YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

3+1 BOYUTTA İNTEGRE EDİLEBİLİR SİSTEMLER ve Bİ-HAMİLTONYEN YAPILARI

Yüksek Fizikçi Başak MEMİŞOĞLU

FBE Fizik Anabilim Dalı Fizik Programında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Devrim YAZICI (YTÜ)

İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

A	Frechet türev operatörü
$\mathrm{A}^{\dagger}$	Hermitsel operatör
c	Dalga hızı
H	Hamiltonyen
I	Birim matris
J	Hamiltonyen operatörü
K_{ij}	Anti-simetrik matris operatörü
L	Lagranjyen
M^{T}	Transpoz simplektik matris
$PrV_{j\theta}$	Prolongation operatörü
R	Tekrarlama operatörü
R_c	Kompleks tekrarlama operatörü
$R^{\dagger}$	Hermitsel eşlenik Nijenhuis tekrarlama operatörü
U	Üniter Operatör
u	Dalga fonksiyonu
ρ	Yoğunluk
λ	Parametre
$\Psi(.)$	Schrödinger fonksiyonu
σ	Pauli spin matrisi
Ω	1-form bağ fonksiyonu
$\wedge$	Dış çarpım
$\{,\}$	Poisson parantezi
π	Kanonik momentum
ϕ	Bağ fonksiyonu
ω	Simplektik 2-form
τ	Lie grup parametresi
$\dfrac{\partial}{\partial x}$	x'e göre kısmi türev
$\dfrac{\delta}{\delta u}$	u fonksiyonunun varyasyonel türevi (fonksiyonel türev)
φ,ψ	Lie simetri karakteristikleri
Θ	bi-vektör fonksiyonu
ω_i	bi-vektör
Δ	İki boyutlu Laplace operatörü

$\Re$	Reel uzay
$\Im$	Kompleks uzay
δ_{ij}	Kroniker delta

KISALTMA LİSTESİ

AKNS	Ablowitz, Kaup, Newell, Segur
KdV	Korteweg-de Vries
mKdV	modified Korteweg-de Vries
KMA	Kompleks Monge-Ampere

ÇİZELGE LİSTESİ

ÖNSÖZ

Bu çalışmada değerli bilgilerini, yardımlarını ve emeğini esirgemeyen saygı değer hocam Yrd. Doç. Dr. Devrim YAZICI'ya sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ayrıca hayatım boyunca manevi desteklerini ve fedakârlıklarını benden esirgemeyen sevgili annem Leyla ve babam Erdoğan MEMİŞOĞLU'na bu çalışmamın bir gurur kaynağı olmasını dilerim.

Başak MEMİŞOĞLU

2010

ÖZET

Bu çalışmada son günlerde gelişme gösteren 3+1 boyutlu integre edilebilir bi-Hamiltonyen sistemler çalışılmıştır. Genel olarak bir bağımlı değişken ile x, y, z ve t şeklinde dört bağımsız değişkenden oluşan ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemler ele alınacaktır. Reel dört boyutta Öklid veya ultra-hiperbolik imzada (signature) "(anti)-self-dual gravity" içeren Kompleks Monge-Ampere denklemi, bu denklemlere bir örnek oluşturmaktadır. Kompleks Monge-Ampere denkleminin, reel birinci mertebeden 2-bileşenli formda tanımlandığında bi-Hamiltonyen yapıya sahip olduğu gösterilmiştir. Böylece Kompleks Monge-Ampere denklem sistemi, Magri teoremine göre dört boyutta tamamen integre edilebilir bir sistemdir. Birinci Hamiltonyen ve simplektik yapıyı elde etmek için Dirac'ın bağ teorisi 2-bilişenli sistem için tanımlanan yeni Lagranjyen'e uygulanarak elde edilmiştir. Sistemin Frechet türevini elde etmek için sadece bağımlı değişkenleri içeren Lie grup dönüşümüne, integre edilebilirlik şartı (compatibility) uygulanmıştır. Tekrarlama operatörü ve Frechet türevi komütatörünün, sistemi yeniden oluşturduğu için Olver-Ibragimov-Shabat tipi Lax çifti oluşturdukları gösterilmiştir. Daha sonra tekrarlama operatörü inşa edilmiş ve sistemin ikinci Hamiltonyen yapısı, tekrarlama operatörünün birinci Hamiltonyen operatörüne uygulanmasıyla elde edilmiştir. Son olarak Hamiltonyen operatörleri için Jacobi özdeşliği, Olver'in yöntemi kullanılarak kanıtlanmıştır. Böylece Magri teoremine göre reel dört boyutta "self-dual gravity" nin tamamen integre edilebilir olduğu sonucuna varılabilmiştir.

ABSTRACT

In this work we study 3+1 dimensional bi-Hamiltonian integrable systems which are developed considerably in recent years. In general we are interested in nonlinear second order differential equations with one dependent variable and four independent variables x, y, z and t. One of the examples of these equations is the Complex Monge-Ampere equation which governs the (anti)-self-dual gravity in the real four-dimensional space with either Euclidean or ultra-hyperbolic signature. It is shown that Complex Monge-Ampere equation when set in a real first-order 2-component form admits a bi-Hamiltonian structure. Therefore by Magri's theorem this is proven to be a completely integrable system in four dimensions. For a 2-component system a new Lagrangian is introduced and Dirac's constraint theory is applied to obtain the symplectic and first Hamiltonian structure. In order to get Frechet derivative of the system the compatibility condition is applied to the Lie group transformation which is only considered for a dependent variable. It is also shown that the commutator of the recursion operator and Frechet derivative reproduce the system and therefore form a Lax pair Olver-Ibragimov-Shabat type. Then the real Recursion operator is constructed and the second Hamiltonian structure for this system is obtained by applying the recursion operator on the first Hamiltonian operator. Finally Jacobi identity for Hamiltonian structure is proven by using Olver's method. Therefore we conclude that self-dual gravity is completely integrable in four real dimensions by Margi's theorem.

1. GİRİŞ

İntegre edilebilir Hamiltonyen sistemler üzerine otuz yılı aşkın süredir yapılan çalışmalar, 1+1 boyutta çok sayıda örneğin literatüre girmesini sağlamıştır. Bu denklemlerin en önemlisi ve en çok bilineni Korteweg-de Vries (KdV) denklemidir. İlk defa Gardner (1971) KdV denkleminin tamamen integre edilebilir Hamilton bir sistem oluğunu göstermiş ve bu fikir daha sonra Zakharov ve Fadeev (1971) tarafından geliştirilmiştir. Genel olarak değişim denklemlerin deki Hamilton sistem kavramı ilk defa Magri (1978), Manin (1979) ve Kupeshmidt'in (1980) çalışmalarında görülmektedir. Jacobi özdeşliğinin hesaplamasındaki basitleştirilmiş teknikler dahil olmak üzere, ileriki gelişmeler Gelfand-Dorfman (1979), Olver (1980) ve Kosmann-Schwarzbach'ın (1981) çalışmalarında görülmektedir. Magri'nin (1980) temel teoremi ile Hamilton sistemler için, ilk defa KdV ve diğer denklemler için ikinci Hamilton yapı elde edilebilmiştir.

Uzun yıllardır 2+1 ve 3+1 boyutta integre edilebilir sistemlerle ilgili az örneğe rastlanmaktadır. Literatürdeki başlıca örnekler; Kadomtesev-Petviashvili (1970), Davey-Stewartson (1974), Ishimori (1984) ve "self-dual"-Yang Mills (1977) denklemleridir. Bu nedenle 3-boyutlu ve özellikle 4-boyutlu integre edilebilir sistemler güncelliğini koruduğu için oldukça önemlidir. Son yıllarda Neyzi, Nutku ve Sheftel (Neyzi vd., 2005); "Plebanski second heavenly" denklemi iki bileşenli formda yazıldığı zaman, 3+1 boyutta bi-Hamiltonyen bir sistem olduğunu keşfettiler. Bu çalışmayı takiben Kompleks Monge-Ampere denkleminin reel 3+1 boyutlu tamamen integre edilebilir bi-Hamiltonyen bir sistem olduğu Magri teoremi ile elde edilmiştir (Nutku vd., 2008). Ayrıca "Plebanski second heavenly" denkleminin simetrileri kullanılarak, 2+1 boyuta indirgendiğinde bu denkleminde tamamen integre edilebilir Hamilton bir sistem olduğunu göstermişlerdir (Yazıcı ve Sheftel, 2007).

Çok yeni yapılan bir çalışmada Sheftel ve Malykh (2009), ortak simetri içeren ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlerin genel bir sınıflandırmasını elde etmişlerdir. Genel durumdan yapılan kanonik dönüşümlerle, bilinen birinci ve ikinci Plebanski denklemleri ve bunlara ek olarak "mixed heaveanly" ve "asyymetric heavenly" olarak adlandırdıkları 3+1 boyutlu denklemler türetilmiştir. Mixed heavenly denkleminin, Husain (Husain, 1994) denklemiyle Legendre dönüşümleri ile bağlantılı oldu görülmüştür. Her iki denklemde Magri teoremine göre tamamen integre edilebilen bi-Hamilton sistemler olduğu gösterilmiştir (Sheftel ve Yazıcı, 2009). Asymmetric heavenly denklemi ve genel durum için bi-Hamilton yapının elde edilmesi günceliğini koruyan ve devam eden çalışmaları içermektedir.

Bu çalışmada son yıllarda gelişme gösteren, 3+1 boyutlu integre edilebilir sistemlerin Magri teoremine göre integre edilebilirliği incelenecektir. 1. Bölümde çalışmanın içeriği ve literatürdeki çalışmalar incelenmiştir. 2. Bölümde alt yapıyı oluşturmak için, 1+1 boyutta integre edilebilir sitemler için test denklemi olarak kabul edilen KdV denkleminin integre edilebilirliği dört farklı yöntemle ele alınmıştır. 3. Bölümde yeni çalışmalardan biri olan Kompleks Monge-Ampere denkleminin reel 3+1 boyutta Magri teoremine göre tamamen integre edilebilen bi-Hamiltonyen sistem olduğu ayrıtlı bir şekilde gösterilmiştir. 4. Bölümde ise bi-Hamiltonyen sistemi oluşturan Hamiltonyen operatörlerinin mutlaka sağlaması gereken kıstaslardan biri olan Jacobi özdeşliğinin sağlandığı P. Olver'in (1986) metodu kullanılarak gösterilmiştir.

2. İNTEGRE EDİLEBİLİR SİSTEMLER VE YÖNTEMLERİ

İntegre edilebilirlik teriminin geniş kapsamlı bir tanımını yapmak zordur. Daha doğrusu bu terim; integre edilebilir sistemlerin bazı anlamlarda tamamen çözülebilir ve tüm başlangıç durumları için düzenli çözümleri ortaya koyabildiğine dair inanışlara tekabül eden çeşitli sezgisel kavramlara çağrışım yapar. Karşıt olarak integre edilemez terimi genellikle sistem tamamen çözülemez veya çözümü düzensiz bir biçimde davranabilir bir şekilde ifade edilebilir. Yani çözülebilirlik ve integre edilebilirlik farklı kavramlardır. Bu nedenle karşımıza çıkan bir problemin direk çözümünü araştırmak yerine integre edilip edilemeyeceğini araştırmak daha önceliklidir (Zakharov, 1991).

Doğadaki birçok olayın anlaşılması için yapılan modeller lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler içerirler. Bu nedenle integre edilebilir sistemler veya klasik lineer olmayan diferansiyel denklemler teorisi, modern matematiksel fiziğin gelişen güncel konusu haline gelmiştir. Fiziğin birçok dalında örneğin; lineer olmayan optik, hidrodinamik, katıhal fiziği, plazma fiziği ve yüksek enerji fiziği gibi geniş bir alandaki fiziksel olayların incelenmesinde lineer olmayan sistemler karşımıza çıkmaktadır. Bu nedenle bu sistemlerin tamamen integre edilebilirliği fizikçiler ve matematikçilerin bir çalışma alanını oluşturmaktadır.

Bu bölümde literatürde en çok bilinen ve bir test denklemi haline gelen 1+1 boyutlu Korteweg-de Vries (KdV) denkleminin integre edilebilirliği ayrıntılı olarak incelenecektir. KdV denklemi, Korteweg ve öğrencisi de Vries tarafından sığ suda uzun dalga yayılımını tanımlamak için türetilmiştir (Korteweg ve de Vries, 1895). KdV denkleminin tamamen çözülebilirliği, denklemin sırasıyla; sonsuz sayıda korunan büyüklüğe sahip olması, Lax çiftinin olması (Lax, 1968), AKNS metodunu sağlaması (Ablowitz vd., 1973), bi-Hamiltonyen yapıya sahip olması ve düz uzay şartı yöntemleri ile gösterilecektir.

KdV denklemi, 1+1 boyutta basit lineer olmayan bir dispersif dalga denklemidir ve modern versiyonu,

$$u_t = au_{xxx} + buu_x$$

şeklindedir ve özel olarak $a = b = 1$ seçildiği zaman,

$$u_t = u_{xxx} + uu_x \tag{2.1}$$

şeklini alır. Denklemdeki t ve x alt indisleri, sırasıyla $\frac{\partial}{\partial t}$ ve $\frac{\partial}{\partial x}$ kısmi türevlerini ifade etmekte olup, burada ve bundan sonraki gösterimlerde bu şekilde kullanılacaktır. (2.1) denklemin çözümü,

$$u = 3\sec h^2 \sqrt{\frac{c}{2}}(x+ct) \tag{2.2}$$

şeklinde c hızı ile ilerleyen bir dalgayı tanımlamaktadır. Bu dalgalara *soliton* ve bu tür çözümlere de *soliton çözümler* adı verilmektedir. Tek başına hareket eden ve birbirleriyle çarpıştıktan sonra, çarpışma öncesinde sahip oldukları şekil ve hızlarını koruyan dalgaların parçacık benzeri doğaları, Zabusky ve Kruskal'ın bu gibi dalgaları *soliton* olarak adlandırmalarına sebep olmuştur (Zabusky ve Kruskal, 1965).

2.1 KdV Denkleminin İntegre Edilebilirliği

2.1.1 Korunan Büyüklükler

$Q[u]$, korunan bir büyüklük olmak üzere, genel olarak;

$$\frac{dQ[u]}{dt} = \{Q[u], H\} = 0 \tag{2.3}$$

eşitliğini sağlamaktadır. Ayrıca,

$$Q[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho[(u,x)]dx \tag{2.4}$$

şeklinde yazıldığında ve (2.4) denkleminin t'ye göre türevi alındığında,

$$\frac{dQ[u]}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho[u(x,t)]}{dt} dx = 0 \tag{2.5}$$

elde edilir. $J[u]$ akı yoğunluğu olmak üzere, (2.5) denklemi süreklilik denklemi olarak,

$$\frac{\partial \rho[u]}{\partial t} + \frac{\partial J[u]}{\partial x} = 0 \tag{2.6}$$

şeklinde yazılabilir. (2.6) denklemi göz önüne alınarak, (2.1) denklemi (KdV denklemi),

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \tag{2.7}$$

şeklinde yazılabilir. (2.6) ve (2.7) karşılaşılaştırıldığında,

$$\rho_0[u]=u \tag{2.8a}$$

$$J_0=-\left(\frac{1}{2}u^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \tag{2.8b}$$

denklemleri elde edilir. Ayrıca,

$$Q_0=H_0=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_0[u]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)dx \tag{2.9}$$

olduğundan dolayı H_0, KdV denklemi için birinci hareket sabiti olmaktadır. Benzer şekilde ikinci hareket sabitini bulmak için KdV denklemi,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}u^2\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] \tag{2.10}$$

şeklinde yazılarak,

$$\rho_1[u]=\frac{1}{2}u^2 \tag*{(2.11a.)}$$

$$J_1=-\frac{1}{3}u^3+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.11b}$$

denklemleri ve ikinci hareket sabiti olan H_1,

$$H_1=\frac{1}{2}\int (u(x,t))^2dx \tag{2.12}$$

elde edilir. Withen, Kruskal ve Zabusky'nin buldukları üç taneye ek olarak Miura ve arkadaşları beş tane daha korunan büyüklük bulmuşlardır (Miura vd., 1968). Bunların dışıda kalan büyüklükleri inşa edebilmek için,

$$u(x,t)=v^2(x,t)+i\sqrt{6}v_x(x,t) \tag{2.13}$$

denklemi ile verilen Miura dönüşümünden yararlanılır (Miura, 1968). Bu dönüşüm,

$$v_t = v_{xxx} + v^2 v_x \tag{2.14}$$

ile verilen modifiye KdV (mKdV) denkleminin çözümlerini, KdV denkleminin çözümlerine taşımaktadır. mKdV denklemi,

$$t \to t \quad , \quad x \to x + \frac{3}{2\varepsilon^2} t \quad , \quad u \to u + \frac{3}{2\varepsilon^2} \quad , \quad v \to \frac{\varepsilon}{\sqrt{6}} v + \frac{\sqrt{6}}{2\varepsilon}$$

ile verilen Galilean dönüşümleri altında değişmez (invariant) değildir. mKdV denklemi Galilean dönüşümü altında,

$$v_t = v_{xxx} + v v_x + \frac{\varepsilon^2}{6} v^2 v_x \tag{2.16}$$

şeklini alır. Bu denklemin çözümü, KdV denkleminin çözümüne, (2.16) denkleminin v'nin u cinsinden seri açılımı,

$$u = \frac{\varepsilon^2}{6} v^2 + v + i\varepsilon v_x \tag{2.17}$$

ile verilen Gardner dönüşümü ile taşınmaktadır. (2.13) ve (2.17) denklemleri Galilean dönüşümleri ile birbirlerine bağlanmaktadırlar. (2.16) denklemi genel bir denklem olup, $\varepsilon = 0$ için KdV denklemini ve $\varepsilon \to \infty$ giderken $v \to \frac{\varepsilon}{\sqrt{6}} v$ dönüşümü altında mKdV denklemini vermektedir. (2.16) denklemi süreklilik denklemi formunda,

$$v_t = \frac{\partial}{\partial_x} \left(v_{xx} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{\varepsilon^2}{18} v^2 \right) \tag{2.18}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $v(x,t)$ yoğunluk ve $\int v(x,t) dt$ integrali de Gardner denkleminin korunan büyüklüğü olmak üzere,

$$\frac{d}{dt} \int v(x,t) dt = 0 \tag{2.19}$$

ile ifade edilir. (2.17) denklemini,

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n h_n[u] \tag{2.20}$$

şeklinde, v'yi u cinsinden seriye açarak,

$$\int v_t dt = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \int h_n[u]dx \tag{2.21}$$

şeklinde yazılabilir. (2.21) denkleminde $h_n[u]$ terimleri KdV denklemi için korunan büyüklükleri vermektedir, çünkü ε'un her kuvveti için bağımsız olarak süreklilik denklemi sağlanmaktadır. Böylece sonsuz tane korunan büyüklük elde edilir. Korunan büyüklüklerin toplam türev olmaması gerekmektedir, çünkü toplam türev içeren korunan büyüklükler önemsizdir. Böylece Gardner dönüşümü (2.20)'de yerine konularak toplam türev içermeyen terimler,

$$h_n + i\frac{\partial_{h-1}}{\partial x} + \frac{1}{6}\sum_{m=0}^{n-2} h_{n-m-2}h_m = 0 \tag{2.22}$$

ile verilen tekrarlama bağıntısıyla elde edilirler. $n > 0$ değerleri için; $h_{-1} \equiv h_{-2} \equiv 0$ ve $h_0 = 0$ olmak üzere, (2.28) denkleminden,

$$h_1 = -iu_x \tag{2.23a}$$

$$h_2 = -\frac{1}{6}u^2 - u_{xx} \tag{2.23b}$$

$$h_3 = i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{3}u^2 u_{xx}\right) \tag{2.23c}$$

$$h_4 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{2}u_x^2\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}u^2 + u_{xx}\right) \tag{2.23d}$$

$$\vdots$$

şeklinde sonsuz sayıda h elde edilir. Görüldüğü gibi n'nin tek değerleri toplam türev ve sanaldır. n. korunan yoğunluğu,

$$\rho_n = 3(-1)^n h_{2n} \tag{2.24}$$

şeklinde tanımlanarak, n. korunan büyüklük;

$$H_n = 3(-1)^n \int h_{2n} dx \tag{2.25}$$

ile verilir. Böylece oluşan ilk üç korunan büyüklükler,

$$H_0 = 3\int u dx \tag{2.26a}$$

$$H_1 = \frac{1}{2}\int u^2 dx \tag{2.26b}$$

$$H_2 = \int\left(\frac{1}{3!}u^3 - \frac{1}{2}u_x^2\right)dx \tag{2.26c}$$

$\vdots$

ile verilir. Burada H_1 ve H_2 KdV denkleminin sırası ile birinci ve ikinci Hamiltonyen büyüklükleridir. İntegre edilebilirlik şartı,

$$\{H_n, H_m\}_1 = \{H_n, H_m\}_2 = 0 \tag{2.27}$$

ile verilir. Burada $\{,\}$ Poisson parantezi ve $\frac{\delta}{\delta u}$ fonksiyonel türev olmak üzere, birinci Hamiltonyen operatörü J_1 için

$$\{H_n, H_m\}_1 = \int dx \frac{\delta H_n}{\delta u(x)} \partial_x \frac{\delta H_m}{\delta u(x)} \tag{2.28}$$

ve ikinci Hamiltonyen operatörü J_2 için,

$$\{H_n, H_m\}_2 = \int dx \frac{\delta H_n}{\delta u(x)} \partial_x \left[\partial_x^2 \frac{1}{3}(\partial_x u + u\partial_x)\delta(x-y)\right] \frac{\delta H_m}{\delta u(x)} \tag{2.29}$$

şeklinde verilir.

2.1.2 Lax Çifti

Lineer olmayan değişim denklemlerini lineer operatörlerle ilişkilendiren bir yöntem 1968 yılında Peter D. Lax tarafından geliştirilmiştir. $K[u]$;

$$K[u] = F[u, u_x, u_{xx}, \ldots] \tag{2.30}$$

şeklinde u ve u'nun türevlerinin bir fonksiyonu olmak üzere, $u = u(x,t)$ fonksiyonunun zamanla değişimi,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_t = K[u] \tag{2.31}$$

şeklinde tanımlansın. Burada amaç, (2.31) denklemini sağlayan ve üniter kalan kendine eş operatörler bulmaktır. Yani (2.31) denkleminin integre edilebilirliğinin test edilmesine yarayacak operatörler bulabilmektir. Bunun için $L(t)^{\dagger} = L(t)$ hermitsel operatörü ele alınarak, $t=0$ daki dönüşümü;

$$U(t)^{-1} L(t) U(t) = U(t) \tag{2.32}$$

şeklinde yapılır. Burada $U^{-1} = U^{\dagger}$ üniter bir operatör ve A anti-hermitsel $\left(A^{\dagger} = -A\right)$ bir operatör olmak üzere,

$$U_t = AU \tag{2.33}$$

şeklinde ifade edilen diferansiyel denklemini sağlamaktadır. (2.33) denkleminin her iki tarafının *t*'ye göre türevi alındığında,

$$\left(U^{-1}\right)_t LU + U^{-1} L_t U + U^{-1} L U_t = 0 \tag{2.34}$$

elde edilir. $U(t)$ üniter olduğundan $U^{\dagger}(t) U(t) = I$ denklemini sağlar. Bu denklemin *t*'ye göre türevi alındığında,

$$U_t^{\dagger} U + U^{\dagger} U_t = 0 \tag{2.35}$$

şeklinde bulunur ve (2.34) denkleminde yerine konulduğunda,

$$-U^{-1} U_t U^{-1} LU + U^{-1} L_t U + U^{-1} L U_t = 0 \tag{2.36}$$

olarak elde edilir. Her iki taraf soldan U **,** sağdan U^{-1} ile çarpıldığında,

$$-U_t U^{-1} L + U^{-1} L_t + L U_t U^{-1} = 0 \tag{2.37}$$

elde edilir. Burada da $U(t) = AU$ ifadesi yerine yazıldığında,

$$L_t = AL - LA = [A, L] \tag{2.38}$$

denklemi elde edilir. (2.38) denklemine Lax denklemi, L ve A operatörlerine de Lax çifti denir.

$L(t)$ operatörünün özdeğer problemini,

$$L\psi = -\lambda(t)\psi \tag{2.39}$$

t sadece bir parametre ve λ zamandan bağımsız olmak üzere (Dirac, 1958); her iki tarafın t parametresine göre türevi alındığında,

$$L_t\psi + L\psi_t = -\lambda_t\psi - \lambda\psi_t \tag{2.40}$$

bulunur. $L_t = AL - LA$ (2.40)'da yerine konulduğunda,

$$AL - LA\,\psi + L\psi_t = -\lambda_t\psi - \lambda\psi_t \tag{2.41}$$

denklemi elde edilir. Burada $\psi(t)$ üniter olarak t=0'daki değerine bağlı, yani,

$$\psi(t) = U(t)\psi(0) \tag{2.42}$$

olduğundan,

$$\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = \frac{\partial U(t)}{\partial t}\psi(0) = A(t)U(t)\psi(0) = A(t)\psi(t) \tag{2.43}$$

eşitliği elde edilerek, bu değer yerine yazıldığında,

$$AL\psi = -\lambda_t\psi - \lambda A\,\psi \tag{2.44}$$

şeklinde elde edilen denklemde $L\psi = -\lambda\psi$ değeri de yerine yazılıp ve $\psi \neq 0$ olduğu gözönünde bulundurulduğunda $\lambda_t = 0$ elde edilir.

KdV denkleminin Lax çiftini elde etmek için

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{6}u\right)\psi = -\lambda\psi \tag{2.45}$$

ile verilen Schrödinger denklemini kullanabiliriz. Burada u KdV denkleminin bir çözümü olmak üzere Schrödinger eşitliğinin özdeğerlerini etkilemez. Yani özdeğerler değişmez (invariant) kalır. Böylece,

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{6}u \tag{2.46}$$

olarak seçildiğinde,

$$L_t = \frac{1}{6}u_t \tag{2.47}$$

Lax denkleminin sol tarafı olarak elde edilir.

$$L_t = AL - LA = [A, L]$$

olduğundan dolayı, bu denklemin sağ tarafının bir çarpım içermesi için $A^{\dagger} = -A$ operatörünün $\frac{\partial}{\partial x}$ terimlerini içermesi gerekir. Ayrıca $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\dagger} = -\frac{\partial}{\partial x}$ olduğundan, A operatörü $\frac{\partial}{\partial x}$'in tek kuvvetlerini içermelidir. Dolayısıyla tercih edilebilecek ilk seçim,

$$A = \frac{\partial}{\partial x} \tag{2.48}$$

olacaktır. Öyleyse komütatör bağıntısından,

$$[A, L] = \frac{1}{6} u_x \tag{2.49}$$

elde edilir ve sonuç olarak,

$$u_t = u_x \tag{2.50}$$

eşitliği bulunur. Ayrıca $a(x,t)$ belirlenecek bir katsayı olmak üzere, ikinci bir seçim olarak,

$$A = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + a(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} a(x,t) \tag{2.51}$$

alınabilir. Çünkü $\left(a\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\dagger} = -\frac{\partial}{\partial x} a$ şeklinde anti-hermitsel bir forma sahiptir. Böylece komütatör bağıntısından,

$$[A, L] = \left(-4a_x + \frac{1}{2}u_x\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{2}u_{xx} - 4a_{xx}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{6}u_{xxx} + \frac{1}{3}au_x - a_{xxx}$$

denklemi elde edilir. Burada $a = \frac{1}{8}u$ seçilerek $\frac{\partial}{\partial x}$ terimi yok edilebilir ve komütatör bağıntısı,

$$[A, L] = \frac{1}{24}\left(u_{xxx} + uu_x\right) \tag{2.52}$$

şeklini alır. Buradan da $A \to 4A$ dönüşümü yapılarak,

$$L_t = [A, L] = u_t = \frac{1}{24}(u_{xxx} + uu_x) \tag{2.53}$$

denklemi, yani KdV denklemi elde edilir. Sonuç olarak KdV denklemi,

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{6}u \tag{2.54}$$

ve

$$A = 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}u + u\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{2.55}$$

ile verilen Lax çifti ile ifade edilebilir. Fakat burada asıl önemli olan A operatörünün,

$$A_k = \frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}} + \sum_{j=1}^{k}\left(a_j \frac{\partial^{2j-1}}{\partial x^{2j-1}} + \frac{\partial^{2j-1}}{\partial x^{2j-1}} a_j\right) \tag{2.56}$$

şeklinde genelleştirilerek yüksek mertebe eşitliklerin, yani;

$$u_t = K_k[u] \tag{2.57}$$

şeklinde KdV hiyerarşisinin elde edilebilir olmasıdır. Örneğin $k = 0$ için dalga denklemi, $k = 1$ KdV denklemi ve $k = 3, \cdots, n$ için sırasıyla KdV hiyerarşisindeki diğer denklemler elde edilir.

2.1.3 Zakharov-Shabat Formülasyonu ve AKNS Denklemleri

Zakharov ve Shabat (1968) bugünkü bilgimizle lineer olmayan integre edilebilir bir model olan Schrödinger denklemini anlamaya çalışırken yeni bir yaklaşım geliştirdiler. Daha sonra bu formülasyon Ablowitz, Kaup, Newell ve Segur (1973) tarafından genelleştirilerek diğer çeşitli integre edilebilir modelleri anlamamızı sağlayan, AKNS denklemleri adını verdikleri denklem sistemini elde etmişlerdir. Şimdi Lax gösterimi temelli bu AKNS denklemlerini elde etmek için bir önceki bölümden $\lambda_t = 0$ olmak üzere,

$$L(t)\psi(t) = -\lambda\psi(t) \tag{2.58}$$

$$L_t = [A(t), L(t)] \tag{2.59}$$

ve

$$\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = A(t)\psi(t) \tag{2.60}$$

olduğundan ve Pauli spin matrisleri,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.61}$$

olmak üzere,

$$\sigma_+ = (\sigma_1 + i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_- = (\sigma_1 - i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_-^2 = \sigma_+^2 = 0$$

$$\sigma_3^2 = I$$

$$\sigma_\mp \sigma_3 = \pm \sigma_\mp = -\sigma_3 \sigma_\mp$$

$$\sigma_\pm \sigma_\mp = \frac{1}{2}(I \pm \sigma_3)$$

özellikleri göz önüne alındığında,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

şeklinde bir sütun matris tanımlanabilir. Bu durumda (2.58) ve (2.61) denklemleri birinci mertebe matris denklemi olarak,

$$L(t)\psi(t) = -\lambda \psi(t) \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = (q\sigma_+ + r\sigma_- - i\lambda\sigma_3)\psi \tag{2.63}$$

$$\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = A(t)\psi(t) \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} = (P\sigma_3 + Q\sigma_+ - R\sigma_-)\psi \tag{2.64}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $q(x,t)$ ve $r(x,t)$ dinamik büyüklükler olmak üzere λ spektral parametresine bağlı değillerdir. Ayrıca λ'da x ve t'den bağımsızdır. P, Q ve R fonksiyon katsayıları ise λ'ya bağlı olan $q(x,t)$ ve $r(x,t)$'nin fonksiyonelleridir.

(2.63) denkleminde her iki tarafın t'ye, (2.64) denkleminde ise her iki tarafın x'e göre türevi alınır ve elde edilen iki ifade birbirlerine eşitlendiğinde,

$$R_x = qQ - rP$$

$$r_t = Q_x - 2rR - 2i\lambda Q \tag{2.65}$$

$$q_t = P_x + 2qR + 2\dot{I}\lambda P$$

denklemleri elde edilir. (2.65) denklemlerine AKNS denklemleri adı verilir. Bu denklemlerdeki P, Q ve R, λ'nın kuvvet serisine aşağıdaki gibi açıldığında,

$$P = \sum_{m=0}^{M} a_m \lambda^m \qquad Q = \sum_{m=0}^{M} b_m \lambda^m \qquad R = \sum_{m=0}^{M} c_m \lambda^m \tag{2.66}$$

ve bu değerler yerlerine konulduğunda,

$$\begin{aligned} q_t &= b_{0,x} + 2a_0 q \\ r_t &= c_{0,x} - 2a_0 r \end{aligned} \tag{2.67}$$

ve tekrarlama bağıntıları,

$$\begin{aligned} &a_{m,x} - c_m q + b_m r = 0 && m \geq 0 \\ &b_{m,x} + 2ib_{m-1} + 2a_m q = 0 && m \geq 1 \\ &c_{m,x} - 2ic_{m-1} - 2a_m r = 0 && m \geq 1 \end{aligned} \tag{2.68}$$

şeklinde elde edilir. Bu aşamada $a_m =$ sabit, $b_m = 0$ ve $c_m = 0$ seçilmek suretiyle çeşitli çözülebilir lineer olmayan denklemler elde edilebilir. Örneğin $m = 3$ için değişim denklemleri,

$$q_t = a_2\left[-\frac{1}{2}q_{xx} + q^2 r\right] + ia_3\left[-\frac{1}{4}q_{xxx} + \frac{3}{2}q_x q r\right] \tag{2.69a}$$

$$r_t = a_2\left[\frac{1}{2}r_{xx} - q^2 r\right] + ia_3\left[-\frac{1}{4}r_{xxx} + \frac{3}{2}r_x q r\right] \tag{2.69b}$$

olarak bulunur. Burada,

i) $a_2 = 0$, $ia_3 = 4$ ve $r = r_0$ (sabit) seçilerek (2.69a) denkleminden,

$$q_t = -q_{xx} + 6r_0 q q_x \tag{2.70}$$

denklemi, yani KdV denklemi elde edilir. Aynı şekilde $r = r_0$(sabit) ve $r = u$ seçilerek de (2.69b)'den yine KdV denklemine ulaşılır. Bu iki denklem $q = kr$ dönüşümü ile birbirlerine dönüşebilirler.

ii) $a_2 = 0$, $ia_3 = 4$ ve $r = -\frac{1}{6}q$ seçilerek (2.69b) denkleminden,

$$q_t = -q_{xxx} + q^2 q_x \tag{2.71}$$

KdV denklemi elde edilir.

iii) $a_3 = 0$, $a_2^* = -a_2$ ve $r = q^*$ seçilerek de (2.69a) denkleminden,

$$q_t = a_2\left[-\frac{1}{2}q_{xx} + q^2 q^*\right] \tag{2.72}$$

lineer olmayan Schrödinger denklemi elde edilir.

2.1.4 Düz Uzay Şartı

Bu kısmıda KdV denkleminin düz uzay şartını sağlayan, çözülebilir bir denklem olduğu gösterilecektir. Bunun için sl(2,R) cebirinde değeri olan 1-form bağ fonksiyonu Ω,

$$\Omega = e_i \theta_i = \begin{pmatrix} \theta_0 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_0 \end{pmatrix} \tag{2.73}$$

şeklinde tanımlanabilir. $e_i\,(i = 0,1,2)$ sl(2,R) cebirinin üreteçleri olup,

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.74}$$

şeklinde matris gösterimleri vardır. Aralarındaki komütasyon bağıntıları ise,

$$[e_0, e_2] = -2e_2, \quad [e_1, e_2] = e_0, \quad [e_0, e_1] = 2e_1 \tag{2.75}$$

ile verilmektedir. θ_i 1-form ise $i = 0, 1, 2$ olmak üzere,

$$\theta_i = A_i(t, x, \lambda)dt + r_i(t, x, \lambda)dx \tag{2.76}$$

şeklinde parametrize edilebilir. Burada integre edilebilirlik şartı eğriliğin sıfır olması ile sağlanır. Yani,

$$d\Omega + \Omega \wedge \Omega = 0 \tag{2.77}$$

olması gerekmektedir. Burada '$\wedge$' dış çarpımı göstermektedir. (2.77) denkleminden AKNS denklemleri elde edilebilmektedir. (2.73) ve (2.76) denklemleri birleştirilip (2.77) denkleminde yerine yazıldığında,

$$e_i d\theta_i + e_i\theta_i \wedge e_j\theta_j = 0 \tag{2.78}$$

$$-e_i A_{i,x} + e_i r_{i,t} + [e_i, e_j]A_j r_j = 0 \tag{2.79}$$

denklemleri elde edilir. Böylece (2.75) denkleminde verilen komütatör bağıntıları kullanılarak,

$$\begin{aligned} &e_0\left(-A_{0,,x} + r_{0,t} + A_1 r_2 - A_2 r_1\right) + e_1\left(-A_{1,,x} + r_{1,t} + 2A_{01} r_1 - 2A_1 r_0\right) \\ &+ e_2\left(-A_{2,,x} + r_{2,t} + A_0 r_2 + 2A_2 r_0\right) = 0 \end{aligned} \tag{2.80}$$

eşitliği elde edilir. Denklemdeki $A_0 = A$, $A_1 = C$, $A_2 = B$ ve $r_0 = -i\lambda$, $r_1 = r$, $r_2 = q$ olarak seçildiğinde,

$$A_x = qC - rB \tag*{(2.81a)}$$

$$B_x + 2i\lambda B = q_t - 2qA \tag*{(2.81a)}$$

$$C_x - 2i\lambda C = r_t + 2rA \tag*{(2.81a)}$$

AKNS denklemleri elde edilir. Böylece AKNS metodunda da gösterildiği gibi KdV denklemine ulaşmak suretiyle, KdV denkleminin integre edilebilirliği, düz uzay şartını sağlayarak gösterilmiş olur.

2.1.5 Bi-Hamiltonyen Yapı

Şu ana kadar KdV denkleminin integre edilebilir lineer olmayan diferansiyel denklem olduğu, sırası ile sonsuz korunan büyüklüklere sahip olması, Lax denklemi, AKNS denklemleri ve düz uzay şartı olmak üzere dört ayrı yöntemle gösterilmiştir. Son olarak KdV denkleminin integre edilebilirliği farklı bir bakış açısı olan, bi-Hamiltonyen sistemini oluşturması açısından ele alınacaktır.

Bir dinamik sistemin Hamiltonyen olabilmesi için, $q(x,t)$ ve $p(x,t)$ faz uzayını oluşturan sırası ile genelleştirilmiş koordinat, genelleştirilmiş momentum ve H Hamiltonyen olmak üzere hareket denklemleri,

$$q_t = \{q, H\} = \frac{\partial H}{\partial p}$$
$$p_t = \{p, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{2.82}$$

ile verilir. Burada (q, p) dinamik değişkenler olarak adlandırılırlar ve bu değişkenler faz uzayını tararlar. $g = g(q_j, p_j)$ ve $h = h(q_j, p_j)$ dinamik değişkenlere bağlı fonksiyonlar olmak üzere; Poisson parantezi,

$$\{g, h\} = \sum_j \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial h}{\partial q_i} \right) \tag{2.83}$$

şeklinde tanımlanır ve dinamik değişkenler arasındaki Poisson parentezleri,

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$$
$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \tag{2.84}$$

eşitlikleri ile verilirler. Burada δ_{ij} Kroniker deltasıdır. Sistemin N tane serbestlik derecesi olduğu kabul edildiğinde; $i = 1, 2, \cdots, N$ olmak üzere, faz uzayının $2N$ tane genelleştirilmiş koordinatı olur ve $k = 1, 2, \cdots, 2N$ için,

$$x_k = (q_i, p_i)$$
$$x_i = q_i$$
$$x_{N+i} = p_i \tag{2.85}$$

şeklinde x_k'ları genelleştirilmiş koordinatlar ve ε_{kl}, her bir elamanı NxN blok matris olan sabit $2Nx2N$ anti-simetrik matris olmak üzere,

$$\varepsilon_{kl} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \tag{2.86}$$

Poisson parantezi,

$$\{x_k, x_l\} = \varepsilon_{kl} \tag{2.87}$$

şeklini alır. Burada *I* birim matristir. Böylece $x = x(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \{A(x), B(x)\} &= \frac{\partial A}{\partial x_k}\{x_k, x_l\}\frac{\partial B}{\partial x_l} \\ \{A(x), B(x)\} &= \varepsilon_{kl}\frac{\partial A}{\partial x_k}\frac{\partial B}{\partial x_l} \end{aligned} \tag{2.88}$$

olur ve Hamiltonyen denklemleri kovariant formda,

$$x_k = \{x_k, H\} = \varepsilon_{kl}\frac{\partial H}{\partial x_l} \tag{2.89}$$

şeklinde yazılır. Bu kovariant formalizm, Hamiltonyen denklemlerinin benzer bir tanımını verir ki bu durumda Poisson parantezleri koordinata bağlı hale gelir. Yani $f^{kl}(x)$ 2-rank tensör olmak üzere,

$$\begin{aligned} x_k &= \{x_k, H\} = f^{kl}(x)\frac{\partial H}{\partial x_l} \\ \{x_k, x_l\} &= f^{kl}(x) \end{aligned} \tag{2.90}$$

olur ve genel durumda,

$$\{A(x), B(x)\} = \frac{\partial A(x)}{\partial x_k} f^{kl}(x)\frac{\partial B(x)}{\partial x_l} \tag{2.91}$$

şeklini alır. Poisson parantezlerinin temel özelliklerini koruması için $f^{kl}(x)$'nin de bazı özelliklere sahip olması gerekir. Örneğin,

i) Anti-simetrik olması, yani

$$\{x_k, x_l\} = -\{x_l, x_k\} \tag{2.92}$$

olması için,

$$f^{kl}(x) = -f^{kl}(x) \tag{2.93}$$

olmalıdır.

ii) x_k'lar faz uzayında lineer bağımsız olduğu için, f^{kl} tekil olmayan bir matris, yani $f^{kl}(x)$'in tersi $f_{kl}(x)$ olmak üzere,

$$f_{kl}(x) f^{kl}(x) = f^{kl}(x) f_{kl}(x) = \delta_k^l \tag{2.94}$$

şeklinde olmalıdır.

iii) Poisson parantezi, Jacobi özdeşliğini sağlamalıdır.

$$\{x_k \{x_l , x_m\}\} + \{x_m \{x_k , x_l\}\} + \{x_l \{x_m , x_k\}\} = 0 \tag{2.95}$$

$f_{kl}(x)$ ve $f^{kl}(x)$ 2. mertebeden kovariant ve kontravariant tensörler olmak üzere yukarıdaki özellikleri sağlayan bir manifolda, *'simplektik manifold'* adı verilir (Das, 1989). Bu yüzden bir Hamiltonyen sistemin dinamiklerinin geometrisi de simplektiktir. Simplektik geometri ile Reiman geometrisi arasındaki farklar şunlardır:

i) Simplektik geometride simetrik metrik yoktur.

ii) Simplektik manifold'ta tanjant uzayının simetri grubu simplektik grup iken Reiman manifold'ta ise tanjant uzayının simetri grubu ortagonal gruptur. I_n, NxN birim matris şeklinde tanımlı sabit, tekil olmayan, anti-simetrik, blok matris olmak üzere,

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \tag{2.96}$$

ve M reel veya kompleks $2Nx2N$ matris ise,

$$M^T JM = J \tag{2.97}$$

eşitliği sağlanıyorsa, M matrisine *simplektik matris* denir. Burada M^T, *M*'nin transpozudur.

Matrislerde çarpma işlemine göre simplektik matrisler bir grup oluşturur ve bu gruba simplektik grup denir. Simplektik manifold'taki metrik tensörün bileşenleri olarak f_{kl} ve f^{kl} tensörleri düşünülebilir ve bunlar simplektik metrik olarak adlandırılırlar.

Böylece Hamiltonyen denklemleri kontravariant formda,

$$x_t^{\mu} = \{x^{\mu}, H\} = \{x^{\mu}, x^{\upsilon}\}\frac{\partial H}{\partial x^{\upsilon}} \tag{2.98}$$

şeklini alırlar. KdV denkleminde olduğu gibi sürekli sistemler de sonsuz sayıda serbestlik derecesi ihtiva ederler. Bu nedenle x^{μ}, dinamik büyüklük olan $u(x,t)$ ile ve kısmi türev de fonksiyonel türevle yer değiştirmelidir. Böylece (2.98) denklemi;

$$u_t = \{u, H\} = \int dy\{u(x), u(y)\}\frac{\delta H}{\delta u(y)} \tag{2.99}$$

şeklinde yazılabilir. Genel olarak,

$$\{A[u], B[u]\} = \int dxdy \frac{\delta A[u]}{\delta u(x)}\{u(x), u(y)\}\frac{\delta B[u]}{\delta u(y)}$$

denklemi ile verilir. Burada $H[u]$; $u, u_x, u_{xx}, ...$'lerin bir fonksiyoneli olmak üzere,

$$H = \int dx H[u] \tag{2.100}$$

şeklindedir ve $\frac{\delta H}{\delta u}$ Euler türevi,

$$\frac{\delta H}{\delta u} = \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u_x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} - \dots\right)H[u] \tag{2.101}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece (2.98) denklemi,

$$\{u(x), u(y)\} = J\delta(x-y) \tag{2.102}$$

olması durumunda,

$$u_t = J\frac{\delta H}{\delta u} \tag{2.103}$$

şeklinde yazılabilir. Burada J, Hamiltonyen operatörü adını alır ve Poisson parantezi delta fonksiyonunun türevine eşit olduğundan otomatik olarak anti-simetriktir ve Jacobi özdeşliğini sağladığı gösterilebilir.

Önceki bölümlerde de ifade edildiği üzere; KdV denklemi, sürekli ve sonsuz sayıda bağımsız korunan büyüklüğe sahip bir sistemdir ve KdV denklemini veren Hamiltonyen'ler,

$$H_1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \, dx \tag{2.104}$$

ve

$$H_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3!}u^3 - \frac{1}{2}u_x^2 \right) dx \tag{2.105}$$

şeklinde elde edilmiş. Dolayısıyla (2.98) denklemi göz önüne alınarak Hamiltonyen operatörleri sırasıyla,

$$J_1 = \partial_x{}^3 + \frac{1}{3}(\partial_x u + u\partial_x) \tag{2.106}$$

ve

$$J_2 = \partial_x \tag{2.107}$$

şeklinde elde edilir. J_1 ve J_2'nin Hamiltonyen operatörleri olabilmeleri için, daha önce belirtildiği gibi sırasıyla anti-simetrik özelliğini ve Jacobi özdeşliğini sağlamalıdırlar. KdV denklemi için bu iki özelliğin sağlanıldığı kolaylıkla gösterilebilir (Olver, 1986).

Buna bağlı olarak J_1 ve J_2 için (2.102) denklemiyle verilen temel Poisson parantezleri,

$$\{u(x), u(y)\}_1 = \left[\partial_x{}^3 + \frac{1}{3}(\partial_x u + u\partial_x) \right] \delta(x-y) \tag{2.108}$$

$$\{u(x), u(y)\}_2 = \partial_x \delta(x-y) \tag{2.109}$$

denklemleri ile verilir. Böylece KdV denklemini veren iki ayrı Hamiltonyen (bi-Hamiltonyen) ve Hamiltonyen operatörü vardır.

H_1 ve H_2'nin Euler türevi,

$$\frac{\delta H_1}{\delta u(x)} = u \tag{2.110}$$

$$\frac{\delta H_2}{\delta u(x)} = \frac{1}{2}u^2 + u_{xx} \tag{2.111}$$

olmak üzere,

$$u_t = J_1 \frac{\delta H_2}{\delta u} = J_2 \frac{\delta H_1}{\delta u} \qquad (2.112)$$

ile verilen Magri teoremine göre KdV denkleminin tamamen integre edilebilir bi-Hamiltonyen bir sistem olduğu anlaşılır.

3. 3+1 BOYUTTA İNTEGRE EDİLEBİLİR Bİ-HAMİLTONYEN SİSTEMLER

Son yıllarda, 3+1 boyutta (3 uzay, 1 zaman) integre edilebilir sistemlerle ilgili çalışmalar oldukça önem kazanmıştır. Çünkü literatürde daha önce yapılan çalışmalarda genelde 1+1 boyutta ve az sayıda 2+1 boyutta sistemler ele alınmıştır. Bu çalışmada integre edilebilirlik koşulu Magri teoremi kullanılarak ele alınacaktır. Yani sistemin bi-Hamiltonyen yapıya sahip olup olmadığı araştırılacaktır.

Bu bölümde 3+1 boyutlu integre edilebilir sistemlerden biri olan Kompleks Monge-Ampere (KMA) denklemi ayrıntıları ile incelenecektir. Monge-Ampere denklemleri genellikle diferansiyel geometride karşılaşılan problemlerde ortaya çıkmaktadırlar (örneğin, Welly ve Minkovski problemleri). Bu problemler ilk defa 1784'te Gaspard Monge ve daha sonra 1820'de Andre–Marie Ampere tarafından çalışılmıştır. Monge-Ampere denklemlerindeki önemli sonuçlar; S. Benstein, A. Pagorelov, C. Fefferman ve L. Nirenberg (Pogorelov vd., 2001) tarafından elde edilmiştir.

3.1 Kompleks Monge-Ampere (KMA) Denklemi

Kompleks Monge-Ampere denklemi, "self-dual" gravitasyon alanlar içeren Einstein denklemlerinin indirgenmiş skaler değerli bir denklemidir. Bu denklemin Ricci-flat (düz) ve Kähler metriğini sağladığı, Calabi (Calabi ve Eugenio, 1957) tarafından gösterilmiştir. Ricci-flat metrikleri, vakum Einstein alan denklemlerini öklid imzada (Euclidean signature) sağladığından, KMA denklemi gravitasyonel instantonlar için oldukça önemlidir.

Plebanski'nin meşhur makalesi (Plebanski, 1975), "anti-self-dual" Einstein vakum denklemlerinin kompleks 4-boyutlu Reiman uzayında

$$\det\begin{vmatrix}\Omega_{pr} & \Omega_{ps}\\ \Omega_{qr} & \Omega_{qs}\end{vmatrix}=1 \tag{3.1}$$

ile verilen ve

$$ds^2=\Omega_{pr}dpdr+\Omega_{ps}dpds+\Omega_{qr}dqdr+\Omega_{qs}dqds \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlı 4-boyutlu hyper-Kähler metriğini sağlayan genel KMA denklemine indirgendiğini göstermiştir. Burada Ω, kompleks değerli bir fonksiyon olup; p, q, r ve s kompleks değişkenlerine bağlıdır.

Bu genel sonuca fiziksel bir anlam verebilmek için u, reel bir fonksiyon olmak üzere; $\Omega = u$ şeklinde tanımlanma ihtiyacı doğar. Bununla beraber $p = z^1$, $q = z^2$, $r = \bar{z}^1$ ve $s = \bar{z}^2$ ile $\varepsilon = \mp 1$ olmak üzere bağımsız değişkenler, iki çift kompleks eşlenik değişkenlerini oluşturur. Böylece (3.1) ile verilen alan denklemi,

$$u_{1\bar{1}}u_{2\bar{2}} - u_{1\bar{2}}u_{2\bar{1}} = \varepsilon \tag{3.3}$$

şeklini alır (Nutku vd., 2008). Aynı şekilde (3.2) denklemiyle verilen metrik de,

$$ds^2 = u_{1\bar{1}}dzd\bar{z}^1 + u_{1\bar{2}}dzd\bar{z}^2 + u_{2\bar{1}}dz^2d\bar{z}^1 + u_{2\bar{2}}dz^2d\bar{z}^2 \tag{3.4}$$

şeklinde değişir. Burada 1, 2 ve $\bar{1}, \bar{2}$ indisleri z^1, z^2 ve bunların eşleniği $\bar{z}^1$, $\bar{z}^2$ değişkenlere göre kısmi türevleri gösterir. Bu tür metrikler Ricci-flat ve "(anti) self-dual" eğriliğine sahiptir.

Denklem (3.3)'de verilen KMA denkleminin Hamiltonyen yapısının incelenebilmesi için, $z^1, \bar{z}^1$ ile verilen kompleks eşlenik çifti, sırasıyla reel zaman değişkeni $t = 2\Re z^1$ ve reel uzay değişkeni $x = 2\Im z^1$ ile değiştirilmelidir. Bununla beraber ikinci kompleks değişken; $z^2 = \omega$ şeklinde yeniden adlandırıldığında (3.3) denklemi,

$$(u_{tt} + u_{xx})u_{\omega\bar{\omega}} - u_{t\omega}u_{t\bar{\omega}} - u_{x\omega}u_{x\bar{\omega}} + i(u_{t\omega}u_{x\bar{\omega}} - u_{x\omega}u_{t\bar{\omega}}) = \varepsilon \tag{3.5}$$

şeklini alır. (3.5) denklemi, $v = u_t$ şeklinde bağımlı yardımcı değişkeninin tanımlanması halinde; aşağıdaki gibi, birinci dereceden lineer olmayan, bir çift değişim sistemi formunda yazılabilir.

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = -u_{xx} + \dfrac{1}{u_{\omega\bar{\omega}}}\left[v_{\bar{\omega}}v_{\omega} + u_{x\omega}u_{x\bar{\omega}} + i(u_{x\bar{\omega}}v_{\bar{\omega}} - u_{x\omega}v_{\omega}) + \varepsilon\right] \end{cases} \tag{3.6}$$

Burada x, t, ω ve $\bar{\omega}$ alt indisleri sırasıyla, $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \omega}$ ve $\frac{\partial}{\partial \bar{\omega}}$ kısmi türevlerine karşılık gelir. Bundan sonraki bütün hesaplarda ait indisler, kısmi türevleri göstermek üzere kullanılacaktır. Böylece (3.6) denklem sistemi ile birlikte, KMA denkleminin Hamiltonyen yapısını elde etmek kolaylaşır. KMA denkleminin orijinal formu olan (3.3) denklemi için Lagranjyen yoğunluğu,

$$L=\frac{1}{6}[u_1u_{\bar{1}}u_{2\bar{2}}+u_{2\bar{2}}u_{1\bar{1}}-u_1u_{\bar{2}}u_{2\bar{1}}-u_2u_{\bar{1}}u_{1\bar{2}}]+\varepsilon u \tag{3.7}$$

ile verilir (Nutku Y., 2000). Dirac'ın bağ koşulları teorisini uygulayabilmek için, (3.7)'de verilen Lagranjyen'in uygulanabilir bir formda yazılması gerekmektedir. Böylece (3.6) sistemini veren Lagranjyen,

$$L=\frac{1}{6}\Big\{\left(u_x^2-3v^2\right)u_{\omega\varpi}+u_\omega u_{\varpi}u_{xx}-u_x\left(u_\omega u_{x\varpi}+u_{\varpi}u_{x\omega}\right) \\ +u_t\left(2i\left(u_\omega u_{x\varpi}-u_{\varpi}u_{x\omega}\right)+6vu_{\omega\varpi}\right)\Big\}+\varepsilon u \tag{3.8}$$

şeklini alır. Lagranjyen'den (3.6) denklem sisteminin elde edildiğini, Euler-Lagrange denklemleri kullanılarak gösterilebilir. Herhagi bir u^k için Euler Lagrange denklemi,

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^k}-\partial_t\frac{\partial}{\partial u_t^k}-\partial_x\frac{\partial}{\partial u_x^k}-\partial_\omega\frac{\partial}{\partial u_\omega^k}-\partial_{\varpi}\frac{\partial}{\partial u_{\varpi}^k}+\partial_x^2\frac{\partial}{\partial u_{xx}^k}+\partial^2{}_{x\omega}\frac{\partial}{\partial u_{x\omega}^k}+\partial^2{}_{x\varpi}\frac{\partial}{\partial u_{x\varpi}^k}+\partial^2{}_{\omega\varpi}\frac{\partial}{\partial u_{\omega\varpi}^k}\right)L=0$$

ile tanımlanır. (3.8) denkleminde tanımlanan Lagranjyen'de $k=1,2$ olmak üzere $u^1=u$ ve $u^2=v$ değerlerine karşılık gelmektedir. Böylece $u^2=v$ için

$$u_{\omega\varpi}\left(u_t-v\right)=0$$

ve $u^1=u$ için

$$v_tu_{\omega\varpi}+u_{xx}u_{\omega\varpi}-v_{\varpi}v_\omega+u_{x\omega}u_{x\varpi}+i(u_{x\varpi}v_{\varpi}-u_{x\omega}v_\omega)+\varepsilon=0$$

elde edilir ve bu iki denklem aşağıdaki gibi bir arada yazılarak,

$$\begin{cases} u_t=v \\ v_t=-u_{xx}+\dfrac{1}{u_{\omega\varpi}}\left[v_{\varpi}v_\omega+u_{x\omega}u_{x\varpi}+i(u_{x\varpi}v_{\varpi}-u_{x\omega}v_\omega)+\varepsilon\right] \end{cases}$$

oluşturulan denklemlerin, (3.6) denklem sistemi ile aynı denklemler olduğu görülür. Buda (3.8)'de verilen Lagranjyen'in KMA denklem sistemini veren doğru Lagranjyen olduğunu gösterir.

3.2 Simplektik ve Hamiltonyen Yapılar

(3.8) denklemiyle verilen Lagranjyen yoğunluğunda; u_t lineer ve v_t olmadığından, kanonik momentumlar,

$$\pi_u = \frac{\partial L}{\partial u_t} = \frac{i}{3}\left(u_{\varpi} u_{x\omega} - u_{\omega} u_{x\varpi}\right) + v u_{\omega\varpi} \tag{3.9a}$$

$$\pi_v = \frac{\partial L}{\partial v_t} = 0 \tag{3.9b}$$

şeklinde elde edlir. Lagranjyen yoğunluğu dejeneredir, çünkü Hessian $\dfrac{\partial^2 L}{\partial u_t^2} = 0$ dır. Başka bir deyişle, (3.9) denklemlerinden tekrar bir u_t ve v_t türetilemez. Bu da Lagranjyenin dejenere olduğunu gösterir (Nutku vd., 2008). Böylece Dirac'ın bağ teorisinin uygulanabilmesi için bütün şartlar şağlanmış olur. (3.9) da elde edilen kanonik momentumlara Dirac teorisi uygulandığında,

$$\phi_u = \pi_u + \frac{i}{3}\left(u_{\varpi} u_{x\omega} - u_{\omega} u_{x\varpi}\right) - v u_{\omega\varpi} = 0 \tag{3.10a}$$

$$\phi_v = \pi_v = 0 \tag{3.10b}$$

denklemleri ile verilen bağ koşullarına dönüşürler. Bu bağ koşulları Dirac terminolojisinde ikinci sınıf (second class) bağ koşulları adını alır (Dirac, 1958). Kanonik momentum,

$$\left[\pi_i(x, y), u^k(x', y')\right] = \delta_i^k \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z'); \quad i, k = 1,2 \tag{3.11}$$

şeklinde tanımlanan kanonik Poisson parantezlerini sağlamalıdır. Simplektik yapıyı oluşturmak için (3.10) denklemleri ile verilen bağ koşullarının Poisson parantezleri,

$$K_{ik} = \left[\phi_i(x, \omega, \varpi), \phi_k(x', \omega', \varpi')\right] \tag{3.12}$$

bağıntısı ile hesaplanır. Burada K_{ij} 2x2 matris formunda olup; i ve k indisleri sırasıyla 1 ve 2 değerlerine karşılık, u ve v değerlerini almaktadırlar. Böylece matrisin birinci elemanı K_{11},

$$K_{11} = \left[\phi_u(x, \omega, \varpi), \phi_u(x', \omega', \varpi')\right]$$

veya

$$K_{11} = \left[\pi_u + \frac{i}{3}\left(u_{\varpi} u_{x\omega} - u_{\omega} u_{x\varpi}\right) + v u_{\omega\varpi} \ , \ \pi_{u'} + \frac{i}{3}\left(u_{\varpi'} u_{x'\omega'} - u_{\omega'} u_{x'\varpi'}\right) + v(x') u_{\omega'\varpi'} \right]$$

şeklinde yazılır. Daha açık olarak,

$$K_{11} = [\pi_u, \pi_{u'}] + \frac{i}{3}[\pi_u, u_{\varpi'}] u_{x'\omega'} + \frac{i}{3}[\pi_u, u_{x'\omega'}] u_{\varpi'} - \frac{i}{3}[\pi_u, u_{\omega'}] u_{x'\varpi'} - \frac{i}{3}[\pi_u, u_{x'\varpi'}] u_{\omega'}$$

$$- v(x')[\pi_u, u_{\omega'\varpi'}] - [\pi_{u'}, \pi_u] - \frac{i}{3}[\pi_{u'}, u_{\varpi}] u_{x\omega} - \frac{i}{3}[\pi_{u'}, u_{x\omega}] u_{\varpi} + \frac{i}{3}[\pi_{u'}, u_{\omega}] u_{x\varpi}$$

$$+ \frac{i}{3}[\pi_{u'}, u_{x\varpi}] u_{\omega} + [\pi_{u'}, u_{\omega'\varpi'}] v(x)$$

şeklinde yazıldığında ve K_{11}'de verilen komütatörler (3.11) denklemi yardımıyla hesaplanarak,

$$K_{11} = \frac{i}{3}\{u_{x'\omega'}\delta(x-x')\delta(\omega-\omega')\delta_{\varpi'}(\varpi-\varpi') + u_{\varpi'}\delta_{x'}(x-x')\delta_{\omega'}(\omega-\omega')\delta_{\varpi'}(\varpi-\varpi')$$

$$- u_{x'\varpi'}\delta(x-x')\delta_{\omega'}(\omega-\omega')\delta(\varpi-\varpi') - u_{x'\varpi'}\delta(x-x')\delta_{\omega'}(\omega-\omega')\delta(\varpi-\varpi')$$

$$- u_{\omega'}\delta_{x'}(x-x')\delta_{\omega'}(\omega-\omega')\delta_{\varpi'}(\varpi-\varpi') - u_{x\omega}\delta_{x'}(x'-x)\delta_{\omega'}(\omega'-\omega)\delta_{\varpi}(\varpi'-\varpi)$$

$$- u_{\varpi}\delta_{x}(x'-x)\delta_{\omega'}(\omega'-\omega)\delta_{\varpi'}(\varpi'-\varpi) + u_{x\varpi}\delta_{x}(x'-x)\delta_{\omega}(\omega'-\omega)\delta_{\varpi'}(\varpi'-\varpi)\}$$

$$- v(x')\delta_{x'}(x-x')\delta_{\omega'}(\omega-\omega')\delta_{\varpi'}(\varpi-\varpi') + v(x)\delta(x-x')\delta_{\omega}(\omega-\omega')\delta_{\varpi}(\varpi-\varpi')$$

şeklini alır. Son olarak K_{11}; genel bir $f(x,\omega,\varpi)$ fonksiyonu ile çarpılıp hacim üzerinden integre edilerek,

$$K_{11} = (v_{\varpi} - i u_{x\varpi}) D_{\omega} + (v_{\omega} - i u_{x\omega}) D_{\varpi} + v_{\omega\varpi} \qquad (3.13)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde diğer matris elemanları da hesaplandığında,

$$K_{12} = -K_{21} = -u_{\omega\varpi} \quad \text{ve} \quad K_{22} = 0 \qquad (3.14)$$

şeklinde elde edilir. Böylece K_{ij},

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} (v_{\varpi} - iu_{x\varpi})D_{\omega} + (v_{\omega} - iu_{x\omega})D_{\varpi} + v_{\omega\varpi} & -u_{\omega\varpi} \\ u_{\omega\varpi} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

anti-simetrik ve integral içermeyen (local) matris operatörü elde edilir. K_{ij} operatörü, (3.6) denklemiyle verilen hareket denklemlerinin simplektik yapılarını belirlemek için oluşturulur. Simplektik 2-form; ω'nın $\Omega = \int_V \omega dx d\omega d\varpi$ ile tanımlanan hacim integrali yoğunluğu olup,

$$\omega = \frac{1}{2} du^i \wedge K_{ij} du^j; \qquad i, j = 1, 2 \tag{3.16}$$

denklemi ile verilir. Burada i ve j; 1'den 2'ye kadar değişmekte olup sırasıyla $u^1 = u$ ve $u^2 = v$ değerlerini almaktadırlar ve toplamda Einstein toplama kuralı geçerlidir. Böylece (3.16) denklemi daha açık olarak,

$$\omega = \frac{1}{2}(v_{\varpi} - iu_{x\varpi}) du \wedge du_{\omega} + \frac{1}{2}(v_{\omega} + iu_{x\omega}) du \wedge du_{\varpi} - \frac{1}{2} u_{\omega\varpi} du \wedge dv + \frac{1}{2} u_{\omega\varpi} dv \wedge du \tag{3.17}$$

şeklinde elde edilir. Simplektik 2-form ω'nın, kapalılık özelliğini sağlamalı yani, $d\omega = 0$ olmalıdır. Böylece (3.17) denkleminden,

$$d\omega = -i du_x \wedge du_{\omega} \wedge du_{\varpi}$$

elde edilir. Elde edilen bu denklem toplam türevler şeklinde yazıldığında,

$$\begin{aligned} d\omega = -\frac{i}{3}\Big\{ & [du \wedge du_{\omega} \wedge du_{\varpi}]_x - du \wedge du_{x\omega} \wedge du_{\varpi} - du \wedge du_{\omega} \wedge du_{x\varpi} \\ & + [du_x \wedge du \wedge du_{\varpi}]_{\omega} - du_{x\omega} \wedge du \wedge du_{\varpi} - du_x \wedge du \wedge du_{\omega\varpi} \\ & + [du_x \wedge du_{\varpi} \wedge du]_{\varpi} - du_{x\varpi} \wedge du_{\omega} \wedge du - du_x \wedge du_{\omega\varpi} \wedge du \Big\} = 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

olduğu kolayca görülür çünkü hacim üzerindeki yüzeyde seçilecek uygun sınır değerleri ile toplam türevli terimler sıfır olur.

Kompleks Monge-Ampere denkleminin birinci Hamiltonyen operatörü J_0, K_{ij} operatörünün tersine (inverse) eşittir. Yani,

$$J_0 = (K_{ij})^{-1} \tag{3.19}$$

şeklinde ifade edilir. Daha açık olarak,

$$J_0 = (K_{ij})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\det\left|K_{ij}\right|}} \begin{pmatrix} 0 & u_{\omega\varpi} \\ -u_{\omega\varpi} & (v_{\varpi} - iu_{x\varpi})D_{\omega} + (v_{\omega} - iu_{x\omega})D_{\varpi} + v_{\omega\varpi} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\det\left|K_{ij}\right|}}$$

şeklinde yazılır ve $\det\left|K_{ij}\right| = u_{\omega\varpi}^2$ yukarıda yerine konularak, ara işlemlerden sonra J_0,

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{u_{\omega\varpi}} \\ -\dfrac{1}{u_{\omega\varpi}} & \dfrac{v_{\varpi} - iu_{x\varpi}}{2u_{\omega\varpi}^2} D_{\omega} + D_{\omega} \dfrac{v_{\varpi} - iu_{x\varpi}}{2u_{\omega\varpi}^2} + \dfrac{v_{\omega} + iu_{x\omega}}{2u_{\omega\varpi}^2} D_{\varpi} + D_{\varpi} \dfrac{v_{\omega} + iu_{x\omega}}{2u_{\omega\varpi}^2} \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

olarak bulunur. J_0'ın anti-simetrik olduğu açıkça görülmektedir ve (3.18) denkleminden $d\omega = 0$ olması aynı zamanda J_0'ın Jacobi özdeşliğini sağladığını da göstermektedir.

(3.8)'de verilen Lagranjyen kullanılarak Hamiltonyen yoğunluğu,

$$H_1 = \sum_{i=1}^{2} \pi_i u_t^i - L; \qquad i = 1,2$$

veya

$$H_1 = \pi_u u_t + \pi_v v_t - L \tag{3.21}$$

denklemi ile hesaplanır. Daha önce elde edilen π_u, π_v ve L yerlerine yazıldığında H_1,

$$H_1 = \frac{1}{6}\left[\left(3v^2 - u_x^2\right)u_{\omega\varpi} - u_{\omega}u_{\varpi}u_{xx} + u_x\left(u_{\varpi}u_{x\omega} + u_{\omega}u_{x\varpi}\right)\right] - \varepsilon u \tag{3.22}$$

şeklinde elde edilir. H_1, KMA denkleminin birinci Hamiltonyen fonksiyonudur. (3.6) denklemiyle verilen KMA sisteminin Hamiltonyen formu için, birinci Hamiltonyen operatörü J_0 ile birinci Hamiltonyen yoğunluğu H_1 arasındaki ilişki,

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} \delta_u H_1 \\ \delta_v H_1 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\delta_u = \dfrac{\delta}{\delta u}$ ve $\delta_v = \dfrac{\delta}{\delta v}$, Hamiltonyen yoğunluğuna uygulanan u ve v'ye bağlı Euler-Lagrange operatörleridir. Bu operatörler $\int H_1 dv$ ile verilen Hamiltonyen fonksiyonelinin varyasyonel türevlerini ifade etmektedirler.

3.3 Reel Değişkenlere Dönüştürme

KMA denkleminde olduğu gibi, Öklid veya hiperbolik (signature) imza da "(anti)-self-dual gravity" içerdiğinden, teori tekrarlama operatörünün (R) reel olması gerektiğini sınırlamaktadır. Dolayısıyla Hamiltonyen yoğunluğu ve Hamiltonyen operatörü, $y = 2\Re\omega$ ve $z = 2\Im\omega$ dönüşümleri kunlanarak reel değişkenlere dönüştürülmelidir.

Dolayısıyla ilk önce Hamiltonyen yoğunluğu reel değişkenler cinsinden,

$$H_1 = \frac{1}{6}\left[\left(3v^2 - u_x^2\right)\Delta(u) - \left(u_y^2 + u_z^2\right)u_{xx} + 2u_x\left(u_y u_{xy} + u_z u_{xz}\right)\right] - \varepsilon u$$

veya kısaltılmış formda,

$$H_1 = \frac{1}{2}\left[v^2\Delta(u) - \left(u_y^2 + u_z^2\right)u_{xx}\right] - \varepsilon u \tag{3.24}$$

olarak elde edilir. Burada $\Delta(u) = u_{yy} + u_{zz}$ kısaltması kullanarak, terimlerin sadeleştirilmesi sağlanmıştır. Aynı şekilde Hamiltonyen operatörü J_0'ın da reel değişkenler cinsinden ifade edilmesi gerekmektedir. a, b, c ve Q ifadeleri,

$$a = \Delta(u), \qquad b = u_{xy} - v_z, \qquad c = v_y + u_{xz}, \qquad Q = \frac{b^2 + c^2 + \varepsilon}{a} \tag{3.25}$$

şeklinde tanımlanmak üzere; J_0'ın matris elemanları sırasıyla,

$$J_0^{11} = 0$$

$$J_0^{12} = \frac{1}{u_{\omega\overline{\omega}}} = \frac{1}{u_{yy} + u_{zz}} = \frac{1}{\Delta(u)} = \frac{1}{a}$$

$$J_0^{21} = -\frac{1}{u_{\omega\overline{\omega}}} = -\frac{1}{a}$$

$$J_0^{22} = \frac{1}{a^2}\left[(v_y + u_{xz})D_y + (v_z - u_{xy})D_z\right] + \left[D_y(v_y + u_{xz}) + D_z(v_z - u_{xy})\right]\frac{1}{a^2}$$

veya

$$J_0^{22} = \frac{1}{a^2}(cD_y - bD_z) + (D_y c - D_z b)\frac{1}{a^2}$$

olarak elde edilir ve matris formunda,

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a^2}(cD_y - bD_z) + (D_y c - D_z b)\frac{1}{a^2} \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

şeklini alır. Burada D_y ve D_z; sırasıyla y ve z'ye göre toplam türev operatörlerini gösterir ve $\Delta = D_y^2 + D_z^2$ şeklinde ifade edilir, Δ iki boyutlu Laplace operatörü olarak adlandırılır. Ayrıca (3.25)'de verilen denklemlerde ifade edilen a, b ve c arasında,

$$a_x = b_y + c_z, \qquad c_y - b_z = \Delta(v) \tag{3.27}$$

şeklinde bir ilişki olduğu gösterilebilir. Böylece KMA denkleminin (3.6) ile verilen denklem sisteminin reel değişkenler cinsinden Hamiltonyen formu,

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} \delta_u H_1 \\ \delta_v H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ Q - u_{xx} \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

ile verilir. Bunu görmek için,

$$\frac{\delta H_1}{\delta u} = u_{xx}(u_{yy} + u_{zz}) + v_y^2 + v_z^2 + v(v_{yy} + v_{zz}) - u_{xy}^2 - u_{xz}^2 + \varepsilon$$

$$\frac{\delta H_1}{\delta v} = v\left(u_{yy} + u_{zz}\right)$$

olmak üzere bu denklemler (3.28)'de yerlerine konularak,

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{u_{yy} + u_{zz}} \\ \\ -\dfrac{1}{u_{yy} + u_{zz}} & J_0^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx}\left(u_{yy} + u_{zz}\right) + v_y^2 + v_z^2 + v\left(v_{yy} + v_{zz}\right) - u_{xy}^2 - u_{xz}^2 + \varepsilon \\ \\ v\left(u_{yy} + u_{zz}\right) \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. Buradan u_t ve v_t çözülerek,

$$u_t = v$$

$$v_t = -u_{xx} + \frac{v_y^2 + v_z^2 + 2v_y u_{xz} - 2v_z u_{xy} + u_{xz}^2 + u_{xy}^2}{\left(u_{yy} + u_{zz}\right)}$$

denklemleri elde edilir ve (3.25)'deki denklemler de göz önüne alındığında, reel KMA denklem sistemi,

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = Q - u_{xx} \end{cases} \tag{3.29}$$

(3.28)'de verildiği gibi elde edilir.

3.4 Tekrarlama Operatörü ve KMA Denkleminin Lax Gösterimi

Genel olarak integre edilebilir bi-Hamiltonyen sistemlerde, sistemin Hamiltonyen operatörleri J_0 ve J_1 biliniyorsa tekrarlama operatörü; $R = J_0^{-1} J_1$ bağıntısı ile hesaplanır. Böylece Magri teoremi yardımıyla sonsuz tane korunan büyüklük elde edilebilir. Fakat burada henüz J_1, yani ikinci Hamiltonyen operatörü bilinmemektedir. KMA denklemi için bunu tahmin etmek oldukça zordur. Bu nedenle burada farklı bir yol izlenerek, önce tekrarlama operatörü R elde edilir ve böylece $J_1 = RJ_0$'dan J_1 operatörünün elde edilmesi mümkün olur (Nutku vd., 2008). R'yi bulmak için Lie simetri grup dönüşümü kullanılır. (3.29) denklemi ile verilen reel KMA denklem sisteminin,

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = Q - u_{xx} \end{cases}$$

olduğu hatırlanarak, dönüşüm sadece bağımsız değişkenler u ve v'ye uygulandığında; τ Lie grup parametresi olmak üzere,

$$u_\tau = \varphi, \qquad v_\tau = \psi \tag{3.30}$$

ile verilen Lie denklemleri oluşturulur. (3.30) denklemleri arasındaki integre edilebilirlik şartı (compatibility condition),

$$u_{t\tau} - u_{\tau t} = 0 \tag{3.31a}$$

$$v_{t\tau} - v_{\tau t} = 0 \tag{3.31b}$$

denklemleri ile verilir. (3.30) denklemleri için iki bileşenli simetri karakteristiği,

$$u_\tau = \varphi, \quad v_\tau = \psi; \quad \Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

şeklinde tanımlanarak, (3.31)'de ifade edilen denklemlerden,

$$A(\Phi) = 0 \tag{3.33}$$

ile verilen lineer matris denklemi elde edilir. Burada A, (3.31)'de verilen denklemlerin Frechet türevi adını alır ve matris formda,

$$A = \begin{pmatrix} D_t & -1 \\ D_x^2 - \frac{2}{a}\left(cD_z + bD_y\right)D_x + \frac{Q}{a}\Delta & D_t - \frac{2}{a}\left(cD_y - bD_z\right) \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

şeklini alır. (3.33) denkleminden sırasıyla,

$$\varphi = \psi_t \tag{3.35a}$$

ve

$$a\left(\psi_t + \varphi_{xx}\right) + Q\Delta(\varphi) - 2c\left(\psi_y - \varphi_{xz}\right) + 2b\left(\psi_z - \varphi_{xy}\right) = 0 \tag{3.35b}$$

denklemleri elde edilir. $u_t = v$ ve (3.35a) denklemi (3.35b)'de yerine konularak, (3.35b) denklemi iki terimden oluşan toplam türevler cinsinden,

$$(D_t - iD_x)\lfloor ia(\psi - i\varphi_x) + (b - ic)(\varphi_y + i\varphi_z)\rfloor$$
$$- (D_y - iD_z)[(b + ic)(\psi + i\varphi_x) - iQ(\varphi_y + i\varphi_z)] = 0 \qquad (3.36)$$

şeklinde ifade edilir. (3.36) denklemi, $\tilde{\varphi}$ ve $\tilde{\psi} = \tilde{\varphi}_t$ ile verilen ve,

$$(\tilde{\psi} - i\tilde{\varphi}_x) = (b + ic)(\psi + i\varphi_x) - iQ(\varphi_y + i\varphi_z) \qquad (3.37a)$$

$$(\tilde{\varphi}_y - i\tilde{\varphi}_z) = (b - ic)(\varphi_y + i\varphi_z) + ia(\psi + i\varphi_x) \qquad (3.37b)$$

denklemleri ile tanımlanan 2-bileşenli potansiyellerin var olduğunu gösterir. Böylece $\tilde{\Phi}$'yı Φ'den elde etmek mümkün olur. Bu dönüşümü yapan operatöre tekrarlama operatörü denir. Yani R, bir simetriyi diğer bir simetriye dönüştüren operatördür. Bir simetri diğer bir simetriye R yardımıyla dönüştürülebileceğinden $\tilde{\varphi}$'ya φ'nin ortak simetrisi (partner symmetry) adı verilir. Bunu görebilmek için $\tilde{\varphi}$ (3.37b) denkleminden,

$$\tilde{\varphi} = \Delta^{-1}(D_y + iD_z)[a(i\psi - \varphi_x) + (b - ic)(\varphi_y + i\varphi_z)] \qquad (3.38)$$

şeklinde çözülür, $\tilde{\varphi}$'nın x'e göre türevi alınır ve $\tilde{\varphi}_x$, (3.37a) denkleminde yerine konularak $\tilde{\psi}$,

$$\tilde{\psi} = (b + ic)(\psi + i\varphi_x) + Q(\varphi_z - i\varphi_y)$$
$$+ \Delta^{-1}(D_y + iD_z)D_x[-a(\psi + i\varphi_x) + (c + ib)(\varphi_y + i\varphi_z)] \qquad (3.39)$$

olarak elde edilir. Böylece (φ, ψ)'den $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$'ye dönüşümü veren matris,

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} = R_c \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \qquad (3.40)$$

ile tanımlandığında, (3.38) ve (3.39)'dan R_c kompleks tekrarlama operatörü,

$$R_c = \begin{pmatrix} \Delta^{-1}D_+[-aD_x + (b - ic)D_+] & i\Delta^{-1}D_+a \\ i\{(b + ic)D_x - QD_+ + \Delta^{-1}D_xD_+[-aD_x + (b - ic)D_+]\} & b + ic - \Delta^{-1}D_xD_+a \end{pmatrix} \qquad (3.41)$$

şeklinde bulunur. Burada $D_+ = D_y + iD_z$ şeklinde tanımlanır. Daha öncede belirtildiği gibi tekrarlama operatörü reel olmalıdır. Böylece (3.41) denkleminin reel kısmı alınarak,

$$R=\begin{pmatrix}0 & 0\\ QD_z-cD_x & b\end{pmatrix}$$

$$+\Delta^{-1}\begin{pmatrix}D_y\left(-aD_x+bD_y+cD_z\right)+D_z\left(cD_y-bD_z\right) & -D_z a\\ D_x\left[D_y\left(cD_y-bD_z\right)+D_z\left(aD_x-bD_y-cD_z\right)\right] & -D_xD_y a\end{pmatrix} \tag{3.42}$$

şeklinde reel tekrarlama operatörü elde edilir. Burada $\Delta^{-1}=\left(D_y^2+D_z^2\right)^{-1}$ şeklinde tanımlıdır. Ayrıca R'nin, KMA denkleminin simetrileri için gerçek tekrarlama operatörü olabilmesi için (3.34)'de verilen A operatörü ile yer değiştirme (commute) özelliğine sahip olması gerekir. $[R,A]$ komütatör bağıntısını hesaplamak oldukça karmaşık işlemler içermektedir. Bunu görmek için,

$$[R,A]=\begin{pmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{pmatrix}$$

denkleminde gösterilen R ve A'nın ilgili matris elemanları yerlerine konulduğunda oldukça uzun denklemler elde edildiğinden, burada sadece her bir komütatör elemanı için elde edilen sadeleştirilmiş sonuçlar verilecektir. Bu sonuçlar sırasıyla,

$$[R,A]_{11}=\Delta^{-1}\left(\Phi\left(D_z^2-D_y^2\right)-2\chi D_yD_z+D_y\Delta(F)D_x-\Delta(F_x)D_x-\Delta(G)D_z\right)$$

$$[R,A]_{12}=\Delta^{-1}D_z\Delta(F)$$

$$[R,A]_{21}=\frac{1}{a}[Q\Delta(F)-2(b\Phi+c\chi)]D_z+\Delta^{-1}\left\{2\left(D_z\chi D_x+D_x\Phi D_y\right)D_z-D_z\Delta(F)D_x^2x\right.$$

$$\left.+\chi_x\left(D_z^2-D_y^2\right)+[2\chi_z-\Delta(G)]D_xD_y+\Delta\left(G_y\right)D_x-\Delta(G_x)D\right\}$$

$$[R,A]_{22}=-\Phi+\Delta^{-1}D_xD_y\Delta(F)$$

olarak elde edilir ve matris formunda,

$$[R,A]=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{a}[Q\Delta(F)-2(b\Phi+c\chi)]D_z & -\Phi \end{pmatrix}$$

$$+\Delta^{-1}\begin{pmatrix} \Phi\left(D_z^2-D_y^2\right)-2\chi D_yD_z+D_y\Delta(F)D_x-\Delta(F_x)D_y-\Delta(G)D_z & D_z\Delta(F) \\ 2(D_z\chi D_x+D_x\Phi D_y)D_z-D_z\Delta(F)D_x^2+\chi_x\left(D_z^2-D_y^2\right) & D_xD_y\Delta(F) \\ +[2\chi_z-\Delta(G)]D_xD_y+\Delta(G_y)D_x-\Delta(G_x)D_y & \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

şeklini alır. Burada F, G, Φ ve χ denklemleri komütatör bağıntısını daha kapalı yazmak için tanımlanan kısaltmalar olup; $F=u_t-v,\quad G=v_t+u_{xx}-Q,\quad \Phi=F_{xy}-G_z$ ve $\chi=F_{xz}+G_y$ şeklinde tanımlanmaktadırlar. Yukarıdaki kısaltmalar göz önüne alınarak KMA sistemi,

$F=0$ ve $G=0$,

ile tanımlanabilir. Böylece $[R,A]=0$ olması, $F=0$ ve $G=0$ olduğu anlamına gelir. Yani komütatörün sıfır olması, 2-bileşenli KMA denklem sistemini doğurmaktadır. Bu reel Lax çifti, simetrilerin oluşturduğu tekrarlama operatörü R ve Lie simetri denklemlerinden elde edilen A operatörlerinden elde edildiği için, Olver-Ibragimov-Shabat (İbragimov vd., 1980) tipi Lax çifti olarak adlandırılırlar.

3.5 KMA Denkleminin Bi-Hamiltonyen Yapısı

Magri teoremine göre J bir Hamiltonyen operatör ve R de bir tekrarlama operatörü olarak verildiğinde, RJ'nin de bir Hamiltonyen operatörü olduğu kabul edilir (Magri F., 1978). Böylece tekrarlama operatörü R'nin, birinci Hamiltonyen operatörü olan J_0'a uygulanmasıyla

$$J_1=RJ_0 \tag{3.44}$$

ile verilen ikinci Hamiltonyen operatörü elde edilir. R ve J_0 yerine yazıldığında, J_1

$$J_1 = \begin{pmatrix} \Delta^{-1} D_y \left(-aD_x + bD_y + cD_z \right) + D_z \left(cD_y - bD_z \right) & -\Delta^{-1} D_z a \\ \\ \Delta^{-1} D_x \left[D_y \left(cD_y - bD_z \right) + D_z \left(aD_x - bD_y - cD_z \right) \right] + QD_z - cD_x & b - \Delta^{-1} D_x D_y a \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{a} \\ \\ -\dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{a^2}\left(cD_y - bD_z \right) + \left(D_y c - D_z b \right) \dfrac{1}{a^2} \end{pmatrix}$$

şeklini alır. Matrislerin çarpımından sonra elde edilen J_1 matris operatörünün elemanları sırasıyla,

$$J_1^{11} = \Delta^{-1} D_z a \frac{1}{a} = \Delta^{-1} D_z$$

$$J_1^{12} = -\Delta^{-1} D_y D_x + \frac{b}{a}$$

$$J_1^{21} = \left[b + \Delta^{-1} D_y D_x a \right] \left(-\frac{1}{a} \right) = -\frac{b}{a} + \Delta^{-1} D_y D_x$$

ve

$$J_1^{22} = \frac{c}{a^2} \left(bD_y - aD_x \right) + \left(D_y b - D_x a \right) \frac{c}{a^2} + D_z \frac{\left(c^2 - b^2 + \varepsilon \right)}{2a^2} + \frac{\left(c^2 - b^2 + \varepsilon \right)}{2a^2} D_z + \Delta^{-1} D_x^2 D_z a$$

olarak elde edilir ve matris gösteriminde $Q_- = \dfrac{c^2 - b^2 + \varepsilon}{a}$ olmak üzere,

$$J_1 = \begin{pmatrix} \Delta^{-1} D_z & -\Delta^{-1} D_x D_y + \dfrac{b}{a} \\ \\ \Delta^{-1} D_x D_y - \dfrac{b}{a} & \Delta^{-1} D_x^2 D_z + \dfrac{c}{a^2}\left(bD_y - aD_x \right) + \left(D_y b - D_x a \right) \dfrac{c}{a^2} + \dfrac{Q_-}{2a} D_z + D_z \dfrac{Q_-}{2a} \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

şeklinde elde edilir. Burada J_1'in anti-simetrik olduğu kolayca görülmektedir. Ayrıca J_1'in Jacobi özdeşliğini de sağlaması gerekmektedir. Bu kısım oldukça uzun hesaplamalar gerektirdiğinden son bölümde ayrıntılı olarak ele alınacaktır. (3.29) denklem sistemi ve J_1 Hamiltonyen operatöründen,

$$H_0 = zv\Delta(u) + u_x u_y \tag{3.46}$$

ile verilen Hamiltonyen yoğunluğu ile (3.29) denklemleri

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = J_1 \begin{pmatrix} \delta_u H_0 \\ \delta_v H_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ Q - u_{xx} \end{pmatrix} \tag{3.47}$$

şeklinde elde edilebilir. Bunu görmek için H_0'ın u ve v değişkenlerine göre Euler türevleri sırasıyla,

$$\frac{\delta H_0}{\delta u} = 2u_{xy} + z(v_{yy} + v_{zz}) = 2u_{xy} + z\Delta(v)$$

ve

$$\frac{\delta H_0}{\delta v} = z(u_{yy} + u_{zz}) = z\Delta(u)$$

bulunur. Bu denklemler (3.47)'de yerlerine konularak, J_1 açık olarak yazıldığında

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta^{-1}D_z & -\Delta^{-1}D_x D_y + \dfrac{b}{a} \\ \Delta^{-1}D_x D_y - \dfrac{b}{a} & \begin{array}{c} \Delta^{-1}c + \dfrac{c}{a^2}(bD_y - aD_x) \\ +(D_y b - D_x a)\dfrac{c}{a^2} + \dfrac{Q_-}{2a} D_z + D_z \dfrac{Q_-}{2a} \end{array} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2u_{xy} + z\Delta(v) \\ z\Delta(u) \end{pmatrix}$$

ve matrislerin çarpımından sonra u_t ve v_t sırasıyla,

$$u_t = \Delta^{-1}D_z(2u_{xy} + z\Delta(v)) + \left[\Delta^{-1}(-D_x D_y) + \frac{b}{a}\right] z\Delta(u)$$

$$v_t = \left(\Delta^{-1} D_x D_y - \frac{b}{a} \right) z\Delta(v) + \Delta^{-1}\left(D_x^2 D_z\right) z\Delta(u) + \left(\frac{c}{a^2}\left(bD_y - aD_x\right) + \left(D_y b - D_x a\right)\frac{c}{a^2} \right) z\Delta(u)$$

$$+ \left(\frac{Q_-}{2a} D_z + D_z \frac{Q_-}{2a} \right) z\Delta(u)$$

şeklinde elde edilir. a, b, c ve Q_- açık olarak yazılır ve (3.25)'deki denklemler göz önüne alınarak; ara işlemlerden sonra,

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = Q - u_{xx} \end{cases}$$

şeklinde (3.29) da verilen hareket denklemleri elde edilir. Böylece KMA denklem sistemi ikinci bir Hamiltonyen ve Hamiltonyen operatöründen tekrar türetmiş olur. Dolayısıyla KMA denkleminin 2-bileşenli (3.29) denklem formu, Magri teoremini sağladığı için bi-Hamiltonyen sistemdir. Başka bir deyişle (3.29) sisteminin

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} \delta_u H_1 \\ \delta_v H_1 \end{pmatrix} = J_1 \begin{pmatrix} \delta_u H_0 \\ \delta_v H_0 \end{pmatrix} \qquad (3.48)$$

ile verilen iki tane Hamiltonyen gösterimi vardır ve sistem bi-Hamiltonyen sistem olarak adlandırılır. Böylece bu süreç n kere tekrarlandığında KMA denkleminin çoklu-Hamiltonyen gösterimi elde edilebilir.

Bu gösterimler n. operatör için,

$$J_n = R^n J_0 \qquad (3.49)$$

bağıntısı ile elde edilir. Böylece her bulunacak yeni Hamiltonyen operatörü için bir Hamiltonyen yoğunluğu bulunabilir. Bu da KMA denkleminin sonsuz korunan büyüklüğe sahip olduğunu ve Magri teoremine göre tamamen integre edilebilir bir sistem olduğunu ispatlar. Yani "self-dual gravity" nin reel dört boyutta Öklid veya ultra hiperbolik imzada tamamen integre edilebilir olduğunu gösterir.

3.6 KMA denkleminin Simetrileri ve Hareket Sabitleri

Hamiltonyen operatörleri, simetriler ve birbirleri ile Poisson parantezleri sıfır olan (involution) korunan büyüklükler arasında (hareket sabitleri) doğal bir bağ sağlar

(Olver,1986). (3.29)'da verilen KMA denkleminin bütün nokta simetrileri (Nutku vd., 2008),

$$X_1 = t\partial_t + x\partial_x + u\partial_u$$

$$X_2 = z\partial_y - y\partial_z$$

$$X_3 = \partial_z$$

$$X_4 = \partial_y \tag{3.50}$$

$$X_5 = y\partial_y + z\partial_z + u\partial_u + v\partial_v$$

$$V_\alpha = \alpha(t,x,y,z)\partial_x + \alpha_t(t,x,y,z)\partial_v$$

$$Y_\beta = \beta_z(t,x,y,z)\partial_x - \beta_y(t,x,y,z)\partial_t$$

ile verilir. Burada $\alpha(t,x,y,z)$,

$$\Delta(\alpha) = 0, \qquad \alpha_{tt} + \alpha_{xx} = 0, \qquad \alpha_{tz} - \alpha_{xy} = 0, \qquad \alpha_{ty} + \alpha_{xz} = 0$$

ile verilen denklemleri sağlayan keyfi düzgün bir fonksiyondur. $\beta(y,z)$ ise $\Delta(\beta) = 0$ ile verilen iki boyutlu Laplace denklemini sağlamaktadır. Çizelge 3.1'de (3.50)'de verilen simetri jeneratörlerinin $ad_{X_i}(X_j) = \lfloor X_i, X_j \rfloor$ ile verilen komütatörleri göstermektedir. Burada "ad "simetri grubunun Lie cebri üzerine "adjoint" eylemini temsil eder ve her bir jeneratörün diğeriyle komütatörü i ninci satır ve j ninci sütunların kesiştiği değere karşılık gelir.

$$\hat{\alpha} = t\alpha_t + x\alpha_x$$

$$\tilde{\alpha} = z\alpha_y - y\alpha_z$$

$$\hat{\beta} = z\beta_y + y\beta_z$$

$$X_5' = X_5 - 1$$

şeklinde kısaltmalar kullanılarak $ad_{X_i}(X_j) = \lfloor X_i, X_j \rfloor$ komütatör çizelgesi

Çizelge 3.1 KMA denkleminin simetri jeneratörlerinin komütatörleri

ad	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	V_α	Y_β
X_1	0	0	0	0	0	$V_{\hat{\alpha}-\alpha}$	$-Y_\beta$
X_2	0	0	$-X_4$	X_3	0	$V_{\tilde{\alpha}}$	$Y_{\hat{\beta}-\beta}$
X_3	0	X_4	0	0	X_3	V_{α_z}	Y_{β_z}
X_4	0	$-X_3$	0	0	X_4	V_{α_y}	Y_{β_y}
X_5	0	0	$-X_3$	$-X_4$	0	$V_{X_5'\alpha}$	$Y_{X_5'\beta}$
V_α	$-V_{\hat{\alpha}-\alpha}$	$-V_{\tilde{\alpha}}$	$-V_{\alpha_z}$	V_{α_y}	$-V_{X_5'\alpha}$	0	0
Y_β	Y_β	$-Y_{\hat{\beta}-\beta}$	$-Y_{\beta_z}$	$-Y_{\beta_y}$	$-Y_{X_5'\beta}$	0	0

şeklinde elde edilir. Burada nokta simetrileri üreten hareket sabitleri ile ilgileneceğiz. Simetriler ve hareket sabitleri arasındaki bağıntı,

$$\begin{pmatrix} u_\tau \\ v_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\eta}_u \\ \hat{\eta}_v \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} \delta_u H \\ \delta_v H \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

ile verilir. τ simetri grup parametresi (3.51) için zaman rolünü oynamaktadır ve H korunan Hamiltonyen yoğunluğu olmak üzere (3.29) ile verilen akış yönündeki hareket sabiti $H = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{H}\, dx\, dy\, z$ ile verilir. Hareket sabiti *H*, $(\hat{\eta}_u, \hat{\eta}_v)$ ile verilen iki bileşenli simetri karakteristiklerini üretmektedir. (3.51) denklemindeki ikinci eşitlik, simetriler ve hareket sabitleri arasındaki ilişkiyi veren Noether teoreminin Hamiltonyen formudur. Birinci Hamiltonyen operaötünün tersi, $J_0^{-1} = K$ olduğuna göre ters Noether teoremi,

$$\begin{pmatrix} \delta_u H \\ \delta_v H \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \hat{\eta}_u \\ \hat{\eta}_v \end{pmatrix} \tag{3.52}$$

olarak bilinen simetri karakteristikleri $(\hat{\eta}_u, \hat{\eta}_v)$'ye karşılık gelen H korunan büyüklüklerini verecek şekilde elde edilir. Genel olarak X bir simetri operatörü ise simetri karakteristikleri,

$$\begin{pmatrix} \hat{\eta}_u \\ \hat{\eta}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(u) \\ X(v) \end{pmatrix} \tag{3.53}$$

denklem bağıntısı ile hesaplanır. Böylece (3.53) denkleminden (3.50)'de verilen jeneratörlerin simetri karakteristikleri sırasıyla,

$$\begin{pmatrix} \hat{\eta}_{1u} \\ \hat{\eta}_{1v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - tu - xu_x \\ t(u_{xx} - Q) - xv_x \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\eta}_{2u} \\ \hat{\eta}_{2v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yu_z - zu_y \\ yv_z - zv_y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\eta}_{3u} \\ \hat{\eta}_{3v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_z \\ v_z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\eta}_{4u} \\ \hat{\eta}_{4v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix}, \tag{3.54}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\eta}_{5u} \\ \hat{\eta}_{5v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - yu_y - zu_z \\ v - yv_y - zv_z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\eta}_{\alpha u} \\ \hat{\eta}_{\alpha v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha_t \end{pmatrix}$$

ve

$$\begin{pmatrix} \hat{\eta}_{\beta u} \\ \hat{\eta}_{\beta v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_y v - \beta_z u_x \\ \beta_y (Q - u_{xx}) - \beta_z v_x \end{pmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Böylece (3.52) denklemi kullanılarak, (3.50)'de verilen bütün nokta simetrileriler ile (3.51) de ki akış için, Hamiltonyenler (hareket sabitleri) inşa edilebilir. X_1 ve X_5 boyut (scaling) simetrileri için Hamiltonyen elde edilemediğinden, bu jeneratörler varyasyonel simetriye sahip değillerdir. X_2 dönme simetrisi için (3.54) denklemlerinden ikincisi (3.52)'de yerine konulursa,

$$\begin{pmatrix} \delta_u H \\ \\ \delta_v H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(v_y + u_{xz})D_y - 2(u_{xy} - v_z)D_z + v_{yy} + v_{zz} & -(u_{yy} + u_{zz}) \\ \\ (u_{yy} + u_{zz}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} yu_z - zu_y \\ \\ yv_z - zv_y \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece yukarıdaki eşitliği sağlayacak olan H_2, yani dönme simetrisi X_2 jeneratöründen elde edilen Hamiltonyen, birkaç ara işlemden sonra,

$$H_2 = v(yu_z - zu)\Delta(u) - u_x\left[2(zu_y + yu_z)u_{yz} + u_y^2 + u_z^2\right] \tag{3.55}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde öteleme simetrileri olan X_3 ve X_4'e karşılık gelen Hamiltonyen'ler H_3 ve H_4 sırasıyla,

$$H_3 = vu_z\Delta(u) + \frac{2}{3}u_x(u_y u_{zz} - u_z u_{yz}) \tag{3.56}$$

$$H_4 = vu_y\Delta(u) + \frac{2}{3}u_x(u_y u_{yz} - u_z u_{zz}) \tag{3.57}$$

ve sonsuz Lie grup jeneratörleri, X_α ve X_β için Hamiltonyen'ler,

$$H_\alpha = \alpha v\Delta(u) + \frac{1}{2}\alpha_t\left(u_y^{\,2} + u_z^2\right) + \alpha\left(u_z u_{xx} - u_y u_{xz}\right) \tag{3.58}$$

ve

$$H_\beta = \left(\frac{\beta_y}{2}v^2 - \beta_z u_x v\right)\Delta(u) + \frac{\beta_y}{2}u_{xx}\left(u_y^{\,2} + u_z^2\right) + \frac{u_x^2}{2}\left(\beta_{yy}u_y + \beta_{yz}u_z\right) - \varepsilon\beta_y u \tag{3.59}$$

şeklinde elde edilir. Kolayca görüleceği gibi $X_{\beta=y} = -\partial_t$ zamanda öteleme jeneratörünün ürettiği Hamiltonyen $H_{\beta=y} = H_1$, (3.24)'te verilen KMA denklemini ikinci Hamiltonyen fonksiyonuyla aynıdır. Bütün bu simetrilerden elde edilen Hamiltonyenler (3.29) da verilen KMA denklem sisteminin korunan büyüklüklerine karşılık gelmektedir.

3.7 KMA Denkleminin Sonsuz Hiyerarşisi

Fuchssteiner ve Fokas'ın çalışmalarından (Fuchssteiner ve Fokas, 1981) tekrarlama operatörü $R = J_1 J_o^{-1} \equiv J_1 K$ şeklinde yazılabildiğinden ve bununla beraber J_0 ve J_1 birbirleri ile uyumlu (compatible) Hamiltonyen operatörleri olduğundan R, Nijenhuis (hereditary) tekrarlama operatörü adını alır. Yani hermitsel eşlenik Nijenhuis tekrarlama operatörü, $R^{\dagger} = J_1 J_o^{-1} \equiv J_1 K$; bir Hamiltonyen'in varyasyonel türevine uygulandığında, başka bir Hamiltonyen'in varyasyonel türevi elde edilir. Böylece (3.48) denkleminden,

$$R^{\dagger}\begin{pmatrix}\delta_u H_0\\ \delta_v H_0\end{pmatrix} = J_1 J_o^{-1}\begin{pmatrix}\delta_u H_0\\ \delta_v H_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta_u H_1\\ \delta_v H_1\end{pmatrix} \tag{3.60}$$

şeklinde, $R^{\dagger}$ ile H_1'in H_0'dan elde edilebileceği görülebilir. $R^{\dagger} = J_1 J_o^{-1}$ denklemi daha açık olarak,

$$R^{\dagger} = J_1 J_o^{-1} = \begin{pmatrix} \Delta^{-1}D_z & -\Delta^{-1}D_x D_y + \dfrac{b}{a} \\ \Delta^{-1}D_x D_y - \dfrac{b}{a} & \Delta^{-1}D_x^2 D_z + \dfrac{c}{a^2}\left(bD_y - aD_x\right) + \left(D_y b - D_x a\right)\dfrac{c}{a^2} + \dfrac{Q}{2a}D_z + D_z\dfrac{Q}{2a} \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} cD_y - bD_z + D_y c - D_z b & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

yazıldığında; matris elemanları sırasıyla,

$$R_{11}^{\dagger} = \left(D_z c - D_x a + D_y b\right)\Delta^{-1}D_y + \left(D_y c - D_z b\right)\Delta^{-1}D_z$$

$$R_{12}^{\dagger} = \left(D_z b - D_y c\right)\Delta^{-1}D_x D_y + \left(D_z c - D_x a + D_y b\right)\Delta^{-1}D_x D_z + D_x c - D_z Q$$

$$R_{21}^{\dagger} = a\Delta^{-1}D_z$$

$$R_{22}^{\dagger} = -aD_x D_y \Delta^{-1} + b$$

olarak bulunur ve matris formunda ifade edildiğinde,

$$R^{\dagger}=\begin{pmatrix} \Delta^{-1}\left(D_z c-D_x a+D_y b\right)D_y+\left(D_y c-D_z b\right)D_z & \Delta^{-1}\left[\left(D_z b-D_y c\right)D_y+\left(D_z c-D_x a+D_y b\right)D_z\right] \\ & +D_x D_x c-D_z Q \\ \Delta^{-1} a D_z & \Delta^{-1} a D_x D_y+b \end{pmatrix} \tag{3.61}$$

şeklini alır. Sistemin sonsuz hiyerarşisine bakıldığında, KMA denkleminin ilk hiyerarşisi; J_1 'in H_1'in varyosyonel türev vektörüne uygulaması ile

$$\begin{pmatrix} u_{t_1} \\ v_{t_1} \end{pmatrix}=J_1\begin{pmatrix} \delta_u H_1 \\ \delta_v H_1 \end{pmatrix} \tag{3.62}$$

elde edilir. Burada t_1 yukarı akışların zaman değişkenini gösterir. Hiyerarşinin diğer Hamiltonyen yoğunluğunu oluşturmak için, $R^{\dagger}$ operatörünün H_1'in varyosyonel türev vektörüne uygulanmasıyla,

$$R^{\dagger}\begin{pmatrix} \delta_u H_1 \\ \delta_v H_1 \end{pmatrix}=KJ_1\begin{pmatrix} \delta_u H_1 \\ \delta_v H_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \delta_u H_2 \\ \delta_v H_2 \end{pmatrix} \tag{3.63}$$

şeklinde bulunur. Böylece sistemin ikinci hiyerarşisi

$$\begin{pmatrix} u_{t_2} \\ v_{t_2} \end{pmatrix}=J_1\begin{pmatrix} \delta_u H_2 \\ \delta_v H_2 \end{pmatrix}=J_1 R^{\dagger}\begin{pmatrix} \delta_u H_1 \\ \delta_v H_1 \end{pmatrix}=J_2\begin{pmatrix} \delta_u H_1 \\ \delta_v H_1 \end{pmatrix} \tag{3.64}$$

ile verilen bi-Hamiltonyen temsiline sahip olur. Burada üçüncü Hamiltonyen operatörü olan J_2, J_1'in $R^{\dagger}$'ye uygulanmasıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$J_1 R^{\dagger}=J_1 K J_1=R J_1=J_2 \tag{3.65}$$

J_2'nin H_0'ın varyasyonel türevine etki etmesiyle de,

$$J_2\begin{pmatrix} \delta_u H_0 \\ \delta_v H_0 \end{pmatrix}=J_1 R^{\dagger}\begin{pmatrix} \delta_u H_0 \\ \delta_v H_0 \end{pmatrix}=J_1\begin{pmatrix} \delta_u H_1 \\ \delta_v H_1 \end{pmatrix}=J_0 R^{\dagger}\begin{pmatrix} \delta_u H_1 \\ \delta_v H_1 \end{pmatrix}=J_0\begin{pmatrix} \delta_u H_2 \\ \delta_v H_2 \end{pmatrix} \tag{3.66}$$

denklemiyle verilen bağıntı elde edilir. Burada $J_1=J_0\left(KJ_1\right)=J_0 R^{\dagger}$ kullanılmıştır. (3.66) denklemiyle verilen bu bağıntıdan da birinci hiyerarşi için üçlü-Hamiltonyen temsili,

$$\begin{pmatrix} u_{t_1} \\ v_{t_1} \end{pmatrix}=J_1\begin{pmatrix} \delta_u H_1 \\ \delta_v H_1 \end{pmatrix}=J_2\begin{pmatrix} \delta_u H_0 \\ \delta_v H_0 \end{pmatrix}=J_0\begin{pmatrix} \delta_u H_2 \\ \delta_v H_2 \end{pmatrix} \tag{3.67}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca $R^{\dagger}$'yi H_0'ı üretecek şekilde inşa edilen H_{-1}'e

$$R^{\dagger}\begin{pmatrix}\delta_u H_{-1}\\ \delta_v H_{-1}\end{pmatrix}=J_0^{-1}J_1\begin{pmatrix}\delta_u H_{-1}\\ \delta_v H_{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_u H_0\\ \delta_v H_0\end{pmatrix} \tag{3.68}$$

şeklinde uygulanırsa, sıfırıncı akışı temsil eden bi-Hamiltonyen yapı,

$$\begin{pmatrix}u_{t_0}\\ v_{t_0}\end{pmatrix}=J_0\begin{pmatrix}\delta_u H_0\\ \delta_v H_0\end{pmatrix}=J_1\begin{pmatrix}\delta_u H_{-1}\\ \delta_v H_{-1}\end{pmatrix} \tag{3.69}$$

elde edilir. Bununla beraber J_2'yi H_{-1}'e uygulayarak

$$J_2\begin{pmatrix}\delta_u H_{-1}\\ \delta_v H_{-1}\end{pmatrix}=J_1R^{\dagger}\begin{pmatrix}\delta_u H_{-1}\\ \delta_v H_{-1}\end{pmatrix}=J_1\begin{pmatrix}\delta_u H_0\\ \delta_v H_0\end{pmatrix} \tag{3.70}$$

denklem bağıntısı bulunur ve dolayısıyla (3.48)'de verilen iki bileşenli KMA denkleminin bi-Hamiltonyen temsili, üçlü(three)-Hamiltonyen temsili,

$$\begin{pmatrix}u_t\\ v_t\end{pmatrix}=J_0\begin{pmatrix}\delta_u H_1\\ \delta_v H_1\end{pmatrix}=J_1\begin{pmatrix}\delta_u H_0\\ \delta_v H_0\end{pmatrix}=J_0\begin{pmatrix}\delta_u H_{-1}\\ \delta_v H_{-1}\end{pmatrix} \tag{3.71}$$

şeklinde gösterilebilir. Bu şekilde devam ederek sonraki Hamiltonyen H_3, $R^{\dagger}$'yi H_2'nin varyasyonel türevine uygulayarak,

$$R^{\dagger}\begin{pmatrix}\delta_u H_2\\ \delta_v H_2\end{pmatrix}=KJ_1\begin{pmatrix}\delta_u H_2\\ \delta_v H_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_u H_3\\ \delta_v H_3\end{pmatrix} \tag{3.72}$$

olarak elde edebiliriz. Böylece hiyerarşideki bir sonraki denklemin bi-Hamiltonyen temsili,

$$\begin{pmatrix}u_{t_3}\\ v_{t_3}\end{pmatrix}=J_1\begin{pmatrix}\delta_u H_3\\ \delta_v H_3\end{pmatrix}=RJ_1\begin{pmatrix}\delta_u H_2\\ \delta_v H_2\end{pmatrix}=J_2\begin{pmatrix}\delta_u H_2\\ \delta_v H_2\end{pmatrix} \tag{3.73}$$

ile verilir. Burada (3.72) ve $J_1KJ_1=RJ_1=J_2$ ifadesi kullanılmıştır. Bu şekilde devam ederek KMA denklemin sonsuz hiyerarşisi elde edilir. Burada elde edilecek bütün Hamiltonyen'lerin $H_{-1},H_0,H_1,H_2,H_3,\ldots,H_n$'in birbirleri ile Poisson parantezleri (involution) sıfır olduğundan; KMA denklemin tamamen integre edilebilir bir sistem olduğunun başka bir göstergesi olur.

4. JACOBİ ÖZDEŞLİĞİ

Bu bölümde Hamiltonyen operatör çifti olan J_0 ve J_1'in Jacobi özdeşliğinin kontrolü detaylı bir şekilde ele alınacaktır.

Tanım: Lineer operatör $J : A^q \to A^q$'nin Hamiltonyen operatörü olabilmesi için $\{P, Q\} = \int \delta P J \delta Q dx$ ile verilen Poisson parantezinin, anti-simetrik

$$\{P, Q\} = -\{Q, P\} \tag{4.1}$$

ve,

$$\{\{P, Q\}, R\} + \{\{R, P\}, Q\} + \{\{Q, R\}, P\} = 0 \tag{4.2}$$

ile verilen Jacobi özdeşliğini, bütün P, Q ve R fonksiyonelleri için sağlamalıdır. Fakat (4.2) ile tanımlanan Jacobi özdeşliğini kullanmak basit bir Hamiltonyen operatörü için bile, çok zor ve de karmaşıktır. Bu nedenle Olver'in metodu olarak bilinen (Olver, 1986) ve aşağıda verilen teorem kullanılacaktır.

Teorem: J anti-simetrik qxq matris diferansiyel operatör ve $\Theta = \frac{1}{2}\int (\theta \wedge J\theta) dx$'e karşılık gelen bi-vektör olmak üzere; J sadece ve sadece,

$$\mathrm{Pr}\, V_{J\theta}(\Theta) = 0 \tag{4.3}$$

ise bir Hamiltonyen operatörüdür. 3. Bölümde de belirtildiği gibi (3.29) denklemi ile verilen KMA denklem sistemi (3.47) denklem formunda yazıldığında sistem, bi-Hamiltonyen sistem adını almaktadır. J_0 ve J_1'in Hamiltonyen çifti olabilmesi için ayrı ayrı Jacobi özdeşliğini sağlamasının yanında, J_0 ve J_1'in $\alpha J_0 + \beta J_1$ ile verilen lineer birleşiminin de Jacobi özdeşliğini sağlaması gerekmektedir. Burada α ve β sabitlerdir. Bu nedenle eğer direkt olarak $\Gamma = \alpha J_0 + \beta J_1$ için Jacobi özdeşliği hesaplandığında, aynı zamanda J_0 ve J_1'in, yani her iki operatörün de Jacobi özdeşliğini sağladığı garantilenmiş olur. Yani $\alpha = 1$ ve $\beta = 0$ olarak seçildiğinde veya $\alpha = 0$ ve $\beta = 1$ olarak seçildiğinde, sırasıyla J_0 ve J_1'in ayrı ayrı Jacobi özdeşliğini sağladıklarının yanı sıra, J_0 ve J_1'in lineer birleşimi olan $\alpha J_0 + \beta J_1$'in de Jacobi özdeşliğini sağladığı ispatlanmış olur. Böylece kolaylık olması için $\beta = 1$ seçilerek $\Gamma = \alpha J_0 + J_1$ ifadesi

$$\Gamma = \alpha J_0 + J_1 = \begin{pmatrix} \Delta^{-1} D_z & -\Delta^{-1} D_x D_y + \lambda \\ \Delta^{-1} D_x D_y - \lambda & \Delta^{-1} D_x^2 D_z + A D_y + B D_z - \frac{2c}{a} D_x + C \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Şeklinde yazılır. Burada A, B, C ve λ kısaltmaları,

$$A = \frac{2c\lambda}{a}$$

$$B = \frac{c^2 - b^2 - 2\alpha b + \varepsilon}{a^2}$$

$$C = \frac{\lambda}{a}\left(c_y - b_z\right) - \frac{A a_y}{a} - \frac{B a_z}{a} + \frac{2c a_x}{a^2} - \frac{c_x}{a} \tag{4.5}$$

$$\lambda = \frac{(\alpha + 1)}{a}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Ayrıca burada a, b ve c, üçüncü bölümdeki (3.25) denkleminde tanımlananlarla aynıdır.

Γ operatörü için fonksiyonel bi-vektör Θ,

$$\Theta = \frac{1}{2}\int \left(\sum_{i,j} \omega_j \wedge \Gamma_{ij} \omega_i \right) dxdydz \tag{4.6}$$

olarak ifade edilir. Burada $i, j = 1, 2$ olmak üzere; uni-vektörler, $\omega_1 = \eta$ ve $\omega_2 = \theta$'ya karşılık gelmektedir. Ayrıca "$\wedge$" dış çarpım olarak tanımlanır ve $\eta \wedge \eta = \theta \wedge \theta = 0$ ile $\theta \wedge \eta = -\eta \wedge \theta$ özelliklerine sahiptir. (4.6) denklemi daha açık olarak,

$$\Theta = \frac{1}{2}\int \Big[\Delta^{-1}\left(\eta_z \wedge \eta - \theta_{xy} \wedge \eta - \theta \wedge \eta_{xy} + \theta_{xxz} \wedge \theta\right) + \frac{2(b+\alpha)}{a} \theta \wedge \eta + \frac{2c(b+\alpha)}{a^2} \theta_y \wedge \theta$$
$$+ \left(\frac{c^2 - b^2 - 2\alpha b + \varepsilon}{a^2} \right) \theta_z \wedge \theta - \frac{2c}{a} \theta_x \wedge \theta \Big] dxdydz \tag{4.7}$$

şeklinde elde edilir. Θ, (4.3) denkleminde kullanılarak,

$$\Pr V_{\Gamma\omega}(\Theta)=\frac{1}{2}\int\Bigg[-2\Pr V_{\Gamma\omega}(b)\wedge\theta\wedge\eta+2(b+\alpha)\Pr V_{\Gamma\omega}\left(\frac{1}{a}\right)\wedge\theta\wedge\eta+\frac{2}{a^2}(b+\alpha)\Pr V_{\Gamma\omega}(c)\wedge\theta_y\wedge\theta$$

$$+\frac{2c}{a^2}\Pr V_{\Gamma\omega}(b)\wedge\theta_y\wedge\theta+2c(b+\alpha)\Pr V_{\Gamma\omega}\left(\frac{1}{a^2}\right)\wedge\theta_y\wedge\theta+\frac{1}{a^2}\left(\Pr V_{\Gamma\omega}\left(c^2\right)-\Pr V_{\Gamma\omega}\left(b^2\right)\right)\wedge\theta_z\wedge\theta$$

$$-2\alpha\frac{1}{a^2}\Pr V_{\Gamma\omega}(b)\wedge\theta_z\wedge\theta+\left(c^2-b^2-2\alpha b+\varepsilon\right)\Pr V_{\Gamma\omega}\left(\frac{1}{a^2}\right)\wedge\theta_z\wedge\theta-\frac{2}{a}\Pr V_{\Gamma\omega}(c)\wedge\theta_x\wedge\theta$$

$$-2c\Pr V_{\Gamma\omega}\left(\frac{1}{a}\right)\wedge\theta_x\wedge\theta\Bigg]dxdydz=0 \tag{4.8}$$

olarak elde edilir. Burada $\Pr V_{\Gamma\omega}$ operatörü,

$$\Pr V_{\Gamma\omega}=\sum_{\alpha,\beta,j}D_j\left(\sum\Gamma_{\alpha\beta}\omega^{\beta}\right)\frac{\partial}{\partial\phi_j^{\alpha}} \qquad j=1,x,xx,xxx,\cdots \tag{4.9}$$

$\alpha,\beta=1,2$ olmak üzere, $\phi^1=u$ ve $\phi^2=v$ şeklinde tanımlanmaktadır. (4.8) denkleminde görülen $\Pr V_{\Gamma\omega}$ operatörleri tek tek hesaplanarak,

$$\Pr V_{\Gamma\omega}\left(\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{a^2}\left(\eta_z-\theta_{xy}\right)-\frac{1}{a^2}\left(D_y^2+D_z^2\right)(\lambda\theta)$$

$$\Pr V_{\Gamma\omega}\left(\frac{1}{a^2}\right)=-\frac{2}{a^3}\left(\eta_z-\theta_{xy}\right)-\frac{2}{a^3}\left(D_y^2+D_z^2\right)(\lambda\theta)$$

$$\Pr V_{\Gamma\omega}(b)=D_xD_y\left[\Delta^{-1}\eta_z-\Delta^{-1}\theta_{xy}+\lambda\theta\right]-D_z\left[\Delta^{-1}\eta_{xy}-\lambda\eta+\Delta^{-1}\theta_{xxz}+A\theta_y+B\theta_z-\frac{2c}{a}\theta_x+C\theta\right]$$

$$\Pr V_{\Gamma\omega}(c)=D_xD_z\left[\Delta^{-1}\eta_z-\Delta^{-1}\theta_{xy}+\lambda\theta\right]+D_y\left[\Delta^{-1}\eta_{xy}-\lambda\eta+\Delta^{-1}\theta_{xxz}+A\theta_y+B\theta_z-\frac{2c}{a}\theta_x+C\theta\right]$$

$$\Pr V_{\Gamma\omega}\left(b^2\right)=2bD_xD_y\left[\Delta^{-1}\eta_z-\Delta^{-1}\theta_{xy}+\lambda\theta\right]-2bD_z\left[\Delta^{-1}\eta_{xy}-\lambda\eta+\Delta^{-1}\theta_{xxz}+A\theta_y+B\theta_z-\frac{2c}{a}\theta_x+C\theta\right]$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler (4.8) de yerlerine yazılarak,

$$\Pr V_{\Gamma\omega}(\Theta)=\frac{1}{2}\int\Bigg\{\Bigg[\frac{2}{a}D_y\left(\Delta^{-1}\eta_{xz}-\Delta^{-1}\theta_{xxy}+\lambda_x\theta+\lambda\theta_x\right)-\frac{2}{a}D_z\left(\Delta^{-1}\eta_{xy}-\lambda\eta+\Delta^{-1}\theta_{xxz}+A\theta_y+B\theta_z\right.$$

$$\left.-\frac{2c}{a}\theta_x+C\theta\right]\wedge\theta\wedge\eta-\frac{2(b+\alpha)}{a^2}\left[\left(\eta_z-\theta_{xy}\right)\wedge\theta\wedge\eta+D_y\left(\lambda_y\theta+\lambda\theta_y\right)\ +D_z\left(\lambda_z\theta+\lambda\theta_z\right)\right]\wedge\theta\wedge\eta$$

$$+\frac{2(b+\alpha)}{a^2}D_z\left(\Delta^{-1}\eta_{xz}-\Delta^{-1}\theta_{xxy}+\lambda_x\theta+\lambda\theta_x\right)\wedge\theta_y\wedge\theta+\frac{2(b+\alpha)}{a^2}D_y\left(\Delta^{-1}\eta_{xy}-\lambda\eta+\Delta^{-1}\theta_{xxz}+A\theta_y\right.$$

$$\left.+B\theta_z-\frac{2c}{a}\theta_x+C\theta\right)\wedge\theta_y\wedge\theta+\frac{2c}{a^2}\ D_y\left(\Delta^{-1}\eta_{xz}-\Delta^{-1}\theta_{xxy}+\lambda_x\theta+\lambda\theta_x\right)\wedge\theta_y\wedge\theta$$

$$-\frac{2c}{a^2}\ D_z\left(\Delta^{-1}\eta_{xy}-\lambda\eta+\Delta^{-1}\theta_{xxz}+A\theta_y+B\theta_z-\frac{2c}{a}\theta_x+C\theta\right)\wedge\theta_y\wedge\theta-\frac{4c(b+\alpha)}{a^2}\left(\eta_z-\theta_{xy}\right)\wedge\theta_y\wedge\theta$$

$$-\frac{4c(b+\alpha)}{a^2}\left[D_y^2\ \frac{(b+\alpha)}{a}\theta+D_z^2\ \frac{(b+\alpha)}{a}\theta\right]\wedge\theta_y\wedge\theta+\frac{2c}{a^2}\ D_z\left(\Delta^{-1}\eta_{xz}-\Delta^{-1}\theta_{xxy}\right.$$

$$\left.+\lambda_x\theta+\lambda\theta_x\right)\wedge\theta_z\wedge\theta+\frac{2c}{a^2}\ D_y\left(\Delta^{-1}\eta_{xy}-\lambda\eta+\Delta^{-1}\theta_{xxz}+A\theta_y+B\theta_z\quad-\frac{2c}{a}\theta_x+C\theta\right)\wedge\theta_z\wedge\theta$$

$$-\frac{2(b+\alpha)}{a^2}D_y\left(\Delta^{-1}\eta_{xz}-\Delta^{-1}\theta_{xxy}+\lambda_x\theta+\lambda\theta_x\right)\wedge\theta_z\wedge\theta\ +\frac{2(b+\alpha)}{a^2}D_z\left(\Delta^{-1}\eta_{xy}-\lambda\eta+\Delta^{-1}\theta_{xxz}+A\theta_y+B\theta_z\right.$$

$$\left.-\frac{2c}{a}\theta_x+C\theta\right)\wedge\theta_z\wedge\theta-\frac{2B}{a}\left[\left(\eta_z-\theta_{xy}\right)\wedge\theta_z\wedge\theta+D_y\left(\lambda_y\theta+\lambda\theta_y\right)\wedge\theta_z\wedge\theta+D_z\left(\lambda_z\theta+\lambda\theta_z\right)\wedge\theta_z\wedge\theta\right]$$

$$-\frac{2}{a}\left[D_z\left(\Delta^{-1}\eta_{xz}-\Delta^{-1}\theta_{xxy}+\lambda_x\theta+\lambda\theta_x\right)+D_y\left(\Delta^{-1}\eta_{xy}-\lambda\eta+\Delta^{-1}\theta_{xxz}+A\theta_y+B\theta_z\quad-\frac{2c}{a}\theta_x+C\theta\right)\right]\wedge\theta_x\wedge\theta$$

$$+\frac{2c}{a^2}\left(\eta_z-\theta_{xy}\right)\wedge\theta_x\wedge\theta+\frac{2c}{a^2}D_y\left(\lambda_y\theta+\lambda\theta_y\right)\wedge\theta_x\wedge\theta+\frac{2c}{a^2}D_z\left(\lambda_z\theta+\lambda\theta_z\right)\wedge\theta_x\wedge\theta\Bigg\}dxdydz$$

ile verilen oldukça uzun ve de karmaşık bir denklem elde edilir. Jacobi özdeşliğinin sağlanabilmesi için bu integralin sıfır olması gerekmektedir. Yapılacak ara işlemlerden sonra birçok terim birbirini yok eder ve yukarıdaki denklem,

$$\Pr V_{\Gamma\omega}(\Theta)=\frac{1}{2}\int\left[\frac{8\varepsilon}{a^3}\theta_x\wedge\theta_y\wedge\theta_z-\frac{8(\varepsilon+\alpha^2)}{a^4}a_z\theta_x\wedge\theta_y\wedge\theta+\frac{8(\varepsilon+\alpha^2)}{a^4}a_y\theta_x\wedge\theta_z\wedge\theta\right.$$
$$\left.+\frac{8(\varepsilon+\alpha^2)}{a^4}a_x\theta_z\wedge\theta_y\wedge\theta+\frac{8\alpha^2}{a^3}\theta_x\wedge\theta_y\wedge\theta_z\right] \tag{4.10}$$

şeklini sadeleşir. (4.10) denklemindeki son üç terim toplam türevler şeklinde yazılarak,

$$\Pr V_{\Gamma\omega}(\Theta)=\frac{1}{2}8(\alpha^2+\varepsilon)\int\left\{\frac{1}{a^3}\theta_x\wedge\theta_y\wedge\theta_z+\left[\frac{1}{3a^3}\theta_x\wedge\theta_y\wedge\theta\right]_z-\frac{1}{3a^3}(\theta_{xz}\wedge\theta_y\wedge\theta+\theta_x\wedge\theta_{yz}\wedge\theta\right.$$
$$+\theta_x\wedge\theta_y\wedge\theta_z)-\left[\frac{1}{3a^3}\theta_x\wedge\theta_z\wedge\theta\right]_y+\frac{1}{3a^3}(\theta_{xy}\wedge\theta_z\wedge\theta+\theta_x\wedge\theta_{yz}\wedge\theta$$
$$+\theta_x\wedge\theta_z\wedge\theta_y)-\left[\frac{1}{3a^3}\theta_z\wedge\theta_y\wedge\theta\right]_x+\frac{1}{3a^3}(\theta_{xz}\wedge\theta_y\wedge\theta+\theta_z\wedge\theta_{yx}\wedge\theta \tag{4.11}$$
$$\left.+\theta_z\wedge\theta_y\wedge\theta_x)-\frac{1}{a^3}\theta_x\wedge\theta_y\wedge\theta_z\right\}dxdydz=0$$

elde edilir. Toplam türevler sınır değerlerinde sıfır olduğu ve diğer terimlerin birbirlerini yok ettiği kolayca görülebilir. Yani (4.11) denklemi; sıfıra eşit olup, Jacobi özdeşliğini sağlamış olur. Böylece KMA denkleminin iki Hamilltoniyen operatörü J_0 ve J_1, Jacobi özdeşliğini sağladığı için sistem bi-Hamiltonyen sistem olarak adlandırılır.

SONUÇLAR

Bu çalışmada son yıllarda gelişme gösteren ve literatürde çok az örneğine rastlanan, 3+1 boyutta lineer olmayan kimsi türevli diferansiyel denklemlerin bi- Hamiltonyen yapıları ele alınmıştır. Magri teoremine göre sistem, bi-Hamiltonyen yapıya sahip ise tamamen integre edilebilir bir sistem olmaktadır.

Giriş bölümünde geçmişten günümüze kadar integre edilebilir sistemlerde gözlenen gelişmeler kısaca ele alınmıştır. İkinci bölümde integre edilebilirlik kriterlerinin bazıları 1+1 boyutta KdV denklemi örneği üzerinde ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Üçüncü bölümde Öklid veya ultra hiperbolik imzada "self-dual gravity" içeren 3+1 boyutlu Kompleks Monge Ampere (KMA) denklemi iki bileşenli formda yazıldığında, Magri teoremine göre tamamen integre edilebilir bir sistem olduğu gösterilmiştir. KMA denkleminin Hamiltonyen yapısını elde edebilmek için başlangıç noktası, bu denklemi iki bileşenli değişim denklem sistemi olarak yazmaktır. İki bileşenli denklem sistemine uygun dejenere olmayan Lagranjyen yazılarak Dirac'ın bağ koşulu teorisi uygulanmıştır. Lagranjyen'den elde edilen bağ denklemleri ile simplektik yapı elde edilerek birinci Hamiltonyen operatörü J_0 hesaplanmıştır. Birinci Hamiltonyen operatörüne karşılık gelen birinci Hamiltonyen fonksiyonu H_1, Lagranjyen'den hesaplanarak hareket denklemleri elde edilmiştir. İkinci Hamiltonyen operatörünü elde edebilmek için reel tekrarlama operatörü R simetri durumundan hesaplanmıştır. R operatörünün gerçek tekrarlama operatörü olduğunu, Lie denklemlerine integre edilebilirlik koşulu uygulanarak elde edilen Frechet operatörü A ile komütatörünün sıfır olduğu gösterilerek ispatlamıştır. Böylece ikinci Hamiltonyen operatörü J_1, tekrarlama operatörü R yi J_0'a uygulayarak elde edilmiş ve J_1'e karşılık gelen ikinci Hamiltonyen fonksiyonu H_0 kullanılarak hareket denklemlerine tekrar ulaşılmıştır.

Son olarak J_0 ve J_1 Hamiltonyen operatörlerinin ve lineer birleşimleri olan $\alpha J_0 + \beta J_1$ nin Jacobi özdeşliğini sağladığı ayrıntılı olarak gösterilmiştir. Böylece KMA denklemini bi-Hamiltonyen yapıya sahip olduğu anlaşılmıştır. Başka bir deyişle, bu sonuç ile reel dört boyutta, "(anti)-self-dual gravity" nin Magri teoremine göre tamamen integre edilebilir olduğu gösterilmiş olmaktadır.

KAYNAKLAR

Ablowitz Mark J., Kaup David J., Newell Alan C. ve Segur Harvey, (1973), "Nonlinear-Evolution Equations of Physical Significance", Phys. Rev. Lett. 31, 125 – 127.

Calabi E., (1957), "On Kähler Manifolds with Vanishing Canonical Class", Algebraic Geometry and Topology, a Symposium in Honor of S. Lefschetz, Princeton University Press, pp. 78–89.

Das A., (1989), Integrable Models, World Scientific Lecture Notes in Physics, Newyork.

Davey A. ve Stewartson K., (1974), "On Three Dimensional Packets of Surface Waves", Proc. R. Soc, A 338: 101–110.

Dirac Paul., (1958), Principles of Quantum Mechanics (4th ed.), Oxford at the Clarendon Press, ISBN 978-0198520115.

Dirac P. A. M., (1964), Lectures on Quantum Mechanics Belfer Graduate.

Fuchssteiner B. ve Fokas A. S., (1981), Physica, 4D 47.

Gelfand I. M. ve Dorfman I. Ya., (1979), Hamiltonian Operators and Algebraic Structures Related to Them, Func. Anal. Appl, 13, 248-262.

Husain V., (1994), "Self-dual Gravity as a Two Dimensional Theory and Conservation Laws", Class. Quant. Grav., 11 927.

Ishimori Y., (1984), "Multi-Vortex Solutions of a Two-Dimensional Nonlinear Wave Equation", Prog. Theor. Phys., 72: 33–37.

İbragimov N. H. ve Shabat A. B., (1980), Func. Anal. Appl., 14 19-28.

Kadomtsev B. B. ve Petviashvili V. I., (1970), "On the Stability of Solitary Waves in Weakly Dispersive Media", Sov. Phys. Dokl., 15: 539-541.

Kupeshmidt B. A., (1980), Geometry of Jet Bundles and Structure of Lagrangian and Hamiltonian Formalism, in Geometric Methods in Mathematical Physics, Springer-Verlag, Newyork.

Kosmann Y. ve Schwarzbach, (1981), "Hamiltonian System on Fibered Manifolds", Lett. Math. Phys., 5, 229-237.

Korteweg D. ve de Vries G., (1895), “On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves”, Philosophical Magazine, 39: 422–443.

Lax P., (1968), “Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves”, Comm. Pure Applied Math., 21: 467–490.

Magri F., (1978), “A Simple Model of the Integrable Hamiltonian Equation”, J. Math. Phys., 19, 1156-1162.

Magri F., (1980), in Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems, (M. Boiti, F. Pempinelli, and G.Soliani, Eds.), Lecture Notes in Phys., 120, Springer, New York, p. 233.

Magri F., (1980), A Geometrical Approach to The Nonlinear Solvable Equations, in Nonlinear Evolution Equations and Dynamic Systems, Springer-Verlag, Newyork.

Manin Yu. I., (1979), Algebraic Aspects of Nonlinear Differential Equations, J. Soviet Math. 11, 1-122.

Miura Robert M., Gardner Clifford S. ve Kruskal Martin D., (1968), “Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. II. Existence of Conservation Laws and Constants of Motion”, J. Mathematical Phys. 9: 1204–1209, doi:10.1063/1.1664701.

Neyzi F., Nutku Y. ve Sheftel M. B., (2005), “Multi Hamiltonian Structure of Plebanski’s Second Heavenly Equation”, J. Phys. A: Math. Gen., 38 8473-8485.

Nutku Y., (2000), Phys. Lett. A 268 293, (Prepprint hep-th/0004164).

Nutku Y., (2008), “Lagrangian Approach to İntegrable Systems Yields New Symplectic Structure for KdV”, hep-th/0011052v1.

Olver, P. J., (1980), On the Hamiltonian Structure of Evaluation Equations, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 88, 71-88.

Olver P. J., (1986), Application of Lie groups to Differential Equations, Springer, New York.

Plebanski J. F., (1975), J. Math. Phys., 16 2395–402.

Pogorelov A. V., (2001), “Monge–Ampère Equation”, in Hazewinkel, Michiel, Encyclopaedia of Mathematics, Kluwer Academic Publishers, ISBN 978-1556080104.

Sheftel M. B. ve Malykh A. A., (2009), “On a Class of Second-order PDEs Admitting Partner Symmetries”, Exactly Solvable and Integrable Systems, (nlin.SI).

Sheftel M. B. ve Yazıcı D., (2009), “Mixed Heavenly Equation and Husain's Equation are Integrable Bi-Hamiltonian Systems”, Mathematical Physics (math-ph), 35Q75; 83C15.

Yang C.N., (1977), Phys. Rev. Lett., 38, 1377.

Yazıcı D., (2000), Çok Bileşenli Süper Çözülebilir Sistemlerin Hamilton Yapıları, Y.T.Ü Doktora Tezi.

Yazıcı D. ve Sheftel M.B., (2008), “Symmetry Reductions of Second Heavenly Equation and 2+1-dimensional Hamiltonian Integrable System”, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, Volume 15, supplement 3, 417-425.

Zabusky N. J. ve Kruskal M. D., (1965), “Interaction of "Solitons” in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States”, Phys. Rev. Lett., 15: 240–243, doi:10.1103/PhysRevLett.,15.240.

Zakharov V. E. ve Fadeev L. D., (1971), Korteweg-de Vrise Equation: a Completely Integrable Hamiltonian System, Func. Anal. Appl 5, 208-287.

Zakharov V. E.,(1991), “What is Integrability”, Springer Verlag Press.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	10.09.1980	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1994-1998	Bursa Kız Lisesi (süper lise)
Lisans	1999-2005	Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Fizik Bölümü
Yüksek Lisans	2007-2010	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı, Matematiksel Fizik