

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÇATLAK İÇEREN ÜÇ KATLI ELASTİK VE
VİSKOELASTİK SANDVIÇ KALIN PLAKLARIN
DELAMİNASYONU**

İnş.Yük. Müh. Ayfer TEKİN

**F.B.E İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Programında
Hazırlanan**

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 04 Mart 2011
Tez Danışman : Prof. Dr. R. Faruk YÜKSELER (YTÜ)
İkinci Tez Danışman : Prof. Dr. Nazmiye YAHNİOĞLU (YTÜ)
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Hasan ENGİN (İTÜ)
: Prof. Dr. İrfan COŞKUN (YTÜ)
: Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV (YTÜ)
: Prof. Dr. Pelin GÜNDEŞ BAKIR (İTÜ)

İSTANBUL, 2011

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iv
KISALTMA LİSTESİ.....	vi
ŞEKİL LİSTESİ.....	vii
ÇİZELGE LİSTESİ	ix
ÖNSÖZ	x
ÖZET	xi
ABSTRACT	xii
1. GİRİŞ	1
1.1 Viskoelastik Sandviç Plaklara Ait Genel Bilgiler	1
1.2 Viskoelastik Malzemelerin Gerilme-Şekil Değiştirme Bağlılıkları	3
1.3 Tez Konusuna Ait Mevcut Çalışmalar.....	5
1.4 Konunun Gerekliliği ve Güncelliği	8
1.5 Yapılan Çalışmanın Amaçları ve Kapsamı	9
2. LİNEERİZE EDİLMİŞ ÜÇ BOYUTLU STABİLİTE TEORİSİ	12
2.1 Giriş	12
2.2 Burkulma Probleminin Formülasyonu ve Temel Alan Denklemleri.....	13
2.3 Burkulma Probleminin LEÜBST Çerçevesinde Çözümü.....	23
2.4 Schapery Yöntemi	25
3. BANT ÇATLAK İÇEREN ELASTİK VE VİSKOELASTİK SANDVİÇ KALIN PLAĞIN DELAMİNASYONU	27
3.1 Problemin Matematiksel Modeli	27
3.2 Sonlu Elemanlar Modeli	37
3.3 Sayısal Sonuçlar ve Değerlendirme.....	40
3.3.1 Elastik Dikdörtgen Sandviç Plakta Delaminasyon Burkulması	41
3.3.2 Viskoelastik Dikdörtgen Sandviç Plakta Delaminasyon Burkulması	46
4. KENAR ÇATLAK İÇEREN ELASTİK VE VİSKOELASTİK SANDVİÇ KALIN PLAĞIN DELAMİNASYONU	49
4.1 Problemin Matematiksel Modeli	49
4.2 Sonlu Elemanlar Modeli	59

4.3	Sayısal Sonuçlar ve Değerlendirme	60
4.3.1	Elastik Dikdörtgen Sandviç Plakta Delaminasyon Burkulması	61
4.3.2	Viskoelastik Dikdörtgen Sandviç Plakta Delaminasyon Burkulması	71
5.	İ ÇATLAK İÇEREN ELASTİK VE VİSKOELASTİK SANDVIÇ KALIN PLAĞIN DELAMİNASYONU	74
5.1	Problemin Matematiksel Modeli	74
5.2	Sonlu Elemanlar Modeli	84
5.3	Sayısal Sonuçlar ve Değerlendirme	86
5.3.1	Elastik Dikdörtgen Sandviç Plakta Delaminasyon Burkulması	87
5.3.2	Viskoelastik Dikdörtgen Sandviç Plakta Delaminasyon Burkulması	94
6.	GENEL DEĞERLENDİRME VE SONUÇLAR	97
	KAYNAKLAR	100
	ÖZGEÇMİŞ	106

SİMGE LİSTESİ

(r_1, r_2, r_3)	Sandviç plağın (alt dış, orta, üst dış) tabakası ile ilgili büyüklükler
V	Çatlak içermeyen sandviç plağın kapsadığı bölge
$V^{(r_k)}$	Sandviç plağın tabakaları
\mathcal{Q}_i	Ele alınan çatlakların bulunduğu bölgeler ($i=1,2$)
V'	Ele alınan sınır değer probleminin çözüm bölgesi
$\ell_1(\ell_3)$	Dikdörtgen plağın Ox_1 (Ox_3) doğrultusunda plak uzunluğu
$\gamma_{31}(=\ell_3/\ell_1)$	Ox_3 doğrultusundaki plak uzunluğunun, Ox_1 doğrultusundaki plak uzunluğuna oranı
$\ell_{10}(\ell_{30})$	Ele alınan çatlakların Ox_1 (Ox_3) doğrultusundaki uzunluğu
$\chi(=\ell_{30}/\ell_{10})$	Ox_3 doğrultusundaki çatlak uzunluğunun, Ox_1 doğrultusundaki çatlak uzunluğuna oranı
h	Sandviç plağın kalınlığı
h_F (h_C)	Sandviç plağın dış (çekirdek) tabakasının kalınlığı
ε	Çatlak yüzeylerindeki ön eğintinin derecesini gösteren boyutsuz küçük bir parametre
$f(x_1, x_3)$	Çatlak yüzeylerindeki ön eğintinin formunu gösteren fonksiyon
$\sigma_{ij}^{(r_k)}$	İlgili tabakada Cauchy gerilme tansörü bileşenleri
$\sigma_{ij}^{(r_k),q}$	q. yaklaşıma ait Cauchy gerilme tansörü bileşenleri
$\bar{\sigma}_{ij}^{(r_k)}$	Laplace uzayındaki Cauchy gerilme tansörü bileşenleri
$\varepsilon_{ij}^{(r_k)}$	Maddesel genleme tansörü bileşenleri
$\varepsilon_{ij}^{(r_k),q}$	q. yaklaşıma ait maddesel genleme tansörü bileşenleri
$\bar{\varepsilon}_{ij}^{(r_k)}$	Laplace uzayındaki maddesel genleme tansörü bileşenleri
$u_i^{(r_k)}$	Yer değiştirme vektörü bileşenleri
$u_i^{(r_k),q}$	q. yaklaşıma ait yer değiştirme vektörü bileşenleri
$\bar{u}_i^{(r_k)}$	Laplace uzayındaki yer değiştirme vektörü bileşenleri
δ_i^n	Kronecker deltası
$\theta^{(r_k)}$	Hacim oranı
$\lambda^{*(r_k)}, \mu^{*(r_k)}$	Viskoelastik malzemeye ait Lamé sabitleri
$\bar{\lambda}^{*(r_k)}, \bar{\mu}^{*(r_k)}$	Viskoelastik malzemeye ait Lamé sabitlerinin Laplace dönüşümü
t, τ	Zaman parametreleri
p	Düzensiz yayılı statik dış basınç kuvveti
n_j^\pm	S^+ ve S^- yüzeylerinin birim dış normal vektörünün bileşenleri (Bölüm 2)
n_j^\pm	Çatlak yüzeylerine ait birim dış normal vektörün bileşenleri (Bölüm 3, 4, 5)
$S_i^+ (S_i^-)$,	$i=1,3,5$ Seçilen çatlakın, $x_2 = h_F$ 'deki üst (alt) yüzeyleri
$S_i^+ (S_i^-)$,	$i=2,4,6$ Seçilen çatlakın, $x_2 = h_F + h_C$ 'deki üst (alt) yüzeyleri
$\wp_i^+ (\wp_i^-)$,	$i=1,3,5$ Seçilen çatlak için, $x_2 = h_F$ 'deki temas bölgeleri
$\wp_i^+ (\wp_i^-)$,	$i=2,4,6$ Seçilen çatlak için, $x_2 = h_F + h_C$ 'deki temas bölgeleri
s	Laplace dönüşüm parametresi
Π	Fonksiyonel

$\Omega_{(k)}$	k. sonlu eleman
$u^{(k)}$	k. sonlu elemanda aranan yer değiştirme fonksiyonu
$N^{(k)}$	k. sonlu elemanda şekil fonksiyonu matrisi
$a^{(k)}$	k. sonlu elemanın düğüm noktalarında aranan yer değiştirmeleri içeren vektör
K	Katsayılar (rijitlik) matrisi
r	Düğüm noktalarına etki eden kuvvetleri içeren vektör
$E^{(1)}(v^{(1)})$	Çekirdek tabakanın malzemesine ait elastisite modülü (Poisson oranı)
$E^{*(2)}(v^{*(2)})$	Dış tabakaların malzemesine ait elastisite modülü (Poisson oranı)
$E_0^{(2)}(v_0^{(2)})$	Dış tabakaların elastisite modülünün (Poisson oranının) anlık değeri
α, ω	Viskoelastik malzemenin boyutsuz reolojik parametreleri
t'	Boyutsuz zaman
$\omega_0 (\omega_\infty)$	Reolojik parametrenin $t' = 0$ ($t' = \infty$)'daki değeri
R_α^*	Rabotnov operatörü
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
$p_{kr,0} (p_{kr,\infty})$	Viskoelastik malzemede $t' = 0$ ($t' = \infty$)'daki kritik burkulma kuvveti
$C_{ijrs(0)}$	Mekanik sabitlerin $t' = 0$ anındaki değerleri
$C_{ijrs(t)}$	Viskoelastik anizotrop ortamların gevşemesini belirten integral operatörlerin çekirdekleri
T_{ij}	Gerilme tansörü bileşenleri
A_{ij}	Ele alınan malzemenin normalize edilmiş mekanik sabitleri
\bar{A}_{ij}	Laplace uzayında ele alınan malzemenin normalize edilmiş mekanik sabitleri

KISALTIMA LİSTESİ

LEÜBST Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Stabilite Teorisi

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1.1	Maxwell cismi..... 3
Şekil 1.2	Kelvin-Voigt cismi..... 4
Şekil 2.1	Ele alınan dikdörtgen plak ve yükleme durumu 14
Şekil 2.2	$x_3 = \ell_3/2$ kesitinde dikdörtgen plağın ön eğintisi ve geometrik büyüklükler . 16
Şekil 3.1	Bant çatlaklar içeren sandviç kalın plakta yükleme durumu ve plak geometrisi; a) bölgenin tamamı b) yarım bölge..... 28
Şekil 3.2	Ele alınan plakta, çatlak yüzeylerine başlangıçta verilen ön eğintinin geometrik formu..... 41
Şekil 3.3	Ele alınan sandviç kalın plağın $x_2 = h_F - 0$ yüzeyinin burkulma modu a) $x_3 = \ell_3$ düzleminden görünüm b) $x_3 = \ell_3 / 2$ düzleminden görünüm..... 42
Şekil 3.4	Çeşitli ℓ_{10} / ℓ_1 ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ için elde edilen $p_{kr.0} / E^{(1)}$ ve $p_{kr.\infty} / E^{(1)}$ değerlerinin, ℓ_{10} / ℓ_1 'e bağlı değişimi ($\gamma_{31} = 1$, $h_F / \ell_1 = 0.0375$) 46
Şekil 4.1	Kenar çatlaklar içeren sandviç kalın plakta; a) yarım plak geometrisi b) tüm plak için yükleme durumu 50
Şekil 4.2	Çeşitli ℓ_{10} / ℓ_1 ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ için elde edilen $p_{kr.0} / E^{(1)}$ ve $p_{kr.\infty} / E^{(1)}$ değerlerinin, ℓ_{10} / ℓ_1 'e bağlı değişimi ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{30} / \ell_1 = 0.3$, $h_F / \ell_1 = 0.0375$) 64
Şekil 4.3	Çeşitli ℓ_{30} / ℓ_1 ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ için elde edilen $p_{kr.0} / E^{(1)}$ ve $p_{kr.\infty} / E^{(1)}$ değerlerinin, ℓ_{30} / ℓ_1 'e bağlı değişimi ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$, $h_F / \ell_1 = 0.0375$) 65
Şekil 4.4	Çatlak yüzeyindeki düşey yer değiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde, x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0$, $x_2 = h_F - 0$) 66
Şekil 4.5	Ele alınan sandviç kalın plakta, $\ell_{30} / \ell_{10} \geq \chi (= 0.3636)$ için, $x_2 = h_F - 0$ yüzeyinin burkulma modu a) $x_3 = \ell_3$ düzleminden görünüm b) $x_3 = 0$ düzleminden görünüm..... 67
Şekil 4.6	Ele alınan sandviç kalın plakta, $\ell_{30} / \ell_{10} < \chi (= 0.3636)$ için, $x_2 = h_F - 0$ yüzeyinin burkulma modu 68
Şekil 4.7	Ele alınan sandviç kalın plakta, $p_{kr.0} / E^{(1)} = 0.3911$ için elde edilen burkulma modunun oluşum aşamaları; a) $p / E^{(1)} = 0.3000$, b) $p / E^{(1)} = 0.3900$, c) $p / E^{(1)} = 0.3910$, d) $p / E^{(1)} = 0.39109$ 70
Şekil 4.8	Çatlak yüzeyindeki düşey yer değiştirmelerin, bazı h_F / ℓ_1 değerlerinde, x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0$, $x_2 = h_F - 0$) 71
Şekil 5.1	İç çatlaklar içeren sandviç kalın plakta; a) yarım plak geometrisi b) tüm plak için yükleme durumu 75
Şekil 5.2	Çeşitli ℓ_{10} / ℓ_1 ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ için elde edilen $p_{kr.0} / E^{(1)}$ ve $p_{kr.\infty} / E^{(1)}$ değerlerinin, ℓ_{10} / ℓ_1 'e bağlı değişimi ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{30} / \ell_1 = 0.5$, $h_F / \ell_1 = 0.0375$) 89
Şekil 5.3	Çeşitli ℓ_{30} / ℓ_1 ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ için elde edilen $p_{kr.0} / E^{(1)}$ ve $p_{kr.\infty} / E^{(1)}$ değerlerinin, ℓ_{30} / ℓ_1 'e bağlı değişimi ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$,

	$h_F / \ell_1 = 0.0375$)	90
Şekil 5.4	Çatlak yüzeyindeki düşey yer değiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde, x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = \ell_3 / 2$, $x_2 = h_F - 0$).....	91
Şekil 5.5	Ele alınan sandviç kalın plakta, $\ell_{30} / \ell_{10} \geq \chi (= 0.8333)$ için, $x_2 = h_F - 0$ yüzeyinin burkulma modu a) $x_3 = \ell_3$ düzleminden görünüm b) $x_3 = \ell_3 / 2$ düzleminden görünüm.....	92
Şekil 5.6	Ele alınan sandviç kalın plakta, $\ell_{30} / \ell_{10} < \chi (= 0.8333)$ için, $x_2 = h_F - 0$ yüzeyinin burkulma modu.....	93
Şekil 5.7	Çatlak yüzeyindeki düşey yer değiştirmelerin, bazı h_F / ℓ_1 ($= 0.01250, 0.02500, 0.03750, 0.05000, 0.5625$) değerleri için, x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = \ell_3 / 2$, $x_2 = h_F - 0$).....	94

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 3.1 $\gamma_{31} = \ell_3 / \ell_1$, h_F / ℓ_1 ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ değişiminin, $p_{kr.0} / E^{(1)}$ değerlerine etkisi ($\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$).....	42
Çizelge 3.2 Bazı $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ ve h_F / ℓ_1 için bulunan $\delta_{kr.0}$ değerleri (tez çalışması (pay)/Rzayev (2002) (payda)) ($\gamma_{31} = 8$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$, $h / \ell_1 = 0.15$).....	43
Çizelge 3.3 $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ değişiminin, $\frac{p_{kr.0} / E^{(1)}}{p_{kr.\infty} / E^{(1)}}$ değerlerine etkisi ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$, $h_F / \ell_1 = 0.0375$).....	44
Çizelge 3.4 h_F / ℓ_1 ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ değişiminin, $\frac{p_{kr.0} / E^{(1)}}{p_{kr.\infty} / E^{(1)}}$ değerlerine etkisi ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$).....	45
Çizelge 3.5 Çeşitli h_F / ℓ_1 ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ için hesaplanan t'_{kr} değerleri ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$, $\omega = 2$, $\alpha = -0.5$).....	47
Çizelge 3.6 Çeşitli ω ve α için hesaplanan t'_{kr} değerleri ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$, $h_F / \ell_1 = 0.0250$).....	48
Çizelge 4.1 $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ değişiminin, $\frac{p_{kr.0} / E^{(1)}}{p_{kr.\infty} / E^{(1)}}$ değerlerine etkisi ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{30} / \ell_1 = 0.3$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$, $h_F / \ell_1 = 0.0375$).....	62
Çizelge 4.2 h_F / ℓ_1 ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ değişiminin, $\frac{p_{kr.0} / E^{(1)}}{p_{kr.\infty} / E^{(1)}}$ değerlerine etkisi ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{30} / \ell_1 = 0.3$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$).....	63
Çizelge 4.3 Çeşitli h_F / ℓ_1 ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ için hesaplanan t'_{kr} değerleri ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{30} / \ell_1 = 0.3$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$, $\omega = 2$, $\alpha = -0.5$).....	72
Çizelge 4.4 Çeşitli ω ve α için hesaplanan t'_{kr} değerleri ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{30} / \ell_1 = 0.3$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$, $h_F / \ell_1 = 0.0250$).....	73
Çizelge 5.1 $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ değişiminin, $\frac{p_{kr.0} / E^{(1)}}{p_{kr.\infty} / E^{(1)}}$ değerlerine etkisi ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{30} / \ell_1 = 0.5$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$, $h_F / \ell_1 = 0.0375$).....	87
Çizelge 5.2 h_F / ℓ_1 ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ değişiminin, $\frac{p_{kr.0} / E^{(1)}}{p_{kr.\infty} / E^{(1)}}$ değerlerine etkisi ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{30} / \ell_1 = 0.5$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$).....	88
Çizelge 5.3 Çeşitli h_F / ℓ_1 ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ için hesaplanan t'_{kr} değerleri ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{30} / \ell_1 = 0.5$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$, $\omega = 2$, $\alpha = -0.5$).....	95
Çizelge 5.4 Çeşitli ω ve α için hesaplanan t'_{kr} değerleri ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{30} / \ell_1 = 0.5$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$, $h_F / \ell_1 = 0.0250$).....	96

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanma sürecinde birlikte çalışmaktan büyük onur duyduğum, değerli yardımlarını esirgemeyerek katkılarda bulunan sayın Prof. Dr. R. Faruk Yükseler, Prof. Dr. Nazmiye Yahnioğlu ve Prof. Dr. Surkay D. Akbarov hocalarıma en derin şükranlarımı sunarım.

Bilimsel ve manevi yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. İrfan Coşkun'a teşekkür ederim.

Çalışmalarım esnasında büyük sabır göstererek yanımda olan aileme çok teşekkür ederim. Ayrıca Arş. Gör. Armağan Elibol, Y. Doç. Dr. Nihat İlhan, Elif Tekin, Arş. Gör. Çiğdem Özçelik, Arş. Gör. Nur Atakul, Arş. Gör. Ülkü Babuşçu Yeşil, Arkın Atacan, Filiz Sipahioğlu Murray ve Arş. Gör. Eylem Karataş'a verdikleri destekten ötürü teşekkür ederim.

Bu doktora tez çalışmasını, 'Yıldız Teknik Üniversitesi Araştırma Projesi' kapsamında desteklediği için Araştırma Projesi Koordinatörlüğü'ne teşekkür ederim (Proje numarası: 2010-05-01-DOP01).

ÖZET

ÇATLAK İÇEREN ÜÇ KATLI ELASTİK VE VİSKOELASTİK SANDVIÇ KALIN PLAKLARIN DELAMİNASYONU

Bu çalışmada, üç tabakadan oluşan elastik ve viskoelastik sandviç kalın plakların delaminasyon burkulma problemleri ele alınmıştır. İncelemelerde; sandviç plağın tabakaları arasında çatlaklar olduğu ve bu çatlak yüzeylerinin doğal durumda, başlangıçta çok küçük ön eğintiye sahip olduğu kabul edilmektedir. Elastik plaklar için, çatlaklar doğrultusunda etkiyen dış basınç kuvveti dolayısıyla ön eğintinin gelişimi; viskoelastik plaklar için, sabit dış basınç kuvveti etkisinde zaman ilerlerken bahsedilen ön eğintinin gelişimi incelenmiş ve Hoff yaklaşımı çerçevesinde kritik parametreler belirlenmiştir.

Ele alınan delaminasyon burkulma problemlerinin matematiksel modeli viskoelastisite teorisinin geometrik nonlineer üç boyutlu kesin denklemleri yardımıyla kurulmuştur. Problemlerin çözümü için Laplace dönüşümü, sınır tipli pertürbasyon yöntemi, üç boyutlu sonlu elemanlar yöntemi ve Shapery yöntemi (sayısal ters Laplace dönüşümü için) kullanılmıştır.

Bu çalışma, altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; delaminasyon burkulma problemleri hakkında genel bilgi verilmiş ve bu problemlerin mühendislik uygulamalarındaki yeri ve önemi özetlenmiştir. İkinci bölümde; ele alınan delaminasyon burkulma problemlerinin matematiksel modellemesinde kullanılan Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Stabilité Teorisi'nin denklemlerinin çıkarılması verilmiştir. Üçüncü bölümde; ele alınan elastik ve viskoelastik sandviç plakların, tabakaları arasında bant çatlaklar içermesi durumunda delaminasyon burkulma problemleri ele alınmıştır. Bu problemin matematiksel modeli, sonlu eleman formülasyonu, problemlerin çözümü ve elde edilen sayısal sonuçlar ile çeşitli problem parametrelerinin kritik parametrelere etkisi ve mühendislik açısından analiz ve yorumlarına da değinilmiştir. Dördüncü bölümde; ele alınan elastik ve viskoelastik sandviç plakların, tabakaları arasında kenar çatlaklar içermesi durumunda delaminasyon burkulma problemleri ele alınmıştır. Bu problemlerin matematiksel modeli, sonlu eleman modellemesi ve elde edilen sayısal sonuçlar verilerek, çeşitli geometrik ve malzeme parametrelerinin kritik parametrelere etkisi gösterilmiştir. Beşinci bölümde; ele alınan elastik ve viskoelastik sandviç plakların, tabakaları arasında iç çatlaklar içermesi durumunda delaminasyon burkulma problemleri ele alınmıştır. Ele alınan problemlerin matematiksel modeli, sonlu eleman formülasyonu, çözümü ve elde edilen sayısal sonuçlar ile çeşitli problem parametrelerinin kritik parametrelere etkisi ayrıntılı olarak verilmiştir. Altıncı bölümde, sonuçların genel değerlendirmesi yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sandviç plak, delaminasyon burkulma, bant çatlak, kenar çatlak, iç çatlak, viskoelastik malzeme, kritik zaman, kritik burkulma kuvveti, burkulma modu

ABSTRACT

DELAMINATION OF ELASTIC AND VISCOELASTIC SANDWICH THICK PLATES WITH THREE LAYERS INCLUDING CRACK

In this study, the delamination buckling problems of elastic and viscoelastic sandwich thick plates consisting of three layers are considered. In the analyses; it is assumed that there are cracks between the layers of the sandwich plate, and the crack surfaces have infinitesimal initial imperfections in the natural state. The development of the imperfection of the edge surfaces of the cracks due to external compressive forces acting in the direction of the cracks for the elastic plates and that the duration of the deformation under the constant external compressive forces for the viscoelastic plates are analysed, and critical parameters are determined within the framework of Hoff approach.

The mathematical model of the considered delamination buckling problems is formulated by the usage of the three dimensional geometrically non-linear exact equations of the theory of viscoelasticity. For the solution of the problems; the Laplace transform, boundary form perturbation method, the three dimensional finite elements method (FEM) and the Shapery method (for the numerical inverse Laplace transform) are used.

The study consists of six chapters. In the first chapter, general information on the delamination buckling problems is given and the place and the importance of these problems in engineering applications are provided briefly. In the second chapter, the derivation of the equations of the Three-Dimensional Linearized Theory of Stability used for the mathematical modeling of the mentioned delamination buckling problems is given. In the third chapter, the delamination buckling problems of the elastic and viscoelastic sandwich plates with band cracks between the layers of sandwich plate are considered. The mathematical modeling of these problems, finite element formulations, solutions to the problems, the obtained numerical results, the effects of various problem parameters on the critical parameters, and their analysis and conclusions from the point of view of engineering applications are presented as well. In the fourth chapter, the delamination buckling problems of the elastic and viscoelastic sandwich plates with edge cracks between the layers of the plate are considered. The mathematical modeling of these problems, finite element modeling and the obtained numerical results showing the effects of the various geometrical and material parameters on the critical parameters are given. In the fifth chapter, the delamination buckling problems of the elastic and viscoelastic sandwich plates with embedded cracks between the layers of the plate are mentioned. The mathematical modeling of the considered problems, the finite element formulation, the solution of the problems and the obtained numerical results revealing the effect of various problem parameters on the critical parameters are presented in detail. In the sixth chapter, general conclusions of the results are formulated.

Keywords: Sandwich plate, delamination buckling, band crack, edge crack, embedded crack, viscoelastic material, critical time, critical buckling force, buckling mode

1. GİRİŞ

Bu bölümde doktora tezine inceleme ve hesap konusu olan elastik ve viskoelastik kompozit malzemeler ile tez çerçevesinde ele alınan problemler hakkında genel bilgiler verilecektir.

1.1 Viskoelastik Sandviç Plaklara Ait Genel Bilgiler

Plak yapı elemanları, düşük ağırlık ve yüksek yük taşıma kapasitesi özelliklerinden dolayı kullanım açısından çeşitli mühendislik uygulamalarında geniş yer tutarlar. Plak elemanlar, çelik gibi klasik malzemelerden üretildiği gibi kompozit malzemelerden de üretilmektedirler. Bilindiği üzere, kompozit malzemeler, en az farklı iki malzemenin aralarında kimyasal etki olmaksızın bir araya getirilmesiyle oluşan malzemeler olarak tanımlanmaktadır. Kompozit malzemeyi oluşturan farklı malzemelerin her birine “bileşen” adı verilir. Bileşenler, kompozit içerisinde üstlendiği göreve göre güçlendirici veya matris olmak üzere ikiye ayrılırlar. Genellikle güçlendiriciler, kompozit malzeme içerisinde yük taşıma görevini; matris malzemesi ise, güçlendiricilerin birliğini ve karşılıklı etkileşimini sağlarlar.

Tez çerçevesinde çok katlı levhalı kompozitler ele alınacaktır. Çok katlı levhalı kompozit malzemeler, levhaların basitçe üst üste dizilişinden oluşturulmaktadır. Diğer bir deyişle, en az farklı iki malzemedan yapılmış, çok sayıda levhanın aralarında kimyasal etki olmaksızın üst üste konularak oluşturulmasından meydana gelen kompozit malzemelerdir. Eğer ele alınan çok katlı kompozit malzeme özel olarak üç levhadan (tabakadan) oluşuyor ise buna “sandviç” malzeme adı verilmektedir. Bu durumda sandviç kompozit malzeme, farklı iki malzemedan yapılmış üç levhanın ardışık diziliminden oluşmuş, özel levhalı kompozit malzemelerdir. Bu malzemelerde tabakalar, orta/çekirdek (core) ve dış yüzey tabakaları (face-plane) olmak üzere isimlendirilir.

Çok katlı levhalı kompozit malzemelerin dış etkiye karşı gösterdiği tepki, sadece levhaların malzemesine değil, diziliş sırasına (simetrik, anti-simetrik vb.) göre de değişmektedir. Bu malzemedan yapılmış yapı elemanlarının incelenmesinde, ele alınan malzeme eşdeğer homojen malzeme (cisim) veya parçalı sürekli homojen malzeme (cisim) olarak iki şekilde modellenmektedir (Cristensen, 1979; Akbarov ve Guz, 2000). Sandviç plakların incelenmesi; ancak, parçalı sürekli homojen cisim modeli çerçevesinde yapılabilmektedir. Bu model çerçevesinde, her bir levha için yönetici denklemler ve levhalar arasında (temas yüzeylerinde) ise temas koşulları çerçevesinde oluşan denklem sistemi yardımıyla incelemeler yapılabilmektedir. Literatürde; genellikle sandviç plaklara ait çalışmaların, sandviç plağı

oluşturan levhalara ait yönetici denklemlerin yaklaşık plak teorileri çerçevesinde ele alınmasıyla yapılmış çalışmalar olduğu görülmektedir (Altenbach vd., 2004; Sadowski ve de Borst, 2009).

Plaklar, özelliklerine göre sınıflandırılmaktadır. Bunlardan bazıları; a) geometrik özelliklerine (orta düzleminin geometrik formuna, kalınlıklarının ince/kalın veya sabit/değişken olmasına), b) mekanik özelliklerine (izotrop, anizotrop, enine izotrop, ortotrop vb.), c) inceleme yöntemine (Kirchhoff, Mindlin vb. plakları) göre sınıflandırmalardır. Tez kapsamında sandviç plaklar ele alınacağından, ele alınan plağın mekanik özellikleri anizotrop olacaktır. Bu özellikler detaylandırıldığında, kompozit malzemenin mekanik özelliklerinin, 1) bileşenlerinin (matris ve güçlendirici) mekanik özelliklerine, 2) güçlendiricilerinin geometrik formlarına, yayılımına, doğrultusuna ve kompozit içerisindeki hacim oranına ve 3) matris ve güçlendirici ara yüzelerindeki temasın doğasına ve niteliğine doğrudan bağlı olduğu görülmektedir. Bununla beraber genel kapsamda ele alındığında, bilim dalına göre kompozit malzemelerin kendi içerisinde, 1) güçlendiricilerinin geometrik formuna (tanecikli, lifli ve levhalı), 2) kompoziti oluşturan bileşenlerin malzemesine (metal, seramik ve polimer) vb. gibi bazı açılardan sınıflandırıldığı görülmektedir (Yahnioğlu, 1996; Talreja ve Manson, 2000). Tez çerçevesinde ele alınacak olan sandviç malzeme/yapı elemanlarına ait yaygın bir sınıflandırma bulunmamasına karşın, sandviç malzemeyi oluşturan orta/çekirdek tabakanın malzemesine veya özel biçimlerine (köpük, bal peteği vb.) göre isimlendirmelere rastlanılmaktadır.

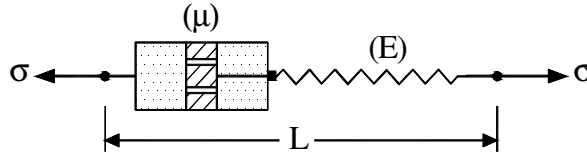
Kompozit malzemeyi oluşturan bileşenlerin metal, seramik veya polimer malzemelerden olabileceği yukarıda verilmişti. Bu açıdan incelendiğinde, kompozit malzemenin bileşenlerinin mekanik özelliklerinin zamandan bağımsız (elastik) veya zamana bağlı (viskoelastik) özellik göstereceği açıktır. Elastik malzemeler, üzerine etkiyen kuvvete ani tepki gösteren, bu kuvvetin belirlediği bir şekil değiştirme durumunu derhal gerçekleyen ve kuvvet değişmedikçe bu şekil değiştirmeyi koruyan malzemelerdir. Bu malzemeler, kuvvet kaldırıldığında ani olarak başlangıçtaki konumuna geri dönerler. Viskoelastik malzemelerde ise, yükleme altında çabuk sayılabilecek elastik bir şekil değiştirme yaptıktan sonra yeteri kadar uzun bir süre gözlemlenirken, üzerlerine etkiyen yük değiştirilirse de şekil değiştirmenin yavaş olarak devam ettiği gözlemlenir. Bu olay sünme olarak adlandırılır. Yine uzun süre gözlemlendiğinde yükleme altında belirli bir şekil değiştirme durumuna erişmiş bir malzemenin bu durumunu koruyabilmesi için, üzerine etkiyen yükün zamanla azaltılmasının gerektiği de görülmüştür. Bu olaya da gevşeme adı verilir. Daha özenli yapılan deneyler,

yüklenen bir katı cismin erişebildiği şekil değiştirme durumunun, yükün yalnızca son değerine değil yükleniş hızına da bağlı olduğunu göstermiştir. Bu veriler gerilme-şekil değiştirme bağıntılarının, yüklemenin son değeriyle birlikte değişim hızından da etkilendiğini ifade eder (Erdogan, 2000). Dolayısıyla böyle durumlarda; zaman parametresi, ortamın mekanik davranışını belirlemede çok önemli bir rol oynadığı için hesaplamalarda göz önüne alınmalıdır.

1.2 Viskoelastik Malzemelerin Gerilme-Şekil Değiştirme Bağıntıları

Viskoelastik malzemelerin bünye denklemlerine ait pek çok matematik model literatürde mevcuttur. Bu modellerden iki tanesine kısaca burada değinilecektir. Viskoelastik malzeme modellerinde, viskoelastik malzemelerin elastik özelliklerini temsil için elastik bir yay ve zaman etkisini temsil için viskoz akışkan dolu bir piston kullanılır. Burada değinilecek viskoelastik malzeme modelleri Maxwell ve Kelvin-Voigt modelleridir. Her iki model, çubuk gibi bir boyutlu ve küçük şekil değiştirmelerin olduğu ortamlar için geçerlidir.

Maxwell cismi için, bünye denkleminde yay ve pistonun birbirine seri bağlandığı kabul edilir.



Şekil 1.1 Maxwell cismi

Maxwell cismi için gerilme-şekil değiştirme ilişkisi

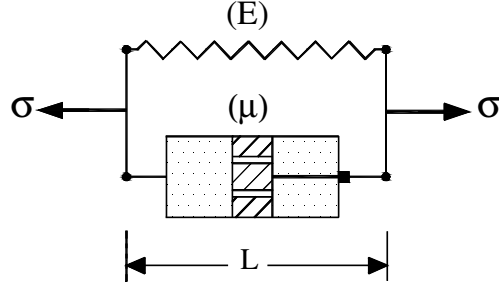
$$\dot{\sigma} + k\sigma = E\dot{\epsilon} \quad (1.1)$$

diferansiyel bağıntısı ile verilir. E katsayısı Young modülüne karşı gelir ve k zaman boyutunda bir sabittir. (1.1) denkleminde, $\epsilon(t)$ verildiğinde σ gerilmesini belirleyen bir diferansiyel denklem olarak bakılırsa

$$\sigma(t) = ce^{-kt} + Ee^{-kt} \int \dot{\epsilon}(t)e^{kt} dt \quad (1.2)$$

yazılabilir. (1.2)'de c integrasyon sabitidir. Bu model deneylerde tespit edilen sünme olayını açıklayamamak ile birlikte, gevşeme olayını (sabit şekil değiştirme altında gerilmenin zamanla değişiminin gerekliliğini) açıklayabilmektedir.

Ele alınan yay ve pistonun birbirine paralel bağlanması durumu Kelvin-Voigt cismi için kullanılır.



Şekil 1.2 Kelvin-Voigt cismi

Bu modele göre, küçük şekil değiştirme bileşeni ε ile gösterilirse, gerilme-şekil değiştirme ilişkisi

$$\sigma = E\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon} \quad (1.3)$$

şeklinde verilir. (1.3)'de $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$, E ve μ malzeme sabitleridir. Bu modelle, sünme olayı açıklanabilmektedir. Burada, bu iki olgunun farklı modellerin çıktısı olduğuna dikkat edilmelidir. Malzemenin bu iki özelliği aynı anda taşınması söz konusu olduğundan, yukarıda verilen iki modelin birleştirilmesi gerekmektedir. Benzeri şekilde, literatürde viskoelastik malzemelerin modellenmesine ait pek çok model bulunmaktadır (Şuhubi, 1994; Ersoy, 2001).

Eğer viskoelastik cismin bünye denkleminde gerilmenin, şekil değiştirme tansörüne bağımlılığı keyfi (örneğin lineer veya nonlinear) fakat, şekil değiştirme hızı tansörüne bağımlılığı lineer alınırsa, "lineer viskoelastisite" elde edilmiş olunur. Bu durumda bünye denklemleri, şekil değiştirmenin zamanla çok yavaş değiştiği viskoelastik ortamları temsil eder. Bu tür viskoelastik malzemeler lineer viskoelastik malzemeler olarak nitelendirilir. Tez çerçevesinde göz önüne alınan viskoelastik malzeme, lineer viskoelastik malzeme olarak kabul edilmiştir. Tez çerçevesinde kullanılan lineer viskoelastik malzemenin bünye denklemleri Rabotnov operatörü yardımıyla temsil edilmektedir. Deneysel verilerin formülasyonu ile elde edilen bu bünye denklemleri, epoksi bazlı viskoelastik kompozit malzemelerin temsilinde iyi bir yaklaşım vermektedir (Akbarov ve Yahnioglu, 2010). Buna göre lineer viskoelastik bir malzemenin elastisite modülü ve Poisson katsayısı,

$$E = E_0 \left[1 - \omega_0 R_\alpha^* (-\omega_0 - \omega_\infty) \right],$$

$$v = v_0 \left[1 + \frac{1-2\nu_0}{2\nu_0} \omega_0 R_\alpha^* (-\omega_0 - \omega_\infty) \right] \quad (1.4)$$

ile verilir (Akbarov ve Rzayev, 2001; Akbarov ve Yahnioglu, 2001). Burada E_0 ve ν_0 , sırasıyla anlık Young modülü ve anlık Poisson katsayısıdır. α , ω_0 , ω_∞ 'ler viskoelastik malzemenin reolojik parametreleri, R_α^* Rabotnov operatörüdür (Rabotnov, 1977). Bu operatör

$$R_\alpha^* \phi(t) = \int_0^t R_\alpha(\beta, t-\tau) \phi(\tau) d\tau \quad (1.5)$$

$$R_\alpha(\beta, t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma((1+n)(1+\alpha))}, \quad -1 < \alpha \leq 0 \quad (1.6)$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada, $\beta = \frac{\omega_0}{\omega_\infty}$ olarak tanımlı olup, (1.6)'da $\Gamma(x)$ Gamma fonksiyonudur (Akbarov ve Yahnioglu, 2001; Akbarov vd., 2001).

1.3 Tez Konusuna Ait Mevcut Çalışmalar

Levhalı kompozit malzemelerde ortaya çıkan en yaygın kırılma mekanizmalarından birisi, yerel delaminasyon burkulması olayıdır. Bu olayın mekanizması pek çok araştırmacı tarafından, bu malzemeler oluşturulurken veya yapı elemanları düzenlenirken çeşitli nedenlerle levhalar arasında kalan boşluk, çatlak vb. kusurların, bu boşluk/çatlak doğrultusunda etkiyen dış basınç kuvveti etkisinde, malzeme/yapı elemanında yerel stabilite kaybına sebep olması şeklinde açıklanmaktadır. Bu nedenle bu olayların modellenmesinde, önceden çok katlı kompozit malzemenin tabakaları arasında çatlakların varlığı kabul edilerek, incelemeler buna göre yapılmaktadır. Bu alanda ilk çalışmalar Kachanov (1976) tarafından yapılmıştır. Kachanov; çalışmalarında, delaminasyon burkulma problemlerini, yapının iç kısmında yer alan çatlak ile yapı elemanının serbest yüzeyi arasında kalan kısmın, çatlığa paralel dış basınç kuvveti etkisinde burkulması-stabilite kaybı olarak modellemiş ve bazı örnek sınır değer problemlerini yaklaşık plak teorileri çerçevesinde incelemiştir. Belirtilen problemler, günümüze kadar pek çok araştırmacı tarafından çalışılmış ve hala yoğun olarak çalışılmaktadır. Bunlardan bazıları Chai vd. (1981); Nilson vd. (1993); Kardomateas vd. (1995); Wang vd. (1995); Bolotin (1996); Akbarov (1998); Guz (2000); Hutchinson vd. (2000) ve Moon vd. (2002, 2004) ile bu çalışmaların kaynaklarında listelenen diğer çalışmalar verilebilir.

Belirtilen burkulma problemleri Guz ve öğrencileri tarafından da çalışılmıştır. Ancak bu çalışmalarda, çatlak içeren yapı elemanının kırılmasına sebep olan kritik parametre değerleri, bu malzemenin tüm olarak stabilite kaybı değerleri ile eşdeğer alınarak modellenmiştir. Bu problemlerin ayrıntılı açıklanması, kırılmanın mekanizması ve bazı örnek problemlere uygulanması Guz (2000, 2001); Babich vd. (2001); Babich ve Guz (2002); Guz ve Guz (2003); Guz vd. (2004) çalışmaları ile bu çalışmaların kaynaklarında yer alan çalışmalarda verilmiştir. Ancak; bu şekilde modellenen problemlerin çözümünden kritik değerler belirlenebilmesine karşın, çatlak ucunda oluşan gerilme yığılması veya yapıda oluşan gerilme yayılımı belirlenememektedir.

Burkulma olayına, ince tabaka ile örtülü yüzeylerde de sıkça karşılaşılmaktadır. İnce tabaka ile örtülü (film şerit) yapı elemanları için dış basınç etkisinde, kaplamada (örten tabakada) meydana gelen burkulma olayları yoğun olarak Hutchinson ve öğrencileri tarafından deneysel olarak çalışılmış ve çalışılmaktadır. Buna ait bazı çalışmalar Hutchinson ve Suo (1992); Hutchinson vd. (1992); Evans ve Hutchinson (1995); Nilson ve Giannakopoulos (1995); Gioia ve Ortiz (1997); Wang ve Evans (1998) ve Moon vd. (2002) ile verilebilir. Dış basınç kuvveti etkisinde; kaplamada oluşan burkulma, burkulma mod şekilleri ve oluşma mekanizmaları yapılan gözlem ve deneylere dayanılarak açıklanmaya çalışılmıştır. Belirtilen yazarların bu ve diğer çalışmalarında (Hutchinson vd., 2000; Moon vd., 2004) burkulma olayının gelişimi, kaplama ile alt (örtülmüş) tabaka ara yüzeyindeki “ara yüzey kırılma enerjisi” ile açıklanmaktadır. Bu model çerçevesinde, kaplamalardaki burkulma olayının gelişimine, önceden var olan kusurun (çatlağın) büyüklüğünün, çatlağın konumunun (iç çatlak veya kenar çatlak), kaplamanın kalınlığının, ortamdaki sıcaklık değişiminin etkileri ayrıntılı olarak incelenmiş ve yaklaşık matematiksel modeller verilmiştir. Benzeri bir çalışma (rijid yüzey üzerine örtülü ince film tabakasının burkulmasına ait bir çalışma), Crosby ve Bradley (1999) ile Li ve Siegmund (2004) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalarda, dış basınç kuvveti etkisinde ince film şeritte meydana gelen sinüs-dalgası burkulma modunun gelişimi, cisimde biriken elastik enerji salınımı yardımıyla açıklanmaya çalışılmıştır.

Burkulma delaminasyon olayını etkileyen en önemli parametrelerden birisi de çatlağın geometrik boyutlarıdır. Yukarıda verilen araştırmaların sonuçları, çatlak ile serbest yüzey arasındaki kısmın kalınlığının, çatlak boyutunda veya daha büyük olması durumlarına uygulanamaz. Belirtilen kısmın geometrik boyutlarının burkulma kuvvetine etkilerini inceleyen, örneğin Chai vd. (1981); Hwang ve Mao (1999); Short vd. (2001); Arman vd. (2006) gibi literatürde pek çok çalışma mevcuttur.

Yukarıda verilen bütün çalışmalarda, şekil değiştirebilen cisimler mekaniğine ait üç boyutlu nonlinear denklemlere dayanan, örneğin Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Stabilite Teorisi (LEÜBST) gibi temel stabilite teorileri kullanılmamıştır. Belirtilen teorinin çatlak içeren cisimlerde yerel burkulma problemleri için geliştirilmesi, Guz ve öğrencileri tarafından yapılmıştır (Guz ve Nazerenko, 1985a,b; Guz, 1999). Bu çalışmaların ayrıntılı özeti Guz ve Nazerenko (1989a,b); Guz vd. (2004); Bogdonov vd. (2009) çalışmalarında verilmiştir. LEÜBST'nin başarılı uygulamaları Akbarov ve Tekercioglu (2006, 2007); Dekret (2008a,b); Guz ve Dekret (2008, 2009a,b); Akbarov ve Aliyev (2009) olarak verilebilir.

Yukarıda verilen, Akbarov ve Tekercioglu (2006, 2007); Akbarov ve Aliyev (2009) çalışmaları dışındaki diğer bütün çalışmalarda ele alınan problemde, yapı elemanı malzemesi zamandan bağımsız olarak seçilmiştir. Akbarov ve öğrencilerine kadar, viskoelastik malzemedan yapılmış yapı elemanlarının delaminasyon burkulma problemleri ele alınamamıştır. Belirtilen problemlerin mekanik özellikleri zamana bağlı (viskoelastik) malzemedan yapılmış yapı elemanlarının delaminasyon burkulması problemlerine uygulanabilmesi, Akbarov ve öğrencileri tarafından LEÜBST'in mekanik özellikleri zamana bağlı malzemeler için geliştirilmesi ile mümkün olmuştur (Akbarov, 1994, 1998, 2007; Akbarov vd., 1997; Akbarov ve Yahnioglu, 1999, 2001 ve diğerleri). LEÜBST çerçevesinde incelenen delaminasyon burkulma veya stabilite kaybı problemlerinde, kritik parametrelerin (elastik durumda kritik burkulma yükü ve viskoelastik durumda sabit bir dış basınç kuvveti etkisinde kritik zaman) belirlenmesinde, Hoff (1954) tarafından verilen “başlangıç eğinti kriteri” kullanılmıştır. Belirtilen problemlerin bazı sonuçları Akbarov ve Guz (2000) kaynağında verilmiştir. Bu teorinin iki veya üç boyutlu bazı stabilite kaybı problemlerine uygulanması Akbarov ve Yahnioglu (1999); Yahnioglu (2000); Yahnioglu ve Kutug (2000); Akbarov vd. (2001); Yahnioglu ve Akbarov (2002); Selim ve Akbarov (2003); Kutug vd. (2003); Akbarov vd. (2004) ve Kutug (2009) çalışmalarında yapılmıştır. LEÜBST'nin bazı delaminasyon burkulma problemleri için başarılı uygulamaları olarak Akbarov ve Rzayev (2002a,b,c, 2003); Rzayev ve Akbarov (2002) çalışmaları verilebilir. Ayrıca bu çalışmaların özeti Akbarov (2007) kaynağında verilmiştir. Bu çalışmalarda çatlak içeren elastik/viskoelastik şerit-plak ve dairesel çatlak içeren dairesel plaklar için delaminasyon burkulma problemleri LEÜBST çerçevesinde başarıyla uygulanmıştır. Çeşitli geometrik ve malzeme parametrelerinin, ele alınan yapı elemanının delaminasyon burkulmasına etkileri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Ele alınan delaminasyon burkulma problemlerinin LEÜBST çerçevesinde dikdörtgen plaklar

için geliştirilmesi ve örnek problemlere uygulanması Akbarov, Yahnioglu ve Karatas (2009, 2010a,b,c) çalışmalarında verilmiştir. Bu çalışmalarda çatlak içeren dikdörtgen viskoelastik kompozit kalın plağın delaminasyon burkulması problemleri, LEÜBST çerçevesinde modellenerek örnek problemler üzerinde ilk defa uygulanmıştır. Sandviç kalın plaklar için delaminasyon burkulması problemlerinin LEÜBST çerçevesinde modellenmesine ait ilk uygulamalar Akbarov, Yahnioglu ve Tekin (2010a,b) çalışmalarında verilmiştir. Belirtelim ki bu çalışmalarda ele alınan problemlerin çözümü, üç boyutlu sonlu elemanlar modellemesi yardımıyla sayısal olarak yapılmıştır.

1.4 Konunun Gerekliliği ve Güncelliği

Malzemeler üzerindeki araştırmalar ile üretimlerinde kullanılan yeni teknolojilerin geliştirilmesine bağlı olarak, mühendislik uygulamalarında kullanılan üstün özelliklere (yüksek mukavemet, hafiflik, ısı iletimi/yalıtımı, elektrik iletimi/yalıtımı vb.) sahip malzemelerin kullanımı yaygınlaşmıştır. Günümüzde üstün özelliklere sahip malzemelerin kullanımına pek çok alanda karşılaşılmaktadır, örnek olarak tıbbi aletler, spor malzemeleri, mutfak malzemeleri, her türlü taşıt verilebilir.

Mühendislik uygulamalarında kullanılan malzemelerin çeşitlenmesi, malzeme üretiminde yeni teknolojilerin veya üstün özelliklere sahip yeni malzemelerin kullanılması pek çok avantaj sağlasa da bu yeniliklerin kendi içerisinde yeni sorunları içerdiği unutulmamalıdır. Bu anlamda üretimde veya montajda ortaya çıkabilecek pek çok nedenlerden dolayı (örneğin teknolojik uyumsuzluk gibi), malzemelerdeki veya yapı elemanlarındaki çeşitli kusurların (çatlak, yarık vb.) oluşumunun engellenmesi mümkün olamamaktadır.

Yukarıda verilen nedenlerden dolayı pek çok mühendislik uygulamasında; kırılma, delaminasyon vb. gibi istenmeyen olaylar ile karşılaşılmaktadır (Erdogan, 2000). Tez kapsamında, günümüzde kullanımı yaygın olan çok katlı kompozit malzemelerin kullanımında karşılaşılan ve önemli bir sorun teşkil eden delaminasyon burkulma olayı, üç tabakadan oluşan dikdörtgen sandviç plak misalinde incelenmektedir. İncelemelerde yapının tabakaları arasında birbirine paralel ve özdeş iki adet çatlağın bulunduğu önceden kabul edilmektedir. Kompozit malzemeler açısından delaminasyon burkulma olayının incelenmesi güncel problemlerden olup, hem teorik hem de uygulama açısından önem taşımaktadır.

Belirtilen alanda, literatürdeki mevcut çalışmalar çoğunlukla iki boyutlu problemler ile sınırlıdır. Ayrıca, bu çalışmaların pek çoğunda yaklaşık plak teorileri kullanılmış ve elastik

malzemeler için hesaplamalar yapılmıştır. Bilindiği üzere mühendislik problemlerinin iki boyutlu problemler olarak modellenebilmesi ancak özel durumlar (düzlem gerilme, düzlem şekil değiştirme) için mümkündür. Dolayısıyla bu problemlerin çözümlerinden elde edilecek sayısal sonuçlar, ancak kısıtlı alanlardaki sorulara cevap verebilir. İki boyutlu çözümlerin yeterli olmadığı sınırsız sayıdaki mühendislik problemi için daha gerçekçi, kesin teoriler çerçevesinde üç boyutlu problem modellenmesine ve çözümüne ihtiyaç vardır. Bu açıdan ele alınan tez, kesin teori çerçevesinde üç boyutlu problem formülasyonu ve elastik/viskoelastik malzeme alınması açılarından literatürdeki mevcut çalışmalara göre teorik ve uygulama açısından önemli üstünlüklere sahiptir. Dolayısıyla, tez çerçevesinde elde edilen sonuçların, ele alınan araştırma dalındaki bir çok yaklaşık yöntemin hassasiyet derecesinin nitelik ve nicelik açısından değerlendirilebilmesi, mevcut araştırmaların sayısal sonuçlarının geçerlilik sınırlarının belirlenebilmesi açılarından da önemli bir referans teşkil edeceği öngörülmektedir.

Tez çerçevesinde üç boyutlu olarak modellenen delaminasyon burkulma problemlerinin çözümü; sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla, sayısal olarak yapılmıştır. Bunun için üç boyutlu sonlu eleman modellemesi uygulanmıştır. Dolayısıyla ele alınan problemlerin çözümü, bazı açılardan çözüm yönteminin (sonlu elemanlar yöntemi) geliştirilmesini gerektirmiştir. Ayrıca, çözüm yönteminin gerektirdiği bütün algoritma ve programlar tarafımızdan yapılmış olup, tez çerçevesinde gösterilen çabaların, bu alandaki bilgi birikiminin oluşmasına ve bundan sonra yapılacak araştırmalara da önemli ölçüde katkı sağlayacağı öngörülmektedir.

1.5 Yapılan Çalışmanın Amaçları ve Kapsamı

Tezin amacı; (i) çekirdek tabakanın ve dış tabakaların malzemesi elastik, (ii) çekirdek tabakanın malzemesi elastik ve dış tabakaların malzemesi lineer viskoelastik malzemelerden yapılmış, üç tabakadan oluşan dikdörtgen sandviç kalın plağın delaminasyon burkulma problemlerinin LEÜBST çerçevesinde formülasyonu ve bazı sınır değer problemleri üzerinde incelenmesidir. Bu amaçla, tabakaları arasında birbirine paralel ve özdeş çatlaklar (bant, kenar ve iç çatlak) bulunan lineer viskoelastik dikdörtgen sandviç plakta, statik dış basınç kuvveti etkisinde delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik parametrelerin (elastik durumda kritik dış basınç kuvveti, viskoelastik durumda kritik zaman değeri) belirlenmesi ve bu kritik parametrelere, çeşitli malzeme ve geometrik parametrelerin etkisi araştırılmıştır. İncelemeler esnasında lineer viskoelastik olduğu kabul edilen dış tabaka malzemesinin viskozite özellikleri Rabotnov (1977) ile verilen operatörler yardımıyla ele alınmış ve bu operatöre

dahil olan reolojik parametrelerin kritik zaman değerlerine etkisi araştırılmıştır.

LEÜBST çerçevesinde, literatürde şimdiye kadar ele alınan problemler genellikle çok katlı kompozit malzemeden yapılmış şerit-plak veya dairesel plaklar için yapılmıştır. Bu problemlerin formülasyonu ve çözümünde, iki boyutlu problem formülasyonu yeterli olmaktadır. Açıktır ki, iki boyutlu problem formülasyonu ile temsil edilebilecek problem sayısı çok kısıtlı olup, bu modelleme çerçevesinde elde edilecek sayısal sonuçlar ancak özel durumlar (örneğin, düzlem şekil değiştirme veya düzlem gerilme durumları) için geçerlidir.

Dikdörtgen kalın plaklar için LEÜBST çerçevesinde kısıtlı sayıda çalışma bulunmaktadır. Çünkü bu problemlerin incelenmesi üç boyutlu problem formülasyonunu ve çözüm tekniklerini gerektirmektedir. Bu problemlerin incelenmesi teknik ve mühendisliğin gerektirdiği daha gerçekçi yaklaşım ve çözümler elde edilmesi açısından gereklidir. Bu nedenle tez kapsamında, literatürdeki bu boşluğun doldurulması, LEÜBST'nin bazı açılardan geliştirilmesi ve örnek problemlerde uygulanması öngörülmektedir.

Tez çerçevesinde ele alınan problemler; üç boyutlu, parçalı homojen, lineer viskoelastik cisim için, doğrusal olmayan kesin alan denklemleri çerçevesinde modellenmiş bir sınır değer problemini temsil etmektedir. Ele alınan üç tabakadan oluşan sandviç plağın dış tabaka malzemesinin bünye denklemleri zamana bağlı olduğundan problemin matematiksel modelinde bu parçalara ait yönetici denklemler, doğrusal olmayan üç adet değişken katsayılı integro-diferansiyel denklemden oluşan denklem takımıdır. Orta tabakanın malzemesi elastik kabul edildiğinden bu tabakaya ait yönetici denklemler, doğrusal olmayan üç adet kısmi türevli diferansiyel denklemden oluşan denklem takımını temsil eder. Ayrıca tabakalar arasında temas-süreklilik koşulları sağlanmaktadır. Dolayısıyla üç tabakadan oluşan lineer viskoelastik malzemeye ait yönetici denklem takımı; doğrusal olmayan altı adet değişken katsayılı integro-diferansiyel denklem, üç adet kısmi türevli diferansiyel denklem ve ara yüzeylerde yazılmış temas koşullarından oluşan bir denklem takımıdır. Bu denklem takımının verilen sınır koşulları çerçevesinde çözümü için sınır tipli pertürbasyon tekniği, Laplace dönüşümü, üç boyutlu sonlu elemanlar yöntemi ve ters Laplace dönüşümü için Shapery yöntemi kullanılmıştır. Belirtelim ki; modellenen sınır değer problemi doğrusal olmadığından, öncelikle çözüm için aranan büyüklükler çatlak yüzeylerinin başlangıç eğintisinin derecesini gösteren küçük parametreye göre seri formda temsil edilir. Bu ifadeler alan denklemlerinde ve sınır koşullarında yerine yazılır ve küçük parametrenin derecesine göre gruplaştırılırsa, küçük parametrenin her bir derecesine göre kapalı denklem takımını (seri-sınır değer problemleri) elde edilir. Elde edilen her bir seri-sınır değer problemi, küçük parametrenin derecesine göre;

sıfırncı, birinci vb. dereceden yaklaşım (sınır değer problemi) olarak isimlendirilir. Belirtilen seri-sınır değer problemlerinden sadece sıfırncı ve birinci yaklaşıma ait sınır değer problemlerinin çözümlünden, delaminasyon burkulmasına ait kritik parametre değerleri elde edilmiştir. Her bir yaklaşım için ortaya çıkan sınır değer problemi, yer değiştirme esaslı sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla sayısal olarak çözülmüştür. Çözüm bölgesinin ayrıklaştırılmasında sekiz nodlu standart dikdörtgen prizmatik sonlu elemanlar kullanılmıştır. Çatlak içeren viskoelastik kalın plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik parametre değerleri, “başlangıç eğinti kriteri (Hoff, 1954)” yardımıyla belirlenmiştir. Tez çerçevesinde ele alınan problemlerin çözümünün gerektirdiği bütün algoritma ve programlar tarafımızdan yapılmıştır.

2. LİNEERİZE EDİLMİŞ ÜÇ BOYUTLU STABİLİTE TEORİSİ

2.1 Giriş

Bir çok durumda kompozit malzemelerden yapılmış yapı elemanlarının stabilite problemlerinin incelenmesi Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Stabilite Teorisi (LEÜBST) denklemlerinin uygulanmasını gerektirmektedir. LEÜBST denklem ve bağıntıları, şekil değiştiren katı cisimler mekaniğinin lineer olmayan kesin denklemlerinin lineerize edilmesi yolu ile elde edilir. Bu işlemlerin ayrıntılı açıklaması Biot (1934, 1939, 1965); Guz (1972, 1999) kaynaklarında verilmektedir. Bazı araştırmacılar, örneğin Southwell (1913); Biezeno ve Hencky (1929) LEÜBST teorisi yerine "Genel Stabilite Teorisi" adını kullanmışlardır.

Tarihsel gelişimi açısından, LEÜBST denklemleri ilk kez Southwell (1913) tarafından, stabilite kaybı öncesi gerilmelerin homojen olması durumu için fiziksel yorumlama yardımıyla elde edilmiştir. Daha sonraları Biezeno ve Hencky (1929) aynı fiziksel yaklaşımı uygulayarak, bu denklemleri stabilite kaybı öncesi gerilmelerin homojen olmadığı durumlar için geliştirmişlerdir. LEÜBST denklemlerinin, nonlinear Elastisite Teorisinin kesin denklemlerinin lineerize edilmesi yolu ile belirlenmesi Biot (1934, 1939) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalarda stabilite kaybı öncesi şekil değiştirmelerin küçük olması hali ele alınmış ve şekil değiştirmeden önce kartezyen koordinatlarla çakışan Lagrange koordinatları kullanılmıştır. Bundan başka Biot (1965); Guz (1972, 1999) ve diğerlerinin araştırmaları ile LEÜBST'nin geliştirilmesine çok önemli katkılar yapılmış ve bu teori çerçevesinde çok sayıda somut problem incelenmiştir. Bu incelemelerin özeti Guz (1999); Bazant (1971); Babich ve Guz (1983) vb. kaynaklarında verilmektedir. Bu kaynakların incelenmesinden görüldüğü gibi, LEÜBST teorisi sadece mekanik özellikleri zamandan bağımsız olan kompozit malzemelerden yapılmış yapı elemanları için uygulanabilmiştir. Bu uygulamalar ve araştırmalar Euler-Bifurcation yaklaşımı açısından yapılmıştır. Bilindiği üzere; Euler yaklaşımının, mekanik özellikleri zamana bağlı olan malzemelerden yapılmış yapı elemanlarının stabilite kaybının incelenmesine uygulanması mümkün olamamaktadır. Bu nedenle Guz (1999) tarafından, bu tür problemlerin incelenmesi için dinamik araştırma yöntemi teklif edilmiştir. Ancak bu yöntemin LEÜBST denklemleri çerçevesinde uygulanmasında başka engeller ortaya çıkmaktadır. Örneğin bu durumda LEÜBST denklemlerindeki katsayıların zamana bağlı olması ve birçok durumda belirtilen işlemlerin yapılmasının olanaksız olması gibi sorunlarla karşılaşmaktadır. Bundan başka, Guz (1999)'da söz konusu olan stabilite problemlerinin incelenmesi için Kritik Deformasyon

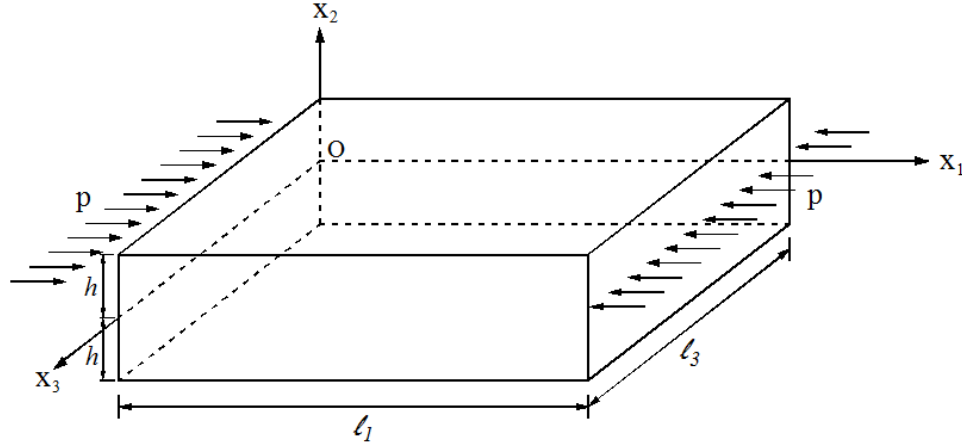
Yönteminin uygulanması önerilmektedir. Bu yöntemle göre, viskoelastik ve uygun elastik problemlerin kritik şekil değiştirmelerinin eşit olduğu varsayılarak bu eşitlikten, malzemenin bünye denklemi yardımıyla kritik zaman değerleri elde edilir. Açıktır ki, kritik deformasyon yöntemi, çok kaba bir yaklaşım olmakla birlikte sadece stabilite kaybı öncesi gerilmelerin homojen olduğu durumlar için uygulanabilmektedir.

Zamana bağlı malzemelerden yapılmış yapı elemanlarının stabilite kaybının incelenmesinde çoğunlukla Hoff (1954) yaklaşımı kullanılmaktadır. Bu yaklaşıma göre, ele alınan yapı elemanlarında başlangıçta ideal durumdan çok küçük sapmaların olduğu varsayılmaktadır ve stabilite kaybı kriteri olarak, bu sapmaların dış basınç yükleri altında zamana bağlı olarak büyümesi ve sonsuza gitmesi durumu kabul edilmektedir. Hoff yaklaşımının LEÜBST çerçevesinde geliştirilmesi Akbarov vd. (1997) makalesinde verilmiştir ve bu makalede tek yönlü viskoelastik kompozitlerin basınç altında kırılmasının incelenebilmesi için LEÜBST çerçevesinde bir yöntem teklif edilmiştir. Teklif edilen bu yöntem ile, Akbarov (1998); Akbarov ve Yahnioglu (1999); Yahnioglu (2000); Yahnioglu ve Kutug (2000); Akbarov ve Yahnioglu (2001); Akbarov vd. (2001); Yahnioglu ve Akbarov (2002) çalışmalarında, mekanik özellikleri zamana bağlı malzemedeki yapılmış bazı yapı elemanlarının stabilite problemleri çözülmüştür. Ayrıca çatlak içeren elastik veya viskoelastik malzemedeki yapılmış eksenel simetrik dairesel plakların burkulmasına ait bazı problemler, Akbarov ve Rzayev (2001, 2002a, 2002b, 2003); Rzayev ve Akbarov (2002); Yahnioglu ve Akbarov (2002); Kutug vd. (2003); Akbarov vd. (2007) çalışmalarında verilmiştir. Bant veya kenar çatlak içeren, elastik veya viskoelastik dikdörtgen plakların delaminasyon burkulması problemlerinin LEÜBST çerçevesinde üç boyutlu modellenmesi ve çözümleri Akbarov, Yahnioglu ve Tekin (2010a,b); Akbarov ve Yahnioglu (2010); Akbarov, Yahnioglu ve Karatas (2009, 2010a,b,c) çalışmalarında yapılmıştır. Tez çerçevesinde, çatlak içeren elastik ve viskoelastik sandviç dikdörtgen plakların delaminasyon burkulmasına ait bazı üç boyutlu problemler ele alınmış ve kritik parametrelerin belirlenmesinde Akbarov ve öğrencileri tarafından LEÜBST çerçevesinde geliştirilen Hoff yaklaşımı (1954) kullanılmıştır.

2.2 Burkulma Probleminin Formülasyonu ve Temel Alan Denklemleri

Bu alt bölümde, tez çerçevesinde çözümleri öngörülen problemlerin matematiksel modellenmesinde kullanılan LEÜBST denklemleri, karşılıklı iki kenarından basınç kuvveti etkisinde ve bütün yanal yüzlerinden basit mesnetle tutturulmuş viskoelastik dikdörtgen plağın burkulma problemi için elde edilmektedir. Tezde yer alan diğer bütün sınır değer

problemlerine ait matematiksel modeller, burada verilecek işlemlerin uygun şekilde tekrarlanması ile kolayca elde edilebilmektedir.



Şekil 2.1 Ele alınan dikdörtgen plak ve yükleme durumu

Ele alınan problemin matematiksel modellemesinde, yüklemeye önceki durumda Kartezyen koordinatlar ile çakışan Lagrange koordinatları kullanılmaktadır. Öncelikle, ele alınan viskoelastik kalın plağın $\Omega = \{0 \leq x_1 \leq l_1, -h \leq x_2 \leq +h, 0 \leq x_3 \leq l_3\}$ bölgesini kapsadığı (Şekil 2.1) ve başlangıçta çok küçük bir ön eğintiye sahip olduğu varsayılmaktadır. Plağın orta yüzeyine, doğal durumda Kartezyen koordinatlarla çakışan $Ox_1x_2x_3$ Lagrange koordinatları yerleştirilmiştir. Plağın üst ve alt serbest yüzeyleri, sırasıyla S^+ ve S^- ile temsil edilmektedir. Başlangıç durumunda (yüklemeye önce) kalın plağın küçük bir ön eğintiye sahip olduğu kabul edildiğinden, plağın orta yüzeyinin denklemi

$$x_2 = F(x_1, x_3) = \varepsilon f(x_1, x_3) \quad (2.1)$$

ile verilmektedir. Burada ε plağın başlangıç sapmasının mertebelerini gösteren çok küçük boyutsuz bir parametre olup $0 \leq \varepsilon \ll 1$ eşitsizliğini sağlamakta, $f(x_1, x_3)$ fonksiyonu ise bu ön eğintinin formunu göstermektedir. Ele alınan dikdörtgen plağın bütün yanal yüzlerinden ($x_1 = 0; l_1, x_3 = 0; l_3$) basit mesnetle tuturulduğu kabul edildiğinden, başlangıç sapmayı belirten (2.1) fonksiyonu keyfi olamaz ve aşağıdaki koşulları sağlamak zorundadır:

$$f(x_1, x_3)|_{x_1=0; l_1} = 0, \quad \frac{\partial f(x_1, x_3)}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0; l_1} = 0,$$

$$f(x_1, x_3) \Big|_{x_3=0; \ell_3} = 0, \quad \frac{\partial f(x_1, x_3)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0; \ell_3} = 0, \quad (2.2)$$

$$\varepsilon^2 \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 \right) \ll 1; \quad x_1 \in (0, \ell_1), \quad x_3 \in (0, \ell_3). \quad (2.3)$$

Başlangıç durumunda, plak kalınlığının sabit ve $2h$ 'ye eşit olduğu kabul edilmektedir. Matematiksel modellemede, geometrik doğrusal olmayan kesin alan denklemlerinden yararlanılmıştır. Alan denklemleri, küçük şekil değiştirme durumlarında (gerilmelerin hesaplanmasında şekil değiştirmeden önceki ve şekil değiştirmeden sonraki alan ve hacim farklarının ihmal edilebilecek kadar küçük olduğu durumlarda) geçerli olmaktadır. Buna göre geometrik nonlineer durumda; alan denklemleri, bünye denklemleri ve kinematik denklemler aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{jn} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right) \right] = 0, \quad \sigma_{ij} = C_{ijrs(0)} \varepsilon_{rs}(t) + \int_0^t C_{ijrs}(t-\tau) \varepsilon_{rs}(\tau) d\tau, \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \right), \quad i, j, n = 1, 2, 3. \quad (2.4)$$

(2.4) eşitliğinde; σ_{ij} Cauchy gerilme tansörü bileşenleri, ε_{ij} maddesel genleme tansörü bileşenleri, u_i ise yer değiştirme vektörü bileşenleridir. Ayrıca, t ve τ zamanı göstermektedir. $C_{ijrs(0)}$ anizotrop ortamlar için mekanik sabitlerin başlangıçtaki ($t=0$ anındaki) değerlerini, $C_{ijrs}(t)$ fonksiyonları ise, viskoelastik anizotrop ortamların gevşemesini belirten integral operatörlerin çekirdeklerini göstermektedir.

(2.4) denkleminin Ω alanında sağlanmaktadır. Bölgenin üst ve alt serbest yüzeylerinde (S^+ ve S^- yüzeylerinde) sağlanması gereken sınır koşulları,

$$\left[\sigma_{jn} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right) \right]_{S^\pm} n_j^\pm = 0 \quad (2.5)$$

olur. Burada n_j^\pm , sırasıyla S^+ ve S^- yüzeylerinin birim dış normalinin bileşenleridir. Ele alınan kalın plağın, bütün yanal yüzlerinden basit mesnetle tutturulduğu ve Ox_1 yönünde $x_1 = 0$ ve $x_1 = \ell_1$ yüzlerinden Şekil 2.1'de gösterildiği gibi p düzgün yayılı basınç yükü ile

yüklendiği kabul edildiğine göre, yanal yüzlerindeki sınır koşulları aşağıdaki gibi verilebilir:

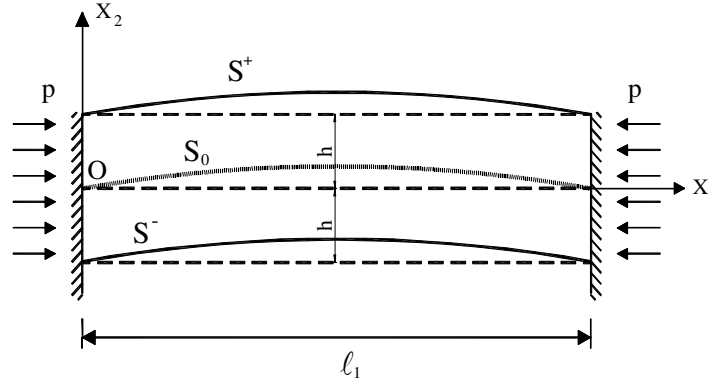
$$u_2(0, x_2, x_3) = u_2(\ell_1, x_2, x_3) = 0,$$

$$\left[\sigma_{jn} \left(\delta_1^n + \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \right) \right] n_j \Big|_{x_1=0; \ell_1} = p, \quad \left[\sigma_{jn} \left(\delta_3^n + \frac{\partial u_3}{\partial x_n} \right) \right] n_j \Big|_{x_1=0; \ell_1} = 0,$$

$$u_2(x_1, x_2, 0) = u_2(x_1, x_2, \ell_3) = 0,$$

$$\left[\sigma_{jn} \left(\delta_1^n + \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \right) \right] n_j \Big|_{x_3=0; \ell_3} = 0, \quad \left[\sigma_{jn} \left(\delta_3^n + \frac{\partial u_3}{\partial x_n} \right) \right] n_j \Big|_{x_3=0; \ell_3} = 0. \quad (2.6)$$

Yukarıdaki verilenler çerçevesinde çözümü öngörülen problem, dış basınç kuvveti p sabit olarak verildiğinde, ele alınan plaktaki ön eğintinin (başlangıç sapmasının) zamana göre değişiminin (2.1)-(2.6) formülasyonu çerçevesinde incelemesi olarak verilebilir. Bu durumda, plaktaki söz konusu ön sapmanın zaman parametresi arttıkça büyümesi, dolayısıyla sonsuza yaklaşması, plağın stabilite kaybı olarak kabul edilir ve bu duruma karşı gelen zaman değeri “kritik zaman” olarak belirlenir (Hoff, 1954).



Şekil 2.2 $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde dikdörtgen plağın ön eğintisi ve geometrik büyüklükler

(2.1) denklemleri yardımıyla, orta yüzey eğrisinin parametrik denklemleri,

$$x_1 = s_1, \quad x_3 = s_3, \quad x_2 = F(s_1, s_3) = \mathcal{E}f(s_1, s_3), \quad s_1 \in [0, \ell_1], \quad s_3 \in [0, \ell_3] \quad (2.7)$$

olur. Orta yüzey üzerinde seçilen keyfi bir $(s_1, F(s_1, s_3), s_3)$ noktasından çizilen ve birbirlerine dik iki teğetin eğimleri

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{\partial x_2}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial s_3} \frac{\partial s_3}{\partial x_1} = \frac{\partial x_2}{\partial s_1},$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_3} = \frac{\partial x_2}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial x_3} + \frac{\partial x_2}{\partial s_3} \frac{\partial s_3}{\partial x_3} = \frac{\partial x_2}{\partial s_3} \quad (2.8)$$

olur. Bu eğimler yardımıyla orta yüzey üzerindeki $(s_1, F(s_1, s_3), s_3)$ noktası ile üst (veya alt) yüzey üzerinde seçilen (x_1^+, x_2^+, x_3^+) (veya (x_1^-, x_2^-, x_3^-)) noktasından geçen doğruların denklemi yazılabilir. Aynı zamanda plak kalınlığının sabit olduğu göz önünde bulundurulursa, seçilen noktalar arasındaki mesafe yardımıyla ilave bir denklem daha yazılabilir. Bu denklemler:

$$(x_1^\pm - s_1) = \frac{\partial F(s_1, s_3)}{\partial s_1} (x_2^\pm - F(s_1, s_3)),$$

$$(x_3^\pm - s_3) = \frac{\partial F(s_1, s_3)}{\partial s_3} (x_2^\pm - F(s_1, s_3)),$$

$$(x_1^\pm - s_1)^2 + (x_3^\pm - s_3)^2 + (x_2^\pm - F(s_1, s_3))^2 = h^2 \quad (2.9)$$

olur. Bu üç denklemden

$$x_1^\pm = s_1 \mp \frac{h}{V(s_1, s_3)} \frac{\epsilon \partial f(s_1, s_3)}{\partial s_1}, \quad x_2^\pm = \epsilon f(s_1, s_3) \pm \frac{h}{V(s_1, s_3)}, \quad x_3^\pm = s_3 \mp \frac{h}{V(s_1, s_3)} \frac{\epsilon \partial f(s_1, s_3)}{\partial s_3},$$

$$V(s_1, s_3) = \left[1 + \left(\frac{\epsilon \partial f}{\partial s_1} \right)^2 + \left(\frac{\epsilon \partial f}{\partial s_3} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.10)$$

bulunabilir. Plağın üst veya alt yüzeylerinin birim normallerinin bileşenleri olan n_j^\pm 'lerin ifadeleri, yüzeyde alınan bir noktanın yer vektörü yardımıyla aşağıdaki biçimde verilebilir (Akbarov ve Guz, 2000):

$$\vec{r} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k} \quad \text{ve} \quad \vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial s_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial s_3}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial s_3} \right|} \quad \text{için,}$$

$$n_j^\pm = \frac{A_j^\pm(s_1, s_3)}{A^\pm(s_1, s_3)}. \quad (2.11)$$

Burada,

$$A_1^\pm(s_1, s_3) = \frac{\partial x_3^\pm}{\partial s_1} \frac{\partial x_2^\pm}{\partial s_3} - \frac{\partial x_2^\pm}{\partial s_1} \frac{\partial x_3^\pm}{\partial s_3},$$

$$A_2^\pm(s_1, s_3) = \frac{\partial x_1^\pm}{\partial s_1} \frac{\partial x_3^\pm}{\partial s_3} - \frac{\partial x_3^\pm}{\partial s_1} \frac{\partial x_1^\pm}{\partial s_3},$$

$$A_3^\pm(s_1, s_3) = \frac{\partial x_2^\pm}{\partial s_1} \frac{\partial x_1^\pm}{\partial s_3} - \frac{\partial x_1^\pm}{\partial s_1} \frac{\partial x_2^\pm}{\partial s_3},$$

$$A^\pm(s_1, s_3) = \left[\left(A_1^\pm(s_1, s_3) \right)^2 + \left(A_2^\pm(s_1, s_3) \right)^2 + \left(A_3^\pm(s_1, s_3) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

olur. (2.12)'de x_i^\pm ($i=1,2,3$)'ler, S^\pm yüzelerinin koordinatlarıdır. Benzer şekilde yan yüzlerdeki noktaların koordinatları için aşağıdaki denklemler elde edilebilir:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} = s_1 - \frac{s_2}{V(s_1, s_3)} \frac{\epsilon \partial f(s_1, s_3)}{\partial s_1} \Big|_{s_1=0}, \\ x_{21} = \epsilon f(s_1, s_3) \Big|_{s_1=0} + \frac{s_2}{V(s_1, s_3)} \Big|_{s_1=0}, \\ x_{31} = -\frac{s_2}{V(s_1, s_3)} \frac{\epsilon \partial f(s_1, s_3)}{\partial s_3} \Big|_{s_1=0}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{12} = s_1 - \frac{s_2}{V(s_1, s_3)} \frac{\epsilon \partial f(s_1, s_3)}{\partial s_1} \Big|_{s_1=\ell_1}, \\ x_{22} = \epsilon f(s_1, s_3) \Big|_{s_1=\ell_1} + \frac{s_2}{V(s_1, s_3)} \Big|_{s_1=\ell_1}, \\ x_{32} = -\frac{s_2}{V(s_1, s_3)} \frac{\epsilon \partial f(s_1, s_3)}{\partial s_3} \Big|_{s_1=\ell_1}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{13} = -\frac{s_2}{V(s_1, s_3)} \frac{\epsilon \partial f(s_1, s_3)}{\partial s_1} \Big|_{s_3=0}, \\ x_{23} = \epsilon f(s_1, s_3) \Big|_{s_3=0} + \frac{s_2}{V(s_1, s_3)} \Big|_{s_3=0}, \\ x_{33} = s_3 - \frac{s_2}{V(s_1, s_3)} \frac{\epsilon \partial f(s_1, s_3)}{\partial s_3} \Big|_{s_3=0}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{14} = -\frac{s_2}{V(s_1, s_3)} \frac{\epsilon \partial f(s_1, s_3)}{\partial s_1} \Big|_{s_3=\ell_3}, \\ x_{24} = \epsilon f(s_1, s_3) \Big|_{s_3=\ell_3} + \frac{s_2}{V(s_1, s_3)} \Big|_{s_3=\ell_3}, \\ x_{34} = s_3 - \frac{s_2}{V(s_1, s_3)} \frac{\epsilon \partial f(s_1, s_3)}{\partial s_3} \Big|_{s_3=\ell_3}. \end{array} \right.$$

(2.13)

(2.13)'de, x_{i1} , x_{i2} , x_{i3} ve x_{i4} , sırasıyla $x_1=0$, $x_1=\ell_1$, $x_3=0$ ve $x_3=\ell_3$ yüzlerinin koordinatlarıdır ve s_2 ($-h \leq s_2 \leq +h$) parametredir.

Yukarıdaki işlemlerden sonra, plakta oluşan gerilme-şekil değiştirme durumuna karşı gelen büyüklükler, ε parametresinin kuvvet serisi olarak,

$$\{\sigma_{ij}; \varepsilon_{ij}; u_i\} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \{\sigma_{ij}^{(n)}; \varepsilon_{ij}^{(n)}; u_i^{(n)}\} \quad (2.14)$$

şeklinde temsil edilebilir. (2.11) ve (2.13) ifadeleri göz önüne alınır ve (2.14) ifadesindeki her bir yaklaşıma ait büyüklükler serbest yüzler için $(s_1, \pm h, s_3)$ (yanal yüzler için $(0, s_2, s_3)$ ile (ℓ_1, s_2, s_3) ve $(s_1, s_2, 0)$ ile (s_1, s_2, ℓ_3)) civarında Taylor serisine açılır ve düzenlenirse, (2.5) serbest yüzlerdeki sınır koşulları ((2.6) yan yüzlerdeki sınır koşulları) her bir yaklaşım için elde edilebilir. Bu durumda her bir n. yaklaşım için elde edilen serbest ve yan yüzlerdeki sınır koşullarına, önceki tüm yaklaşımlara ait büyüklükler dahil olmaktadır. Belirtelim ki, bu işlemlerin bütünü, sınır formu pertürbasyonu yönteminin esasını oluşturmaktadır. Daha sonra (2.14) serisi (2.4) denklemlerinde uygulanır ve aynı mertebeden olan ε^n 'lerin katsayıları sıfıra eşitlenirse, her bir yaklaşım için uygun kapalı denklemler takımı elde edilir. Bu durumda bünye denklemleri lineer olduğundan, her bir n. yaklaşım bu denklemleri ayrı ayrı sağlayacaktır. (2.4)'deki geometrik ilişkiler ve alan denklemlerinin (2.14) yardımıyla düzenlenmesi ve ε^n 'nin kuvvetlerine göre gruplaştırılması sonucunda, n. yaklaşım için elde edilen her bir denkleme kendisinden önceki yaklaşımlara ait büyüklükler de katılacaktır. Böylece ele alınan sınır değer problemine ait seri-sınır değer problemleri için denklemler ve sınır koşulları elde edilir. Elde edilen seri-sınır değer problemlerinden (yaklaşımlardan) bazıları aşağıda verilmektedir:

Sıfırıncı Yaklaşım

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{jn}^{(0)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_n} \right) \right] = 0, \quad \sigma_{ij}^{(0)} = C_{ijrs(0)} \varepsilon_{rs}^{(0)}(t) + \int_0^t C_{ijrs}(t-\tau) \varepsilon_{rs}^{(0)}(\tau) d\tau,$$

$$\varepsilon_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_i} \frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_j} \right), \quad i, j, n = 1, 2, 3 \quad (2.15)$$

$$\left[\sigma_{jn}^{(0)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_n} \right) \right] n_j \Big|_{x_2=\pm h} = 0, \quad (2.16)$$

$$u_2^{(0)}(0, x_2, x_3) = u_2^{(0)}(\ell_1, x_2, x_3) = 0,$$

$$\left[\sigma_{1n}^{(0)} \left(\delta_1^n + \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_n} \right) \right]_{x_1=0; \ell_1} = p, \quad \left[\sigma_{1n}^{(0)} \left(\delta_3^n + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_n} \right) \right]_{x_1=0; \ell_1} = 0,$$

$$u_2^{(0)}(x_1, x_2, 0) = u_2^{(0)}(x_1, x_2, \ell_3) = 0,$$

$$\left[\sigma_{3n}^{(0)} \left(\delta_1^n + \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_n} \right) \right]_{x_3=0; \ell_3} = 0, \quad \left[\sigma_{3n}^{(0)} \left(\delta_3^n + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_n} \right) \right]_{x_3=0; \ell_3} = 0. \quad (2.17)$$

Burada; sıfırncı yaklaşım için verilen (2.15), (2.16) ve (2.17), sırasıyla (2.4), (2.5) ve (2.6) denklem ve sınır koşullarından elde edilmiştir.

Birinci Yaklaşım

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}^{(1)} = 0, \quad T_{ij}^{(1)} = \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_i} \right) \sigma_{jn}^{(1)} + \sigma_{jn}^{(0)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_n},$$

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_n^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \left(\delta_j^n + \frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u_n^{(1)}}{\partial x_i},$$

$$\sigma_{ij}^{(1)} = C_{ijrs(0)} \varepsilon_{rs}^{(1)}(t) + \int_0^t C_{ijrs} (t - \tau) \varepsilon_{rs}^{(1)}(\tau) d\tau, \quad (2.18)$$

$$T_{i2}^{(1)} \Big|_{(x_1, \pm h, x_3)} = \frac{\partial f(x_1, x_3)}{\partial x_1} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_i} \right) \sigma_{1n}^{(0)} \Big|_{(x_1, \pm h, x_3)} + \frac{\partial f(x_1, x_3)}{\partial x_3} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_n} \right) \sigma_{3n}^{(0)} \Big|_{(x_1, \pm h, x_3)}, \quad (2.19)$$

$$u_2^{(1)} \Big|_{x_1=0, \ell_1} = 0, \quad u_2^{(1)} \Big|_{x_3=0, \ell_3} = 0, \quad T_{11}^{(1)} \Big|_{x_1=0, \ell_1} = 0, \quad T_{33}^{(1)} \Big|_{x_3=0, \ell_3} = 0. \quad (2.20)$$

Burada; birinci yaklaşım için verilen (2.18), (2.19) ve (2.20), sırasıyla (2.4), (2.5) ve (2.6) denklem ve sınır koşullarından elde edilmiştir.

(2.15)-(2.17)'den görüldüğü gibi, sıfırncı yaklaşım için elde edilen sınır değer problemi, nonlinear sınır değer problemidir. Birinci yaklaşım için elde edilen (2.18)-(2.20) sınır değer problemi ise, lineer bir problemidir. Birinci yaklaşıma ait sınır değer problemine çoğu zaman lineerize edilmiş problem denir. Daha sonraki yaklaşımlara ait olan denklem ve sınır koşulları genel olarak aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}^{(q)} = \Psi_{iq} \left(T_{ij}^{(1)}, \dots, T_{ij}^{(q-1)} \right), \quad T_{ij}^{(q)} = \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_i} \right) \sigma_{jn}^{(q)} + \sigma_{jn}^{(0)} \frac{\partial u_i^{(q)}}{\partial x_n},$$

$$\varepsilon_{ij}^{(q)} = \frac{1}{2} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_n^{(q)}}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \left(\delta_j^n + \frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u_n^{(q)}}{\partial x_i} + \sum_{r=1}^{q-1} \frac{\partial u_n^{(q-r)}}{\partial x_i} \frac{\partial u_n^{(r)}}{\partial x_j},$$

$$\sigma_{ij}^{(q)} = C_{ijrs(0)} \varepsilon_{rs}^{(q)}(t) + \int_0^t C_{ijrs}(t-\tau) \varepsilon_{rs}^{(q)}(\tau) d\tau, \quad (2.21)$$

$$T_{i2}^{(q)} \Big|_{(x_1, \pm h, x_3)} = \Phi_{1q} \left(T_{ij}^{(1)}, \dots, T_{ij}^{(q-1)}, \sigma_{ij}^{(0)}, u_i^{(0)}, f \right) \Big|_{(x_1, \pm h, x_3)}, \quad (2.22)$$

$$u_2^{(n)} \Big|_{x_1=0, \ell_1} = 0, \quad T_{11}^{(q)} \Big|_{x_1=0, \ell_1} = 0, \quad u_2^{(q)} \Big|_{x_3=0, \ell_3} = 0, \quad T_{33}^{(q)} \Big|_{x_3=0, \ell_3} = 0. \quad (2.23)$$

Burada; (2.21), (2.22) ve (2.23) denklemleri, sırasıyla (2.4), (2.5) ve (2.6)'dan elde edilmektedir. (2.21), (2.22) ve (2.23)'e dahil olan Ψ_{1q} ve Φ_{1q} fonksiyonlarının ifadeleri çok uzun olduğundan burada verilmemiştir. Ancak, bu ifadelerin her bir yaklaşım için elde edilme yöntemi yukarıda açıklanmıştır ve uygun işlemler neticesinde kolaylıkla elde edilebilir. Böylece, (2.14)'teki her bir yaklaşımın belirlenmesi için uygun denklemler takımı ve sınır koşulları elde edilir. Bundan başka, (2.21)-(2.22)'den görüldüğü gibi, ikinci ve daha sonraki yaklaşımlar için elde edilen denklem ve sınır koşullarının sol tarafları (bilinmeyenleri içeren kısmı), birinci yaklaşım için elde edilen uygun denklem ve sınır koşullarının sol tarafları ile çakışmaktadır.

Tez'de ele alınan problemler, nispeten katı viskoelastik kompozit malzemelerden oluşan yapı elemanlarına uygulanmaktadır. Bu durumlarda sıfırıncı yaklaşıma ait denklem ve sınır koşullarına dahil olan nonlinear terimler küçük olduğundan ihmal edilebilir. Böylece sıfırıncı yaklaşım, aşağıdaki lineer sınır değer problemi ile yer değiştirmektedir:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}^{(0)}}{\partial x_j} = 0, \quad \varepsilon_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i} \right), \quad i, j, n = 1, 2, 3 \quad (2.24)$$

$$\sigma_{2i}^{(0)} \Big|_{x_2=\pm h} = 0, \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} u_2^{(0)}(0, x_2, x_3) = u_2^{(0)}(\ell_1, x_2, x_3) = 0, \quad \sigma_{11}^{(0)} \Big|_{x_1=0; \ell_1} = p, \quad \sigma_{13}^{(0)} \Big|_{x_1=0; \ell_1} = 0, \\ u_2^{(0)}(x_1, x_2, 0) = u_2^{(0)}(x_1, x_2, \ell_3) = 0, \quad \sigma_{31}^{(0)} \Big|_{x_3=0; \ell_3} = 0, \quad \sigma_{33}^{(0)} \Big|_{x_3=0; \ell_3} = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

(2.15)-(2.17) nonlinear probleminin, (2.24)-(2.26) problemi ile yer değiştirmesi prensip açıdan önem taşımamaktadır. Gerektiği durumda doğrudan (2.15)-(2.17) nonlinear

probleminin incelenmesinden de başlamak mümkündür. Genelde stabilite problemlerinde adı geçen sıfırcı yaklaşımındaki gerilme durumu, plak-kiriş, dikdörtgen plak, prizmatik çubuklar vb. gibi yapı elemanlarının kenarlarından düzgün yayılı normal basınç yükü altında oluşan gerilme durumuna karşı gelmektedir. Bu durumların belirlenmesinde yapı elemanlarının malzemesi nispeten rijid olduğu hallerde, geometrik lineer veya geometrik nonlineer denklemlerin uygulanması (bu yapı elemanında başlangıç sapmalar olmadığı hallerde) hemen hemen hiç bir sayısal fark göstermez. Bu nedenlerden dolayı (2.15)-(2.17) nonlineer probleminin (2.24)-(2.26) lineer problemiyle yer değiştirmesi, sonuçların yeterliliği açısından hiç bir kuşku yaratmaz. Böylece sıfırcı yaklaşımın elde edilmesinde, klasik lineer teorilerin uygulanabildiği hallerde $\partial u_i^{(0)}/\partial x_j \ll 1$ olduğundan birinci ve daha sonraki yaklaşımlara dahil olan $(\delta_i^n + \partial u_i^{(0)}/\partial x_n)$ için $(\delta_i^n + \partial u_i^{(0)}/\partial x_n) \approx \delta_i^n$ alınması mümkündür. Böylece birinci yaklaşım için elde edilen (2.18)-(2.20) ifadeleri, aşağıdaki uygun ifadelerle yer değiştirebilir:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{jn}^{(0)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_n} \right] = 0, \quad \varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i} \right), \quad (2.27)$$

$$\sigma_{i2}^{(1)} \Big|_{(x_2=\pm h)} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \sigma_{i1}^{(0)} \Big|_{(x_2=\pm h)} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \sigma_{i3}^{(0)} \Big|_{(x_2=\pm h)}, \quad (2.28)$$

$$u_2^{(1)} \Big|_{x_1=0, \ell_1} = 0,$$

$$\left(\sigma_{31}^{(1)} + \sigma_{31}^{(0)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_3} \right) \Big|_{x_1=0, \ell_1} = 0, \quad \left(\sigma_{33}^{(1)} + \sigma_{33}^{(0)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_3} \right) \Big|_{x_1=0, \ell_1} = 0,$$

$$u_2^{(1)} \Big|_{x_3=0, \ell_3} = 0,$$

$$\left(\sigma_{13}^{(1)} + \sigma_{13}^{(0)} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_3} \right) \Big|_{x_3=0, \ell_3} = 0, \quad \left(\sigma_{33}^{(1)} + \sigma_{33}^{(0)} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_3} \right) \Big|_{x_3=0, \ell_3} = 0. \quad (2.29)$$

Benzer şekilde, ikinci ve daha sonraki yaklaşımlara ait olan denklem ve sınır koşullarının sol tarafları (2.21)-(2.23)'ten yararlanılarak yazılabilir.

Genelliği bozmadan, ele alınan dikdörtgen plağın malzemesi, elastik simetri eksenleri Ox_1 , Ox_2 ve Ox_3 olan homojen, anizotrop ve lineer viskoelastik malzeme olduğu kabul edilsin. Bu durumda, bünye denklemleri aşağıdaki biçimde verilebilir:

$$\sigma_{ii}^{(q)} = A_{ij} \varepsilon_{jj}^{(q)}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\sigma_{12}^{(q)} = 2A_{66} \varepsilon_{12}^{(q)}, \quad \sigma_{13}^{(q)} = 2A_{55} \varepsilon_{13}^{(q)}, \quad \sigma_{23}^{(q)} = 2A_{44} \varepsilon_{23}^{(q)}, \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (2.30)$$

Burada A_{11}, \dots, A_{66} 'ler ele alınan malzemenin normalize edilmiş mekanik özellikleri olup, aşağıda verilen operatörler ile tanımlanır:

$$A_{ij} = A_{ij(0)} + \int_0^t A_{ij(1)}(t - \tau) d\tau, \quad ij = 11; 22; 33; 12; 13; 23; 44; 55; 66. \quad (2.31)$$

İzleyen alt bölümde yapılan araştırmalarda, sıfırncı yaklaşımın belirlenmesinde (2.24)-(2.26), (2.30), (2.31) ve birinci yaklaşımın belirlenmesinde ise (2.27)-(2.31) sınır değer problemlerinden yararlanılmaktadır.

2.3 Burkulma Probleminin LEÜBST Çerçevesinde Çözümü

Bu alt bölümde, bütün yanal yüzeylerinden basit mesnetle tutturulmuş, viskoelastik kompozit malzemeden yapılmış dikdörtgen plağın stabilite probleminin çözüm yöntemi verilmektedir. Ele alınan problemin matematiksel modelinin LEÜBST çerçevesinde çözümü, Bölüm 2.2'de seri-sınır değer problemlerinin çözümüne indirgenmiş ve her bir yaklaşımın matematiksel formülasyonu verilmiştir. Buna göre sıfırncı yaklaşımın matematiksel formülasyonu (2.24)-(2.26), (2.30), (2.31), birinci yaklaşımın matematiksel formülasyonu ise, (2.27)-(2.31) ile verilmektedir. Bu ifadeler, problemin LEÜBST çerçevesinde formülasyonuna karşı gelmektedir.

Her bir yaklaşımın denklem ve bağıntıları zaman parametresine bağlı olduğundan; çözüme geçmeden önce, zamana göre her bir yaklaşımdaki denklem ve ifadelerin Laplace dönüşümü alınır. $s > 0$ parametresine göre

$$\bar{\Phi}(s) = \int_0^{\infty} \Phi(t) e^{-st} dt \quad (2.32)$$

Laplace dönüşümü uygulanır. (2.32) ve Konvolüsyon teoremine göre bu dönüşüm sonucunda (2.30), (2.31) denklemleri aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\int_0^{\infty} A_{ij} \varepsilon_{jj} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} A_{ij(0)} \varepsilon_{jj} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} \left(\int_0^t A_{ij}(t - \tau) \varepsilon_{jj}(t - \tau) d\tau \right) e^{-st} dt =$$

$$= A_{ij(0)} \bar{\varepsilon}_{ij} + \bar{A}_{ij(1)} \bar{\varepsilon}_{ij} = (A_{ij(0)} + \bar{A}_{ij(1)}) \bar{\varepsilon}_{ij} = \bar{A}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij}. \quad (2.33)$$

(2.32) ve (2.33) her bir yaklaşımda göz önüne alınırsa, her bir seri-sınır değer problemi, uygun büyüklüklerin Laplace dönüşümlerine göre düzenlenmiş sınır değer problemi olarak elde edilir, $\{\sigma_{ij}^{(n)}, \varepsilon_{ij}^{(n)}, u_i^{(n)}; v_1, E_1\} \Rightarrow \{\bar{\sigma}_{ij}^{(n)}, \bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)}, \bar{u}_i^{(n)}; \bar{v}_1, \bar{E}_1\}$ olur. Bu düzenlenmiş denklem ve ifadelerin formu, daha önce verilen seri-sınır değer problemlerinin denklem ve ifadelerine benzerdir. Bu nedenle belirtilen sınır değer problemlerinin, büyüklüklerin Laplace dönüşümlerine göre elde edilmiş yeni formları verilmemiştir.

Ele alınan seri-sınır değer problemlerinden, uygun büyüklüklerin Laplace dönüşümlerine göre düzenlenmiş sıfırıncı yaklaşımın LEÜBST çerçevesinde çözümü, bir çok araştırmadan da görülebileceği üzere yüksek hassasiyetle,

$$\sigma_{ii}^{(0)} = p \delta_i^1, \quad \sigma_{ij}^{(0)} = \sigma_{ij}^{(0)}(x_1, x_2, x_3, t) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.34)$$

olarak kabul edilebilir. Akbarov vd. (1997) çalışmasından da görüldüğü üzere, dış basınç kuvveti p değeri zamana göre sabit tutulduğunda, $\sigma_{ij}^{(0)}$ gerilmelerinin yüksek hassasiyetle zamandan bağımsız olduğu kabulüne imkan sağlamaktadır. Açıklanan bu durum, birinci yaklaşıma Laplace dönüşümünün uygulanabilmesini sağlamaktadır (Akbarov, vd., 2001). Yukarıda verilenleri göz önüne alarak, birinci yaklaşıma karşı gelen (2.27)-(2.31) problemini ele alalım. Plağın başlangıç sapmasını belirleyen (2.1) fonksiyonunun

$$x_2 = F(x_1, x_3) = \varepsilon f(x_1, x_3) = \varepsilon \ell_1 \sin\left(\frac{\pi x_1}{\ell_1}\right) \sin\left(\frac{\pi x_3}{\ell_3}\right), \quad \varepsilon = \frac{A}{\ell_1} \quad (2.35)$$

olarak seçildiği kabul edilsin. (2.35)'de; A , plağın başlangıç sapmasının genliğini göstermektedir. Eğer $A \ll \ell_1$ olduğu kabul edilirse, $0 \leq \varepsilon \ll 1$ olur. (2.35) ve (2.27)-(2.31) ifadeleri göz önüne alınarak, aranan $\bar{u}_i^{(1)}(x_1, x_2, x_3, s)$, $i = 1, 2, 3$ yer değiştirmelerin Laplace dönüşüm fonksiyonlarının belirlenmesi için üç boyutlu sonlu elemanlar yöntemi uygulanmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla yer değiştirmelerin Laplace dönüşümleri belirlendikten sonra bu fonksiyonların ilkellerinin belirlenebilmesi için ters Laplace dönüşümü uygulanmıştır (Schapery, 1966).

Tez çerçevesinde ele alınan delaminasyon burkulma problemlerinde; elastik dikdörtgen sandviç plak için kritik dış basınç kuvvetinin, viskoelastik dikdörtgen sandviç plak için kritik zaman değerinin belirlenmesinde, alt bölüm 2.2'de verilen seri-sınır değer problemlerinden

sadece sıfırncı ve birinci yaklaşım kullanılmıştır. Çünkü, daha önce belirtildiği gibi, başlangıçta ele alınan nonlinear denklemler, uygulanan çözüm yöntemi gereğince lineerize edilmiş sınır değer problemleri serisinin çözümüne getirilmektedir. Birinci ve sonraki yaklaşımlara ait sınır değer problemlerinin matematiksel formülasyonundaki denklem ve ifadelerin bilinmeyenleri içeren kısımları (denklem ve ifadelerin sol tarafları) aynı, sadece sağ tarafları birbirlerinden farklıdır. Dolayısıyla LEÜBST denklemleri ve uygun ifadeleri ile çakışmaktadır. İkinci ve sonraki yaklaşımların çözümünde, sonlu eleman modellemesinde bilinmeyenlerin katsayılarını içeren \mathbf{K} rijidlik matrisi, birinci yaklaşımda elde edilen \mathbf{K} rijidlik matrisi ile çakışmaktadır. Birinci yaklaşımda elde edilen kritik parametre değerleri, $\det\|\mathbf{K}\|=0$ durumuna karşı geldiğinden ve daha sonraki yaklaşımlarda da \mathbf{K} matrisi değişmediğinden, sonraki yaklaşımların göz önüne alınması, kritik parametrelerin değerlerini değiştirmemektedir. Dolayısıyla, yapılan araştırmalarda sadece sıfırncı ve birinci yaklaşımların göz önüne alınması yeterli olmaktadır (Akbarov vd., 1997).

2.4 Schapery Yöntemi

Alt bölüm 2.3'de sıfırncı ve birinci yaklaşıma ait sınır değer problemlerinin çözümünde, uygun büyüklüklerin Laplace dönüşümleri belirlenmişti. Bu büyüklüklerin ters Laplace dönüşümü yardımıyla ilkellerinin belirlenmesi gerekmektedir. Bunun için Schapery yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntem, aranan büyüklüklerin Laplace dönüşümlerinin, dönüşüm parametresi s 'in bazı $s = s_n$ 'deki değerlerinden yararlanarak ilkellerinin bulunmasına dayanmaktadır. Örneğin, Ox_2 doğrultusundaki yer değiştirme $u_2^{(1)}$ 'nin, $\{x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0\}$ noktasındaki değerinin zamana bağlı olarak değişimi belirlenmek istensin. Bu amaçla ilk önce $\bar{u}_2^{(1)}(0,0,0,s)$ 'nin $s = s_n$ ($n = 1, 2, \dots, N$)'lerdeki değeri, sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla elde edilerek, $s\bar{u}_2^{(1)}(0,0,0,s)$ ile $\log s$ arasındaki bağıntının grafiği çizilir. Eğer bu grafik doğruya yakın bir form gösteriyorsa veya eğriliği çok küçükse, $u_2^{(1)}(0,0,0,t)$ değerleri

$$u_2^{(1)}(0,0,0,t) \approx s\bar{u}_2^{(1)}(0,0,0,s)\Big|_{s=1/(2t)} \quad (2.36)$$

formülünden elde edilmektedir (Akbarov vd., 2000; Akbarov ve Guz, 2000). Eğer bu koşul sağlanmazsa (2.36) ifadesi geçersiz olur ve bu durumda $u_2^{(1)}(0,0,0,t)$ 'in belirlenmesi için şu işlemler yapılır. İlk önce (2.33) denklemlerinde \bar{A}_{ij}^* operatörleri yerine, onların $t \rightarrow \infty$ daki değerleri yazılarak $u_2^{(1)}(0,0,0,t)$ 'lerin bu duruma karşı gelen değerleri (bunu $u_2^{(1)}(0,0,0)$ ile

gösterelim) belirlenir ve $u_2^{(1)}(0,0,0,t)$

$$u_3^{(1)}(0,0,0,t) = \delta' u_2^{(1)}(t) + u_{z_\infty}^{(1)}(0,0,0) \quad (2.37)$$

olarak ifade edilir. (2.37)'deki $\delta' u_2^{(1)}$ Dirichlet serisi biçiminde,

$$\delta' u_2^{(1)}(t) \cong \sum_{i=1}^N S_i e^{-\lambda_i t} \quad (2.38)$$

gösterilerek Kolakasyon yöntemi ile belirlenir. (2.38)'deki λ_i 'ler reel sayılar olarak seçilir, S_i 'ler ise bilinmeyen sabitler olarak kabul edilir. Bu bilinmeyenler

$$\sum_{j=1}^N \left(1 + \frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-1} S_j = s \left(\bar{u}_2^{(1)}(0,0,0,s) - u_{2_\infty}^{(1)}(0,0,0) \right) \Big|_{s=\lambda_i} \quad (2.39)$$

denkleminde bulunur. Bu denklemler

$$Q = \int_0^\infty \left(\delta' u_2^{(1)}(t) - \sum_{i=1}^N \left(1 + \frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-1} S_i \right)^2 dt \quad (2.40)$$

fonksiyonelden S_i 'lere göre minimizasyon yapılarak elde edilir. Buradaki λ_i değerleri $s \bar{u}_2^{(1)}(0,0,0,s) - \log s$ grafiğinden seçilir. Çoğu zaman λ_i değerleri birbirinden eşit aralıklarla yerleşmiş s 'in değerleri şeklinde seçilir ve elde edilen sonuçların hassasiyeti (2.38)-(2.40)'daki N 'nin büyütülmesi ile artırılır. Tez çerçevesinde $s = s_n$ değerlerinin seçiminde $s \sim 1/t$ ilişkisi kullanılmıştır.

3. BANT ÇATLAK İÇEREN ELASTİK VE VİSKOELASTİK SANDVIÇ KALIN PLAĞIN DELAMİNASYONU

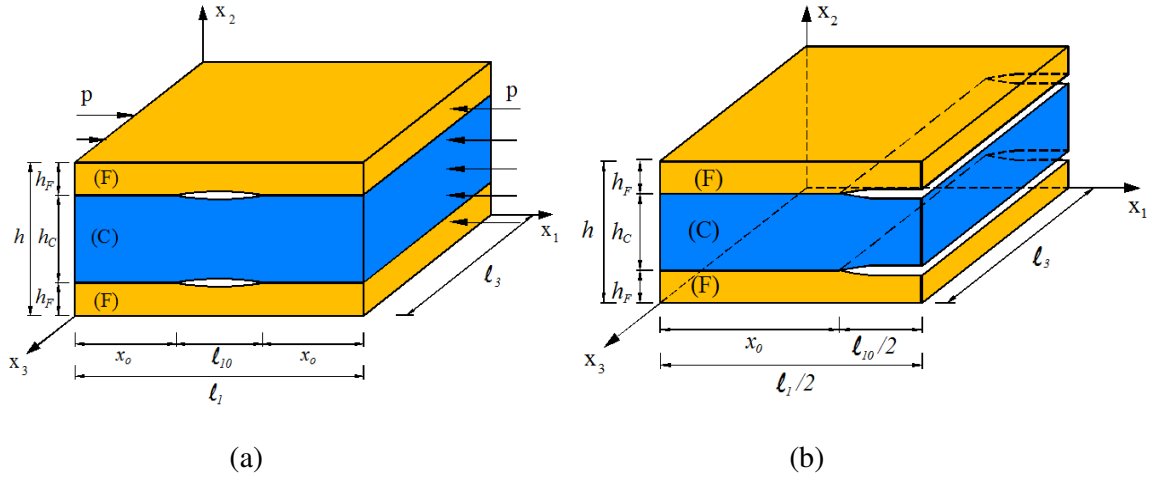
Bu bölümde ele alınan üç tabakadan oluşan sandviç kalın plağın $x_1 = 0; \ell_1$ ile $x_3 = 0; \ell_3$ kenarlarından basit mesnetle tutturulduğu, plağın tabakaları arasında birbirine eşit uzunlukta, birbirine paralel iki adet bant çatlak bulunduğ ve çatlakların yüzeylerinin başlangıçta (yükleme yapılmadan önce) çok küçük ön eğintiye sahip olduğu kabul edilmektedir. Her bir çatlak bölgesinin orta düzlemi $(x_1 - x_3)$ dikdörtgen şeklindedir. Ele alınan sandviç kalın plağın delaminasyon burkulma probleminin incelenmesi, çatlak yüzeylerinde olduğu kabul edilen bu çok küçük ön eğintilerin gelişiminin incelenmesine dönüştürülmektedir. Buna göre yapı elemanı malzemesi elastik seçilirse, çatlaklar doğrultusunda etkiyen dış basınç kuvveti nedeniyle, çatlak yüzeylerindeki küçük eğintilerin (veya çatlak yüzeylerindeki düşey yer değiştirmelerin) büyüyerek sonsuza gitmesi, burkulma kriteri olarak kabul edilmiştir. Eğer yapı elemanı malzemesi lineer viskoelastik seçilirse, bu durumda kritik parametre, sabit dış basınç kuvveti altında zamanın ilerlemesi ile belirtilen durumun gerçekleşmesinden belirlenmiştir. Belirtilen yaklaşım Hoff (1954) tarafından önerilen ‘başlangıç eğinti kriteri’ olarak bilinmektedir.

3.1 Problemin Matematiksel Modeli

Bu alt bölümde, dört kenarından basit mesnetle tutturulmuş, üç tabakadan oluşan ve tabakaları arasında birbirine paralel ve eşit uzunlukta iki makro-bant çatlak bulunan, çekirdek tabakası elastik ve dış tabakaları lineer viskoelastik olan sandviç kalın plağın, karşılıklı iki kenarından çatlaklar doğrultusunda etkiyen düzgün yayılı statik basınç yükü etkisinde delaminasyon burkulma problemine ait matematiksel model verilmektedir. Aynı problem, her üç tabakanın malzemesinin elastik olması durumunda da incelenmiştir. Yapı elemanı malzemesinin elastik olması durumunda ele alınan problemin matematiksel modeli, viskoelastik malzeme için verilen matematiksel modelin özel durumu olarak kolayca elde edilebildiğinden ayrıca verilmemiştir.

Ele alınan problemin matematiksel modeli, Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Stabilite Teorisi (LEÜBST) çerçevesinde yapılmıştır. Belirtilen teoremin denklem ve bağıntıları Bölüm 2’de özel bir durum için ayrıntılı olarak ele alınmış ve elde edilmiştir. Burada ele alınan problemlerin matematiksel modelinde, Bölüm 2’de verilen denklem ve bağıntılar uygun şekilde kullanılmaktadır.

Bant çatlaklar içeren sandviç kalın plağın yükleme durumu ve geometrik boyutları Şekil 3.1’de gösterilmektedir. Bu şekilde dış tabakalar F (Face) ve orta (çekirdek) tabaka C (Core) sembolleri ile gösterilmiştir. Plağa bağlı $Ox_1x_2x_3$ kartezyen koordinat takımı, plağın yüklemenden önceki durumunu belirten Lagrange koordinatları ile ilişkilendirilmektedir.



Şekil 3.1 Bant çatlaklar içeren sandviç kalın plakta yükleme durumu ve plak geometrisi; a) bölgenin tamamı b) yarım bölge

Ele alınan sınır değer probleminin çözüm bölgesi,

$$V' = V - \Omega_1 - \Omega_2 \quad (3.1)$$

olur. Burada,

$$V = V^{(r_1)} \cup V^{(r_2)} \cup V^{(r_3)},$$

$$V^{(r_1)} = \{0 \leq x_1 \leq l_1; 0 \leq x_2 \leq h_F; 0 \leq x_3 \leq l_3\},$$

$$V^{(r_2)} = \{0 \leq x_1 \leq l_1; h_F \leq x_2 \leq h_F + h_C; 0 \leq x_3 \leq l_3\},$$

$$V^{(r_3)} = \{0 \leq x_1 \leq l_1; h_F + h_C \leq x_2 \leq h; 0 \leq x_3 \leq l_3\}, \quad (3.2)$$

$$\Omega_1 = \{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2; x_2 = h_F; 0 \leq x_3 \leq l_3\},$$

$$\Omega_2 = \{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2; x_2 = h_F + h_C; 0 \leq x_3 \leq l_3\} \quad (3.3)$$

dir. Yukarıda verilen ifadelerde $V^{(r_k)}$ ($k=1,2,3$) sandviç plağın tabakalarını, Ω_i ($i=1,2$)

sandviç plağın içerdiği bant çatlakların bulunduğu bölgeleri temsil etmektedir. Ayrıca, ℓ_{10} bant çatlağın Ox_1 doğrultusundaki uzunluğunu göstermektedir. Çatlak yüzeylerinin önceden çok küçük eğrilige sahip olduğu ve bu eğriliklerin $x_1 = \ell_1 / 2$ düzlemi ile $x_2 = h_f$ (alt çatlak) ve $x_2 = h_f + h_c$ (üst çatlak) düzlemlerine göre simetrik olduğu kabul edilmektedir. Buna göre, alt ve üst çatlak yüzeylerinin denklemleri,

$$\begin{aligned} x_2^\pm &= h_f + \varepsilon f^\pm(x_1), \quad x_2^\pm = h_f + h_c + \varepsilon f^\pm(x_1), \\ (\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 &\leq (\ell_1 + \ell_{10})/2, \quad 0 \leq x_3 \leq \ell_3 \end{aligned} \quad (3.4)$$

şeklinde verilmektedir. (3.4)'de ε ($\varepsilon \ll 1$), çatlak yüzeylerinin başlangıçta sahip olduğu kabul edilen eğintinin derecesini gösteren boyutsuz küçük bir parametre, $f(x_1)$ çatlak yüzeylerindeki küçük eğintinin formunu gösteren fonksiyondur. f fonksiyonunun üst indisinde bulunan '+' ('-'), göz önüne alınan çatlağın üst (alt) yüzeyini temsil etmektedir. $f(x_1)$ fonksiyonunun aşağıdaki eşitliklerini sağladığı kabul edilmektedir:

$$\begin{aligned} f^+(x_1) &= -f^-(x_1), \\ f^\pm((\ell_1 - \ell_{10})/2) &= f^\pm((\ell_1 + \ell_{10})/2) = 0, \\ \frac{df^\pm((\ell_1 - \ell_{10})/2)}{dx_1} &= \frac{df^\pm((\ell_1 + \ell_{10})/2)}{dx_1} = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Aşağıda verilen ifadelerde, çekirdek tabaka ve dış tabakalar ile ilgili değerler, sırasıyla üst indis (1) ve (2) ile gösterilmiştir. Matematiksel temsilde kolaylık açısından aynı zamanda üst indis r_k ($k=1,2,3$) kullanılmıştır. Burada r_1 ve r_3 , sırasıyla alt ve üst dış tabakalarla ilgili büyüklükleri, r_2 ise çekirdek tabakası ile ilgili büyüklükleri belirtmektedir. Böylece $r_1 = r_3 = (2)$, $r_2 = (1)$ olur.

Ele alınan problemin matematiksel modeli, viskoelastik cisim için üç boyutlu geometrik doğrusal olmayan yönetici denklemler yardımıyla verilebilir. Buna göre;

denge denklemleri

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{jn}^{(r_k)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_k)}}{\partial x_n} \right) \right] = 0, \quad (3.6)$$

geometrik ilişkiler

$$\varepsilon_{ij}^{(r_k)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(r_k)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(r_k)}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_n^{(r_k)}}{\partial x_i} \frac{\partial u_n^{(r_k)}}{\partial x_j} \right), \quad (3.7)$$

bünye denklemleri

$$\sigma_{ij}^{(r_k)} = \lambda^{*(r_k)} \theta^{(r_k)} \delta_i^j + 2\mu^{*(r_k)} \varepsilon_{ij}^{(r_k)}, \quad \theta^{(r_k)} = \varepsilon_{11}^{(r_k)} + \varepsilon_{22}^{(r_k)} + \varepsilon_{33}^{(r_k)} \quad (3.8)$$

olarak yazılabilir. Yukarıdaki ifadelerde $i; j; n; k = 1, 2, 3$, $r_1 = r_3 = (2)$, $r_2 = (1)$ dir. Ayrıca

$\lambda^{*(r_k)}$ ve $\mu^{*(r_k)}$ viskoelastik malzemenin mekanik sabitleri olup,

$$\begin{aligned} \lambda^{*(r_k)} \varphi(t) &= \lambda_0^{(r_k)} \varphi(t) + \int_0^t \lambda^{(r_k)}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau, \\ \mu^{*(r_k)} \varphi(t) &= \mu_0^{(r_k)} \varphi(t) + \int_0^t \mu^{(r_k)}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.9)$$

operatörleri ile verilmektedir.

Göz önüne alınan plakta sınır koşulları:

$$u_2^{(r_k)} \Big|_{x_1=0; \ell_1} = 0, \quad u_2^{(r_k)} \Big|_{x_3=0; \ell_3} = 0,$$

$$\begin{aligned} \left[\sigma_{1n}^{(r_k)} \left(\delta_1^n + \frac{\partial u_1^{(r_k)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_1=0; \ell_1} &= p, \quad \left[\sigma_{1n}^{(r_k)} \left(\delta_3^n + \frac{\partial u_3^{(r_k)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_1=0; \ell_1} = 0, \\ \left[\sigma_{3n}^{(r_k)} \left(\delta_1^n + \frac{\partial u_1^{(r_k)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_3=0; \ell_3} &= 0, \quad \left[\sigma_{3n}^{(r_k)} \left(\delta_3^n + \frac{\partial u_3^{(r_k)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_3=0; \ell_3} = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\left[\sigma_{2n}^{(r_1)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_1)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \left[\sigma_{2n}^{(r_3)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_3)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_2=h} = 0, \quad (3.11)$$

$$\left[\sigma_{jn}^{(r_1)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_1)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{S_1^-} n_j^- = 0, \quad \left[\sigma_{jn}^{(r_2)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{S_1^+} n_j^+ = 0,$$

$$\left[\sigma_{jn}^{(r_2)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{S_2^-} n_j^- = 0, \quad \left[\sigma_{jn}^{(r_3)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_3)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{S_2^+} n_j^+ = 0,$$

$$S_1^\pm = \left\{ \left((\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2 \right), x_2^\pm = h_F + \varepsilon f^\pm(x_1), 0 \leq x_3 \leq \ell_3 \right\},$$

$$S_2^\pm = \left\{ \left((\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2 \right), x_2^\pm = h_F + h_C + \varepsilon f^\pm(x_1), 0 \leq x_3 \leq \ell_3 \right\} \quad (3.12)$$

olarak verilebilir. (3.10)-(3.12) eşitlikleri, sırasıyla dikdörtgen plağın yan kenarlarındaki mesnet koşullarını, alt ve üst serbest yüzeyi ile çatlak yüzeylerindeki sınır koşullarını göstermektedir. (3.12) ifadesinde bulunan n_j^\pm , göz önüne alınan çatlak yüzeyine ait dış birim normal vektörün bileşenlerini göstermektedir.

Tabakalar arasında ideal temas koşullarının sağlandığı kabul edilirse, temas koşulları:

$$u_i^{(r_1)} \Big|_{\varphi_1^-} = u_i^{(r_2)} \Big|_{\varphi_1^+}, \quad u_i^{(r_3)} \Big|_{\varphi_2^+} = u_i^{(r_2)} \Big|_{\varphi_2^-},$$

$$\left[\sigma_{2n}^{(r_1)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_1)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{\varphi_1^-} = \left[\sigma_{2n}^{(r_2)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{\varphi_1^+},$$

$$\left[\sigma_{2n}^{(r_2)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{\varphi_2^-} = \left[\sigma_{2n}^{(r_3)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_3)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{\varphi_2^+},$$

$$\varphi_1^\pm = \left\{ x_1 \in \left((0, (\ell_1 - \ell_{10})/2) \cup ((\ell_1 + \ell_{10})/2, \ell_1) \right), x_2 = h_F \pm 0, x_3 \in (0, \ell_3) \right\},$$

$$\varphi_2^\pm = \left\{ x_1 \in \left((0, (\ell_1 - \ell_{10})/2) \cup ((\ell_1 + \ell_{10})/2, \ell_1) \right), x_2 = h_F + h_C \pm 0, x_3 \in (0, \ell_3) \right\} \quad (3.13)$$

olur. (3.6)-(3.13) ile verilen denklem ve bağıntılar doğrusal olmayan sınır değer problemini göstermektedir. Problemin çözümü, verilen matematiksel modelin doğrusallaştırılması ile elde edilen ‘‘Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Stabilité Teorisi’’ denklemleri kullanılarak yapılmıştır. Bu denklem takımının doğrusallaştırılması için boyutsuz küçük parametre ε ’dan yararlanılmıştır. Belirtilen işlemler Bölüm 2’de ayrıntılı olarak verildiği için burada LEÜBST denklemlerinin elde edilmesi özet halinde verilmektedir.

Öncelikle, (3.4) ile verilen, çatlak yüzeylerine ait $x_2^\pm = h_F + \varepsilon f^\pm(x_1)$ veya $x_2^\pm = h_F + h_C + \varepsilon f^\pm(x_1)$ denklemi kullanılarak, çatlak yüzeylerinin birim normal vektörünün bileşenleri için izleyen ifadeler elde edilir:

$$n_1^\pm = \frac{\pm \varepsilon \frac{df^\pm(x_1)}{dx_1}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{df^\pm(x_1)}{dx_1} \right)^2}}, \quad n_2^\pm = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{df^\pm(x_1)}{dx_1} \right)^2}}, \quad n_3^\pm = 0. \quad (3.14)$$

Burada, $\varepsilon^2 \left[\left(\frac{df^\pm(x_1)}{dx_1} \right)^2 \right] \ll 1$ olduğu kabul edilirse, (3.14) ile verilen ifadeler ε cinsinden

kuvvet serisi ile ifade edilebilir:

$$n_1^\pm = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k+1} n_{1k}^\pm(x_1), \quad n_2^\pm = \pm 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} n_{2k}^\pm(x_1), \quad n_3^\pm = 0. \quad (3.15)$$

Akbarov vd. (1997); Akbarov (1998); Akbarov ve Yahnioglu (2001); Akbarov ve Rzayev (2002a, 2002b, 2003); Rzayev ve Akbarov (2002) çalışmalarına dayanarak aranan büyüklükler boyutsuz küçük parametre olan ε 'na göre seri formunda aşağıdaki gibi yazabilir:

$$\left\{ \sigma_{ij}^{(r_k)}; \varepsilon_{ij}^{(r_k)}; u_i^{(r_k)} \right\} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \left\{ \sigma_{ij}^{(r_k),q}; \varepsilon_{ij}^{(r_k),q}; u_i^{(r_k),q} \right\}, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (3.16)$$

(3.16) ifadesi, yönetici denklemlerde ((3.6)-(3.8)), plak kenarlarındaki sınır koşullarını ifade eden denklemlerde ((3.10)-(3.11)) ve tabakalar arasındaki temas koşullarında ((3.13)) yerine yazılır ve ε 'nin kuvvetlerine göre düzenlenerek gruplaştırılırsa, bu parametrenin kuvvetlerine göre kapalı denklemler sistemi, plak kenarlarında sınır koşulları ve tabakalar arasında temas koşulları elde edilir. Aynı zamanda, (3.16)'daki büyüklükler, çekirdek tabaka için $(x_1, h_F + 0, x_3)$ ve $(x_1, h_F + h_C - 0, x_3)$ civarında, alt dış tabaka için $(x_1, h_F - 0, x_3)$, üst dış tabaka için ise $(x_1, h_F + h_C + 0, x_3)$ civarında seriye açılır ve çatlak yüzeylerine ait birim normal vektörün bileşenlerini ifade eden (3.15) denklemleri ile birlikte, çatlak yüzeyleri için verilmiş olan (3.12) sınır koşullarında yerlerine yerleştirilir ve ε 'nin kuvvetlerine göre düzenlenerek gruplaştırılırsa (sınır tipli pertürbasyon tekniği), bu parametrenin kuvvetlerine göre çatlak yüzeylerinde uygun sınır şartları elde edilir.

Yukarıda özetlendiği şekilde ε 'nin kuvvetlerine göre elde edilen her bir sınır değer problemi, ε 'nin derecesine göre isimlendirilir. Örneğin; sıfırıncı, birinci yaklaşım vb. (veya sıfırıncı, birinci vb. sınır değer problemi) adı verilir. Aranan çözüm, bu seri-sınır değer problemlerinin çözülmesi ve çözümlerin süperpoze edilmesi ile elde edilir ve elde edilen her bir yaklaşım, kendisinden önceki yaklaşımlara ait büyüklükleri içermektedir.

Elde edilen seri-sınır değer problemlerinden sıfıncı yaklaşıma ait denklem ve bağıntılar nonlinear, diğer yaklaşımlar ise lineerdir. Ele alınan cismin nispeten katı-rijid malzeme olduğu göz önünde bulundurulursa, bilinen mekanik görüşler doğrultusunda, sıfıncı yaklaşımın matematiksel modelinde $(\delta_i^n + \partial u_i^{(0)}/\partial x_n) \approx \delta_i^n$ eşitliği kullanılabilir. Böylece viskoelastik malzeme kullanılarak, sıfıncı yaklaşım için elde edilen alan denklemleri, sınır ve temas koşulları klasik lineer teoriden elde edilenlerle çakışmaktadır (Bölüm 2). Bu işlemler neticesinde, ele alınan delaminasyon burkulma probleminin çözümü, elde edilen seri-sınır değer problemlerinin çözümüne indirgenmektedir. Ancak belirtilen seri-sınır değer problemlerinde, ikinci ve sonraki yaklaşımlara ait denklem ve ifadelerin sol tarafları, birinci yaklaşımla üst üste düşmekte, sadece bu denklem ve bağıntıların sağ tarafları (homojen olmayan kısımları) birbirinden farklılaşmaktadır. İncelenmesi öngörülen problemlerde kritik burkulma değerleri belirleneceğinden, ayrıca ikinci ve sonraki yaklaşımlar bu kritik parametrelerin değerlerini değiştirmediklerinden, incelemeler sadece sıfıncı ve birinci yaklaşım çerçevesinde yapılmıştır. İkinci ve sonraki yaklaşımların göz önüne alınması sadece gerilme yayılımının hassaslaştırılmasında etkindir. Bu çalışmada amacımız kritik delaminasyon burkulma kuvveti ve kritik zaman değerlerinin belirlenmesi olduğu için, hesaplamalar sıfıncı ve birinci yaklaşım çerçevesinde sınırlandırılmıştır.

Ele alınan problemin her bir yaklaşımına ait alan denklemleri ve bağıntılar, Bölüm 2’de ele alınan kalın plak için elde edilen; sıfıncı yaklaşım için (2.15)-(2.17), birinci yaklaşım için (2.18)-(2.20) ve q. yaklaşım için (2.21)-(2.23) denklem ve bağıntılarına benzerdir. Bu ifadeler çok uzun olduğu için burada tekrar verilmemiştir.

Ele alınan delaminasyon burkulma problemi için sadece sıfıncı ve birinci yaklaşımın çözüleceği, kritik parametrelerin bu iki yaklaşımın ardışık iterasyonları ile elde edileceği daha önce verilmişti. Bu iki yaklaşımın çözümüne geçmeden önce, yapı elemanı malzemesi viskoelastik olduğu için çözümden önce her bir yaklaşıma ait denklem ve bağıntılara Laplace dönüşümü uygulanmaktadır. Buna göre, sıfıncı yaklaşımın çözümünden önce, bu yaklaşıma ait bütün denklem ve bağıntılara $s > 0$ için Laplace dönüşümü uygulanır. Bu dönüşüme göre keyfi $\varphi(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\bar{\varphi}(s) = \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-st} dt \quad (3.17)$$

şekindedir. (3.17) yardımıyla $\sigma_{ij}^{(r_k),0}$, $\epsilon_{ij}^{(r_k),0}$, $u_i^{(r_k),0}$, $\lambda^{(r_k)}$, $\mu^{(r_k)}$ büyüklükleri, sırasıyla $\bar{\sigma}_{ij}^{(r_k),0}$,

$\bar{\epsilon}_{ij}^{(r_k),0}$, $\bar{u}_i^{(r_k),0}$, $\bar{\lambda}^{(r_k)}$, $\bar{\mu}^{(r_k)}$ ile gösterilir ve bu büyüklükler sıfırcı yaklaşıma ait denklemlerde uygun şekilde Laplace dönüşümleri ile yer değiştirilirse, ilgili büyüklüklerin Laplace dönüşümlerine göre düzenlenmiş sıfırcı yaklaşım alan denklemleri, sınır ve temas koşulları elde edilir. Aynı işlem birinci yaklaşım için de tekrarlanırsa, ilgili büyüklüklerin Laplace dönüşümlerine göre düzenlenmiş, birinci yaklaşıma ait denklemler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ji}^{(r_k),1}}{\partial x_j} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_k),0} \frac{\partial^2 \bar{u}_i^{(r_k),1}}{\partial x_1^2} = 0,$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(r_k),1} = \bar{\lambda}^{*(r_k)} \bar{\theta}^{(r_k),1} \delta_i^j + 2\bar{\mu}^{*(r_k)} \bar{\epsilon}_{ij}^{(r_k),1},$$

$$\bar{\epsilon}_{ij}^{(r_k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i^{(r_k),1}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j^{(r_k),1}}{\partial x_i} \right). \quad (3.18)$$

Plak kenarlarındaki sınır koşulları:

$$\bar{u}_2^{(r_k),1} \Big|_{x_1=0;\ell_1} = 0, \quad \bar{u}_2^{(r_k),1} \Big|_{x_3=0;\ell_3} = 0,$$

$$\left[\bar{\sigma}_{11}^{(r_k),1} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_k),0} \frac{\partial \bar{u}_1^{(r_k),1}}{\partial x_n} \right] \Big|_{x_1=0;\ell_1} = 0, \quad \bar{\sigma}_{13}^{(r_k),1} \Big|_{x_1=0;\ell_1} = 0,$$

$$\bar{\sigma}_{31}^{(r_k),1} \Big|_{x_3=0;\ell_3} = \bar{\sigma}_{33}^{(r_k),1} \Big|_{x_3=0;\ell_3} = 0. \quad (3.19)$$

Plaçın alt ve üst serbest yüzeylerindeki sınır koşulları:

$$\bar{\sigma}_{21}^{(r_1),1} \Big|_{x_2=0} = \bar{\sigma}_{22}^{(r_1),1} \Big|_{x_2=0} = \bar{\sigma}_{23}^{(r_1),1} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \bar{\sigma}_{21}^{(r_3),1} \Big|_{x_2=h} = \bar{\sigma}_{22}^{(r_3),1} \Big|_{x_2=h} = \bar{\sigma}_{23}^{(r_3),1} \Big|_{x_2=h} = 0. \quad (3.20)$$

Çatlak yüzeylerindeki sınır koşulları:

$$\bar{\sigma}_{21}^{(r_1),1} \Big|_{\bar{s}_1^-} = -\bar{\sigma}_{11}^{(r_1),0} \frac{df^-}{dx_1}, \quad \bar{\sigma}_{22}^{(r_1),1} \Big|_{\bar{s}_1^-} = \bar{\sigma}_{23}^{(r_1),1} \Big|_{\bar{s}_1^-} = 0,$$

$$\bar{\sigma}_{21}^{(r_2),1} \Big|_{\bar{s}_1^+} = -\bar{\sigma}_{11}^{(r_2),0} \frac{df^+}{dx_1}, \quad \bar{\sigma}_{22}^{(r_2),1} \Big|_{\bar{s}_1^+} = \bar{\sigma}_{23}^{(r_2),1} \Big|_{\bar{s}_1^+} = 0,$$

$$\bar{\sigma}_{21}^{(r_2),1} \Big|_{\bar{s}_2^-} = -\bar{\sigma}_{11}^{(r_2),0} \frac{df^-}{dx_1}, \quad \bar{\sigma}_{22}^{(r_2),1} \Big|_{\bar{s}_2^-} = \bar{\sigma}_{23}^{(r_2),1} \Big|_{\bar{s}_2^-} = 0,$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{21}^{(r_3),1} \Big|_{\bar{S}_2^+} &= -\bar{\sigma}_{11}^{(r_3),0} \frac{df^+}{dx_1}, & \bar{\sigma}_{22}^{(r_3),1} \Big|_{\bar{S}_2^+} &= \bar{\sigma}_{23}^{(r_3),1} \Big|_{\bar{S}_2^+} = 0, \\ \bar{S}_1^\pm &= \left\{ ((\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2), x_2^\pm = h_F \pm 0, 0 \leq x_3 \leq \ell_3 \right\}, \\ \bar{S}_2^\pm &= \left\{ ((\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2), x_2^\pm = h_F + h_C \pm 0, 0 \leq x_3 \leq \ell_3 \right\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Tabakalar arasındaki temas koşulları:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i^{(r_1),1} \Big|_{\varphi_1^-} &= \bar{u}_i^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_1^+}, & u_i^{(r_3),1} \Big|_{\varphi_2^+} &= u_i^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_2^-}, \\ \left[\bar{\sigma}_{21}^{(r_1),1} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_1),0} \frac{\partial \bar{u}_i^{(r_1),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_1^-} &= \left[\bar{\sigma}_{21}^{(r_2),1} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial \bar{u}_i^{(r_2),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_1^+}, \\ \bar{\sigma}_{22}^{(r_1),1} \Big|_{\varphi_1^-} &= \bar{\sigma}_{22}^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_1^+}, & \bar{\sigma}_{23}^{(r_1),1} \Big|_{\varphi_1^-} &= \bar{\sigma}_{23}^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_1^+}, \\ \left[\bar{\sigma}_{21}^{(r_3),1} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_3),0} \frac{\partial \bar{u}_i^{(r_3),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_2^+} &= \left[\bar{\sigma}_{21}^{(r_2),1} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial \bar{u}_i^{(r_2),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_2^-}, \\ \bar{\sigma}_{22}^{(r_3),1} \Big|_{\varphi_2^+} &= \bar{\sigma}_{22}^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_2^-}, & \bar{\sigma}_{23}^{(r_3),1} \Big|_{\varphi_2^+} &= \bar{\sigma}_{23}^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_2^-} \end{aligned} \quad (3.22)$$

olur. Birinci yaklaşım için elde edilen (3.18)-(3.22) ifadelerinde, $\bar{\sigma}_{jn}^{(r_k),0}$ sıfıncı yaklaşımına ait gerilmeleri göstermektedir. Bölüm 2’de belirtildiği üzere, her bir yaklaşım kendisinden önceki yaklaşımlara ait büyüklükleri içermektedir. Ayrıca $\bar{\lambda}^{*(r_k)}$ ve $\bar{\mu}^{*(r_k)}$ operatörler olup, Laplace dönüşümü uygulanmamış hali (3.9)’da verilmiştir.

(3.18)-(3.22) denklem ve ifadelerinde, çarpım durumundaki büyüklüklere Laplace dönüşümü, Konvolusyon teoremi yardımıyla uygulanmıştır (Akbarov vd., 1997; Akbarov, 1998, 2007; Akbarov ve Yahnioglu, 2001). Ancak bu prosedürün kullanımında birtakım güçlükler ortaya çıkmaktadır. Birinci yaklaşım için elde edilen (3.18)-(3.22) ifadelerinde bulunan $\sigma_{11}^{(r_k),0}(t)$ büyüklüğü zamana bağlıdır ve bu sebeple (3.18)-(3.22) denklem ve bağıntıların ilkel halinde bulunan $\sigma_{11}^{(r_k),0}(t) \partial^2 u_i^{(r_k),1} / \partial x_1^2$ ve $\sigma_{11}^{(r_k),0}(t) \partial u_i^{(r_k),1} / \partial x_1$ ifadelerinin Laplace dönüşümleri, sırasıyla $\bar{\sigma}_{11}^{(r_k),0} \partial^2 \bar{u}_i^{(r_k),1} / \partial x_1^2$ ve $\bar{\sigma}_{11}^{(r_k),0} \partial \bar{u}_i^{(r_k),1} / \partial x_1$ olarak gerçekte yazılamaz. Bu güçlüğün üstesinden gelmek için $\sigma_{11}^{(r_k),0}(t)$ teriminin zamana göre değişiminin çok düşük olduğu ve sabit

bir $t = t_1$ anında $\sigma_{11}^{(r_k),0}(t) \partial^2 u_i^{(r_k),1} / \partial x_1^2$ ve $\sigma_{11}^{(r_k),0}(t) \partial u_i^{(r_k),1} / \partial x_1$ terimlerinin Laplace dönüşümleri olarak, sırasıyla $\sigma_{11}^{(r_k),0}(t_1) \partial^2 \bar{u}_i^{(r_k),1} / \partial x_1^2$ ve $\sigma_{11}^{(r_k),0}(t_1) \partial \bar{u}_i^{(r_k),1} / \partial x_1$ yazılabileceği kabul edilmiştir. Bu varsayım, Akbarov ve Yahnioglu (2001); Rzayev (2002); Rzayev ve Akbarov (2002) kaynaklarında da kullanılmış olup, $\sigma_{11}^{(r_k),0}(t)$ teriminin zamana göre değişiminin çok düşük olması durumunda, kesin sonuçların elde edilmesine olanak vermektedir. Böylece, bu kabul kullanılarak, (3.18)-(3.22) ifadelerinin ilkel hallerinde yer alan $\sigma_{ij}^{(r_k),1}$, $\varepsilon_{ij}^{(r_k),1}$, $u_i^{(r_k),1}$, $\lambda^{(r_k)}$, $\mu^{(r_k)}$ ve $\sigma_{11}^{(r_k),0}(t)$ terimleri, sırasıyla Laplace dönüşümleri olan $\bar{\sigma}_{ij}^{(r_k),1}$, $\bar{\varepsilon}_{ij}^{(r_k),1}$, $\bar{u}_i^{(r_k),1}$, $\bar{\lambda}^{*(r_k)}$, $\bar{\mu}^{*(r_k)}$ ve $\sigma_{11}^{(r_k),0}(t_1)$ terimleriyle uygun şekilde yer değiştirilirse, belirtilen büyüklüklerin Laplace dönüşümüne göre düzenlenmiş birinci yaklaşıma ait alan denklemleri, sınır ve temas koşulları elde edilir. Eğer istenirse, belirtilen işlemler uygun şekilde tekrarlanarak, ikinci ve sonraki yaklaşımlara ait formülasyonlar kolayca elde edilebilir.

Bundan sonra, sıfıncı ve birinci yaklaşıma ait sınır değer problemlerinin çözümü verilecektir. Ancak sıfıncı yaklaşımın çözümü, ele alınan sınır koşulları ve yükleme durumu ile bilinen mekanik görüşler çerçevesinde doğrudan yazılabilir:

$$2h_F \sigma_{11}^{(2),0}(t) + h_C \sigma_{11}^{(1),0}(t) = ph, \quad \sigma_{11}^{(2),0}(t) / E^{*(2)} = \sigma_{11}^{(1),0}(t) / E^{*(1)}. \quad (3.23)$$

Burada,

$$E^{*(k)} \varphi(t) = E_0^{(k)} \varphi(t) + \int_0^t E^{(k)}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \quad (3.24)$$

olduğu göz önüne alınırsa, sıfıncı yaklaşımın Laplace dönüşümünün çözümü için,

$$\bar{\sigma}_{11}^{(r_1),0} = \bar{\sigma}_{11}^{(r_3),0} = p \frac{\bar{E}^{*(2)} (2h_F + h_C)}{s (2h_F \bar{E}^{*(2)} + h_C \bar{E}^{*(1)})},$$

$$\bar{\sigma}_{11}^{(r_2),0} = \bar{\sigma}_{11}^{(r_1),0} \frac{\bar{E}^{*(1)}}{\bar{E}^{*(2)}},$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(r_k),0} = 0, \quad (ij \neq 11) \quad (3.25)$$

yazılabilir. Sıfıncı yaklaşımın matematik modeli, karşılıklı iki kenarından basınç yükü ile yüklenmiş sandviç kalın plağa ait bir sınır değer problemini temsil eder. Plak malzemesi parçalı sürekli olduğu için, bu problemin çözümünden elde edilen gerilmelerin, tabakalar

içerisindeki yayılımı homojen olur. Ancak bu gerilme yayılımı, her bir tabaka için, sınırlar civarında homojen olmaz, yani (3.25) çözümü sınırlar civarında sağlanmaz. Ancak, ele alınan delaminasyon burkulması problemi göz önüne alındığında, burkulma olayı çatlak civarında incelendiği için, sıfırıncı yaklaşımda sınırlar civarında gerilmelerin homojen olmaması, kritik burkulma değerini etkilememektedir. Bu nedenle tez çerçevesinde, delaminasyon burkulma problemi için kritik parametrelerin belirlenmesinde, sıfırıncı yaklaşımda, sınırlar civarındaki gerilme yayılımının homojen olmaması durumu gözardı edilmiştir.

Sıfırıncı yaklaşımın çözümü sonucunda elde edilen gerilmeler (3.25) ile verilmiştir. Birinci yaklaşımın çözümü için ise (3.18)-(3.22) ile verilen sınır değer probleminin çözümü yapılmalıdır. Birinci yaklaşımın çözümü, bir sonraki alt bölümde ele alınmaktadır.

3.2 Sonlu Elemanlar Modeli

Birinci yaklaşımın Laplace uzayındaki formuna ((3.18)-(3.22) sınır değer problemine) ait sonlu eleman formülasyonunun belirlenmesinde,

$$\begin{aligned}
\Pi(\bar{u}_1^{(r_k),1}, \bar{u}_2^{(r_k),1}, \bar{u}_3^{(r_k),1}) &= \sum_{k=1}^3 \left[\frac{1}{2} \iiint_{V'} \left[\left(\bar{\sigma}_{11}^{(r_k),1} + \sigma_{11}^{(r_k),0}(t_1) \frac{\partial \bar{u}_1^{(r_k),1}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \bar{u}_1^{(r_k),1}}{\partial x_1} + \right. \right. \\
&\quad \bar{\sigma}_{12}^{(r_k),1} \frac{\partial \bar{u}_1^{(r_k),1}}{\partial x_2} + \bar{\sigma}_{13}^{(r_k),1} \frac{\partial \bar{u}_1^{(r_k),1}}{\partial x_3} + \\
&\quad \left. \left(\bar{\sigma}_{21}^{(r_k),1} + \sigma_{11}^{(r_k),0}(t_1) \frac{\partial \bar{u}_2^{(r_k),1}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \bar{u}_2^{(r_k),1}}{\partial x_1} + \bar{\sigma}_{22}^{(r_k),1} \frac{\partial \bar{u}_2^{(r_k),1}}{\partial x_2} + \bar{\sigma}_{23}^{(r_k),1} \frac{\partial \bar{u}_2^{(r_k),1}}{\partial x_3} + \right. \\
&\quad \left. \left. \left(\bar{\sigma}_{31}^{(r_k),1} + \sigma_{11}^{(r_k),0}(t_1) \frac{\partial \bar{u}_3^{(r_k),1}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \bar{u}_3^{(r_k),1}}{\partial x_1} + \bar{\sigma}_{32}^{(r_k),1} \frac{\partial \bar{u}_3^{(r_k),1}}{\partial x_2} + \bar{\sigma}_{33}^{(r_k),1} \frac{\partial \bar{u}_3^{(r_k),1}}{\partial x_3} \right] dx_1 dx_2 dx_3 \right] - \\
&\int_0^{\ell_3} \int_{(\ell_1 - \ell_{10})/2}^{(\ell_1 + \ell_{10})/2} \frac{1}{s} \sigma_{11}^{(r_1),0}(t_1) \frac{\partial f^-}{\partial x_1} \bar{u}_1^{(r_1),1} \Big|_{x_2=h_F-0} dx_1 dx_3 - \int_0^{\ell_3} \int_{(\ell_1 - \ell_{10})/2}^{(\ell_1 + \ell_{10})/2} \frac{1}{s} \sigma_{11}^{(r_2),0}(t_1) \frac{\partial f^+}{\partial x_1} \bar{u}_1^{(r_2),1} \Big|_{x_2=h_F+0} dx_1 dx_3 - \\
&\int_0^{\ell_3} \int_{(\ell_1 - \ell_{10})/2}^{(\ell_1 + \ell_{10})/2} \frac{1}{s} \sigma_{11}^{(r_2),0}(t_1) \frac{\partial f^-}{\partial x_1} \bar{u}_1^{(r_2),1} \Big|_{x_2=(h_F+h_C)-0} dx_1 dx_3 - \\
&\int_0^{\ell_3} \int_{(\ell_1 - \ell_{10})/2}^{(\ell_1 + \ell_{10})/2} \frac{1}{s} \sigma_{11}^{(r_3),0}(t_1) \frac{\partial f^+}{\partial x_1} \bar{u}_1^{(r_3),1} \Big|_{x_2=(h_F+h_C)+0} dx_1 dx_3 \tag{3.26}
\end{aligned}$$

fonksiyoneli ve Ritz tekniği kullanılmıştır. Belirtelim ki, (3.26) fonksiyonelinin yer

değiştirmelere göre birinci varyasyonunun sıfıra eşitliğinden,

$$\delta\Pi = \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial\Pi}{\partial u_1^{(r_k)}} \delta u_1^{(r_k)} + \frac{\partial\Pi}{\partial u_2^{(r_k)}} \delta u_2^{(r_k)} + \frac{\partial\Pi}{\partial u_3^{(r_k)}} \delta u_3^{(r_k)} \right] = 0 \quad (3.27)$$

birinci yaklaşıma ait alan denklemleri ve gerilmelere göre verilmiş sınır koşulları elde edilmektedir. Bu işlemler yapılarak, (3.26) fonksiyonelinin, ele alınan sınır değer problemine özdeş bir fonksiyonel olduğu gösterilmektedir.

Sonlu eleman çözümlünde, çözüml bölgesi ve yükleme durumu göz önüne alındığında, $x_1 = \ell_1 / 2$, $x_2 = h / 2$ ve $x_3 = \ell_3 / 2$ düzlemlerine göre simetri özelliğinden yararlanılarak, ele alınan plağın 1/8'lik parçası sonlu sayıda alt bölgeye (sonlu elemana; $\Omega_{(k)}$, $k=1,2,\dots,M$) ayrılaştırılmıştır. Dolayısıyla,

$$V' = \bigcup_{k=1}^M \Omega_k \quad (3.28)$$

olur. Sonlu eleman ayrılaştırması, sayısal sonuçların yakınsaklığı özelliğinden ve literatürdeki uygun sayısal sonuçlara en iyi yaklaşımın sağlandığı sonlu eleman ağı arasından seçilmiştir. Bölgenin ayrılaştırılmasında, bütün bölgede sekiz nodlu standart dikdörtgen prizmatik sonlu elemanlar kullanılmıştır (Zienkiewicz ve Taylor, 1989).

Çeşitli kaynaklarda çatlak içeren yapı elemanlarının sonlu eleman ayrılaştırmasında, çatlak ucu civarında tekil (singüler) sonlu elemanların kullanılması önerilmektedir. Ancak, tez çerçevesinde ele alınan delaminasyon burkulma problemleri için Akbarov vd. (2007) tarafından yapılan araştırmada, çatlak ucu civarında tekil sonlu eleman kullanılmasının, kritik değerleri değiştirmediği tespit edilmiştir. Bu tespit göz önüne alınarak, ele alınan çalışmada çatlak bölgesi civarında sadece standart tipte sonlu elemanlar kullanılmıştır.

Sonlu eleman ayrılaştırmasında plağın 1/8'lik parçası, Ox_1 doğrultusunda 20, Ox_2 doğrultusunda 12 ve Ox_3 doğrultusunda 20 adet dikdörtgen prizma şeklindeki sonlu elemana ayrılaştırılarak, toplamda 4800 adet sonlu eleman, $\ell_{10} = 0.5\ell_1$ durumu için; 5943 düğüm noktası ve 16309 serbestlik derecesi kullanılmıştır. Belirtelim ki, çatlak büyüklüğüne bağlı olarak düğüm noktası sayısı ve bilinmeyen sayısı değişmektedir. Örneğin toplam sonlu eleman adedi sabit kalmak şartı ile yapıdaki çatlak boyutu arttırıldığında (azaltıldığında) düğüm noktası sayısı, dolayısıyla bilinmeyen sayısı artmaktadır (azalmaktadır).

Sonlu elemanlar yöntemi gereği aranan fonksiyon, her alt bölgede polinom olarak seçilmektedir. Seçilen bu fonksiyonlar, (3.26) fonksiyonelinde göz önüne alınarak, Ritz tekniği yardımıyla aranan büyüklükler bulunmaktadır. Tez kapsamında yer değiştirme esaslı Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılmıştır. Sonlu eleman ayrıklaştırmasında, düğüm noktalarında bilinmeyen olarak sadece yer değiştirme değerleri alınmaktadır. Aranan yer değiştirme fonksiyonunun polinom olarak ifadesi; şekil fonksiyonları ve düğüm noktalarında aranan yer değiştirmeler yardımıyla aşağıdaki gibi seçilir

$$\mathbf{u}^{(k)} \approx \mathbf{N}^{(k)} \mathbf{a}^{(k)}, \quad k=1,2,\dots,M \quad (3.29)$$

(3.29)'da (k) üst indisi, ilgili büyüklüklerin Ω_k sonlu elemanına ait olduğunu ifade etmektedir. $\mathbf{a}^{(k)}$ vektörünün bileşenleri ise, Ω_k elemanın düğüm noktalarında aranan yer değiştirmeleri göstermektedir. $\mathbf{u}^{(k)}$, $\mathbf{N}^{(k)}$ ve $\mathbf{a}^{(k)}$ ifadeleri aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}^{(k)})^T &= (\bar{u}_{11}^k \bar{u}_{21}^k \bar{u}_{31}^k \bar{u}_{12}^k \bar{u}_{22}^k \bar{u}_{32}^k \dots \bar{u}_{18}^k \bar{u}_{28}^k \bar{u}_{38}^k), \\ (\mathbf{N}^{(k)})^T &= \begin{bmatrix} N_1^{(k)} & 0 & 0 & N_2^{(k)} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & N_8^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & N_1^{(k)} & 0 & 0 & N_2^{(k)} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & N_8^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & N_1^{(k)} & 0 & 0 & N_2^{(k)} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & N_8^{(k)} \end{bmatrix}, \\ (\bar{\mathbf{u}}^{(k)})^T &= (\bar{u}_1^k(x_1, x_2, x_3) \quad \bar{u}_2^k(x_1, x_2, x_3) \quad \bar{u}_3^k(x_1, x_2, x_3)). \end{aligned} \quad (3.30)$$

(3.29) ifadesi (3.26) fonksiyonelinde yerine yazılarak Ritz tekniği yardımıyla uygun cebrik denklem sistemi elde edilir:

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{r}. \quad (3.31)$$

Burada, \mathbf{K} katsayılar (rijitlik) matrisini, \mathbf{a} düğüm noktalarında bilinmeyen yer değiştirme vektörünü ve \mathbf{r} düğüm noktalarına etki eden kuvvet vektörünü göstermektedir. Çözümde ortaya çıkan integral ifadelerin sayısal hesaplamasında, Gauss karelemesi metodu 10 Gauss noktası alınarak belirlenmiştir (Zienkiewicz, O. C. ve Taylor, R. L., 1989).

(3.31) cebrik denklem sisteminin çözülmesiyle, düğüm noktalarında aranan yer değiştirme değerleri dolayısıyla, her sonlu elemanda yer değiştirme fonksiyonu belirlenmektedir. Bu fonksiyonların ilkel (orijinal) değerlerinin belirlenmesinde Schapery (1966) metodu kullanılmıştır. (Bölüm 2.4). Ele alınan problemin çözümün gerektirdiği bütün algoritma ve programlar tarafımızdan FTN77 ile yapılmıştır.

3.3 Sayısal Sonuçlar ve Değerlendirme

İki adet bant çatlak içeren sandviç kalın plağın delaminasyon burkulması; çekirdek tabakanın ve dış tabakaların malzemesi elastik ile çekirdek tabakanın malzemesi elastik ve dış tabakaların malzemesi lineer viskoelastik olması durumlarına göre, iki ayrı problem halinde incelenmiş ve sayısal sonuçlar ayrı ayrı verilmiştir. Dış tabakaların aynı malzemedan, çekirdek tabakasının ise farklı malzemedan yapıldığı kabul edilmektedir. Çekirdek tabakasının malzemesine ait mekanik sabitler $E^{(1)}$ ve $\nu^{(1)}$, dış tabakaların malzemesine ait mekanik sabitler

$$E^{*(2)} = E_0^{(2)} \left[1 - \omega_0 R_\alpha^* (-\omega_0 - \omega_\infty) \right], \quad \nu^{*(2)} = \nu_0^{(2)} \left[1 + \frac{1 - 2\nu_0^{(2)}}{2\nu_0^{(2)}} \omega_0 R_\alpha^* (-\omega_0 - \omega_\infty) \right] \quad (3.32)$$

operatörleri ile verilmektedir. (3.32)'de, $E_0^{(2)}$ ve $\nu_0^{(2)}$, sırasıyla elastisite modülü ve Poisson oranının anlık değerleri, α , ω_0 ve ω_∞ viskoelastik malzemenin reolojik parametreleri, R_α^* ise Rabotnov operatörüdür (Rabotnov, 1977) ve bu operatör,

$$R_\alpha^* \varphi(t) = \int_0^t R_\alpha(\beta, t - \tau) \varphi(\tau) d\tau \quad (3.33)$$

biçiminde tanımlıdır. (3.33)'de R_α ,

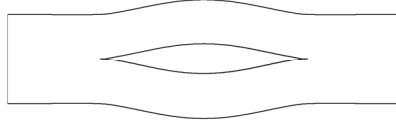
$$R_\alpha(\beta, t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma((1+n)(1+\alpha))}, \quad -1 < \alpha \leq 0 \quad (3.34)$$

dir. (3.34) ifadesindeki $\Gamma(x)$, Gamma fonksiyonudur (Bölüm 1). Viskoelastik malzemenin mekanik sabitlerinin (3.32)-(3.34) şeklinde seçilmesi, epoksi bazlı viskoelastik kompozit malzemelerin matematiksel modeline iyi bir yaklaşım vermektedir (Akbarov ve Yahnioglu, 2010).

Çatlak yüzeylerine başlangıçta verilen ön eğintinin sağlaması gereken şartlara uygun olarak (3.4) ifadesinde verilen $f^\pm(x_1)$ fonksiyonu

$$f^\pm(x_1) = \pm \ell_{10} \sin^2 \left(\frac{\pi}{\ell_{10}} \left(x_1 - \frac{\ell_1 - \ell_{10}}{2} \right) \right) \quad (3.35)$$

şeklinde seçilmiştir. (3.35) fonksiyonu, çatlakın alt ve üst yüzeylerinin birbirine göre simetrik ama zıt yönde eğriliğe sahip olmasına karşı gelmektedir (Şekil 3.2).



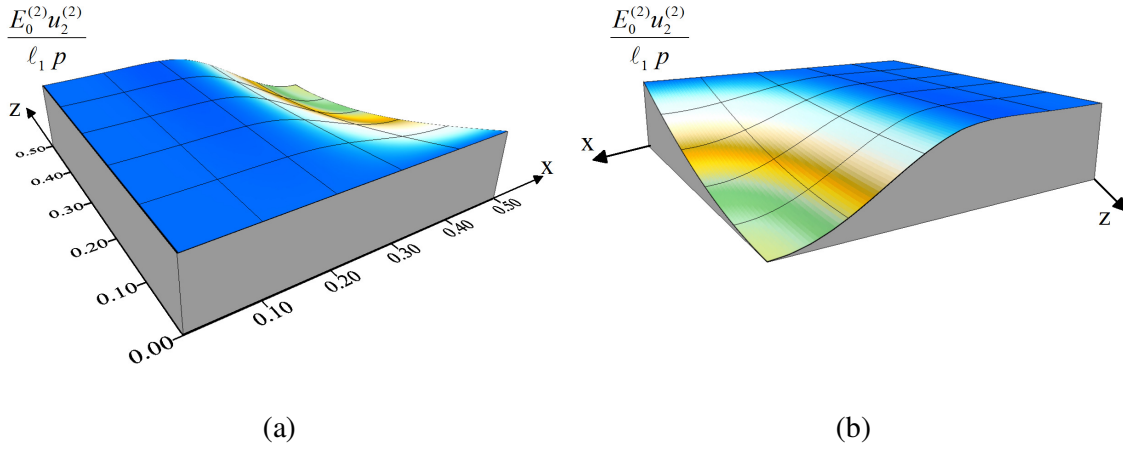
Şekil 3.2 Ele alınan plakta, çatlak yüzeylerine başlangıçta verilen ön eğintinin geometrik formu

Yapılan hesaplamalarda, boyutsuz reolojik parametre $\omega = \omega_{\infty} / \omega_0$ ve boyutsuz zaman $t' = \omega_0^{1/(1+\omega)} t$ kullanılmıştır. Sayısal sonuçların elde edilmesinde, $h / \ell_1 = 0.15$, $v^{(1)} = v_0^{(2)} = 0.3$ değerleri sabit kalmak üzere, diğer malzeme ve geometrik parametrelerin değişiminin, kritik burkulma değerleri üzerindeki etkisi incelenmiş ve elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

3.3.1 Elastik Dikdörtgen Sandviç Plakta Delaminasyon Burkulması

Bu kısımda, dış tabakalar ile çekirdek tabakanın malzemesi farklı ($E_0^{(2)} / E^{(1)} \neq 1$) ve aynı ($E_0^{(2)} / E^{(1)} = 1$) olmak üzere, her üç tabakanın elastik malzemedeki durumu incelenmiştir. Boyutsuz zaman parametresinin $t' = 0$, $t' = \infty$ değerleri için, sırasıyla $p_{kr,0} / E^{(1)}$, $p_{kr,\infty} / E^{(1)}$ şeklinde ifade edilecek olan kritik delaminasyon burkulma kuvvetleri araştırılmıştır. $t' = \infty$ için yapılan hesapta, $\omega = 2$, $\alpha = -0.5$ değerleri kullanılmıştır.

Problemin çözülmesiyle, $x_2 = h_F$ 'deki çatlak yüzeyine ($x_2 = h_F - 0$, $\ell_3 / 2 \leq x_3 \leq \ell_3$, $0 \leq x_1 \leq \ell_1 / 2$) ait noktaların, düşey doğrultudaki yer değiştirmelerinin yüzey grafiğinden yararlanılarak, sandviç plağın burkulma modu Şekil 3.3'de verilmiştir. Şekil 3.3a'da verilen yüzey grafiği, $x_3 = \ell_3$ düzleminden görünümü (ön yüz), Şekil 3.3b'de verilen yüzey grafiği, $x_3 = \ell_3 / 2$ düzleminden görünümü (arka yüz) ifade etmektedir. Bu grafiğin elde edilmesinde parametrelerin $\gamma_{31} = 1$, $h_F / \ell_1 = 0.0375$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$, $E_0^{(2)} / E^{(1)} = 10$ ve $(p_{kr,0} / E^{(1)} - p / E^{(1)}) < 10^{-4}$ değerleri kullanılmıştır. Şekil 3.3'de eksenler $x (= x_1)$ ve $z (= \ell_3 - x_3)$ ile gösterilmiştir. Elde edilen yüzey grafiği, çatlak yüzeylerine başlangıçta verilen ve (3.35) denklemi ile gösterilen ön eğintinin formuna uygun düşmektedir.



Şekil 3.3 Ele alınan sandviç kalın plağın $x_2 = h_F - 0$ yüzeyinin burkulma modu a) $x_3 = \ell_3$ düzleminde görünüm b) $x_3 = \ell_3 / 2$ düzleminde görünüm

Çizelge 3.1 $\gamma_{31} = \ell_3 / \ell_1$, h_F / ℓ_1 ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ değişiminin, $p_{kr.0} / E^{(1)}$ değerlerine etkisi ($\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$)

γ_{31}	h_F / ℓ_1								
	0.0250			0.0375			0.0500		
	$E_0^{(2)} / E^{(1)}$								
	1	5	10	1	5	10	1	5	10
1	0.0120	0.0565	0.1080	0.0217	0.1003	0.1899	0.0336	0.1543	0.2922
2	0.0111	0.0518	0.0985	0.0198	0.0904	0.1699	0.0304	0.1377	0.2589
3	0.0109	0.0510	0.0968	0.0195	0.0887	0.1665	0.0298	0.1349	0.2532
4	0.0109	0.0507	0.0963	0.0193	0.0881	0.1653	0.0296	0.1339	0.2513
5	0.0108	0.0505	0.0960	0.0193	0.0878	0.1648	0.0295	0.1335	0.2504
6	0.0108	0.0505	0.0959	0.0193	0.0877	0.1645	0.0295	0.1333	0.2499
8	0.0108	0.0504	0.0957	0.0192	0.0875	0.1642	0.0294	0.1330	0.2494

Çizelge 3.1’de γ_{31} parametre değerinin artırılmasının (Ox_3 doğrultusundaki plak uzunluğunun artırılmasının), kritik burkulma kuvveti değerine ($p_{kr.0} / E^{(1)}$) etkisi, farklı h_F / ℓ_1 ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ için verilmiştir. Sayısal sonuçlardan görüldüğü üzere her bir γ_{31} değeri için, h_F / ℓ_1

(dış tabaka kalınlıklarının) ve/veya $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ (dış tabaka elastisite modülü/çekirdek tabakası elastisite modülü) oranının artmasıyla elde edilen kritik değerlerin büyüdüğü tespit edilmiştir. Ayrıca, γ_{31} değerinin artmasıyla elde edilen kritik değerler azalarak bir asimtoda yaklaşmaktadır. Bu asimtot değeri, uygun düzlem şekil değiştirme probleminden elde edilen sonuçlara uygun düşmektedir. Tez çerçevesinde Bölüm 3'te ele alınan problem, Rzayev (2002)'in çalışmasında düzlem şekil değiştirme durumu için incelenmiştir. İlgili çalışmada kritik değerler $p_{kr,0} / E_0^{(2)}$ şeklinde verilmektedir. Tez çerçevesinde yapılan hesaplamalarda ise kritik değerlerin boyutsuzlaştırılması $p_{kr,0} / E^{(1)}$ şeklinde ifade edilmiştir. Dolayısıyla, tez çalışmasından elde edilen sonuçları, Rzayev (2002)'in çalışmasından elde edilenlerle karşılaştırmak için kullanılan kritik burkulma değeri $\delta_{kr,0}$,

$$\delta_{kr,0} (= p_{kr,0} h / (2E_0^{(2)} h_F + E^{(1)} h_C)) \quad (3.36)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Tez çalışmasında $\gamma_{31} = 8$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$, $h / \ell_1 = 0.15$ parametreleri için elde edilen $\delta_{kr,0}$ kritik burkulma kuvvetleri (pay) ile, Rzayev (2002)'in çalışmasında aynı parametre değerleri için verilen kritik burkulma kuvvetleri (payda) toplu olarak Çizelge 3.2'de gösterilmiştir. Sonuçların karşılaştırılmasından, $\gamma_{31} = 8$ için hesaplanan kritik burkulma değerlerinin, düzlem şekil değiştirme durumundaki uygun problemin çözümünden elde edilen sayısal sonuçlarla uyum gösterdiği söylenebilir.

Çizelge 3.2 Bazı $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ ve h_F / ℓ_1 için bulunan $\delta_{kr,0}$ değerleri (tez çalışması (pay)/ Rzayev (2002) (payda)) ($\gamma_{31} = 8$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$, $h / \ell_1 = 0.15$)

h_F / ℓ_1	$E_0^{(2)} / E^{(1)}$			
	1	5	10	20
0.0250	0.0108	0.0235	0.0382	0.0656
	0.0081	0.0269	0.0456	0.0722
0.0375	0.0192	0.0525	0.0903	0.1581
	0.0165	0.0471	0.0796	0.1304

Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2'de verilen sayısal sonuçlardan, ele alınan delaminasyon burkulması problemlerinin sayısal çözümünde kullanılan ve tarafımızdan yapılan algoritma ve programlara güven sağlanmaktadır.

Tez çerçevesinde, tablo ve grafik olarak verilen diğer sayısal sonuçların hepsi $\gamma_{31} = 1$ değeri için hesaplanmıştır.

Çizelge 3.3 $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ değişiminin, $\frac{p_{kr.0} / E^{(1)}}{p_{kr.\infty} / E^{(1)}}$ değerlerine etkisi ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$, $h_F / \ell_1 = 0.0375$)

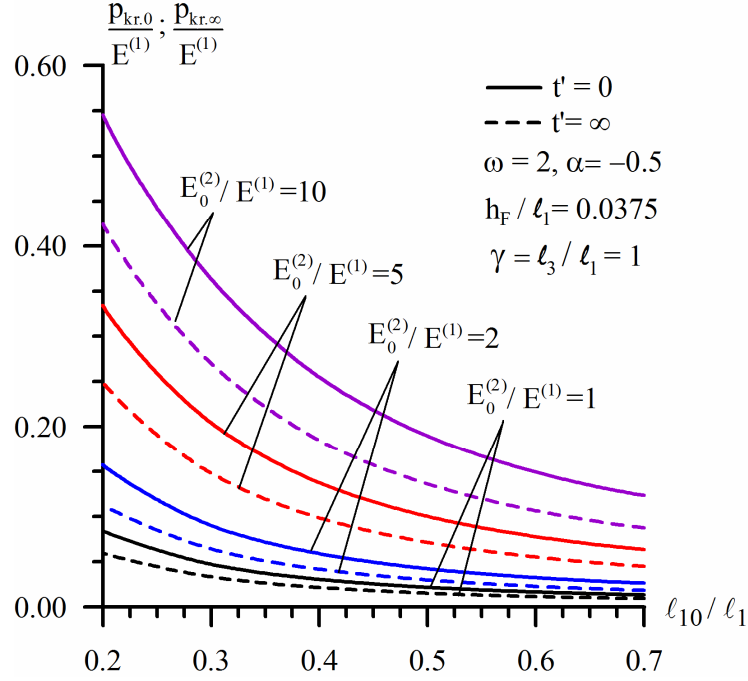
$E_0^{(2)} / E^{(1)}$	$\frac{p_{kr.0} / E^{(1)}}{p_{kr.\infty} / E^{(1)}}$
0.3	$\frac{0.0067}{0.0047}$
0.5	$\frac{0.0111}{0.0077}$
1	$\frac{0.0217}{0.0153}$
2	$\frac{0.0423}{0.0299}$
5	$\frac{0.1003}{0.0715}$
10	$\frac{0.1899}{0.1363}$
20	$\frac{0.3516}{0.2558}$

Çizelge 3.3'te, tabakaların elastisite modülü oranlarının ($E_0^{(2)} / E^{(1)}$) değişiminin, kritik burkulma kuvveti üzerindeki etkisi incelenmiştir. Tablodaki sayısal veriler incelendiğinde, dış tabakaların elastisite modülünün artmasıyla, $p_{kr.0} / E^{(1)}$ (pay), $p_{kr.\infty} / E^{(1)}$ (payda) kritik burkulma kuvveti değerlerinin arttığı görülmektedir.

Çizelge 3.4 h_F / ℓ_1 ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ değişiminin, $\frac{p_{kr.0} / E^{(1)}}{p_{kr.\infty} / E^{(1)}}$ değerlerine etkisi ($\gamma_{31} = 1$,
 $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$)

h_F / ℓ_1	$E_0^{(2)} / E^{(1)}$			
	1	2	5	10
0.01250	<u>0.0055</u> 0.0038	<u>0.0109</u> 0.0075	<u>0.0265</u> 0.0184	<u>0.0515</u> 0.0360
0.01875	<u>0.0083</u> 0.0058	<u>0.0163</u> 0.0114	<u>0.0395</u> 0.0277	<u>0.0760</u> 0.0537
0.02500	<u>0.0120</u> 0.0084	<u>0.0236</u> 0.0166	<u>0.0565</u> 0.0400	<u>0.1080</u> 0.0770
0.03125	<u>0.0166</u> 0.0116	<u>0.0323</u> 0.0228	<u>0.0770</u> 0.0547	<u>0.1463</u> 0.1047
0.03750	<u>0.0217</u> 0.0153	<u>0.0423</u> 0.0299	<u>0.1003</u> 0.0715	<u>0.1899</u> 0.1363
0.04375	<u>0.0275</u> 0.0193	<u>0.0533</u> 0.0377	<u>0.1262</u> 0.0899	<u>0.2385</u> 0.1712
0.05000	<u>0.0336</u> 0.0236	<u>0.0652</u> 0.0461	<u>0.1543</u> 0.1098	<u>0.2922</u> 0.2094
0.05625	<u>0.0400</u> 0.0281	<u>0.0777</u> 0.0548	<u>0.1847</u> 0.1311	<u>0.3517</u> 0.2511

Çizelge 3.4'te, Ox_2 doğrultusundaki dış tabaka kalınlıklarının (h_F / ℓ_1) ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ 'nin bazı değerlerinde hesaplanan $p_{kr.0} / E^{(1)}$ (pay) ve $p_{kr.\infty} / E^{(1)}$ (payda) kritik burkulma kuvveti değerleri verilmiştir. Tablodaki sayısal verilerden, dış tabakaların kalınlığı ve/veya dış tabakaların elastisite modülü arttıkça, kritik burkulma değerlerinin arttığı görülmektedir.



Şekil 3.4 Çeşitli l_{10}/l_1 ve $E_0^{(2)}/E^{(1)}$ için elde edilen $p_{kr,0}/E^{(1)}$ ve $p_{kr,\infty}/E^{(1)}$ değerlerinin, l_{10}/l_1 'e bağlı değişimi ($\gamma_{31}=1$, $h_F/l_1=0.0375$)

Şekil 3.4'te, Ox_1 doğrultusundaki çatlak uzunluğunun (l_{10}/l_1) çeşitli değerleri için hesaplanan $p_{kr,0}/E^{(1)}$ ve $p_{kr,\infty}/E^{(1)}$ değerleri grafik olarak verilmiştir. Sonuçlardan görüldüğü üzere ve beklenildiği gibi çatlak uzunluğu azaldıkça ve/veya dış tabakaların elastisite modülü arttıkça kritik burkulma kuvveti değerleri artmaktadır.

3.3.2 Viskoelastik Dikdörtgen Sandviç Plakta Delaminasyon Burkulması

Bu alt bölümde, dış tabakaların malzemesinin lineer viskoelastik ve çekirdek tabakası malzemesinin elastik olması durumuna karşı gelen viskoelastik sandviç kalın plağın delaminasyon burkulması probleminin çözülmesinden elde edilen kritik zaman parametresine ait sayısal sonuçlar verilmektedir.

Ele alınan durumda, sabit dış basınç kuvveti ($p/E^{(1)}$) için, zaman ilerlerken sandviç kalın plağın delaminasyon burkulmasına neden olan kritik zaman değeri (t'_{kr}), Hoff kriteri'nden belirlenmektedir. Hesaplamalarda kullanılan sabit dış basıncın değeri $p/E^{(1)}$,

$$p_{kr,\infty}/E^{(1)} < p/E^{(1)} < p_{kr,0}/E^{(1)} \quad (3.37)$$

koşulundan seçilmektedir. Böylece, göz önüne alınan lineer viskoelastik malzemeden yapılmış sandviç kalın plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik zaman değeri, çeşitli geometrik ve malzeme parametreleri çerçevesinde incelenmiştir. Elde edilen sayısal sonuçlar ve yorumları aşağıda verilmiştir.

Çizelge 3.5 Çeşitli h_F / ℓ_1 ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ için hesaplanan t'_{kr} değerleri ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$, $\omega = 2$, $\alpha = -0.5$)

$E_0^{(2)} / E^{(1)}$	h_F / ℓ_1					
	0.0375		0.0250		0.0125	
	$p / E^{(1)}$	t'_{kr}	$p / E^{(1)}$	t'_{kr}	$p / E^{(1)}$	t'_{kr}
1	0.0210	0.001	0.0110	0.010	0.0052	0.003
	0.0200	0.008	0.0100	0.104	0.0050	0.010
	0.0190	0.034	0.0900	1.885	0.0048	0.029
2	0.0400	0.003	0.0220	0.005	0.0100	0.007
	0.0390	0.008	0.0210	0.020	0.0090	0.093
	0.0380	0.017	0.0200	0.066	0.0080	2.261
5	0.0960	0.001	0.0510	0.015	0.0250	0.003
	0.0950	0.003	0.0500	0.025	0.0240	0.011
	0.0940	0.004	0.0490	0.041	0.0230	0.033
10	0.1800	0.003	0.1000	0.007	0.0480	0.004
	0.1700	0.021	0.0900	0.113	0.0460	0.016
	0.1600	0.096	0.0800	5.171	0.0440	0.048

Çizelge 3.5'te $E_0^{(2)} / E^{(1)}$, h_F / ℓ_1 ve $p / E^{(1)}$ parametre değerleri değişiminin, t'_{kr} değerine etkisi, $\gamma_{31} = 1$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$, $\omega = 2$, $\alpha = -0.5$ için verilmiştir. Tablodaki sayısal sonuçlardan görüldüğü üzere, $p / E^{(1)}$ değerleri büyüdükçe (küçüldükçe), yani bu değer $p_{kr.0} / E^{(1)}$ ($p_{kr.\infty} / E^{(1)}$) değerine yaklaştıkça, kritik zaman değeri azalmaktadır (artmaktadır).

Çizelge 3.6 Çeşitli ω ve α için hesaplanan t'_{kr} değerleri ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$,
 $h_F / \ell_1 = 0.0250$)

$E_0^{(2)} / E^{(1)}$	$p / E^{(1)}$	α	ω	t'_{kr}
2	0.0210	-0.5	1	0.014
			2	0.020
			3	0.032
		-0.3	2	0.051
				0.020
				0.002
5	0.0500	-0.5	1	0.016
			2	0.025
			3	0.042
		-0.3	2	0.059
				0.025
				0.003
10	0.0900	-0.5	1	0.052
			2	0.113
			3	0.414
		-0.3	2	0.173
				0.113
				0.042

Çizelge 3.6'da farklı elastisite modülü oranlarında, viskoelastik malzemenin reolojik parametrelerinin (ω ve α) çeşitli değerlerinin, kritik zaman üzerindeki etkisi, $\gamma_{31} = 1$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$ ve $h_F / \ell_1 = 0.0250$ için araştırılmıştır. Sonuçlardan görüldüğü üzere kritik zaman değeri, ω arttıkça artmakta; $|\alpha|$ arttıkça azalmaktadır. Bu durum bilinen mekanik görüşlerle uyumludur. Çünkü, viskoelastik malzemelerde ω parametresinin artması, malzemede daha rijit bir davranışı ortaya koyarken, $|\alpha|$ değerinin artması, malzemenin rijitliğini azaltıcı yönde etki göstermektedir. Dolayısıyla, tablolarda verilen ve tez çerçevesinde elde edilen sayısal sonuçlar bilinen mekanik görüşlere uymaktadır.

4. KENAR ÇATLAK İÇEREN ELASTİK VE VİSKOELASTİK SANDVIÇ KALIN PLAĞIN DELAMİNASYONU

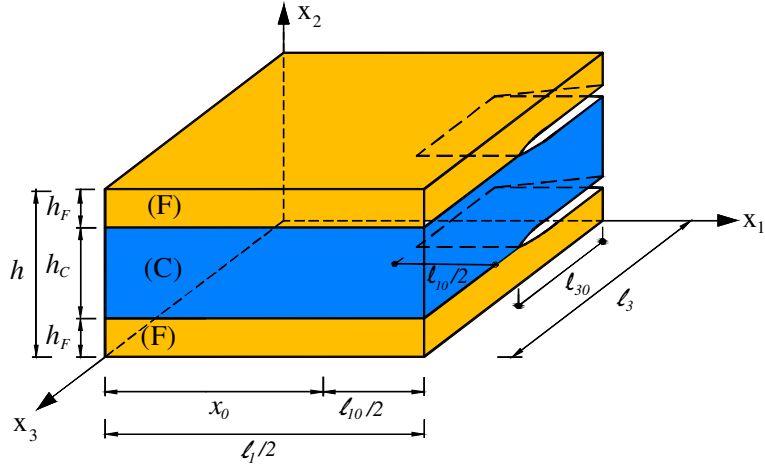
Bu bölümde, tez çerçevesinde ele alınan sandviç kalın plağın tabakaları arasında kenar çatlakların olması durumu incelenmektedir. İncelemelerde, üç tabakadan oluşan sandviç kalın plağın $x_1 = 0; \ell_1$ ile $x_3 = \ell_3$ kenarlarından basit mesnetle tutturulduğu, çekirdek ve dış yüzey tabakaları arasında birbirine eşit uzunlukta, birbirine paralel iki adet kenar çatlağın bulunduğu ve çatlakların yüzeylerinin başlangıçta çok küçük bir ön eğintiye sahip olduğu kabul edilmektedir. Ele alınan sandviç kalın plağın delaminasyon burkulma probleminin, çatlak yüzeylerinde olduğu kabul edilen bu çok küçük ön eğintilerin gelişiminin incelenmesine dönüştürülmesi ve kritik parametre değerlerinin belirlenmesi yine Hoff kriteri çerçevesinde yapılmıştır (Hoff, 1954).

4.1 Problemin Matematiksel Modeli

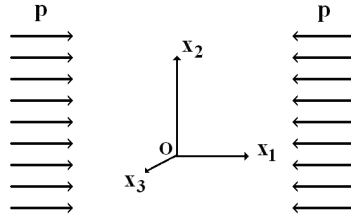
Bu alt bölümde, üç kenarından basit mesnetle tutturulmuş, üç tabakadan oluşan ve tabakaları arasında birbirine paralel ve eşit uzunlukta iki makro-kenar çatlak bulunan, çekirdek tabakası elastik ve dış tabakaları lineer viskoelastik olan sandviç kalın plağın, karşılıklı iki kenarından çatlaklar doğrultusunda etkiyen düzgün yayılı statik basınç yükü etkisinde delaminasyon burkulma problemine ait matematiksel model verilmektedir.

Burada ele alınan sınır değer problemi, Bölüm 3'te verilen sınır değer probleminden sınır koşulları ve çatlak geometrisi açılarından farklılık göstermektedir. Bu farklılıkların Bölüm 3'te verilen matematiksel modelde göz önüne alınması ile ele alınan sınır değer problemine ait matematiksel model elde edilebilir. Dolayısıyla, ele alınan problemin matematiksel modeli, Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Stabilite Teorisi (LEÜBST) ve lineer viskoelastik malzemeler için parçalı sürekli cisim modeli çerçevesinde yapılmıştır. Sandviç plağın elastik ve viskoelastik malzemeden yapılmış olması durumları ayrı ayrı incelenmiş; ancak, matematiksel model plak malzemesinin viskoelastik olması durumu için verilmiştir.

Kenar çatlaklar içeren sandviç kalın plağın geometrisi ve yükleme durumu Şekil 4.1'de verilmektedir. Plağa bağlı $Ox_1x_2x_3$ kartezyen koordinat takımı, plağın yüklenmeden önceki durumunu belirten Lagrange koordinatları ile ilişkilendirilmektedir.



(a)



(b)

Şekil 4.1 Kenar çatlaklar içeren sandviç kalın plakta; a) yarım plak geometrisi b) tüm plak için yükleme durumu

Ele alınan sınır değer probleminin çözüm bölgesi,

$$V' = V - \Omega_1 - \Omega_2 \quad (4.1)$$

olur. (4.1)'de,

$$V = V^{(1)} \cup V^{(2)} \cup V^{(3)},$$

$$V^{(1)} = \{0 \leq x_1 \leq l_1; 0 \leq x_2 \leq h_F; 0 \leq x_3 \leq l_3\},$$

$$V^{(2)} = \{0 \leq x_1 \leq l_1; h_F \leq x_2 \leq h_F + h_C; 0 \leq x_3 \leq l_3\},$$

$$V^{(3)} = \{0 \leq x_1 \leq l_1; h_F + h_C \leq x_2 \leq h; 0 \leq x_3 \leq l_3\}, \quad (4.2)$$

$$\Omega_1 = \{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2; x_2 = h_F; 0 \leq x_3 \leq \ell_{30}\},$$

$$\Omega_2 = \{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2; x_2 = h_F + h_C; 0 \leq x_3 \leq \ell_{30}\} \quad (4.3)$$

dir. Yukarıda verilen ifadelerde $V^{(k)}$ ($k=1,2,3$) sandviç kalın plağın tabakalarını, Ω_i ($i=1,2$) sandviç plağın içerdiği kenar çatlakların bulunduğu bölgeleri temsil etmektedir. Ayrıca; (4.3)'deki ℓ_{10} , ℓ_{30} , sırasıyla kenar çatlağın Ox_1 , Ox_3 doğrultularındaki uzunluklarını göstermektedir. Çatlak yüzeylerinin önceden çok küçük eğriliğe sahip olduğu ve bu eğriliklerin $x_1 = \ell_1 / 2$ düzlemi ile $x_2 = h_F$ (alt çatlak için) ve $x_2 = h_F + h_C$ (üst çatlak için) düzlemlerine göre simetrik olduğu kabul edilmektedir. Bu duruma uygun olarak alt ve üst çatlak yüzeylerinin denklemi,

$$x_2^\pm = h_F + \varepsilon f^\pm(x_1, x_3), \quad x_2^\pm = h_F + h_C + \varepsilon f^\pm(x_1, x_3),$$

$$(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2, \quad 0 \leq x_3 \leq \ell_{30} \quad (4.4)$$

şeklinde verilmektedir. Burada ε ($\varepsilon \ll 1$), çatlak yüzeylerinin başlangıçta sahip olduğu kabul edilen eğintinin derecesini gösteren boyutsuz küçük bir parametre, $f(x_1, x_3)$ çatlak yüzeylerindeki küçük eğintinin formunu gösteren fonksiyondur. f fonksiyonunun üst indisinde bulunan '+' ('-'), göz önüne alınan çatlağın üst (alt) yüzeyini ifade etmektedir. $f(x_1, x_3)$ fonksiyonunun aşağıdaki eşitlikleri sağladığı kabul edilmektedir:

$$f^+(x_1, x_3) = -f^-(x_1, x_3),$$

$$f^\pm((\ell_1 - \ell_{10})/2, x_3) \Big|_{0 \leq x_3 \leq \ell_{30}} = f^\pm((\ell_1 + \ell_{10})/2, x_3) \Big|_{0 \leq x_3 \leq \ell_{30}} = 0,$$

$$\frac{\partial f^\pm((\ell_1 - \ell_{10})/2, x_3)}{\partial x_3} \Big|_{0 \leq x_3 \leq \ell_{30}} = \frac{\partial f^\pm((\ell_1 + \ell_{10})/2, x_3)}{\partial x_3} \Big|_{0 \leq x_3 \leq \ell_{30}} = 0,$$

$$f^\pm(x_1, \ell_{30}) \Big|_{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2} = 0,$$

$$\frac{\partial f^\pm(x_1, \ell_{30})}{\partial x_1} \Big|_{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2} = 0. \quad (4.5)$$

Bölüm 3'de olduğu gibi, matematiksel ifadelerde kullanılan r_k üst indisi, sandviç kalın plağın tabakalarına ait büyüklükleri (r_1 ve r_3 , sırasıyla alt ve üst dış tabakalara ait büyüklükleri, r_2 çekirdek tabakasına ait büyüklükleri) göstermektedir. Ele alınan problemin matematiksel modeli, viskoelastik cisim için üç boyutlu geometrik doğrusal olmayan yönetici denklemler yardımıyla verilebilir. Buna göre;

denge denklemleri

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{jn}^{(r_k)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_k)}}{\partial x_n} \right) \right] = 0, \quad (4.6)$$

geometrik ilişkiler

$$\varepsilon_{ij}^{(r_k)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(r_k)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(r_k)}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_n^{(r_k)}}{\partial x_i} \frac{\partial u_n^{(r_k)}}{\partial x_j} \right), \quad (4.7)$$

bünye denklemleri

$$\sigma_{ij}^{(r_k)} = \lambda^{*(r_k)} \theta^{(r_k)} \delta_i^j + 2\mu^{*(r_k)} \varepsilon_{ij}^{(r_k)}, \quad \theta^{(r_k)} = \varepsilon_{11}^{(r_k)} + \varepsilon_{22}^{(r_k)} + \varepsilon_{33}^{(r_k)} \quad (4.8)$$

olur. Yukarıdaki ifadelerde bilinen notasyonlar kullanılmıştır ve $i; j; n; k = 1, 2, 3$, $r_1 = r_3 = (2)$, $r_2 = (1)$ 'dir. Ayrıca $\lambda^{*(r_k)}$ ve $\mu^{*(r_k)}$ viskoelastik malzemenin mekanik sabitlerini gösteren operatörlerdir (Bölüm 3).

Ele alınan sandviç plağa ait sınır koşulları

$$u_2^{(r_k)} \Big|_{x_1=0; \ell_1} = 0, \quad u_2^{(r_k)} \Big|_{x_3=\ell_3} = 0,$$

$$\left[\sigma_{1n}^{(r_k)} \left(\delta_1^n + \frac{\partial u_1^{(r_k)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_1=0; \ell_1} = p, \quad \left[\sigma_{1n}^{(r_k)} \left(\delta_3^n + \frac{\partial u_3^{(r_k)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_1=0; \ell_1} = 0,$$

$$\left[\sigma_{3n}^{(r_k)} \left(\delta_1^n + \frac{\partial u_1^{(r_k)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_3=\ell_3} = 0, \quad \left[\sigma_{3n}^{(r_k)} \left(\delta_3^n + \frac{\partial u_3^{(r_k)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_3=\ell_3} = 0,$$

$$\left[\sigma_{3n}^{(r_k)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_k)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_3=0} = 0 \quad (4.9)$$

$$\left[\sigma_{2n}^{(r_1)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_1)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \left[\sigma_{2n}^{(r_3)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_3)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_2=h} = 0, \quad (4.10)$$

$$\left[\sigma_{jn}^{(r_1)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_1)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{S_3^-} n_j^- = 0, \quad \left[\sigma_{jn}^{(r_2)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{S_3^+} n_j^+ = 0,$$

$$\left[\boldsymbol{\sigma}_{jn}^{(r_2)} \left(\boldsymbol{\delta}_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\mathcal{S}_4^-} n_j^- = 0, \quad \left[\boldsymbol{\sigma}_{jn}^{(r_3)} \left(\boldsymbol{\delta}_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_3)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\mathcal{S}_4^+} n_j^+ = 0,$$

$$\mathcal{S}_3^\pm = \left\{ \left((\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2 \right), x_2^\pm = h_F + \boldsymbol{\varepsilon} f^\pm(x_1, x_3), 0 \leq x_3 \leq \ell_{30} \right\},$$

$$\mathcal{S}_4^\pm = \left\{ \left((\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2 \right), x_2^\pm = h_F + h_C + \boldsymbol{\varepsilon} f^\pm(x_1, x_3), 0 \leq x_3 \leq \ell_{30} \right\} \quad (4.11)$$

olarak verilebilir. (4.9)-(4.11) eşitlikleri, sırasıyla dikdörtgen plağın yanal kenarlarındaki mesnet koşullarını, üst ve alt serbest yüzeyi ile çatlak yüzeylerindeki sınır koşullarını göstermektedir. (4.11) ifadesinde bulunan n_j^\pm , göz önüne alınan çatlak yüzeyine ait dış birim normal vektörün bileşenlerini göstermektedir.

Sandviç plağın tabakaları arasında ideal temas koşullarının sağlandığı kabul edilirse, tabakalar arasındaki yüzeylerde temas koşulları

$$u_i^{(r_1)} \Big|_{\wp_1^-} = u_i^{(r_2)} \Big|_{\wp_1^+}, \quad u_i^{(r_3)} \Big|_{\wp_2^+} = u_i^{(r_2)} \Big|_{\wp_2^-},$$

$$\left[\boldsymbol{\sigma}_{2n}^{(r_1)} \left(\boldsymbol{\delta}_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_1)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\wp_1^-} = \left[\boldsymbol{\sigma}_{2n}^{(r_2)} \left(\boldsymbol{\delta}_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\wp_1^+},$$

$$\left[\boldsymbol{\sigma}_{2n}^{(r_2)} \left(\boldsymbol{\delta}_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\wp_2^-} = \left[\boldsymbol{\sigma}_{2n}^{(r_3)} \left(\boldsymbol{\delta}_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_3)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\wp_2^+},$$

$$u_i^{(r_1)} \Big|_{\wp_3^-} = u_i^{(r_2)} \Big|_{\wp_3^+}, \quad u_i^{(r_3)} \Big|_{\wp_4^+} = u_i^{(r_2)} \Big|_{\wp_4^-},$$

$$\left[\boldsymbol{\sigma}_{2n}^{(r_1)} \left(\boldsymbol{\delta}_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_1)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\wp_3^-} = \left[\boldsymbol{\sigma}_{2n}^{(r_2)} \left(\boldsymbol{\delta}_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\wp_3^+},$$

$$\left[\boldsymbol{\sigma}_{2n}^{(r_2)} \left(\boldsymbol{\delta}_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\wp_4^-} = \left[\boldsymbol{\sigma}_{2n}^{(r_3)} \left(\boldsymbol{\delta}_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_3)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\wp_4^+},$$

$$\wp_1^\pm = \left\{ x_1 \in \left((0, (\ell_1 - \ell_{10})/2) \cup ((\ell_1 + \ell_{10})/2, \ell_1) \right), x_2 = h_F \pm 0, x_3 \in (0, \ell_3) \right\},$$

$$\wp_2^\pm = \left\{ x_1 \in \left((0, (\ell_1 - \ell_{10})/2) \cup ((\ell_1 + \ell_{10})/2, \ell_1) \right), x_2 = h_F + h_C \pm 0, x_3 \in (0, \ell_3) \right\},$$

$$\wp_3^\pm = \left\{ (\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2, x_2 = h_F \pm 0, \ell_{30} \leq x_3 \leq \ell_3 \right\},$$

$$\mathcal{D}_4^\pm = \left\{ (\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2, x_2 = h_F + h_C \pm 0, \ell_{30} \leq x_3 \leq \ell_3 \right\} \quad (4.12)$$

olarak verilebilir. Belirtelim ki, (4.6)-(4.12) ile verilen denklem ve bağıntılar doğrusal olmayan bir sınır değer problemini göstermektedir. Problemin çözümü, verilen matematiksel modelin doğrusallaştırılması ile elde edilen ‘‘Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Stabilite Teorisi (LEÜBST)’’ denklemleri kullanılarak yapılmıştır. Bu denklem takımının doğrusallaştırılması için boyutsuz küçük parametre ε ’dan yararlanılmaktadır. Belirtilen işlemler Bölüm 2’de ayrıntılı olarak verildiği için burada LEÜBST denklemlerinin elde edilmesine kısaca değinilmiştir.

Öncelikle, (4.4) ile verilen, çatlak yüzeylerine ait $x_2^\pm = h_F + \varepsilon f^\pm(x_1, x_3)$ veya $x_2^\pm = h_F + h_C + \varepsilon f^\pm(x_1, x_3)$ denklemleri kullanılarak, çatlak yüzeylerinin birim normal vektörünün bileşenleri için izleyen ifadeler elde edilir:

$$n_1^\pm = \frac{\pm \varepsilon \frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_1}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right)^2}},$$

$$n_2^\pm = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right)^2}},$$

$$n_3^\pm = \frac{\pm \varepsilon \frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_3}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right)^2}}. \quad (4.13)$$

Burada, $\varepsilon^2 \left| \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right)^2 \right| \ll 1$ olduğu kabul edilerek, (4.13) ile verilen

ifadeler ε cinsinden kuvvet serisi olarak ifade edilirse,

$$n_1^\pm = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k+1} n_{1k}^\pm(x_1, x_3), \quad n_2^\pm = \pm 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} n_{2k}^\pm(x_1, x_3), \quad n_3^\pm = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k+1} n_{3k}^\pm(x_1, x_3) \quad (4.14)$$

yazılabilir. Diğer taraftan aranan büyüklükler, boyutsuz küçük parametre olan ε ’na göre seri formunda aşağıdaki gibi yazılabilir (Bölüm 2);

$$\left\{ \sigma_{ij}^{(r_k)}; \varepsilon_{ij}^{(r_k)}; u_i^{(r_k)} \right\} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \left\{ \sigma_{ij}^{(r_k),q}; \varepsilon_{ij}^{(r_k),q}; u_i^{(r_k),q} \right\}, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (4.15)$$

(4.15) ifadesi, (4.6)-(4.8) yönetici denklemlerinde, plak kenarlarındaki sınır koşullarını (4.9)-(4.10) ve tabakalar arasındaki temas koşullarını (4.12) ifade eden denklemlerde yerine yazılır ve ε 'nin kuvvetlerine göre düzenlenerek gruplaştırılırsa, bu parametrenin kuvvetlerine göre düzenlenmiş kapalı denklemler sistemi ile plak kenarlarında sınır koşulları ve tabakalar arasında temas koşulları elde edilir. Aynı zamanda, (4.15)'deki büyüklükler, çekirdek tabaka için $(x_1, h_F + 0, x_3)$ ve $(x_1, h_F + h_C - 0, x_3)$ civarında, üst dış tabaka (alt dış tabaka) için ise $(x_1, h_F + h_C + 0, x_3)$ $((x_1, h_F - 0, x_3))$ civarında seriye açılır ve çatlak yüzeylerine ait birim normal vektörün bileşenlerini ifade eden (4.14) denklemi ile birlikte, çatlak yüzeyleri için verilmiş olan (4.11) sınır şartlarında yerlerine yerleştirilir ve ε 'nin kuvvetlerine göre düzenlenerek gruplaştırılırsa (sınır tipli pertürbasyon tekniği), bu parametrenin kuvvetlerine göre çatlak yüzeylerinde uygun sınır şartları elde edilir. Belirtelim ki, yukarıda elde edilmesi özetlenen seri-sınır değer problemlerinin her bir yaklaşımına ait denklem ve ifadeler çok büyük olduğu için burada yer verilmemiştir. Ancak özel bir problem için benzeri yolla elde edilen seri-sınır değer problemlerinin, her bir yaklaşımına ait matematiksel modeli Bölüm 2'de verilmiştir. Seri-sınır değer problemlerinin Bölüm 2'de verilen matematiksel modelleri göz önünde bulundurularak, bu kısımda elde edilebilecek uygun seri-sınır değer problemleri için bir benzeşim kurulabilir. Yukarıda özetlendiği şekilde ε 'nin kuvvetlerine göre elde edilen her bir sınır değer problemi, kendisinden önceki yaklaşımlara ait büyüklükleri içermektedir. (4-6)-(4.12) doğrusal olmayan sınır değer probleminin çözümü, bu seri-sınır değer problemlerinin her birinin çözülmesi ve çözümlerin süperpoze edilmesi ile elde edilir.

Ele alınan üç katlı sandviç kalın plağın delaminasyon burkulma probleminin çözümünde, Bölüm 2'de ayrıntılı olarak verilen burkulma kriterleri (Hoff, 1954) kullanılarak, kritik parametrelerin değerleri belirlenmiştir. Bölüm 2 ve Bölüm 3'te açıklanan nedenlerden dolayı kritik parametrelerin belirlenmesinde, sadece sıfıncı ve birinci yaklaşımın çözülmesi yeterli olmaktadır. Bu nedenle, yukarıda açıklanan seri-sınır değer problemlerinde sadece ilk ikisi çözülerek kritik parametreler belirlenmiştir. Bu iki yaklaşımın çözümüne geçmeden önce, yapı elemanı malzemesi viskoelastik olduğu için çözümden önce her bir yaklaşıma ait denklem ve bağıntılara, Bölüm 3'te belirtilen tarzda Laplace dönüşümü uygulanmaktadır. Sıfıncı yaklaşım için (3.17) yardımıyla $\sigma_{ij}^{(r_k),0}$, $\varepsilon_{ij}^{(r_k),0}$, $u_i^{(r_k),0}$, $\lambda^{(r_k)}$, $\mu^{(r_k)}$ büyüklüklerinin Laplace dönüşümleri, sırasıyla $\bar{\sigma}_{ij}^{(r_k),0}$, $\bar{\varepsilon}_{ij}^{(r_k),0}$, $\bar{u}_i^{(r_k),0}$, $\bar{\lambda}^{(r_k)}$, $\bar{\mu}^{(r_k)}$ ile gösterilirse, bu büyüklükler

sıfıncı yaklaşıma ait denklem ve bağıntılarda uygun şekilde Laplace dönüşümleri ile yer değiştirilirse, ilgili büyüklüklerin Laplace dönüşümlerine göre düzenlenmiş sıfıncı yaklaşım alan denklemleri, sınır ve temas koşulları elde edilir.

Aynı işlem birinci yaklaşım için de tekrarlanırsa, ilgili büyüklüklerin Laplace dönüşümlerine göre düzenlenmiş, birinci yaklaşım denklem ve bağıntıları aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ji}^{(r_k),1}}{\partial x_j} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_k),0} \frac{\partial^2 \bar{u}_i^{(r_k),1}}{\partial x_1^2} = 0,$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(r_k),1} = \bar{\lambda}^{*(r_k)} \bar{\theta}^{(r_k),1} \delta_{ij} + 2\bar{\mu}^{*(r_k)} \bar{\epsilon}_{ij}^{(r_k),1},$$

$$\bar{\epsilon}_{ij}^{(r_k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i^{(r_k),1}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j^{(r_k),1}}{\partial x_i} \right). \quad (4.16)$$

Plak kenarlarındaki sınır koşulları:

$$\bar{u}_2^{(r_k),1} \Big|_{x_1=0; \ell_1} = 0, \quad \bar{u}_2^{(r_k),1} \Big|_{x_3=\ell_3} = 0,$$

$$\left[\bar{\sigma}_{11}^{(r_k),1} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_k),0} \frac{\partial \bar{u}_1^{(r_k),1}}{\partial x_n} \right] \Big|_{x_1=0; \ell_1} = 0, \quad \bar{\sigma}_{13}^{(r_k),1} \Big|_{x_1=0; \ell_1} = 0,$$

$$\bar{\sigma}_{31}^{(r_k),1} \Big|_{x_3=\ell_3} = \bar{\sigma}_{33}^{(r_k),1} \Big|_{x_3=\ell_3} = 0,$$

$$\bar{\sigma}_{31}^{(r_k),1} \Big|_{x_3=0} = \bar{\sigma}_{32}^{(r_k),1} \Big|_{x_3=0} = \bar{\sigma}_{33}^{(r_k),1} \Big|_{x_3=0} = 0. \quad (4.17)$$

Plığın alt ve üst serbest yüzelerindeki sınır koşulları:

$$\bar{\sigma}_{21}^{(r_1),1} \Big|_{x_2=0} = \bar{\sigma}_{22}^{(r_1),1} \Big|_{x_2=0} = \bar{\sigma}_{23}^{(r_1),1} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \bar{\sigma}_{21}^{(r_3),1} \Big|_{x_2=h} = \bar{\sigma}_{22}^{(r_3),1} \Big|_{x_2=h} = \bar{\sigma}_{23}^{(r_3),1} \Big|_{x_2=h} = 0. \quad (4.18)$$

Çatlak yüzelerindeki sınır koşulları:

$$\bar{\sigma}_{21}^{(r_1),1} \Big|_{\bar{S}_3^-} = -\bar{\sigma}_{11}^{(r_1),0} \frac{\partial f^-}{\partial x_1}, \quad \bar{\sigma}_{22}^{(r_1),1} \Big|_{\bar{S}_3^-} = \bar{\sigma}_{23}^{(r_1),1} \Big|_{\bar{S}_3^-} = 0,$$

$$\bar{\sigma}_{21}^{(r_2),1} \Big|_{\bar{S}_3^+} = -\bar{\sigma}_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial f^+}{\partial x_1}, \quad \bar{\sigma}_{22}^{(r_2),1} \Big|_{\bar{S}_3^+} = \bar{\sigma}_{23}^{(r_2),1} \Big|_{\bar{S}_3^+} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{21}^{(r_2),1} \Big|_{\bar{S}_4^-} &= -\bar{\sigma}_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial f^+}{\partial x_1}, & \bar{\sigma}_{22}^{(r_2),1} \Big|_{\bar{S}_4^-} &= \bar{\sigma}_{23}^{(r_2),1} \Big|_{\bar{S}_4^-} = 0, \\
\bar{\sigma}_{21}^{(r_3),1} \Big|_{\bar{S}_4^+} &= -\bar{\sigma}_{11}^{(r_3),0} \frac{\partial f^-}{\partial x_1}, & \bar{\sigma}_{22}^{(r_3),1} \Big|_{\bar{S}_4^+} &= \bar{\sigma}_{23}^{(r_3),1} \Big|_{\bar{S}_4^+} = 0. \\
\bar{S}_3^\pm &= \{((\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2), x_2^\pm = h_F \pm 0, 0 \leq x_3 \leq \ell_{30}\}, \\
\bar{S}_4^\pm &= \{((\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2), x_2^\pm = h_F + h_C \pm 0, 0 \leq x_3 \leq \ell_{30}\}. \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Tabakalar arasındaki temas koşulları:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_i^{(r_1),1} \Big|_{\varphi_1^-} &= \bar{u}_i^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_1^+}, & \bar{u}_i^{(r_3),1} \Big|_{\varphi_2^+} &= \bar{u}_i^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_2^-}, \\
\left[\bar{\sigma}_{21}^{(r_1),1} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_1),0} \frac{\partial \bar{u}_i^{(r_1),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_1^-} &= \left[\bar{\sigma}_{21}^{(r_2),1} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial \bar{u}_i^{(r_2),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_1^+}, \\
\bar{\sigma}_{22}^{(r_1),1} \Big|_{\varphi_1^-} &= \bar{\sigma}_{22}^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_1^+}, & \bar{\sigma}_{23}^{(r_1),1} \Big|_{\varphi_1^-} &= \bar{\sigma}_{23}^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_1^+}, \\
\left[\bar{\sigma}_{21}^{(r_3),1} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_3),0} \frac{\partial \bar{u}_i^{(r_3),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_2^-} &= \left[\bar{\sigma}_{21}^{(r_2),1} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial \bar{u}_i^{(r_2),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_2^+}, \\
\bar{\sigma}_{22}^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_2^-} &= \bar{\sigma}_{22}^{(r_3),1} \Big|_{\varphi_2^+}, & \bar{\sigma}_{23}^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_2^-} &= \bar{\sigma}_{23}^{(r_3),1} \Big|_{\varphi_2^+}, \\
\bar{u}_i^{(r_1),1} \Big|_{\varphi_3^-} &= \bar{u}_i^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_3^+}, & \bar{u}_i^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_4^-} &= \bar{u}_i^{(r_3),1} \Big|_{\varphi_4^+}, \\
\left[\bar{\sigma}_{21}^{(r_1),1} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_1),0} \frac{\partial \bar{u}_i^{(r_1),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_3^-} &= \left[\bar{\sigma}_{21}^{(r_2),1} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial \bar{u}_i^{(r_2),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_3^+}, \\
\bar{\sigma}_{22}^{(r_1),1} \Big|_{\varphi_3^-} &= \bar{\sigma}_{22}^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_3^+}, & \bar{\sigma}_{23}^{(r_1),1} \Big|_{\varphi_3^-} &= \bar{\sigma}_{23}^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_3^+}, \\
\left[\bar{\sigma}_{21}^{(r_3),1} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_3),0} \frac{\partial \bar{u}_i^{(r_3),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_4^-} &= \left[\bar{\sigma}_{21}^{(r_2),1} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial \bar{u}_i^{(r_2),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_4^+}, \\
\bar{\sigma}_{22}^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_4^-} &= \bar{\sigma}_{22}^{(r_3),1} \Big|_{\varphi_4^+}, & \bar{\sigma}_{23}^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_4^-} &= \bar{\sigma}_{23}^{(r_3),1} \Big|_{\varphi_4^+} \tag{4.20}
\end{aligned}$$

olur. Böylece, birinci yaklaşım için Laplace dönüşümüne göre düzenlenmiş yönetici denklemler, sınır ve temas koşulları (4.16)-(4.20) ile ifade edilmektedir. Yukarıda verilen ifadelerde, $\bar{\sigma}_{jn}^{(r_k),0}$ sıfıncı yaklaşıma ait gerilmeleri göstermektedir. Bölüm 2’de belirtildiği gibi her bir yaklaşım, kendisinden önceki yaklaşımlara ait büyüklükleri içermektedir. Ayrıca $\bar{\lambda}^{*(r_k)}$ ve $\bar{\mu}^{*(r_k)}$ operatörler olup, Laplace dönüşümü uygulanmamış hali (3.9)’da verilmiştir. (4.16)-(4.20) denklem ve ifadelerinde, çarpım durumundaki büyüklüklere Laplace dönüşümü uygulanırken karşılaşılan güçlükler ve bu güçlüklerin aşılabilmesinde, Bölüm 3’te açıklanan işlemler tekrarlanmıştır.

Birinci yaklaşıma ait sınır değer probleminin ifadelerinde, sıfıncı yaklaşıma ait gerilme büyüklüğünün bulunması sebebiyle, öncelikle sıfıncı yaklaşımın çözümü belirlenmiştir. Sıfıncı yaklaşımın çözümü, ele alınan sınır koşulları ve yükleme durumu ile bilinen mekanik görüşler çerçevesinde doğrudan yazılabilir (Bölüm 3):

$$2h_F \sigma_{11}^{(2),0}(t) + h_C \sigma_{11}^{(1),0}(t) = ph, \quad \sigma_{11}^{(2),0}(t)/E^{*(2)} = \sigma_{11}^{(1),0}(t)/E^{*(1)}. \quad (4.21)$$

Burada,

$$E^{*(k)} \varphi(t) = E_0^{(k)} \varphi(t) + \int_0^t E^{(k)}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \quad (4.22)$$

olduğu göz önüne alınırsa, sıfıncı yaklaşımın Laplace dönüşümünün çözümü

$$\bar{\sigma}_{11}^{(r_1),0} = \bar{\sigma}_{11}^{(r_3),0} = p \frac{\bar{E}^{*(2)} (2h_F + h_C)}{s(2h_F \bar{E}^{*(2)} + h_C \bar{E}^{*(1)})},$$

$$\bar{\sigma}_{11}^{(r_2),0} = \bar{\sigma}_{11}^{(r_1),0} \frac{\bar{E}^{*(1)}}{\bar{E}^{*(2)}},$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(r_k),0} = 0, \quad (ij \neq 11) \quad (4.23)$$

olarak elde edilir.

Bölüm 3’te açıklandığı üzere, tez çerçevesinde incelenen delaminasyon burkulma problemi için kritik parametrelerin belirlenmesinde, sıfıncı yaklaşımın çözümünde, sınırlar civarındaki gerilme yayılımlarının homojen olmaması durumu gözardı edilmiştir. Böylece sıfıncı yaklaşımın çözümü sonucunda elde edilen gerilmeler (4.23) ile verilebilir. Birinci yaklaşımın çözümü için (4.16)-(4.20) ile verilen sınır değer probleminin çözümü yapılmalıdır. Birinci yaklaşımın çözümü, bir sonraki alt bölümde ele alınmaktadır.

4.2 Sonlu Elemanlar Modeli

Birinci yaklaşımın Laplace uzayında verilmiş (4.16)-(4.20) sınır değer problemine ait sonlu eleman formülasyonunun belirlenmesinde,

$$\begin{aligned}
\Pi(\bar{u}_1^{(r_k),1}, \bar{u}_2^{(r_k),1}, \bar{u}_3^{(r_k),1}) &= \sum_{k=1}^3 \left[\frac{1}{2} \iiint_{V'} \left[\left(\bar{\sigma}_{11}^{(r_k),1} + \sigma_{11}^{(r_k),0}(t_1) \frac{\partial \bar{u}_1^{(r_k),1}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \bar{u}_1^{(r_k),1}}{\partial x_1} + \bar{\sigma}_{12}^{(r_k),1} \frac{\partial \bar{u}_1^{(r_k),1}}{\partial x_2} + \bar{\sigma}_{13}^{(r_k),1} \frac{\partial \bar{u}_1^{(r_k),1}}{\partial x_3} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left(\bar{\sigma}_{21}^{(r_k),1} + \sigma_{11}^{(r_k),0}(t_1) \frac{\partial \bar{u}_2^{(r_k),1}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \bar{u}_2^{(r_k),1}}{\partial x_1} + \bar{\sigma}_{22}^{(r_k),1} \frac{\partial \bar{u}_2^{(r_k),1}}{\partial x_2} + \bar{\sigma}_{23}^{(r_k),1} \frac{\partial \bar{u}_2^{(r_k),1}}{\partial x_3} + \right. \\
&\quad \left. \left(\bar{\sigma}_{31}^{(r_k),1} + \sigma_{11}^{(r_k),0}(t_1) \frac{\partial \bar{u}_3^{(r_k),1}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \bar{u}_3^{(r_k),1}}{\partial x_1} + \bar{\sigma}_{32}^{(r_k),1} \frac{\partial \bar{u}_3^{(r_k),1}}{\partial x_2} + \bar{\sigma}_{33}^{(r_k),1} \frac{\partial \bar{u}_3^{(r_k),1}}{\partial x_3} \right] dx_1 dx_2 dx_3 \left. - \right. \\
&\int_0^{\ell_{30}} \int_{(\ell_1 - \ell_{10})/2}^{(\ell_1 + \ell_{10})/2} \frac{1}{s} \sigma_{11}^{(r_1),0}(t_1) \frac{\partial f^-}{\partial x_1} \bar{u}_1^{(r_1),1} \Big|_{x_2=h_F-0} dx_1 dx_3 - \int_0^{\ell_{30}} \int_{(\ell_1 - \ell_{10})/2}^{(\ell_1 + \ell_{10})/2} \frac{1}{s} \sigma_{11}^{(r_2),0}(t_1) \frac{\partial f^+}{\partial x_1} \bar{u}_1^{(r_2),1} \Big|_{x_2=h_F+0} dx_1 dx_3 - \\
&\int_0^{\ell_{30}} \int_{(\ell_1 - \ell_{10})/2}^{(\ell_1 + \ell_{10})/2} \frac{1}{s} \sigma_{11}^{(r_2),0}(t_1) \frac{\partial f^-}{\partial x_1} \bar{u}_1^{(r_2),1} \Big|_{x_2=(h_F+h_C)-0} dx_1 dx_3 - \\
&\left. \int_0^{\ell_{30}} \int_{(\ell_1 - \ell_{10})/2}^{(\ell_1 + \ell_{10})/2} \frac{1}{s} \sigma_{11}^{(r_3),0}(t_1) \frac{\partial f^+}{\partial x_1} \bar{u}_1^{(r_3),1} \Big|_{x_2=(h_F+h_C)+0} dx_1 dx_3 \right] \quad (4.24)
\end{aligned}$$

fonksiyoneli ve Ritz tekniği kullanılmıştır. Belirtelim ki; (4.24) fonksiyonelinin yer değiştirmelere göre birinci varyasyonunun sıfıra eşitliğinden,

$$\delta \Pi = \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{u}_1^{(r_k)}} \delta \bar{u}_1^{(r_k)} + \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{u}_2^{(r_k)}} \delta \bar{u}_2^{(r_k)} + \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{u}_3^{(r_k)}} \delta \bar{u}_3^{(r_k)} \right] = 0 \quad (4.25)$$

birinci yaklaşıma ait alan denklemleri ve gerilmelere göre verilmiş sınır koşulları elde edilmektedir. Bu işlemler yapılarak, (4.24) fonksiyonelinin, ele alınan sınır değer problemine özdeş bir fonksiyonel olduğu gösterilmektedir.

Sonlu eleman çözümünde, çözüm bölgesi ve yükleme durumu göz önüne alındığında, $x_1 = \ell_1 / 2$ ve $x_2 = h / 2$ düzlemlerine göre simetri özelliğinden yararlanılarak, plağın 1/4'lük parçası göz önüne alınmıştır. Buna göre, ele alınan çözüm bölgesinin 1/4'lük parçası, sonlu sayıda alt bölgeye (sonlu elemana; $\Omega_{(k)}$, $k=1,2,\dots,M$) ayrıştırılmıştır. Dolayısıyla,

$$V' = \bigcup_{k=1}^M \Omega_k \quad (4.26)$$

olur. Sonlu eleman ayrıklaştırması, sayısal sonuçların yakınsaklığı özelliğinden ve literatürdeki uygun sayısal sonuçlara en iyi yaklaşımın sağlandığı sonlu eleman ağı arasından seçilmiştir. Bölgenin ayrıklaştırmasında, bütün bölgede sekiz nodlu standart dikdörtgen prizmatik sonlu elemanlar kullanılmıştır (Zienkiewicz, O. C. ve Taylor, R. L., (1989)). Sonlu eleman ayrıklaştırmasında plağın 1/4'lük parçası, Ox_1 doğrultusunda 20, Ox_2 doğrultusunda 12 ve Ox_3 doğrultusunda 20 adet dikdörtgen prizma şeklindeki sonlu elemana ayrıklaştırılarak, toplamda 4800 adet sonlu eleman, $\ell_{10} = \ell_{30} = 0.5\ell_1$ durumu için; 5833 düğüm noktası ve 16283 serbestlik derecesi kullanılmıştır. Belirtelim ki, çatlak büyüklüğüne bağlı olarak düğüm noktası sayısı ve bilinmeyen sayısı değişmektedir. Örneğin toplam sonlu eleman adedi sabit kalmak koşuluyla, yapıdaki çatlak boyutu arttırıldığında (azaltıldığında) düğüm noktası sayısı dolayısıyla serbestlik derecesi artmaktadır (azalmaktadır).

Tez kapsamında yer değiştirme esaslı sonlu elemanlar yöntemi kullanıldığından, aranan yer değiştirme fonksiyonunun polinom olarak ifadesi, şekil fonksiyonları ve düğüm noktalarında aranan yer değiştirmeler kullanılarak aşağıdaki gibi seçilir:

$$\mathbf{u}^{(k)} \approx \mathbf{N}^{(k)} \mathbf{a}^{(k)}, \quad k=1,2,\dots,M \quad (4.27)$$

(4.27) ifadesi, (4.24) fonksiyonelinde yerine yazılınca Ritz tekniği yardımıyla uygun cebrik denklem sistemi elde edilir:

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{r}. \quad (4.28)$$

(4.28) cebrik denklem sisteminin çözülmesiyle, düğüm noktalarında aranan yer değiştirme değerleri, dolayısıyla her sonlu elemanda, yer değiştirme fonksiyonu belirlenir. Bu fonksiyonların ilkel (orijinal) değerlerinin belirlenmesinde Schapery (1966) yöntemi kullanılmıştır (Bölüm 2.4). Daha önceki bölümlerde olduğu gibi bu bölümde de ele alınan problemin çözümünün gerektirdiği bütün algoritma ve programlar tarafımızdan yapılmıştır.

4.3 Sayısal Sonuçlar ve Değerlendirme

İki adet kenar çatlak içeren sandviç kalın plağın delaminasyon burkulması; çekirdek tabakanın ve dış tabakaların malzemesi elastik ile çekirdek tabakanın malzemesi elastik ve dış tabakaların malzemesi lineer viskoelastik olması durumlarına göre, iki ayrı problem halinde

incelenmiş ve sayısal sonuçlar ayrı ayrı verilmiştir. Dış tabakaların aynı malzemeden, çekirdek tabakasının ise farklı malzemeden yapıldığı varsayılmaktadır. Çekirdek tabakasının malzemesine ait mekanik sabitler $E^{(1)}$ ve $\nu^{(1)}$, dış tabakaların malzemesine ait mekanik sabitler $E^{*(2)}$ ve $\nu^{*(2)}$ ile gösterilmektedir. Viskoelastik malzemenin mekanik sabitleri olan $E^{*(2)}$ ve $\nu^{*(2)}$ ifadelerinin açıklamaları (3.32)-(3.34) ile verilmiştir.

Çatlak yüzeylerine başlangıçta verilen ön eğintinin sağlaması gereken koşullara uygun olarak (4.5) ifadesinde verilen $f(x_1, x_3)$ fonksiyonu

$$f^{\pm}(x_1, x_3) = \pm \ell_{10} \sin^2 \left(\frac{\pi}{\ell_{10}} \left(x_1 - \frac{\ell_1 - \ell_{10}}{2} \right) \right) \times \sin^2 \left(\frac{\pi}{2\ell_{30}} (\ell_{30} - x_3) \right) \quad (4.29)$$

şeklinde seçilmiştir. (4.29) fonksiyonu, çatlakın alt ve üst yüzeylerinin birbirine göre simetrik ama zıt yönde eğriliğe sahip olmasına karşı gelmektedir (Şekil 3.2).

Yapılan hesaplamalarda, boyutsuz reolojik parametre $\omega = \omega_{\infty} / \omega_0$ ve boyutsuz zaman $t' = \omega_0^{1/(1+\alpha)} t$ kullanılmıştır. Sayısal sonuçların elde edilmesinde, $h / \ell_1 = 0.15$, $\nu^{(1)} = \nu_0^{(2)} = 0.3$ değerleri sabit kalmak üzere, diğer malzeme ve geometrik parametrelerin değişiminin kritik parametreler üzerindeki etkisi incelenmiş ve elde edilen sayısal sonuçlar izleyen alt bölümlerde verilmiştir.

4.3.1 Elastik Dikdörtgen Sandviç Plakta Delaminasyon Burkulması

Bu alt bölümde, dış tabakalar ile çekirdek tabakanın malzemesi farklı ($E_0^{(2)} / E^{(1)} \neq 1$) ve aynı ($E_0^{(2)} / E^{(1)} = 1$) olmak üzere, her üç tabakanın elastik malzemeden yapılması durumu incelenmiştir. Boyutsuz zaman parametresinin $t' = 0$, $t' = \infty$ değerleri için, sırasıyla $p_{kr,0} / E^{(1)}$, $p_{kr,\infty} / E^{(1)}$ şeklinde ifade edilecek olan kritik delaminasyon burkulma kuvvetleri araştırılmıştır. $t' = \infty$ için yapılan hesapta, $\omega = 2$, $\alpha = -0.5$ değerleri kullanılmıştır.

Çizelge 4.1 $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ değişiminin, $\frac{p_{kr.0} / E^{(1)}}{p_{kr.\infty} / E^{(1)}}$ değerlerine etkisi ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{30} / \ell_1 = 0.3$,
 $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$, $h_F / \ell_1 = 0.0375$)

$E_0^{(2)} / E^{(1)}$	$\frac{p_{kr.0} / E^{(1)}}{p_{kr.\infty} / E^{(1)}}$
0.3	$\frac{0.0092}{0.0062}$
0.5	$\frac{0.0153}{0.0103}$
1	$\frac{0.0300}{0.0204}$
2	$\frac{0.0583}{0.0399}$
5	$\frac{0.1379}{0.0950}$
10	$\frac{0.2598}{0.1805}$
20	$\frac{0.4755}{0.3369}$

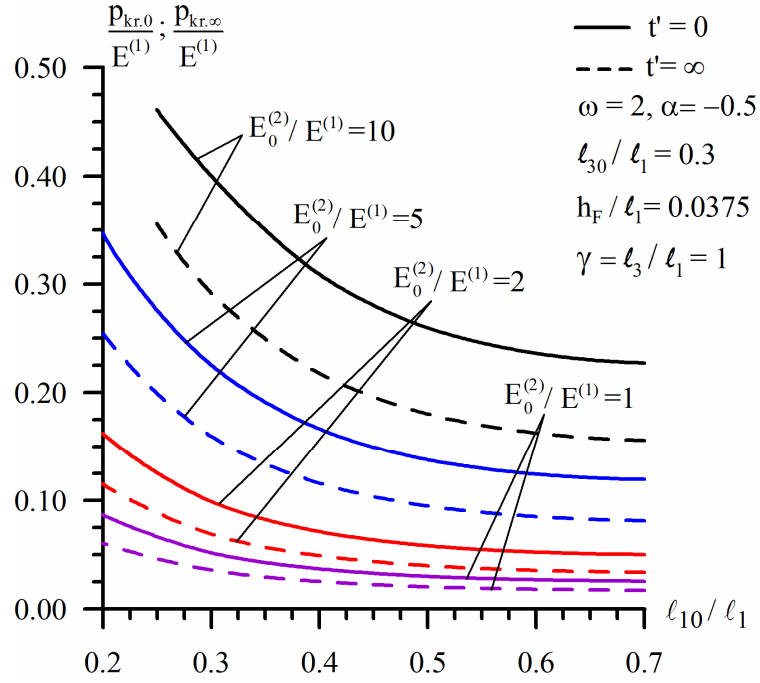
Çizelge 4.1’de, tabakaların elastisite modülü oranlarının ($E_0^{(2)} / E^{(1)}$) değişiminin, $p_{kr.0} / E^{(1)}$ (pay) ve $p_{kr.\infty} / E^{(1)}$ (payda) kritik burkulma kuvveti değerlerine etkisi incelenmiştir. Tabloda verilen sayısal sonuçlardan, dış tabakaların iç tabakaya göre elastisite modülü oranlarının artmasıyla, kritik burkulma değerlerinin de arttığı görülmektedir.

Çizelge 4.2 h_F / ℓ_1 ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ değişiminin, $\frac{p_{kr.0} / E^{(1)}}{p_{kr.\infty} / E^{(1)}}$ değerlerine etkisi ($\gamma_{31} = 1$,
 $\ell_{30} / \ell_1 = 0.3$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$)

h_F / ℓ_1	$E_0^{(2)} / E^{(1)}$			
	1	2	5	10
0.01250	<u>0.0083</u>	<u>0.0164</u>	<u>0.0400</u>	<u>0.0776</u>
	0.0055	0.0110	0.0269	0.0525
0.01875	<u>0.0121</u>	<u>0.0238</u>	<u>0.0575</u>	<u>0.1104</u>
	0.0081	0.0161	0.0391	0.0756
0.02500	<u>0.0171</u>	<u>0.0336</u>	<u>0.0802</u>	<u>0.1529</u>
	0.0116	0.0228	0.0550	0.1055
0.03125	<u>0.0232</u>	<u>0.0452</u>	<u>0.1073</u>	<u>0.2031</u>
	0.0157	0.0308	0.0738	0.1408
0.03750	<u>0.0300</u>	<u>0.0583</u>	<u>0.1379</u>	<u>0.2598</u>
	0.0204	0.0399	0.0950	0.1805
0.04375	<u>0.0375</u>	<u>0.0727</u>	<u>0.1714</u>	<u>0.3224</u>
	0.0255	0.0497	0.1181	0.2241
0.05000	<u>0.0454</u>	<u>0.0880</u>	<u>0.2077</u>	<u>0.3914</u>
	0.0309	0.0601	0.1429	0.2714
0.05625	<u>0.0536</u>	<u>0.1041</u>	<u>0.2467</u>	<u>0.4676</u>
	0.0364	0.0709	0.1691	0.3227

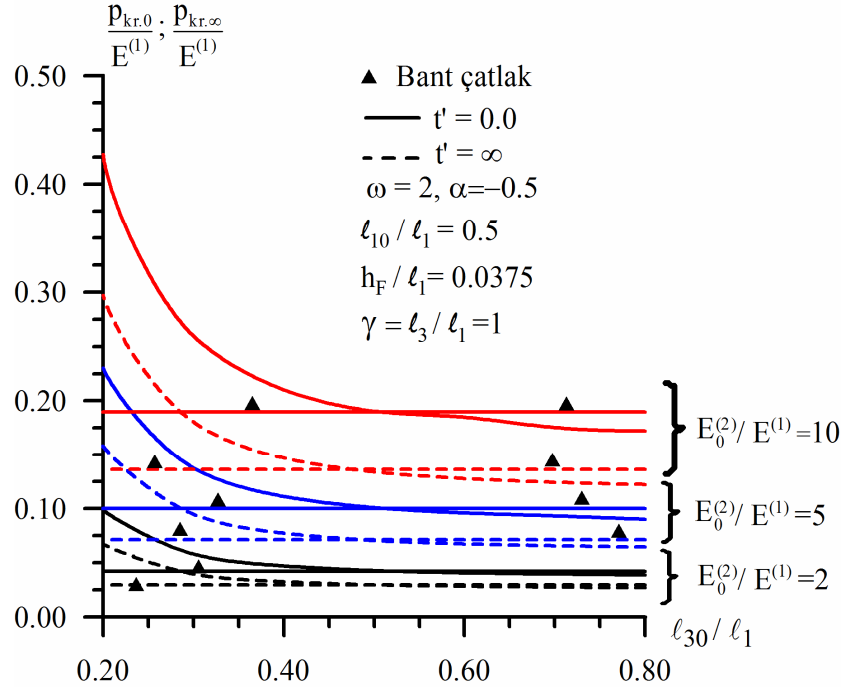
Çizelge 4.2’de, Ox_2 doğrultusundaki dış tabaka kalınlıklarının (h_F / ℓ_1) çeşitli değerleri için hesaplanan $p_{kr.0} / E^{(1)}$ ve $p_{kr.\infty} / E^{(1)}$ (tabloda verilen sonuçlarda, sırasıyla pay ve payda) kritik burkulma kuvveti değerleri verilmiştir. Sayısal sonuçlar incelendiğinde, dış tabakaların kalınlığı ve/veya dış tabakaların elastisite modülü arttıkça, kritik burkulma değerlerinin arttığı görülmektedir.

Kenar çatlak için elde edilen Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2 ile bant çatlak için elde edilmiş olan, sırasıyla Çizelge 3.3 ve Çizelge 3.4’te verilen sonuçlar karşılaştırılırsa, kenar çatlak için elde edilen kritik delaminasyon burkulma kuvvetlerinin, bant çatlak için elde edilen değerlerden daha büyük olduğu görülebilir.



Şekil 4.2 Çeşitli ℓ_{10}/ℓ_1 ve $E_0^{(2)}/E^{(1)}$ için elde edilen $p_{kr,0}/E^{(1)}$ ve $p_{kr,\infty}/E^{(1)}$ değerlerinin, ℓ_{10}/ℓ_1 'e bağlı değişimi ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{30}/\ell_1 = 0.3$, $h_F/\ell_1 = 0.0375$)

Şekil 4.2'de, Ox_1 doğrultusundaki çatlak uzunluğunun (ℓ_{10}/ℓ_1) değişiminin $p_{kr,0}/E^{(1)}$ ve $p_{kr,\infty}/E^{(1)}$ kritik burkulma kuvveti değerlerine etkisi grafik olarak verilmiştir. Şekil 4.2'deki grafiklerden görüldüğü üzere, Ox_1 doğrultusundaki çatlak uzunluğu azaldıkça ve/veya dış tabakaların elastisite modülü arttıkça, kritik burkulma değerleri artmaktadır. Parametrelerin $\gamma_{31} = 1$, $\ell_{30}/\ell_1 = 0.3$ ve $h_F/\ell_1 = 0.0375$ değerleri için çizilmiş olan bu grafik, diğer parametre değerleri için de benzer özellikler göstermektedir.

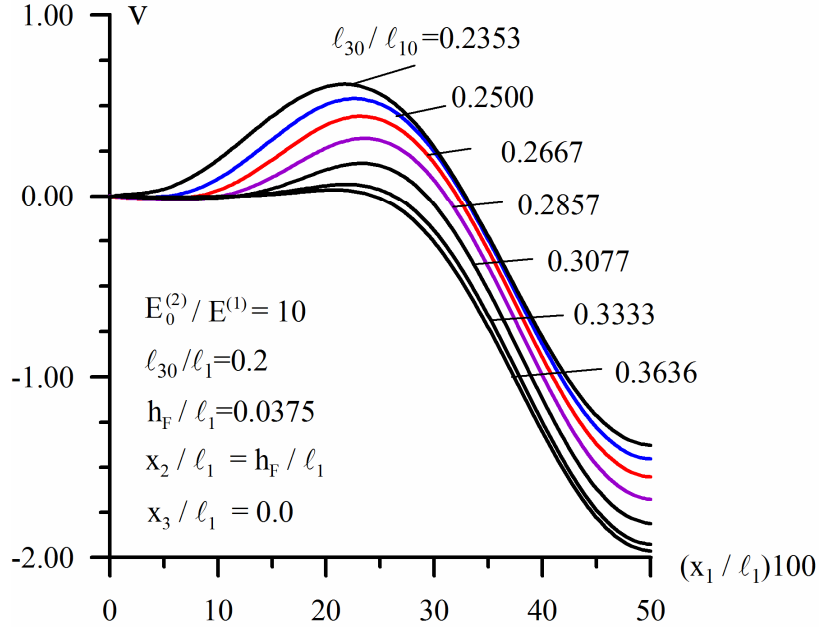


Şekil 4.3 Çeşitli l_{30} / l_1 ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ için elde edilen $p_{kr.0} / E^{(1)}$ ve $p_{kr.\infty} / E^{(1)}$ değerlerinin, l_{30} / l_1 'e bağlı değişimi ($\gamma_{31} = 1, l_{10} / l_1 = 0.5, h_F / l_1 = 0.0375$)

Şekil 4.3'de sandviç kalın plağın kenar çatlak içermesi durumu için, Ox_3 doğrultusundaki çatlak uzunluğunun (l_{30} / l_1) farklı değerlerinde hesaplanan kritik burkulma kuvveti değerleri verilmiştir. Ayrıca yapı elemanının bant ve kenar çatlak içermesi durumlarının karşılaştırılabilmesi için aynı şekil üzerinde, sandviç kalın plağın bant çatlak içermesi durumunda (Bölüm 3) elde edilen uygun kritik burkulma değerleri de gösterilmiştir.

Şekil 4.3'de verilen grafiklerden, yapı elemanının kenar çatlak içermesi durumuna ait sayısal sonuçlar incelendiğinde, Ox_3 doğrultusundaki çatlak uzunluğu azaldıkça ve/veya dış tabakaların elastisite modülü arttıkça, kritik burkulma değerlerinin arttığı görülmektedir. Ayrıca kenar çatlağın Ox_3 doğrultusundaki uzunluğu (l_{30} / l_1) arttıkça elde edilen kritik değerler, bant çatlak durumu için elde edilen uygun kritik değerlere küçülerek yaklaşmakta ve belirli bir çatlak boyutları için her iki duruma ait kritik sayısal sonuçlar çakışmaktadır. Her iki problemde elde edilen sayısal sonuçların çakıştığı l_{30} / l_1 değeri, elastisite modülü oranının değişiminden etkilenmemektedir. Belirtelim ki, Şekil 4.3'de verilen sayısal sonuçlar, sandviç plağın bant çatlak içermesi durumunda plağın bütün yanal kenarlarından, kenar çatlak içermesi durumunda ise $x_3 = 0$ yüzeyi hariç diğer yanal kenarlarından basit mesnetle

tutturulmuş olması durumu için verilmiştir.



Şekil 4.4 Çatlak yüzeyindeki düşey yer değiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde, x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0$, $x_2 = h_F - 0$)

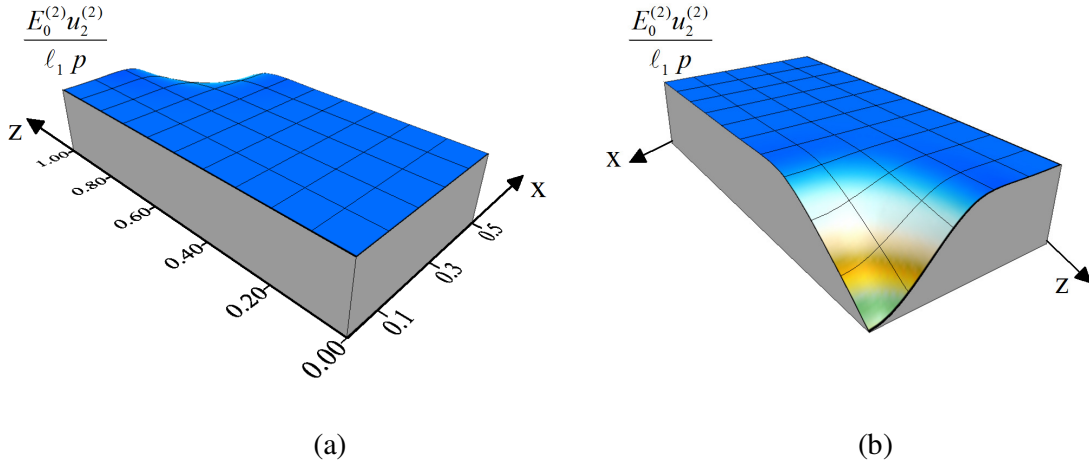
Şekil 4.4'de Ox_3 doğrultusundaki çatlak uzunluğunun, Ox_1 doğrultusundaki çatlak uzunluğuna oranının (l_{30}/l_{10}) değişiminin, burkulma modları (çatlak yüzeyindeki düşey yer değiştirmelerin yayılımı) üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Bu amaçla l_{30}/l_{10} oranının çeşitli değerleri için, $x_3 = 0$ ve $x_2 = h_F - 0$ düzlemlerinin ara kesitindeki çatlak yüzeyinde bulunan düşey yer değiştirmelerin, x_1/l_1 'e göre yayılımı Şekil 4.4 ile verilmiştir ($l_{30}/l_1 = 0.2$, $h_F/l_1 = 0.0375$, $E_0^{(2)}/E^{(1)} = 10$, $x_3 = 0$, $x_2 = h_F - 0$). Burada, düşey eksendeki değerler

$$v = 2u_2^{(2)} \left(\left| \max_{0 \leq x_1/l_1 \leq 0.5} u_2^{(2)} - \min_{0 \leq x_1/l_1 \leq 0.5} u_2^{(2)} \right| \right)^{-1} \quad (4.30)$$

eşitliğinden belirlenmiştir. Şekildeki grafiklerden, burkulma modlarının, l_{30}/l_{10} oranına önemli ölçüde bağlı olduğu görülmektedir. Bu oran küçüldükçe, çatlak yüzeyindeki düşey yer değiştirmelerin yayılımının, başlangıçta çatlak yüzeylerine verilen ve (4.29) denklemi ile gösterilen ön eğinti formundan uzaklaşarak, farklı bir yayılım gösterdiği belirlenmiştir. Bu farklılığın oluşumu ve gelişimi Şekil 4.4 ile gösterilmektedir.

Burkulma modunun, başlangıç eğinti formundan farklılaştığı ℓ_{30}/ℓ_{10} oranının değeri (geçiş değeri), $\ell_{30}/\ell_{10} = \chi = \text{sabit}$ ile gösterilmiştir. Şekil 4.4'te verilen parametre değerleri için çizilmiş olan grafikler incelendiğinde, $\chi = 0.3636$ (geçiş değeri) değerinden küçük olan ℓ_{30}/ℓ_{10} oranlarında, burkulma modunun ön eğinti formundan uzaklaştığı görülmektedir.

Buna göre, $\ell_{30}/\ell_{10} \geq \chi (= 0.3636)$ durumunda iken burkulma modu, başlangıçta çatlak yüzeylerine verilen ön eğintinin formuna uygun düşmekte (Şekil 4.5), ancak $\ell_{30}/\ell_{10} < \chi (= 0.3636)$ durumunda ise, burkulma modu ön eğinti formundan çok farklı bir formda gerçekleşebilmektedir (Şekil 4.6).

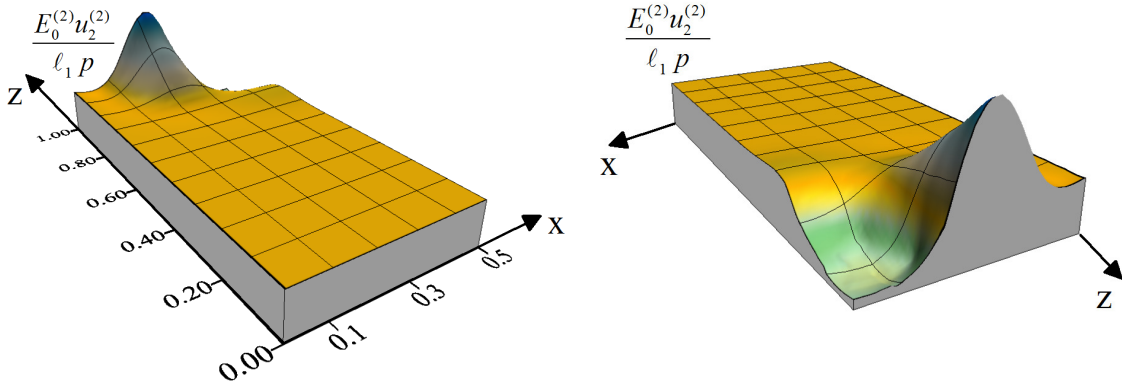


Şekil 4.5 Ele alınan sandviç kalın plakta, $\ell_{30}/\ell_{10} \geq \chi (= 0.3636)$ için, $x_2 = h_F - 0$ yüzeyinin burkulma modu a) $x_3 = \ell_3$ düzleminde görünüm b) $x_3 = 0$ düzleminde görünüm

$x_2 = h_F$ 'deki çatlakın alt yüzeyine ($x_2 = h_F - 0$, $0 \leq x_3 \leq \ell_3$, $0 \leq x_1 \leq \ell_1/2$) ait noktaların, dikey doğrultudaki yer değiştirmelerinin yüzey grafiği (burkulma modu) Şekil 4.5 ile verilmiştir. Şekil 4.5a'da verilen yüzey grafiği, $x_3 = \ell_3$ düzleminde görünümü (ön yüz), Şekil 4.5b'de verilen yüzey grafiği, $x_3 = 0$ düzleminde görünümü (arka yüz) ifade etmektedir. Bu bölümde yanyana verilmiş olan tüm yüzey grafikleri, alt tabakanın, sırasıyla ön ve arka yüzden görünümünü göstermektedir. Bu yüzey grafiğinin elde edilmesinde kullanılan parametre değerleri $\gamma_{31} = 1$, $\ell_{30}/\ell_1 = 0.3$, $\ell_{10}/\ell_1 = 0.5$, $\ell_{30}/\ell_{10} = 0.6$, $h_F/\ell_1 = 0.0375$, $E_0^{(2)}/E^{(1)} = 10$ ve $(p_{kr,0} - p) < 10^{-4}$ alınmıştır. Şekilde eksenler $x(=x_1)$ ve $z(= \ell_{30} - x_3)$ ile gösterilmiştir. Parametrelerin verilen değerleri için

$\ell_{30}/\ell_{10} (=0.6) \geq \chi (=0.3636)$ olduğundan Şekil 4.5 ile verilen yüzey grafiği, ön eğintinin formuna uygun düşmektedir.

Şekil 4.5 ve burada yer verilmeyen $\ell_{30}/\ell_{10} \geq \chi (=0.3636)$ durumunu sağlamak üzere, $E_0^{(2)}/E^{(1)}$ ve h_F/ℓ_1 parametrelerinin çeşitli değerlerinde çizilen burkulma modlarının, çatlak yüzeylerine verilen ön eğinti formuna uygun olduğu görülmüştür.



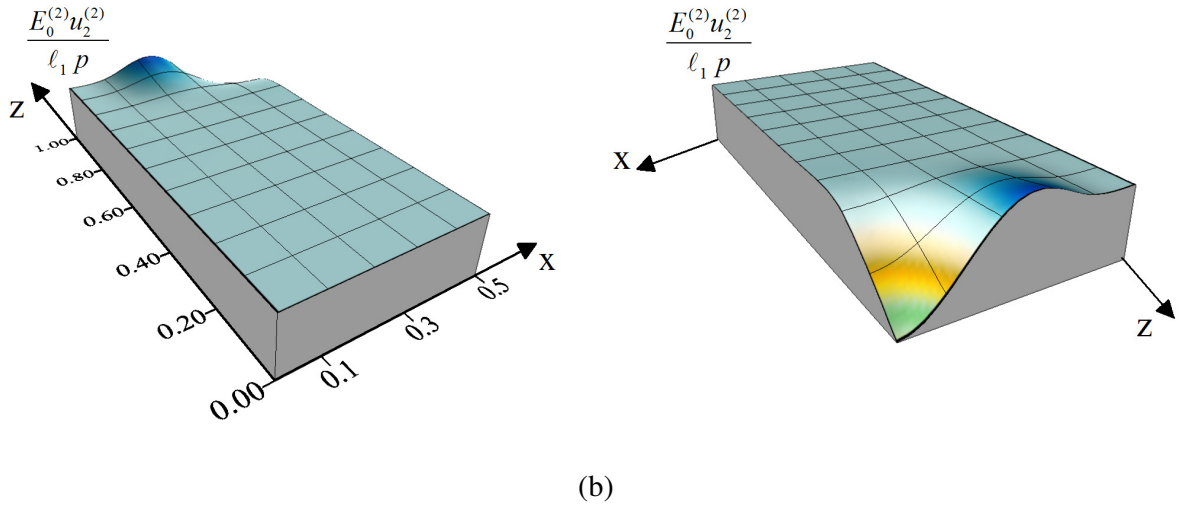
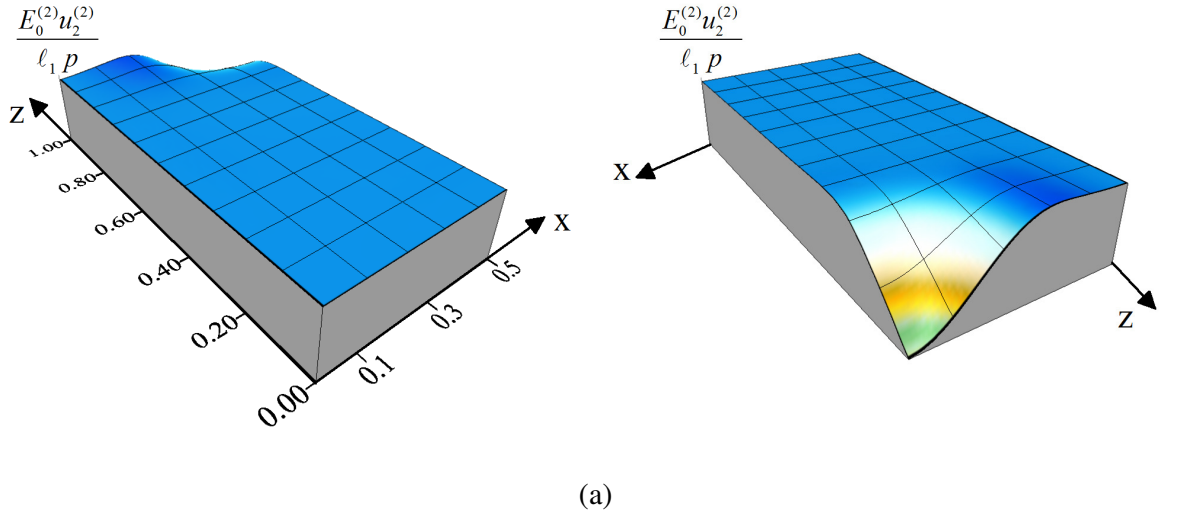
Şekil 4.6 Ele alınan sandviç kalın plakta, $\ell_{30}/\ell_{10} < \chi (=0.3636)$ için, $x_2 = h_F - 0$ yüzeyinin burkulma modu

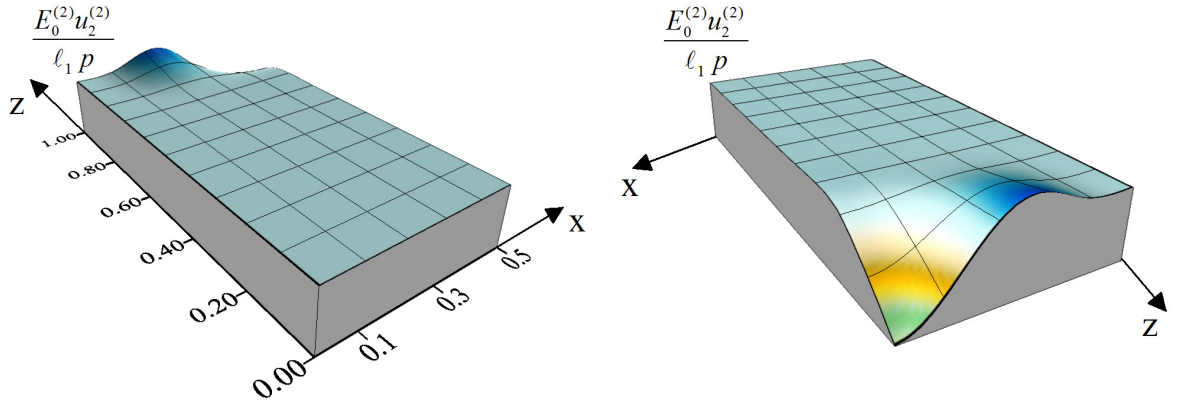
$x_2 = h_F$ 'deki çatlakın alt yüzeyine ($x_2 = h_F - 0$, $0 \leq x_3 \leq \ell_3$, $0 \leq x_1 \leq \ell_1/2$) ait noktaların dikey doğrultudaki yer değiştirmelerinin yüzey grafiği (burkulma modu), $\ell_{30}/\ell_{10} < \chi (=0.3636)$ durumu için Şekil 4.6 ile verilmiştir. Bu grafiğin elde edilmesinde kullanılan parametrelerin $\ell_{30}/\ell_1 = 0.2$, $\ell_{10}/\ell_1 = 0.75$, $\ell_{30}/\ell_{10} = 0.2667$, $h_F/\ell_1 = 0.0375$, $E_0^{(2)}/E^{(1)} = 10$ ve $\gamma_{31} = 1$ değerleri için, $p_{kr,0}/E^{(1)} = 0.3911$ olarak hesaplanmıştır. Parametrelerin verilen değerlerinde $\ell_{30}/\ell_{10} (=0.2667) < \chi (=0.3636)$ olduğundan, burkulmanın gerçekleştiği $p_{kr,0}/E^{(1)} = 0.3911$ değerinde çizilen yüzey grafiğinin, ön eğintinin formuna uygun düşmediği görülmüştür.

Şekil 4.6 ve burada yer verilmeyen $\ell_{30}/\ell_{10} < \chi (=0.3636)$ durumunu sağlayan parametrelerin çeşitli değerleri için çizilen burkulma modlarının, çatlak yüzeylerine başlangıçta verilen ön eğintinin formundan farklı olduğu tespit edilmiştir.

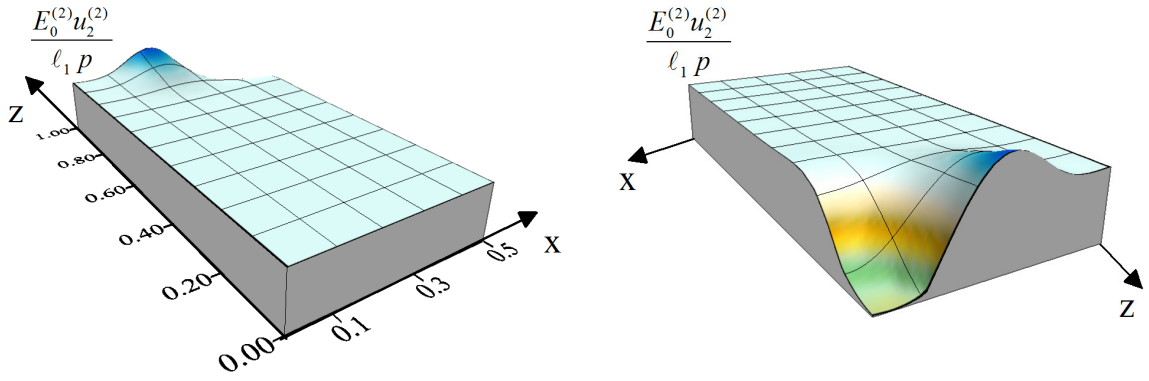
Ön eğintinin formundan farklı olan ve Şekil 4.6 ile verilen burkulma modunun gelişim

aşamalarını görebilmek amacıyla, hesaplanan kritik kuvvetten ($p_{kr.0}/E^{(1)} = 0.3911$) daha küçük değerler için, $x_2 = h_F - 0$ 'deki çatlak yüzeyinde bulunan düşey yer değiştirmelerin yüzey grafikleri (plağın burkulma modları) Şekil 4.7 ile verilmiştir. Belirtilen burkulma modları, $p/E^{(1)} < p_{kr.0}/E^{(1)}$ olmak üzere, sırasıyla $p/E^{(1)} = 0.3000$ (Şekil 4.7a), $p/E^{(1)} = 0.3900$ (Şekil 4.7b), $p/E^{(1)} = 0.3910$ (Şekil 4.7c) ve $p/E^{(1)} = 0.39109$ (Şekil 4.7d) değerleri için çizilmiştir.





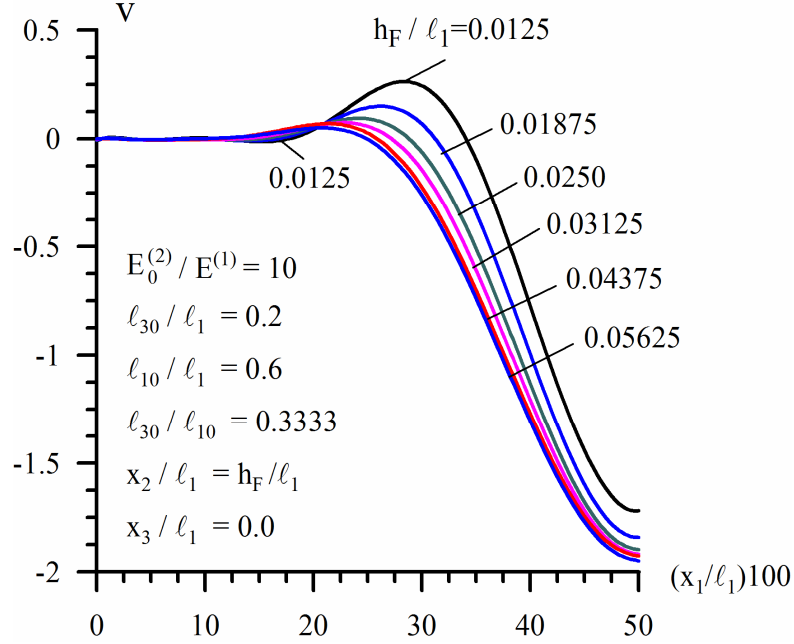
(c)



(d)

Şekil 4.7 Ele alınan sandviç kalın plakta, $p_{kr,0} / E^{(1)} = 0.3911$ için elde edilen burkulma modunun oluşum aşamaları; a) $p / E^{(1)} = 0.3000$, b) $p / E^{(1)} = 0.3900$, c) $p / E^{(1)} = 0.3910$, d) $p / E^{(1)} = 0.39109$

Bu bölümde elde edilen ve özel çatlak geometrisi için ortaya çıkan farklı burkulma modları, Hutchinson ve Suo (1992); Hutchinson vd. (1992); Evans ve Hutchinson (1995); Nilsson ve Giannakopoulos (1995); Gioia ve Ortiz (1997); Wang ve Evans (1998) ile Moon vd. (2002) tarafından yapılan deneysel çalışmalarda da görülmektedir.



Şekil 4.8 Çatlak yüzeyindeki düşey yer değiştirmelerin, bazı h_F/l_1 değerlerinde, x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0$, $x_2 = h_F - 0$)

Şekil 4.8'de h_F/l_1 'nin çeşitli değerleri için, $x_3 = 0$ ve $x_2 = h_F - 0$ düzlemlerinin ara kesitindeki çatlak yüzeyinde bulunan düşey yer değiştirmelerin, x_1/l_1 'e göre yayılımı verilmiştir ($l_{30}/l_1 = 0.2$, $l_{10}/l_1 = 0.6$, $l_{30}/l_{10} = 0.3333$, $E_0^{(2)}/E^{(1)} = 10$, $x_2 = h_F - 0$, $x_3 = 0$). Şekil 4.8'deki grafiklerin düşey eksenindeki değerler (4.30) ifadesinden belirlenmiştir. Şekilden görüldüğü üzere, h_F/l_1 parametresi (sandviç plağın dış tabakalarının kalınlığı) azaldıkça, plağın burkulma modu, ele alınan parametre değerleri için, çatlak yüzeylerine verilen ön eğinti formundan uzaklaşarak, farklı bir form almaktadır.

Şekil 4.4 ve Şekil 4.8'den, kenar çatlaklar içeren sandviç kalın plağın burkulma moduna, çatlak geometrisi ile birlikte, çatlak ile plağın serbest yüzeyi arasındaki kısmın kalınlığının da etki gösterdiği tespit edilmiştir.

4.3.2 Viskoelastik Dikdörtgen Sandviç Plakta Delaminasyon Burkulması

Bu alt bölümde, ele alınan sandviç kalın plağın dış tabakaların lineer viskoelastik ve çekirdek tabakasının elastik bir malzemedan yapıldığı kabul edilmektedir. Çeşitli malzeme parametrelerinin viskoelastik sandviç plağın delaminasyon burkulmasına etkisi, plağın kenar çatlaklar içermesi durumu için ele alınarak, sabit bir $p/E^{(1)}$ dış basınç kuvveti için

delaminasyon burkulmasına neden olan t'_{kr} kritik zaman değerleri belirlenmiştir. t'_{kr} kritik zaman değerlerinin belirlenmesinde kullanılan $p/E^{(1)}$ statik dış basıncın değeri (3.37) eşitsizliğinden seçilmektedir (Bölüm 3).

Çizelge 4.3 Çeşitli h_F / ℓ_1 ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ için hesaplanan t'_{kr} değerleri ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{30} / \ell_1 = 0.3$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$, $\omega = 2$, $\alpha = -0.5$)

$E_0^{(2)} / E^{(1)}$	h_F / ℓ_1					
	0.0375		0.0250		0.0125	
	$p / E^{(1)}$	t'_{kr}	$p / E^{(1)}$	t'_{kr}	$p / E^{(1)}$	t'_{kr}
1	0.0280	0.004	0.0160	0.004	0.0080	0.001
	0.0270	0.012	0.0150	0.023	0.0070	0.046
	0.0260	0.029	0.0140	0.100	0.0060	1.591
2	0.0560	0.001	0.0310	0.005	0.0150	0.007
	0.0550	0.002	0.0300	0.014	0.0140	0.036
	0.0540	0.005	0.0290	0.030	0.0130	0.163
5	0.1300	0.002	0.0730	0.009	0.0380	0.001
	0.1200	0.029	0.0720	0.013	0.0370	0.004
	0.1100	0.197	0.0710	0.018	0.0360	0.010
10	0.2500	0.001	0.1400	0.007	0.0700	0.010
	0.2400	0.006	0.1300	0.049	0.0650	0.055
	0.2300	0.020	0.1200	0.293	0.0600	0.302

Çizelge 4.3'te farklı h_F / ℓ_1 , $p/E^{(1)}$ ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ için bulunan t'_{kr} değerleri, $\omega = 2$ ve $\alpha = -0.5$ için verilmiştir. Sonuçlardan görüldüğü üzere, $p/E^{(1)}$ değerleri arttıkça (veya $p_{kr,0} / E^{(1)}$ değerine yaklaştıkça), kritik zaman değeri azalmaktadır.

Çizelge 4.4 Çeşitli ω ve α için hesaplanan t'_{kr} değerleri ($\gamma_{31}=1$, $\ell_{30}/\ell_1=0.3$, $\ell_{10}/\ell_1=0.5$, $h_F/\ell_1=0.0250$)

$E_0^{(2)} / E^{(1)}$	$p / E^{(1)}$	α	ω	t'_{kr}
2	0.0300	-0.5	1	0.010
			2	0.014
			3	0.020
		-0.3	2	0.038
				0.014
				0.001
5	0.0720	-0.5	1	0.009
			2	0.013
			3	0.018
		-0.3	2	0.037
				0.013
				0.001
10	0.1300	-0.5	1	0.028
			2	0.049
			3	0.105
		-0.3	2	0.096
				0.049
				0.010

Çizelge 4.4'de farklı elastisite modülü oranlarında, viskoelastik malzemenin reolojik parametrelerinin (ω ve α) çeşitli değerlerinin kritik zaman üzerindeki etkisi, $\gamma_{31}=1$, $\ell_{10}/\ell_1=0.5$ ve $h_F/\ell_1=0.0250$ için araştırılmıştır. Tabloda verilen sayısal sonuçlardan görüldüğü üzere; kritik zaman değeri, ω arttıkça artmakta ve $|\alpha|$ arttıkça azalmaktadır. Daha önce, yapı elemanının bant çatlaklar içermesi halinde elde edilen etkiye benzer olan bu durum, bilinen mekanik görüşlerle uyumludur.

5. İÇ ÇATLAK İÇEREN ELASTİK VE VİSKOELASTİK SANDVIÇ KALIN PLAĞIN DELAMİNASYONU

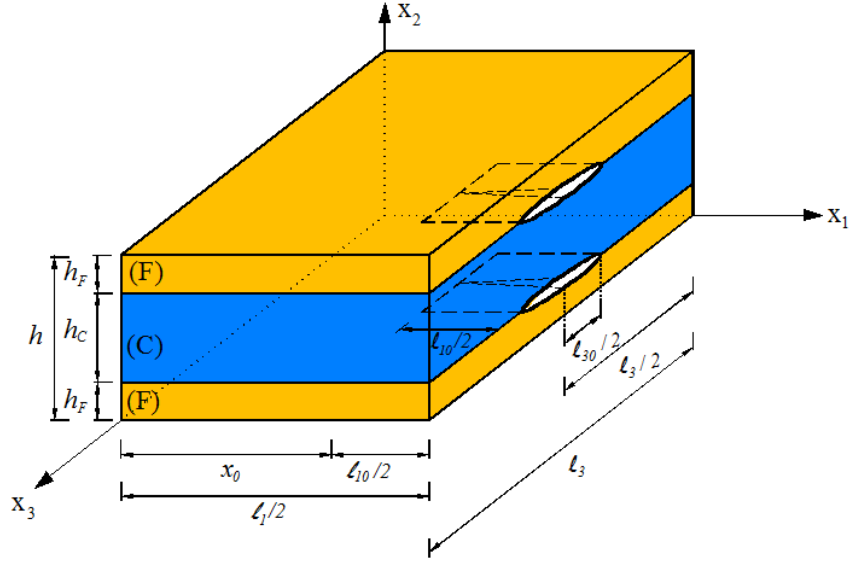
Bu bölümde, tez çerçevesinde ele alınan viskoelastik sandviç kalın plağın tabakaları arasında iç çatlakların olması durumu incelenmektedir. İncelemelerde, üç tabakadan oluşan sandviç kalın plağın $x_1 = 0; \ell_1$ ile $x_3 = 0; \ell_3$ kenarlarından basit mesnetle tutturulduğu, çekirdek ve dış yüzey tabakaları arasında birbirine eşit uzunlukta, birbirine paralel iki adet iç çatlağın bulunduğu ve çatlakların yüzeylerinin başlangıçta çok küçük bir ön eğintiye sahip olduğu kabul edilmektedir. Çatlak yüzeylerindeki küçük ön eğintilerin; plağın karşılıklı iki kenarından çatlak yüzeylerine paralel doğrultuda etkileyen, dış basınç kuvveti etkisinde büyüyerek sonsuza gitmesi (Hoff, 1954) durumuna karşı gelen kritik parametre değerleri belirlenmiştir. Kritik parametre değerlerine, çeşitli geometrik ve malzeme parametrelerinin etkisi incelenmiş ve önceki bölümlerde ele alınan problemlerin çözümünden elde edilen sayısal sonuçlar ile bu bölümde elde edilen sayısal sonuçlar karşılaştırılarak değerlendirmeler yapılmıştır.

5.1 Problemin Matematiksel Modeli

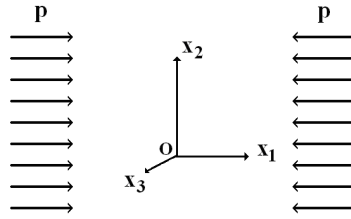
Bu alt bölümde, dört kenarından basit mesnetle tutturulmuş, üç tabakadan oluşan ve tabakaları arasında birbirine paralel ve eşit uzunlukta iki makro-iç çatlak bulunan, çekirdek tabakası elastik ve dış tabakaları lineer viskoelastik olan sandviç kalın plağın, karşılıklı iki kenarından çatlaklar doğrultusunda etkileyen düzgün yayılı statik basınç yükü etkisinde delaminasyon burkulma problemine ait matematiksel model verilmektedir.

Burada ele alınan sınır değer problemi; Bölüm 3'te verilen sınır değer probleminden, çatlak geometrisi açısından farklılık göstermektedir. Bu farklılığın Bölüm 3'te verilen matematiksel modelde göz önüne alınması ile ele alınan sınır değer problemine ait matematiksel model elde edilmektedir. Dolayısıyla; ele alınan problemin matematiksel modeli, Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Stabilite Teorisi (LEÜBST) ve lineer viskoelastik malzemeler için parçalı sürekli cisim modeli çerçevesinde yapılmıştır. Sandviç plağın elastik ve viskoelastik malzemedan yapılmış olması durumları ayrı ayrı incelenmiş; ancak, matematiksel model plak malzemesinin viskoelastik olması durumu için verilmiştir.

İç çatlaklar içeren sandviç kalın plağın geometrisi ve yükleme durumu Şekil 5.1'de verilmektedir. Plağa bağlı $Ox_1x_2x_3$ kartezyen koordinat takımı, plağın yüklenmeden önceki durumunu belirten Lagrange koordinatları ile ilişkilendirilmektedir.



(a)



(b)

Şekil 5.1 İç çatlaklar içeren sandviç kalın plakta; a) yarım plak geometrisi b) tüm plak için yükleme durumu

Ele alınan sınır değer probleminin çözüm bölgesi,

$$V' = V - \Omega_1 - \Omega_2 \quad (5.1)$$

olur. (5.1)'de,

$$V = V^{(1)} \cup V^{(2)} \cup V^{(3)},$$

$$V^{(1)} = \{0 \leq x_1 \leq l_1; 0 \leq x_2 \leq h_F; 0 \leq x_3 \leq l_3\},$$

$$V^{(2)} = \{0 \leq x_1 \leq l_1; h_F \leq x_2 \leq h_F + h_C; 0 \leq x_3 \leq l_3\},$$

$$V^{(3)} = \{0 \leq x_1 \leq l_1; h_F + h_C \leq x_2 \leq h; 0 \leq x_3 \leq l_3\}, \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_1 &= \{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2; x_2 = h_F; (\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2\}, \\ \mathcal{Q}_2 &= \{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2; x_2 = h_F + h_C; (\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2\}\end{aligned}\quad (5.3)$$

dir. Yukarıda verilen ifadelerde $V^{(k)}$ ($k=1,2,3$) sandviç plağın tabakalarını, \mathcal{Q}_i ($i=1,2$) sandviç plağın içerdiği iç çatlakların bulunduğu bölgeleri temsil etmektedir. Ayrıca; (5.3)'deki ℓ_{10} , ℓ_{30} , sırasıyla iç çatlağın Ox_1 , Ox_3 doğrultularındaki uzunluklarını göstermektedir. Çatlak yüzeylerinin önceden çok küçük ön eğriliğe sahip olduğu ve bu eğriliklerin $x_1 = \ell_1/2$ ve $x_3 = \ell_3/2$ düzlemleri ile $x_2 = h_F$ (alt çatlak için) ve $x_2 = h_F + h_C$ (üst çatlak için) düzlemlerine göre simetrik olduğu kabul edilmektedir. Bu duruma uygun olarak alt ve üst çatlak yüzeylerinin denklemi,

$$\begin{aligned}x_2^\pm &= h_F + \varepsilon f^\pm(x_1, x_3), \quad x_2^\pm = h_F + h_C + \varepsilon f^\pm(x_1, x_3), \\ (\ell_1 - \ell_{10})/2 &\leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2, \quad (\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2\end{aligned}\quad (5.4)$$

şeklinde verilmektedir. Burada ε ($\varepsilon \ll 1$), çatlak yüzeylerinin başlangıçta sahip olduğu kabul edilen eğintinin derecesini gösteren boyutsuz küçük bir parametre, $f(x_1, x_3)$ çatlak yüzeylerindeki küçük eğintinin formunu gösteren fonksiyondur. f fonksiyonunun üst indisinde bulunan '+' ('-'), göz önüne alınan çatlağın üst (alt) yüzeyini ifade etmektedir. $f(x_1, x_3)$ fonksiyonunun aşağıdaki eşitlikleri sağladığı kabul edilmektedir:

$$\begin{aligned}f^+(x_1, x_3) &= -f^-(x_1, x_3), \\ f^\pm((\ell_1 - \ell_{10})/2, x_3) \Big|_{(\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2} &= f^\pm((\ell_1 + \ell_{10})/2, x_3) \Big|_{(\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2} = 0, \\ \frac{\partial f^\pm((\ell_1 - \ell_{10})/2, x_3)}{\partial x_3} \Big|_{(\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2} &= \frac{\partial f^\pm((\ell_1 + \ell_{10})/2, x_3)}{\partial x_3} \Big|_{(\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2} = 0, \\ f^\pm(x_1, (\ell_3 - \ell_{30})/2) \Big|_{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2} &= f^\pm(x_1, (\ell_3 + \ell_{30})/2) \Big|_{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2} = 0, \\ \frac{\partial f^\pm(x_1, (\ell_3 - \ell_{30})/2)}{\partial x_1} \Big|_{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2} &= \frac{\partial f^\pm(x_1, (\ell_3 + \ell_{30})/2)}{\partial x_1} \Big|_{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2} = 0.\end{aligned}\quad (5.5)$$

Ele alınan problemin matematiksel modeli, viskoelastik cisim için üç boyutlu geometrik doğrusal olmayan yönetici denklemler yardımıyla verilebilir. Buna göre;

denge denklemleri

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{jn}^{(r_k)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_k)}}{\partial x_n} \right) \right] = 0, \quad (5.6)$$

geometrik ilişkiler

$$\varepsilon_{ij}^{(r_k)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(r_k)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(r_k)}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_n^{(r_k)}}{\partial x_i} \frac{\partial u_n^{(r_k)}}{\partial x_j} \right), \quad (5.7)$$

bünye denklemleri

$$\sigma_{ij}^{(r_k)} = \lambda^{*(r_k)} \theta^{(r_k)} \delta_i^j + 2\mu^{*(r_k)} \varepsilon_{ij}^{(r_k)}, \quad \theta^{(r_k)} = \varepsilon_{11}^{(r_k)} + \varepsilon_{22}^{(r_k)} + \varepsilon_{33}^{(r_k)} \quad (5.8)$$

olarak yazılabilir. (5.6)-(5.8)'de bilinen gösterimler kullanılmıştır. $i; j; n; k = 1, 2, 3$, $r_1 = r_3 = 2$, $r_2 = 1$ 'dir. Ayrıca, $\lambda^{*(r_k)}$ ve $\mu^{*(r_k)}$ viskoelastik malzemenin mekanik sabitlerini gösteren operatörlerdir (Bölüm 3). (5.6)-(5.8) denklemlerinde kullanılan r_k üst indisi, sandviç plağın tabakalarına ait büyüklükleri (r_1 ve r_3 dış tabakalara ait büyüklükleri, r_2 çekirdek tabakasına ait büyüklükleri) göstermektedir.

Ele alınan sandviç plağa ait sınır koşulları

$$u_2^{(r_k)} \Big|_{x_1=0; \ell_1} = 0, \quad u_2^{(r_k)} \Big|_{x_3=0; \ell_3} = 0,$$

$$\begin{aligned} \left[\sigma_{1n}^{(r_k)} \left(\delta_1^n + \frac{\partial u_1^{(r_k)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_1=0; \ell_1} &= p, & \left[\sigma_{1n}^{(r_k)} \left(\delta_3^n + \frac{\partial u_3^{(r_k)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_1=0; \ell_1} &= 0, \\ \left[\sigma_{3n}^{(r_k)} \left(\delta_1^n + \frac{\partial u_1^{(r_k)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_3=0; \ell_3} &= 0, & \left[\sigma_{3n}^{(r_k)} \left(\delta_3^n + \frac{\partial u_3^{(r_k)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_3=0; \ell_3} &= 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\left[\sigma_{2n}^{(r_1)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_1)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \left[\sigma_{2n}^{(r_3)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_3)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_2=h} = 0, \quad (5.10)$$

$$\left[\sigma_{jn}^{(r_1)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_1)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{S_5^-} n_j^- = 0, \quad \left[\sigma_{jn}^{(r_2)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{S_5^+} n_j^+ = 0,$$

$$\left[\sigma_{jn}^{(r_2)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right]_{S_6^-} n_j^- = 0, \quad \left[\sigma_{jn}^{(r_3)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_3)}}{\partial x_n} \right) \right]_{S_6^+} n_j^+ = 0,$$

$$S_5^\pm = \left\{ \left((\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2 \right); x_2^\pm = h_F + \epsilon f^\pm(x_1, x_3); \right. \\ \left. \left((\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2 \right) \right\},$$

$$S_6^\pm = \left\{ \left((\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2 \right); x_2^\pm = h_F + h_C + \epsilon f^\pm(x_1, x_3); \right. \\ \left. \left((\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2 \right) \right\} \quad (5.11)$$

olarak verilebilir. (5.9)-(5.11) eşitlikleri, sırasıyla dikdörtgen plağın yanal kenarlarındaki mesnet koşullarını, alt ve üst serbest yüzeyi ile çatlak yüzeylerindeki sınır koşullarını göstermektedir. (5.11) ifadesinde bulunan n_j^\pm , göz önüne alınan çatlak yüzeyine ait dış birim normal vektörün bileşenlerini göstermektedir.

Sandviç plağın tabakaları arasında ideal temas koşullarının sağlandığı kabul edilirse, ara yüzeylerdeki temas koşulları

$$u_i^{(r_1)} \Big|_{\varphi_1^-} = u_i^{(r_2)} \Big|_{\varphi_1^+}, \quad u_i^{(r_3)} \Big|_{\varphi_2^+} = u_i^{(r_2)} \Big|_{\varphi_2^-},$$

$$\left[\sigma_{2n}^{(r_1)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_1)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\varphi_1^-} = \left[\sigma_{2n}^{(r_2)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\varphi_1^+},$$

$$\left[\sigma_{2n}^{(r_2)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\varphi_2^-} = \left[\sigma_{2n}^{(r_3)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_3)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\varphi_2^+},$$

$$u_i^{(r_1)} \Big|_{\varphi_5^-} = u_i^{(r_2)} \Big|_{\varphi_5^+}, \quad u_i^{(r_2)} \Big|_{\varphi_6^-} = u_i^{(r_3)} \Big|_{\varphi_6^+},$$

$$\left[\sigma_{2n}^{(r_1)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_1)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\varphi_5^-} = \left[\sigma_{2n}^{(r_2)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\varphi_5^+},$$

$$\left[\sigma_{2n}^{(r_2)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\varphi_6^-} = \left[\sigma_{2n}^{(r_3)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_3)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\varphi_6^+},$$

$$\varphi_1^\pm = \left\{ x_1 \in \left((0, (\ell_1 - \ell_{10})/2) \cup ((\ell_1 + \ell_{10})/2, \ell_1) \right); x_2 = h_F \pm 0; x_3 \in (0, \ell_3) \right\},$$

$$\mathcal{D}_2^\pm = \{x_1 \in ((0, (\ell_1 - \ell_{10})/2) \cup ((\ell_1 + \ell_{10})/2, \ell_1)); x_2 = h_F + h_C \pm 0; x_3 \in (0, \ell_3)\},$$

$$\mathcal{D}_5^\pm = \{((\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2); x_2 = h_F \pm 0;$$

$$x_3 \in ((0, (\ell_3 - \ell_{30})/2) \cup ((\ell_3 + \ell_{30})/2, \ell_3))\},$$

$$\mathcal{D}_6^\pm = \{((\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2); x_2 = h_F + h_C \pm 0;$$

$$x_3 \in ((0, (\ell_3 - \ell_{30})/2) \cup ((\ell_3 + \ell_{30})/2, \ell_3))\} \quad (5.12)$$

olur. (5.6)-(5.12) ile verilen denklem ve bağıntılar doğrusal olmayan bir sınır değer problemini göstermektedir. Problemin çözümü, verilen matematiksel modelin doğrusallaştırılması ile elde edilen ‘‘Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Stabilité Teorisi (LEÜBST)’’ denklemleri kullanılarak yapılmıştır. Bu denklem takımının doğrusallaştırılması için boyutsuz küçük parametre ε ’dan yararlanılacaktır. Belirtilen işlemler, Bölüm 2’de ayrıntılı olarak verildiği için burada LEÜBST denklemlerinin elde edilmesine kısaca değinilmiştir.

Öncelikle, (5.4) ile verilen, çatlak yüzeylerine ait $x_2^\pm = h_F + \varepsilon f^\pm(x_1, x_3)$ veya $x_2^\pm = h_F + h_C + \varepsilon f^\pm(x_1, x_3)$ denklemi kullanılarak, çatlak yüzeylerinin birim normal vektörünün bileşenleri için izleyen ifadeler elde edilir:

$$n_1^\pm = \frac{\pm \varepsilon \frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_1}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right)^2}},$$

$$n_2^\pm = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right)^2}},$$

$$n_3^\pm = \frac{\pm \varepsilon \frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_3}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right)^2}}. \quad (5.13)$$

Burada, $\varepsilon^2 \left| \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right)^2 \right| \ll 1$ olduğu kabul edilirse, (5.13) ile verilen

ifadeler ε cinsinden kuvvet serisi ile temsil edilirse,

$$n_1^\pm = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k+1} n_{1k}^\pm(x_1, x_3), \quad n_2^\pm = \pm 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} n_{2k}^\pm(x_1, x_3), \quad n_3^\pm = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k+1} n_{3k}^\pm(x_1, x_3) \quad (5.14)$$

yazılabilir. Diğer taraftan aranan büyüklükler boyutsuz küçük parametre olan ε 'na göre seri formunda aşağıdaki gibi yazabilir (Bölüm 2):

$$\left\{ \sigma_{ij}^{(r_k)}; \varepsilon_{ij}^{(r_k)}; u_i^{(r_k)} \right\} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \left\{ \sigma_{ij}^{(r_k),q}; \varepsilon_{ij}^{(r_k),q}; u_i^{(r_k),q} \right\}, \quad \varepsilon \ll 1 \quad (5.15)$$

(5.15) ifadesi, (5.6)-(5.8) yönetici denklemlerinde, plak kenarlarındaki sınır koşullarını (5.9)-(5.10) ve tabakalar arasındaki temas koşullarını (5.12) ifade eden denklemlerde yerine yazılır ve ε 'nın kuvvetlerine göre düzenlenerek gruplaştırılırsa, bu parametrenin kuvvetlerine göre düzenlenmiş kapalı denklemler sistemi ile plak kenarlarında sınır koşulları ve tabakalar arasında temas koşulları elde edilebilir. Aynı zamanda, (5.15)'deki büyüklükler, çekirdek tabaka için $(x_1, h_F + 0, x_3)$ ve $(x_1, h_F + h_C - 0, x_3)$ civarında, üst dış tabaka (alt dış tabaka) için ise $(x_1, h_F + h_C + 0, x_3)$ $((x_1, h_F - 0, x_3))$ civarında seriye açılır ve çatlak yüzeylerine ait birim normal vektörün bileşenlerini ifade eden (5.14) denklemi ile birlikte, çatlak yüzeyleri için verilmiş olan (5.11) sınır şartlarında yerlerine yerleştirilir ve ε 'nın kuvvetlerine göre düzenlenerek gruplaştırılırsa (sınır tipli pertürbasyon tekniği), bu parametrenin kuvvetlerine göre çatlak yüzeylerinde uygun sınır şartları elde edilir. Belirtelim ki, yukarıda elde edilmesi özetlenen seri-sınır değer problemlerinin her bir yaklaşımına ait denklem ve ifadeler çok büyük olduğu için burada yer verilmemiştir. Ancak özel bir problem için benzeri yolla elde edilen seri-sınır değer problemlerinin, her bir yaklaşımına ait matematiksel model Bölüm 2'de verilmiştir. Seri-sınır değer problemlerinin Bölüm 2'de verilen matematiksel modelleri göz önünde bulundurularak, bu bölümde elde edilebilecek uygun seri-sınır değer problemleri için bir benzeşim kurulabilir.

Yukarıda özetlendiği şekilde ε 'nın kuvvetlerine göre elde edilen her bir sınır değer problemi, kendisinden önceki yaklaşımlara ait büyüklükleri içermektedir. (5-6)-(5.12) lineer olmayan sınır değer probleminin çözümü, bu seri-sınır değer problemlerinin her birinin çözülmesi ve çözümlerin süperpoze edilmesi ile elde edilir.

Ele alınan üç katlı sandviç kalın plağın delaminasyon burkulma probleminin çözümünde, Bölüm 2’de ayrıntılı olarak verilen burkulma kriterleri (Hoff, 1954) kullanılarak, kritik parametrelerin değerleri belirlenmiştir. Ancak Bölüm 2 ve Bölüm 3’te açıklanan nedenlerden dolayı kritik parametrelerin belirlenmesinde, sadece sıfıncı ve birinci yaklaşımın çözülmesi yeterli olmaktadır. Bu nedenle, yukarıda açıklanan seri-sınır değer problemlerinden sadece ilk ikisi çözülerek kritik parametreler belirlenmiştir. Bu iki yaklaşımın çözümüne geçmeden önce, yapı elemanı malzemesi viskoelastik olduğu için çözümden önce her bir yaklaşıma ait denklem ve bağıntılara, Bölüm 3’te belirtilen tarzda Laplace dönüşümü uygulanmaktadır. Sıfıncı yaklaşım için (3.17) yardımıyla $\sigma_{ij}^{(r_k),0}$, $\epsilon_{ij}^{(r_k),0}$, $u_i^{(r_k),0}$, $\lambda^{(r_k)}$, $\mu^{(r_k)}$ büyüklüklerinin Laplace dönüşümleri, sırasıyla $\bar{\sigma}_{ij}^{(r_k),0}$, $\bar{\epsilon}_{ij}^{(r_k),0}$, $\bar{u}_i^{(r_k),0}$, $\bar{\lambda}^{(r_k)}$, $\bar{\mu}^{(r_k)}$ ile gösterilirse, bu büyüklükler sıfıncı yaklaşıma ait denklem ve bağıntılarda uygun şekilde Laplace dönüşümleri ile yer değiştirilerek ilgili büyüklüklerin Laplace dönüşümlerine göre düzenlenmiş sıfıncı yaklaşım alan denklemleri, sınır ve temas koşulları elde edilmektedir.

Aynı işlem birinci yaklaşım için de tekrarlanırsa; ilgili büyüklüklerin Laplace dönüşümlerine göre düzenlenmiş, birinci yaklaşıma ait alan denklemleri, sınır ve temas koşulları aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ji}^{(r_k),1}}{\partial x_j} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_k),0} \frac{\partial^2 \bar{u}_i^{(r_k),1}}{\partial x_1^2} = 0,$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(r_k),1} = \bar{\lambda}^{*(r_k)} \bar{\theta}^{(r_k),1} \delta_i^j + 2\bar{\mu}^{*(r_k)} \bar{\epsilon}_{ij}^{(r_k),1},$$

$$\bar{\epsilon}_{ij}^{(r_k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i^{(r_k),1}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j^{(r_k),1}}{\partial x_i} \right). \quad (5.16)$$

Plak kenarlarındaki sınır koşulları:

$$\bar{u}_2^{(r_k),1} \Big|_{x_1=0;\ell_1} = 0, \quad \bar{u}_2^{(r_k),1} \Big|_{x_3=0;\ell_3} = 0,$$

$$\left[\bar{\sigma}_{11}^{(r_k),1} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_k),0} \frac{\partial \bar{u}_1^{(r_k),1}}{\partial x_n} \right] \Big|_{x_1=0;\ell_1} = 0, \quad \bar{\sigma}_{13}^{(r_k),1} \Big|_{x_1=0;\ell_1} = 0,$$

$$\bar{\sigma}_{31}^{(r_k),1} \Big|_{x_3=0;\ell_3} = \bar{\sigma}_{33}^{(r_k),1} \Big|_{x_3=0;\ell_3} = 0. \quad (5.17)$$

Plâğın alt ve üst serbest yüzelerindeki sınır koşulları:

$$\bar{\sigma}_{21}^{(r_1),1} \Big|_{x_2=0} = \bar{\sigma}_{22}^{(r_1),1} \Big|_{x_2=0} = \bar{\sigma}_{23}^{(r_1),1} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \bar{\sigma}_{21}^{(r_3),1} \Big|_{x_2=h} = \bar{\sigma}_{22}^{(r_3),1} \Big|_{x_2=h} = \bar{\sigma}_{23}^{(r_3),1} \Big|_{x_2=h} = 0. \quad (5.18)$$

Çatlak yüzelerindeki sınır koşulları:

$$\bar{\sigma}_{21}^{(r_1),1} \Big|_{\bar{S}_5^-} = -\bar{\sigma}_{11}^{(r_1),0} \frac{\partial f^-}{\partial x_1}, \quad \bar{\sigma}_{22}^{(r_1),1} \Big|_{\bar{S}_5^-} = \bar{\sigma}_{23}^{(r_1),1} \Big|_{\bar{S}_5^-} = 0,$$

$$\bar{\sigma}_{21}^{(r_2),1} \Big|_{\bar{S}_5^+} = -\bar{\sigma}_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial f^+}{\partial x_1}, \quad \bar{\sigma}_{22}^{(r_2),1} \Big|_{\bar{S}_5^+} = \bar{\sigma}_{23}^{(r_2),1} \Big|_{\bar{S}_5^+} = 0,$$

$$\bar{\sigma}_{21}^{(r_2),1} \Big|_{\bar{S}_6^-} = -\bar{\sigma}_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial f^+}{\partial x_1}, \quad \bar{\sigma}_{22}^{(r_2),1} \Big|_{\bar{S}_6^-} = \bar{\sigma}_{23}^{(r_2),1} \Big|_{\bar{S}_6^-} = 0,$$

$$\bar{\sigma}_{21}^{(r_3),1} \Big|_{\bar{S}_6^+} = -\bar{\sigma}_{11}^{(r_3),0} \frac{\partial f^-}{\partial x_1}, \quad \bar{\sigma}_{22}^{(r_3),1} \Big|_{\bar{S}_6^+} = \bar{\sigma}_{23}^{(r_3),1} \Big|_{\bar{S}_6^+} = 0,$$

$$\bar{S}_5^\pm = \left\{ \left((\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2 \right), x_2^\pm = h_F \pm 0, \left((\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2 \right) \right\},$$

$$\bar{S}_6^\pm = \left\{ \left((\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2 \right), x_2^\pm = h_F + h_C \pm 0, \left((\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2 \right) \right\} \quad (5.19)$$

Tabakalar arasındaki temas koşulları:

$$\bar{u}_i^{(r_1),1} \Big|_{\varphi_1^-} = \bar{u}_i^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_1^+}, \quad \bar{u}_i^{(r_3),1} \Big|_{\varphi_2^-} = \bar{u}_i^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_2^+},$$

$$\left[\bar{\sigma}_{21}^{(r_1),1} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_1),0} \frac{\partial \bar{u}_i^{(r_1),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_1^-} = \left[\bar{\sigma}_{21}^{(r_2),1} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial \bar{u}_i^{(r_2),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_1^+},$$

$$\bar{\sigma}_{22}^{(r_1),1} \Big|_{\varphi_1^-} = \bar{\sigma}_{22}^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_1^+}, \quad \bar{\sigma}_{23}^{(r_1),1} \Big|_{\varphi_1^-} = \bar{\sigma}_{23}^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_1^+},$$

$$\left[\bar{\sigma}_{21}^{(r_2),1} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial \bar{u}_i^{(r_2),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_2^-} = \left[\bar{\sigma}_{21}^{(r_3),1} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_3),0} \frac{\partial \bar{u}_i^{(r_3),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_2^+},$$

$$\bar{\sigma}_{22}^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_2^-} = \bar{\sigma}_{22}^{(r_3),1} \Big|_{\varphi_2^+}, \quad \bar{\sigma}_{23}^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_2^-} = \bar{\sigma}_{23}^{(r_3),1} \Big|_{\varphi_2^+},$$

$$\bar{u}_i^{(r_1),1} \Big|_{\varphi_5^-} = \bar{u}_i^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_5^+}, \quad \bar{u}_i^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_6^-} = \bar{u}_i^{(r_3),1} \Big|_{\varphi_6^+},$$

$$\begin{aligned}
& \left[\bar{\sigma}_{21}^{(r_1),1} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_1),0} \frac{\partial \bar{u}_i^{(r_1),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_5^-} = \left[\bar{\sigma}_{21}^{(r_2),1} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial \bar{u}_i^{(r_2),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_5^+}, \\
& \bar{\sigma}_{22}^{(r_1),1} \Big|_{\varphi_5^-} = \bar{\sigma}_{22}^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_5^+}, \quad \bar{\sigma}_{23}^{(r_1),1} \Big|_{\varphi_5^-} = \bar{\sigma}_{23}^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_5^+}, \\
& \left[\bar{\sigma}_{21}^{(r_2),1} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial \bar{u}_i^{(r_2),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_6^-} = \left[\bar{\sigma}_{21}^{(r_3),1} + \bar{\sigma}_{11}^{(r_3),0} \frac{\partial \bar{u}_i^{(r_3),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_6^+}, \\
& \bar{\sigma}_{22}^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_6^-} = \bar{\sigma}_{22}^{(r_3),1} \Big|_{\varphi_6^+}, \quad \bar{\sigma}_{23}^{(r_2),1} \Big|_{\varphi_6^-} = \bar{\sigma}_{23}^{(r_3),1} \Big|_{\varphi_6^+} \tag{5.20}
\end{aligned}$$

olur. Böylece, birinci yaklaşım için Laplace dönüşümüne göre düzenlenmiş yönetici denklemler, sınır ve temas koşulları (5.16)-(5.20) ile ifade edilmektedir. Yukarıda verilen ifadelerde, $\bar{\sigma}_{jn}^{(r_k),0}$ sıfırcı yaklaşımına ait gerilmeleri göstermektedir. Bölüm 2’de belirtildiği gibi her bir yaklaşım, kendisinden önceki yaklaşımlara ait büyüklükleri içermektedir. Ayrıca $\bar{\lambda}^{*(r_k)}$ ve $\bar{\mu}^{*(r_k)}$ operatörler olup, Laplace dönüşümü uygulanmamış hali (3.9)’da verilmiştir. (5.16)-(5.20) denklem ve ifadelerinde, çarpım durumundaki büyüklüklere Laplace dönüşümü uygulanırken karşılaşılan güçlükler ve bu güçlüklerin aşılabilmesinde Bölüm 3’te açıklanan işlemler tekrarlanmıştır.

Birinci yaklaşımına ait sınır değer probleminin ifadelerinde, sıfırcı yaklaşımına ait gerilme büyüklüğünün bulunması sebebiyle, öncelikle sıfırcı yaklaşımın çözümü belirlenecektir. Sıfırcı yaklaşımın çözümü, ele alınan sınır koşulları ve yükleme durumu ile bilinen mekanik görüşler çerçevesinde doğrudan yazılabilir (Bölüm 3):

$$2h_F \sigma_{11}^{(2),0}(t) + h_C \sigma_{11}^{(1),0}(t) = ph, \quad \sigma_{11}^{(2),0}(t)/E^{*(2)} = \sigma_{11}^{(1),0}(t)/E^{*(1)}. \tag{5.21}$$

Burada,

$$E^{*(k)} \varphi(t) = E_0^{(k)} \varphi(t) + \int_0^t E^{(k)}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \tag{5.22}$$

olduğu göz önüne alınırsa, sıfırcı yaklaşımın Laplace dönüşümünün çözümü

$$\bar{\sigma}_{11}^{(r_1),0} = \bar{\sigma}_{11}^{(r_3),0} = p \frac{\bar{E}^{*(2)} (2h_F + h_C)}{s(2h_F \bar{E}^{*(2)} + h_C \bar{E}^{*(1)})},$$

$$\bar{\sigma}_{11}^{(r_2),0} = \bar{\sigma}_{11}^{(r_1),0} \frac{\bar{E}^{*(1)}}{\bar{E}^{*(2)}},$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(r_k),0} = 0, \quad (ij \neq 11) \quad (5.23)$$

olarak elde edilir.

Bölüm 3'te açıklandığı üzere, tez çerçevesinde incelenen delaminasyon burkulma problemi için kritik parametrelerin belirlenmesinde, sıfırıncı yaklaşımın çözümünde, sınırlar civarındaki gerilme yayılımlarının homojen olmaması durumu gözardı edilmiştir. Böylece sıfırıncı yaklaşımın çözümü sonucunda elde edilen gerilmeler (5.23) ile verilebilir. Birinci yaklaşımın çözümü için (5.16)-(5.20) ile verilen sınır değer probleminin çözümü yapılmalıdır. Birinci yaklaşımın çözümü, bir sonraki alt bölümde ele alınacaktır.

5.2 Sonlu Elemanlar Modeli

Birinci yaklaşımın Laplace uzayında verilmiş (5.16)-(5.20) sınır değer problemine ait sonlu eleman formülasyonunun belirlenmesinde,

$$\begin{aligned} \Pi(\bar{u}_1^{(r_k),1}, \bar{u}_2^{(r_k),1}, \bar{u}_3^{(r_k),1}) &= \sum_{k=1}^3 \left[\frac{1}{2} \iiint_{V'} \left[\left(\bar{\sigma}_{11}^{(r_k),1} + \sigma_{11}^{(r_k),0}(t_1) \frac{\partial \bar{u}_1^{(r_k),1}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \bar{u}_1^{(r_k),1}}{\partial x_1} + \bar{\sigma}_{12}^{(r_k),1} \frac{\partial \bar{u}_1^{(r_k),1}}{\partial x_2} + \bar{\sigma}_{13}^{(r_k),1} \frac{\partial \bar{u}_1^{(r_k),1}}{\partial x_3} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left(\bar{\sigma}_{21}^{(r_k),1} + \sigma_{11}^{(r_k),0}(t_1) \frac{\partial \bar{u}_2^{(r_k),1}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \bar{u}_2^{(r_k),1}}{\partial x_1} + \bar{\sigma}_{22}^{(r_k),1} \frac{\partial \bar{u}_2^{(r_k),1}}{\partial x_2} + \bar{\sigma}_{23}^{(r_k),1} \frac{\partial \bar{u}_2^{(r_k),1}}{\partial x_3} + \right. \\ &\quad \left. \left(\bar{\sigma}_{31}^{(r_k),1} + \sigma_{11}^{(r_k),0}(t_1) \frac{\partial \bar{u}_3^{(r_k),1}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \bar{u}_3^{(r_k),1}}{\partial x_1} + \bar{\sigma}_{32}^{(r_k),1} \frac{\partial \bar{u}_3^{(r_k),1}}{\partial x_2} + \bar{\sigma}_{33}^{(r_k),1} \frac{\partial \bar{u}_3^{(r_k),1}}{\partial x_3} \right] dx_1 dx_2 dx_3 \Big] - \\ &\quad \int_{(\ell_3 - \ell_{30})/2}^{(\ell_3 + \ell_{30})/2} \int_{(\ell_1 - \ell_{10})/2}^{(\ell_1 + \ell_{10})/2} \frac{1}{s} \sigma_{11}^{(r_1),0}(t_1) \frac{\partial f^-}{\partial x_1} \bar{u}_1^{(r_1),1} \Big|_{x_2 = h_F - 0} dx_1 dx_3 - \\ &\quad \int_{(\ell_3 - \ell_{30})/2}^{(\ell_3 + \ell_{30})/2} \int_{(\ell_1 - \ell_{10})/2}^{(\ell_1 + \ell_{10})/2} \frac{1}{s} \sigma_{11}^{(r_2),0}(t_1) \frac{\partial f^+}{\partial x_1} \bar{u}_1^{(r_2),1} \Big|_{x_2 = h_F + 0} dx_1 dx_3 - \\ &\quad \int_{(\ell_3 - \ell_{30})/2}^{(\ell_3 + \ell_{30})/2} \int_{(\ell_1 - \ell_{10})/2}^{(\ell_1 + \ell_{10})/2} \frac{1}{s} \sigma_{11}^{(r_2),0}(t_1) \frac{\partial f^-}{\partial x_1} \bar{u}_1^{(r_2),1} \Big|_{x_2 = (h_F + h_C) - 0} dx_1 dx_3 - \\ &\quad \int_{(\ell_3 - \ell_{30})/2}^{(\ell_3 + \ell_{30})/2} \int_{(\ell_1 - \ell_{10})/2}^{(\ell_1 + \ell_{10})/2} \frac{1}{s} \sigma_{11}^{(r_3),0}(t_1) \frac{\partial f^+}{\partial x_1} \bar{u}_1^{(r_3),1} \Big|_{x_2 = (h_F + h_C) + 0} dx_1 dx_3 \end{aligned} \quad (5.24)$$

fonksiyoneli ve Ritz tekniği kullanılmıştır. Belirtelim ki; (5.24) fonksiyonelinin yer değiştirmelere göre birinci varyasyonunun sifra eşitliğinden,

$$\delta\Pi = \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial\Pi}{\partial\bar{u}_1^{(r_k)}} \delta\bar{u}_1^{(r_k)} + \frac{\partial\Pi}{\partial\bar{u}_2^{(r_k)}} \delta\bar{u}_2^{(r_k)} + \frac{\partial\Pi}{\partial\bar{u}_3^{(r_k)}} \delta\bar{u}_3^{(r_k)} \right] = 0 \quad (5.25)$$

birinci yaklaşıma ait alan denklemleri ve gerilmelere göre verilmiş sınır koşulları elde edilmektedir. Bu işlemler yapılarak, (5.24) fonksiyonelinin, ele alınan sınır değer problemine özdeş bir fonksiyonel olduğu gösterilmektedir.

Sonlu eleman çözümünde, çözüm bölgesi ve yükleme durumu göz önüne alındığında, $x_1 = \ell_1/2$, $x_2 = h/2$ ve $x_3 = \ell_3/2$ düzlemlerine göre simetri özelliğinden yararlanılarak, plağın 1/8'lik parçası göz önüne alınmıştır. Buna göre, ele alınan çözüm bölgesinin 1/8'lik parçası sonlu sayıda alt bölgeye (sonlu elemana; $\Omega_{(k)}$, $k=1,2,\dots,M$) ayrıklaştırılmıştır.

Dolayısıyla,

$$V' = \bigcup_{k=1}^M \Omega_k \quad (5.26)$$

olur. Sonlu eleman ayrıklaştırması, sayısal sonuçların yakınsaklığı özelliğinden ve literatürdeki uygun sayısal sonuçlara en iyi yaklaşımın sağlandığı sonlu eleman ağı arasından seçilmiştir. Bölgenin ayrıklaştırmasında, bütün bölgede sekiz nodlu standart dikdörtgen prizmatik sonlu elemanlar kullanılmıştır (Zienkiewicz, O. C. ve Taylor, R. L., 1989). Sonlu eleman ayrıklaştırmasında plağın 1/8'lik parçası, Ox_1 doğrultusunda 20, Ox_2 doğrultusunda 12 ve Ox_3 doğrultusunda 20 adet dikdörtgen prizma şeklindeki sonlu elemana ayrıklaştırılarak, toplamda 4800 adet sonlu eleman, $\ell_{10} = \ell_{30} = 0.5\ell_1$ durumu için; 5833 düğüm noktası ve 16000 serbestlik derecesi kullanılmıştır.

Tez kapsamında yer değiştirme esaslı sonlu elemanlar yöntemi kullanıldığından (düğüm noktalarında sadece yer değiştirme büyüklüğü bilinmeyen olarak alındığından), her bir sonlu eleman için aranan yer değiştirme fonksiyonunun ifadesi polinom olarak seçilir. Bu fonksiyonun, şekil fonksiyonları ve düğüm noktalarında aranan yer değiştirmeler kullanılarak ifadesi

$$\mathbf{u}^{(k)} \approx \mathbf{N}^{(k)} \mathbf{a}^{(k)}, \quad k=1,2,\dots,M \quad (5.27)$$

olarak yazılabilir. (5.27) ifadesi, (5.24) fonksiyonelinde yerine yazılınca Ritz tekniği

yardımıyla uygun cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$\mathbf{Ka} = \mathbf{r} . \quad (5.28)$$

(5.28) cebrik denklem sisteminin çözülmesiyle, düğüm noktalarında aranan yer değiştirme değerleri, dolayısıyla her bir sonlu elemanda, yer değiştirme fonksiyonunun Laplace uzayındaki formu belirlenir. Bu fonksiyonların ilkel (orijinal) değerlerinin belirlenmesinde Schapery (1966) yöntemi kullanılmıştır (Bölüm 2.4).

Önceki bölümlerde olduğu gibi bu bölümde de ele alınan problemin çözümünün gerektirdiği bütün algoritma ve programlar tarafımızdan yapılmıştır.

5.3 Sayısal Sonuçlar ve Değerlendirme

İki adet iç çatlak içeren sandviç kalın plağın delaminasyon burkulması; çekirdek tabakanın ve dış tabakaların malzemesi elastik ile çekirdek tabakanın malzemesi elastik ve dış tabakaların malzemesi lineer viskoelastik olması durumlarına göre, iki ayrı problem halinde incelenmiş ve sayısal sonuçlar ayrı ayrı verilmiştir. Çekirdek tabakasının malzemesine ait mekanik sabitler $E^{(1)}$ ve $\nu^{(1)}$, dış tabakaların malzemesine ait mekanik sabitler $E^{*(2)}$ ve $\nu^{*(2)}$ ile gösterilmektedir. Viskoelastik malzemenin mekanik sabitleri olan $E^{*(2)}$ ve $\nu^{*(2)}$ ifadeleri (3.32)-(3.34) ile verilmiştir.

Çatlak yüzeylerine başlangıçta verilen ön eğintinin sağlaması gereken koşullara uygun olarak, (5.5) ifadesinde verilen $f(x_1, x_3)$ fonksiyonu

$$f^\pm(x_1, x_3) = \pm \ell_{10} \sin^2 \left(\frac{\pi}{\ell_{10}} \left(x_1 - \frac{\ell_1 - \ell_{10}}{2} \right) \right) \times \sin^2 \left(\frac{\pi}{\ell_{30}} \left(x_3 - \frac{\ell_3 - \ell_{30}}{2} \right) \right) \quad (5.29)$$

şeklinde seçilmiştir. (5.29) fonksiyonu, çatlağın alt ve üst yüzeylerinin birbirine göre simetrik ama zıt yönde eğriliğe sahip olmasına karşı gelmektedir (Şekil 3.2).

Yapılan hesaplamalarda, boyutsuz reolojik parametre $\omega = \omega_\infty / \omega_0$ ve boyutsuz zaman $t' = \omega_0^{1/(1+\alpha)} t$ kullanılmıştır. Sayısal sonuçların elde edilmesinde, $h / \ell_1 = 0.15$, $\nu^{(1)} = \nu_0^{(2)} = 0.3$ değerleri sabit kalmak üzere, diğer malzeme ve geometrik parametrelerin değişiminin, kritik parametreler üzerindeki etkisi incelenmiş ve elde edilen sayısal sonuçlar izleyen alt bölümlerde verilmiştir.

5.3.1 Elastik Dikdörtgen Sandviç Plakta Delaminasyon Burkulması

Bu alt bölümde, sandviç kalın plağı oluşturan her üç tabakanın elastik malzemeden yapılması durumu incelenmiştir. Boyutsuz zaman parametresinin $t' = 0$, $t' = \infty$ değerleri için, sırasıyla $p_{kr.0} / E^{(1)}$, $p_{kr.\infty} / E^{(1)}$ şeklinde ifade edilecek olan kritik delaminasyon burkulma kuvvetleri araştırılmıştır. $t' = \infty$ için yapılan hesapta, $\omega = 2$, $\alpha = -0.5$ değerleri kullanılmıştır.

Çizelge 5.1 $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ değişiminin, $\frac{p_{kr.0} / E^{(1)}}{p_{kr.\infty} / E^{(1)}}$ değerlerine etkisi ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{30} / \ell_1 = 0.5$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$, $h_F / \ell_1 = 0.0375$)

$E_0^{(2)} / E^{(1)}$	$\frac{p_{kr.0} / E^{(1)}}{p_{kr.\infty} / E^{(1)}}$
0.3	$\frac{0.0139}{0.0097}$
0.5	$\frac{0.0230}{0.0161}$
1	$\frac{0.0451}{0.0317}$
2	$\frac{0.0873}{0.0618}$
5	$\frac{0.2051}{0.1466}$
10	$\frac{0.3847}{0.2773}$
20	$\frac{0.7027}{0.5147}$

Çizelge 5.1’de, tabakaların elastisite modülü oranlarının ($E_0^{(2)} / E^{(1)}$) değişiminin, $p_{kr.0} / E^{(1)}$ (pay) ve $p_{kr.\infty} / E^{(1)}$ (payda) kritik burkulma kuvveti değerlerine etkisi incelenmiştir. Tabloda dış tabakaların malzemesinin elastisite modülü, çekirdek tabakasının elastisite modülünden küçük (büyük) olması $E_0^{(2)} / E^{(1)} < 1$ ($E_0^{(2)} / E^{(1)} > 1$) durumlarına ait sayısal sonuçlar verilmiştir. $E_0^{(2)} / E^{(1)} = 1$ durumu, bütün tabakaların aynı malzemeden yapıldığını göstermektedir. Buna göre tablodaki sayısal sonuçlardan, dış tabakaların iç tabakaya göre elastisite modülü oranının artmasıyla, kritik burkulma kuvveti değerlerinin de arttığı

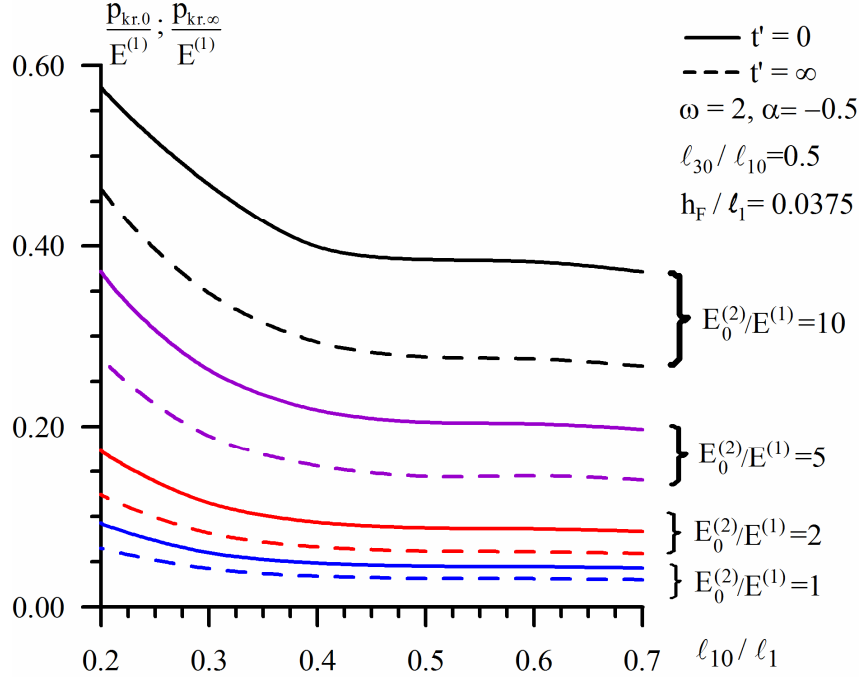
görülmektedir. Dış tabakaların elastisite modülü değeri azaldıkça, kritik burkulma değerleri azalmaktadır.

Çizelge 5.2 h_F / ℓ_1 ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ değişiminin, $\frac{p_{kr.0} / E^{(1)}}{p_{kr.\infty} / E^{(1)}}$ değerlerine etkisi ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{30} / \ell_1 = 0.5$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$)

h_F / ℓ_1	$E_0^{(2)} / E^{(1)}$			
	1	2	5	10
0.01250	<u>0.0111</u>	<u>0.0220</u>	<u>0.0535</u>	<u>0.1036</u>
	0.0077	0.0153	0.0374	0.0728
0.01875	<u>0.0172</u>	<u>0.0338</u>	<u>0.0811</u>	<u>0.1554</u>
	0.0120	0.0237	0.0573	0.1105
0.02500	<u>0.0251</u>	<u>0.0490</u>	<u>0.1167</u>	<u>0.2215</u>
	0.0176	0.0346	0.0829	0.1586
0.03125	<u>0.0345</u>	<u>0.0671</u>	<u>0.1584</u>	<u>0.2986</u>
	0.0243	0.0475	0.1131	0.2148
0.03750	<u>0.0451</u>	<u>0.0873</u>	<u>0.2051</u>	<u>0.3847</u>
	0.0317	0.0618	0.1466	0.2773
0.04375	<u>0.0564</u>	<u>0.1091</u>	<u>0.2559</u>	<u>0.4790</u>
	0.0397	0.0773	0.1828	0.3453
0.05000	<u>0.0684</u>	<u>0.1322</u>	<u>0.3103</u>	<u>0.5828</u>
	0.0481	0.0935	0.2213	0.4183
0.05625	<u>0.0807</u>	<u>0.1563</u>	<u>0.3685</u>	<u>0.6956</u>
	0.0566	0.1102	0.2618	0.4973

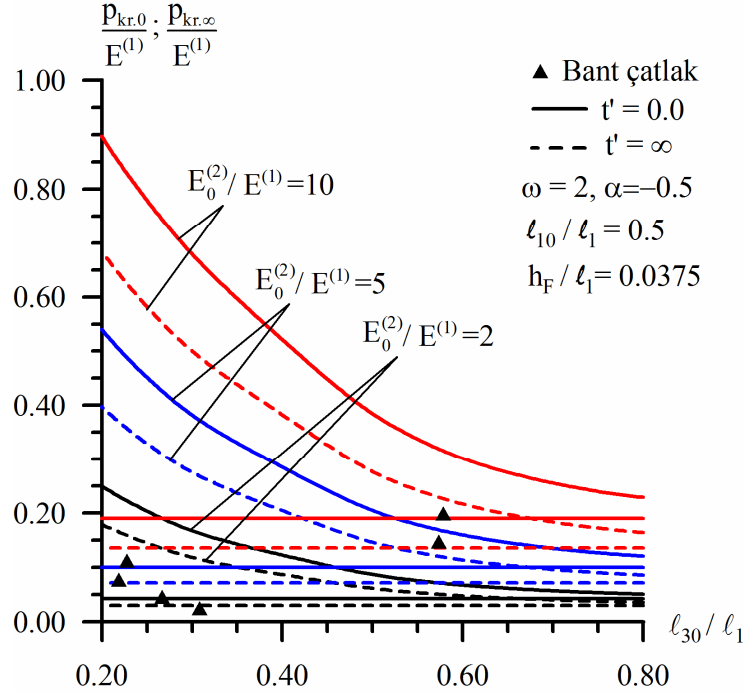
Çizelge 5.2’de, Ox_2 doğrultusundaki dış tabaka kalınlıkları (h_F / ℓ_1) değişiminin, $p_{kr.0} / E^{(1)}$ (pay) ve $p_{kr.\infty} / E^{(1)}$ (payda) kritik burkulma kuvveti değerlerine etkisi verilmiştir. Sayısal sonuçlar incelendiğinde, dış tabakaların kalınlığı ve/veya dış tabakaların elastisite modülü arttıkça, kritik burkulma kuvveti değerlerinin arttığı görülmektedir.

İç çatlak için elde edilen Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2 ile bant çatlak için elde edilmiş olan, sırasıyla Çizelge 3.3 ve Çizelge 3.4 ve kenar çatlak için elde edilmiş olan, sırasıyla Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2’de verilen sayısal sonuçlar karşılaştırılırsa, aynı parametre değerleri için, sandviç plağın iç çatlak içermesi durumunda elde edilen kritik delaminasyon burkulma kuvvetlerinin, bant veya kenar çatlak içermesi durumlarında elde edilen uygun değerlerden daha büyük olduğu görülmektedir.



Şekil 5.2 Çeşitli ℓ_{10}/ℓ_1 ve $E_0^{(2)}/E^{(1)}$ için elde edilen $p_{kr,0}/E^{(1)}$ ve $p_{kr,\infty}/E^{(1)}$ değerlerinin, ℓ_{10}/ℓ_1 'e bağlı değişimi ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{30}/\ell_{10} = 0.5$, $h_F/\ell_1 = 0.0375$)

Şekil 5.2'de, Ox_1 doğrultusundaki iç çatlak uzunluğunun (ℓ_{10}/ℓ_1) değişiminin, $p_{kr,0}/E^{(1)}$ ve $p_{kr,\infty}/E^{(1)}$ değerlerine etkisi grafik olarak verilmiştir. Şekil 5.2'deki grafiklerden görüldüğü üzere, Ox_1 doğrultusundaki çatlak uzunluğu azaldıkça ve/veya dış tabakaların elastisite modülü arttıkça, kritik burkulma kuvveti değerleri artmaktadır. Parametrelerin $\gamma_{31} = 1$, $\ell_{30}/\ell_{10} = 0.5$ ve $h_F/\ell_1 = 0.0375$ değerleri için çizilmiş olan bu grafik, diğer parametre değerleri için de benzer özellikler göstermektedir.



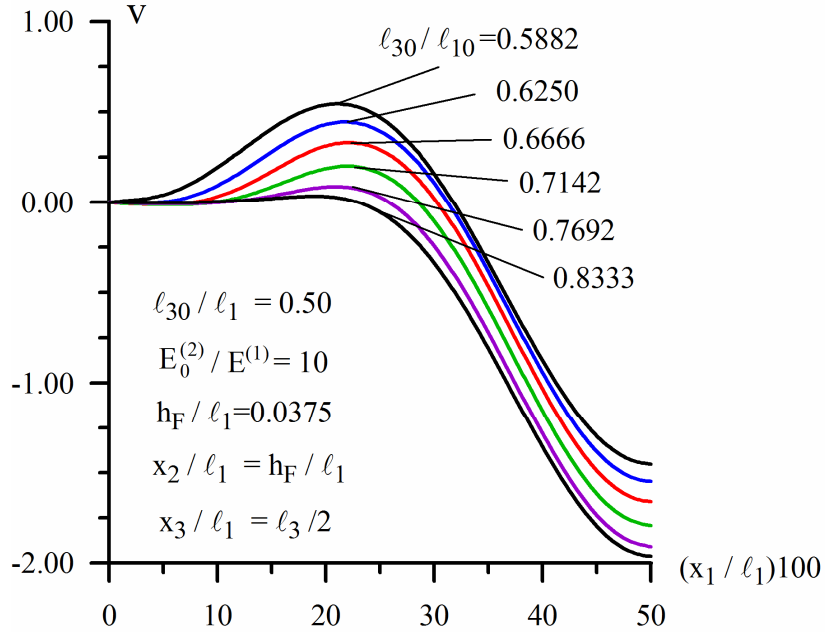
Şekil 5.3 Çeşitli l_{30} / l_1 ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ için elde edilen $p_{kr.0} / E^{(1)}$ ve $p_{kr.\infty} / E^{(1)}$ değerlerinin, l_{30} / l_1 'e bağlı değişimi ($\gamma_{31} = 1, l_{10} / l_1 = 0.5, h_F / l_1 = 0.0375$)

Şekil 5.3'te sandviç kalın plağın iç çatlak içermesi durumu için, Ox_3 doğrultusundaki çatlak uzunluğunun (l_{30} / l_1) farklı değerlerinde hesaplanan kritik delaminasyon burkulma kuvveti değerleri verilmiştir. Ayrıca sandviç kalın plağın bant ve iç çatlak içermesi durumlarının birbiriyle karşılaştırılabilmesi için aynı şekil üzerinde, sandviç kalın plağın bant çatlak içermesi durumunda (Bölüm 3) elde edilen uygun kritik burkulma değerleri de gösterilmiştir.

Şekil 5.3'te verilen grafiklerden; yapı elemanının iç çatlak içermesi durumuna ait sayısal sonuçlar kendi içinde incelendiğinde, Ox_3 doğrultusundaki çatlak uzunluğu azaldıkça ve/veya dış tabakaların elastisite modülü arttıkça, kritik burkulma kuvveti değerlerinin arttığı görülmektedir.

Sandviç plağın tabakaları arasında bant veya iç çatlak içermesi durumunda elde edilen kritik burkulma kuvveti değerleri karşılaştırıldığında, iç çatlakın Ox_3 doğrultusundaki uzunluğu arttıkça (l_{30} / l_1 değeri büyüdükçe) elde edilen kritik burkulma kuvveti değerlerinin, tabakalar arasında bant çatlak olması durumu için elde edilen uygun kritik burkulma kuvveti değerlerine küçülerek yaklaştığı görülmektedir. Her iki durumda mesnetlenme tipi aynı olduğu için, iç çatlak durumundaki çatlak uzunluğunun (l_{30}) artarak, bant çatlak

durumdaki çatlak uzunluğuna (ℓ_3) yaklaşmasıyla hesaplanan kritik burkulma kuvveti değerlerinin, bant çatlak durumundan elde edilmiş olanlara yaklaşması istenilen bir sonuçtur. Bu durum hem $t'=0$, hem de $t'=\infty$ 'da hesaplanan kritik burkulma kuvveti değerleri için sağlanmaktadır.



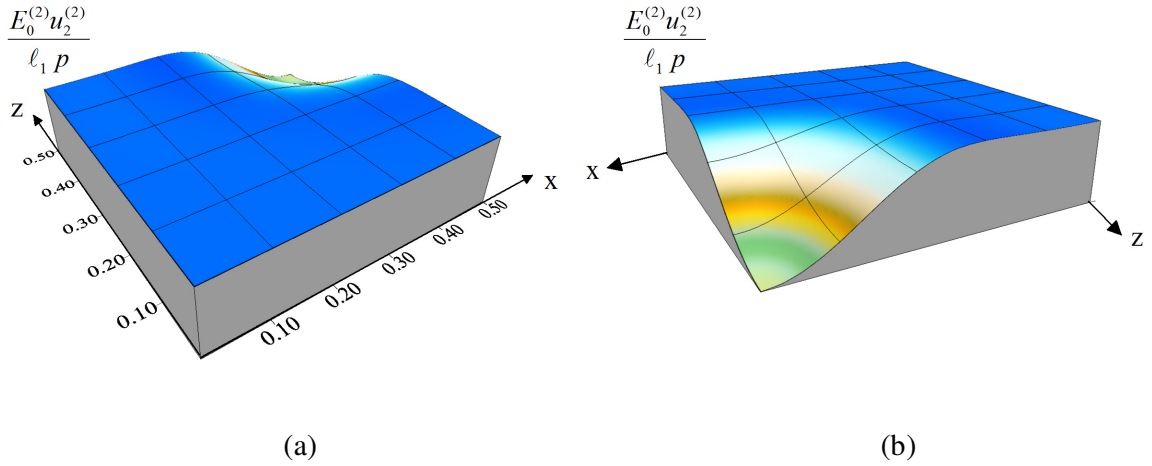
Şekil 5.4 Çatlak yüzeyindeki düşey yer değiştirmelerin, bazı ℓ_{30}/ℓ_{10} değerlerinde, x_1/ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = \ell_3/2$, $x_2 = h_F - 0$)

Şekil 5.4'te bazı çatlak kenar uzunluğu oranları (ℓ_{30}/ℓ_{10}) için, $x_3 = \ell_3/2$ ve $x_2 = h_F - 0$ düzlemlerinin ara kesitindeki çatlak yüzeyinde bulunan düşey yer değiştirmelerin, x_1/ℓ_1 'e göre yayılımı gösterilmiştir ($\ell_{30}/\ell_1 = 0.5$, $h_F/\ell_1 = 0.0375$, $E_0^{(2)}/E^{(1)} = 10$). Burada grafiklerin düşey eksenindeki değerler (4.30) ifadesinden belirlenmiştir.

Şekildeki grafiklerden, burkulma modlarının, sandviç kalın plağın iç çatlaklar içermesi durumunda da (kenar çatlakta olduğu gibi) ℓ_{30}/ℓ_{10} oranına önemli ölçüde bağlı olduğu görülmüştür. Bu oran küçüldükçe, çatlak yüzeyindeki düşey yer değiştirmelerin yayılımının, başlangıçta çatlak yüzeylerine verilen ve (5.29) denklemi ile gösterilen ön eğinti formundan uzaklaşarak, farklı bir yayılım gösterdiği görülmektedir. Bu farklılığın oluşumu ve gelişimi Şekil 5.4 ile gösterilmektedir.

Burkulma modunun başlangıç eğinti formundan farklılaştığı ℓ_{30}/ℓ_{10} oranının değeri (geçiş değeri) $\ell_{30}/\ell_{10} = \chi = \text{sabit}$ ile gösterilmiştir. Şekil 5.4'te, verilen parametre değerleri için çizilmiş olan grafikler incelendiğinde, $\chi = 0.8333$ (geçiş değeri) değerinden küçük olan ℓ_{30}/ℓ_{10} oranlarında, burkulma modunun ön eğinti formundan uzaklaştığı görülmektedir.

Buna göre, $\ell_{30}/\ell_{10} \geq \chi (= 0.8333)$ durumunda iken burkulma modu, başlangıçta çatlak yüzeylerine verilen ön eğintinin formuna uygun düşmekte (Şekil 5.5), ancak $\ell_{30}/\ell_{10} < \chi (= 0.8333)$ durumunda ise, burkulma modu ön eğinti formundan farklı bir formda gerçekleşebilmektedir (Şekil 5.6).

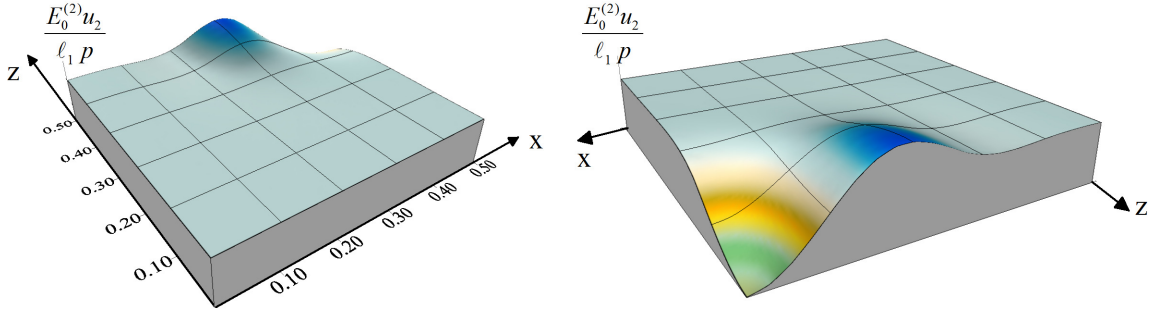


Şekil 5.5 Ele alınan sandviç kalın plakta, $\ell_{30}/\ell_{10} \geq \chi (= 0.8333)$ için, $x_2 = h_F - 0$ yüzeyinin burkulma modu a) $x_3 = \ell_3$ düzleminden görünüm b) $x_3 = \ell_3/2$ düzleminden görünüm

$x_2 = h_F$ 'deki çatlakın alt yüzeyine ($x_2 = h_F - 0$, $\ell_3/2 \leq x_3 \leq \ell_3$, $0 \leq x_1 \leq \ell_1/2$) ait noktaların, düşey doğrultudaki yer değiştirmelerinin yüzey grafiği (burkulma modu), $\ell_{30}/\ell_{10} \geq \chi (= 0.8333)$ durumu için Şekil 5.5 ile verilmiştir. Şekil 5.5a'da verilen yüzey grafiği, $x_3 = \ell_3$ düzleminden görünümü (ön yüz), Şekil 5.5b'de verilen yüzey grafiği, $x_3 = \ell_3/2$ düzleminden görünümü (arka yüz) ifade etmektedir. Bu grafiğin elde edilmesinde kullanılan parametre değerleri $\gamma_{31} = 1$, $\ell_{30}/\ell_1 = 0.5$, $\ell_{10}/\ell_1 = 0.5$, $\ell_{30}/\ell_{10} = 1.0$, $h_F/\ell_1 = 0.0375$, $E_0^{(2)}/E^{(1)} = 10$ ve $(p_{kr.0}/E^{(1)} - p/E^{(1)}) < 10^{-4}$ olarak alınmıştır. Şekilde eksenler $x(=x_1)$ ve $z(=\ell_3 - x_3)$ ile gösterilmiştir. Şekil 5.5'ten görüldüğü üzere,

$\ell_{30}/\ell_{10} (=1.0) \geq \chi (=0.8333)$ durumunda iken çizilen burkulma modu, ön eğintinin formuna uygun düşmektedir.

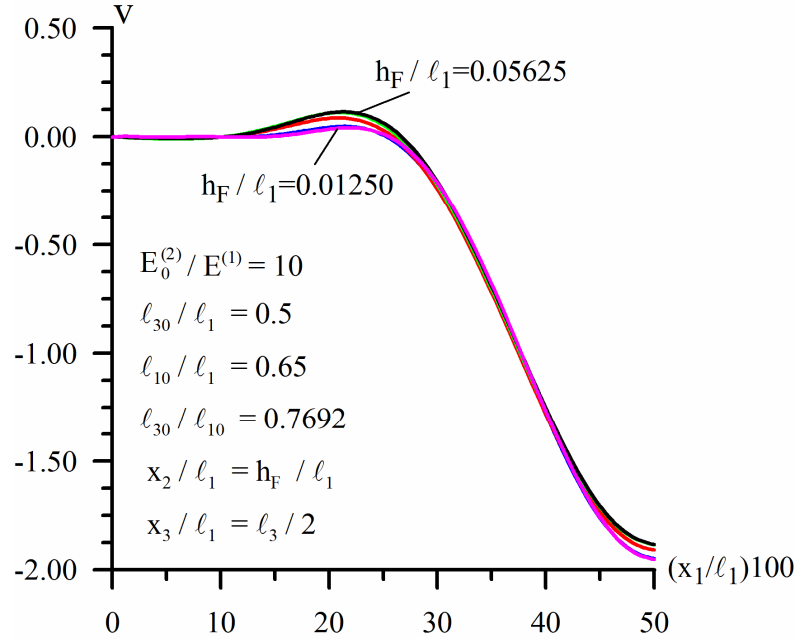
Şekil 5.5 ve burada yer verilmeyen, $\ell_{30}/\ell_{10} \geq \chi (=0.8333)$ durumunu sağlamak üzere, $E_0^{(2)}/E^{(1)}$ ve h_F/ℓ_1 parametrelerinin çeşitli değerlerinde çizilen burkulma modlarının da çatlak yüzeylerine verilen ön eğinti formuna uygun olduğu görülmüştür.



Şekil 5.6 Ele alınan sandviç kalın plakta, $\ell_{30}/\ell_{10} < \chi (=0.8333)$ için, $x_2 = h_F - 0$ yüzeyinin burkulma modu

$x_2 = h_F$ 'deki çatlakın alt yüzeyine ($x_2 = h_F - 0$, $\ell_3/2 \leq x_3 \leq \ell_3$, $0 \leq x_1 \leq \ell_1/2$) ait noktaların düşey doğrultudaki yer değiştirmelerinin yüzey grafiği, (burkulma modu), $\ell_{30}/\ell_{10} < \chi (=0.8333)$ durumu için Şekil 5.6 ile verilmiştir. Bu grafiğin elde edilmesinde kullanılan parametre değerleri $\gamma_{31} = 1$, $\ell_{30}/\ell_1 = 0.5$, $\ell_{10}/\ell_1 = 0.65$, $\ell_{30}/\ell_{10} = 0.6250$, $h_F/\ell_1 = 0.0375$, $E_0^{(2)}/E^{(1)} = 10$ ve $(p_{kr.0}/E^{(1)} - p/E^{(1)}) < 10^{-4}$ alınmıştır. Şekilde eksenler $x(=x_1)$ ve $z(=\ell_3 - x_3)$ ile gösterilmiştir. Parametrelerin verilen değerleri için $\ell_{30}/\ell_{10} (=0.6250) < \chi (=0.8333)$ olduğundan, çizilen yüzey grafiğinin ön eğintinin formuna uygun düşmediği görülmüştür.

Şekil 5.6'dan ve burada yer verilmeyen $\ell_{30}/\ell_{10} < \chi (=0.8333)$ durumunu sağlayan parametrelerin çeşitli değerleri için çizilen burkulma modlarının, çatlak yüzeylerine başlangıçta verilen ön eğintinin formundan farklı olduğu tespit edilmiştir.



Şekil 5.7 Çatlak yüzeyindeki düşey yer değiştirmelerin, bazı h_F/l_1 ($=0.01250, 0.02500, 0.03750, 0.05000, 0.5625$) değerleri için, x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = l_3/2$, $x_2 = h_F - 0$)

Şekil 5.7'de bazı h_F/l_1 değerleri için, $x_3 = l_3/2$ ve $x_2 = h_F - 0$ düzlemlerinin ara kesitindeki çatlak yüzeyinde bulunan düşey yer değiştirmelerin, x_1/l_1 'e göre yayılımı, parametrelerin $l_{30}/l_1 = 0.5$, $l_{10}/l_1 = 0.65$, $l_{30}/l_{10} = 0.7692$, $E_0^{(2)}/E^{(1)} = 10$ ve $(p_{kr,0}/E^{(1)} - p/E^{(1)}) < 10^{-4}$ değerlerinde verilmiştir. Grafiğin düşey ekseninde gösterilen büyüklükler (4.30) ifadesinden belirlenmiştir. Şekil 5.7'de verilen grafiklerden, sandviç kalın plağın iç çatlaklar içermesi durumunda, h_F/l_1 (çatlak ile serbest yüzey arasındaki mesafenin) parametresinin değiştirilmesinin burkulma modunu çok etkilemediği görülmektedir.

5.3.2 Viskoelastik Dikdörtgen Sandviç Plakta Delaminasyon Burkulması

Bu bölümde, ele alınan sandviç kalın plakta, dış tabakaların lineer viskoelastik ve çekirdek tabakasının elastik bir malzemeden yapıldığı kabul edilmektedir. Çeşitli malzeme parametrelerinin viskoelastik sandviç plağın delaminasyon burkulmasına etkisi, plağın iç çatlaklar içermesi durumu için ele alınarak, sabit bir $p/E^{(1)}$ dış basınç kuvveti için delaminasyon burkulmasına neden olan t'_{kr} kritik zaman değerleri belirlenmiştir. Belirtelim ki, t'_{kr} kritik zaman değerleri belirlenmesinde kullanılan $p/E^{(1)}$ statik dış basıncın değeri (3.37) eşitsizliğinden seçilmiştir (Bölüm 3).

Çizelge 5.3 Çeşitli h_F / ℓ_1 ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ için hesaplanan t'_{kr} değerleri ($\gamma_{31} = 1$, $\ell_{30} / \ell_1 = 0.5$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$, $\omega = 2$, $\alpha = -0.5$)

$E_0^{(2)} / E^{(1)}$	h_F / ℓ_1					
	0.0375		0.0250		0.0125	
	$p / E^{(1)}$	t'_{kr}	$p / E^{(1)}$	t'_{kr}	$p / E^{(1)}$	t'_{kr}
1	0.0430	0.002	0.0240	0.001	0.0105	0.003
	0.0420	0.005	0.0230	0.009	0.0100	0.015
	0.0410	0.011	0.0220	0.030	0.0090	0.172
2	0.0840	0.001	0.0450	0.008	0.0210	0.001
	0.0830	0.002	0.0440	0.016	0.0200	0.010
	0.0820	0.004	0.0430	0.030	0.0190	0.038
5	0.1900	0.007	0.1070	0.009	0.0510	0.001
	0.1800	0.034	0.1060	0.012	0.0500	0.004
	0.1700	0.136	0.1050	0.016	0.0490	0.008
10	0.3700	0.001	0.2050	0.007	0.1000	0.001
	0.3600	0.005	0.2000	0.016	0.0950	0.008
	0.3500	0.013	0.1950	0.031	0.0900	0.035

Çizelge 5.3'te farklı h_F / ℓ_1 , $p / E^{(1)}$ ve $E_0^{(2)} / E^{(1)}$ için bulunan t'_{kr} değerleri, $\omega = 2$ ve $\alpha = -0.5$ için verilmiştir. Sonuçlardan görüldüğü üzere, $p / E^{(1)}$ değerleri arttıkça (veya $p_{kr.0} / E^{(1)}$ değerine yaklaştıkça) kritik zaman değeri azalmaktadır.

Çizelge 5.4 Çeşitli ω ve α için hesaplanan t'_{kr} değerleri ($\gamma_{31}=1$, $\ell_{30}/\ell_1=0.5$, $\ell_{10}/\ell_1=0.5$, $h_F/\ell_1=0.0250$)

$E_0^{(2)} / E^{(1)}$	$p / E^{(1)}$	α	ω	t'_{kr}
2	0.0440	-0.5	1	0.012
			2	0.016
			3	0.025
		-0.3	2	0.044
				0.016
				0.001
5	0.1060	-0.5	1	0.009
			2	0.012
			3	0.017
		-0.3	2	0.029
				0.012
				0.001
10	0.2000	-0.5	1	0.011
			2	0.016
			3	0.023
		-0.3	2	0.042
				0.016
				0.001

Çizelge 5.4'de farklı elastisite modülü oranlarında, viskoelastik malzemenin reolojik parametrelerinin (ω ve α) çeşitli değerlerinin, kritik zaman üzerindeki etkisi $\gamma_{31}=1$, $\ell_{30}/\ell_1=0.5$, $\ell_{10}/\ell_1=0.5$ ve $h_F/\ell_1=0.0250$ için araştırılmıştır. Tabloda verilen sayısal sonuçlardan görüldüğü üzere; kritik zaman değeri, ω arttıkça artmakta ve $|\alpha|$ arttıkça azalmaktadır. Daha önce sandviç kalın plağın tabakaları arasında bant ve kenar çatlak bulunması halinde elde edilen etkiye benzer olan bu durum, bilinen mekanik görüşlerle uyumludur.

6. GENEL DEĞERLENDİRME VE SONUÇLAR

Ele alınan doktora tezi çerçevesinde, elde edilen sonuçlar ve değerlendirmeler aşağıda maddeler halinde verilmiştir:

1. Tez kapsamında, yapısında çatlak (bant, kenar ve iç çatlak) bulunan elastik ve lineer viskoelastik malzemeden yapılmış üç tabakadan oluşan dikdörtgen sandviç kalın plağın, çatlaklar doğrultusunda etkiyen statik normal dış basınç kuvveti etkisinde delaminasyon burkulma problemi incelenmiştir.
2. Ele alınan viskoelastik kalın plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik parametre değerleri, çatlak yüzeylerinde önceden var olduğu kabul edilen küçük ön eğintilerin, dış basınç kuvveti etkisinde (elastik durum) veya sabit dış basınç altında zaman ilerlerken (viskoelastik durum) büyüyerek sonsuza gitmesi kriterinden (başlangıç eğinti kriteri (Hoff, 1954)) yararlanılarak belirlenmiştir.
3. Ele alınan delaminasyon burkulması probleminin matematiksel modeli; Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Stabilite Teorisi çerçevesinde, parçalı homojen cisim modeli ve lineer viskoelastisite teorisinin üç boyutlu kesin denklemleri yardımıyla kurulmuştur.
4. İncelenen delaminasyon burkulma problemine ait matematiksel modelin çözümünde; Laplace dönüşümü, sınır tipli pertürbasyon tekniği, üç boyutlu sonlu elemanlar yöntemi ve Shapery yöntemi kullanılmıştır.
5. Çeşitli geometrik ve malzeme parametrelerinin, kritik parametrelere (elastik durumda kritik dış basınç kuvveti ile viskoelastik durumda kritik zaman değerine) etkileri incelenmiştir.
6. Sonlu eleman modellemesinde; düğüm noktalarında bilinmeyen olarak sadece yer değiştirmeler alınarak (yer değiştirme esaslı sonlu elemanlar yöntemi), çözüm bölgesi sonlu adet alt bölgeye (sonlu elemana) ayrıştırılmış ve bu ayrıştırma işleminde, sekiz nodlu standart dikdörtgen prizmatik sonlu elemanlar kullanılmıştır.
7. Her sonlu eleman üzerindeki sayısal işlemler, normalize edilmiş koordinatlar yardımıyla yapılmıştır. Hesaplamalarda karşılaşılan bütün integraller, 10 Gauss noktası kullanılarak Gauss karelemesi yardımıyla sayısal olarak yapılmıştır.
8. Tez çerçevesinde ele alınan problemlerin çözümünün gerektirdiği bütün algoritma ve programlar tarafımızdan yapılmış, bu algoritma ve programlardan elde edilen sayısal

sonuçlar özel durumda literatürdeki uygun sonuçlar ile karşılaştırılarak, algoritma ve programlara güven sağlanmıştır.

Tez çerçevesinde ele alınan her bir problemde, geometrik ve malzeme parametrelerinin değişiminin kritik parametrelere etkisi geniş biçimde incelenmiş, sayısal sonuçlar çok sayıda izelge ve grafik şeklinde verilmiştir. Elde edilen sayısal sonuçların değerlendirilmesi aşağıda sunulmaktadır:

1. Sandviç kalın plağın tabakaları arasında bant, kenar ve i çatlak bulunması durumlarından elde edilen kritik delaminasyon burkulma değerleri, aynı parametre değerleri için karşılaştırıldığında; sandviç plağın i çatlak içermesi durumunda elde edilen kritik delaminasyon burkulma kuvvetlerinin, bant veya kenar çatlak içermesi durumlarında elde edilen değerlerden daha büyük olduğu görülmektedir.
2. Her üç tip çatlak durumunda, sandviç kalın plağın tabakaları arasında bulunan çatlakların boyutlarının küçültülmesi, dış tabakaların elastisite modüllerinin ve/veya kalınlıklarının artmasıyla kritik delaminasyon burkulma değerlerini artmaktadır.
3. Sandviç kalın plağın Ox_3 doğrultusundaki uzunluğunun arttırılmasıyla elde edilen kritik burkulma değerlerinin azalarak bir asimtoda yaklaştığı tespit edilmiştir. Bu asimtot değeri, düzlem şekil değiştirme durumundaki uygun problemin çözümünden elde edilen sayısal sonuçlarla uyum göstermektedir (izelge 3.2).
4. Yapı elemanının bant çatlak içermesi durumunda elde edilen burkulma modu, çatlak yüzeylerine başlangıçta verilen n eğintinin formu ile uyum göstermektedir (şekil 3.3). Sandviç kalın plağın tabakaları arasında bant çatlaklar bulunması durumunda; malzeme ve geometrik parametrelerin değişiminin, plağın burkulma modunu etkilemediği tespit edilmiştir.
5. Yapı elemanının kenar veya i çatlak içermesi halinde elde edilen burkulma modu, yapıdaki çatlağın kenar uzunlukları oranına (ℓ_{30}/ℓ_{10}) bağlı olarak değişmektedir. Bu oran belirli bir değerin altında kalırsa; sandviç kalın plağın burkulma modu, çatlak yüzeylerine başlangıçta verilen n eğintinin formundan farklı bir formda gerçekleşmektedir (şekil 4.6, şekil 5.6). Sandviç plağın kenar çatlak (i çatlak) içermesi durumunda; plağın delaminasyon burkulma modunun, h_F (atlak ile plağın serbest yüzeyi arasında kalan kısmın kalınlığı) parametresi değişiminden etkilendiği (şekil 4.8) (etkilenmediği (şekil 5.7)) tespit edilmiştir.

6. Dış tabakalar viskoelastik malzeme olarak ele alındığında; $p / E^{(1)}$ ($p_{kr,\infty} / E^{(1)} < p / E^{(1)} < p_{kr,0} / E^{(1)}$) değerleri arttıkça (veya $p_{kr,0} / E^{(1)}$ değerine yaklaştıkça), kritik zaman değerlerinin azaldığı görülmektedir.
7. Ele alınan viskoelastik malzemenin reolojik parametrelerinin kritik zaman üzerindeki etkisi, her üç tip çatlak durumunda da bilinen mekanik görüşlere uymaktadır.

Tez çerçevesinde ele alınan viskoelastik sandviç plakların delaminasyon burkulma problemlerinin üç boyutlu kesin teoriler çerçevesinde modellenmesi ve çözümü, bu alanda ilk teşebbüsleri oluşturmaktadır. Ele alınan problemlerin çözümü; sınır tipli pertürbasyon tekniği, üç boyutlu sonlu elemanlar modellemesi Laplace dönüşümü ve Shapery yöntemi yardımıyla yapılabildiğinden, kullanılan bu yöntemler bazı açılardan geliştirilmiştir. Tez çerçevesinde elde edilen bilgi birikimi, bu çalışmadan sonraki çalışmalara önemli bir baz teşkil edecektir. Ayrıca tez çerçevesinde elde edilen sayısal sonuçların, yaklaşık teoriler çerçevesinde yapılan araştırmalardan elde edilen sayısal sonuçların geçerlilik sınırlarının belirlenmesinde veya sonraki araştırmaların sayısal sonuçlarının test edilmesinde önemli yer tutabileceği öngörülmektedir.

KAYNAKLAR

Akbarov, S.D., (1994), "On the Crack Problems in Composite Materials with Locally Curved Layers", *Mechanics of Composite Materials*, 30(6):750-759.

Akbarov, S.D., (1998), "On the Three Dimensional Stability Loss Problems of Elements of Constructions Fabricated from the Viscoelastic Composite Materials", *Mech. Comp. Mater.* 34(6):537-544.

Akbarov, S.D., (2007), "Three-dimensional Instability Problems for Viscoelastic Composite Materials and Structural Members", *International Applied Mechanics*, 43(10):1069-1089.

Akbarov, S.D. ve Aliyev, E.A., (2009), "Near-Surface Failure of Layered Viscoelastic Materials", *Mechanics of Composite Materials*, 45(5):477-488.

Akbarov, S.D. ve Guz, A.N., (2000), "Mechanics of Curved Composites", Kluwer Academic Publishers, 464 pp.

Akbarov, S.D. ve Rzayev, O.G., (2001), "On the Delamination of the Elastic and Viscoelastic Composite Circular Plate", *European Journal of Mechanics A/Solids*, 21:269-279.

Akbarov, S.D. ve Rzayev, O.G., (2002a), "Local Buckling of the Elastic and Viscoelastic Coating Around the Penny-Shaped Interface Crack", *International Journal of Engineering Science*, 40(13):1435-1451.

Akbarov, S.D. ve Rzayev, O.G., (2002b), "On the Buckling of the Elastic and Viscoelastic Composite Circular Thick Plate with a Penny-Shaped Crack", *European Journal of Mechanics A/Solids*. 21(2):269-279.

Akbarov, S.D. ve Rzayev, O.G., (2002c), "Delamination of Unidirectional Viscoelastic Composite Materials", *Mechanics of Composite Materials*, 38(1):17-24.

Akbarov, S.D. ve Rzayev, O.G., (2002), "On the Buckling of the Elastic and Viscoelastic Circular Thick Plate with a Penny-Shaped Crack", *European Journal of Mechanics A/Solids*, 21(2):269-279.

Akbarov, S.D. ve Rzayev, O.G., (2003), "On the Delamination of a Viscoelastic Composite Circular Plate", *International Applied Mechanics*, 39(3):368-374.

Akbarov, S.D., Selim, S. ve Demiriz, I.G., (2004), "Buckling Instability of a Thick Rectangular Plate of a Composite Material with a Spatially Periodically Curved Structure", *Mechanics of Composite Materials*, 40(5):389-396.

Akbarov, S.D., Sisman, T. ve Yahnioglu, N., (1997), "On the Fracture of the Unidirectional Composites in Compression", *International Journal of Engineering Science*, 35(12/13):1115-1136.

Akbarov, S.D. ve Tekercioglu, R., (2006), "Near-Surface Buckling In Stability of a System Consisting of a Moderately Rigid Substrate, a Viscoelastic Bond Layer, and an Elastic Covering Layer", *Mechanics of Composite Materials*, 42(4):363-372.

Akbarov, S.D. ve Tekercioglu, R., (2007), "Surface Undulation Instability of the Viscoelastic Half-Space Covered with the Stack of Layers in Bi-axial Compression", *International Journal of Mechanical Sciences*, 49(6):778-789.

Akbarov, S.D. ve Yahnioglu, N., (1999), "The Method for Investigation of the General Theory of Stability Problems of Structural Elements Fabricated from the Viscoelastic Composite Materials", Sixth Annual International Conference on Composites Engineering (ICCE/6), Orlando-Florida, USA (1999) pp: 905-906.

Akbarov, S.D. ve Yahnioglu, N., (2001), "A Method of Investigation of the General Theory of Stability Problems of Structural Elements Fabricated from the Viscoelastic Composite Materials", *Composites Part B: Engineering*, 32(5):475-482.

Akbarov, S.D. ve Yahnioglu, N., (2010), "Delamination Buckling of a Rectangular Orthotropic Composite Plate Containing a Band Crack", *Mechanics of Composite Materials* 46(5):493-504.

Akbarov, S.D., Yahnioglu, N. ve Karatas, E.E. (2009), "Buckling Delamination of the Viscoelastic Rectangular Thick Plate with a Edge Rectangular Crack", ASME 2009 International Mechanical Engineering Congress and Exposition (IMECE09), November 13-19, 2009, Lake Buena Vista, Florida, USA.

Akbarov, S.D., Yahnioglu, N. ve Karatas, E.E. (2010a), "Buckling Delamination of the Rectangular Orthotropic Thick Plate with an Edge Rectangular Crack", ASME2010 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, July 12-14, 2010, Istanbul, Turkey.

Akbarov, S.D., Yahnioglu, N. ve Karatas, E.E. (2010b), "An Analysis of Buckling Delamination of the Composite Rectangular Thick Plate with an Inner Rectangular Crack", Proceedings of the Tenth International Conference on Computational Structures Technology (CST2010), pp. 1-1514-17, September 2010 Valencia, Spain.

Akbarov, S.D., Yahnioglu, N. ve Karatas, E.E. (2010c), "Buckling Delamination of a Rectangular Plate Containing a Rectangular Crack and Made from Elastic and Viscoelastic Composite Materials", *International Journal of Solids and Structures*, 47(25-26):3426-3434.

Akbarov, S.D., Yahnioglu, N. ve Kutug, Z., (2001), "On the Three-Dimensional Stability Loss Problem of the Viscoelastic Composite Plate", *International Journal of Engineering Science*, 39(13):1443-1457.

Akbarov, S.D., Yahnioglu, N. ve Rzayev, O.G., (2007), "On the Influence of Singular-Type Finite Elements on the Critical Force in Studying the Buckling of a Circular Plate with a Crack", *International Applied Mechanics*, 43(9):1048-1056.

Akbarov, S.D., Yahnioglu, N. ve Tekin, A., (2010a), "3D FEM Analyses of the Buckling Delamination of a Rectangular Sandwich Plate Containing Interface Rectangular Cracks and Made from Elastic and Viscoelastic Materials", *Computer Modeling in Engineering & Sciences (CMES)*, 64(2):147-185.

Akbarov, S.D., Yahnioglu, N. ve Tekin, A., (2010b), "Buckling Delamination of a Rectangular Sandwich Thick Plate with Band Cracks", ASME2010 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, July 12-14, 2010, Istanbul, Turkey.

Altenbach, H., Altenbach, J. ve Kissing, W., (2004), "Mechanics of Composite Structural Elements", Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.

Arman, Y., Zor, M., ve Aksoy, S., (2006), "Determination of Critical Delamination Diameter of Laminated Composite Plates Under Buckling Loads", *Composites Science and Technology* 66 (15):2945-2953.

- Babich, I.Yu ve Guz, A.N., (1983), "Stability of Bars, Plates and Shells of Composite Materials (Three-dimensional formulation)", Survey, Soviet Appl. Mech. (English translations of Prikladnaya Mekhanika), 10(19), 835-849.
- Babich, I.Yu ve Guz, A.N., (2002), "Stability of Composite Structural Members (Three-Dimensional Formulation)", Inter. Appl. Mech., 38(9):1048-1075.
- Babich, I.Yu, Guz, A.N. ve Chekhov, N., (2001), "The Three-dimensional Theory of Stability of Fibrous and Laminated Materials", Inter. Appl. Mech., 37(9):1103-1141.
- Bazant, Z.P., (1971), "Correlation Study of Incremental Deformation and Stability of Continuous Bodies", Trans. Amer. Soc. Mech. Eng. Ser A, 4:344-358.
- Biezeno, C.B. ve Hencky, H., (1929), "On the General Theory of Elastic Stability", Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 32:444-456.
- Biot, M.A., (1934), "Sur La Stabilite de L'equilibre Elastic Stability", Ann Soc. Sci. Sect B, 54(1):91-109.
- Biot, M.A., (1939), "Nonlinear Theory of Elasticity and the Linearized Case for a Body Under Initial Stress", Phill Mag. Sec Z, 27: 89-115: 468-489.
- Biot, M.A., (1965), "Mechanics of Incremental Deformations", Wiley, New York, pp:504.
- Bogdanov, V.L., Guz, A.N., ve Nazarenko, V.M., (2009), "Fracture of a Body with a Periodic Set of Coaxial Cracks Under Forces Directed Along Them: An Axisymmetric Problem", Inter. Appl. Mech., 45(2):111-124.
- Bolotin, V.V., (1996), "Delaminations in Composite Structures: It Orijin, Buckling, Growth and Stability", Composites: Part B 27(2):129-145.
- Chai, H., Babcock C.D., Knauss, W.G., (1981), "One-Dimensional Modeling of Failure in Laminated Plates by Delamination Buckling", Int. Journal of Solids Struct., 17(11):1069-1083.
- Cristensen, R.M., (1979), "Mechanics of Composite Materials", John Willey and Sons Int., New York.
- Crosby, K.M. ve Bradley, R.M., (1999), "Pattern Formation During Delamination and Buckling of Thin Films", Physical Review E., 59(3):R2542-R2545.
- Dekret, V.A., (2008a), "Plane Instability Problem for a Composite Reinforced with a Periodic Row of Short Parallel Fibers", Inter. Appl. Mech., 44(5):498-504.
- Dekret, V.A., (2008b), "Near-Surface Instability of Composites Weakly Reinforced with Short Fibers", Inter. Appl. Mech., 44(6):619-625.
- Erdogan, F., (2000), "Fracture Mechanics", International Journal of Solids and Structures, 37: 171-183.
- Ersoy, H.Y., (2001), "Kompozit Malzeme", Literatür Yayıncılık, İstanbul.
- Evans, A.G. ve Hutchinson, J.W., (1995), "The Thermo Mechanical Integrity of Thin Films and Multilayers", Acta Metal. Mater., 43(7):2507-2530.

- Gioia, G. ve Ortiz, M., (1997), "Delamination of Compressed Thin Films", *Adv. in Appl. Mech.*, 33:119-192.
- Guz, A.N., (1972), "Three-Dimensional Theory of Elastic Stability Under Finite Subcritical Deformations", Institute of Mechanics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, Kiev, Translated from *Prikladnaya Mekhanika*, Vol. 8, No. 12, pp. 25–44.
- Guz, A.N., (1999), "Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies", Springer-Verlag, Berlin Heideberg , 555p.
- Guz, A.N., (2000), "Description and Study of Some Nonclassical Problems of Fracture Mechanics and Related Mechanism", *Inter. Appl. Mech.*, 36(12):1537-1564.
- Guz, A.N., (2001), "Constructing the Three-Dimensional Theory of Deformable Bodies", *Inter. Appl. Mech.*, 37(1):1-31.
- Guz, A.N. ve Dekret, V.A., (2008), "On Two Models in the Three-Dimensional Theory of Stability of Composites", *Inter. Appl. Mech.*, 44(8):839-854.
- Guz, A.N., ve Dekret, V.A., (2009a), "Stability Problem of Composite Material Reinforced by Periodical Row of Short Fibers", *CMES.*, 42(3):177-186.
- Guz, A.N., Dekret, V.A., (2009b), "Stability Loss in Nanotube Reinforced Composites", *CMES.*, 49(1):69-80.
- Guz, A.N., Dyshel, M.Sh., Nazarenko, V.M., (2004), "Fracture and Stability of Materials and Structural Members with Cracks: Approaches and Results", *International Applied Mechanics*, 40(12):1323-1359.
- Guz, A.N. ve Guz, I.A., (2003), "On Publications on the Brittle Fracture Mechanics of Prestressed Materials", *Inter. Appl. Mech.*, 39(7), 797-801.
- Guz, A.N. ve Nazarenko, V.M., (1985a), "Theory of Near-Surface Delamination of Composite Materials Under Compression Along the Macro-Crack", *Mech. Comp. Mater.*, 21(5):826-833.
- Guz, A.N. ve Nazarenko, V.M., (1985b), "Symmetric Failure of the Half-Space with Penny-Shaped Crack in Compression", *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 3(3):233-245.
- Guz, A.N. ve Nazarenko, V.M., (1989a), "Fracture Mechanics of Materials in Compression Along Crack, Highly Elastic Materials", *Inter. Appl. Mech.*, 25(9):3-32.
- Guz, A.N. ve Nazarenko, V.M., (1989b), "Fracture Mechanics of Materials under Compression Along Crack, Structural Materials", *Inter. Appl. Mech.*, 25(10):3-19.
- Hoff, N.J., (1954), "Buckling and Stability", *Journal of the Royal Aeron. Society*, 58:3-52.
- Hutchinson, J.W., He, M.Y. ve Evans, A.G., (2000), "The Influence of Imperfections on the Nucleation and Propagation of Buckling Driven Delaminations", *Journal of Mech. and Phys. of Solids*, 48(4):709-734.
- Hutchinson, J.W. ve Suo, Z., (1992), "Mixed Mode Cracking in Layered Materials", *Adv. in Appl. Mech.*, 29:63-191.
- Hutchinson, J.W., Thouless, M.D. ve Liniger, E.G., (1992), "Growth and Configurational Stability of Circular, Buckling-Driven Film Delaminations", *Acta Metall. Mater.*, 40(2):295-308.

- Hwang, S.F. ve Mao, C.P., (1999), "The Delamination Buckling of Single-Fibre System and Interply Hybrid Composites", *Compos. Struct.*, 46(3):279-287.
- Kachanov, L.M., (1976), "Fracture of Composite Materials by Means a Delamination", *Mechanika Polimerov.*, 5:918-922.
- Kardomateas, G.A., Pelegri, A.A. ve Malik, B., (1995), "Growth of Internal Delaminations Under Cyclic Compression in Composite Plates", *Journal of Mech. and Phys. of Solids*, 43(6): 847-868.
- Kutug, Z., (2009), "On the Three-Dimensional Undulation Instability of a Rectangular Viscoelastic Composite Plate in Biaxial Compression", *Mechanics of Composite Materials*, 45(1):65-76.
- Kutug, Z., Yahnioglu, N. ve Akbarov, S.D., (2003), "The Loss of Stability Analyses of an Elastic and Viscoelastic Composite Circular Plate in the Framework of Three-Dimensional Linearized Theory", *European Journal of Mechanics: A/Solids*, 22(3):475-488.
- Li, W. ve Siegmund, T., (2004), "Numerical Study of Indentation Delamination of Strongly Bonded Films by Use of a Cohesive Zone Model", *CMES.*, 5(1):81-90.
- Moon, M.W., Chung, J.W., Lee, K.R., Oh, K.H., Wang, R. ve Evans, A.G., (2002), "An Experimental Study of the Influence of Imperfections on the Buckling of Compressed Thin Films", *Acta Materialia*, 50(5):1219-1227.
- Moon, M.W., Lee, K.R., Oh, K.H. ve Hutchinson, J.W., (2004), "Buckle Delamination on Patterned Substrates", *Acta Materialia*, 52:3151-3159.
- Nilsson, K.F. ve Giannakopoulos, A.E., (1995), "A Finite Element Analysis of Configurational Stability and Finite Growth of Buckling Driven Delamination", *Journal of Mech. and Phys. of Solids*, 43(12):1983-2021.
- Nilsson, K.F., Thesken, J.C., Sinderar, P., Giannakopoulos, A.E. ve Stoakers, B., (1993), "A Theoretical and Experimental Investigation of Buckling Induced Delamination Growth", *Journal of Mech. and Phys. of Solids*, 41(4):749-782.
- Rabotnov, Yu.N., (1977), "Elements of Hereditary Mechanics of Solid Bodies", Nauka, Moskow (in Russian).
- Rzayev, O. G. (2002), "Local Buckling Around an Interfacial Crack in a Viscoelastic Sandwich Plate", *Mechanics of Composite Materials*, 38 (3): 233-242.
- Rzayev, O.G. ve Akbarov S.D., (2002), "Local Buckling of the Elastic and Viscoelastic Coating Around the Penny-Shaped Interface Crack", *International Journal of Engineering Science*, 40(13):1435-1451.
- Sadowski, T. ve de Borst R., (2009), "Lecture Notes on Composite Material", Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
- Schapery, R.A., (1966), "Approximate Methods of Transform Inversion for Viscoelastic Stress Analysis", *Proc. 4th. US Nat. Cong. Appl. Mech.*, 1075-1085.
- Selim, S. ve Akbarov, S.D., (2003), "FEM Analysis of the Three-Dimensional Buckling Problem for a Clamped Thick Rectangular Plate Made of a Viscoelastic Composite", *Mechanics of Composite Materials*, 39(6):531-540.

- Short, G.J., Guild, F.J. ve Pavier, M.J., (2001), "The Effect of Delamination Geometry on the Compressive Failure of Composite Laminates", *Composite Science and Technology*, 61(4):2075-2086.
- Southwell, R.V., (1913), "On the General Theory of Elastic Stability", *Philos. Trans. Soc., London Ser A*, 213:187-244.
- Şuhubi, E.S., (1994), "Sürekli Ortamlar Mekaniği", İTÜ, İstanbul.
- Talreja, R. ve Manson, Jan-A. E., (2000), "Comprehensive Composite Materials", Vol. 2: Polymer Matrix Composites, Elsevier Science Ltd.
- Wang, J.T., Cheng, S.H. ve Lin, C.C., (1995), "Local Buckling of Delaminated Beams and Plates Using Continuous Analysis", *Journal of Composite Materials*, 29(10):1374-1402.
- Wang, J.S. ve Evans, A.G., (1998), "Measurement and Analysis of Buckling and Buckle Propagation in Compressed Oxide Layers on Superalloy Substrates", *Acta Materials*, 46(14):4993-5005.
- Yahnioglu, N., (1996), "Eğrisel Yapıya Sahip Kompozit Malzemedeki Hazırlanmış Yapı Elemanlarının Statiğine Uygun Sınırdeğer Problemlerinin FEM ile İncelenmesi", Doktora Tezi, YTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Yahnioglu, N., (2000), "Stability of Viscoelastic Circular Plate", Seventh Annual International Conference on Composites Engineering (ICCE/7), 2000 Denver-Colorado, USA, pp: 949-950.
- Yahnioglu, N. ve Akbarov, S.D., (2002), "Stability Loss Analyses of the Elastic and Viscoelastic Composite Rotating Thick Circular Plate in the Framework of the Three-Dimensional Linearized Theory of Stability", *International Journal of Mechanical Sciences*, 44(6):1225-1244.
- Yahnioglu, N. ve Kutug, Z., (2000), "Stability of Rectangular Plate Fabricated from the Viscoelastic Composite Materials", Seventh Annual International Conference on Composites Engineering (ICCE/7), 2000, Denver-Colorado, USA, pp: 493-494.
- Zienkiewicz, O.C. ve Taylor, R.L., (1989), "The Finite Element Methods: Basic Formulation and Linear Problems", Vol. 1, 4th Ed., Mc Graw-Hill Book Company, Oxford.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	01.01.1978	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1991-1994	İstanbul Atatürk Fen Lisesi
Lisans	1995-2001	Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Fak. İnşaat Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	2003-2006	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Müh. Anabilim Dalı, Mekanik Programı
Doktora	2006-2011	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Müh. Anabilim Dalı, Mekanik Programı

Çalıştığı Kurumlar

2000-2001	İdea Mühendislik
2001-2002	Çağrıbey Anadolu Lisesi
2004-2005	El-SE Mühendislik
2005-halen	YTÜ İnşaat Fak., Araştırma Görevlisi