{13} \cot \alpha + a_{14} x + a_{15} \theta + a_{16} x \theta + a_{17} \theta^2 + a_{18} x \theta^2 + a_{19} \theta^3 + a_{20} x \theta^3$$

$$v = a_1 \sin \theta \cot \alpha + a_2 x \cos \alpha \sin \theta + a_{13} \sin \theta + a_{21} \frac{\cos \theta}{\sin \alpha} + a_{22} x \cos \theta + a_{23} \theta + a_{24} x \theta + a_{25} \theta^2 + a_{26} x \theta^2 + a_{27} \theta^3 + a_{28} x \theta^3 \quad (4.56)$$

$$w = a_1 \cos \theta \cot \alpha - a_2 x \cos \alpha \cos \theta + a_3 \theta + a_4 x \theta + a_5 x^2 + a_6 \theta^2 + a_7 x^2 \theta + a_8 x \theta^2 + a_9 x^3 + a_{10} \theta^3 + a_{11} x^3 \theta + a_{12} x \theta^3 + a_{13} \cos \theta - a_{21} \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} + a_{22} x \sin \theta$$



Şekil 4.4 Konik kabağın sonlu elemanlara bölünmüş hali ve düğüm noktası serbestlikleri

(4.47) denklemleri matris formda şu şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, \theta) \\ v(x, \theta) \\ w(x, \theta) \end{Bmatrix} = [\phi(x, \theta)] \{a_i\} \quad (4.56)$$

Burada, $[\phi]$: şekil fonksiyonu matrisi, ve $\{a_i\}$: bir elemandaki yer değiştirme bileşenleridir. Bir elemana ait yer değiştirme bileşenleri açık olarak,

$$\{d_i\}^T = \left\{ u_i \quad v_i \quad \frac{\partial u_i}{\partial \theta} \quad \frac{\partial v_i}{\partial \theta} \quad w_i \quad \frac{\partial w_i}{\partial x} \quad \frac{\partial w_i}{\partial \theta} \right\} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (4.57)$$

$$\{d\} = [A] \{a\} \quad (4.58)$$

$$\{u\} = [\phi][A]^{-1} \{d\} \quad (4.59)$$

Burada $[B] = [A]^{-1}$ şeklinde yazılabilir. $[B]$ 'ye bağ matrisi denir. Şekil değiştirme bileşenleri,

$$\{\varepsilon\} = [F][B]\{d\} \quad (4.60)$$

$$\{\beta\} = [G][B]\{d\} \quad (4.61)$$

şeklinde ifade edilir. Burada, $[F]$ ve $[G]$ sırasıyla lineer ve non-lineer yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntılarından elde edilen türev matrisleridir. (4.16) bağıntısında (4.60) ve (4.61) tanımlamaları yerlerine konulursa,

$$\delta^2 V = \{d\}^T \iint [B]^T [F]^T [D] [F][B]\{d\} dx dy + \{d\}^T \iint [B]^T [G]^T [N_0] [G][B]\{d\} dx dy \quad (4.62)$$

elde edilir. Burada, eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim rijitlik matrisini verir, eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terim ise geometrik rijitlik matrisini verir. Burada $[N_0]$, sistemde dış yüklerin etkisiyle oluşan membran kesit tesirleridir. Bu çalışmada aksel yük ve hidrostatik yük altındaki kabuklar için çözüm yapılacaktır. Statik kritik yük, p 'nin belirlenebilmesi için sonlu elemana ait rijitlik ve geometrik rijitlik matrislerinin oluşturulması gerekir. Serbest titreşim analizi için kütle matrisi sonlu eleman formunda oluşturulmalıdır. (4.56) bağıntısı (3.21)'de yerine koyulursa,

$$[m] = \rho \iint [B]^T [\phi]^T [\phi][B] dx dy \quad (4.63)$$

elde edilir.

5. SAYISAL UYGULAMALAR

Silindirik ve konik kabuk elemana ait rijitlik matrisi, kütle matrisi ve geometrik rijitlik matrisi oluşturulmuş ve elemanlar birleştirilip sınır şartları uygulanarak sisteme ait matrisler elde edilmiştir. Sistem kütle matrisi ve rijitlik matrisi kullanılarak (3.5) denkleminde kabuğun doğal titreşim periyotları bulunmuştur. Buradan dinamik analiz için gerekli kritik zaman artımı değeri belirlenmiştir. Sistem rijitlik matrisi ve geometrik rijitlik matrisi kullanılarak (4.32) denkleminde öz değer problemi çözerek statik kritik yük bulunmuştur. Ele alınan kabuk yapılar, sistem ve yükleme açısından dönel simetrik oldukları için simetri eksenine göre kabuğun yarısı dikkate alınarak hesap yapılmıştır.

Sonlu elemanlar yönteminde eleman sayısı çözümün yakınsaklığı açısından büyük önem taşımaktadır. Bu çalışmada, eleman sayısını belirlemek için eleman sayılarına karşılık gelen statik kritik yük grafiği çizdirilmiş ve yük değerleri arasındaki değişimin sıfıra gittiği yerdeki eleman sayısı esas alınmıştır. Bu ön hesaplamalar ışığında, çeşitli geometrik ve fiziksel özelliklere sahip silindirik ve konik kabukların, aksenal basınç ve hidrostatik basınç etkisi altında Wilson θ ve Newmark'ın sabit ortalama ivme ve doğrusal ortalama ivme dinamik analiz yöntemleri ile dinamik kritik yükü bulunmuştur. Buradan dinamik yük katsayısı, $d_{yk} = p_{dkr} / p_{skr}$ bulunmuştur. Kabuk boyutları ve elastik özellikleri, daha önce yapılan çalışmalarla karşılaştırma yapabilmek için özellikle seçilmiştir.

5.1 I. Tip ve II. Tip Sonlu Eleman ile Konik Kabuğun Statik Kritik Yük Hesabı

Örnek 1. Hidrostatik yüklü konik kabuğun statik kritik yükünün I. Tip sonlu eleman ile belirlenmesi.

Sabit mesnetli konik kabuğun sınır şartları aşağıda verilmiştir.

$$N_x = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$M_x = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$u = 0, v = 0, w = 0$$

Kabuk kalınlığı, kabuk boyunca sabittir.

Veriler: $L=0,50$ m. , $t=0,0025$ m., $R=0,25$ m., $E=2,1 \cdot 10^{10}$ kg/m², $\nu=0,3$, $\alpha=50^\circ$ Eleman sayısı I. tip için 43, II. Tip için 50 olarak alınmıştır.

I. tip sonlu eleman ile elde edilen sonuç: $p_{skr} = 2,4458 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^2$

II. tip sonlu eleman ile elde edilen sonuç: $p_{skr} = 2,5022 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^2$

Her iki tip için de elde edilen bu sonuçlar Almroth (Almroth, Bushnell, 1968) ve Baruch'un (Baruch vd, 1967) elde ettiği sonuçla örtüşmektedir. ($p_{skr} = 2,44 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^2$ (Almroth)).

5.2 I. Tip Sonlu Eleman ile Konik Kabuğun Dinamik Kritik Yük Hesabı

5.2.1 Eksenel basınç etkisindeki konik kabukların dinamik kritik yük hesabı

Örnek 2. Eksenel yüklü konik kabuğun, Wilson θ , Newmark'ın sabit ortalama ivme ve doğrusal ivme değişimi yöntemleriyle dinamik kritik yükünün belirlenmesi

Sınır şartları;

Konik kabuğun üst sınırı serbest kenar:

$$N_x = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$N_\theta = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$$

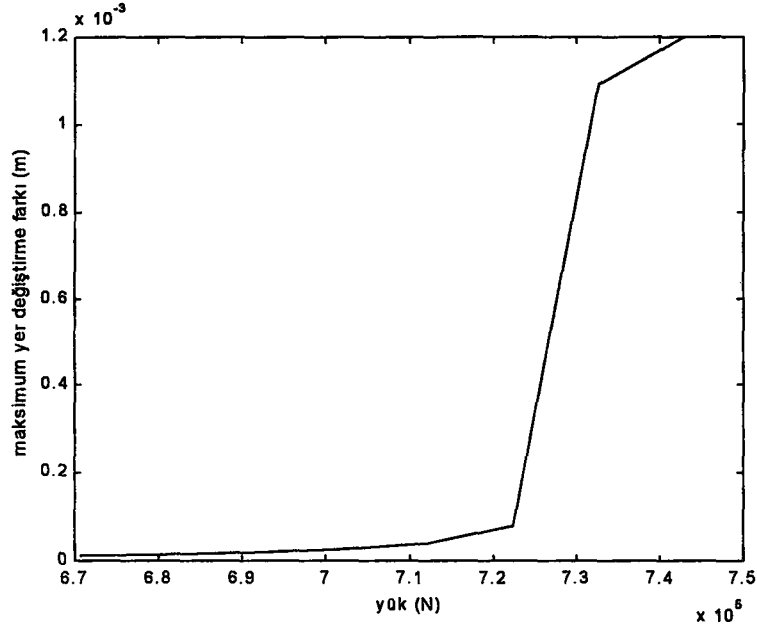
$$N_{x\theta} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

alt sınırı ise ankastredir:

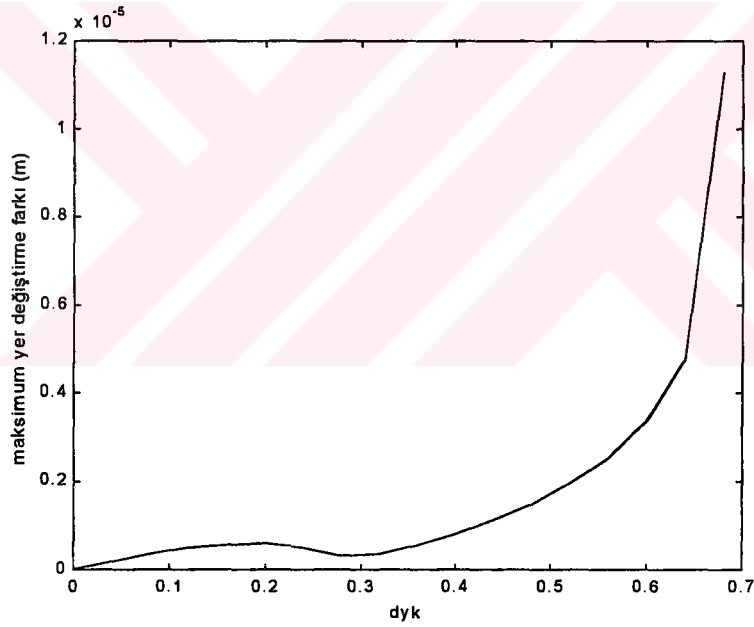
$$u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Kabuk kalınlığı kabuk boyunca sabittir. Eleman sayısı 64 olarak alınmıştır.

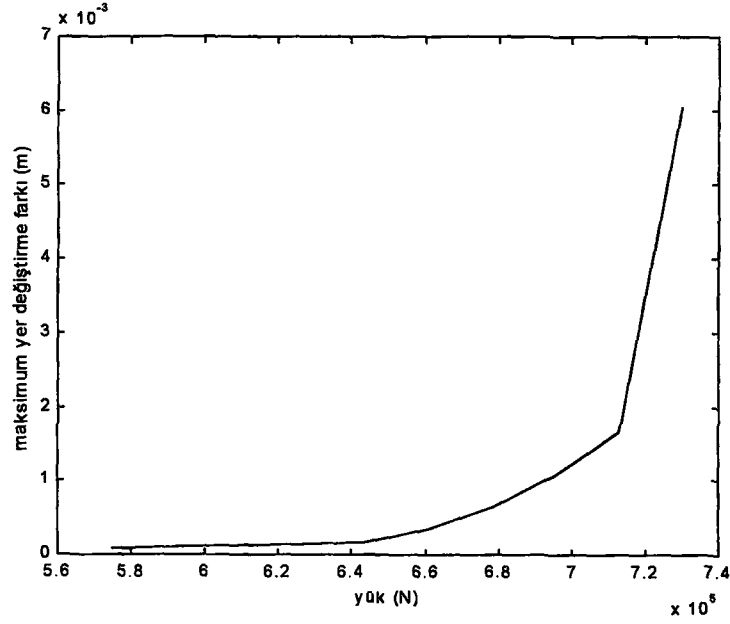
Veriler: $L = 2,159 \text{ m}$, $t = 0,00254 \text{ m}$, $R = 0,254 \text{ m}$, $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\nu = 0,3$, $\rho = 801,7 \text{ kg.s}^2/\text{m}^4$, $\alpha = 15^\circ$



şekil 5.1 Wilson θ yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

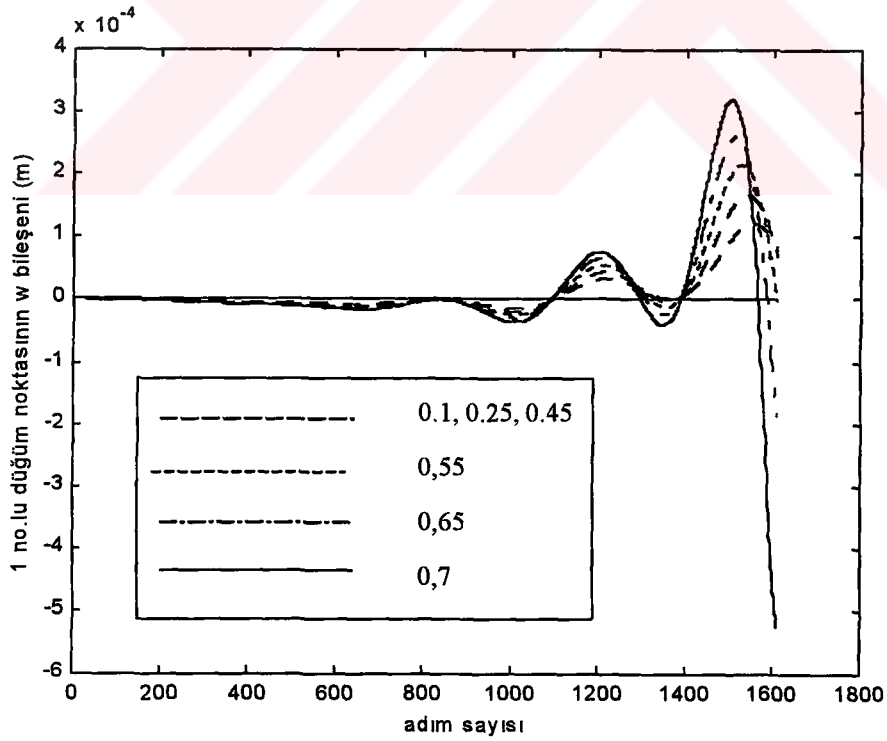


şekil 5.2 Newmark'ın sabit ortalama ivme yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği



Şekil 5.3 Newmark'ın doğrusal ivme değişimi yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

Her üç yöntemle de aynı sonuçlar elde edilmiştir: $p_{skr} = 1,2056 \cdot 10^6$ N, $p_{dkr} \approx 7,3 \cdot 10^5$ N, $dyk \approx 0,61$



Şekil 5.4 Örnek 2.'deki kabuğun çeşitli yükler için elde edilen yer değiştirme grafiği

5.2.2 Hidrostatik basınç etkisindeki konik kabukların dinamik kritik yük hesabı

Sınır şartları;

Konik kabuğun üst sınırı serbest kenar:

$$N_x = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$N_\theta = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$$

$$N_{x\theta} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

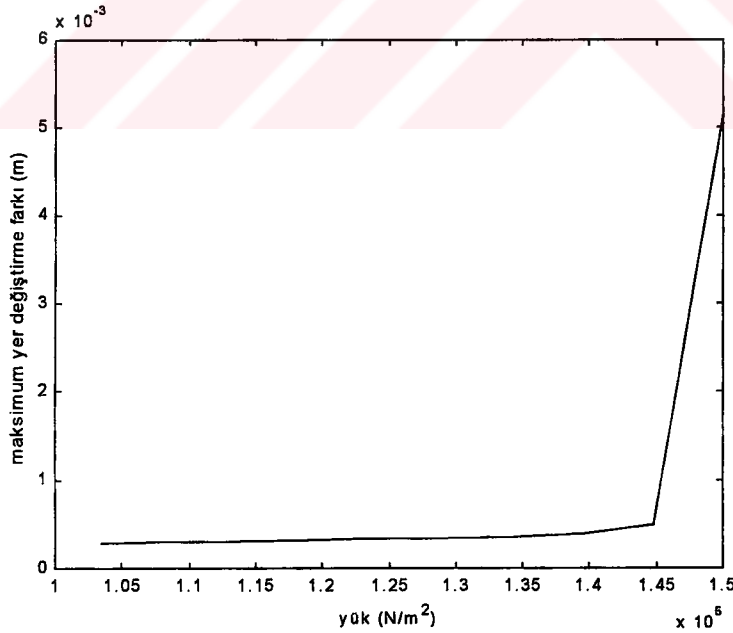
alt sınırı ise ankastredir:

$$u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

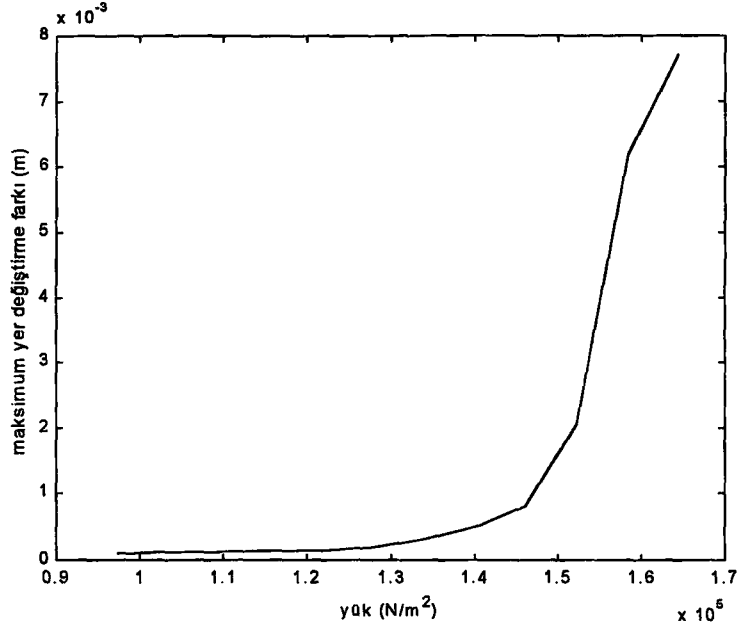
Kabuk kalınlığı kabuk boyunca sabittir.

Örnek 3. Hidrostatik basınç yüklü konik kabuğun, Wilson θ , Newmark'ın sabit ortalama ivme ve doğrusal ivme değişimi yöntemleriyle dinamik kritik yükünün belirlenmesi

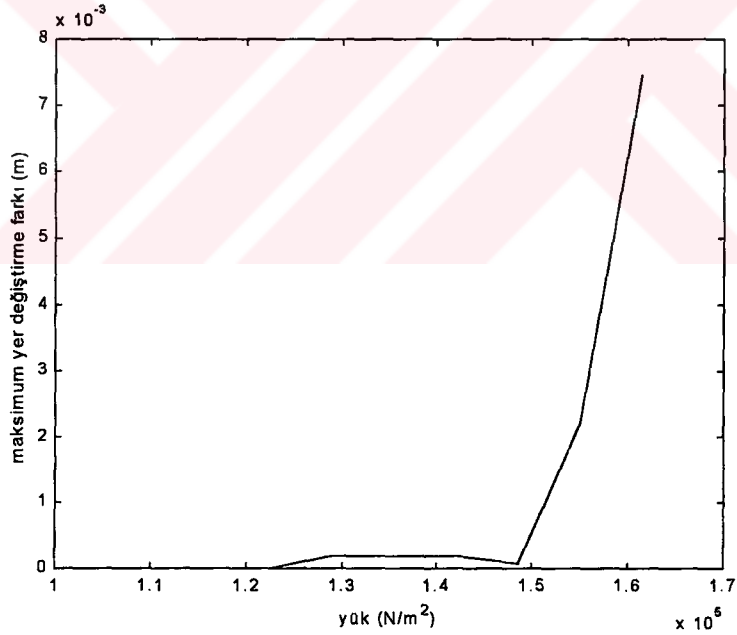
Veriler: $L=2,159$ m., $t=0,00254$ m., $R=0,254$ m., $E=2 \cdot 10^{11}$ N/m², $\nu=0,3$, $\rho=801,7$ kg.s²/m⁴, $\alpha=15^\circ$



Şekil 5.5 Wilson θ yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

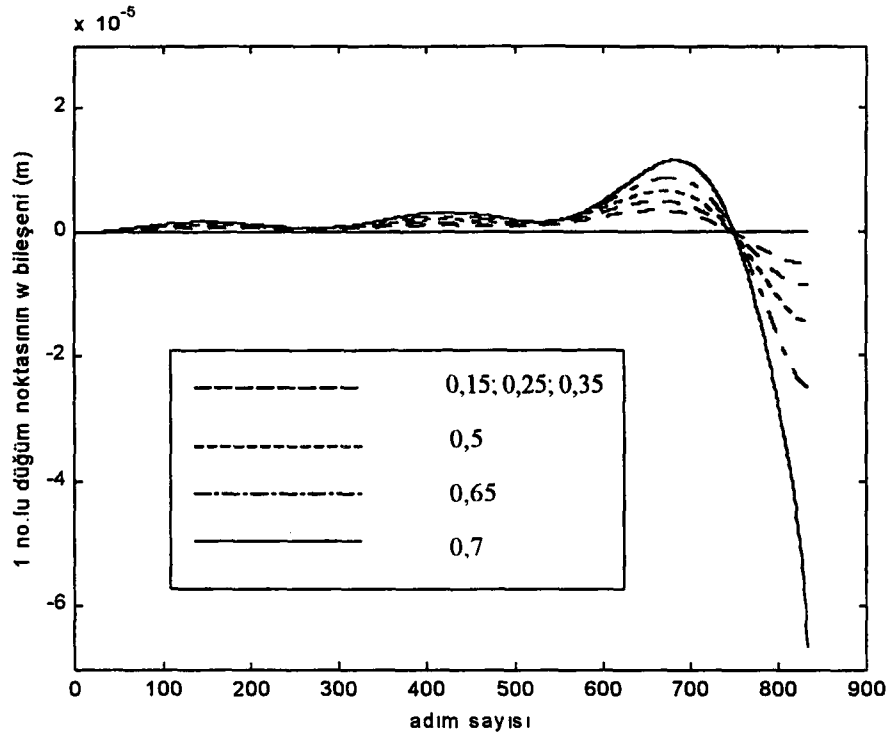


şekil 5.6 Newmark'ın sabit ortalama ivme yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

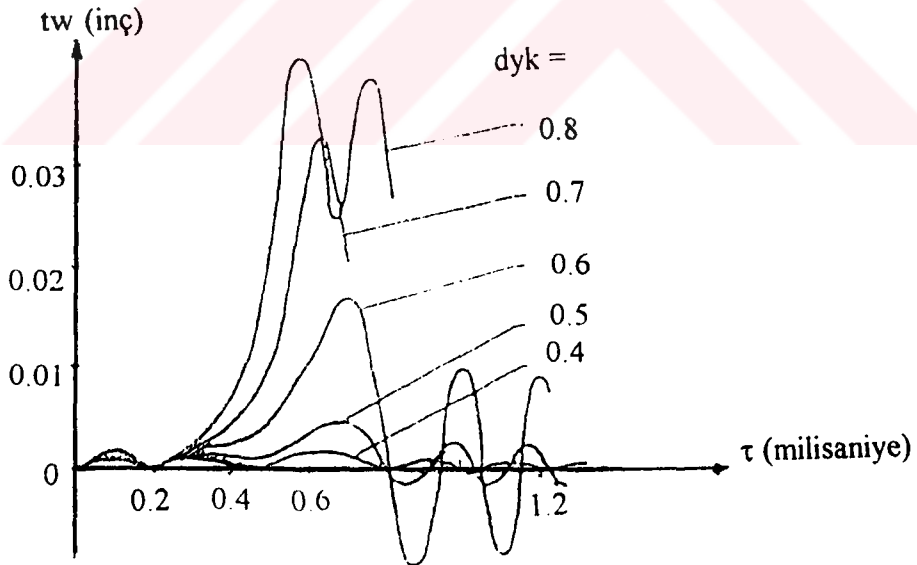


şekil 5.7 Newmark'ın doğrusal ivme değişimi yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

Elde edilen sonuçlar: $p_{skr} = 2,5831 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, $p_{dkr} \approx 1,55 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$, $dyk \approx 0,60$



Şekil 5.8 Örnek 2.'deki kabuğun çeşitli yükler için elde edilen yer değiştirme grafiği

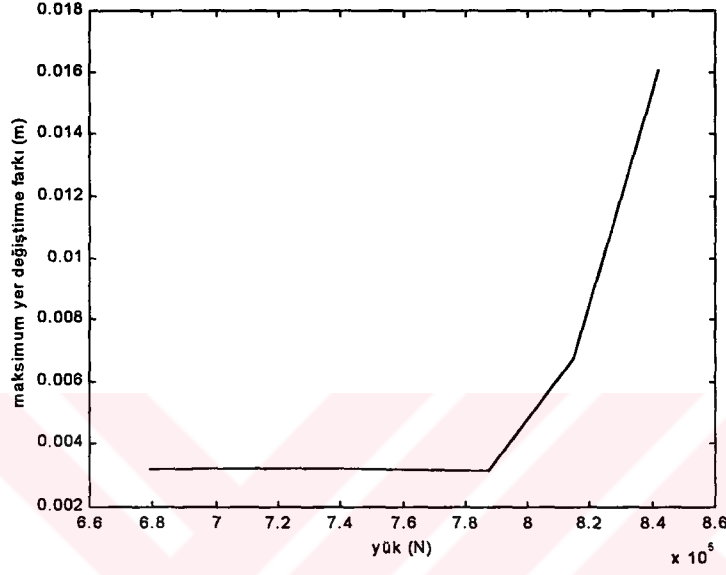


Şekil 5.9 Aynı özelliklere sahip konik kabuğun Shiau (Shiau, 1974), tarafından çeşitli yükler için elde edilen yer değiştirme grafiği

5.2.3 α ve L/R oranına bağı olarak aksel basınç etkisindeki konik kabukların dinamik kritik yük hesabı

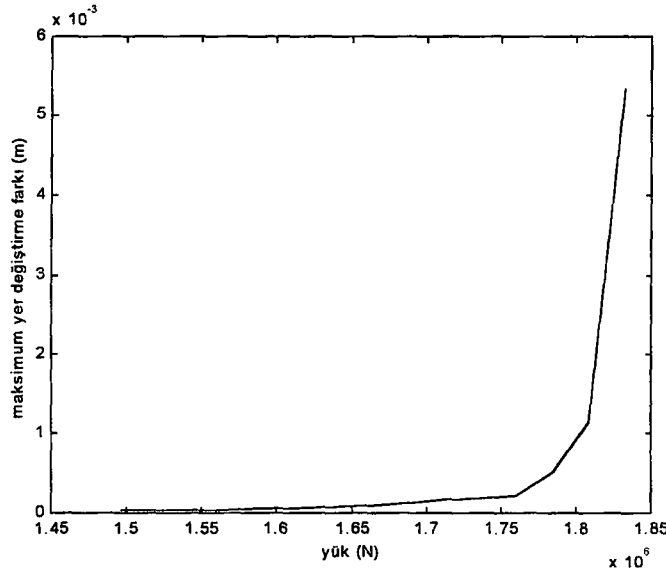
Örnek 4. Aksel basınca maruz ve çeşitli kabuk boyu-çap oranlarına sahip konik kabukların, Newmark'ın sabit ortalama ivme yöntemiyle dinamik kritik yüklerinin bulunması

Veriler: $L=2$ m. , $t=0,002$ m, $E=2*10^{11}$ N/m², $\nu=0,3$, $\rho=801,7$ kg.s²/m⁴



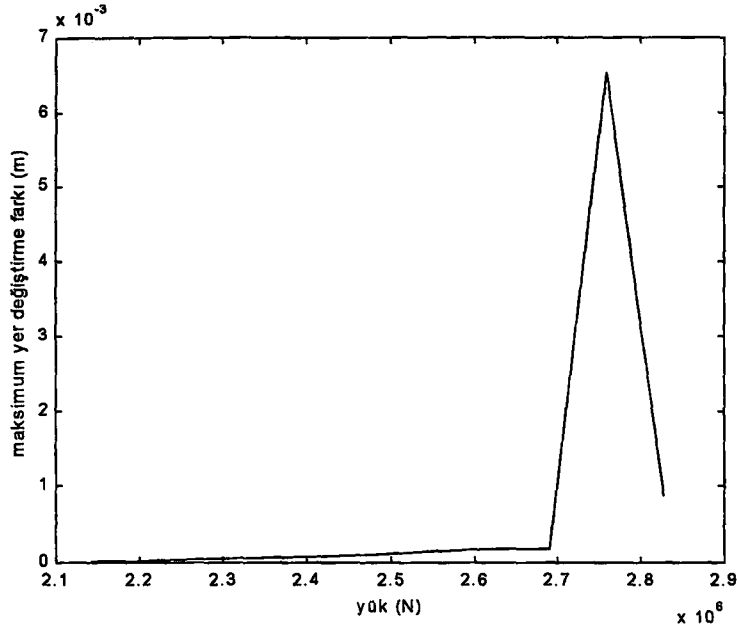
Şekil 5.10 $\alpha=10^0$, $L/R=10$ için Newmark yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

Elde edilen sonuçlar: $p_{skr} = 1,358*10^6$ N , $p_{dkr} \approx 8,1*10^5$ N , $dyk \approx 0,6$



Şekil 5.11 $\alpha=10^0$, $L/R=5$ için Newmark yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

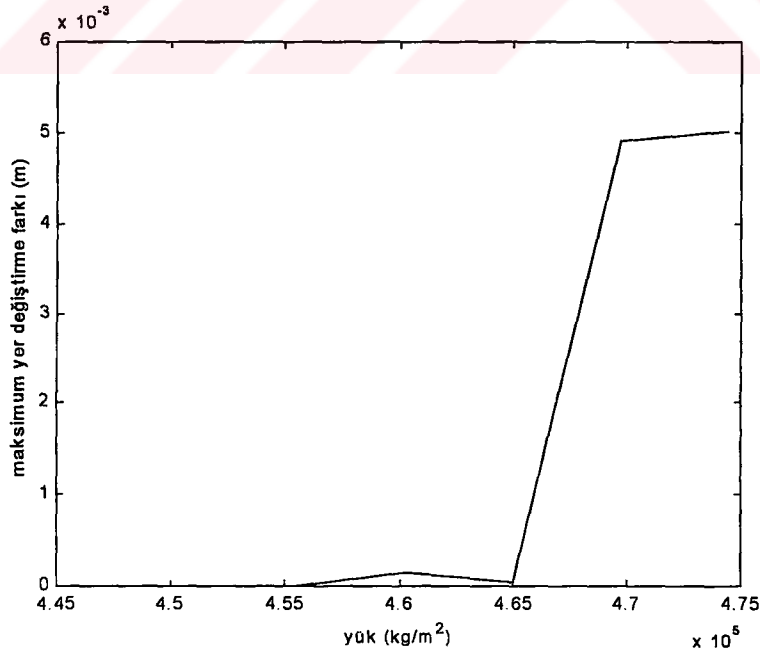
Elde edilen sonuçlar: $p_{skr} = 2,8777*10^6$ N , $p_{dkr} \approx 1,81*10^6$ N , $dyk \approx 0,63$



Şekil 5.12 $\alpha=10^\circ$, $L/R=2$ için Newmark yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

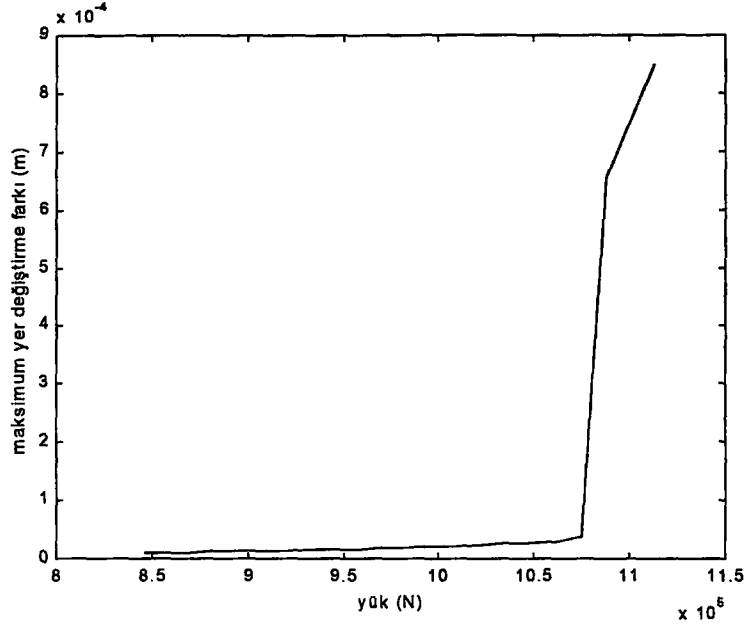
Elde edilen sonuçlar: $p_{skr}=4,2849 \cdot 10^6$ N , $p_{dkr} \approx 2,7594 \cdot 10^5$ N , $dyk \approx 0,64$

Veriler: $L=2$ m. , $t=0,002$ m. , $E=2 \cdot 10^{11}$ N/m² , $\nu=0,3$, $\rho=801,7$ kg.s²/m⁴



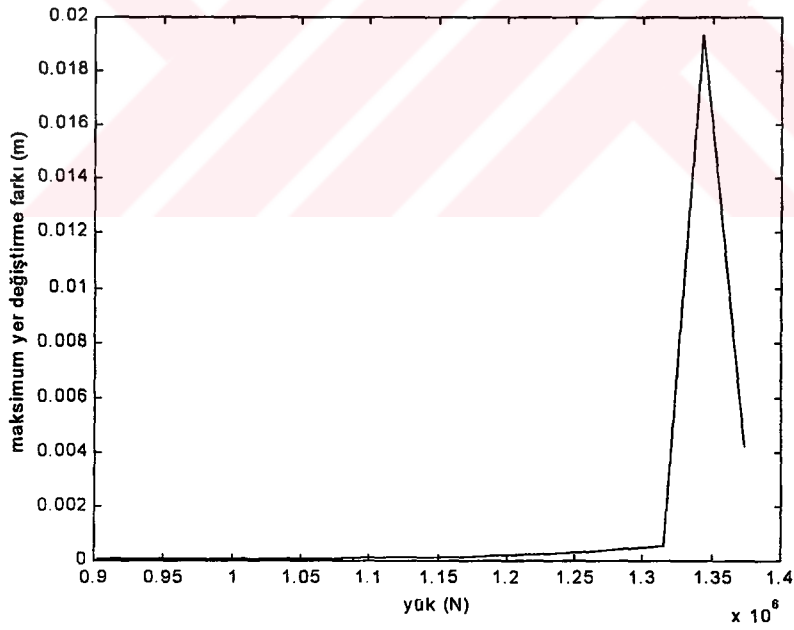
Şekil 5.13 $\alpha=30^\circ$, $L/R=10$ için Newmark yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

Elde edilen sonuçlar: $p_{skr}=7,8287 \cdot 10^5$ N , $p_{dkr} \approx 4,68 \cdot 10^5$ N , $dyk \approx 0,61$



Şekil 5.14 $\alpha=30^0$, $L/R=5$ için Newmark yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

Elde edilen sonuçlar: $p_{skr}= 1,6929 \times 10^6$ N , $p_{dkr} \approx 1,088 \times 10^6$ N , $dyk \approx 0,64$



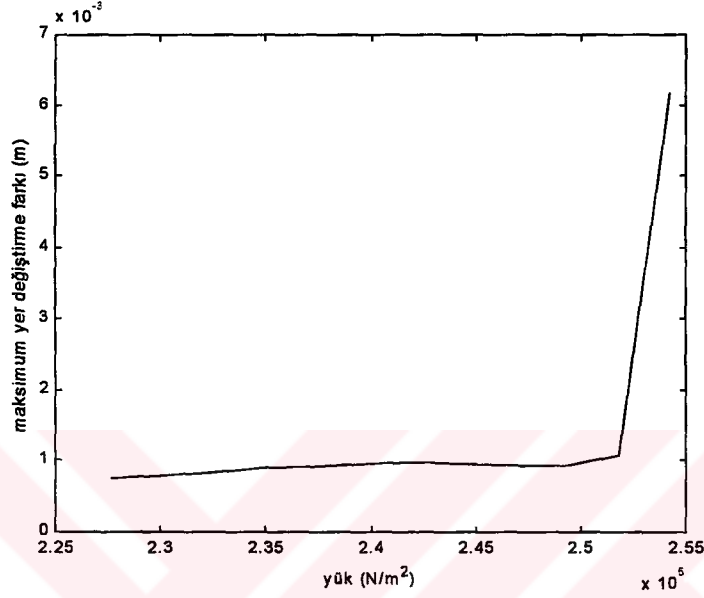
Şekil 5.15 $\alpha=30^0$, $L/R=2$ için Newmark yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

Elde edilen sonuçlar: $p_{skr}= 2,023 \times 10^6$ N , $p_{dkr} \approx 1,33 \times 10^6$ N , $dyk \approx 0,66$

5.2.4 α ve L/R oranına bağı olarak hidrostatik basınç etkisindeki konik kabukların dinamik kritik yük hesabı

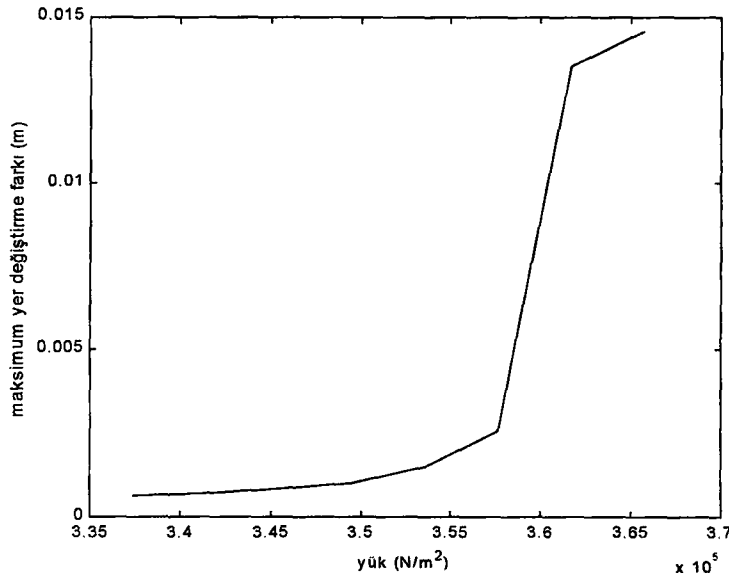
Örnek 5. Hidrostatik basınca maruz ve çeşitli kabuk boyu-çap oranlarına sahip konik kabukların, Newmark'ın sabit ortalama ivme yöntemiyle dinamik kritik yüklerinin bulunması

Veriler: $L=2$ m., $t=0,002$ m., $E=2*10^{11}$ N/m², $\nu=0,3$, $\rho=801,7$ kg.s²/m⁴,



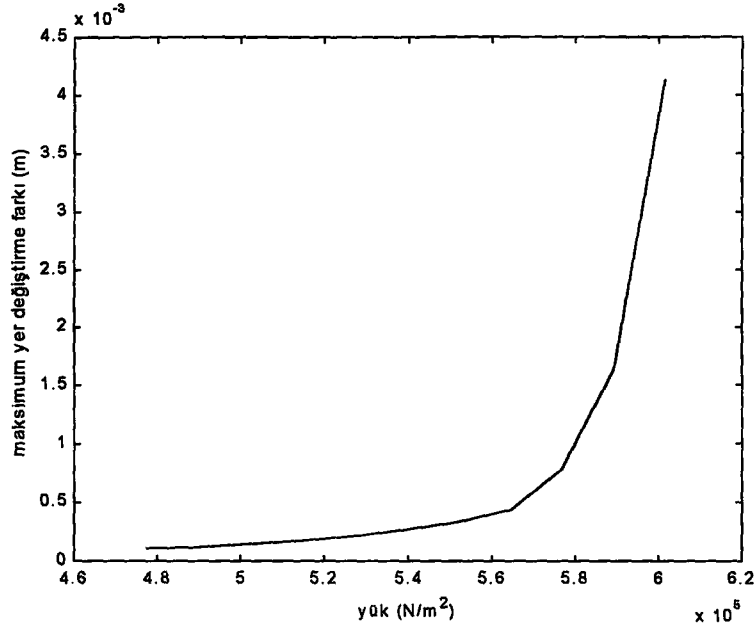
Şekil 5.16 $\alpha=10^0$, $L/R=10$ için Newmark yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

Elde edilen sonuçlar: $p_{skr}=4,843*10^5$ N/m², $p_{dkr}\approx 2,54*10^5$ N/m², $dy_k\approx 0,52$



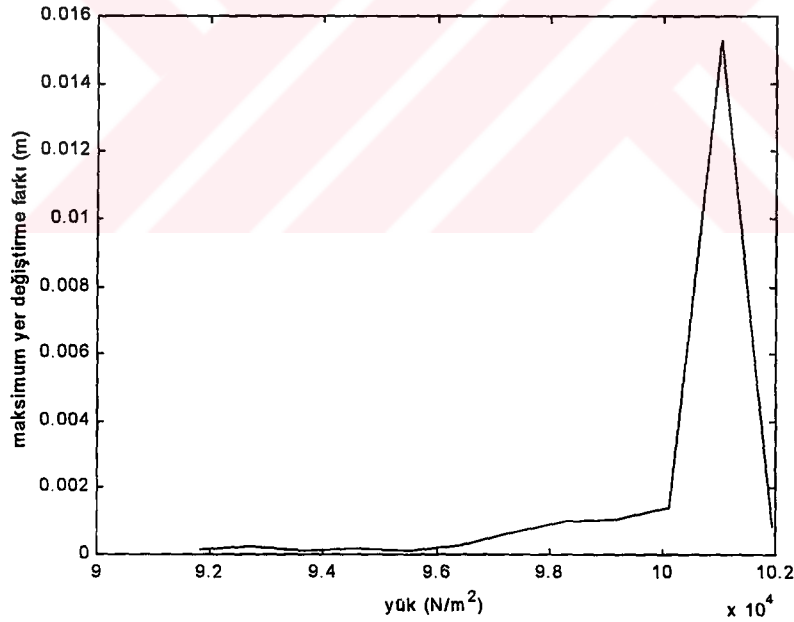
Şekil 5.17 $\alpha=10^0$, $L/R=5$ için Newmark yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

Elde edilen sonuçlar: $p_{skr}=6,75*10^5$ N/m², $p_{dkr}\approx 3,62*10^5$ N/m², $dy_k\approx 0,54$



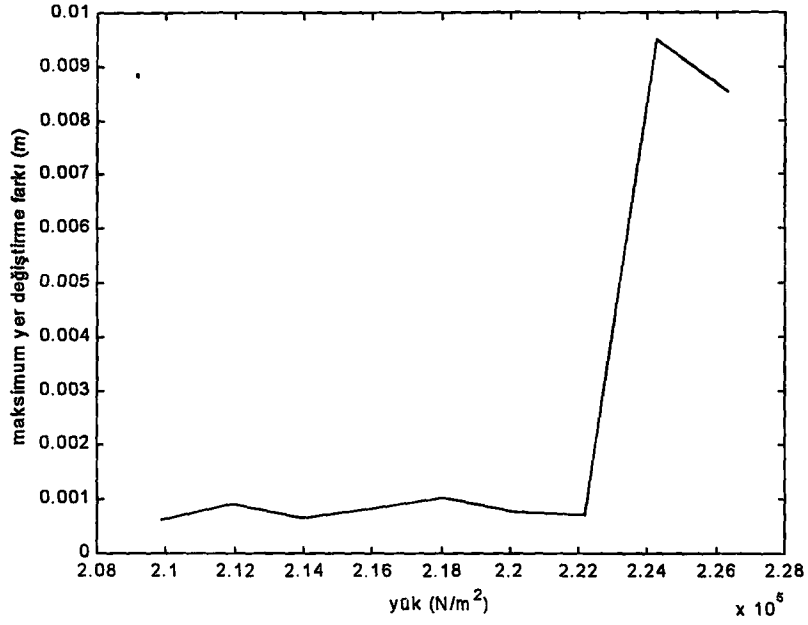
Şekil 5.18 $\alpha=10^0$, $L/R=2$ için Newmark yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

Elde edilen sonuçlar: $p_{skr}=9,5505 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, $p_{dkr} \approx 5,89 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, $dyk \approx 0,62$



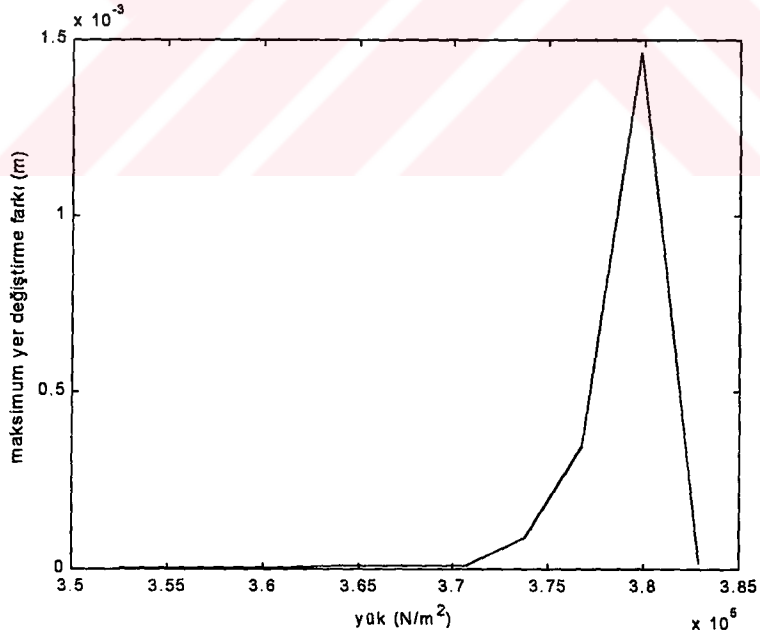
Şekil 5.19 $\alpha=30^0$, $L/R=10$ için Newmark yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

Elde edilen sonuçlar: $p_{skr}=1,837 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, $p_{dkr} \approx 1,01 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, $dyk \approx 0,55$



Şekil 5.20 $\alpha=30^\circ$, $L/R=5$ için Newmark yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

Elde edilen sonuçlar: $p_{skr}=3,74 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, $p_{dkr} \approx 2,24 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, $dyk \approx 0,60$



Şekil 5.21 $\alpha=30^\circ$, $L/R=2$ için Newmark yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

Elde edilen sonuçlar: $p_{skr}=6,077 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, $p_{dkr} \approx 3,78 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, $dyk \approx 0,63$

5.3 I. Tip Sonlu Eleman ile Silindirik Kabuğun Dinamik Kritik Yük Hesabı

5.3.1 Eksenel basınç etkisindeki silindirik kabukların dinamik kritik yük hesabı

Örnek 6. Eksenel yüklü silindirik kabuğun Wilson θ yöntemiyle dinamik kritik yükünün belirlenmesi

Sınır şartları;

Silindirik kabuğun üst sınırı serbest kenar:

$$N_x = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$N_\theta = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$$

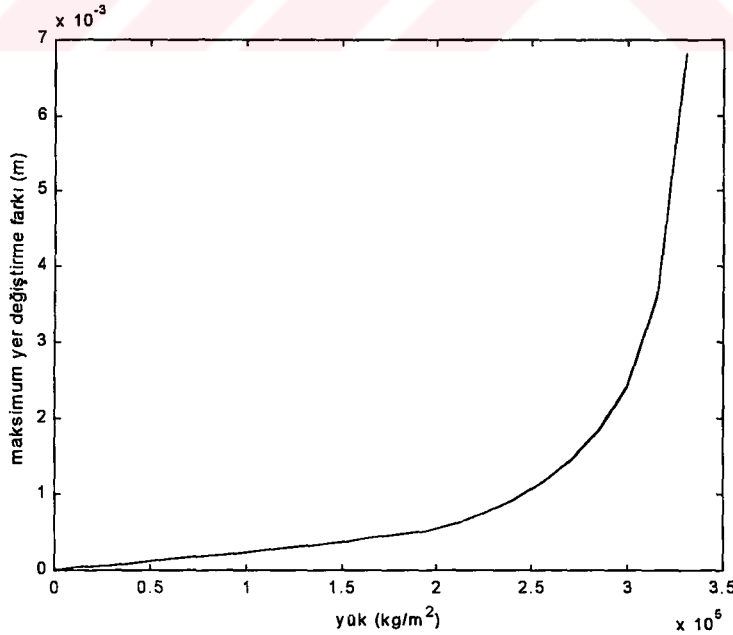
$$N_{x\theta} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

alt sınırı ise ankastredir:

$$u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Kabuk kalınlığı kabuk boyunca sabittir.

Veriler: $L=2,159$ m., $t=0,00254$ m., $R=0,254$ m., $E=2*10^{11}$ kg/m², $\nu=0,3$, $\rho=801,7$ kg.s²/m⁴



Şekil 5.22 Wilson θ yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

Elde edilen sonuçlar: $p_{skr} = 7,5*10^5$ N, $p_{dkr} \approx 3,15*10^5$ N, $dyk \approx 0,42$

5.3.2 Hidrostatik basınç etkisindeki silindirik kabukların dinamik kritik yük hesabı

Örnek 7. Sabit hidrostatik basınç yüklü silindirik kabuğun Wilson θ yöntemiyle dinamik kritik yükünün belirlenmesi

Sınır şartları;

Silindirik kabuğun üst sınırı serbest kenar:

$$N_x = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$N_\theta = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$$

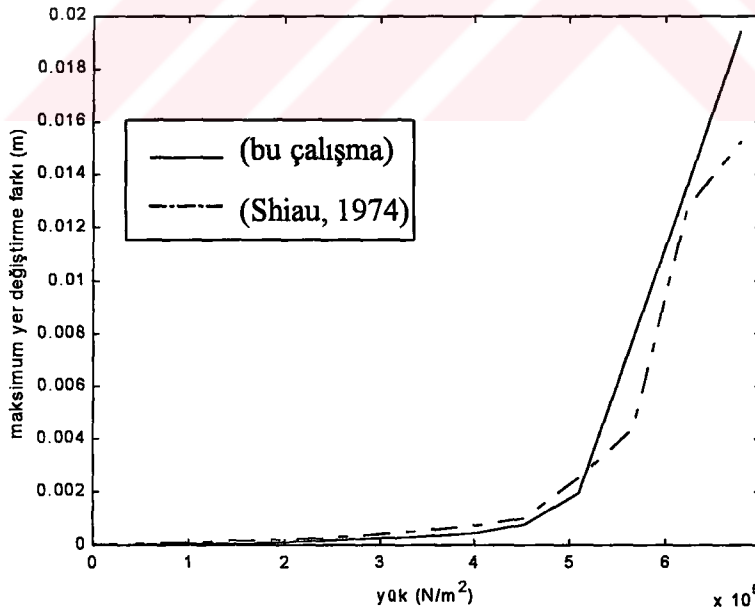
$$N_{x\theta} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

alt sınırı ise ankastrerdir:

$$u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Kabuk kalınlığı kabuk boyunca sabittir.

Veriler: $L=2,159$ m., $t=0,00254$ m., $R=0,254$ m., $E=2*10^{11}$ N/m², $\nu=0,3$, $\rho=801,7$ kg.s²/m⁴



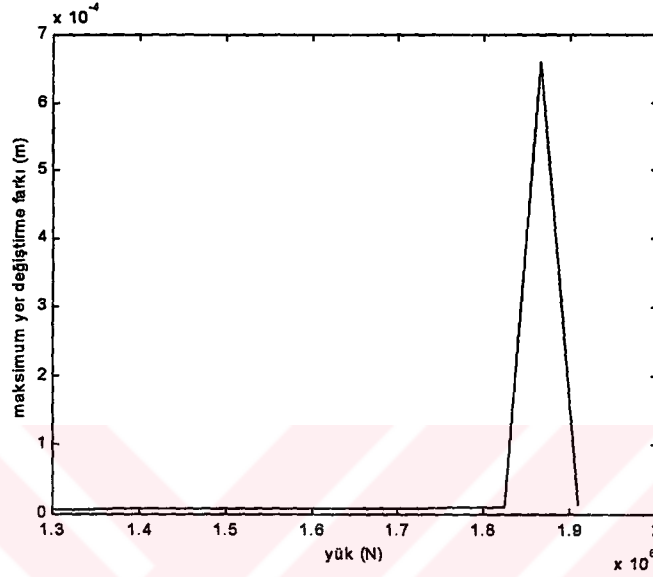
şekil 5.23 Wilson θ yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

Elde edilen sonuçlar: $p_{skr} = 1,355*10^6$ N/m², $p_{dkr} \approx 5,5*10^5$ N/m², $dyk \approx 0,41$

5.3.3 L/R oranına bağı olarak aksel basınç etkisindeki silindirik kabukların dinamik kritik yük hesabı

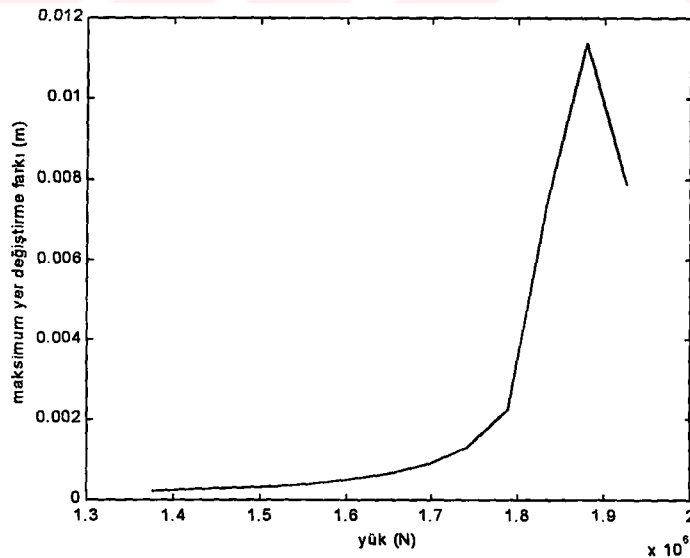
Örnek 8. Aksel basınca maruz ve çeşitli kabuk boyu-çap oranlarına sahip silindirik kabukların, Newmark'ın sabit ortalama ivme yöntemiyle dinamik kritik yüklerinin bulunması

Veriler: $L=2$ m. , $t=0,002$ m. , $E=2*10^{11}$ N/m² , $\nu=0,3$, $\rho=801,7$ kg.s²/m⁴



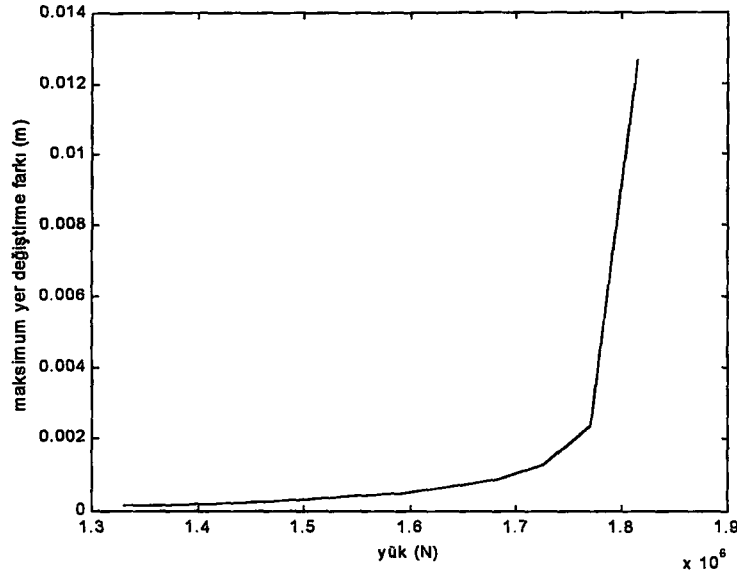
Şekil 5.24 L/R=2 için Newmark yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

Elde edilen sonuçlar: $p_{skr} = 4,3407*10^6$ N , $p_{dkr} \approx 1,86*10^6$ N , $dyk \approx 0,43$



Şekil 5.25 L/R=5 için Newmark yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

Elde edilen sonuçlar: $p_{skr} = 4,53*10^6$ N , $p_{dkr} \approx 1,838*10^6$ N , $dyk \approx 0,41$



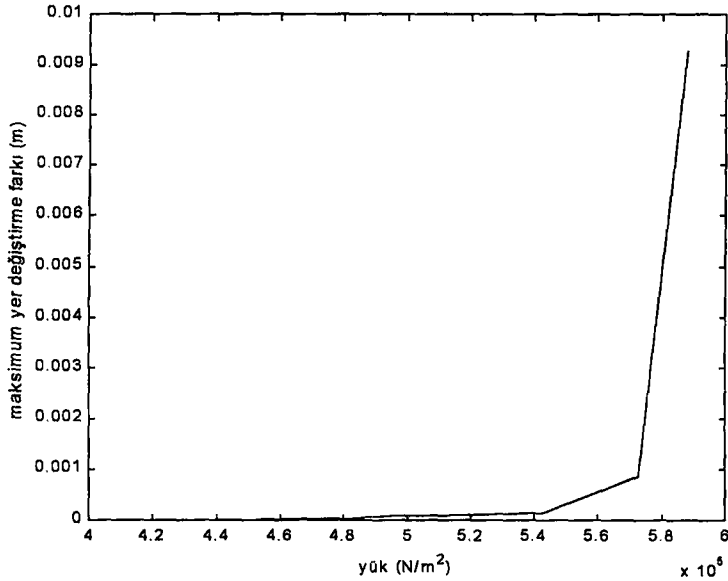
Şekil 5.26 L/R=10 için Newmark yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

Elde edilen sonuçlar: $p_{skr} = 4,429 \cdot 10^6 \text{ N}$, $p_{dkr} \approx 1,816 \cdot 10^6 \text{ N}$, $dyk \approx 0,4$

5.3.4 L/R oranına bağlı olarak hidrostatik basınç etkisindeki silindirik kabukların dinamik kritik yük hesabı

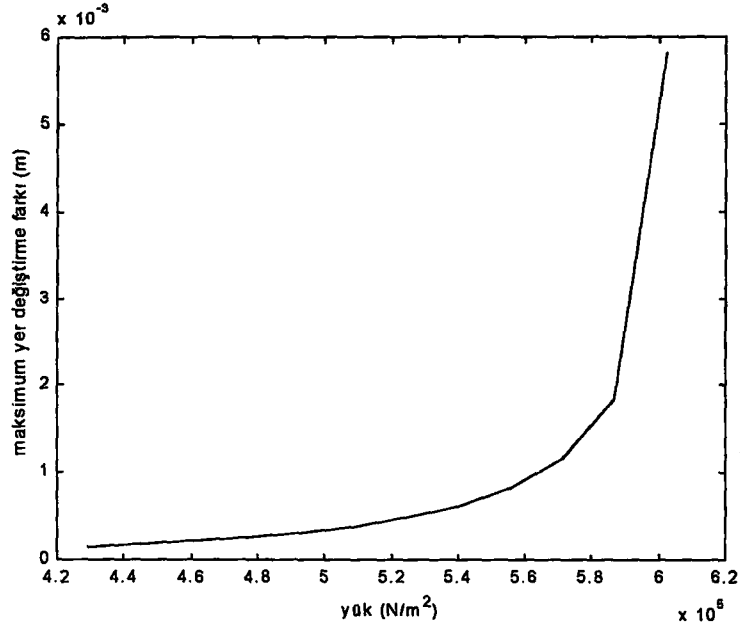
Örnek 9. Hidrostatik basınca maruz ve çeşitli kabuk boyu-çap oranlarına sahip silindirik kabukların, Newmark'ın sabit ortalama ivme yöntemiyle dinamik kritik yüklerinin bulunması

Veriler: $L = 2 \text{ m}$, $t = 0,002 \text{ m}$, $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\nu = 0,3$, $\rho = 801,7 \text{ kg.s}^2/\text{m}^4$



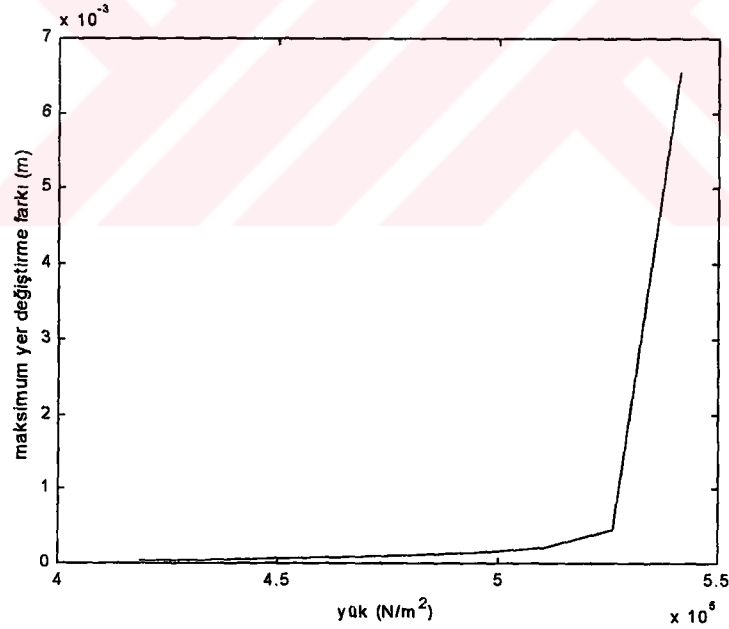
Şekil 5.27 L/R=2 için Newmark yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

Elde edilen sonuçlar: $p_{skr} = 1,36 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$, $p_{dkr} \approx 5,88 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, $dyk \approx 0,43$



Şekil 5.28 L/R=5 için Newmark yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

Elde edilen sonuçlar: $p_{skr} = 1,4312 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$, $p_{dkr} \approx 6,025 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, $dyk \approx 0,42$



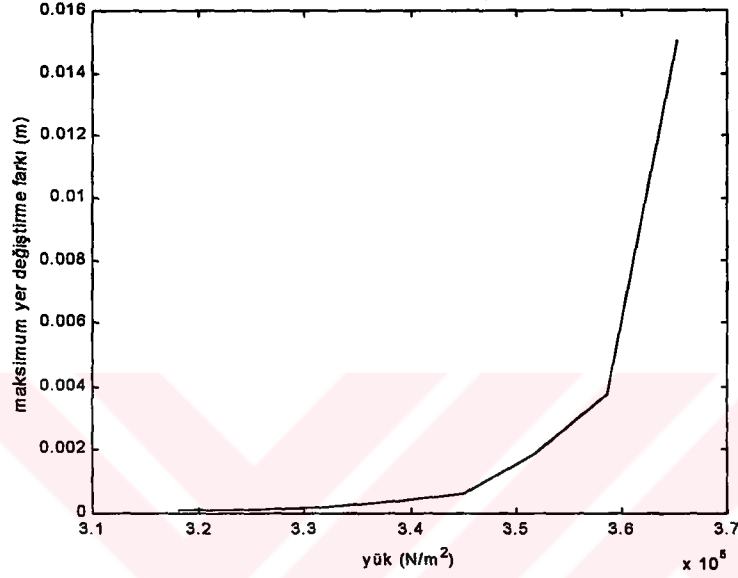
Şekil 5.29 L/R=10 için Newmark yöntemiyle bulunan yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

Elde edilen sonuçlar: $p_{skr} = 1,395 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$, $p_{dkr} \approx 5,414 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, $dyk \approx 0,39$

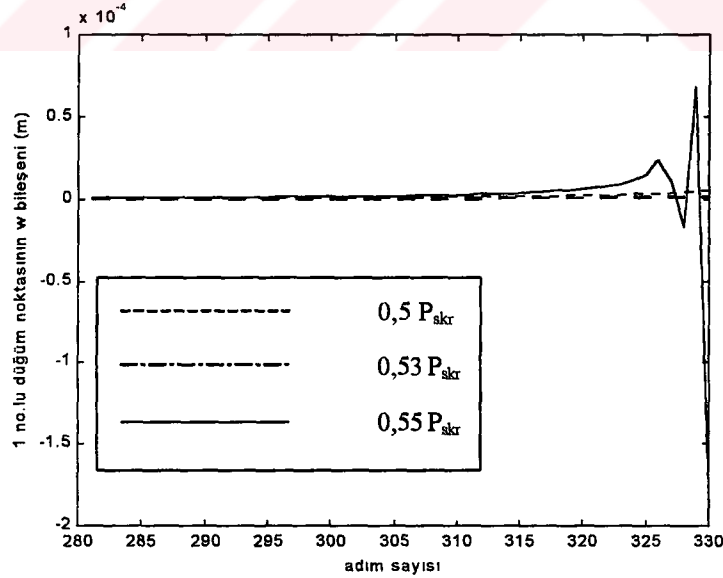
5.4 II. Tip Sonlu Eleman ile Konik Kabuğun Dinamik Kritik Yük Hesabı

Örnek 10. Hidrostatik basınca maruz konik kabuğun Wilson θ yöntemiyle dinamik kritik yükünün belirlenmesi

Veriler: $L=2$ m. , $t=0,002$ m., $E=2*10^{11}$ N/m², $\nu=0,3$, $\rho=801,7$ kg.s²/m⁴
 $\alpha=10^0$, $L/R=5$



Şekil 5.30 Yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

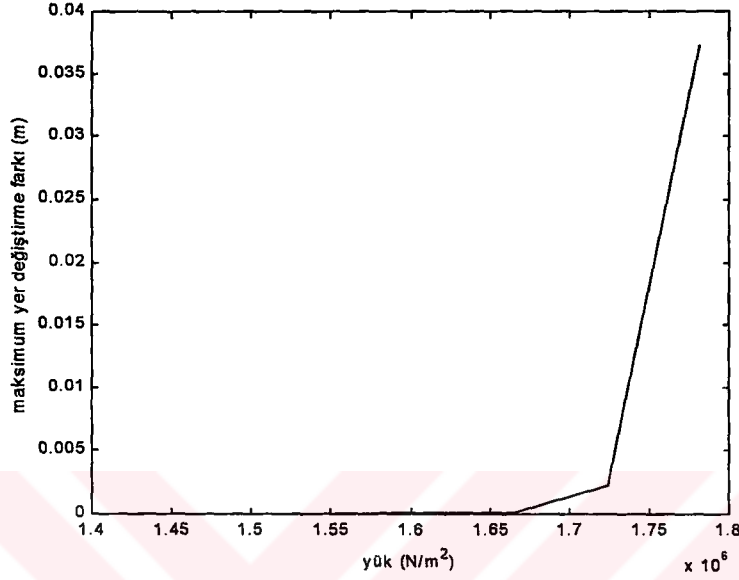


Şekil 5.31 1 no.'lu düğüm noktasının kabuk orta yüzeyine dik doğrultudaki yer değiştirme-zaman adım sayısı grafiği

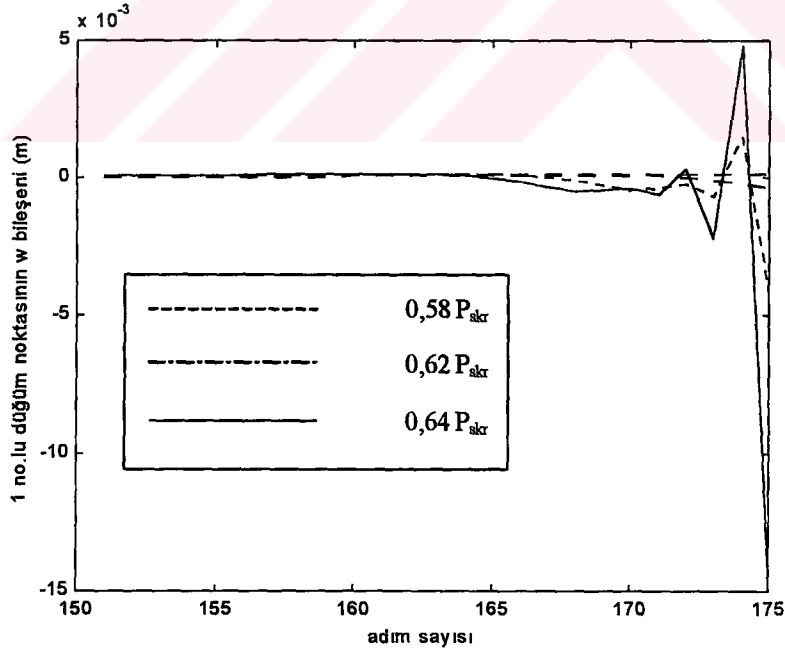
Elde edilen sonuçlar: $p_{skr}=6,765*10^5$ N/m² , $p_{dkr}\approx 3,65*10^5$ N/m² , $dyk\approx 0,54$

Örnek 11. Eksenel basınca maruz konik kabuğun Wilson θ yöntemiyle dinamik kritik yükünün belirlenmesi

Veriler: $L=2$ m. , $t=0,002$ m., $E=2*10^{11}$ N/m², $\nu=0,3$, $\rho=801,7$ kg.s²/m⁴
 $\alpha=10^0$, $L/R=5$



Şekil 5.32 Yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği

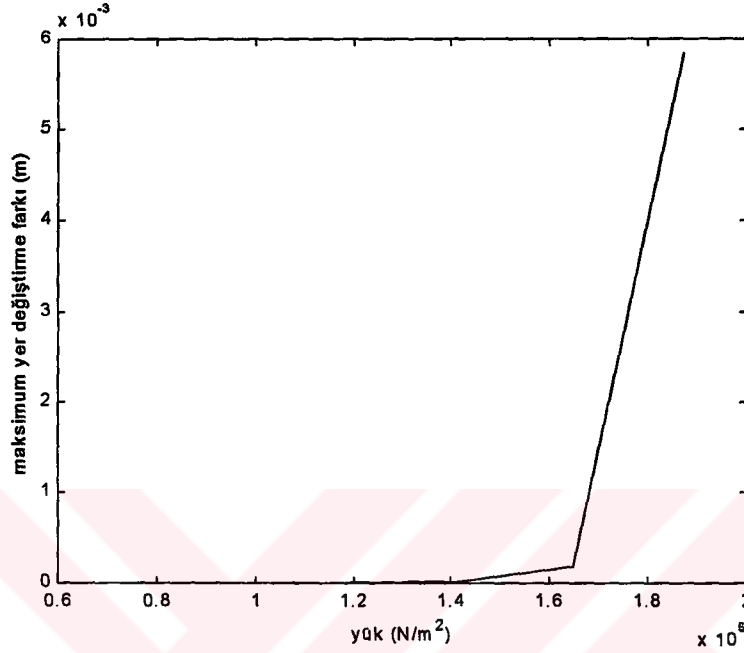


Şekil 5.33 1 no.'lu düğüm noktasının kabuk orta yüzeyine dik doğrultudaki yer değiştirme-zaman adım sayısı grafiği

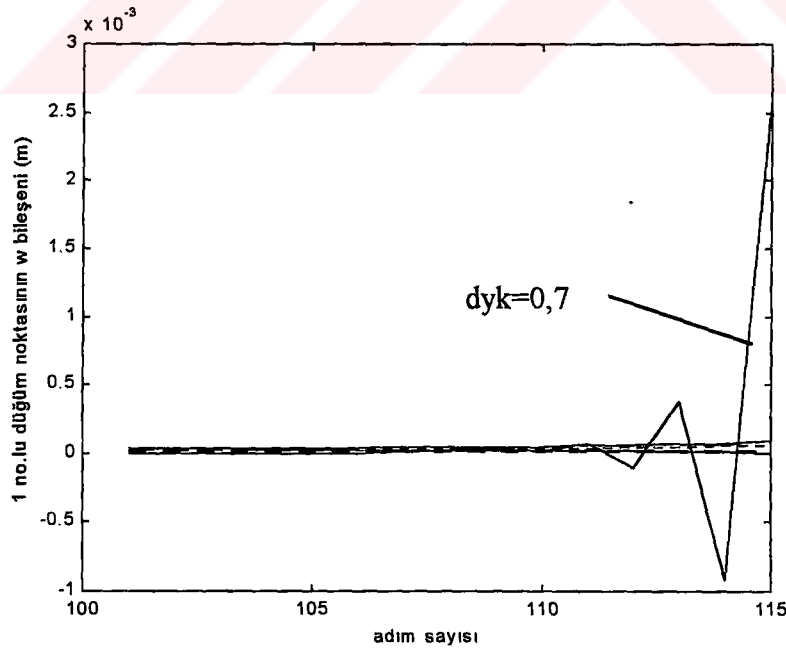
Elde edilen sonuçlar: $p_{skr}=2,87*10^6$ N/m² , $p_{dkr}\approx 1,75*10^6$ N/m² , $dyk\approx 0,61$

Örnek 12. Örnek 1.de statik kritik yükü bulunan hidrostatik basınca maruz konik kabuğun II. tip sonlu eleman kullanılarak Wilson θ yöntemiyle dinamik kritik yükünün belirlenmesi

Veriler: $L=0,50$ m. , $t=0,0025$ m., $E=2*10^{11}$ N/m², $\nu=0,3$, $\rho=801,7$ kg.s²/m⁴
 $\alpha=50^0$, $L/R=2$



Şekil 5.34 Yük-maksimum yer değiştirme farkı grafiği



Şekil 5.35 1 no.'lu düğüm noktasının kabuk orta yüzeyine dik doğrultudaki yer değiştirme-zaman adım sayısı grafiği

Elde edilen sonuçlar: $p_{skr}=2,4525*10^5$ N/m² , $p_{dkr} \approx 1,7*10^5$ N/m² , $dyk \approx 0,70$

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Konik kabukların sonlu elemanlar yöntemiyle dinamik burkulma analizi yapılmıştır. Daha önce yapılan çalışmalarla karşılaştırma yapabilmek için silindirik kabuk için de dinamik burkulma analizi yapılmıştır.

Konik sonlu eleman, silindirik kabuk için de kullanılabilir olduğundan, silindirik kabuğun dinamik burkulma analizi aynı eleman üzerinden yapılmıştır.

Eleman sayısını belirlemek için, artan eleman sayısına bağlı olarak statik kritik yükler bulunmuş ve statik kritik yük farklarının sıfıra gittiği eleman sayısı esas olarak alınmıştır. Eleman sayısı kabuk tipi ve sınır şartlarına bağlı olarak 55 ~ 60 arasında alınmıştır.

Dinamik kritik yükü belirlemek için bir karşılaştırma ve referans noktası elde etmek amacıyla statik kritik yük bulunmuştur. Böylece hem daha küçük bir aralık için çözüm yaptırılarak zamandan kazanılmış hem de bu iki kritik yük arasında bir oran elde edilmiştir. Dinamik kritik yükün, statik kritik yüke oranı, malzeme özellikleri, yükleme durumu ve kabuk tipine bağlı olarak, 0,39 ~ 0,66 olarak belirlenmiştir. Bu orana dinamik yük katsayısı (dyk) denmiştir. Yükleme durumu ve boyutlarına bağlı olarak, silindirik kabukların dinamik yük katsayısı 0,39 ~ 0,43 arasındadır. Konik kabuklarda ise bu katsayı 0,52 ~ 0,66 arasındadır. Bu sonuçlara bakılarak, dinamik etki altındaki silindirik kabukların, konik kabuklara göre daha duyarlı olduğu söylenebilir. Elde edilen bu sonuçlar Shiau tarafından yapılan çalışmadaki, (Shiau,1974), sonuçlarla örtüşmektedir.

Çizelge 6.1 Eksenel basınca maruz silindirik ve konik kabukların dinamik kritik yük katsayıları

Kabuk Türü	α / L/R	2	5	10
	Silindirik	0^0	0,43	0,41
10^0		0,64	0,63	0,60
Konik	30^0	0,66	0,64	0,61

Çizelge 6.2 Hidrostatik basınca maruz silindirik ve konik kabukların dinamik kritik yük katsayıları

Kabuk Türü	α / L/R	2	5	10
	Silindirik	0^0	0,43	0,42
10^0		0,62	0,54	0,52
30^0		0,63	0,60	0,55

Konik kabuklarda, koniklik açısı ve kabuk boyunun çapa oranı (L/R) küçüldükçe dinamik yük katsayısının arttığı gözlenmiştir. Başka deyişle, koniklik açısı ve L/R değeri büyüdükçe kabuk dinamik yüklemeye karşı daha duyarlı hale gelmektedir.

Zorlanmış titreşim probleminin çözümü için kullanılan üç yöntem de birbirine yaklaşık sonuçlar vermektedir. Newmark'ın doğrusal ivme değişimi yöntemi daha kısa zaman aralığında sonuca ulaşmaktadır. Wilson θ yöntemi ise zaman zaman kararsız çözümler vermiştir. Dinamik stabilite analizi gibi hassaslığın ve kararlılığın önem taşıdığı problemlerin çözümü için Newmark'ın sabit veya doğrusal ivme yöntemleri önerilebilir.

Daha sonra yapılacak çalışmalarda çeşitli sınır koşullarına sahip kabukların çeşitli yük tipleri altında dinamik burkulma analizleri yapıp, dinamik yük katsayısı bulunarak bu konuda bir abak hazırlanabilir. Böylece sadece statik burkulma hesabı yapılarak, abak yardımıyla yaklaşık olarak dinamik kritik yük belirlenmiş olur.

Bu çalışmada kusursuz yapıdaki kabukların dinamik stabilitesi incelenmiştir. Gerçeğe daha yakın sonuçlar için başlangıç geometrik kusurları da dikkate alan analizler yapılabilir.

Dinamik kritik yük belirlenirken, zaman adımı sayısının tespiti için çok sayıda çözüm yapmak gerekmiştir. Daha verimli bir çalışma için adım sayısının belirlenmesine yönelik bir araştırma yapılabilir. Farklı boyutlar için örnek çözümler yapılırken bazı iraksama problemleri ile karşılaşmıştır. Daha yakınsak ve iyi sonuçlar almak için gelişmiş bir sonlu eleman tipi seçilebilir, fakat problemin boyutları ve karmaşıklığı arttıkça hata yapma olasılığı da artacaktır.

Konuyla ilgili yapılan araştırmalar incelenmiş ve dinamik burkulma analizi için kesin çözüm

üreten herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır. Çözümler için geliştirilen kriterler genel olarak gözlemlere dayalıdır. Budiansky-Roth kriteri de bu yöntemlerden biridir. Ancak daha küçük yük aralıkları seçilerek sonuca yaklaşılabılır.

Kritik zaman artımı değeri, çözümün yakınsaması açısından büyük önem taşımaktadır. Dinamik analizde kullanılacak zaman artımı değerinin, kritik zaman artımı değerinden daha küçük olması istenir. Bu çalışmada zaman artımı değeri, kritik zaman artımı değerinin 0.99 katı alınmıştır.

Çözümler için bir bilgisayar programı hazırlanmıştır ve sonuçlar grafiklerle verilmiştir..



KAYNAKLAR

- Al-Hassani, S.T.S., Duncan, J.L. ve Johnson, W., (1970), " The Magneto-hydraulic Forming of Tubes, Experiment and Theory", *Int. Jour. of Mech. Sci.*, 12:371-392.
- Almroth, B., Bushnell, D., (1968), "Computer Analysis of Various Shells of Revolution", *AIAA*, Vol.6.
- Archer, R.R., Lange, C.G., (1965), " Nonlinear Dynamic Behavior of Shallow Spherical Shells ", *A.I.A.A. Journal*, 3:12:2313-2317.
- Baruch, M., Harrari, O., Singer, J., (1967), "Influence of in plane Boundary Conditions on the Stability of Conical Shells Under Hydrostatic Pressure, *Israel J., Techn.*, Vol:5.
- Bathe, K.J., (1996), *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey .
- Belytscko, T., Lin, J.I., and Tsay, C.S., (1984), " Explicit Algorithms for the Nonlinear Dynamics of Shells ", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 42:225-251.
- Brush, O., Almroth, O., (1975), *Buckling of Bars, Plates and Shells*, Mc Graw-Hill.
- Budiansky, B., Roth, R.S., (1962), " Axisymmetric Dynamic Buckling of Clamped Shallow Spherical Shells ", *NASA TND-1510*, 597-606.
- Chopra, A., (1995), *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall Englewood Cliffs., New Jersey.
- Coppa, A.P., ve Nash, W.A., (1964), " Dynamic Buckling of Shell Structure Subject to Longitudinal Impact", *Technical Documentary Report No.FDL-TDR-64-65*.
- Hsu, C.S., (1974), " On Parametric Excitation and Snap-Through Stability Problems of Shells", In: *Thin-Shell Structures*, Fund, Y.C. and Sechler, E.E., Eds, Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 103-131.
- Humphrey, J.S. ve Bodner, S.R., (1962), " Dynamic Buckling of Shallow Shells Under Impulsive Loading ", *Jour. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE*, 88:17-36.
- Hutchinson, W.J., Budiansky, B., (1966), " Dynamic Buckling Estimates ", *AIAA Journal*, 4:525-530.
- İnan, M., (1967), *Cisimlerin Mukavemeti*, İTÜ.
- Kao, R., (1978), " Dynamic Buckling of Axisymmetric Spherical Caps with Initial Imperfections ", *Computers and Structures*, 9:463-473.
- Kao, R., (1980), " Nonlinear Dynamic Buckling of Spherical Caps with Initial Imperfections ", *Computers and Structures*, 12:49-63.
- Köksal, E., Köksal, T., (1996a), *Çubuk Plak Kabuk Stabilitesi*, YTÜ Matbaası.
- Köksal, E., Köksal, T., (1996b), *Sonlu Elemanlar Yöntemi*, YTÜ Matbaası.
- Köksal, T., (1982), *Boyuna ve Dairesel Ayrık Nervürlerle Rijitleştirilmiş Silindirik Kabukların Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Stabilité Hesabı*, Doktora Tezi, Yıldız Üniversitesi Yayın Müdürlüğü.
- Mustafa, B., Al-Hassani, S.T.S., and Reid, S.R., (1993), " Axisymmetric Dynamic Buckling of Submerged Cylindrical Shells ", *Computers and Structures*, 47:399-405.

- Novozhilov, V.V., (1970), *Thin Shell Theory*, Noordhoff Publishing.
- Özden, K., (1975), *Dönel Kabuklar*, Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul.
- Raju, I.S., Rao, G.V., Rao, B.P., Venkataramana, J., (1974), "A Conical Shell Finite Element", *Computers and Structures*, 4:901-915.
- Roth, R.S., ve Klosner, J.M., (1964), "Nonlinear Responses of Cylindrical Shells Subjected to Dynamic Axial Loads", *AIAA Journal*, 12:10:1788-1794.
- Saygun, A., (1974), *Yüzeysel Taşıyıcı Sistemlerin Hesabı İçin Eğrisel Sonlu Elemanlar*, Doktora Tezi, İTÜ İnşaat Fakültesi Matbaası.
- Schokker, A., Sridharan, S., and Kasagi, A., (1996), "Dynamic Buckling of Composite Shells", *Computers and Structures*, 59:43-53.
- Shiau, A.C., Roth, R.S., and Soong, T.T., (1974), "Dynamic Buckling of Conical Shells with Imperfections", *AIAA Journal*, 755-760.
- Simitses, G.J., (1967), "Axisymmetric Dynamic Snap-Through Buckling of Shallow Spherical Caps", *AIAA Journal*, 5:1019-1020.
- Simitses, G.J., (1983), "Effect of Static Preloading on the Dynamic Stability of Structures", *AIAA Journal*, 21:1174-1180.
- Simitses, G.J., (1987), "Instability of Dynamically-Loaded Structures", *Applied Mechanics Reviews*, 40:10:1403-1408.
- Simitses, G.J., (1989), *Dynamic Stability of Suddenly Loaded Structures*, Springer-Verlag, New York.
- Svalbonas, V., Kalnins, A., (1977), "Dynamic Buckling of Shells: Evaluation of Various Methods", *Nuclear Engineering and Design*, 44:331-356.
- Tabiei, A. and Tanov, R., "A Nonlinear Higher Order Shear Deformation Shell Element for Dynamic Explicit Analysis: Part I. Formulation and Finite Element Equations", *Finite Elements in Analysis and Design*, (baskıda).
- Tameroğlu, S.,S., (1991), *Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler*, İTÜ İnşaat Fakültesi Matbaası.
- Tanov, R. and Tabiei, A., (1998), "Static And Dynamic Buckling of Laminated Composite Shells", *Proceedings of the 5-th International LS-DYNA Users Conference*, South Field, MI.
- Tanov, R., Tabiei, A. and Simitses, G.J., (1998), "Effect of Static Preloading on the Dynamic Buckling of Laminated Cylinders under Sudden Pressure", *A Collection of Technical Papers: 39th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Vol. 3 1998, AIAA, Reston, VA, pp. 2352-2356, AIAA-98.
- Tezcan, S., (1970), *Silindirik Kabukların Sonlu Elemanlar ile Çözümü*, TÜBİTAK, İstanbul.
- Trupia, A.,L., (1974), *İnce, Elastik, Dönel Kabuk Sistemlerinin Statik, Dinamik ve İkinci Mertebe Teorisine göre Hesabı İçin Bir Metod*, Doktora Tezi, İTÜ İnşaat Fakültesi Matbaası.
- Volmir, A.S., (1958), "On the Stability of Dynamically Loaded Cylindrical Shells", *Dokladi Akademii Nauk SSSR*, 123:5:806-808, çevirisi: *Soviet Physics Doklady*, 1958, 3:1287-1289
- Yang, T.Y., Liaw, D.G., (1988), "Elastic-Plastic Dynamic Buckling of Thin-Shell Finite Elements with Asymmetric Imperfections", *AIAA Journal*, 26:479-485.

Zienkiewicz, O.C., (1971), *The Finite Element Method in Engineering Science*, Mc Graw-Hill



EKLER

Ek 1 I. Tip silindirik kabuk sonlu elemana ait $[\Delta N_L]$ ve $[\Delta N_{NL}]$ matrisleri

Ek 2 I. Tip konik kabuk sonlu elemana ait $[\Delta N_L]$ ve $[\Delta N_{NL}]$ matrisleri

Ek3 I. Tip Eleman ile konik kabuğun Newmark yöntemiyle dinamik kritik yüklerinin bulunması için hazırlanan programın akış diyagramı

Ek 4 II. Tip konik kabuk elemana ait $[F]$, $[G]$ türev matrisleri ve $[A]$ bağ matrisi



Ek 1 I. Tip silindirik kabuk sonlu elemana ait $[\Delta N_L]$ ve $[\Delta N_{NL}]$ matrisleri

Burada $[\Delta N_L]$ ve $[\Delta N_{NL}]$ matrislerinin sadece sıfır olmayan elemanları verilecektir.

$[\Delta N_L]$ matrisi

$$e(1,1)=-1/l*\cos(n*b)$$

$$e(1,5)=1/l*\cos(n*b)$$

$$e(2,2)=(1-x/l)*\cos(n*b)*n/r$$

$$e(2,3)=-1*(1-3*x^2/l^2+2*x^3/l^3)*\cos(n*b)/r$$

$$e(2,4)=-1*(x/l-2*x^2/l^2+x^3/l^3)*\cos(n*b)/r$$

$$e(2,6)=x/l*\cos(n*b)*n/r$$

$$e(2,7)=-1*(3*x^2/l^2-2*x^3/l^3)*\cos(n*b)/r$$

$$e(2,8)=-1*(-x^2/l^2+x^3/l^3)*\cos(n*b)/r$$

$$e(3,1)=-1*(1-x/l)*\sin(n*b)*n/r$$

$$e(3,2)=-1/l*\sin(n*b)$$

$$e(3,5)=-x/l*\sin(n*b)*n/r$$

$$e(3,6)=1/l*\sin(n*b)$$

$$e(4,3)=-1*(6/l^2+12*x/l^3)*\cos(n*b)$$

$$e(4,4)=1*(-4/l^2+6*x/l^3)*\cos(n*b)$$

$$e(4,7)=1*(6/l^2-12*x/l^3)*\cos(n*b)$$

$$e(4,8)=1*(-2/l^2+6*x/l^3)*\cos(n*b)$$

$$e(5,3)=-1*(1-3*x^2/l^2+2*x^3/l^3)*\cos(n*b)*n^2+(1-3*x^2/l^2+2*x^3/l^3)*\cos(n*b))/r^2$$

$$e(5,4)=-1*(x/l-2*x^2/l^2+x^3/l^3)*\cos(n*b)*n^2+1*(x/l-2*x^2/l^2+x^3/l^3)*\cos(n*b))/r^2$$

$$e(5,7)=-1*(3*x^2/l^2-2*x^3/l^3)*\cos(n*b)*n^2+(3*x^2/l^2-2*x^3/l^3)*\cos(n*b))/r^2$$

$$e(5,8)=-1*(-x^2/l^2+x^3/l^3)*\cos(n*b)*n^2+1*(-x^2/l^2+x^3/l^3)*\cos(n*b))/r^2$$

$$e(6,2)=-2/l*\sin(n*b)/r$$

$$e(6,3)=-2*(-6*x/l^2+6*x^2/l^3)*\sin(n*b)*n/r$$

$$e(6,4)=-2*1*(1/l-4*x/l^2+3*x^2/l^3)*\sin(n*b)*n/r$$

$$e(6,6)=2/l*\sin(n*b)/r$$

$$e(6,7)=-2*(6*x/l^2-6*x^2/l^3)*\sin(n*b)*n/r$$

$$e(6,8)=-2*1*(-2*x/l^2+3*x^2/l^3)*\sin(n*b)*n/r$$

$[\Delta N_{NL}]$ matrisi

$$g(1,3) = -(6*x/l^2 + 6*x^2/l^3) * \cos(n*b)$$

$$g(1,4) = -1 * (1/l - 4*x/l^2 + 3*x^2/l^3) * \cos(n*b)$$

$$g(1,7) = -(6*x/l^2 - 6*x^2/l^3) * \cos(n*b)$$

$$g(1,8) = -1 * (-2*x/l^2 + 3*x^2/l^3) * \cos(n*b)$$

$$g(2,2) = (1 - x/l) * \sin(n*b) / r$$

$$g(2,3) = (1 - 3*x^2/l^2 + 2*x^3/l^3) * \sin(n*b) * n$$

$$g(2,4) = 1 * (x/l - 2*x^2/l^2 + x^3/l^3) * \sin(n*b) * n$$

$$g(2,6) = x/l * \sin(n*b) / r$$

$$g(2,7) = (3*x^2/l^2 - 2*x^3/l^3) * \sin(n*b) * n$$

$$g(2,8) = 1 * (-x^2/l^2 + x^3/l^3) * \sin(n*b) * n$$



Ek 2 I. Tip konik kabuk sonlu elemana ait $[\Delta N_L]$ ve $[\Delta N_{NL}]$ matrisleri

Burada $[\Delta N_L]$ ve $[\Delta N_{NL}]$ matrislerinin sadece sıfır olmayan elemanları verilecektir.

$[\Delta N_L]$ matrisi

$$e(1,1)=-1/l*\cos(n*b)$$

$$e(1,5)=1/l*\cos(n*b)$$

$$e(2,1)=\sin(a)*(1-x/l)*\cos(n*b)/r$$

$$e(2,2)=(1-x/l)*\cos(n*b)*n/r$$

$$e(2,3)=-\cos(a)*(1-3*x^2/l^2+2*x^3/l^3)*\cos(n*b)/r$$

$$e(2,4)=-\cos(a)*1*(x/l-2*x^2/l^2+x^3/l^3)*\cos(n*b)/r$$

$$e(2,5)=\sin(a)*x/l*\cos(n*b)/r$$

$$e(2,6)=x/l*\cos(n*b)*n/r$$

$$e(2,7)=-\cos(a)*(3*x^2/l^2-2*x^3/l^3)*\cos(n*b)/r$$

$$e(2,8)=-\cos(a)*1*(-x^2/l^2+x^3/l^3)*\cos(n*b)/r$$

$$e(3,1)=-1*(1-x/l)*\sin(n*b)*n/r$$

$$e(3,2)=-1/l*\sin(n*b)-\sin(a)*(1-x/l)*\sin(n*b)/r$$

$$e(3,5)=-x/l*\sin(n*b)*n/r$$

$$e(3,6)=1/l*\sin(n*b)-\sin(a)*x/l*\sin(n*b)/r$$

$$e(4,3)=(-6/l^2+12*x/l^3)*\cos(n*b)$$

$$e(4,4)=1*(-4/l^2+6*x/l^3)*\cos(n*b)$$

$$e(4,7)=(6/l^2-12*x/l^3)*\cos(n*b)$$

$$e(4,8)=1*(-2/l^2+6*x/l^3)*\cos(n*b)$$

$$e(5,2)=\cos(a)*(1-x/l)*\cos(n*b)*n/r^2$$

$$e(5,3)=-1*(1-3*x^2/l^2+2*x^3/l^3)*\cos(n*b)*n^2/r^2+\sin(a)*(-6*x/l^2+6*x^2/l^3)*\cos(n*b)/r$$

$$e(5,4)=-1*(x/l-2*x^2/l^2+x^3/l^3)*\cos(n*b)*n^2/r^2+\sin(a)*1*(1/l-4*x/l^2+3*x^2/l^3)*\cos(n*b)/r$$

$$e(5,6)=\cos(a)*x/l*\cos(n*b)*n/r^2$$

$$e(5,7)=-1*(3*x^2/l^2-2*x^3/l^3)*\cos(n*b)*n^2/r^2+\sin(a)*(6*x/l^2-6*x^2/l^3)*\cos(n*b)/r$$

$$e(5,8)=-1*(-x^2/l^2+x^3/l^3)*\cos(n*b)*n^2/r^2+\sin(a)*1*(-2*x/l^2+3*x^2/l^3)*\cos(n*b)/r$$

$$e(6,2)=-2*\cos(a)*r/l*\sin(n*b)-2*\cos(a)*\sin(a)*(1-x/l)*\sin(n*b))/r^2$$

$$e(6,3)=-2*r*(-6*x/l^2+6*x^2/l^3)*\sin(n*b)*n+2*\sin(a)*(1-3*x^2/l^2+2*x^3/l^3)*\sin(n*b)*n)/r^2$$

$$e(6,4)=(-2*r*1*(1/l-4*x/l^2+3*x^2/l^3)*\sin(n*b)*n+2*\sin(a)*1*(x/l-2*x^2/l^2+x^3/l^3)*\sin(n*b)*n)/r^2$$

$$e(6,6)=(2*\cos(a)*r/l*\sin(n*b)-2*\cos(a)*\sin(a)*x/l*\sin(n*b))/r^2$$

$$e(6,7)=(-2*r*(6*x/l^2-6*x^2/l^3)*\sin(n*b)*n+2*\sin(a)*(3*x^2/l^2-2*x^3/l^3)*\sin(n*b)*n)/r^2$$

$$e(6,8)=(-2*r*1*(-2*x/l^2+3*x^2/l^3)*\sin(n*b)*n+2*\sin(a)*1*(-x^2/l^2+x^3/l^3)*\sin(n*b)*n)/r^2$$

[\Delta N_{NL}] matrisi

$$g(1,3)=(-6*x/l^2+6*x^2/l^3)*\cos(n*b)$$

$$g(1,4)=-1*(1/l-4*x/l^2+3*x^2/l^3)*\cos(n*b)$$

$$g(1,7)=-6*x/l^2-6*x^2/l^3)*\cos(n*b)$$

$$g(1,8)=-1*(-2*x/l^2+3*x^2/l^3)*\cos(n*b)$$

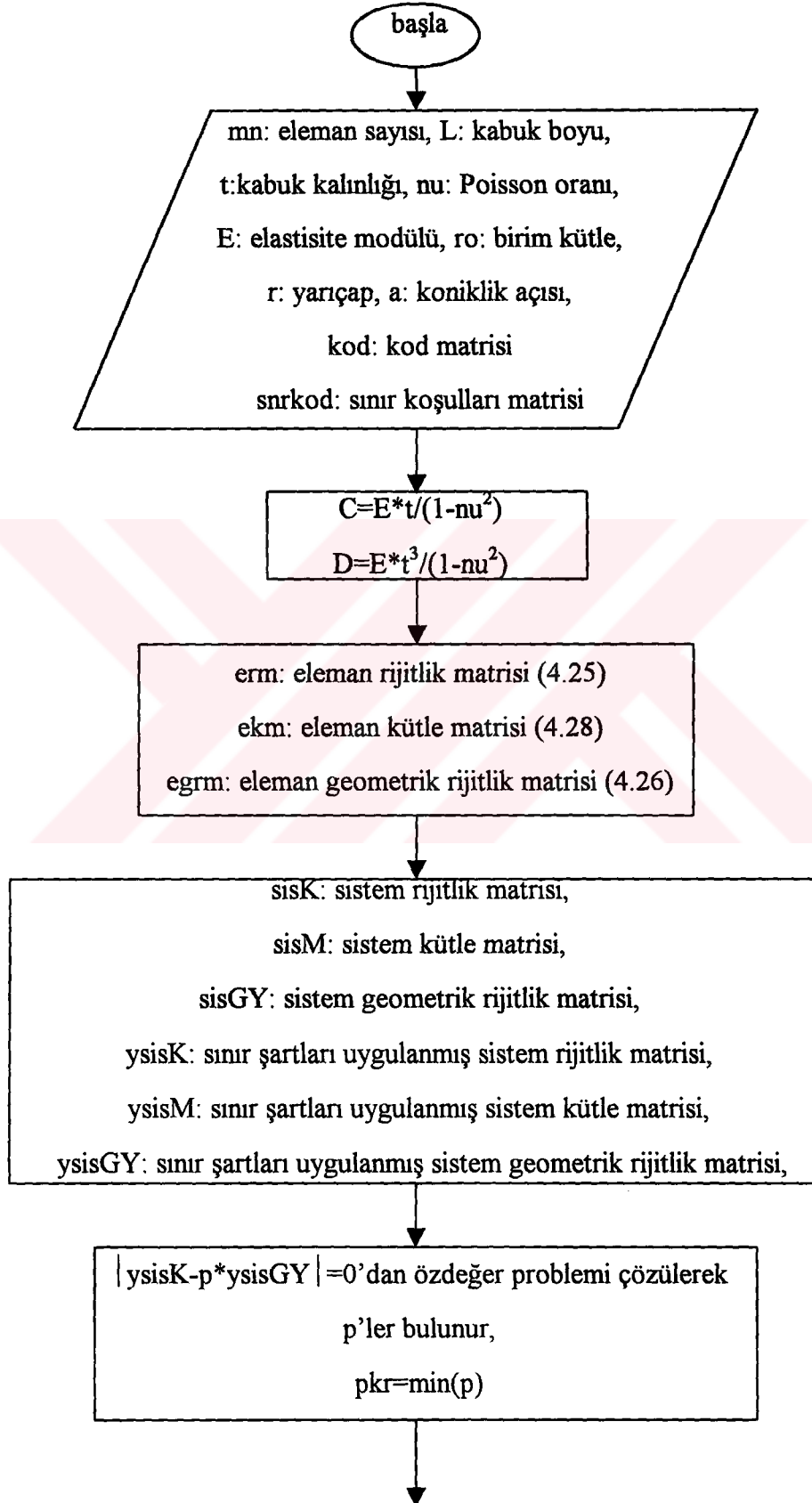
$$g(2,3)=(1-3*x^2/l^2+2*x^3/l^3)*\sin(n*b)*n$$

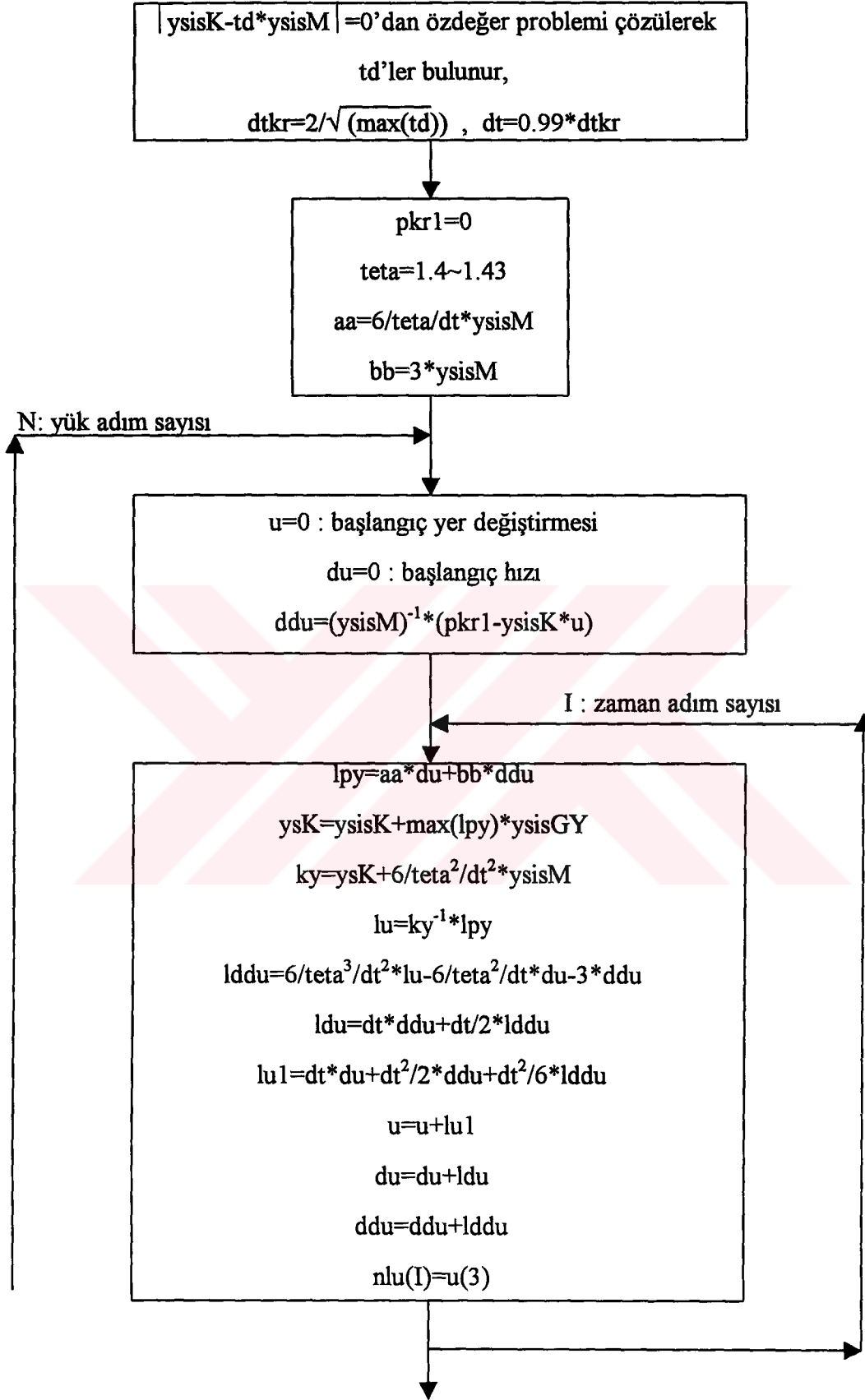
$$g(2,4)=1*(x/l-2*x^2/l^2+x^3/l^3)*\sin(n*b)*n$$

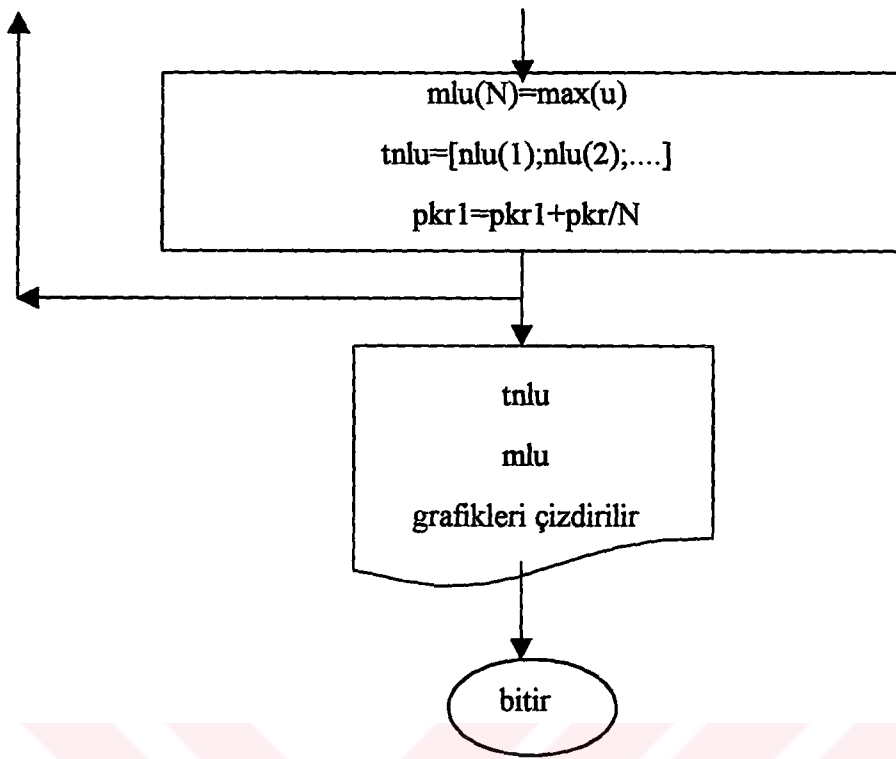
$$g(2,7)=(3*x^2/l^2-2*x^3/l^3)*\sin(n*b)*n$$

$$g(2,8)=1*(-x^2/l^2+x^3/l^3)*\sin(n*b)*n$$

Ek 3 Konik kabuğun Newmark yöntemiyle dinamik kritik yüklerinin bulunması için hazırlanan programın akış diyagramı







Ek 4 II. Tip konik kabuk elemana ait [F], [G] türev matrisleri ve [A] bağ matrisi

Lineer terimleri içeren [F] türev matrisi:

$$f(1,2)=-1;$$

$$f(1,14)=1;$$

$$f(1,16)=t;$$

$$f(1,18)=t^2;$$

$$f(1,20)=t^3;$$

$$f(2,1)=1/r*(\cos(t)*\cot(a)+\sin(a)+\cos(a)*\cos(t)*\cot(a));$$

$$f(2,2)=1/r*(x*\cos(a)*\cos(t)-(\cos(a))^2*x*\cos(t)-x*\sin(a));$$

$$f(2,3)=1/r*t*\cos(a);$$

$$f(2,4)=1/r*x*t*\cos(a);$$

$$f(2,5)=1/r*x^2*\cos(a);$$

$$f(2,6)=1/r*t^2*\cos(a);$$

$$f(2,7)=1/r*x^2*t*\cos(a);$$

$$f(2,8)=1/r*x*t^2*\cos(a);$$

$$f(2,9)=1/r*x^3*\cos(a);$$

$$f(2,10)=1/r*t^3*\cos(a);$$

$$f(2,11)=1/r*x^3*t*\cos(a);$$

$$f(2,12)=1/r*x*t^3*\cos(a);$$

$$f(2,13)=1/r*(\cos(t)-\sin(a)*\cot(a)+\cos(a)*\cos(t));$$

$$f(2,14)=1/r*x*\sin(a);$$

$$f(2,15)=1/r*t*\sin(a);$$

$$f(2,16)=1/r*x*t*\sin(a);$$

$$f(2,17)=1/r*t^2*\sin(a);$$

$$f(2,18)=1/r*x*t^2*\sin(a);$$

$$f(2,19)=1/r*t^3*\sin(a);$$

$$f(2,20)=1/r*x*t^3*\sin(a);$$

$$f(2,21)=1/r*\sin(t)/\sin(a)*(-1-\cos(a));$$

$$f(2,22)=1/r*x*\sin(t)*(-1+\cos(a));$$

$$f(2,23)=1/r;$$

$$f(2,24)=x/r;$$

$$f(2,25)=2*t/r;$$

$$f(2,26)=2*x*t/r;$$

$$f(2,27)=3*t^2/r;$$

$$f(2,28)=3*x*t^2/r;$$

$$f(3,1)=-\sin(t)*\cot(a)*\sin(a)/r;$$

$$f(3,2)=\cos(a)*\sin(t)-x*\cos(a)*\sin(t)*\sin(a)/r;$$

$$f(3,13)=-\sin(t)*\sin(a)/r;$$

$$f(3,15)=1/r;$$

$$f(3,16)=x/r;$$

$$f(3,17)=2*t/r;$$

$$f(3,18)=2*x*t/r;$$

$$f(3,19)=3*t^2/r;$$

$$f(3,20)=3*x*t^2/r;$$

$$f(3,21)=-\cos(t)/r;$$

$$f(3,22)=\cos(t)-x*\sin(a)*\cos(t)/r;$$

$$f(3,23)=-t*\sin(a)/r;$$

$$f(3,24)=t-x*t*\sin(a)/r;$$

$$f(3,25)=-t^2*\sin(a)/r;$$

$$f(3,26)=t^2-x*t^2*\sin(a)/r;$$

$$f(3,27)=-t^3*\sin(a)/r;$$

$$f(3,28)=t^3*(1-x*\sin(a)/r);$$

$$f(4,5)=-2;$$

$$f(4,7)=-2*t;$$

$$f(4,9)=-6*x;$$

$$f(4,11)=-6*x*t;$$

$$f(5,1)=\cos(t)*\cot(a)/r^2*(1+\cos(a));$$

$$f(5,2)=\cos(a)*\cos(t)/r*(-x/r+\sin(a)+x*\cos(a)/r);$$

$$f(5,4)=-t*\sin(a)/r;$$

$$f(5,5)=-2*x*\sin(a)/r;$$

$$f(5,6)=-2/r^2;$$

$$f(5,7)=-2*x*t*\sin(a)/r;$$

$$f(5,8)=-2*x/r^2-t^2*\sin(a)/r;$$

$$f(5,9)=-3*x^2*\sin(a)/r;$$

$$f(5,10)=-6*t/r^2;$$

$$f(5,11)=-3*x^2*t*\sin(a)/r;$$

$$f(5,12)=-6*x*t/r^2-t^3*\sin(a)/r;$$

$$f(5,13)=\cos(t)/r^2+\cos(a)*\cos(t)/r^2;$$

$$f(5,21)=\sin(t)/r^2/\sin(a)*(-1-\cos(a));$$

$$f(5,22)=\sin(t)*(x/r^2-\sin(a)/r-x*\cos(a)/r^2);$$

$$f(5,23)=\cos(a)/r^2;$$

$$f(5,24)=x*\cos(a)/r^2;$$

$$f(5,25)=2*t*\cos(a)/r^2;$$

$$f(5,26)=2*x*t*\cos(a)/r^2;$$

$$f(5,27)=3*t^2*\cos(a)/r^2;$$

$$f(5,28)=3*x*t^2*\cos(a)/r^2;$$

$$f(6,1)=2*\sin(a)*\sin(t)*\cot(a)/r^2*(-1-\cos(a));$$

$$f(6,2)=2*\sin(t)*\cos(a)/r*(-1+x*\sin(a)/r-\sin(a)*\cos(a)*x/r+\cos(a));$$

$$f(6,3)=2*\sin(a)/r^2;$$

$$f(6,4)=2*(-1/r+x*\sin(a)/r^2);$$

$$f(6,6)=4*t*\sin(a)/r^2;$$

$$f(6,7)=2*(-2*x/r+x^2*\sin(a)/r^2);$$

$$f(6,8)=2*(-2*t/r+2*x*t*\sin(a)/r^2);$$

$$f(6,10)=6*t^2*\sin(a)/r^2;$$

$$f(6,11)=2*(-3*x^2/r+x^3*\sin(a)/r^2);$$

$$f(6,12)=2*(-3*t^2/r+3*x*t^2*\sin(a)/r^2);$$

$$f(6,13)=2*\sin(t)*\sin(a)/r^2*(-1-\cos(a));$$

$$f(6,21)=2*\cos(t)/r^2*(-1-\cos(a));$$

$$f(6,22)=-2*\cos(t)/r*(-1+2*x*\sin(a)/r-2*\sin(a)*\cos(a)*x/r+2*\cos(a));$$

$$f(6,23)=-2*t*\sin(a)*\cos(a)/r^2;$$

$$f(6,24)=2*t*\cos(a)/r*(1-x*\sin(a)/r);$$

$$f(6,25)=-2*t^2*\sin(a)*\cos(a)/r^2;$$

$$f(6,26)=2*t^2*\cos(a)/r*(1-x*\sin(a)/r);$$

$$f(6,27)=-2*t^3*\sin(a)*\cos(a)/r^2;$$

$$f(6,28)=2*t^3*\cos(a)/r*(1-x*\sin(a)/r);$$

Non-linear terimleri içeren [G] türev matrisi:

$$g(1,2)=-\cos(a)*\cos(t);$$

$$g(1,4)=-t;$$

$$g(1,5)=-2*x;$$

$$g(1,7)=-2*x*t;$$

$$g(1,8)=-t^2;$$

$$g(1,9)=-3*x^2;$$

$$g(1,11)=-3*x^2*t;$$

$$g(1,12)=-t^3;$$

$$g(1,22)=-\sin(t);$$

$$g(2,1)=\sin(t)*\cot(a);$$

$$g(2,2)=-x*\cos(a)*\sin(t);$$

$$g(2,3)=-1;$$

$$g(2,4)=-x;$$

$$g(2,6)=-2*t;$$

$$g(2,7)=-x^2;$$

$$g(2,8)=-2*x*t;$$

$$g(2,10)=-3*t^2;$$

$$g(2,11)=-x^3;$$

$$g(2,12)=-3*x*t^2;$$

$$g(2,13)=\sin(t);$$

$$g(2,21)=\cos(t)/\sin(a);$$

$$g(2,22)=-x*\cos(t);$$

[A] bağ matrisi:

$$A(1,1)=1;$$

$$A(1,2)=-x1;$$

$$A(1,13)=-\cot(a);$$

$A(1,14)=x1;$
 $A(1,15)=t1;$
 $A(1,16)=x1*t1;$
 $A(1,17)=t1^2;$
 $A(1,18)=x1*t1^2;$
 $A(1,19)=t1^3;$
 $A(1,20)=x1*t1^3;$
 $A(2,1)=\sin(t1)*\cot(a);$
 $A(2,2)=x1*\cos(a)*\sin(t1);$
 $A(2,13)=\sin(t1);$
 $A(2,21)=\cos(t1)/\sin(a);$
 $A(2,22)=x1*\cos(t1);$
 $A(2,23)=t1;$
 $A(2,24)=x1*t1;$
 $A(2,25)=t1^2;$
 $A(2,26)=x1*t1^2;$
 $A(2,27)=t1^3;$
 $A(2,28)=x1*t1^3;$
 $A(3,15)=1;$
 $A(3,16)=x1;$
 $A(3,17)=2*t1;$
 $A(3,18)=2*x1*t1;$
 $A(3,19)=3*t1^2;$
 $A(3,20)=3*x1*t1^2;$
 $A(4,1)=\cos(t1)*\cot(a);$
 $A(4,2)=x1*\cos(a)*\cos(t1);$
 $A(4,13)=\cos(t1);$
 $A(4,21)=-\sin(t1)/\sin(a);$
 $A(4,22)=-x1*\sin(t1);$
 $A(4,23)=1;$
 $A(4,24)=x1;$

$$A(4,25)=2*t1;$$

$$A(4,26)=2*x1*t1;$$

$$A(4,27)=3*t1^2;$$

$$A(4,28)=3*x1*t1^2;$$

$$A(5,1)=\cos(t1)*\cot(a);$$

$$A(5,2)=-x1*\cos(a)*\cos(t1);$$

$$A(5,3)=t1;$$

$$A(5,4)=x1*t1;$$

$$A(5,5)=x1^2;$$

$$A(5,6)=t1^2;$$

$$A(5,7)=x1^2*t1;$$

$$A(5,8)=x1*t1^2;$$

$$A(5,9)=x1^3;$$

$$A(5,10)=t1^3;$$

$$A(5,11)=x1^3*t1;$$

$$A(5,12)=x1*t1^3;$$

$$A(5,13)=\cos(t1);$$

$$A(5,21)=-\sin(t1)/\sin(a);$$

$$A(5,22)=x1*\sin(t1);$$

$$A(6,2)=-\cos(a)*\cos(t1);$$

$$A(6,4)=t1;$$

$$A(6,5)=2*x1;$$

$$A(6,7)=2*x1*t1;$$

$$A(6,8)=t1^2;$$

$$A(6,9)=3*x1^2;$$

$$A(6,11)=3*x1^2*t1;$$

$$A(6,12)=t1^3;$$

$$A(6,22)=\sin(t1);$$

$$A(7,1)=-\sin(t1)*\cot(a);$$

$$A(7,2)=x1*\cos(a)*\sin(t1);$$

$$A(7,3)=1;$$

$$A(7,4)=x1;$$

$$A(7,6)=2*t1;$$

$$A(7,7)=x1^2;$$

$$A(7,8)=2*x1*t1;$$

$$A(7,10)=3*t1^2;$$

$$A(7,11)=x1^3;$$

$$A(7,12)=3*x1*t1^2;$$

$$A(7,13)=-\sin(t1);$$

$$A(7,21)=-\cos(t1)/\sin(a);$$

$$A(7,22)=x1*\cos(t1);$$

$$A(8,1)=1;$$

$$A(8,2)=-x2;$$

$$A(8,13)=-\cot(a);$$

$$A(8,14)=x2;$$

$$A(8,15)=t1;$$

$$A(8,16)=x2*t1;$$

$$A(8,17)=t1^2;$$

$$A(8,18)=x2*t1^2;$$

$$A(8,19)=t1^3;$$

$$A(8,20)=x2*t1^3;$$

$$A(9,1)=\sin(t1)*\cot(a);$$

$$A(9,2)=x2*\cos(a)*\sin(t1);$$

$$A(9,13)=\sin(t1);$$

$$A(9,21)=\cos(t1)/\sin(a);$$

$$A(9,22)=x2*\cos(t1);$$

$$A(9,23)=t1;$$

$$A(9,24)=x2*t1;$$

$$A(9,25)=t1^2;$$

$$A(9,26)=x2*t1^2;$$

$$A(9,27)=t1^3;$$

$$A(9,28)=x2*t1^3;$$

$A(10,15)=1;$
 $A(10,16)=x^2;$
 $A(10,17)=2*t1;$
 $A(10,18)=2*x^2*t1;$
 $A(10,19)=3*t1^2;$
 $A(10,20)=3*x^2*t1^2;$
 $A(11,1)=\cos(t1)*\cot(a);$
 $A(11,2)=x^2*\cos(a)*\cos(t1);$
 $A(11,13)=\cos(t1);$
 $A(11,21)=-\sin(t1)/\sin(a);$
 $A(11,22)=-x^2*\sin(t1);$
 $A(11,23)=1;$
 $A(11,24)=x^2;$
 $A(11,25)=2*t1;$
 $A(11,26)=2*x^2*t1;$
 $A(11,27)=3*t1^2;$
 $A(11,28)=3*x^2*t1^2;$
 $A(12,1)=\cos(t1)*\cot(a);$
 $A(12,2)=-x^2*\cos(a)*\cos(t1);$
 $A(12,3)=t1;$
 $A(12,4)=x^2*t1;$
 $A(12,5)=x^2^2;$
 $A(12,6)=t1^2;$
 $A(12,7)=x^2^2*t1;$
 $A(12,8)=x^2*t1^2;$
 $A(12,9)=x^2^3;$
 $A(12,10)=t1^3;$
 $A(12,11)=x^2^3*t1;$
 $A(12,12)=x^2*t1^3;$
 $A(12,13)=\cos(t1);$
 $A(12,21)=-\sin(t1)/\sin(a);$

$$A(12,22)=x^2*\sin(t1);$$

$$A(13,2)=-\cos(a)*\cos(t1);$$

$$A(13,4)=t1;$$

$$A(13,5)=2*x^2;$$

$$A(13,7)=2*x^2*t1;$$

$$A(13,8)=t1^2;$$

$$A(13,9)=3*x^2^2;$$

$$A(13,11)=3*x^2^2*t1;$$

$$A(13,12)=t1^3;$$

$$A(13,22)=\sin(t1);$$

$$A(14,1)=-\sin(t1)*\cot(a);$$

$$A(14,2)=x^2*\cos(a)*\sin(t1);$$

$$A(14,3)=1;$$

$$A(14,4)=x^2;$$

$$A(14,6)=2*t1;$$

$$A(14,7)=x^2^2;$$

$$A(14,8)=2*x^2*t1;$$

$$A(14,10)=3*t1^2;$$

$$A(14,11)=x^2^3;$$

$$A(14,12)=3*x^2*t1^2;$$

$$A(14,13)=-\sin(t1);$$

$$A(14,21)=-\cos(t1)/\sin(a);$$

$$A(14,22)=x^2*\cos(t1);$$

$$A(15,1)=1;$$

$$A(15,2)=-x^2;$$

$$A(15,13)=-\cot(a);$$

$$A(15,14)=x^2;$$

$$A(15,15)=t2;$$

$$A(15,16)=x^2*t2;$$

$$A(15,17)=t2^2;$$

$$A(15,18)=x^2*t2^2;$$

$$A(15,19)=t^3;$$

$$A(15,20)=x^2*t^3;$$

$$A(16,1)=\sin(t^2)*\cot(a);$$

$$A(16,2)=x^2*\cos(a)*\sin(t^2);$$

$$A(16,13)=\sin(t^2);$$

$$A(16,21)=\cos(t^2)/\sin(a);$$

$$A(16,22)=x^2*\cos(t^2);$$

$$A(16,23)=t^2;$$

$$A(16,24)=x^2*t^2;$$

$$A(16,25)=t^2;$$

$$A(16,26)=x^2*t^2;$$

$$A(16,27)=t^3;$$

$$A(16,28)=x^2*t^3;$$

$$A(17,15)=1;$$

$$A(17,16)=x^2;$$

$$A(17,17)=2*t^2;$$

$$A(17,18)=2*x^2*t^2;$$

$$A(17,19)=3*t^2;$$

$$A(17,20)=3*x^2*t^2;$$

$$A(18,1)=\cos(t^2)*\cot(a);$$

$$A(18,2)=x^2*\cos(a)*\cos(t^2);$$

$$A(18,13)=\cos(t^2);$$

$$A(18,21)=-\sin(t^2)/\sin(a);$$

$$A(18,22)=-x^2*\sin(t^2);$$

$$A(18,23)=1;$$

$$A(18,24)=x^2;$$

$$A(18,25)=2*t^2;$$

$$A(18,26)=2*x^2*t^2;$$

$$A(18,27)=3*t^2;$$

$$A(18,28)=3*x^2*t^2;$$

$$A(19,1)=\cos(t^2)*\cot(a);$$

$$A(19,2)=-x^2*\cos(a)*\cos(t^2);$$

$$A(19,3)=t^2;$$

$$A(19,4)=x^2*t^2;$$

$$A(19,5)=x^2^2;$$

$$A(19,6)=t^2^2;$$

$$A(19,7)=x^2^2*t^2;$$

$$A(19,8)=x^2*t^2^2;$$

$$A(19,9)=x^2^3;$$

$$A(19,10)=t^2^3;$$

$$A(19,11)=x^2^3*t^2;$$

$$A(19,12)=x^2*t^2^3;$$

$$A(19,13)=\cos(t^2);$$

$$A(19,21)=-\sin(t^2)/\sin(a);$$

$$A(19,22)=x^2*\sin(t^2);$$

$$A(20,2)=-\cos(a)*\cos(t^2);$$

$$A(20,4)=t^2;$$

$$A(20,5)=2*x^2;$$

$$A(20,7)=2*x^2*t^2;$$

$$A(20,8)=t^2^2;$$

$$A(20,9)=3*x^2^2;$$

$$A(20,11)=3*x^2^2*t^2;$$

$$A(20,12)=t^2^3;$$

$$A(20,22)=\sin(t^2);$$

$$A(21,1)=-\sin(t^2)*\cot(a);$$

$$A(21,2)=x^2*\cos(a)*\sin(t^2);$$

$$A(21,3)=1;$$

$$A(21,4)=x^2;$$

$$A(21,6)=2*t^2;$$

$$A(21,7)=x^2^2;$$

$$A(21,8)=2*x^2*t^2;$$

$$A(21,10)=3*t^2^2;$$

$$A(21,11)=x^2^3;$$

$$A(21,12)=3*x^2*t^2^2;$$

$$A(21,13)=-\sin(t^2);$$

$$A(21,21)=-\cos(t^2)/\sin(a);$$

$$A(21,22)=x^2*\cos(t^2);$$

$$A(22,1)=1;$$

$$A(22,2)=-x^1;$$

$$A(22,13)=-\cot(a);$$

$$A(22,14)=x^1;$$

$$A(22,15)=t^2;$$

$$A(22,16)=x^1*t^2;$$

$$A(22,17)=t^2^2;$$

$$A(22,18)=x^1*t^2^2;$$

$$A(22,19)=t^2^3;$$

$$A(22,20)=x^1*t^2^3;$$

$$A(23,1)=\sin(t^2)*\cot(a);$$

$$A(23,2)=x^1*\cos(a)*\sin(t^2);$$

$$A(23,13)=\sin(t^2);$$

$$A(23,21)=\cos(t^2)/\sin(a);$$

$$A(23,22)=x^1*\cos(t^2);$$

$$A(23,23)=t^2;$$

$$A(23,24)=x^1*t^2;$$

$$A(23,25)=t^2^2;$$

$$A(23,26)=x^1*t^2^2;$$

$$A(23,27)=t^2^3;$$

$$A(23,28)=x^1*t^2^3;$$

$$A(24,15)=1;$$

$$A(24,16)=x^1;$$

$$A(24,17)=2*t^2;$$

$$A(24,18)=2*x^1*t^2;$$

$$A(24,19)=3*t^2^2;$$

$$A(24,20)=3*x1*t2^2;$$

$$A(25,1)=\cos(t2)*\cot(a);$$

$$A(25,2)=x1*\cos(a)*\cos(t2);$$

$$A(25,13)=\cos(t2);$$

$$A(25,21)=-\sin(t2)/\sin(a);$$

$$A(25,22)=-x1*\sin(t2);$$

$$A(25,23)=1;$$

$$A(25,24)=x1;$$

$$A(25,25)=2*t2;$$

$$A(25,26)=2*x1*t2;$$

$$A(25,27)=3*t2^2;$$

$$A(25,28)=3*x1*t2^2;$$

$$A(26,1)=\cos(t2)*\cot(a);$$

$$A(26,2)=-x1*\cos(a)*\cos(t2);$$

$$A(26,3)=t2;$$

$$A(26,4)=x1*t2;$$

$$A(26,5)=x1^2;$$

$$A(26,6)=t2^2;$$

$$A(26,7)=x1^2*t2;$$

$$A(26,8)=x1*t2^2;$$

$$A(26,9)=x1^3;$$

$$A(26,10)=t2^3;$$

$$A(26,11)=x1^3*t2;$$

$$A(26,12)=x1*t2^3;$$

$$A(26,13)=\cos(t2);$$

$$A(26,21)=-\sin(t2)/\sin(a);$$

$$A(26,22)=x1*\sin(t2);$$

$$A(27,2)=-\cos(a)*\cos(t2);$$

$$A(27,4)=t2;$$

$$A(27,5)=2*x1;$$

$$A(27,7)=2*x1*t2;$$

$$A(27,8)=t^2;$$

$$A(27,9)=3*x^2;$$

$$A(27,11)=3*x^2*t;$$

$$A(27,12)=t^3;$$

$$A(27,22)=\sin(t);$$

$$A(28,1)=-\sin(t)*\cot(a);$$

$$A(28,2)=x*\cos(a)*\sin(t);$$

$$A(28,3)=1;$$

$$A(28,4)=x;$$

$$A(28,6)=2*t;$$

$$A(28,7)=x^2;$$

$$A(28,8)=2*x*t;$$

$$A(28,10)=3*t^2;$$

$$A(28,11)=x^3;$$

$$A(28,12)=3*x*t^2;$$

$$A(28,13)=-\sin(t);$$

$$A(28,21)=-\cos(t)/\sin(a);$$

$$A(28,22)=x*\cos(t);$$

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	16.11.1969	
Doğum yeri	Ordu	
Lise	1983-1985	Kadıköy SuadiyeLisesi
Lisans	1988-1992	Yıldız Üniversitesi Mühendislik Fak. İnşaat Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	1992-1994	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Müh. Anabilim Dalı, Yapı Programı
Doktora	1995-2001	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Müh. Anabilim Dalı, Mekanik Programı

Çalıştığı kurum(lar)

1992-1995	MSF İnşaat Tic.San.ve Ltd Şti.
1995-Devam ediyor	YTÜ İnşaat Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü Mekanik Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi