YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EĞRİ MOMENTUM UZAYLARI ve KOMÜTATİF OLMAYAN DİFERANSİYEL HESAPLAR

Zeynep GÜVEN

FBE Fizik Anabilim Dalında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Roufat MİR-KASİMOV

İSTANBUL, 2001

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ iv

ÖNSÖZ v

ÖZET vi

ABSTRACT vii

1. GİRİŞ 1

2. STANDART KUANTUM MEKANİĞİ ve RÖLATİVİSTİK KUANTUM MEKANİĞİNİN TEMEL DENKLEMLERİ 3

2.1 Kuantum Mekaniğinin Temel Varsayımları 3
2.1.1 Schrödinger dalga denklemi 4
2.1.2 Dalga fonksiyonunun olasılık yorumu ve olasılığın korunumu 5
2.2 Klein-Gordon Denklemi 7

3. RÖLATİVİSTİK KUANTUM MEKANİĞİNE YENİ BİR YAKLAŞIM 12

3.1 Giriş 12
3.1.1 Rölativistik kuantum mekaniğinde yeni bir yaklaşımın temelleri 12
3.1.2 Rölativistik konfigürasyon x-uzayında momentum ve enerji operatörleri 16
3.1.3 Sonlu fark Schrödinger dalga denklemi 20
3.1.4 Sonlu fark operatörlerin hermitselliği 22
3.1.5 Sonlu fark operatörü ile adi türev operatörü arasındaki ilişki 25
3.2 Sonlu Fark Operatörlerin Türev Tablosunu Oluşturma İşlemleri 28
3.2.1 Hipergeometrik fonksiyonlar 34
3.2.2 Eksponansiyel fonksiyonların hipergeometrik fonksiyonlarla ifade edilmesi 35
3.2.3 Trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonların sonlu fark türevlerinin incelenmesi 37

4. KOMÜTATİF OLMAYAN DİFERANSİYEL HESAPLAR ve SONLU FARK SCHRÖDİNGER DALGA DENKLEMİ 39

4.1 Giriş 39
4.2 Komütatif Olmayan Diferansiyel Hesaplar 39
4.3 Komütatif Olmayan Diferansiyel Hesaplar Kullanılarak Sonlu Fark Schrödinger Dalga Denkleminin Elde Edilmesi 43

5. RÖLATİVİSTİK SAÇILMA TEORİSİ 49

5.1 Giriş 49
5.1.1 Saçılmanın genel tanımı ve tipleri 49
5.2 Standart Kuantum Mekaniğinde Bir Boyutlu Esnek Saçılma Teorisi 49

5.3 Rölativistik Kuantum Mekaniğinde Bir Boyutlu Saçılma Teorisi....................55

6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER....................64

KAYNAKLAR....................65

EKLER....................66

Ek 1 Green Fonksiyonlarının Öteleme İnvaryanslığı....................66

ÖZGEÇMİŞ....................67

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1 Konturun şekli 24
Şekil 5.1 Kutup noktalarının q kompleks düzleminde gösterilişi ve bu düzlemde konturların şekli 53
Şekil 5.2 Kutup noktalarının α kompleks düzleminde gösterilişi ve bu düzlemde konturların şekli 58
Şekil 5.3 Basamak fonksiyonu $\theta(x)$'in x'e göre değişim grafiği 61

ÖNSÖZ

Tezimin konusunu belirleyip, bana bu alandaki deneyimleriyle yol gösteren ve danışmanlığımı üstlenen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Roufat MİR-KASİMOV'a, bizlere rahat bir çalışma ortamı hazırlayan Fen-Edebiyat Fakültesi Dekanı Sayın Durul ÖREN'e ve Fizik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Emel ÇINGI'ya çok teşekkür ederim.

Özellikle tezin her aşamasında beni destekleyen Fen-Edebiyat Fakültesi Dekan Yardımcısı ve Matematiksel Fizik Anabilim Dalı Başkanı hocam Sayın Prof. Dr. Oya OĞUZ'a ve yapmış olduğumuz çalışmalar esnasında sorularıyla ufkumu açan Prof. Dr. Ömer OĞUZ'a; ayrıca Yrd. Doç. Dr. Reyhan KAYA ve Yrd. Doç. Dr. Zehra CAN'a, tezin kaynak taraması sırasında yardımcı olan Arş. Gör Dilek ÇİFTÇİ'ye, arkadaşlarım Arş.Gör.Dr. Devrim YAZICI, Arş. Gör. Ferhat TAŞKIN ve Arş. Gör. Banu SÜNGÜ'ye teşekkürü bir borç bilirim. Çalışmalarım esnasında bana her zaman güvenen ve inanan, anneme ve babama ise ne kadar teşekkür etsem azdır.

Zeynep GÜVEN
Mayıs, 2001

ÖZET

Olasılık yorumu da dahil olmak üzere standart kuantum mekaniğinin tüm postülalarını sağlayan rölativistik teori bir boyutlu durum için geliştirilmiştir. Teorinin rölativistik karakteri, Lorentz grup gösterimlerinin indirgenemez, üniter gösterimleriyle tanımlanır. Bu matris elemanları ise serbest hareketin dalga fonksiyonlarıdır(rölativistik düzlem dalgalar). Yaklaşım, parçacığın rölativistik enerjisi ile momentumu arasındaki ilişkiyi anlatan kütle kabuğu denkleminin Lobachevsky momentum uzayını tasvir etmesine dayanmaktadır. Lobachevsky uzayının izometri grubu (ya da uzayın hareketler grubu) Lorentz grubudur. Bu teoride enerji ve momentum operatörleri, fark aralığının parçacığın Compton dalga boyuna eşit olduğu sonlu fark operatörleridir. Serbest rölativistik parçacığın sonlu fark Schrödinger denklemi standart Schrödinger denkleminden ayırt edilemeyecek bir formda yazılmıştır. Rölativistik yaklaşımın gereklerini karşılamak için kurulan sonlu fark hesaplar geliştirilmiştir. Diferansiyel formlar teorisinin deformasyonlarına dayanan komütatif olmayan diferansiyel hesapların kısa bir özeti verilmiş ve komütatif olmayan diferansiyel hesapların rölativistik Schrödinger denklemi için doğal bir matematiksel araç olduğu gösterilmiştir. Ardından bir boyutlu rölativistik saçılma teorisi araştırılmıştır. Rölativistik Green fonksiyonu, argümanların kompleks düzleminde Jordon lemması kullanılarak kapalı bir formda hesaplanmıştır. Sonlu fark hesaplar durumu için önemli sayıda dağılımlar, integral gösterimleri temelinde genelleştirilmiştir.

ABSTRACT

The relativistic theory, which satisfies all postulates of standard quantum mechanics, including probability interpretation, has been developed in one-dimensional case. The relativistic character of the theory is described by the matrix elements of the unitary, irreducible representations of the Lorentz group. These matrix elements are the free motion wave functions (relativistic plane waves). The approach considered is based on a fact that mass shell equation of a particle (i.e. the relativistic connection between energy and momentum) describes Lobachevsky momentum space. The isometry group (group of motions) of the Lobachevsky space is the Lorentz group. In this theory the operators of energy and momentum are finite-difference operators with the difference interval equal to the Compton's wavelength of the particle. The finite-difference Schrödinger equation of free relativistic particle has been written in a form indistinguishable from the standard Schrödinger equation. The finite-difference calculus, which is constructed for meeting the needs of the relativistic approach, has been developed. A short review of non-commutative differential calculus based on the theory of differential forms as their deformation has been given and it was shown that the non-commutative differential calculus is a natural mathematical tool for the relativistic Schrödinger equation. Then the relativistic one-dimensional scattering theory has been investigated. The relativistic Green's function has been calculated in a closed form using the Jordon's lemma in the complex plane of rapidities. A number of important distributions have been generalized for the case of finite-difference calculus on a basis of integral representations.

1.GİRİŞ

Kuantum mekaniği, küçük mesafelerdeki parçacıkların etkileşmelerini ve fiziksel olayları açıklayan yegane teoridir. Rölativistik kuantum mekaniği ise yüksek enerjili parçacıklar arasındaki etkileşmeleri ve fiziksel olayları incelemek amacıyla kurulmuş bir teoridir. Yüksek enerjili parçacıklar için rölativistik kuantum mekaniğine geçilmesiyle, standart kuantum mekaniğinin bazı temel kavramlarının (örneğin izole edilmiş tek parçacık, sabit sayıda parçacık sayısı vb.) değiştirilmesi de zorunlu olmuştur. Bunun sebebi standart kuantum mekaniğinin konfigürasyon uzayıyla, rölativistik parçacıkların hareketlerinin tasvir edilmesi sırasında Klein-Gordon denkleminde değinileceği gibi bazı problemlerle karşılaşılmış olmasıdır. Tezin amacı yeni bir rölativistik konfigürasyon uzayı kavramına dayanan rölativistik kuantum mekaniğinin geliştirilmesidir. Rölativistik konfigürasyon uzayı kavramı üniter, indirgenemez Lorentz grup gösterim teorisinin matris elemanları kullanılarak oluşturulmuştur. Bu rölativistik yaklaşım aynı zamanda dalga fonksiyonunun olasılık yorumu da dahil olmak üzere, standart kuantum mekaniğinin tüm postülalarını sağlamaktadır. Lorentz grup gösterim teorisine dayanan rölativistik yaklaşımın temelleri hakkında genel bilgilerin ifade edilmesinden önce, rölativistik kuantum mekaniğinin tarihsel gelişim sürecine kısaca değinilebilir:

Rölativistik kuantum mekaniği üzerine ilk dalga denklemi önerisi 1926 yılında Klein, Gordon ve Fock tarafından getirilmiştir. Klein-Gordon denkleminin en önemli özelliği zamana göre ikinci mertebeden türevin olduğu bir diferansiyel denklem oluşuydu. Dalga fonksiyonunun zamana göre değişiminin belirlenmesi için hem ψ hem de $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ ifadelerinin verilen bir anda bilinmesi gerekliydi ve bu ifadeler rasgele değerler alabileceğinden ρ ifadesi pozitif, negatif ya da sıfır olabilirdi. Bu da ρ'nun, parçacığın iyi belirlenmiş koordinatları için olasılık yoğunluğu olarak yorumlanmasını imkansız hale getirmişti. Klein-Gordon denkleminin ikinci problemli noktası ise negatif enerji çözümlerine izin vermesiydi. Bu yüzden Klein-Gordon denkleminin gerçek parçacıkları tasvir etmediği düşünülmektedir. Bu problemleri gidermek amacıyla Dirac 1928'de kendi adıyla bilinen bir denklem önermiştir. Bu denklem süreklilik denklemine uygun bir denklem oluşu ve sadece pozitif olasılık yoğunluğuna izin verişiyle Klein-Gordon denkleminin ilk problemine çözüm bulmaktaydı. Ancak halen negatif enerji çözümleri mevcuttu. Aslında Klein-Gordon denklemiyle Dirac denklemi aynı tip denklemlerdi. Klein-Gordon denklemi spini sıfır olan bozonlar için, Dirac denklemi spini ½ olan fermiyonlar için geçerliydi. Daha sonra her iki denklemde de yer alan negatif enerji çözümleri anti parçacık olarak yorumlanmış ve bu yorum yeni bir formalizmin gerekliliğini de beraberinde getirmiştir: İkinci Kuantizasyan ve Kuantum Alan Teorisi.

Genel hatlarıyla değinilen rölativistik kuantum mekaniğinin önemli bir özelliği, rölativistik belirsizlik bağıntılarının analizi sonucunda rölativistik teoride momentum uzayının kullanılmasının uygun olduğudur (Davydov, 1965). Bu bakımdan tezin temellerini vermeye çalıştığı rölativistik yaklaşım da momentum uzayında, parçacığın kütle kabuğu denkleminin yazılması ve bu denklemin teşkil ettiği üç boyutlu yüzeyin Lobachevsky geometrisini tasvir etmesi esasına dayanır. Kısaca rölativistik yaklaşımın temel düşüncesinin ifade edildiği bu satırların ardından şimdi tezin kapsamına geçilebilir:

Tezin 2. Bölümünde kuantum mekaniğinin temel varsayımları ile Schrödinger ve Klein-Gordon dalga denklemleri anlatılmıştır. 3. Bölümde Lorentz grup gösterimine dayanan rölativistik yaklaşımın bir boyutlu temelleri verilmektedir. Parçacığın kütle kabuğu denklemi (parçacığın rölativistik enerjisi ve momentumu arasındaki ilişkiyi gösteren denklem) Lobachevsky momentum uzayını tasvir ederken; bu uzayın izometri grubu ise Lorentz grubudur. Rölativistik parçacığın düzlem dalgası Lorentz grubunun gösteriminin indirgenemez, üniter matris elemanıdır. Rölativistik yaklaşımda enerji ve momentum operatörleri sonlu fark operatörlerle ifade edilerek, bu operatörlerin özdeğer denklemlerini sağladıkları (standart kuantum mekaniğinin ikinci postülası) gösterilmiş ve sonlu fark Schrödinger denklemi, standart Schrödinger denkleminden ayırt edilemeyecek bir formda ifade edilmiştir. Ayrıca sonlu fark operatörün hermitselliği incelenerek (1. postüla), adi türevle olan ilişkisi ifade edilmiş ve sonlu fark hesaplar(türevler) ayrıntılı olarak geliştirilmiştir. 4. Bölümde ise komütatif olmayan diferansiyel hesapların temel bağıntıları incelenerek rölativistik Schrödinger denklemi komütatif olmayan diferansiyel hesaplar kullanılarak yazılmıştır. 5. Bölümde ise bir boyutlu saçılma teorisi hem standart kuantum mekaniği hem de rölativistik yaklaşım açıdan incelenerek, rölativistik Green fonksiyonu kompleks argümanların düzleminde Cauchy-Residü teoremi ve Jordon lemması kullanılarak hesaplanmış, genelleştirilmiş basamak fonksiyonunun (sonlu fark basamak operatörü) integral gösterimi ifade edilerek delta fonksiyonuyla ilişkisi gösterilmiştir.

2. STANDART KUANTUM MEKANİĞİ ve RÖLATİVİSTİK KUANTUM MEKANİĞİNİN TEMEL DENKLEMLERİ

2.1 Kuantum Mekaniğinin Temel Varsayımları

Kuantum mekaniğinin temel varsayımları yani postülaları pek çok deneysel verinin matematiksel olarak karşılanabilmesi amacıyla ortaya çıkmıştır ve aşağıda ifade edilen dört maddeden oluşmaktadır.

1.Varsayım: Her fiziksel gözlenebilir bir çizgisel hermitsel operatör ile temsil edilebilir.

2.Varsayım: Bir A gözlenebilirine karşılık gelen hermitsel operatör $\hat{A}$ ise A'nın bir kesin ölçümünün olası sonucu $\hat{A}$ 'nın kesikli veya sürekli özdeğerlerinden biridir. A gözlenebilirinin bir ölçümü, $\hat{A}$ 'nın bir a_n özdeğerini vermişse sistem, $\hat{A}$ 'nın a_n öz değerine karşılık gelen u_n öz durumundadır. Bu ifade matematiksel olarak

$$\hat{A}u_n = a_n u_n \tag{2.1}$$

şeklinde yazılır.

3.Varsayım: Bir sistemin herhangi bir t anındaki durumu, durum fonksiyonu da denilen; sürekli, türevi alınabilir ve genelde sanal değerli olan $\psi(\vec{r},t)$ dalga fonksiyonu ile belirlenebilir. Daima

$$\int_{tüm\ uzay} |\psi|^2 d^3\vec{r} = 1 \tag{2.2}$$

integraline göre bire boylandırılabilen $\psi(\vec{r},t)$ fonksiyonu, sistemle ilgili tüm bilgileri taşır.

4.Varsayım: Dalga fonksiyonunun zaman içindeki değişimi; $\hat{H}$, sistemin Hamilton operatörü olmak üzere,

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \tag{2.3}$$

şeklinde ifade edilen ve sistemin zamana bağlı Schrödinger denklemi olarak adlandırılan denklem ile belirlenir (Dereli ve Verçin, 1998).

2.1.1 Schrödinger dalga denklemi

Klasik mekanikte kinetik ve potansiyel enerjilerin toplamı olan mekanik enerji, operatör kavramlarıyla birleştirilerek; kuantum mekaniğinde Schrödinger dalga denklemi elde edilir. Klasik fizikteki toplam enerji ya da mekanik enerji $\vec{r} = (x, y, z)$ olmak üzere,

$$E = \frac{1}{2} m \vartheta^2 + V(\vec{r}, t) \tag{2.4}$$

ile tanımlıdır. Kinetik enerji

$$E_k = \frac{p^2}{2m} \tag{2.5}$$

dir. E ve p^2 yerine operatör karşılıkları olan

$$p \rightarrow \hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \quad , \quad \hat{p}^2 = -\hbar^2\nabla^2 \tag{2.6-a}$$

$$E \rightarrow \hat{H} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{2.6-b}$$

formülleri (2.4) denkleminde yerlerine yazılıp: toplam enerji için elde edilen operatör denklemi $\psi(\vec{r}, t)$ dalga fonksiyonuna etki ettirilirse,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t)\,\psi(\vec{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t) \tag{2.7}$$

şeklinde bir denklem elde edilir. Bu denklem *zamana bağlı Schrödinger dalga denklemi*' dir. Bu denkleme göre; sistemin toplam enerjisini temsil eden $\hat{H}$ Hamilton operatörü

$$\hat{H}\psi = E\psi \Rightarrow \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V \tag{2.8}$$

olarak yazılır. Dalga fonksiyonu ψ zamana bağlı değilse dalga denklemi

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\bar{r})\right)\psi(\bar{r})=E\psi(\bar{r}) \tag{2.9}$$

şeklinde yazılır. Bu denklem ise *zamandan bağımsız Schrödinger dalga denklemi* olarak adlandırılır.

2.1.2 Dalga fonksiyonunun olasılık yorumu ve olasılığın korunumu

Standart kuantum mekaniğinin 3. postülası olarak ifade edilen (2.2) denklemi, belirli bir t anında parçacığın uzaydaki noktalarda bulunma olasılığı toplamının bir olduğunu anlatır. Eğer parçacık kararlıysa yani bir bozunma söz konusu değilse; acaba parçacığın uzaydaki noktalarda bulunma olasılıkları toplamı, her t zamanı için 1 midir? Ya da başka bir deyişle zaman değiştikçe (2.2) ifadesi nasıl değişmektedir? Bu sorunun cevabı için (2.2) ifadesinin zamana göre türevi alınır ve sonuç sıfırsa yukarıdaki yorumun her t için doğru olduğu sonucuna varılabilir. Yukarıda da belirtildiği üzere (2.2) denkleminin zamana göre türevi alınarak

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V|\psi(\bar{r},t)|^2dV=\int_V\frac{\partial}{\partial t}|\psi(\bar{r},t)|^2dV=\int_V\left[\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}+\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]dV \tag{2.10}$$

ifadesine ulaşılır. Zamana bağlı Schrödinger dalga denklemi (2.7) ve onun kompleks eşleniği yardımıyla $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ ve $\frac{\partial\psi^*}{\partial t}$ ifadeleri

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{i\hbar}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V\psi\right] \qquad \frac{\partial\psi^*}{\partial t}=-\frac{1}{i\hbar}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^*+V^*\psi^*\right] \tag{2.11}$$

olarak yazılabilir. Bu ifadeler (2.10) denkleminde yazıldığında; integral içindeki ifade

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(\bar{r},t)|^2=\frac{\hbar}{2im}\left[\psi\nabla^2\psi^*-\psi^*\nabla^2\psi+\frac{2m}{\hbar^2}\left(\psi^*V\psi-\psi V^*\psi^*\right)\right] \tag{2.12}$$

şeklinde elde edilir. Hamilton operatörü $\hat{H}$ hermitsel bir operatör olduğundan potansiyel reeldir ve (2.12) denklemindeki son terim bu nedenden ötürü ortadan kalkar. Denklemin kalan kısmına

$$f\nabla^2 g = \vec{\nabla}.\left(f\vec{\nabla}g\right) - \left(\vec{\nabla}f\right).\left(\vec{\nabla}g\right) \tag{2.13}$$

özdeşliği uygulanırsa (2.10) denklemi

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(\vec{r},t)\right|^2 dV = \frac{\hbar}{2im}\int_V \vec{\nabla}.\left[\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi\right]dV \tag{2.14}$$

olarak elde edilir. Bu denklem düzenlendiğinde

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(\vec{r},t)\right|^2 dV + \frac{\hbar}{2im}\int_V \vec{\nabla}.\left[\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right]dV = 0 \tag{2.15}$$

elde edilir. Diverjans teoremine göre bir fonksiyonun diverjansının hacim integrali yerine bu hacmi saran yüzey üzerinde fonksiyonun kendisinin integrali alınabilir. Buna göre (2.15) denklemi diverjans teoremine göre düzenlendiğinde

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(\vec{r},t)\right|^2 dV + \frac{\hbar}{2im}\int_S \left[\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right].\hat{n}\,dS = 0 \tag{2.16}$$

elde edilir. Bu ifadede V hacmi tüm uzay olarak ele alınırsa, ikinci integral sonsuzdan geçen kapalı yüzey integrali olur. Fakat $\vec{r} \to \infty$ limitinde dalga fonksiyonu sıfıra gittiğinden (2.15) formülündeki ikinci integral sıfır olur ve

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(\vec{r},t)\right|^2 dV = 0 \tag{2.17}$$

sonucuna ulaşılır. Başka bir deyişle olasılık korunur. Buna göre (2.15) denklemindeki terimler için

$$\rho = \left|\psi(\vec{r},t)\right|^2 \tag{2.18}$$

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right) \tag{2.19}$$

ifadeleri tanımlanırsa (2.15) denkleminin

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0 \qquad (2.20)$$

ile verilen bir süreklilik denklemi olarak yazılabileceği görülür (Shankar, 1980). Bu denklem gerçekten elektrikteki süreklilik denklemi ile aynıdır. Eğer kaynak ya da batma söz konusu değilse, bir bölgedeki yük yoğunluğunun zamanla değişimi o bölgeden çıkan net akıma eşittir. Buna göre eğer $|\psi(\vec{r},t)|^2$ ifadesi yani ρ olasılık yoğunluğu ise, $\vec{J}$ vektörü de olasılık akım yoğunluğu vektörü olarak adlandırılabilir ve ρ olasılıkla ilişkili bir büyüklük olduğu için her zaman pozitif değerler alır. O halde parçacığın sonlu bir bölgede bulunma olasılığının zamanla değişimi bu bölgeden geçen net olasılık akımı ile oluşur. $\int_S \vec{J}.\hat{n}\,dS$ akısının artı (eksi) olması durumunda yüzeyden çıkan (yüzeye giren) bir net olasılık akımı olduğunu söyler. Bu durumda $\frac{d\rho}{dt}$ eksi (artı) olup V hacmi içinde olasılığın azalmakta (artmakta) olduğunu gösterir.

2.2 Klein-Gordon Denklemi

Tek (nokta) rölativistik parçacıklar için dalga denkleminin yazılmasına ilk teklif 1927 yılında Fock . Klein ve Gordon tarafından ileri sürülmüştür. Amaçlanan rölativite prensiplerine uygun. doğru bir rölativistik kuantum mekaniğinin kurulmasıydı. Bu da Lorentz dönüşümleri altında formlarını koruyan –Lorentz kovaryant- denklemlerin yazılmasıyla mümkündür. Standart kuantum mekaniğinin temel prensiplerine bu bölümün başında kısaca değinildiğinden şimdi özel rölativite teorisinin temel prensiplerinden kısaca bahsetmek yerinde olacaktır. Özel rölativite teorisinin temel prensipleri iki maddede toplanabilir:

1) Fizik kanunları tüm eylemsiz sistemlerde aynıdır.
2) Işık hızının boşluktaki yayılma hızı sabittir.

İlk prensip fizik kanunlarının gözlemcilerin bulundukları referans sisteminden bağımsız olduğunu anlatır. Bu referans sistemleri ise Poincaré grup dönüşümleri ile biri diğerinden elde edilebilen referans sistemleridir. Poincaré grup dönüşümleri, uzay-zaman ötelemeleri, uzaysal dönmeler ve özel Lorentz dönüşümlerinden türetilmektedir. Özel rölativite teorisinin ikinci prensibi ise herhangi bir sinyalin hızına bir üst limit getirmektedir.

Kuantum mekaniksel ve rölativistik tanımlamaların araştırılmasında karşılaşılan bazı uyuşmazlıklar şöyle sıralanabilir. Rölativite teorisi m kütleli rölativistik parçacığın momentumunu $p = mc$ ile belirlemiştir. Fakat $\Delta x.\Delta p \geq \hbar$ Heisenberg belirsizlik prensibine göre uzunluk ölçeği $\lambda = \hbar/mc$ ile tanımlı Compton dalga boyundan küçüktür. Ayrıca büyük bir yakınlıkla parçacığın konumunu analiz etmek durgun kütle olarak aynı mertebeden enerji ve momentum gerektirir. Bu da yeni parçacıkların oluşmasına izin verilmesine neden olur. Tüm bu uyuşmazlıklar ileride de görüleceği üzere tek parçacık için Klein-Gordon denkleminin doğru olmadığını işaret edecektir. Şimdi Klein-Gordon denkleminin yazılmasıyla bu uyuşmazlıkların görülmesine geçilebilir:

Kuantum mekaniği ile rölativistik invaryanslığı bir araya getirmek için özel rölativite teorisi kullanılarak rölativistik enerji-momentum ilişkisini veren denklem çıkarılmalıdır. Özel rölativite teorisinde uzay-zaman koordinatları $\mu = 0,1,2,3$ olmak üzere kontravaryant 4'lü vektörün bileşenleri

$$x^{\mu} = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (ct, x, y, z) \tag{2.21}$$

olarak tanımlanırken; x_{μ} kovaryant 4'lü vektörün bileşenleri ise uzay bileşenlerinin işaretlerinin değiştirilmesiyle elde edilebilir.

$$x_{\mu} = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) \tag{2.22}$$

Bu durumda diferansiyel operatörler ise,

$$\begin{aligned} \partial^{\mu} &= \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = \left(\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) \\ \partial_{\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left(\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \end{aligned} \tag{2.23}$$

ile verilmektedir. Bu durumda $\partial^{\mu}\partial_{\mu}$ ise;

$$\partial^{\mu}\partial_{\mu} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, -\nabla^2\right) \tag{2.24}$$

olarak elde edilir. Parçacığın momentum vektörü 4'lü kontravaryant ve kovaryant bileşenler cinsinden

$$p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \qquad p_{\mu} = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right) \tag{2.25}$$

ile tanımlıdır. Bu vektörün invaryant uzunluğu ise değer olarak m^2c^2'ye eşit olmakla birlikte

$$\sum_{\mu=0}^{3} p^{\mu} p_{\mu} = p^0 p_0 + p^1 p_1 + p^2 p_2 + p^3 p_3 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}.\vec{p} = m^2c^2 \tag{2.26}$$

işlemiyle yazılabilir. Bu durumda rölativistik enerji ve momentum arasındaki ilişkiyi anlatan kütle kabuğu denklemi

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{2.27}$$

ifadesiyle tanımlı olur. Rölativistik enerji ve momentum arasındaki ilişkiyi gösteren (2.27) formülünde (2.6-a) ve (2.6-b) formülleri kullanılırsa;

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\vec{r},t) = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \psi(\vec{r},t) + m^2 c^4 \psi(\vec{r},t)$$

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi(\vec{r},t) = 0 \tag{2.28}$$

denklemine ulaşılır. Bu denklem daha kapalı bir formda (2.23) ifadesi yardımıyla

$$\left(\partial^{\mu}\partial_{\mu} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\vec{r},t) = 0 \tag{2.29}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denkleme *Klein-Gordon denklemi* adı verilir.

Klein-Gordon denkleminin yazılmasında (2.27) kütle kabuğu denkleminde standart kuantum mekaniksel enerji ve momentum operatörleri kullanıldığından; Schrödinger denklemine Klein-Gordon denkleminin rölativistik olmayan yaklaşımı olarak bakılabilir. Bu yorumun ardından Klein-Gordon denkleminin çözümü olduğu varsayılan dalga fonksiyonu üzerine

Kısım 2.1.2'de yapıldığı gibi ρ ve $\vec{J}$ hesabı yapılarak süreklilik denkleminin sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilmelidir. Bunun için (2.28) ifadesi soldan ψ^* ile ve (2.28) denkleminin kompleks eşleniği ise soldan ψ ile çarpılarak

$$\psi^*\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi=0 \qquad (2.30\text{-a})$$

$$\psi\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi^*=0 \qquad (2.30\text{-b})$$

ifadeleri yazılabilir ve (2.30-a)'dan (2.30-b) çıkarılırsa,

$$\frac{1}{c^2}\left[\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2}\right]+\left(\psi\nabla^2\psi^*-\psi^*\nabla^2\psi\right)=0 \qquad (2.31)$$

elde edilir. Gerekli kısaltmalar yapılır, (2.13) özdeşliği kullanılır ve (2.31) ifadesinin her tarafı $\frac{i\hbar}{2m}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)\right]+\vec{\nabla}.\left[\frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\left(\vec{\nabla}\psi\right)-\psi\left(\vec{\nabla}\psi^*\right)\right)\right]=0 \qquad (2.32)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem (2.20) süreklilik denklemi ile kıyaslanırsa

$$\rho=\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) \qquad (2.33)$$

$$\vec{J}=\frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi-\psi\vec{\nabla}\psi^*\right) \qquad (2.34)$$

ifadeleri yazılabilir. ρ'nun olasılık yoğunluğu olarak yorumlanabilmesi için sıfır ile bir arasında değer alması gerekir. Klein-Gordon denklemi ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem olduğundan ψ ve $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ keyfi değerler alabilir. Dolayısıyla (2.33) ifadesinin negatif değerler de alması söz konusu olduğundan; ρ ifadesinin olasılık yoğunluğu olarak yorumlanması mümkün değildir. ρ'nun negatif olabilmesi, ψ dalga fonksiyonuyla Klein-

Gordon denkleminin tek parçacık denklemi olarak yorumlanmasını da başlamadan bitirmiştir. Ancak (2.33) ve (2.34) ifadeleri süreklilik denklemini sağladığından; ρ, olasılık yoğunluğu dışında başka bir korunumlu büyüklüğün yoğunluğu olarak düşünülmelidir. Bu sorundan kurtulabilmek için, rölativistik olmayan Schrödinger dalga denkleminde olduğu gibi zamana göre birinci mertebeden türev içeren bir dalga denklemi bulunması gerekir.

Klein-Gordon denklemindeki ikinci hastalıklı nokta ise (2.27) ile tanımlanmış kütle kabuğu denkleminden dolayı

$$E = \pm\left(p^2c^2 + m^2c^4\right)^{1/2} \tag{2.35}$$

pozitif enerjili terimler kadar negatif enerjili terimlerin varlığına da izin verilmesidir. Dolayısıyla enerji spektrumunun alttan bir sınırı kalmamıştır. Bu durum rölativite teorisiyle büyük bir uyuşmazlığı da beraberinde getirmiştir. Çünkü negatif enerji çözümleri özel rölativite teorisindeki m kütleli rölativistik parçacığın sahip olduğu minimum enerjiyi anlatan, pozitif mc^2 durgun kütle enerjisi kavramına ters düşmektedir (Bjorken ve Drell, 1964; Itzykson ve Zuber, 1980).

Klein-Gordon denkleminden bulunan ρ'nun olasılık yoğunluğu olarak yorumlanamayışından ve enerjinin negatif değerler almasından ötürü Klein-Gordon denklemi problemli bir denklemdir. Bu yüzden Klein-Gordon denkleminin çözümü olan fonksiyonun, dalga fonksiyonu olarak yorumlanması mümkün değildir. Bu problemler kuantum alan teorisinin kurulmasıyla çözümlenmiştir. Tezin ifade edeceği rölativistik yaklaşımda ise rölativistik dalga fonksiyonu için bir denklem (rölativistik kuantum mekaniğinin dalga denkleminin) yazılması amaçlanmıştır. Rölativistik yaklaşım sayesinde rölativistik Schrödinger denkleminin eşdeğerinin (analoğunun), Lorentz grup gösterimleri kullanılarak yazılması mümkündür. Bu durumda rölativistik dalga fonksiyonuna ait ρ ifadesi pozitif olmakta ve standart kuantum mekaniğinin diğer postülaları da sağlanmaktadır.

3. RÖLATİVİSTİK KUANTUM MEKANİĞİNE YENİ BİR YAKLAŞIM

3.1 Giriş

Bu bölümde amaçlanan, rölativistik kuantum mekaniğine 2. Bölümde bahsedilen standart kuantum mekaniğiyle uyumlu olabilecek, yeni bir yaklaşım getirilmesidir. Bu amaca yönelik olarak bazı gözlenebilir büyüklüklere karşılık gelen (enerji, momentum) operatörlere yeni öneriler ileri sürülerek bu önerilerin standart kuantum mekaniğiyle olan uyumunun incelemesi yapılacaktır. Ardından bu operatörlerin hermitselliği incelenecek ve adi türev operatörü ile benzerliğinden faydalanılarak temel türev tablosu oluşturulacaktır.

3.1.1 Rölativistik kuantum mekaniğinde yeni bir yaklaşımın temelleri

Rölativistik kuantum mekaniğine yeni bir yaklaşım yapılabilmesi için işe başlanırken 2. Bölümde çıkarılan (2.27) kütle kabuğu denkleminde $p_0 = E/c$ ifadesi kullanılarak,

$$p_0^2 - p^2 = m^2c^2 \tag{3.1}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin tasvir ettiği geometri; iki boyutlu uzayda bir boyutlu eğriliği sabit bir eğridir. Dolayısıyla (1+1) boyutta (3.1) denklemi bir boyutlu öklidyen olmayan geometriyi (Lobachevsky uzayını) temsil eder.Yazılan (3.1) denkleminin tasvir edilmesi için hiperpolar koordinat sisteminde yazılan

$$p_0 = mc\cosh\chi \tag{3.2}$$

$$p = mc\sinh\chi \tag{3.3}$$

ifadelerinin kullanılması doğaldır(Mir-Kasimov ve Oğuz,1999). Momentumların yazılmasında kullanılan hiperbolik fonksiyonların eksponansiyel eşitleri ise

$$\cosh\chi = \frac{e^{\chi} + e^{-\chi}}{2} \tag{3.4-a}$$

$$\sinh\chi = \frac{e^{\chi} - e^{-\chi}}{2} \tag{3.4-b}$$

ile verilmektedir. Önerilen momentum takımı matris formunda yazılmak istendiğinde, parçacığın da hareket etmediği düşünülürse (yani sadece durgun kütle enerjisine sahip olduğu düşünülürse)

$$\begin{pmatrix} \cosh\chi & \sinh\chi \\ \sinh\chi & \cosh\chi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} mc \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc\cosh\chi \\ mc\sinh\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

ifadesine ulaşılır. Lorentz grubunun özellikleri kullanılarak $\begin{pmatrix} \cosh\chi & \sinh\chi \\ \sinh\chi & \cosh\chi \end{pmatrix}$ matrisinin (3.5) denkleminin tek çözümü olduğu da gösterilebilir. Boyutsuz χ argümanının (bu terim İngilizce'de rapidity olarak geçmektedir.) daha yakından incelenmesi için bazı basit hesaplamalar yapılarak

$$\chi = \ln\left(\frac{p_0 + p}{mc}\right) = -\ln\left(\frac{p_0 - p}{mc}\right) \tag{3.6}$$

ifadeleri elde edilir. Yeni yaklaşımın, standart kuantum mekaniği ile uyumlu olması istenildiğinden; dalga fonksiyonu olarak seçilebilecek ifade için, rölativistik olmayan Schrödinger dalga denkleminin çözümü olan düzlem dalganın incelenmesiyle işe başlanması uygun olacaktır. Bir boyutlu zamandan bağımsız Schrödinger dalga denkleminin çözümü

$$\psi(x) = e^{ip.x/\hbar} \tag{3.7}$$

düzlem dalgasıdır. Eğer x koordinatı sabit bir a büyüklüğü kadar ötelenirse, bu öteleme

$$e^{i\frac{p.(x+a)}{\hbar}} = e^{i\frac{p.a}{\hbar}} e^{i\frac{p.x}{\hbar}} = T_a e^{i\frac{p.x}{\hbar}} \tag{3.8}$$

olarak yazılır. Eğer bir boyutlu momentum vektörü olan p ötelenmek istenirse bu öteleme

$$e^{i\frac{p.x}{\hbar}} \to e^{i\frac{p'.x}{\hbar}} = e^{i\frac{(p+q).x}{\hbar}} = e^{i\frac{q.x}{\hbar}} e^{i\frac{p.x}{\hbar}} = T_q e^{i\frac{p.x}{\hbar}} \tag{3.9}$$

ifadesi ile gösterilir. Bu ifadede uzay, bir boyutlu Öklid momentum uzayı izometrisi (düz hat izometri ya da öteleme grubu)'dır. Bu durumda yukarıdaki öteleme için $e^{i\frac{p.x}{\hbar}}$ gösterim uzayında bir vektördür. Öteleme grubu komütatif bir grup olduğundan bu gruba ait (3.9) ile verilen T_q gösterimleri bir boyutludur.

Rölativistik yaklaşımda (3.5) denklemiyle ifade edilen sisteme Lorentz dönüşümü yapılmak istenirse (3.5) denklemi, Lorentz dönüşümlerinin matris gösterimi ile çarpılarak

$$\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} mc\cosh\chi \\ mc\sinh\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc\cosh(\chi+\alpha) \\ mc\sinh(\chi+\alpha) \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

ifadesi elde edilir. Lorentz dönüşümü sayesinde χ argümanı α kadar ötelenmiştir. Öte yandan (3.1) denkleminde χ argümanı yukarıda yapılan Lorentz dönüşümüne göre α kadar ötelenirse, yine $m^2c^2\left(\cosh^2(\chi+\alpha)-\sinh^2(\chi+\alpha)\right)=m^2c^2$ bulunacağından; (3.1) denkleminin Lorentz dönüşümlerine karşı invaryant olduğu söylenebilir. O halde (3.9) denklemine göre rölativistik olmayan kuantum mekaniğinde bir boyutlu öteleme dönüşümlerinin rölativistik karşılığı, Lorentz dönüşümüdür. Rölativistik yaklaşım da bir boyutlu olduğu için Lorentz grubu yine komütatif kalacaktır. Buradan da standart kuantum mekaniğinde serbest parçacığa ait Schrödinger denkleminin çözümü olan düzlem dalga ile rölativistik yaklaşımda önerilecek düzlem dalga arasında bir bağlantı olmalıdır sonucuna varılabilir. Rölativistik yaklaşımda (3.10) denklemindeki argümanların toplanması (3.9) denklemindeki momentumların toplanmasına karşılık gelir. Standart kuantum mekaniğine ait düzlem dalgaya karşılık rölativistik yaklaşımda argümanların toplanmasını ve (3.1) rölativistik enerji ve momentum arasındaki ilişkiyi sağlayabilecek bir dalga fonksiyonu bulunabilir mi sorusunun cevabı olarak önerilen çözüm

$$\langle x|p\rangle = e^{i\frac{mc}{\hbar}x\chi} \tag{3.11}$$

şeklinde olabilir. Bu ifadeyle önerilen dalga fonksiyonu Lorentz grubunu temsil eder. Bununla birlikte önerilen dalga fonksiyonunun $e^{ix\chi}$ şeklinde seçilememesinin sebebi ise bu şekilde yazıldığında eksponansiyel ifadenin üssünün x'den kaynaklanan bir uzunluk boyutuna sahip olmasıdır. Eksponansiyel ifadenin üssünün boyutsuz olması gerektiği için; üsse $\frac{mc}{\hbar}$ gibi bir ifade çarpan olarak eklenmelidir. Bu Compton dalga boyunun tersidir ve bu çarpanın eklenmesiyle eksponansiyel ifadenin üssü boyutsuz hale gelmiş olur.

Şimdi $e^{i\frac{mc}{\hbar}x\chi}$ ifadesinin doğruluğunun sınanması amacıyla rölativistik olmayan limit (yani $\frac{p}{mc}\langle\langle 1$ limiti) incelemesi yapılabilir ve bu limitte önerilen dalga fonksiyonunun; (3.7) ile verilen standart düzlem dalgasına eşit olduğu görülebilir. Bunun için de (3.6) formülündeki χ ve (3.1) denkleminden p_0'ın rölativistik olmayan limitteki eşiti olan $mc+\frac{p^2}{2mc}$ ifadesi (3.11)'de yerine yazılırsa

$$e^{i\frac{mc}{\hbar}x\chi}=e^{i\frac{mc}{\hbar}\ln\left(\frac{p_0+p}{mc}\right)x}=e^{i\frac{mc}{\hbar}\ln\left(1+\frac{p}{mc}+\frac{p^2}{2m^2c^2}\right)x}\approx e^{i\frac{mc}{\hbar}\left(\frac{p}{mc}+\frac{p^2}{2m^2c^2}\right)x}$$

ara sonucuna ulaşılır. $\frac{p}{mc}\langle\langle 1$ olduğundan

$$e^{i\frac{mc}{\hbar}x\chi}\approx e^{i\frac{mc}{\hbar}\left(\frac{p}{mc}\right)x}=e^{i\frac{p.x}{\hbar}} \tag{3.12}$$

elde edilir. Compton dalga boyu $\lambda=\frac{\hbar}{mc}$ olduğuna göre rölativistik düzlem dalga $e^{ix\chi/\lambda}$ şeklinde ifade edilebilir. Bu rölativistik düzlem dalganın momentumlar cinsinden yazılışı ise (3.4-a) ve (3.4-b) formüllerinin kullanılmasıyla

$$\langle x|p\rangle=\left(\frac{p_0-p}{mc}\right)^{-ix/\lambda}=e^{ix\chi/\lambda} \tag{3.13}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Dalga fonksiyonu $\langle x|p\rangle$'nin ardından $\langle p|x\rangle$ ifadesi de

$$\langle p|x\rangle=\langle x|p\rangle^{*} \tag{3.14}$$

şeklinde tanımlanarak bir boyutlu dalga fonksiyonu için tamlık ve diklik koşulları

$$d\Omega_p=\frac{dp}{p_0}=\frac{d\sinh\chi}{\cosh\chi}=d\chi \tag{3.15}$$

bir boyutlu invaryant hacim elemanı olmak üzere

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\langle x|p\rangle d\Omega_p\langle p|x'\rangle=\delta(x-x') \tag{3.16}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\langle p|x\rangle dx\,\langle x|p'\rangle=\delta(\chi-\chi') \tag{3.17}$$

ifadeleriyle tanımlıdır.

3.1.2 Rölativistik konfigürasyon x-uzayında momentum ve enerji operatörleri

Rölativistik konfigürasyon uzayı kavramı, serbest rölativistik hareketin standart kuantum mekaniğindeki $e^{ipx/\hbar}$ düzlem dalgası ile değil de; Lorentz grubunu temsil eden $e^{ix\chi/\lambda}$ düzlem dalgası ile temsil edilebileceği fikrine dayanır. Standart kuantum mekaniğinin düzlem dalgasında ve rölativistik yaklaşımda önerilen düzlem dalgada yer alan x aynı karakterle yazılmış olsa bile aslında birbirlerinden tamamen farklıdır. Rölativistik yaklaşımın düzlem dalgasında yer alan x rölativistik konum operatörüdür. Buna göre rölativistik yaklaşımda momentumların operatör gösterimleri için

$$\hat{p}_0=mc\cosh\left(i\lambda\frac{d}{dx}\right) \tag{3.18}$$

$$\hat{p}=-mc\sinh\left(i\lambda\frac{d}{dx}\right) \tag{3.19}$$

ifadeleri önerilebilir (Mir-Kasimov ve Oğuz,1999). Önerilen $\hat{p}_0$ ve $\hat{p}$ operatör gösterimleri, bu ifadelerinin eksponansiyel eşitleri düşünülecek olunursa; $e^{\pm i\lambda\frac{d}{dx}}$ şeklinde eksponansiyel ifadelerden oluşmaktadır. Bu ifadeler ileride sonlu fark operatör olarak isimlendirileceklerdir.

Her hangi bir $f(y)$ fonksiyonuna $e^{a\frac{d}{dy}}$ operatörünün etki ettirilmesi sonucunda $f(y)$ fonksiyonunun nasıl değiştiği (3.22) formülünde verilmektedir. Bu operatörlere ilişkin ayrıntılı açıklama ve matematiksel açıdan inceleme ise, 3.1.5 ve 3.2 kısımlarında verilmektedir. Şimdi (3.18) ve (3.19) ile verilen momentum operatörlerinin öz değer denklemlerini sağlayıp sağlamadıklarının incelemesine geçilebilir. Bu inceleme için işlemlerde kolaylık sağlaması açısından $\hbar=c=m=1$ birim sistemine geçilebilir. Seçilen birim sistemine göre (3.13), (3.18) ve (3.19) ifadeleri düzenlenerek; işlemlere geçilebilir. Buna göre $\hat{p}_0$ için öz değer denklemini sağlaması için,

$$\hat{p}_0 e^{ix\chi} = \cosh\left(i\frac{d}{dx}\right)e^{ix\chi} = \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{d}{dx}} + e^{-i\frac{d}{dx}}\right)e^{ix\chi} = \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{d}{dx}}e^{ix\chi} + e^{-i\frac{d}{dx}}e^{ix\chi}\right) \tag{3.20}$$

ifadesinin p_0'a eşit olması gerekir. Burada üsleri operatör olan eksponansiyel ifadelerin fonksiyonlara nasıl etki edeceğinin görülmesi için eksponansiyel ifadelerin Taylor serisine açılması gerekmektedir. Genel olarak $e^{a\frac{d}{dy}}$ ile verilen bir eksponansiyel ifadenin Taylor serisine açılımı

$$e^{a\frac{d}{dy}} = \left(1 + a\frac{d}{dy} + \frac{a^2}{2!}\frac{d^2}{dy^2} + \ldots + \frac{a^n}{n!}\frac{d^n}{dy^n} + \ldots\right) \tag{3.21}$$

şeklindedir. Bir $f(y)$ fonksiyonuna (3.21) ile verilen ifade etki ettirildiğinde

$$e^{a\frac{d}{dy}}f(y) = \left(f(y) + a\frac{d}{dy}f(y) + \frac{a^2}{2!}\frac{d^2}{dy^2}f(y) + \ldots + \frac{a^n}{n!}\frac{d^n}{dy^n}f(y) + \ldots\right) = f(y+a) \tag{3.22}$$

elde edilir. Buna göre (3.22) ifadesinden, $e^{\pm i\frac{d}{dx}}$ sonlu fark operatörünün sadece x'e etki ettiği ve fonksiyonda x'i $\pm i$ kadar değiştireceği sonucuna varılır. Önerilen $\hat{p}_0$ operatörünün özdeğer denklemini sağladığı (3.22) denkleminin (3.20)'de yerine konulmasıyla

$$\hat{p}_0 e^{ix\chi} = \frac{1}{2}\left(e^{i(x+i)\chi} + e^{i(x-i)\chi}\right) = \left(\frac{e^{-\chi} + e^{\chi}}{2}\right)e^{ix\chi} = \cosh\chi\, e^{ix\chi} = p_0\, e^{ix\chi} \tag{3.23}$$

hesabında görülmektedir. Aynı ispat $\hat{p}$ operatörü için yapıldığında

$$\hat{p}e^{ix\chi} = \sinh\chi\, e^{ix\chi} = p\, e^{ix\chi} \tag{3.24}$$

şeklinde özdeğer denkleminin sağlandığı görülebilir. Önerilen operatörler özdeğer denklemlerini sağladıklarından; bu operatörlerin standart kuantum mekaniğinin ikinci varsayımını gerçekledikleri görülmektedir. Bu işlemlerden sonra şu sonuçlar verilebilir:

1) Önerilen (3.18) ve (3.19) operatörleri rölativistik enerji ve momentum operatörleridir; çünkü rölativistik düzlem dalgaya bu operatörler etki ettirilince (3.1) denklemini sağlayan rölativistik enerji ve momentum özdeğerlerini vermektedirler.

2) Bu durumda önerilen düzlem dalganın rölativistik serbest parçacığın hareketini tasvir ettiği sonucuna varılabilir.

Şimdi $\hat{p}$ operatörünün rölativistik olmayan limitinin incelenmesine geçilebilir. Rölativistik olmayan limit hesabı için bir $f(x)$ fonksiyonuna (3.19) ile verilen $\hat{p}$ operatörü etki ettirilerek;

$$\hat{p} = -mc\sinh\left(i\frac{\hbar}{mc}\frac{d}{dx}\right)f(x) = -mc\left(\frac{e^{i\frac{\hbar}{mc}\frac{d}{dx}} - e^{-i\frac{\hbar}{mc}\frac{d}{dx}}}{2}\right)f(x)$$

işlemi yapılmalıdır. Bu hesaplamada $f(x)$ fonksiyonuna sonlu fark operatörleri etki ettirildiğinde (3.22) ifadesi kullanılırsa

$$\hat{p}f(x) = -\frac{mc}{2}\left[f\left(x + i\frac{\hbar}{mc}\right) - f\left(x - i\frac{\hbar}{mc}\right)\right]$$

elde edilir. Bu ifadeler Taylor serisine açılırlarsa

$$\hat{p}f(x) = -\frac{mc}{2}\left[\left(f(x) + i\frac{\hbar}{mc}\frac{df}{dx} + \frac{1}{2!}\left(i\frac{\hbar}{mc}\right)^2\frac{d^2f}{dx^2} + \ldots\right) - \left(f(x) - i\frac{\hbar}{mc}\frac{df}{dx} + \frac{1}{2!}\left(-i\frac{\hbar}{mc}\right)^2\frac{d^2f}{dx^2} + \ldots\right)\right]$$

elde edilir. Rölativistik olmayan limitte $x >> \lambda = \frac{\hbar}{mc}$ olduğundan yukarıdaki iki seride de gerekli terimler ihmal edilirse kalan ifadenin (2.6-a) denklemi uyarınca bir boyutlu standart kuantum mekaniksel momentum operatörü olduğu

$$\hat{p}f(x) = -\frac{mc}{2}\left[2i\frac{\hbar}{mc}\frac{df}{dx}\right] = -i\hbar\frac{df}{dx} = \hat{p}_{standart}f(x) \qquad (3.25)$$

işleminden görülmektedir. Bu da önerilen momentum operatörünün rölativistik kuantum mekaniğinin bir operatörü olduğunu gösterir.

Rölativistik yaklaşımda enerji öz değeri olan E ifadesi $p_0 = \frac{E}{c}$ formülü ve (3.2) denklemi kullanılarak

$$E = p_0 c = mc^2 \cosh \chi \tag{3.26}$$

şeklinde elde edilir. Bu E öz değerine karşılık gelen $\hat{H}_0$ operatörü de

$$\hat{H}_0 = mc^2 \cosh\left(i\lambda \frac{d}{dx}\right) \tag{3.27}$$

ifadesi ile tanımlıdır (Mir-Kasimov ve Oğuz,1999). Enerji operatörü $\hat{H}_0$'ın öz değer denklemini sağladığı $\hbar = m = c = 1$ birim sistemindeki

$$\hat{H}_0 e^{ix\chi} = \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{d}{dx}} + e^{-i\frac{d}{dx}}\right)e^{ix\chi} = \frac{1}{2}\left(e^{i(x+i)\chi} + e^{i(x-i)\chi}\right) = \cosh\chi\, e^{ix\chi} = E\, e^{ix\chi} \tag{3.28}$$

hesabından görülmektedir. Son olarak bir $f(x)$ fonksiyonuna $\hat{H}_0$ operatörü etki ettirilerek rölativistik olmayan limit hesabına geçilebilir. Buna göre daha önceki rölativistik olmayan limit hesaplarındaki benzeri işlemler tekrarlanarak

$$\hat{H}_0 f(x) = mc^2 \cosh\left(i\frac{\hbar}{mc}\frac{d}{dx}\right)f(x) = \frac{mc^2}{2}\left(f\left(x + i\frac{\hbar}{mc}\right) + f\left(x - i\frac{\hbar}{mc}\right)\right) \tag{3.29}$$

ifadesi elde edilir. Burada ifadeler Taylor serisine açılırsa

$$\hat{H}_0 f(x) = \frac{mc^2}{2}\left\{\left(f(x) + i\frac{\hbar}{mc}\frac{df}{dx} + \frac{1}{2!}\left(i\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + \ldots\right) + \left(f(x) - i\frac{\hbar}{mc}\frac{df}{dx} + \frac{1}{2!}\left(-i\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + \ldots\right)\right\}$$

ifadesine ulaşılır. Rölativistik olmayan limitte $x >> \lambda = \frac{\hbar}{mc}$ olduğu bilgisinden yola çıkılarak yukarıdaki iki serilerin toplamında gerekli terimler ihmal edilirse;

$$\hat{H}_0 f(x) = \frac{mc^2}{2}\left\{2f(x) + \left(-\frac{\hbar^2}{m^2c^2}\right)\frac{d^2 f}{dx^2}\right\} = \left\{mc^2 + \frac{\hat{p}^2}{2m}\right\}f(x) \tag{3.30}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi elde edilen ifadede ilk terim durgun haldeki parçacığın iç enerjisi ikinci terim ise rölativistik olmayan enerji ifadesidir.

Tüm bu işlemlerin sonunda önerilen operatörlerin standart kuantum mekaniği ile uyumlu olarak öz değer denklemlerini sağladıkları sonucuna varılabilir.

3.1.3 Sonlu fark Schrödinger dalga denklemi

Bu başlık altında amaçlanan, serbest parçacığa ait sonlu fark Schrödinger dalga denklemini standart kuantum mekaniğindeki Schrödinger denklemi formunda yazmak yani, rölativistik yaklaşımın dalga denklemi olarak yine standart kuantum mekaniği ile uyumlu bir öneri getirilmesidir. Serbest parçacığa ait rölativistik Schrödinger dalga denklemi

$$\hat{H}_0\langle x|p\rangle = p_0 c\langle x|p\rangle \tag{3.31}$$

ifadesiyle tanımlıdır. Bu denklemde $\hat{H}_0$, $\hat{p}_0$ ve $\langle x|p\rangle$'nin sırasıyla açık ifadeleri olan (3.27), (3.2) ve (3.13) formülleri (3.31) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\left[mc^2\cosh\left(i\lambda\frac{d}{dx}\right) - mc^2\cosh\chi\right]e^{ix\chi/\lambda} = 0 \tag{3.32}$$

ifadesine ulaşılır. Bu denklemi serbest parçacığın rölativistik olmayan $\left(\frac{\hat{p}^2}{2m}\right)\psi(x) = E\psi(x)$ Schrödinger denkleminden ayırt edilemeyecek bir formda yazmak yani yaklaşımın amacına ulaşmak mümkündür. Bu amaca yönelik olarak ilk önce rölativistik kinetik enerji operatörünün önerilmesiyle işlemlere başlanmalıdır. Rölativistik kinetik enerji $E - mc^2$ şeklinde yazılabilir. O halde rölativistik kinetik enerji operatörü $\hat{h}_0$ için buna benzer olarak

$$\hat{h}_0 = \hat{H}_0 - mc^2 \tag{3.33}$$

ifadesi yazılabilir. Bu denklemde (3.27) ifadesi kullanıldığında, $\hat{h}_0$ operatörü için

$$\hat{h}_0 = mc^2\cosh\left(i\lambda\frac{d}{dx}\right) - mc^2 = mc^2\left(\cosh\left(i\lambda\frac{d}{dx}\right) - 1\right) \tag{3.34}$$

olarak yazılabilir. Burada hiperbolik fonksiyonlar arasındaki

$$\cosh\chi = 1 + 2\sinh^2\frac{\chi}{2} \tag{3.35}$$

bağıntısı kullanılırsa; rölativistik kinetik enerji operatörü için

$$\hat{h}_0 = 2mc^2\sinh^2\left(\frac{i\lambda}{2}\frac{d}{dx}\right) \tag{3.36}$$

ifadesine ulaşılır. Standart kuantum mekaniğinde kinetik enerji (2.5) denklemi uyarınca momentum cinsinden yazılabileceği gibi, rölativistik yaklaşımda da $\hat{h}_0$ operatörü bir rölativistik kinetik momentum operatörü cinsinden yazılabilir. Bu durumda $\hat{k}$ rölativistik kinetik momentum operatörü olmak üzere, rölativistik kinetik enerji operatörü

$$\hat{h}_0 = \frac{\hat{k}^2}{2m} \tag{3.37}$$

ifadesiyle tanımlanabilir. Bu durumda $\hat{k}^2$ için

$$\hat{k}^2 = 2m\hat{h}_0 = 4m^2c^2\sinh^2\left(\frac{i\lambda}{2}\frac{d}{dx}\right) \tag{3.38}$$

ifadesine gelinir. Burada $\hat{k}$ operatörü için (3.38) denkleminin negatif kökünün seçilmesi uygun olacaktır. Bu seçimin sebebi bu operatörün rölativistik olmayan limitinin incelendiği (3.42) formülüyle verilmektedir. Bu durumda $\hat{k}$ operatörüne karşılık olan k özdeğeri ise

$$k = 2mc\sinh\frac{\chi}{2} \tag{3.39}$$

şeklindedir. Kinetik momentum operatörü

$$\hat{k} = -2mc\sinh\left(\frac{i\lambda}{2}\frac{d}{dx}\right) \tag{3.40}$$

olarak seçildiğinde $\hat{k}$ operatörünün öz değer denklemi ise

$$\hat{k}\langle x|p\rangle = 2mc\sinh\frac{\chi}{2}e^{ix\chi/\lambda} = k\langle x|p\rangle \tag{3.41}$$

şeklindedir. Yukarıda (3.40) formülü ile verilen operatöre kinetik momentum operatörü adının verilmesinin nedeni, rölativistik olmayan limitinin

$$\begin{aligned}\hat{k}f(x) &= -2mc\sinh\left(\frac{i\lambda}{2}\frac{d}{dx}\right)f(x) = -2mc\left[f\left(x+\frac{i\lambda}{2}\right)-f\left(x-\frac{i\lambda}{2}\right)\right] \\ &= -2mc\left\{\left[f(x)+\frac{i\lambda}{2}\frac{df}{dx}+\cdots\right]-\left[f(x)-\frac{i\lambda}{2}\frac{df}{dx}+\cdots\right]\right\} = -i\hbar\frac{df}{dx}\end{aligned} \tag{3.42}$$

işleminden de görüleceği üzere standart kuantum mekaniğinin momentum operatörüne eşit oluşudur. Bu durumda rölativistik serbest parçacığa ait (3.32) bir boyutlu sonlu fark Schrödinger dalga denklemi standart kuantum mekaniğindeki Schrödinger dalga denklemi formunda

$$\left(\frac{\hat{k}^2}{2m}\right)\psi(x) = \frac{k^2}{2m}\psi(x) \tag{3.43-a}$$

olarak yazılabilir. Rölativistik parçacık bir potansiyel alanı etkisi altında hareket ediyorsa, $\hat{h}$ rölativistik Hamilton operatörü ve e bu operatöre karşılık gelen enerji öz değeri olmak üzere sonlu fark Schrödinger denklemi

$$\hat{h}\psi(x) = \left(\frac{\hat{k}^2}{2m}+V(x)\right)\psi(x) = e\psi(x) \tag{3.43-b}$$

şeklinde yazılabilir (Mir-Kasimov ve Oğuz, 1999).

3.1.4 Sonlu fark operatörlerin hermitselliği

Standart kuantum mekaniğinin temel varsayımlarından ilki, her bir fiziksel gözlenebilire karşılık hermitsel bir operatör olmasıdır. Temelleri verilmeye çalışılan yeni rölativistik yaklaşımda aynı varsayımın geçerli olduğu iki yöntem kullanılarak gösterilebilir: $\hat{A}$ bir operatörü temsil etmek üzere bra-ket notasyonunda

$$\left\langle \psi(x) \middle| \hat{A}\phi(x) \right\rangle = \left\langle \hat{A}\psi(x) \middle| \phi(x) \right\rangle \tag{3.44}$$

koşulu sağlanıyorsa; $\hat{A}$ operatörü hermitsel bir operatördür. Rölativistik yaklaşımda önerilen momentum ve enerji operatörlerinin eksponansiyel ifadelerinde $e^{\pm i\frac{d}{dx}}$ sonlu fark operatörleri kullanılmıştır. Bu operatörlerden $\hat{A} = e^{i\frac{d}{dx}}$ operatörünün (3.44) koşulunu sağlayıp sağlamadığı kontrol edilerek hermitsel olup olmadığı gösterilebilir. Buna göre (3.44)'de $e^{i\frac{d}{dx}}$ operatörünün Taylor açılımı olan $e^{i\frac{d}{dx}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}$ ifadesi kullanılırsa

$$\left\langle \psi(x) \middle| \hat{A}\phi(x) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* e^{i\frac{d}{dx}} \phi \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\phi \, dx$$

integrali elde edilir. Bu integrale kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\left\langle \psi(x) \middle| \hat{A}\phi(x) \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{n!} \left\{ \psi^* \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\phi \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\phi \frac{d\psi^*}{dx} dx \right\} \tag{3.45-a}$$

elde edilir. Standart kuantum mekaniğinde fonksiyonların sadece kendilerinin $+\infty$ ve $-\infty$'da sıfır olmaları yeterliydi. Rölativistik kuantum mekaniğinde dalga fonksiyonları sonsuzlukta, regüler ve sıfıra eşit olmalıdır. Bu koşuldan ötürü (3.45-a) denkleminin sağ tarafındaki ilk terim sıfıra gitmektedir. Kalan ifadeye bir kez daha kısmi integrasyon uygulandığında

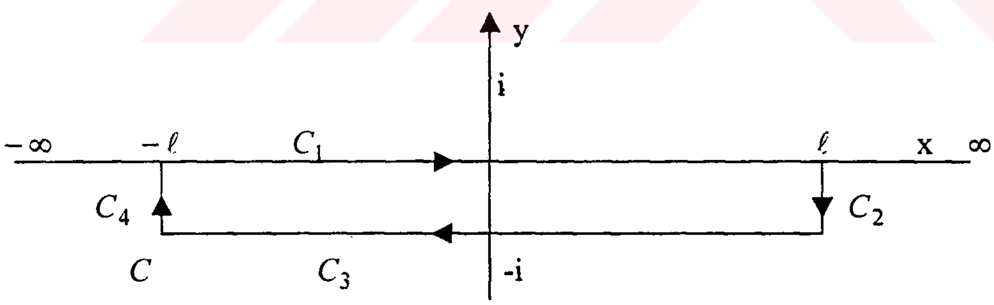
$$\left\langle \psi(x) \middle| \hat{A}\phi(x) \right\rangle = -\frac{d\psi^*}{dx}\frac{d^{n-2}\phi}{dx^{n-2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-2}\phi}{dx^{n-2}}\frac{d^2\psi^*}{dx^2} dx \tag{3.45-b}$$

ifadesine ulaşılır. Burada $\psi(x)$ ve $\phi(x)$ fonksiyonları için $\frac{d^k\psi^*}{dx^k}\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}\phi \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$ genel koşulunun sağlanması gereği gündeme gelmektedir. Bu koşulun sağlanması halinde (3.45-b) ifadesinin sağ tarafındaki ilk terim sıfıra gitmektedir. Kalan ifadeye (n-2) defa kısmi integrasyon yöntemi uygulandığında

$$\begin{aligned}\langle \psi(x)|\hat{A}\phi(x)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(i)^n}{n!}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^n\psi^*}{dx^n}\phi\,dx\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{d}{dx}}\psi^*\phi\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}(e^{i\frac{d}{dx}}\psi)^*\phi\,dx \\ &= \langle \hat{A}\psi(x)|\phi(x)\rangle\end{aligned} \tag{3.46}$$

elde edilir. Verilen (3.46) denklemine göre sonlu fark operatörün başlangıçta $\phi(x)$ fonksiyonuna olan etkisi; $\psi(x)$ fonksiyonuna geçmiştir. Elde edilen (3.46) ifadesinden sonlu fark operatörünün hermitsel olduğu sonucuna varılabilir.

Sonlu fark operatörünün hermitsel olduğu ikinci bir yöntemle de gösterilebilir. Bu yöntemde sonlu fark operatörün x'e bağlı bir fonksiyona etkisine ait $e^{i\frac{d}{dx}}\psi(x)=\psi(x+i)$ özelliği kullanılmaktadır. Buna göre $\hat{A}=e^{i\frac{d}{dx}}$ olmak üzere; $\langle\phi(x)|\hat{A}\psi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(x)\psi(x+i)dx$ ile ifade edilen integralin z kompleks düzleminde hesaplanması istenirse önceki metotta kullanılan türevlere ait şartın yerine; kompleks düzlemde fonksiyonların sonsuzlukta $-1\le \mathrm{Im}\,z\le 0$ aralığında sıfır olmaları şartı talep edilir. İntegralinin hesabı için Cauchy teoremi kullanılabilir. Cauchy teoreminin uygulanabilmesi için öyle bir C konturu seçilmelidir ki; bu kontur üzerinde ve bu konturun çevrelediği bölgede çalışılan fonksiyonlar analitik olmalıdır. Buna göre C konturu dört parçadan oluşmak üzere



Şekil 3.1 Konturun şekli

Şekil 3.1'deki gibi olmalıdır. Cauchy teoremine göre $\oint_C \phi^*(z)\psi(z+i)dz=0$ olacaktır. Şekil 3.1'deki dört parçadan oluşan C kapalı konturuna göre $\oint_C \phi^*(z)\psi(z+i)dz=0$ integrali

$$\int_{-\ell}^{\ell}\phi^*(z)\psi(z+i)dz+\int_{\ell}^{\ell-i}\phi^*(z)\psi(z+i)dz+\int_{\ell-i}^{-\ell-i}\phi^*(z)\psi(z+i)dz+\int_{-\ell-i}^{-\ell}\phi^*(z)\psi(z+i)dz=0 \qquad (3.47)$$

şeklinde dört integrale ayrılabilir. Bu durumda $\ell \to \infty$ olduğunda (3.47) ifadesindeki ikinci ve dördüncü integraller sıfıra giderler; çünkü C_2 eğrisi üzerindeki noktalar $z=\ell-iy$ olduğundan $\ell \to \infty$ olduğunda $\left|\phi^*(z)\right| \to 0$ ve C_4 eğrisi üzerindeki noktalar $z=-\ell-iy$ olduğundan yine $\ell \to \infty$ olduğunda $\left|\phi^*(z)\right| \to 0$ olur. C_1 eğrisi üzerindeki noktalar için $z=x$, $dz=dx$ ve C_3 eğrisi üzerindeki noktalar için $z=x-i$, $dz=dx$ olduğuna göre $\ell \to \infty$ limitinde (3.47) ifadesi, sonlu fark operatörlerinin özellikleri ile bra-ket notasyonu kullanılarak

$$\begin{gathered}\int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(x)\,\psi(x+i)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(x-i)\,\psi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i\frac{d}{dx}}\phi(x)\right)^*\psi(x)dx\\ \left\langle\phi(x)\middle|e^{i\frac{d}{dx}}\psi(x)\right\rangle=\left\langle e^{i\frac{d}{dx}}\phi(x)\middle|\psi(x)\right\rangle\end{gathered} \qquad (3.48)$$

denklemine dönüşür. Buna göre $\hat{A}=e^{i\frac{d}{dx}}$ operatörü için (3.44) koşulu sağlanarak $\hat{A}$ operatörünün hermitsel olduğu gösterilmiştir. Sonuç olarak ilk yöntemle yapılan ispatta sonsuz kez kısmi integral alma işlemi, rölativistik yaklaşımda kompleks düzlemdeki kontur integrali hesabıyla karşılanmaktadır. İki farklı yöntemle incelenen $e^{i\frac{d}{dx}}$ operatörü hermitsel olduğuna göre; α_n reel olmak üzere $e^{i\frac{d}{dx}}$'in fonksiyonu olan $f(e^{i\frac{d}{dx}})=\sum_n \alpha_n\left(e^{i\frac{d}{dx}}\right)^n$ şeklindeki herhangi bir fonksiyon da hermitseldir.

3.1.5 Sonlu fark operatörü ile adi türev operatörü arasındaki ilişki

Standart kuantum mekaniğinden rölativistik kuantum mekaniğine geçerken 3. Bölümün ilk kısmında tanımlanan ve bu bölümde incelenecek olan sonlu fark operatörleri kullanmıştı. Bu kısımda ise bu operatörlere matematiksel açıdan yaklaşılarak inceleme yapılması hedeflenmektedir. Önerilen rölativistik yaklaşımın temelinde standart kuantum mekaniği ile uyum olduğundan; bu uyumun standart kuantum mekaniğinin adi türev operatörü ile rölativistik yaklaşımın sonlu fark operatörü arasında da devam etmesinin beklenmesi doğaldır. Bu uyumun görülebilmesi için adi türev operatörünün

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \tag{3.49}$$

ile tanımlı ifadesinden başlanması uygun olacaktır. Bu ifade ile $e^{\delta \frac{d}{dx}} f(x) = f(x+\delta)$ ifadesi arasındaki benzerlikten faydalanılarak (3.49) formülü

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \left(\frac{e^{\delta \frac{d}{dx}} - 1}{\delta} \right) f(x) \tag{3.50}$$

şeklinde yazılabilir. Adi türev operatörüne ait (3.49) tanımı kompleks değişkenler teorisinde de geçerli bir tanımlama olduğundan δ ifadesi $\delta = -i\lambda$ şeklinde kompleks bir sayı olarak seçilirse; (3.50) formülündeki parantez içindeki ifade için

$$\hat{\Delta} = \frac{e^{-i\lambda \frac{d}{dx}} - 1}{-i\lambda} \tag{3.51}$$

şeklinde bir operatör tanımlanabilir. Bu operatör ***sonlu fark operatörü***'dür. Bu operatörün rölativistik olmayan limitinin, adi türev operatörü olduğu; dolayısıyla standart kuantum mekaniğinin adi türev operatörü ile rölativistik yaklaşımın sonlu fark operatörü arasında bir benzerlik olduğu aşağıda yapılacak olan hesaptan da görülebilir. Bu ispat için bir $f(x)$ fonksiyonuna (3.51) ile verilen sonlu fark operatörü etki ettirilerek rölativistik olmayan limit hesabına geçilebilir.

$$\hat{\Delta} f(x) = \frac{i}{\lambda} \left(e^{-i\lambda \frac{d}{dx}} - 1 \right) f(x) = \frac{i}{\lambda} \left(e^{-i\lambda \frac{d}{dx}} f(x) - f(x) \right)$$

Bu ifadede (3.22) formülü kullanılıp ardından Taylor seri açılımı kullanılırsa

$$\hat{\Delta} f(x) = \frac{i}{\lambda}\left[\left(f(x) + (-i\lambda)\frac{df(x)}{dx} + \cdots\right) - f(x)\right]$$

elde edilir. Burada rölativistik olmayan limitin $x >> \lambda = \dfrac{\hbar}{mc}$ koşulu uygulanırsa; sonlu fark operatörünün rölativistik olmayan limiti olarak

$$\hat{\Delta} f(x) = \frac{i}{\lambda}\left(-i\lambda\frac{df(x)}{dx}\right) = \frac{df(x)}{dx} \tag{3.52}$$

işleminden de görüleceği gibi adi türev operatörü ile karşılaşılır. Sonlu fark operatörünün $\hbar = m = c = 1$ birim sistemindeki karşılığı ise

$$\hat{\Delta} = i\left(e^{-i\frac{d}{dx}} - 1\right) \tag{3.53}$$

olarak yazılabilir. Ayrıca adi türev operatörü ile sonlu fark operatörü arasındaki bu benzerlik, doğal olarak onların türev tabloları arasında da form olarak bir benzerliğin olmasını sağlamaktadır. Bu konuya türev tablosunun ayrıntılı olarak çıkarıldığı kısım 3.2'de değinilecektir. Sonlu fark operatörünün belirlenmesinin ardından adi türev operatörünün

$$\frac{d}{dx}(\psi(x)\phi(x)) = \phi(x)\frac{d}{dx}\psi(x) + \psi(x)\frac{d}{dx}\phi(x) \tag{3.54}$$

ile tanımlı Leibniz kuralının sonlu fark operatörü için nasıl çalıştığının incelenmesi uygun olacaktır. $\psi(x)$ ve $\phi(x)$ fonksiyonlarının çarpımına boyutsuz büyüklükler birim sisteminde (3.53) ile verilen sonlu fark operatörü etki ettirilirse,

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}(\psi(x)\phi(x)) &= i\left(e^{-i\frac{d}{dx}} - 1\right)\psi(x)\phi(x) = i\left(e^{-i\frac{d}{dx}}\psi(x)\phi(x) - \psi(x)\phi(x)\right)\\ &= i\left(\psi(x-i)\phi(x-i) - \psi(x)\phi(x)\right)\end{aligned} \tag{3.55}$$

ara işlemine gelinir. Bu ifadede yer alan $\psi(x-i)$ ifadesi $\hat{\Delta}\psi(x)$ işlemine göre

$$\psi(x-i) = \psi(x) - i\hat{\Delta}\psi(x) \tag{3.56}$$

olarak elde edilir. Bu formül $\phi(x-i)$ için de geçerlidir. Buna göre (3.56) genel ifadesi yardımıyla, (3.55) işleminin sonucu olarak

$$\hat{\Delta}(\psi(x)\phi(x)) = \psi(x)\hat{\Delta}\,\phi(x) + \phi(x)\hat{\Delta}\,\psi(x) - i\left(\hat{\Delta}\,\psi(x)\right).\left(\hat{\Delta}\,\phi(x)\right) \tag{3.57}$$

denklemi elde edilir. Görüldüğü gibi (3.54) Leibniz kuralı, sonlu fark operatörü için geçerliliğini yitirmiştir. Ancak (3.57) ifadesinin rölativistik olmayan limiti yine (3.54) Leibniz kuralını vermektedir. Bu şekilde sonlu fark operatörü hakkında kısa, genel bir matematik bilginin verilmesinin ardından rölativistik yaklaşımda tanımlanmış olan enerji ve momentum operatörlerinin sonlu fark operatörü ve onun kompleks eşleniği yardımıyla yazılabileceği gösterilebilir. $\hbar = m = c = 1$ birim sisteminde enerji ve momentum operatörlerinin yazılması için $\hat{\Delta}$ ve onun kompleks eşleniği olan

$$\hat{\Delta}^* = -i\left(e^{i\frac{d}{dx}} - 1\right) = i\left(1 - e^{i\frac{d}{dx}}\right) \tag{3.58}$$

ifadelerine ihtiyaç vardır. Bu durumda $\hat{p}_0$ ve $\hat{p}$ operatörleri

$$\hat{p} = -\frac{i}{2}\left(\hat{\Delta} + \hat{\Delta}^*\right) \qquad \hat{p}_0 = 1 - \frac{i}{2}\left(\hat{\Delta} - \hat{\Delta}^*\right) \tag{3.59}$$

şeklinde yazılabilir.

3.2 Sonlu Fark Operatörlerin Türev Tablosunu Oluşturma İşlemleri

Sonlu fark operatörle türev tablosu oluşturulurken dikkat edilmesi gereken en temel nokta, yapılacak işlemler sonucu bulanacak ifadelerin; adi türev operatörünün vereceği sonuçları form olarak koruması gereğidir. İşte bu nedenden ötürü ileride bu uyumu sağlayacak düzenlemeler ve yeni tanımlamalar yapılacaktır.

c bir sabit olmak üzere; bu sabitin sonlu fark türevi; (3.53) formülüne göre

$$\hat{\Delta}c = i\left(e^{-i\frac{d}{dx}} - 1\right)c = i\,e^{-i\frac{d}{dx}}c - ic = ic - ic = 0 \tag{3.60}$$

şeklinde adi türevdeki $\frac{d}{dx}c=0$ ifadesiyle uyumlu olarak elde edilir. Yeni rölativistik yaklaşımda sabit kavramı üzerinde bir örnekleme yapılması istenirse; c sabiti i' ye göre periyodik bir fonksiyon olarak düşünülebilir. En sade şekliyle bu sabite bir örnek olarak $c=e^{2\pi x}$ eksponenti verilebilir. Buna göre bu eksponentin sonlu fark türevi

$$\hat{\Delta}e^{2\pi x}=i\left(e^{-i\frac{d}{dx}}-1\right)e^{2\pi x}=i\left(e^{2\pi(x-i)}-e^{2\pi x}\right)=i\,e^{2\pi x}\left(e^{-2\pi i}-1\right)=0 \tag{3.61}$$

olarak elde edilir. O halde rölativistik yaklaşımda sabit kavramı i'ye göre periyodik fonksiyonlar olarak kabul edilebilir. Şimdi de x^n gibi n'nin tam sayı olduğu x'in kuvvetlerinde sonlu fark türevlerin araştırılmasına geçilebilir. Buna göre x için

$$\hat{\Delta}x=i\left(e^{-i\frac{d}{dx}}-1\right)x=i\,e^{-i\frac{d}{dx}}x-ix=i(x-i)-ix=ix+1-ix=1$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç $\frac{d}{dx}x=1$ ifadesiyle uyumludur. Sırasıyla x^2 ve x^3 için aynı işlemler yapılarak n'nin tamsayı olduğu x^n'ler için sonlu fark türev işleminde genelleşmeye gidilmesi çalışması yapılabilir. Buna göre x^2 için

$$\hat{\Delta}x^2=i\left(e^{-i\frac{d}{dx}}-1\right)x^2=i\,e^{-i\frac{d}{dx}}x^2-ix^2=i(x-i)^2-ix^2=i\left(x^2-2xi-1\right)-ix^2=2x-i$$

ifadesi bulunur. Bulunan sonuç $\frac{d}{dx}x^2=2x$ ile uyumlu olmadığından bu uyumu sağlamak amacıyla; $x^{(2)}$ şeklinde yeni bir kuvvet tanımlanabilir ve bu ifadenin sonlu fark türevinin de $\hat{\Delta}x^{(2)}=2x$ koşulunu sağlaması istenebilir. Bu koşulu sağlayabilecek $x^{(2)}$ için

$$x^{(2)}=x^2+\alpha x=x(x+\alpha)$$

şeklinde bir ifade önerilebilir. Bu yeni $x^{(2)}$'nin sonlu fark türevi

$$\hat{\Delta}x^{(2)} = i\left(e^{-i\frac{d}{dx}} - 1\right)x^{(2)} = 2x + \alpha - i$$

şeklindedir. Bu durumda $\alpha = i$ kabulü yapılarak $\hat{\Delta}x^{(2)} = 2x$ sonucu elde edilebilir.

$$x^{(2)} = x(x+i) \tag{3.62}$$

ile verilirken; onun sonlu fark türevi de

$$\hat{\Delta}x^{(2)} = 2x \tag{3.63}$$

şeklinde olur. Ardından öyle bir $x^{(3)}$ tanımlanmalıdır ki; sonlu fark türevi $\hat{\Delta}x^{(3)} = 3x^{(2)} = 3x(x+i) = 3x^2 + 3ix$ olmalıdır. Buna göre $x^{(3)}$

$$x^{(3)} = x^{(2)}(x+\beta) = x(x+i)(x+\beta)$$

şeklinde önerilebilir. Buna göre sonlu fark türevi ise

$$\hat{\Delta}x^{(3)} = i\left(e^{-i\frac{d}{dx}} - 1\right)x^{(3)} = 3x^2 + 2x\beta - ix$$

şeklinde elde edilir. O halde

$$\hat{\Delta}x^{(3)} = 3x^{(2)} \tag{3.64}$$

sonucunun elde edilmesi için $\beta = 2i$ olarak alınırsa

$$x^{(3)} = x(x+i)(x+2i) \tag{3.65}$$

ile tanımlı olur. Benzeri işlemler $x^{(4)}$, $x^{(5)}$, ... için yapılırsa $x^{(n)}$ genel ifadesi için

$$x^{(n)} = x(x+i)(x+2i)\ldots\ldots(x+(n-1)i) \tag{3.66}$$

genel sonucuna ulaşılır. Şimdi de $x^{(n)}$ için sonlu fark türevin adi türevde olduğu gibi $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ formunda olduğu

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}x^{(n)} &= i\left(e^{-i\frac{d}{dx}}-1\right)x^{(n)} = ie^{-i\frac{d}{dx}}x^{(n)} - ix^{(n)} \\ &= i[(x-i)x(x+i)(x+2i)......(x+ni-i-i) - x(x+i)(x+2i)......(x+ni-i)] \\ &= i\{x^{(n-1)}(x-i-x-in+i)\} = ix^{(n-1)}(-in) = n\,x^{(n-1)}\end{aligned} \tag{3.67}$$

işleminden görülebilir. Hipergeometrik serilerin

$$\lambda^{(n)} = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2).......(\lambda+(n-1)) = \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)} \tag{3.68}$$

ile tanımlı ifadesi ile (3.66) denklemindeki $x^{(n)}$ arasındaki uyum dikkat çekicidir.(Bunun daha net görülebilmesi için gama fonksiyonlarının temel tekrarlama bağıntısı olan $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ifadesinden yararlanılabilir (Wang ve Guo,1989).) Eğer $\lambda = -ix$ için (3.68) denklemine göre n'nin ilk birkaç değeri için hesaplama yapılırsa bahsedilen benzerlik

$$\begin{aligned}x^{(1)} &= i\frac{\Gamma(-ix+1)}{\Gamma(-ix)} = i\frac{(-ix)\Gamma(-ix)}{\Gamma(-ix)} = x \\ x^{(2)} &= i^2\frac{\Gamma(-ix+2)}{\Gamma(-ix)} = i^2\frac{(-ix+1)(-ix)\Gamma(-ix)}{\Gamma(-ix)} = x(x+i) \\ &\vdots \\ x^{(n)} &= i^n\frac{\Gamma(-ix+n)}{\Gamma(-ix)}\end{aligned} \tag{3.69}$$

işlemlerinden görülmektedir. Bu durumda ileride bir karışıklığa yol açmaması için x'in tam sayı olmayan kuvvetleri için n yerine σ kullanılarak; x'in tam sayı olmayan kuvvetleri için

$$x^{(\sigma)} = i^{\sigma}(-ix)(-ix+1)(-ix+2)....(-ix+(n-1)) = i^{\sigma}\frac{\Gamma(-ix+\sigma)}{\Gamma(-ix)} \tag{3.70}$$

genel ifadesi önerilebilir. Buna göre, x' in tam sayı olmayan kuvvetleri için sonlu fark türev ifadesinin de, adi türevdeki $\frac{d}{dx}x^{\sigma} = \sigma x^{\sigma-1}$ ifadesiyle uyumlu olması gerekmektedir. Zaten bu uyumun sağlanması amacıyla $x^{(\sigma)}$ genelleşmiş kuvveti hipergeometrik serilerin temel bağıntısı cinsinden yazılmaya çalışılmıştır. Sonlu fark türevi hesabında yine gama fonksiyonlarının $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ tekrarlama bağıntısı kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\hat{\Delta}x^{(\sigma)} &= i\left(e^{-i\frac{d}{dx}}-1\right)x^{(\sigma)} = i^{\sigma+1}\left[e^{-i\frac{d}{dx}}\frac{\Gamma(-ix+\sigma)}{\Gamma(-ix)}-\frac{\Gamma(-ix+\sigma)}{\Gamma(-ix)}\right] \\
&= i^{\sigma+1}\left[\frac{\Gamma(-i(x-i)+\sigma)}{\Gamma(-i(x-i))}-\frac{\Gamma(-ix+\sigma)}{\Gamma(-ix)}\right] = i^{\sigma+1}\left[\frac{\Gamma(-ix+\sigma-1)}{\Gamma(-ix-1)}-\frac{\Gamma(-ix+\sigma)}{\Gamma(-ix)}\right] \\
&= i^{\sigma+1}\left[\frac{\Gamma(-ix+\sigma-1)(-ix-1)}{\Gamma(-ix)}-\frac{(-ix+\sigma-1)\Gamma(-ix+\sigma-1)}{\Gamma(-ix)}\right] \\
&= \sigma\, i^{\sigma-1}\frac{\Gamma(-ix-1+\sigma)}{\Gamma(-ix)} = \sigma\, x^{(\sigma-1)}
\end{aligned}
\tag{3.71}
$$

sonucuna ulaşılır. Böylelikle türev tablosundaki x'in tam sayı ve tam sayı olmayan kuvvetleri için sonlu fark türevleri, adi türeve form olarak uyan bir şekilde elde edilmiştir.

x'in kuvvetlerinin sonlu fark türev hesaplarının ardından $\ln x$'in sonlu fark türevinin araştırmasına geçilebilir. Yine burada da beklenen sonuç $\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}=x^{-1}$ ifadesiyle uyumlu olmalıdır. O halde aranılan sonlu fark türev sonucu $\hat{\Delta}\ln[x]=x^{(-1)}$ şeklinde olmalıdır. Bu durumda öyle bir $\ln[x]$ ifadesi önerilmelidir ki; onun sonlu fark türevi $x^{(-1)}$ olmalıdır. Bunun için gama fonksiyonların logaritmik türev ile ilgili

$$
\psi(z)=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}
\tag{3.72}
$$

tanımlı bağıntısından yola çıkılarak bu ifadede $z=z+1$ alınarak elde edilen

$$
\psi(z+1)=\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)}=\frac{\frac{d}{dz}(z\Gamma(z))}{z\Gamma(z)}=\frac{\Gamma(z)+z\Gamma'(z)}{z\Gamma(z)}=\frac{1}{z}+\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\frac{1}{z}+\psi(z)
$$

$$
\psi(z+1)-\psi(z)=\frac{1}{z}
\tag{3.73}
$$

ifadesinden faydalanılabilir. Bu sonuç ile sonlu fark operatörünün çalışması arasındaki ilgiden faydalanılarak; sonlu fark türev hesabı yapılan fonksiyon $\psi(ix+1)$ olarak seçilirse;

$$\hat{\Delta}\psi(ix+1) = i\left(e^{-i\frac{d}{dx}} - 1\right)\psi(ix+1) = i\left(e^{-i\frac{d}{dx}}\psi(ix+1) - \psi(ix+1)\right)$$
$$= i\left[\psi(ix+2) - \psi(ix+1)\right] \tag{3.74}$$

sonucu elde edilir. Logaritmik türev ile ilgili (3.73) ifadesinde $z = ix+1$ alınırsa $\left[\psi(ix+2) - \psi(ix+1)\right] = \dfrac{1}{ix+1}$ olarak bulunur ve bu sonuç (3.74)'de yerine yazılırsa

$$\hat{\Delta}\psi(ix+1) = i\frac{1}{ix+1} = \frac{1}{x-i} \tag{3.75}$$

elde edilir. Acaba $\hat{\Delta}\ln[x] = x^{(-1)}$ sonucuna ulaşıldı mı? Bu sorunun cevabı için (3.70) ifadesi kullanılırsa $x^{(-1)}$'in

$$x^{(-1)} = i^{-1}\frac{\Gamma(-ix-1)}{\Gamma(-ix)} = \frac{1}{i}\frac{\Gamma(-ix-1)}{(-ix-1)\Gamma(-ix-1)} = \frac{1}{i(-ix-1)} = \frac{1}{x-i}$$

şeklinde olduğu görülür. Bu durumda (3.75) denklemi

$$\hat{\Delta}\psi(ix+1) = \hat{\Delta}\ln[x] = x^{(-1)} \tag{3.76}$$

olarak yazılabilir. Şimdi eksponansiyel ifadelerin sonlu fark türevinin araştırılmasına geçilebilir. Genel olarak e^{ax} şeklindeki bir eksponansiyel ifadenin adi türevi

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax} \tag{3.77}$$

ile tanımlıdır. Geliştirilen rölativistik yaklaşımda öyle bir eksponansiyel fonksiyon tanımı yapılmalıdır ki; bu fonksiyonunun sonlu fark türevi (3.77) ifadesine form olarak uymalıdır. Rölativistik yaklaşımda eksponansiyel ifadeler, $x^{(n)}$'in kuvvetleri biçiminde Taylor serisine açılabilecek $\exp[a,x]$ ile tanımlı olsun. Böyle bir ifadenin sonlu fark türevi ise

$$\hat{\Delta}\exp[a,x] = \hat{\Delta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n x^{(n)}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\hat{\Delta}x^{(n)} = a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}x^{(n-1)} = a\exp[a.x] \tag{3.78}$$

şeklinde form olarak (3.77) denklemini sağlar. Şimdi $\hbar = m = c = 1$ birim sisteminde $e^{ix\chi}$ rölativistik düzlem dalgasının ya da genelleştirilmiş kuvvet fonksiyonunun sonlu fark türevinin araştırması yapılabilir. Bu işlemin yapılmasındaki amaç, (3.78) denklemindeki sabit terim olan a'yı rölativistik düzlem dalga için tayin ederek; rölativistik düzlem dalgayı $\exp[a, x]$ şeklinde yazabilmektir. Buna göre genelleştirilmiş kuvvet fonksiyonunun sonlu fark türevi

$$\hat{\Delta} e^{ix\chi} = i\left(e^{i\frac{d}{dx}} - 1\right)e^{ix\chi} = i\left(e^{i(x-i)\chi} - e^{ix\chi}\right) = i\,e^{ix\chi}\left(e^{\chi} - 1\right) \tag{3.79}$$

şeklinde bulunur. O halde $\hat{\Delta}\exp[a,x] = a\exp[a,x]$ koşulundan, a sabiti $a = i\left(e^{\chi} - 1\right)$ şeklinde bulunur ve rölativistik düzlem dalga

$$e^{ix\chi} = \exp\left[i\left(e^{\chi} - 1\right); x\right] \tag{3.80}$$

biçiminde yazabilir. Genelleştirilmiş kuvvet ifadesini hipergeometrik fonksiyonlarla da ifade etmek mümkündür. Çünkü genelleştirilmiş kuvvet ifadesinin Taylor seri açılımı ile hipergeometrik serilere ait temel bağıntı arasında bir benzerlik vardır. İşte bu benzerliğin görülebilmesi için genel hatlarıyla hipergeometrik fonksiyonlara değinilebilir.

3.2.1 Hipergeometrik fonksiyonlar

Hipergeometrik diferansiyel denklem

$$x(1-x)y''(x) + [c - (a+b+1)x]y'(x) - ab\,y(x) = 0 \tag{3.81}$$

şeklinde $x = 0, 1, \infty$'da düzenli sonsuzlukları olan 2. mertebeden lineer bir diferansiyel denklemdir. Bu denklemin çözümü

$$y(x) = {}_2F_1(a.b;c;x) \tag{3.82}$$

şeklinde gösterilen hipergeometrik fonksiyonlardır. Bu çözüm

$$y(x) = 1 + \frac{ab}{c}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad c \neq 0,-1,-2\ldots\ldots\ldots \tag{3.83}$$

şeklinde hipergeometrik seri adı verilen bir seri açılımı ile ifade edilebilir. Bu serilerin katsayıları gama fonksiyonları kullanılarak

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\ldots\ldots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$
$$(b)_n = b(b+1)(b+2)\ldots\ldots(b+n-1) = \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)} \tag{3.84}$$
$$(c)_n = c(c+1)(c+2)\ldots\ldots(c+n-1) = \frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)}$$

ifadelerine göre yazılabilir. İlk birkaç n değeri için (3.84) formülleri

$$n=0 \quad (a)_0 = 1 \quad (b)_0 = 1 \quad (c)_0 = 1$$
$$n=1 \quad (a)_1 = a \quad (b)_1 = b \quad (c)_1 = c$$
$$n=2 \quad (a)_2 = a(a+1) \quad (b)_2 = b(b+1) \quad (c)_2 = c(c+1)$$

şeklinde bulunur. Bulunan katsayılar (3.83) denklemindeki serinin katsayıları olduğu için (3.81) denkleminin çözümü olan hipergeometrik fonksiyonlar gama fonksiyonları cinsinden

$${}_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)} \frac{x^n}{n!} \tag{3.85}$$

ile ifade edebilir (Arfken, 1970).

3.2.2 Eksponansiyel fonksiyonların hipergeometrik fonksiyonlarla ifade edilmesi

Rölativistik yaklaşımda önerilen $\exp[a,x]$ ile tanımlı bir eksponansiyel ifadeyi temsil edebilecek hipergeometrik fonksiyon

$$\exp[a,x] = {}_2F_1(-ix,1;1;\, ia) \tag{3.86}$$

şeklinde önerilebilir. Bu önerinin doğruluğu (3.86) bağıntısında (3.69) ve (3.85) ifadeleri kullanılarak

$$ {}_2F_1(-ix,1;1;ia)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-ix+n)}{\Gamma(-ix)}\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1)}\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+n)}\frac{(ia)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}i^n\frac{\Gamma(-ix+n)}{\Gamma(-ix)}\frac{a^n}{n!} $$

$$ =\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{(n)}a^n}{n!}=\exp[a,x] $$

görülebilir. Ayrıca $\exp[a,x]={}_2F_1(-ix,1;1;ia)$ ifadesinin doğruluğu bir de sonlu fark türevin $\hat{\Delta}\ {}_2F_1(-ix,1;1;ia)=a\ {}_2F_1(-ix,1;1;ia)$ koşulunu sağladığı gösterilerek de ispatlanabilir. Buna göre ${}_2F_1(-ix,1;1;ia)$'in sonlu fark türevi

$$ \hat{\Delta}\ {}_2F_1(-ix,1;1;ia)=i\{{}_2F_1(-ix-1,1;1;ia)-{}_2F_1(-ix,1;1;ia)\} \tag{3.87} $$

işleminden de görüleceği gibi iki hipergeometrik fonksiyonun farkından oluşmaktadır. Bu fark, hipergeometrik fonksiyonların tekrarlama bağıntıları kullanılarak yazılabilir. Burada (3.87) işlemine uygun tekrarlama bağıntısı $F={}_2F_1(a,b;c;x)$ olmak üzere

$$ (b-a)(1-x)F-(c-a)F(a-1)+(c-b)F(b-1)=0 \tag{3.88} $$

ile verilir (Bateman, H., 1953). İlgili a, b, c, x ifadeleri (3.88) denkleminde kullanılarak;

$$ (1+ix)(1-ia)\ {}_2F_1(-ix,1;1;ia)-(1+ix)\ {}_2F_1(-ix-1,1;1;ia)=0 $$

$$ {}_2F_1(-ix-1,1;1;ia)=(1-ia)\ {}_2F_1(-ix,1;1;ia) \tag{3.89} $$

sonucu elde edilir. Bu denklem (3.87)'de yerine yazıldığında;

$$ \hat{\Delta}\,{}_2F_1(-ix,1;1;ia)=a\,{}_2F_1(-ix,1;1;ia) \tag{3.90} $$

ifadesine ulaşılır. Bu durumda (3.80) rölativistik düzlem dalga hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$ \exp[i(e^{\chi}-1),x]={}_2F_1(-ix,1;1;-(e^{\chi}-1)) \tag{3.91} $$

olarak yazılırken; sonlu fark türevi

$$ \hat{\Delta}\,{}_2F_1(-ix,1;1;-(e^{\chi}-1))=i(e^{\chi}-1)\,{}_2F_1(-ix,1;1;-(e^{\chi}-1)) \tag{3.92} $$

şeklinde olacaktır.

3.2.3 Trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonların sonlu fark türevlerinin incelemesi

Trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlar için sonlu fark türev hesabının yapılabilmesi için öncelikle bu fonksiyonların rölativistik yaklaşımda nasıl tanımlanmaları gerektiğine karar verilmelidir ; çünkü bu fonksiyonların tanımlamalarında yeni bir düzenleme yapılmadığı takdirde ; cos . sin , cosh ve sinh fonksiyonlarının sonlu fark türevleri sırasıyla

$$\hat{\Delta}\sin \alpha x = 2\sinh\frac{\alpha}{2}\cos\left[\alpha\left(x-\frac{i}{2}\right)\right] \qquad (3.93)$$

$$\hat{\Delta}\cos \alpha x = -2\sinh\frac{\alpha}{2}\sin\left[\alpha\left(x-\frac{i}{2}\right)\right] \qquad (3.94)$$

$$\hat{\Delta}\sinh \alpha x = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cosh\left[\alpha\left(x-\frac{i}{2}\right)\right] \qquad (3.95)$$

$$\hat{\Delta}\cosh \alpha x = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sinh\left[\alpha\left(x-\frac{i}{2}\right)\right] \qquad (3.96)$$

olarak elde edilir. Bu sonuçların adi türevle uyumlu olabilmeleri için rölativistik olmayan limite geçilmesi gerekir. Adi türevle uyumlu sonuçlara rölativistik olmayan limite geçilmeden ulaşılması için, bu fonksiyonların eksponansiyel eşitleri düşülüp burada yer alan eksponansiyel ifadeler için rölativistik yaklaşımın $\exp[a,x]$ ifadesinden faydalanılmalıdır. Buna göre rölativistik yaklaşımda bu fonksiyonlar için yeni tanımlamalar sırasıyla

$$\cos[a,x] = \frac{\exp[ia,x]+\exp[-ia.x]}{2} \qquad (3.97)$$

$$\sin[a,x] = \frac{\exp[ia,x]-\exp[-ia,x]}{2i} \qquad (3.98)$$

$$\cosh[a,x] = \frac{\exp[a,x]+\exp[-a,x]}{2} \qquad (3.99)$$

$$\sinh[a,x] = \frac{\exp[a,x]-\exp[-a.x]}{2} \qquad (3.100)$$

ile verilir. Bu ifadelerin sonlu fark türevi alınırken (3.78) formülünden faydalanılır. Buna göre cos fonksiyonu için sonlu fark türev hesabı (3.98) formülünün de kullanılmasıyla

$$\hat{\Delta}\cos[a,x] = \left\{\frac{\hat{\Delta}\exp[ia,x] + \hat{\Delta}\exp[-ia,x]}{2}\right\} = \left\{\frac{ia\exp[ia,x] - ia\exp[-ia,x]}{2}\right\}$$
$$= -a\sin[a,x] \tag{3.101}$$

olarak adi türeve form olarak uygun bir şekilde bulunur. Diğer fonksiyonların sonlu fark türevleri ise bu hesaplamaya benzer olarak

$$\hat{\Delta}\sin[a,x] = a\cos[a,x] \tag{3.102}$$

$$\hat{\Delta}\cosh[a,x] = a\sinh[a,x] \tag{3.103}$$

$$\hat{\Delta}\sinh[a,x] = a\cosh[a,x] \tag{3.104}$$

şeklinde elde edilir.

4. KOMÜTATİF OLMAYAN DİFERANSİYEL HESAPLAR ve SONLU FARK SCHRÖDİNGER DALGA DENKLEMİ

4.1 Giriş

Bu bölümde amaçlanan, komütatif olmayan diferansiyel hesaplarla sonlu fark operatörleri arasındaki ilişkiyi ortaya koymak ve yeni rölativistik yaklaşım için komütatif olmayan diferansiyel hesapların uygun bir matematiksel araç olduğunun gösterilmesidir. Bu inceleme için komütatif olmayan diferansiyel hesaplar hakkında temel bağıntılar ve ilişkiler verilerek, bu bilgilerinin ışığı altında rölativistik serbest parçacığa ait sonlu fark Schrödinger denklemi komütatif olmayan diferansiyel hesaplar kullanılarak yazılacaktır.

4.2 Komütatif Olmayan Diferansiyel Hesaplar

Komütatif olmayan diferansiyel hesaplar aslında diferansiyel formlar teorisinin bir genelleşmesi (deformasyonu) olarak düşünülebilir. İncelemelere uygun olması açısından sadece $\mathbb{C}$ kompleks vektör uzayında A komütatif cebri üzerinden diferansiyel hesapları düşünülürse; böyle bir uzayda diferansiyel formlar

$$\Omega(A) = \sum_{r=0} \oplus\, \Omega^r(A) \tag{4.1}$$

$$\Omega^0(A) = A \quad , \quad \Omega^r(A) = \{0\} \quad \forall r < 0 \tag{4.2}$$

ile verilir. Burada $\Omega^r(A)$'nın elemanları r-formlardır. Burada

$$d^2 = 0 \tag{4.3}$$

koşulunu sağlayan d dış türev operatörü vardır ve bu operatör

$$d(\omega\omega') = (d\omega)\omega' + (-1)^r \omega d\omega' \tag{4.4}$$

Leibniz koşulunu sağlamaktadır. Bu ifadede ω ve ω' sırasıyla r ve r'-formlardır. Burada amaçlanan A'yı x^i $i = 1,2,3....,n$ koordinat fonksiyonlarından üretilmiş komütatif bir cebir olarak düşünmektir. A üzerinde sade diferansiyel hesaplarda

$$\left[x^i, dx^j\right] = 0 \tag{4.5}$$

diferansiyellerle fonksiyonların komütatif olma özelliği vardır. Yapılmak istenen (4.1)-(4.4) denklemlerinin doğruluğunu bozmayan bir yolla (4.5) denklemini öyle bir şekilde deforme etmektir ki; burada komütatif olmayan diferansiyel hesapların bir sınıfı oluşsun. Bu deformasyon

$$\left[x^i, dx^j\right] = \sum_{k=1}^{n} dx^k C^{ij}{}_k \tag{4.6}$$

ile verilir (Connes, 1994; Dimakis ve Müller-Hoissen, 1998). Bu formülde $C^{ij}{}_k$'lar yapı sabitleridir. Bu deformasyonda sade diferansiyel hesaplarda olduğu gibi fonksiyonlar

$$\left[x^i, x^j\right] = 0 \tag{4.7}$$

bağıntısına göre yine birbirleriyle komütatiftirler. Artık komütatif olmayan diferansiyel hesapların temel bağıntıları (4.6) hipotezine göre ifade edilebilir. Buna göre

1) $C^{ij}{}_k = C^{ji}{}_k$ (4.8)

dır. Bunun böyle olduğu

$$\begin{aligned} \left[x^i, dx^j\right] &= x^i dx^j - dx^j x^i = d\left(x^i x^j\right) - \left(dx^i\right)x^j - d\left(x^j x^i\right) + x^j\left(dx^i\right) \\ &= d\left(x^i x^j - x^j x^i\right) + x^j\left(dx^i\right) - \left(dx^i\right)x^j \end{aligned} \tag{4.9}$$

işleminden görülebilir. Koordinat fonksiyonları (4.7) formülüne göre birbirleriyle komütatif olduklarından (4.9) hesabındaki ilk terim sıfır olur ve

$$\left[x^i, dx^j\right] = \left[x^j, dx^i\right] \tag{4.10}$$

elde edilir. Bu ifade de $C^{ij}{}_k = C^{ji}{}_k$ koşulunu beraberinde getirmektedir. Bunun görülebilmesi için başka bir yol izlenebilir. Bu metot da fonksiyonların birbirleriyle komütatif olma özelliklerinin kullanıldığı

$$d\left[x^i,x^j\right]=\left[dx^i,x^j\right]+\left[x^i,dx^j\right]=-\left[x^j,dx^i\right]+\left[x^i,dx^j\right]=-\sum_{k=1} dx^k C^{ji}{}_k+\sum_{k=1} dx^k C^{ij}{}_k=0$$

metottur. Buradan da yine

$$C^{ji}{}_k=C^{ij}{}_k \tag{4.11}$$

şartı elde edilir.

2) Koordinat fonksiyonlarının birbirleriyle komütatifliğini gösteren (4.7) denkleminin dx^k ile komütatörü alınırsa

$$\begin{aligned}
\left[\left[x^i,x^j\right],dx^k\right] &= \left[x^i,x^j\right]dx^k-dx^k\left[x^i,x^j\right]=\left(x^ix^j-x^jx^i\right)dx^k-dx^k\left(x^ix^j-x^jx^i\right)\\
&= x^i\left(x^jdx^k\right)-x^j\left(x^idx^k\right)-dx^k\left(x^ix^j-x^jx^i\right)\\
&= x^i\left(dx^kx^j+\left[x^j,dx^k\right]\right)-x^j\left(dx^kx^i+\left[x^i,dx^k\right]\right)-dx^k\left(x^ix^j-x^jx^i\right)\\
&= x^i\left\{dx^kx^j+\sum_{l=1}^{n}dx^lC^{jk}{}_l\right\}-x^j\left\{dx^kx^i+\sum_{l=1}^{n}dx^lC^{ik}{}_l\right\}-dx^k\left(x^ix^j-x^jx^i\right)\\
&= \left\{dx^kx^i+\sum_{m=1}^{n}dx^mC^{ik}{}_m\right\}x^j+\sum_{l=1}^{n}\left\{dx^lx^i+\sum_{m=1}^{n}dx^mC^{il}{}_m\right\}C^{jk}{}_l\\
&\quad-\left\{dx^kx^j+\sum_{m=1}^{n}dx^mC^{jk}{}_m\right\}x^i-\sum_{l=1}^{n}\left\{dx^lx^j+\sum_{m=1}^{n}dx^mC^{jl}{}_m\right\}C^{ik}{}_l-dx^k\left(x^ix^j-x^jx^i\right)\\
&= \sum_{l,m=1}^{n}dx^m\left(C^{il}{}_mC^{jk}{}_l-C^{jl}{}_mC^{ik}{}_l\right)=0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

sonucu elde edilir. Bu aynı zamanda

$$\sum_{l,m=1}^{n}C^{ik}{}_lC^{jl}{}_m=\sum_{l,m=1}^{n}C^{jk}{}_lC^{il}{}_m \tag{4.13}$$

demektir. Bu ifade daha kapalı bir formda

$$\sum_{l=1}^{n}C^{k[i}{}_lC^{j]l}{}_m=0 \tag{4.14}$$

şeklinde yazılabilir.

3) (4.6) ifadesinin x^k ile komütatörü alınırsa yine (4.13) denklemi elde edilir ve dolayısıyla ek koşullara gerek kalmaz.

4) (4.6) denklemine d dış türev operatörü uygulanır ve (4.4) Leibniz kuralı kullanılırsa diferansiyeller için

$$dx^i dx^j = -dx^j dx^i \tag{4.15}$$

klasik komütasyon ifadesine ulaşılır.

5) Komütatif olmayan diferansiyel formlar için Hodge yıldız operatörü

$$*\left(dx^{i_1}\ldots\ldots\ldots\ldots dx^{i_k}\right) = \frac{1}{(n-k)!}\sum \varepsilon_{i_1\ldots\ldots\ldots i_k i_{k+1}\ldots\ldots\ldots i_n} dx^{i_{k+1}}\ldots\ldots\ldots dx^{i_n} \tag{4.16}$$

standart formülüyle verilir. Ancak uygunluk olması açısından sağ Hodge yıldız operatörü $\overrightarrow{*}$ ve sol Hodge yıldız operatörü $\overleftarrow{*}$ arasında bir fark yaratılabilir. Tanım olarak $\overrightarrow{*}$ operatörü

$$\sum\left(dx^{i_1}\ldots\ldots\ldots\ldots dx^{i_k} f(x)\right) \tag{4.17}$$

tipindeki formlara etki ederken $\overleftarrow{*}$ operatörü de

$$\sum\left(f(x) dx^{i_1}\ldots\ldots\ldots\ldots dx^{i_k}\right) \tag{4.18}$$

tipindeki formlara etki eder. Böylelikle Hodge yıldız operatörlerinin etki edecekleri formlar ayrılır. Eğer $\overrightarrow{*}$ operatörü (4.18)'e etki ederse ya da $\overleftarrow{*}$ operatörü (4.17)'ye etki ederse bu işlemin sonucu sıfır olacaktır. Hodge yıldız operatörleri sağ ve sol olmak üzere ikiye ayrıldığından aynı şekilde δ operatörüne ait

$$\delta = * \, d \, * \tag{4.19}$$

standart tanımı da sağ ve sol olmak üzere iki kısma ayrılabilir. Buna göre

$$\overrightarrow{\delta} = \overrightarrow{*}\ \overrightarrow{d}\ * \qquad \overleftarrow{\delta} = \overleftarrow{*}\ \overleftarrow{d}\ * \tag{4.20}$$

olacaktır. Bu tanımlamaların ardından rölativistik serbest parçacığa ait Schrödinger denkleminin, komütatif olmayan diferansiyel hesaplar kullanılarak yazılması işlemlerine geçebilir (Mir-Kasimov, 2000).

4.3 Komütatif Olmayan Diferansiyel Hesaplar Kullanılarak Sonlu Fark Schrödinger Dalga Denkleminin Elde Edilmesi

Bu kısımda gösterilmek istenilen, komütatif olmayan diferansiyel hesapların bir versiyonunun, (3.43-a) sonlu fark Schrödinger denkleminin yazımı için yeterli bir matematiksel araç olduğudur. Bu inceleme için A'nın. $\mathbb{C}$ üzerindeki tüm fonksiyonların cebri olduğu kabulü ile işlemlere başlanabilir. Bir boyutta bir değişkenli $\psi(x)$ fonksiyonu x kanonik koordinatı olarak alınabilir. A üzerindeki herhangi diferansiyel hesabının en basit deformasyonundan biri, λ Compton dalga boyu olmak üzere $C = i\frac{\lambda}{2}$ olarak seçilirse; bu deformasyon bir boyutta (4.6) denklemine göre

$$[dx, x] = i\frac{\lambda}{2}dx \tag{4.21}$$

şeklinde alınabilir. Bu komütatörün açık ifadesi

$$[dx, x] = (dx)x - x(dx) = i\frac{\lambda}{2}dx$$

şeklindedir. Burada işlem yapıldığında dx ile $\psi(x) = x$ 'in sıra değiştirmesi durumundaki ifadeler

$$(dx)x = \left(x + i\frac{\lambda}{2}\right)dx \tag{4.22}$$

$$x(dx) = dx\left(x - i\frac{\lambda}{2}\right) \tag{4.23}$$

olarak Ardından dx ile $\psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n \frac{x^n}{n!}$ ile tanımlı genel bir fonksiyon için sıra değiştirme bağıntılarının bulunması için $(dx)x^n$ ve $x^n(dx)$ ifadeleri bulunmalıdır. Bu ifadeler

$$(dx)x^n=(dx)xx^{n-1}=\left(x+i\frac{\lambda}{2}\right)dxx^{n-1}=\cdots=\left(x+i\frac{\lambda}{2}\right)^n dx$$

$$x^n(dx)=x^{n-1}x(dx)=x^{n-1}dx\left(x-i\frac{\lambda}{2}\right)=\cdots=dx\left(x-i\frac{\lambda}{2}\right)^n$$

şeklinde olduklarından aranan ifadeler

$$(dx)\psi(x)=\psi\left(x+i\frac{\lambda}{2}\right)dx \tag{4.24}$$

$$\psi(x)(dx)=dx\,\psi\left(x-i\frac{\lambda}{2}\right) \tag{4.25}$$

şeklinde elde edilir. Deforme olmuş diferansiyel hesaplarla ilgili olarak, genelleştirilmiş (deforme edilmiş) sol ve sağ türevler

$$d\psi(x)=dx\left(\overleftarrow{\partial}\,\psi(x)\right)=\left(\overrightarrow{\partial}\,\psi(x)\right)dx \tag{4.26}$$

ile tanımlıdır. Leibniz kuralı (4.4) göre

$$\begin{aligned} d(\psi(x)\phi(x)) &= dx\left(\overleftarrow{\partial}(\psi(x)\phi(x))\right)=(d\psi(x))\phi(x)+\psi(x)(d\phi(x)) \\ &= dx\left(\overleftarrow{\partial}\,\psi(x)\right)\phi(x)+\psi(x)dx\left(\overleftarrow{\partial}\,\phi(x)\right) \end{aligned}$$

işlemine gelinir. Bu ifadenin eşiti bulurken (4.25) ifadesi kullanılırsa

$$d(\psi(x)\phi(x))=dx\left(\overleftarrow{\partial}\,\psi(x)\right)\phi(x)+dx\,\psi\left(x-i\frac{\lambda}{2}\right)\left(\overleftarrow{\partial}\,\phi(x)\right) \tag{4.27}$$

genel ifadesine ulaşılır. Koordinat fonksiyonlarının birbirleriyle komütatif olması özelliğinden dolayı

$$\psi(x)\phi(x) = \phi(x)\psi(x) \tag{4.28}$$

koşulu uyarınca $d(\phi(x)\psi(x)) = d(\psi(x)\phi(x))$ durumu söz konusudur. Buna göre $d(\phi(x)\psi(x))$ işlemi

$$\begin{aligned} d(\phi(x)\psi(x)) &= dx\left(\overleftarrow{\partial}\,\phi(x)\right)\psi(x) + \phi(x)dx\left(\overleftarrow{\partial}\,\psi(x)\right) \\ &= dx\left(\overleftarrow{\partial}\,\phi(x)\right)\psi(x) + dx\phi\left(x - i\frac{\lambda}{2}\right)\left(\overleftarrow{\partial}\,\psi(x)\right) \end{aligned} \tag{4.29}$$

şeklinde yapılıp; $d(\phi(x)\psi(x)) = d(\psi(x)\phi(x))$ koşulu kullanıldığında

$$dx\left\{\overleftarrow{\partial}\,\psi(x)\left\{\phi(x) - \phi\left(x - i\frac{\lambda}{2}\right)\right\}\right\} = dx\left\{\overleftarrow{\partial}\,\phi(x)\left\{\psi(x) - \psi\left(x - i\frac{\lambda}{2}\right)\right\}\right\} \tag{4.30}$$

genel ifadesine ulaşılır. Bu eşitlik

$$\frac{\overleftarrow{\partial}\,\psi(x)}{\psi(x) - \psi\left(x - i\frac{\lambda}{2}\right)} = \frac{\overleftarrow{\partial}\,\phi(x)}{\phi(x) - \phi\left(x - i\frac{\lambda}{2}\right)} = sabit \tag{4.31}$$

şartıyla sağlanabilir. Aynı işlemler sağ türev için de tekrarlandığında elde edilecek eşitlik

$$\frac{\overrightarrow{\partial}\,\psi(x)}{\psi\left(x + i\frac{\lambda}{2}\right) - \psi(x)} = \frac{\overrightarrow{\partial}\,\phi(x)}{\phi\left(x + i\frac{\lambda}{2}\right) - \phi(x)} = sabit \tag{4.32}$$

şeklindedir. Şimdi (4.31) ve (4.32) denklemlerindeki sabitin bulunmasına geçilebilir. Bunun için (4.31) ifadesinde

$$\psi(x) = x \tag{4.33}$$

şeklinde seçilerek (4.26) formülüne göre

$$dx = dx\left(\overleftarrow{\partial}\, x\right) \Rightarrow \left(\overleftarrow{\partial}\, x\right) = 1 \tag{4.34}$$

ifadesi (4.31)'de yerine yazılırsa,

$$sabit = \frac{\left(\overleftarrow{\partial}\, x\right)}{x - x + i\frac{\lambda}{2}} \Rightarrow sabit = \frac{2}{i\lambda} \tag{4.35}$$

olarak bulunur. Bulunan sabit (4.31) ve(4.32)'de yerine yazıldığında

$$\overleftarrow{\partial}\,\psi(x) = \frac{\psi(x) - \psi\left(x - i\frac{\lambda}{2}\right)}{\frac{i\lambda}{2}} \tag{4.36}$$

$$\overrightarrow{\partial}\,\psi(x) = \frac{\psi\left(x + i\frac{\lambda}{2}\right) - \psi(x)}{\frac{i\lambda}{2}} \tag{4.37}$$

genel türev ifadelerine ulaşılır. Tüm bu hesaplamaların ardından artık sonlu fark Schrödinger denklemi ile komütatif olmayan diferansiyel hesaplar arasındaki net ilişkinin görülmesi amacıyla $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\delta}\, d + \overleftarrow{\delta}\, d\right)\psi(x)$ işlemi yapılabilir. Bu işlemin ayrıntılı hesabı

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\delta}\, d + \overleftarrow{\delta}\, d\right)\psi(x) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\delta} + \overleftarrow{\delta}\right) d\psi(x) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{*}\; d\;\overrightarrow{*}\, d + \overleftarrow{*}\; d\;\overleftarrow{*}\, d\right)\psi(x)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\delta} + \overleftarrow{\delta}\right)\left\{\left(\overrightarrow{\partial}\,\psi(x)\right)dx + dx\left(\overleftarrow{\partial}\,\psi(x)\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\delta} + \overleftarrow{\delta}\right)\left\{\frac{\psi\left(x + i\frac{\lambda}{2}\right) - \psi(x)}{i\frac{\lambda}{2}}\, dx + dx\,\frac{\psi(x) - \psi\left(x - i\frac{\lambda}{2}\right)}{i\frac{\lambda}{2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overset{\rightarrow}{*}d+\overset{\leftarrow}{*}d\right)\left\{\frac{\psi\left(x+i\frac{\lambda}{2}\right)-\psi(x)+\psi(x)-\psi\left(x-i\frac{\lambda}{2}\right)}{i\frac{\lambda}{2}}\right\}=\frac{1}{2}\left(\overset{\rightarrow}{*}+\overset{\leftarrow}{*}\right)d\left\{\frac{\psi\left(x+i\frac{\lambda}{2}\right)-\psi\left(x-i\frac{\lambda}{2}\right)}{i\frac{\lambda}{2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{i\lambda}\left(\overset{\rightarrow}{*}+\overset{\leftarrow}{*}\right)\left(\frac{\psi(x+i\lambda)-\psi(x)-\psi\left(x+i\frac{\lambda}{2}\right)+\psi\left(x-i\frac{\lambda}{2}\right)}{\frac{i\lambda}{2}}\right)dx$$

$$+\frac{1}{i\lambda}\left(\overset{\rightarrow}{*}+\overset{\leftarrow}{*}\right)dx\left(\frac{\psi(x-i\lambda)-\psi(x)+\psi\left(x+i\frac{\lambda}{2}\right)-\psi\left(x-i\frac{\lambda}{2}\right)}{\frac{i\lambda}{2}}\right)$$

$$=-\frac{2}{\lambda^2}\{-2\psi(x)+\psi(x+i\lambda)+\psi(x-i\lambda)\}$$

şeklindedir. Burada $2\left(\cosh\left(i\lambda\frac{d}{dx}\right)-1\right)\psi(x)=\{-2\psi(x)+\psi(x+i\lambda)+\psi(x-i\lambda)\}$ olduğu düşünülüp; (3.35) bağıntısı kullanıldığında

$$\frac{1}{2}\left(\overset{\rightarrow}{\delta}d+\overset{\leftarrow}{\delta}d\right)\psi(x)=-\frac{4}{\lambda^2}\left(\cosh\left(i\lambda\frac{d}{dx}\right)-1\right)\psi(x)=-\frac{8}{\lambda^2}\sinh^2\left(i\frac{\lambda}{2}\frac{d}{dx}\right)\psi(x) \tag{4.38}$$

elde edilir. Sol ve sağ momentum operatörleri

$$\vec{p}=-i\hbar\overset{\rightarrow}{*}d \qquad \overset{\leftarrow}{p}=-i\hbar\overset{\leftarrow}{*}d \tag{4.39}$$

ile tanımlanırsa; serbest parçacığın momentum operatörü için

$$\hat{p}=\frac{1}{2}\left(\vec{p}+\overset{\leftarrow}{p}\right) \tag{4.40}$$

ifadesi yazılabilir. Bu durumda $\hat{p}=\frac{1}{2}\left(\vec{p}+\overset{\leftarrow}{p}\right)=-\frac{i\hbar}{2}\left(\overset{\rightarrow}{*}d+\overset{\leftarrow}{*}d\right)$ olacağına göre kinetik enerji operatörü (4.38) sonucu kullanılarak

$$\frac{\hat{p}^2}{2m}=-\frac{\hbar^2}{8m}\left(\overset{\rightarrow}{*}d\overset{\rightarrow}{*}d+\overset{\leftarrow}{*}d\overset{\leftarrow}{*}d\right)=-\frac{\hbar^2}{4m}\frac{1}{2}\left(\overset{\rightarrow}{\delta}d+\overset{\leftarrow}{\delta}d\right)=\frac{2\hbar^2}{m\lambda^2}\sinh^2\left(\frac{i\lambda}{2}\frac{d}{dx}\right) \tag{4.41}$$

bulunur. Dolayısıyla (3.43-a) rölativistik serbest parçacığa ait sonlu fark Schrödinger denklemi (4.41) ifadesinde $\lambda = \frac{\hbar}{mc}$ olarak yerine yerleştirildiğinde

$$\frac{\hat{p}^2}{2m} = 2mc^2 \sinh^2\left(\frac{i\lambda}{2}\frac{d}{dx}\right) \tag{4.42}$$

olarak elde edilir. Böylece komütatif olmayan diferansiyel hesaplamalara göre rölativistik Schrödinger denklemi

$$\hat{H}\psi(x) = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m}\right)\psi(x) = E_P\psi(x) \tag{4.43}$$

ifadesiyle temsil edilmiş olundu (Mir-Kasimov, 2000).

5. RÖLATİVİSTİK SAÇILMA TEORİSİ

5.1 Giriş

Bu bölümde amaçlanan 3. Bölümde verilen bir boyutlu sonlu fark Schrödinger dalga denklemi kullanılarak bir boyutlu rölativistik saçılma teorisinin geliştirilmesidir. Bu amaca yönelik olarak yine bir boyutta standart kuantum mekaniksel saçılma teorisi incelenerek; ardından, rölativistik bir boyutlu saçılma teorisinde rölativistik Green fonksiyonu hesaplanarak, basamak operatörü incelenmesi yapılacaktır.

5.1.1 Saçılmanın genel tanımı ve tipleri

Şu ana kadar atomların, moleküllerin veya elemanter parçacıkların yapısını öğrenmekte en fazla tercih edilen yöntem ***saçılma***'dır. Saçılma deneylerinde gelen parçacıklar bir hedef tarafından saçılırlar ve bu saçılan parçacıklar da dedektörler vasıtasıyla sayılırlar. Gelen parçacık ile hedef parçacık arasındaki etkileşme uzayın çok küçük bir bölgesinde gerçekleşir. Gelen parçacıkların hazırlandığı bölge ile saçılan parçacıkların dedektörlerle sayıldıkları bölgeler hep gelen parçacık ile hedef parçacığın etkileşmeye girdikleri bölgenin dışındadır. Bu sebepten ötürü; parçacıklar ilk ve son durumlarında serbest parçacık olarak hareket ederler. Saçılma süreci, etkileşme uzayın çok küçük bir bölgesinde meydana geldiği için bir serbest parçacık durumundan başka bir serbest parçacık durumuna geçiş olarak da yorumlanabilir (Lipkin, 1973).

Saçılma sonucu parçacıkların son durumlarına göre saçılma tipleri şöyle sınıflandırılabilir:

1. Hedef parçacığın taban durumunda kaldığı esnek saçılma
2. Hedef parçacığın uyarılmış duruma geçiş yapabildiği inelastik saçılma
3. Gelen parçacığın absorplanabildiği ya da yeni parçacıkların üretilebildiği reaksiyon saçılmadır.

5.2 Standart Kuantum Mekaniğinde Bir Boyutlu Esnek Saçılma Teorisi

Klasik mekanikten bilindiği gibi m_1 kütleli parçacığın m_2 kütleli parçacık tarafından saçılma problemi, parçacıklar arasındaki etkileşme potansiyeli olan $V(\vec{r})$, $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ile tanımlı bağıl koordinata bağlı ise; $V(\bar{r})$potansiyel alanı içindeki $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ indirgenmiş kütleli hayali bir parçacığın saçılma problemine indirgenebilir. İki parçacığın elastik saçılma probleminin, $V(\bar{r})$ potansiyel alanındaki μ indirgenmiş kütleli hayali bir parçacığın hareketine indirgenmesi, çarpışan parçacıkların kütle merkezinde belirlenmiş olan koordinat sisteminde yapılan küçük bir değişiklikle olur.

Elastik saçılma çarpışan parçacıkların iç durumlarını ve yapılarını değiştirmedikleri bir süreçtir. Saçılma süreci birbirlerinden sonsuz uzakta olan iki parçacığın birbirlerine doğru harekete geçmesiyle başlar. Birbirlerine yeteri kadar yaklaştıklarında, aralarındaki etkileşme, hareketlerini etkiler ve saparlar. Saçılma süreci parçacıkların birbirlerinden uzaklaşmaları ile son bulur.

Saçılmanın genel tanımlamasında da bahsedildiği gibi saçılan parçacıklar merkezden çok uzaklarda serbest parçacıklarmış gibi hareket ettiklerinden bağıl hareketlerinin enerjisi daima pozitiftir ve kuantize değildir. Böylelikle $V(\bar{r})$ potansiyel alanında pozitif E bağıl enerjili μ kütleli parçacığın saçılma problemi, Schrödinger denkleminin çözülmesine indirgenir (Dayvdov, 1965). Schrödinger dalga denklemi (2.9) bir boyut için yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa, $k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$ olmak üzere,

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)\psi(x) = V(x)\psi(x) \tag{5.1}$$

elde edilir. Bu denkleme $(\nabla^2 + k^2)\psi(x) = 0$ ile tanımlı serbest parçacığın Schrödinger dalga denkleminin homojen olmayan bir genelleşmesi gözüyle bakılabilir. Homojen olmayan (5.1) diferansiyel denkleminin çözümünün bulunması için

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)G(x,x') = \delta(x - x') \tag{5.2}$$

denkleminden faydalanılabilir. Eğer (5.2) ile verilen diferansiyel denklemin çözümü olarak bir $G(x,x')$ Green fonksiyonu bulunabilirse; bu fonksiyon yardımıyla (5.1) denkleminin genel çözümü olarak; $\psi_0(x)$ homojen denklemin çözümü olmak üzere

$$\psi(x)=\psi_0(x)+\int_{-\infty}^{\infty}G(x,x')V(x')\psi(x')dx' \tag{5.3}$$

ifadesinin yazılması mümkündür. Green fonksiyonu ötelemelere karşı invaryans olduğundan (Ek-1); (5.2) denklemi

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2}{dx^2}+k^2\right)G(x-x')=\delta(x-x') \tag{5.4}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu denklemdeki δ fonksiyonunun integral gösterimi serbest parçacığın operatörlerinin öz fonksiyonlarına göre

$$\delta(x-x')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iq(x-x')}dq \tag{5.5}$$

ile verilir. Bu integralde q, momentum uzayında bir boyutlu bir değişkendir. Bu integral gösterim, (5.4) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2}{dx^2}+k^2\right)G(x-x')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iq(x-x')}dq \tag{5.6}$$

ifadesine ulaşılır. Green fonksiyonunun integral gösterimi olarak

$$G(x-x')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(q,k)e^{iq(x-x')}dq \tag{5.7}$$

ifadesi alınır ve bu denklem (5.6)'da kullanılırsa; $b=\dfrac{2\mu}{\hbar^2}$ olmak üzere, *g(q ,k)* parametresi

$$\frac{1}{2\pi b}\int_{-\infty}^{\infty}g(q,k)\left[(-iq)(-iq)+k^2\right]e^{iq(x-x')}dq=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iq(x-x')}dq$$

hesabına göre

$$g(q,k)=\frac{b}{k^2-q^2} \tag{5.8}$$

olarak bulunur. Bu durumda Green fonksiyonunun integral gösterimi, (5.8) denkleminin (5.7)'de yerine yazılmasıyla elde edilebilir. Elde edilen ifadede $k = \pm q$ noktaları bu integralin basit kutup noktalarıdır. Bu kutup noktaları k'ya $i\varepsilon$ sonsuz küçük faktörünün eklenmesiyle q kompleks düzleminin reel ekseni üzerinden kaydırılabilir. Böylelikle farklı fiziksel durumların incelenmesi sağlanabilir. Bu integralin hesaplanmasının ardından $\varepsilon \to 0$ limitine gidilerek aranan integralin hesabı yapılmış olunur. Bu durumda Green fonksiyonuna ait integral gösterimi

$$G(x-x') = \frac{b}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iq(x-x')}}{(k+i\varepsilon)^2 - q^2}dq \tag{5.9}$$

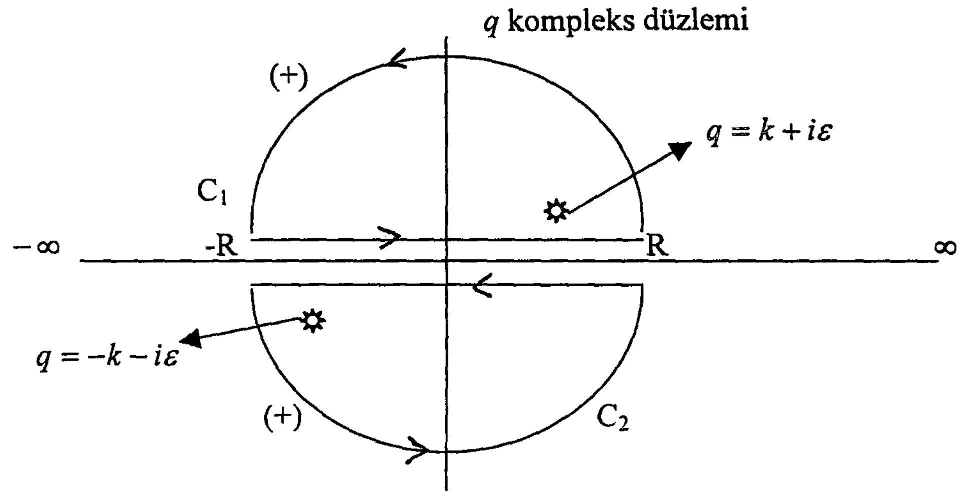
şeklinde olur. Bu integralin kutup noktaları

$$(k+i\varepsilon)^2 - q^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = k + i\varepsilon \\ q = -k - i\varepsilon \end{cases} \tag{5.10}$$

olarak bulunur. Kutup noktalarının q kompleks düzleminde gösterilişi ise Şekil 5.1'deki gibidir. Bu integral ise bazı düzenlemelerin yapılması kaydıyla Cauchy residü teoremi vasıtasıyla çözülebilir. Genel olarak Cauchy residü teoremi

$$\oint f(z)dz = 2\pi i \sum_j \operatorname{Re}s\left(z_j\right) \tag{5.11}$$

ile verilir. Bu formülde $\oint$ işareti z kompleks düzleminde kapalı bir konturu anlatırken; $\operatorname{Re}s\left(z_j\right)$ ise bu kapalı kontur içinde, z_j noktalarındaki kutupların residüleridir. Buna göre (5.9) integraline geri dönülürse; bu integrale Cauchy residü teoreminin uygulanabilmesi için q'ya sadece $+\infty$'dan $-\infty$'a kadar reel değerler alan bir kompleks değişken gözüyle bakılmalı ve kapalı bir kontur belirlenmelidir. $q = k + i\varepsilon$ kutup noktasının içine alan C_1 konturu Şekil 5.1'de verilmektedir.



Şekil 5.1 Kutup noktalarının q kompleks düzleminde gösterilişi ve bu düzlemde konturların şekli

C_1 konturu üzerinden hesaplanacak olan integralin $R \to \infty$ limitinde sıfıra eşiti olduğu gösterilebilirse; kalan kısım (5.9) integralinin eşiti olur ve Cauchy residü teoremi uygulanabilir. Bunun için Jordon lemmasından faydalanılır. Jordon lemmasının genel tanımı C_R, z kompleks düzleminin üst yarısında bir kapalı yarım çember olmak üzere

$$\lim_{R \to \infty}\left(\int_{C_R} e^{iaz} f(z)dz \right) = 0 \tag{5.12}$$

koşulunun gerçekleşebilmesi için $z \to \infty$ limitinde $f(z) \to 0$ olmalıdır. Şekil 5.1'deki C_1 konturu üzerinden hesaplanacak olan integralin integrantının $q \to \infty$ limitinde sıfıra eşit olabilmesi ve bu integralden $R \to \infty$ limitinde bir katkının gelmemesi için $q = q_1 + iq_2$ olarak alınır ve bu durumda integral içindeki eksponent

$$e^{i(q_1+iq_2)(x-x')} = e^{iq_1(x-x')}\, e^{-q_2(x-x')}$$

olur. Üst yarı düzlemde $q_2 \rangle 0$ ve $(x-x')\rangle 0$ olduğundan $q \to \infty$ limitinde eksponentin q_2'li terimi sıfıra gider. Dolayısıyla o integralden bir katkı gelmez ve çözümü aranan integral, Cauchy integral teoremi ile bulunabilecek duruma gelmiş olur. Benzeri yorumlar diğer kutup noktası için de yapılabilir. Bu kez alt kontur için $q_2 \langle 0$ ve $(x-x')\langle 0$ olur ve yine $q \to \infty$ limitinde Şekil 5.1'e göre C_2 konturu üzerinden hesaplanan integralden bir katkı gelmez. Bu durumda Green fonksiyonu için

$$G(x-x') = \frac{2\mu i}{\hbar^2}\sum_{i=1}^{2}\operatorname{Res}\,(q_i) \quad , \; i \text{ kutup noktalarının sayısı} \tag{5.13}$$

denklemi yazılabilir. O halde $(x-x')\rangle 0$ için (5.9) integralinin hesabı

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Res}\,(k+i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left.\frac{e^{iq(x-x')}}{-2q}\right|_{q=k+i\varepsilon}\right) = -\frac{e^{ik(x-x')}}{2k} \tag{5.14-a}$$

iken; $(x-x')\langle 0$ için (5.9) integralinin hesabı ise

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Res}\,(-k-i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\left.\frac{e^{iq(x-x')}}{-2q}\right|_{q=-k-i\varepsilon}\right) = -\frac{e^{-ik(x-x')}}{2k} \tag{5.14-b}$$

olarak elde edilir. Bu sonuçlar (5.13) formülü uyarınca birleştirildiğinde Green fonksiyonu için

$$G(x-x') = -\frac{i\mu}{\hbar^2 k}\left\{\theta(x-x')e^{ik(x-x')} + \theta(x'-x)e^{-ik(x-x')}\right\} = -\frac{i\mu}{\hbar^2 k}e^{ik|x-x'|} \tag{5.15}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadede yer alan θ basamak fonksiyonları (5.3) denklemiyle verilmiş olan $\psi(x)$dalga fonksiyonunun hesabında sonsuzluklarda integralin sonsuzluğa gitmesini önlemek ya da başka bir deyişle integralin sıfır vermesini sağlamak amacıyla getirilmiş bir fonksiyondur ve

$$\theta(x-x') = \begin{cases} 1 & , \; x\rangle x' \\ 0 & , \; x\langle x' \end{cases} \tag{5.16}$$

koşuluna göre çalışmaktadır. Bu durumda (5.3) denkleminde Green fonksiyonunun yerine yazılmasıyla birlikte; $\psi(x)$ genel çözümü

$$\psi(x) = e^{ikx} - \frac{i\mu}{\hbar^2 k}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\theta(x-x')e^{ik(x-x')} + \theta(x'-x)e^{-ik(x-x')}\right\}V(x')\psi(x')dx' \tag{5.17}$$

olarak ifade edilebilir. Bu ifadede yer alan integrali $(-\infty, x)$ ve (x,∞)şeklinde iki aralığa bölünürse, θ basamak fonksiyonunun integrali nasıl $-\infty$, ∞ noktalarında sıfıra götürdüğü görülebilir. Buna göre (5.17) integrali ikiye ayrılır ve θ'nın (5.16) ile verilen kurala göre çalıştığı düşünülecek olunursa

$$\psi(x)=e^{ikx}-\frac{i\mu}{\hbar^2 k}\left[\left\{e^{ikx}\int_{-\infty}^{x}e^{-ikx'}V(x')\psi(x')dx'\right\}+\left\{e^{-ikx}\int_{x}^{\infty}e^{ikx'}V(x')\psi(x')dx'\right\}\right] \tag{5.18}$$

elde edilir. Bu durumda $x\to\infty$ ve $x\to-\infty$ için çözümler sırasıyla

$$\psi(x)=\left(1-\frac{i\mu}{\hbar^2 k}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx'}V(x')\,\psi(x')\,dx'\right)e^{ikx}=S\,e^{ikx} \tag{5.19}$$

$$\psi(x)=e^{ikx}-\frac{i\mu}{\hbar^2 k}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx'}V(x')\,\psi(x')\,dx'\right)e^{-ikx}=e^{ikx}+\mathrm{R}e^{-ikx} \tag{5.20}$$

olarak elde edilir. Buna göre S ve R katsayıları için

$$S=1-\frac{i\mu}{\hbar^2 k}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx'}V(x')\,\psi(x')\,dx' \tag{5.21}$$

$$R=-\frac{i\mu}{\hbar^2 k}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx'}V(x')\,\psi(x')\,dx' \tag{5.22}$$

ifadeleri yazılabilir. Bu katsayıların fiziksel yorumları ise şu şekilde yapılabilir: $x>x'$ için (5.19) denklemine göre sadece sağa doğru ilerleyen bir dalga varken; $x<x'$ için (5.20) denklemine göre hem sağa hem de sola ilerleyen dalga vardır. Bu koşulda (5.20) denkleminin sağ tarafındaki ilk terim gelen dalga ikinci terim ise yansıyan dalga olarak yorumlanabilirken; (5.19) denklemindeki tek dalga fonksiyonu da iletilen dalga olarak yorumlanabilir. Bu durumda R ve S katsayılarına, $V(x)$ potansiyeli için yansıma ve iletilme katsayıları denebilir (Lipkin , 1973).

5.3 Rölativistik Kuantum Mekaniğinde Bir Boyutlu Saçılma Teorisi

Bu kısımda amaçlanan, standart kuantum mekaniği açısından incelenen saçılma teorisinin, 3. Bölüm' de geliştirilmeye çalışılan rölativistik yaklaşım açısından incelenmesidir. Burada saçılma incelenirken hareket noktası yine sonlu fark Schrödinger dalga denklemi olacaktır. Bir potansiyelin varlığı altında $\hbar=m=c=1$ birim sisteminde sonlu fark Schrödinger denklemi

$$\left[\cosh\left(i\frac{d}{dx}\right)-\cosh\chi\right]\psi(x)=-V(x)\psi(x) \tag{5.23}$$

formülüyle verilir. Bu denklem (5.1) denkleminin rölativistik yaklaşımdaki karşılığıdır. Bu denklemin çözümünün bulunabilmesi için

$$\left[\cosh\left(i\frac{d}{dx}\right)-\cosh\chi\right]G(x-x',\chi)=-\delta(x-x') \tag{5.24}$$

denkleminin çözümü olan bir Green fonksiyonu bulunmalıdır. Bu durumda (5.24) denkleminin genel çözümü için, (5.3) denkleminin benzeri olarak rölativistik serbest Schrödinger dalga denkleminin çözümü $e^{ix\chi}$ olmak üzere;

$$\psi(x)=e^{ix\chi}+\int_{-\infty}^{\infty}G(x-x',\chi)V(x')\psi(x')dx' \tag{5.25}$$

ifadesi yazılabilir. δ fonksiyonun rölativistik konfigürasyon uzayında integral gösterimi serbest parçacığın operatörlerinin öz fonksiyonlarına göre

$$\delta(x-x')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha(x-x')}\,d\alpha \tag{5.26}$$

ile verilmektedir. Burada α, rölativistik konfigürasyon uzayında χ argümanına benzer bir boyutlu bir büyüklüktür. O halde rölativistik Green fonksiyonunun integral gösterimi

$$G(x-x',\chi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\alpha,\chi)e^{i\alpha(x-x')}d\alpha \tag{5.27}$$

ile verilebilir. Yukarıdaki ifadede $g(\alpha,\chi)$ parametresi (5.27) ifadesinin (5.24)'de yerine yazılması ve δ fonksiyonunun integral gösterimi olan (5.26) denkleminin kullanılmasıyla

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\alpha,\chi)(\cosh\alpha-\cosh\chi)e^{i\alpha(x-x')}d\alpha=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha(x-x')}d\alpha \tag{5.28}$$

hesabına göre bulunabilir. Bu hesapla rölativistik konfigürasyon uzayında Green fonksiyonu için; singüler, sonlu fark (5.24) denklemi Fourier dönüşümü sayesinde cebirsel bir denkleme dönüşür ve bu cebirsel denklemin her iki tarafının kıyaslanmasından $g(\alpha,\chi)$ parametresi

$$g(\alpha,\chi)=\frac{1}{\cosh\chi-\cosh\alpha} \tag{5.29}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade ise, standart kuantum mekaniği açısından inceleme yapılırken bulunan ve (5.8) ile tanımlı $g(q,k)$ parametresinin rölativistik yaklaşımdaki karşılığıdır. Bulunan $g(\alpha,\chi)$ parametresi (5.27) denkleminde yerine yazılarak Green fonksiyonunun integral gösterimi bulunabilir. Bu ifadede de kutup noktaları, standart saçılma teorisinde yapılan işleme benzer olarak burada χ argümanına $i\varepsilon$ sonsuz küçük büyüklüğünün eklenmesiyle kaydırılabilir. Burada son olarak $x-x'=x$ yaklaşımı yapılarak Green fonksiyonunun integral gösterimi için

$$G(x,\chi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{\cosh(\chi+i\varepsilon)-\cosh\alpha}d\alpha \tag{5.30}$$

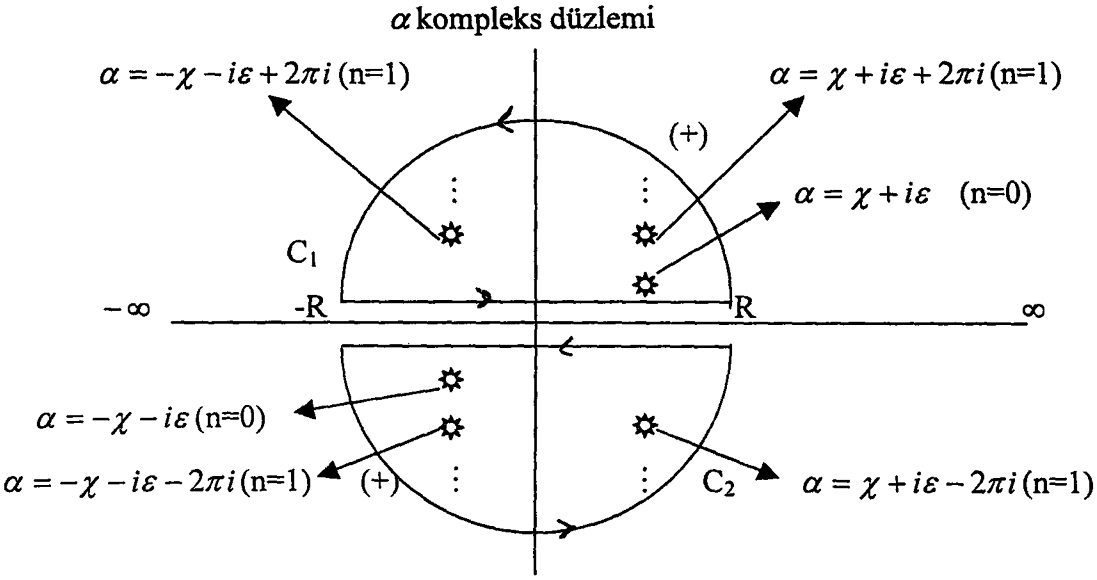
denklemi yazılabilir. Kutup noktaları ise

$$\cosh(\chi+i\varepsilon)-\cosh\alpha=0 \tag{5.31}$$

ifadesi kullanılarak bulunabilir. Hiperbolik fonksiyonlar sanal eksene göre periyodik fonksiyonlar olduklarından; kutup noktaları

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\chi+i\varepsilon+2\pi in\\ \alpha&=-\chi-i\varepsilon+2\pi in\end{aligned}\right\}\quad n=tam\quad sayı \tag{5.32}$$

şeklindedir. Verilen kutup noktalarının α kompleks düzleminde, n'nin hep pozitif olduğu dört grup halinde gösterilişi ise Şekil 5.2'deki gibidir.



Şekil 5.2 Kutup noktalarının α kompleks düzleminde gösterilişi ve bu düzlemde konturların şekli

Green fonksiyonunun integral ifadesi (5.30) denklemi standart kuantum mekaniğinde yapıldığı gibi Cauchy residü teoremi kullanılarak çözülebilir. Çözümde Cauchy residü teoreminin uygulanabilmesi için α 'ya sadece $+\infty$ 'dan $-\infty$ 'a kadar reel değerler alan bir kompleks değişken gözüyle bakılmalıdır. C_1 konturu üzerinden hesaplanacak olan integralin $R \to \infty$ limitinde sıfıra eşit olduğu gösterilirse; (5.30) integralinin çözümü için Cauchy residü teoremi uygulanabilir. Bu integralin sıfıra eşit olduğunun görülebilmesi için yine Jordon lemmasından faydalanılır. O halde Şekil 5.2'deki C_1 konturu üzerinden hesaplanacak olan integralin $R \to \infty$ limitinde sıfır olabilmesi için ; $\alpha \to \infty$ limitinde integrantının sıfır olması gerekir. O halde $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ şeklinde alınır ve bu durumda integral içindeki eksponent

$$e^{i(\alpha_1 + i\alpha_2)x} = e^{i\alpha_1 x} e^{-\alpha_2 x}$$

olur. Üst yarı düzlemde $\alpha_2 \rangle 0$ ve $x \rangle 0$ olduğundan $\alpha \to \infty$ limitinde eksponentin α_2 'li terimi sıfıra gider. Dolayısıyla bu integralden bir katkı gelmez ve çözümü aranan (5.30) denklemi Cauchy integral teoremi ile bulunabilir. Alt kontur içinse $\alpha_2 \langle 0$ ve $x \langle 0$ olur ve yine $\alpha \to \infty$ limitinde Şekil 5.2'ye göre C_2 konturu üzerinden hesaplanan integralden bir katkı gelmez. Bu durumda $x \rangle 0$ için Green fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
\underset{x\rangle 0}{G(x,\chi)} &= \frac{1}{2\pi} 2\pi i \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{-\sinh\alpha}\bigg|_{\alpha=\chi+i\varepsilon+2\pi in} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{-\sinh\alpha}\bigg|_{\alpha=-\chi+i\varepsilon+2\pi in} \right\} \\
&= -i\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} e^{ix\chi} \frac{e^{-2n\pi x}}{\sinh(\chi+2\pi in)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ix\chi} \frac{e^{-2n\pi x}}{\sinh(-\chi+2\pi in)} \right\}
\end{aligned}
\qquad (5.33)
$$

şeklindedir. Hiperbolik fonksiyonların sanal eksene göre periyodik olmalarından dolayı $\sinh(\chi+2\pi in)=\sinh\chi$ ve $\sinh(-\chi+2\pi in)=-\sinh\chi$ ifadeleri yazılabilir. Bu ifadeler (5.33)'de yerine yazılır ve gerekli düzeltmeler yapılırsa

$$
\underset{x\rangle 0}{G(x,\chi)} = -\frac{i}{\sinh\chi}\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} e^{ix\chi} e^{-2n\pi x} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ix\chi} e^{-2n\pi x} \right\} \qquad (5.34)
$$

elde edilir. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\pi x} = 1 + e^{-2\pi x} + e^{-4\pi x} + e^{-6\pi x} + \cdots$ şeklindeki seri açılımı $S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots\ldots$ formuna sahip sonsuza kadar giden bir geometrik seri tanımına uyar. Böyle bir geometrik serinin, terimleri toplamı $S_n = \frac{a}{1-q}$'dur. Bu geometrik seride $a=1$ ve $q = e^{-2\pi x}$ olduğuna göre (5.34) formülündeki ilk seri

$$
\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\pi x} = \frac{1}{1-e^{-2\pi x}} \qquad (5.35)
$$

ile verilirken; (5.34) ifadesindeki ikinci geometrik seri $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n\pi x}$ için benzer bir yolla

$$
\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n\pi x} = \frac{e^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}} \qquad (5.36)
$$

sonucuna ulaşmak mümkündür. Bu sonuçlar (5.34) Green fonksiyonu hesabında yerine yazılarak

$$
\underset{x\rangle 0}{G(x,\chi)} = -\frac{i}{\sinh\chi}\left\{ e^{ix\chi} \frac{1}{1-e^{-2\pi x}} - e^{-ix\chi} \frac{e^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}} \right\} \qquad (5.37)
$$

ifadesi elde edilir. $x\langle 0$ için Green fonksiyonu hesabı ise

$$
\begin{aligned}
\underset{x\langle 0}{G(x,\chi)} &= -\frac{1}{2\pi}2\pi i\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{-\sinh\alpha}\bigg|_{\alpha=\chi+i\varepsilon-2\pi in}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{-\sinh\alpha}\bigg|_{\alpha=-\chi-i\varepsilon-2\pi in}\right\} \\
&= -i\left\{\sum_{n=1}^{\infty}e^{ix\chi}\frac{e^{2n\pi x}}{-\sinh(\chi-2\pi in)}+\sum_{n=0}^{\infty}e^{-ix\chi}\frac{e^{2n\pi x}}{-\sinh(-\chi-2\pi in)}\right\}
\end{aligned}
\tag{5.38}
$$

şeklindedir. $\sinh(\chi-2\pi in)=\sinh\chi$ ve $\sinh(-\chi-2\pi in)=-\sinh\chi$ olduğundan; bu ifadeler (5.38)'de yerine yazılır ve gerekli düzeltmeler yapılırsa

$$
\underset{x\langle 0}{G(x,\chi)} = \frac{i}{\sinh\chi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}e^{ix\chi}e^{2n\pi x}-\sum_{n=0}^{\infty}e^{-ix\chi}e^{2n\pi x}\right\}
\tag{5.39}
$$

elde edilir. Bu denklemdeki iki geometrik serinin terimleri toplamları için sırasıyla

$$
\sum_{n=0}^{\infty}e^{2n\pi x}=\frac{1}{1-e^{2\pi x}}=\frac{e^{-2\pi x}}{e^{-2\pi x}-1}
\tag{5.40}
$$

$$
\sum_{n=1}^{\infty}e^{2n\pi x}=\frac{e^{2\pi x}}{1-e^{2\pi x}}=\frac{1}{e^{-2\pi x}-1}
\tag{5.41}
$$

ifadeleri bulunur. Buna göre $x\langle 0$ için Green fonksiyonu için

$$
\underset{x\langle 0}{G(x,\chi)} = -\frac{i}{\sinh\chi}\left\{e^{ix\chi}\frac{1}{1-e^{-2\pi x}}-e^{-ix\chi}\frac{e^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}}\right\}
\tag{5.42}
$$

ifadesine ulaşılır. Buna göre elde edilen (5.37) ve (5.42) denklemleri birleştirilerek rölativistik Green fonksiyonu

$$
G(x,\chi) = -\frac{2i}{\sinh\chi}\left\{e^{ix\chi}\frac{1}{1-e^{-2\pi x}}-e^{-ix\chi}\frac{e^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}}\right\}
\tag{5.43}
$$

olarak bulunur. Rölativistik Green fonksiyonuna ait (5.43) denkleminde yer alan $\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi x}}\right)$ ve $\left(-\frac{e^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}}\right)$ ifadeleri birazdan tanımlanacak sonlu fark basamak operatörleridir. Bu operatörlerin standart kuantum mekaniğindeki hesaplarda kullanılan basamak fonksiyonlarından farklı bir özelliği vardır. Bu özellik onların aşağıda (5.44) ve (5.45) ile tanımlı ifadeleri uyarınca sürekli olmalarıdır. Buna göre sonlu fark basamak operatörleri

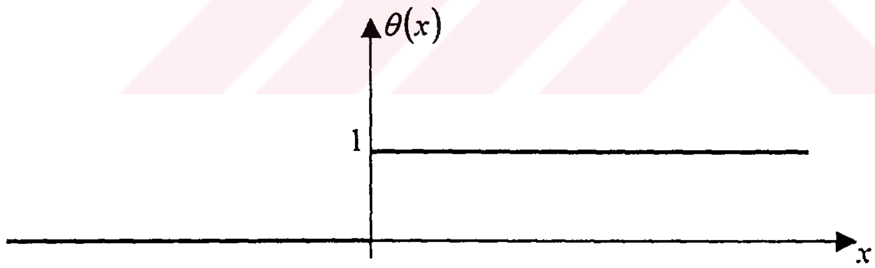
$$\hat{\theta}(x) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi x}} \tag{5.44}$$

$$\hat{\theta}(-x) = -\frac{e^{-2\pi x}}{1 - e^{-2\pi x}} = 1 - \frac{1}{1 - e^{-2\pi x}} \tag{5.45}$$

ile tanımlıdır. Dolayısıyla rölativistik Green fonksiyonunun son hali

$$G(x, \chi) = -\frac{2i}{\sinh \chi} \left\{ e^{ix\chi} \hat{\theta}(x) + e^{-ix\chi} \hat{\theta}(-x) \right\} \tag{5.46}$$

olarak elde edilir. Bulunan Green fonksiyonunun (5.25) dalga fonksiyonu denkleminde yerine konulmadan önce sonlu fark basamak operatörleri ile standart basamak fonksiyonu incelenerek kıyaslamalar yapılabilir. İncelemelere standart basamak fonksiyonuyla başlanabilir. Standart basamak fonksiyonunun x'e göre değişimi (5.16) formülüyle verilmektedir. Buna göre basamak fonksiyonun x'e göre değişim grafiği ise Şekil 5.3'deki gibidir.



Şekil 5.3 Basamak fonksiyonu $\theta(x)$'in x'e göre değişim grafiği

Grafikten de görüleceği üzere basamak fonksiyonu kesikli bir fonksiyondur. Basamak fonksiyonuyla δ fonksiyonu arasındaki ilişki

$$\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x) \tag{5.47}$$

şeklinde tanımlıdır. Basamak fonksiyonuna ait integral gösterimi, $i\varepsilon$ sonsuz küçük bir faktör olmak üzere;

$$\theta(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iqx}}{q - i\varepsilon}dq \qquad (5.48)$$

ile tanımlıdır. Yazılan (5.48) ifadesinin türevi alındığında (5.5) ile verilen δ fonksiyonunun $x' = 0$ için eşiti elde edilir. Basamak fonksiyonuna ait integralin $q = i\varepsilon$ 'da bir kutup noktası vardır ve bu kutup noktasını içine alan kontur q kompleks düzlemin üst yarısında bir çemberdir. $x > 0$ için Jordon lemmasına göre; çemberin yarıçapı sonsuza gittiğinde eğri üzerinden integral sıfır olurken basamak fonksiyonunun hesabı Cauchy integral teoremine göre residü hesabıyla yapılabilir. Bu durumda

$$\theta(x) = \frac{1}{2\pi i}2\pi i \lim_{\varepsilon\to 0}[\mathrm{Re}\,s\,(i\varepsilon)] = \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{e^{iqx}}{1}\right|_{q=i\varepsilon} = 1 \qquad (5.49)$$

olarak bulunur. $x < 0$ için alt yarı düzlemde kutup noktası olmadığından integral sonucu sıfır olur. Böylelikle $x > 0$ ve $x < 0$ için basamak fonksiyonunun (5.16) ile tanımlı çalışma kuralı test edilmiştir. Görüldüğü gibi basamak fonksiyonu kesikli bir fonksiyondur. Rölativistik saçılma probleminin incelenmesinde karşılaşılan sonlu fark basamak operatörünün tanımı ise (5.47) genel tanımına benzer olarak

$$\hat{\Delta}\hat{\theta}(x) = \delta(x) \qquad (5.50)$$

şeklinde ifade edilebilir; çünkü standart kuantum mekaniğindeki adi türev operatörünün rölativistik yaklaşımdaki karşılığı sonlu fark operatörüdür. Bu tanıma uyabilen $\hat{\theta}(x)$ sonlu fark basamak operatörünün integral gösterim önerisi ise yine $i\varepsilon$ sonsuz küçük bir büyüklük olmak üzere

$$\hat{\theta}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{e^{\alpha - i\varepsilon} - 1}d\alpha \qquad (5.51)$$

ile verilebilir. Verilen bu operatörün (5.50) koşulunu sağladığı, (5.26) ifadesinin de kullanılmasıyla

$$\hat{\Delta}\hat{\theta}(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[i\frac{1}{2\pi i}\left(e^{-i\frac{d}{dx}}-1\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{e^{\alpha-i\varepsilon}-1}d\alpha\right]=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}\left(e^{\alpha}-1\right)}{e^{\alpha-i\varepsilon}-1}d\alpha\right]$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}d\alpha=\delta(x) \qquad (5.52)$$

işleminden görülür. Sonlu fark basamak operatörüne ait (5.51) integral gösteriminde uzaklık mertebesinin büyüdüğü yani $x\to\pm\infty$ olduğu durumlar düşünülürse standart basamak fonksiyonu gibi çalıştığı söylenebilir:

$$\lim_{x\to\infty}\hat{\theta}(x)=1$$
$$\lim_{x\to-\infty}\hat{\theta}(x)=0 \qquad (5.53)$$

Basamak operatörünün (5.51) ile verilen integrali için kutup noktası $\alpha=i\varepsilon$ olur ve kontur α kompleks düzlemin üst yarısında bir çemberdir. x>0 için

$$\hat{\theta}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{e^{\alpha-i\varepsilon}-1}d\alpha=\frac{1}{2\pi i}2\pi i\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\operatorname{Res}\,(i\varepsilon)\right]=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left.\frac{e^{i\alpha x}}{e^{\alpha}}\right|_{\alpha=i\varepsilon}\right)=1$$

olurken; alt yarı düzlemde bir kutup noktası olmadığı için sonuç sıfırdır.

Tüm bu hesaplamaların ardından (5.46) rölativistik Green fonksiyonu (5.25) denkleminde kullanılarak; dalga fonksiyonu hesabına geçilirken $x\to x-x'$ yapılırsa, dalga fonksiyonu

$$\psi(x)=e^{ix\chi}-\frac{2i}{\sinh\chi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i(x-x')\chi}\hat{\theta}(x-x')+e^{-i(x-x')\chi}\hat{\theta}(x'-x)\right)V(x')\psi(x')dx' \qquad (5.54)$$

elde edilir.

6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Rölativistik kuantum mekaniğinin Lorentz grup gösterim teorisine dayandırılarak geliştirildiği bu çalışma, standart kuantum mekaniğinin postülalarını sağlaması itibariyle rölativistik teoriye yeni bir yaklaşımdır. Bu teoride serbest parçacığın hareketi, λ parçacığın Compton dalga boyu olmak üzere; üniter, indirgenemez Lorentz grup gösterimlerinin matris elemanı olan $e^{ix\chi/\lambda}$ düzlem dalgası ile tasvir edilmektedir. Rölativistik parçacığın enerjisi ve momentumu arasındaki ilişkiyi anlatan kütle kabuğu denklemi Lobachevsky momentum uzayını tasvir eder. Bu denklemin hareketler grubu ise Lorentz grubudur. Bu uzayda serbest parçacığın enerji ve momentum operatörleri, sonlu fark operatörlere göre yazılırken; bu operatörlerin rölativistik düzlem dalgaya etki ettirilmeleri sonucunda özdeğer denklemlerini sağladıkları görülmüştür. Rölativistik kuantum mekaniğinde sonlu fark Schrödinger dalga denklemi standart kuantum mekaniğindeki Schrödinger dalga denkleminden ayırt edilemeyecek bir formda yazılmıştır. Rölativistik kuantum mekaniğinin sonlu fark operatörleriyle, standart kuantum mekaniğinin adi türev operatörü arasındaki ilişkiden yola çıkılarak, sonlu fark operatörleri için adi türev operatörü ile uyumlu bir türev tablosunun oluşturulmasıyla sonlu fark hesaplar geliştirilmiştir.

Diferansiyel formlar teorisinin bir deformasyonu olarak koordinat fonksiyonlarının birbiriyle komütatif; fakat koordinat fonksiyonlarının diferansiyellerle komütatif olmadığı bir cebir tasarlanarak oluşturulan bu matematiksel dilin, sonlu fark Schrödinger dalga denkleminin yazılması için uygun olduğu gösterilmiştir.

Rölativistik saçılma teorisi standart kuantum mekaniksel saçılmayla kıyaslanarak geliştirilmiştir. Rölativistik Green fonksiyonu hesabı hiperbolik argümanın kompleks düzleminde yapılarak, dalga fonksiyonu için genel çözüm sonlu fark basamak operatörlerinden faydalanılarak elde edilmiştir.

Bu yaklaşımda devam eden çalışmalardan biri momentum operatörlerinin iki boyuta genelleştirilmesinin Poincaré Lie cebrinden elde edilmesidir (Mir-Kasimov vd., 2000). İleride araştırma konusu olabilecek alanlar ise saçılma teorisinin üç boyuta genelleştirilmesi, saçılma genliğinin, dalga fonksiyonunun analitik özelliklerinin incelenmesi ve kuantum alan teorisi için ayar teorisinin geliştirilmesidir.

KAYNAKLAR

Arfken, G. (1970), Mathematical Methods For Physicists, Academic Press, New York.

Bateman, H. (1953), Higher Transcendental Functions, McGraw-Hill Book Company, New York.

Bjorken, J.D. ve Drell, S.D. (1964), Relativistic Quantum Mechanics, McGraw-Hill Book Company, New York.

Connes, A. (1994), Non-commutative Geometry, Academic Press, New York.

Davydov, A. S. (1965), Quantum Mechanics, Pergamon Press, Oxford.

Dereli, T. ve Verçin, A. (1998), Kuantum Mekaniği 1, Metu Press, Ankara.

Dimakis, A. ve Müller-Hoissen, F. (1997), "Some Aspects of Noncommutative Geometry and Physics", Journal of Mathematical Physics , 40, 1528.

Itzykson, C. ve Zuber, J.B. (1980), Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New York.

Lipkin, H. (1973), Quantum Mechanics New Approaches to Selected Topics, American Elsevier Pub. Co., New York.

Mir-Kasimov, R.M. ve Oğuz, O., (1999), "Relativistic Schrödinger Equation in Quantum Space", VI. International Wigner Symposium, 16-22 Aug. 1999, İstanbul.

Mir-Kasimov, R.M., Can, Z., Güven, Z. ve Oğuz, O., (2000), "Poincaré Lie Algebra and Noncommutaive Differential Calculus", XXIII International Colloquim on Group Theoretical Methods in Physics, 30 July-05 Aug. 2000, Dubna.

Mir-Kasimov, R.M. (2000), "Fock's Theory of Hydrogen Atom and Quantum Space", Physics of elementary Particles and Atomic Nuclei, 31/1,2000,91.

Shankar, R. (1980), Principles of Quantum Mechanics, Plenum Press, New York.

Wang, Z.X. ve Guo, D.R. (1989), Special Functions, World Scientific Publishing, Singapore.

EK-1

Green Fonksiyonlarının Öteleme İnvaryanslığı

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2}{dx^2}+k^2\right)G(x,x')=\delta(x-x')$$

denklemi x doğrultusunda a(sabit) kadar ötelenirse

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2}{d(x+a)^2}+k^2\right)G(x+a,x'+a)=\delta(x+a-x'-a)$$
$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2}{dx^2}+k^2\right)G(x+a,x'+a)=\delta(x-x')$$

elde edilir. Buna göre $G(x+a,x'+a)=G(x,x')=G(x-x')$ yazılabilir.

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2}{dx^2}+k^2\right)G(x-x')=\delta(x-x')$$

ifadesiyle

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2}{dx^2}+k^2\right)G(y-y')=\delta(y-y')$$

ifadeleri düşünüldüğünde $y=x+a$ ve $y'=x'+a$ ise

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2}{d(x+a)^2}+k^2\right)G(x+a-x'-a)=\delta(x+a-x'-a)$$
$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2}{dx^2}+k^2\right)G(x-x')=\delta(x-x')$$

elde edilir. Bu da öteleme dönüşümleri altında Green fonksiyonunun $G(x-x')=G(y-y')$ şeklinde invaryant olduğunu gösterir.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	27.04.1977	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1990-1993	Ataköy Lisesi
Lisans	1993-1998	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Fizik Bölümü
Yüksek Lisans	1998-2001	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Fizik Bölümü

Çalıştığı kurumlar

	2000- Devam ediyor	YTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Araştırma Görevlisi