

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GEMİ TEKNE FORMUNUN MATEMATİKSEL  
YÖNTEMLERLE MODELLEMESİ**

Gemi İnşaatı ve Gemi Makinaları Müh. Fatih DÖNMEZ

F.B.E Gemi İnşaatı Mühendisliği Anabilim Dalında  
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

106275

Tez Danışmanı : Doç.Dr. Mesut Güner

106275  
Doç.Dr. Mesut Güner  
Mentem

Doç. Dr. Ahmet D. Alkan  
Dankun

Doç. Dr. Muhittin Söylemez  
Koyun

İSTANBUL, 2001

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ .....	iii
KISALTMA LİSTESİ.....	iv
ŞEKİL LİSTESİ .....	v
ÖNSÖZ .....	vii
ÖZET .....	viii
ABSTRACT .....	ix
1. GİRİŞ .....	1
2. GEMİ TEKNE FORMUNUN İFADESİNDE KULLANILAN MATEMATİKSEL YÖNTEMLERİN TARİHÇESİ.....	3
3. GEMİ TEKNE FORMUNUN MODELLENMESİNDE KULLANILAN EĞRİLERİN MATEMATİKSEL OLARAK İFADE YÖNTEMLERİ.....	10
3.1 Kübik Spline Eğri Yöntemleri.....	10
3.2 Bézier Eğrileri .....	31
3.3 B-spline Eğrileri .....	35
3.4 NURBS Eğrileri.....	40
4. GEMİ FORMUNUN MODELLENMESİNDE KULLANILAN YÜZEYLERİN MATEMATİKSEL OLARAK İFADE YÖNTEMLERİ.....	44
4.1 B-Spline Yüzeyleri .....	44
4.2 NURBS Yüzeyleri .....	48
5. EĞRİ UYDURMA YÖNTEMLERİNİN İNCELENMESİ.....	51
5.1 Global Enterpolasyon Yöntemi .....	52
6. EĞRİ UYDURMA YÖNTEMİNİN GEMİ TEKNE FORMUNUN MODELLENMESİNDEKİ UYGULAMASI .....	57
7. SONUÇ .....	64
ÖZGEÇMİŞ.....	66

## SİMGE LİSTESİ

$B_i$	Kontrol noktalarının konum vektörü
$B_{i,j}$	Yüzeyi tayin eden poligon tel kafesin kontrol noktaları
$E$	Young Modülü
$h_i$	Kontrol noktalarındaki ağırlık değeri.
$I$	Atalet Momenti
$j_{n,i}$	$u$ doğrultusundaki Bézier temel fonksiyonu
$k$	Eğrinin mertebesi
$K_{m,j}$	$w$ doğrultusunda Bézier temel fonksiyonu
$m$	$w$ yönündeki kontrol noktası sayısı
$n$	$u$ yönündeki kontrol noktası sayısı
$P(t)$	Kübik spline eğri parçası üzerindeki herhangi bir noktanın konum vektörü
$R(x)$	Eğrilik Yarıçapı
$t_1$	Eğri parçasının başlangıç noktasındaki parametre değeri
$t_2$	Eğri parçasının başlangıç noktasındaki parametre değeri
$t$	Parametre değeri
$u$	Parametre değeri
$w$	Parametre değeri
$x_i$	Düğüm noktası vektörü elemanı
$y_i$	Düğüm noktası vektörü elemanı

---

## **KISALTIMA LİSTESİ**

<b>CFD</b>	<b>Computational Fluid Dynamics</b>
<b>IGES</b>	<b>International Graphics Exchange Specification</b>
<b>NURBS</b>	<b>Non-Uniform Rational B-Spline</b>



**ŞEKİL LİSTESİ****Sayfa**

Şekil 3.1	Kübik spline eğrisi .....	15
Şekil 3.2	Parametre yöntemi ve sınır şartı koşullarına göre kübik spline eğrisi .....	23
Şekil 3.3	Parametre yöntemi ve sınır şartı koşullarına göre kübik spline eğrisi .....	24
Şekil 3.4	Parametre yöntemi ve sınır şartı koşullarına göre kübik spline eğrisi .....	25
Şekil 3.5	Kübik spline yöntemine göre çizilmiş seri 60 tipi bir geminin posta kesiti .....	26
Şekil 3.6	Kübik spline yöntemine göre çizilmiş seri 60 tipi bir geminin posta kesiti .....	27
Şekil 3.7	Kübik spline yöntemine göre çizilmiş seri 60 tipi bir geminin posta kesiti .....	28
Şekil 3.8	Kübik spline yöntemine göre çizilmiş seri 60 tipi bir geminin su hattı eğrileri	29
Şekil 3.9	Kübik spline yöntemine göre çizilmiş seri 60 tipi bir geminin su hattı eğrileri	30
Şekil 3.10	Bezier eğrisi ve kontrol noktaları.....	31
Şekil 3.11	Bezier eğrisinin mertebesine göre kontrol noktalarının kaplama alanı.....	33
Şekil 3.12	Bezier / Bernstein temel fonksiyonları , a) 3 kontrol noktası, n = 2;b) 4 kontrol noktası, n = 3; c) 4 kontrol noktası, n = 5; d) 5 kontrol noktası, n = 6.....	34
Şekil 3.13	Düzgün periyodik B-spline temel fonksiyonları, $[X] = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7]$ , n+1 = 4, k = 3 .....	38
Şekil 3.14	Düzgün açık B-spline temel fonksiyonları , $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ ]$ n+1=4, k=3 .....	38
Şekil 3.15	Değişik mertebe değerlerinin B-spline eğrisine etkisi .....	39
Şekil 3.16	Bir kontrol noktası üzerinde birden fazla kontrol noktası tanımlanmasının B-spline eğrisine etkisi.....	40
Şekil 3.17	Rasyonel B-spline temel fonksiyonları n+1 = 5, k = 3, açık düğüm vektörü $[X] = \{0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3\}$ , $[H] = [1 \ 1 \ h_3 \ 1 \ 1]$ , a) $h_3=0$ , b) $h_3=0.25$ , c) $h_3=1.0$ , d) $h_3=5$ .....	42
Şekil 3.18	Rasyonel B-spline eğrisi ,n+1 = 5, k = 3, açık düğüm vektörü $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$ , $[H] = [1 \ 1 \ h_3 \ 1 \ 1]$ , a) $h_3=0$ , b) $h_3=0.25$ , c) $h_3=1.0$ , d) $h_3=5$ .....	43
Şekil 4.1	Üçüncü dereceden B-spline yüzeyleri.....	46
Şekil 4.2	Aynı nokta üzerinde birden fazla tanımlanmış kontrol noktasının dördüncü mertebeden B-spline yüzeyine etkisi .....	47
Şekil 4.3	B-spline yüzeyinde lokal kontrol .....	47
Şekil 4.4	Kimyasal bir tankerin baş formunun NURBS yüzeyi ile ifadesi.....	49
Şekil 4.5	Kimyasal bir tankerin baş formunun NURBS yüzeyi ile ifadesi.....	50

Şekil 5.1	Enterpolasyon yöntemine göre eğri uydurma.....	51
Şekil 5.2	Yaklaşım yöntemine göre eğri uydurma .....	52
Şekil 5.3	Değişik parametre ve düğüm vektörüne göre eğri uydurma örneği.....	56
Şekil 5.4	Değişik parametre ve düğüm vektörüne göre eğri uydurma örneği.....	56
Şekil 6.1	Ofset değerlerinden B-spline eğrisi geçirilmiş posta kesiti .....	59
Şekil 6.2	Ofset değerlerinden B-spline eğrisi geçirilmiş posta kesiti .....	60
Şekil 6.3	Ofset değerlerinden B-spline eğrisi geçirilmiş posta kesiti .....	61
Şekil 6.4	Ofset değerlerinden B-spline eğrisi geçirilmiş posta kesiti .....	62
Şekil 6.5	Ofset değerlerinden B-spline eğrisi geçirilmiş su hattı kesitleri.....	63



## **ÖNSÖZ**

Yüksek lisans tez çalışmamda, bu konuda çalışmama olanak veren tez danışmanım Doç.Dr. Mesut Güner'e teşekkür ederim. Tezin hazırlanma sürecinde değerli katkılarından dolayı Kaya Aroymak, Sema Çavuşoğlu, Yeşim Dođan, Taner Dođan, Ömer Saatçiođlu, Olcay Çetiner ve Aylin Güler'e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Hayat boyu maddi, manevi desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ne kadar teşekkür etsem azdır. Hakkınızı hiçbir zaman ödeyemem.



## ÖZET

Günümüzde yaygın rekabetin hüküm sürdüğü bir ortamda gemi ön tasarımı ve hesaplamaları çok kısa bir sürede yapılmak zorundadır. Bu kısa süre içerisinde yapılan çalışmalar daha sonraki çalışmaların da temelini oluşturacağından kabul edilebilir doğrulukta ve belirli bir hassasiyet içerisinde yapılması gerekmektedir. Sözü geçen bu çalışmaların istenen hassasiyet ve kabul edilebilir düzeyde olabilmesi ancak bilgisayarlar ve bilgisayar programları yardımıyla yapılabilir ve tezin konusu da bu süreçte devreye girmektedir. Gemi formunun matematiksel ifadesi sayesinde, optimum gemiye ulaşmak için gemi dizayn spiralinde yapılan döngüler son derece kısa zamanda gerçekleştirilebilir, alternatif çözümler süratle elde edilebilir.

Bu tezde gemi tekne formunun matematiksel olarak ifade edilme yöntemleri incelenmiş ve eğri uydurma tekniklerinden global enterpolasyon yöntemiyle bir uygulama çalışması yapılmıştır. Uygulama çalışması için C programlama dilinde bir program yazılmıştır. Program bir gemiye ait ofset değerlerini okuyarak bu noktalardan global enterpolasyon yöntemiyle B-spline eğrisi geçirmektedir.

**Anahtar Kelimeler :** Gemi tekne formunun matematiksel ifadesi, B-spline, NURBS, Eğri uydurma



## **ABSTRACT**

In today's highly competitive market ship builders and designers have to be capable of offering optimum designs usually implying low first cost and in acceptable truth of calculations which is possible only by applications of computers and softwares. The mathematical definition of ship hull form is important and is our subject in this way. Defining mathematical definition of ship hull form and applying this to the computers reduces the time for calculations so the loop in design spiral .This let designers produce more alternatives for the design.

This thesis describes the mathematical definition of ship hull form and introduces curve fitting procedure . As curve fitting procedure global interpolation method is applied to B-spline curves using the ship offset values as input datas. As an application a computer program is devoleped using C programming language.

**Keywords :** Mathematical definition of ship hull form, B-spline, NURBS, Curve fitting

## 1. GİRİŞ

Günümüzde yaygın rekabetin hüküm sürdüğü bir ortamda gemi ön tasarımı ve hesaplamaları çok kısa bir sürede yapılmak zorundadır. Bu kısa süre içerisinde yapılan çalışmalar daha sonraki çalışmaların da temelini oluşturacağından kabul edilebilir doğrulukta ve belirli bir hassasiyet içerisinde yapılması gerekmektedir. Sözü geçen bu çalışmalar istenen hassasiyet ve kabul edilebilir düzeyde olabilmesi ancak bilgisayarlar ve bilgisayar programları yardımıyla yapılabilir.

Son yıllarda bilgisayarın hızla gelişmesi ve her alanda olduğu gibi gemi inşaatına da yoğun bir şekilde girmesi, bu alan içerisindeki hesapların ve çizimlerin bilgisayar tarafından yapılmasının sağladığı avantajlar karşısında araştırmacıları yeni yöntemlerin bulunup geliştirilmesi yönünde çalışmalara sevk etmiştir.

Bilgisayarlar, ekonomik mühendislik problemlerinin çözümünde mümkün olduğunca kabullerden arınmış, mümkün olduğunca bilimsel temelli, hassas ve süratli çözüm imkanı veren metodların kullanılmasını zorunlu kılmaktadır. Bu düşüncenin gemi inşaatına uygulanması, hesapların büyük çoğunluğuna temel teşkil eden gemi formunun olabildiğince hassas olarak matematiksel ifadesini gerektirir ki bunu mümkün kılan yöntemlerin incelenmesi de bu tezin konusudur.

Gemi formunun matematiksel olarak ifade edilme amacı aşağıda sıralanmıştır.

- Gemi tasarımı ve inşaatında bütün hesaplamalar gemi formuna bağlı olduğu için diğer hesapların da düzgün şekilde yapılabilmesi için matematiksel ifade gereklidir.
- Hidrodinamik, hidrostatik ve stabilite hesaplarında büyük kolaylık sağlamaktadır. Matematiksel yüzey denklemleriyle dizayn hesaplarında istenen hassasiyette sonuçlar elde edilebilmektedir
- Matematiksel ifade bilgisayar destekli imalatın temelini oluşturmaktadır.
- Eğrilerin ve yüzeylerin teğetleri, eğrilik yarıçapları vb. özellikleri kolayca hesaplanabilmektedir.

İkinci bölümde, gemi formunun ifadesinde kullanılan matematiksel yöntemlere kısaca değinilmiştir. Ayrıca üçüncü bölümde ayrıntılı olarak anlatılan kübik spline eğrisi, Bézier eğrileri, B-spline eğrileri, NURBS eğrileri ve NURBS yüzey ifade yöntemleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, tiriz ve ağırlıkların kullanıldığı gemilerin 1/1 ölçekte çizildiği endezhanelerden bilgisayar ekranına geçişte önemli bir yer tutan kübik spline eğrilerinin matematiksel olarak ifadesi anlatılmıştır. Daha sonra günümüz gemi tasarımında kullanılan bilgisayar programlarının temelini oluşturan ve Amerikan Ulusal Standartlar Enstitüsü tarafından da dosya paylaşımı için bir standart oluşturulan B-spline, NURBS eğrileri

incelenmektedir. Bundan önce ise standarda konu olan eğrilerin temelini oluşturulan ve bilgisayarla tasarım alanında bir dönüm noktası olan Bézier eğrisi incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, günümüz gemi dizayn bilgisayar programlarının temelini oluşturduğu B-spline ve NURBS yüzeyleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde gemi inşaatı uygulamalarında önemli bir yer tutan eğri uydurma teknikleri incelenmiştir. Bilindiği gibi yeni bir gemi tasarımına başlanırken çoğunlukla örnek bir gemiden veya kabaca çizilmiş bir taslak resimden yola çıkılır. Bu taslak resimden daha sonra ara postalar çizilerek ön tasarım hesapları ve eğri düzgünleştirme işlemi yapılmaktadır. Bu süreç taslak resimdeki ofset değerlerinin eğri uydurma teknikleriyle bilgisayara aktarılması ve bu değerlerden bir eğri veya yüzey geçirilmesiyle önemli ölçüde kısalmaktadır.

Altıncı bölümde uygulama çalışması olarak beşinci bölümde incelenen global enterpolasyon yönteminin gemi tekne formunun modellenmesindeki uygulaması yapılmıştır.



## 2. GEMİ TEKNE FORMUNUN İFADESİNDE KULLANILAN MATEMATİKSEL YÖNTEMLERİN TARİHÇESİ

Son yıllarda bilgisayarın hızla gelişmesi ve her alanda olduğu gibi gemi inşaatına da yoğun bir şekilde girmesi, bu alan içerisindeki hesapların ve çizimlerin bilgisayar tarafından yapılmasının sağladığı avantajlar karşısında araştırmacıları yeni yöntemlerin bulunup geliştirilmesi yönünde çalışmalara sevk etmiştir. Bu çalışmalardaki esas amaç bilgisayarlar yardımıyla geometrik tasarım için geliştirilen matematiksel modelin teknik ressamların çizim için kullandıkları metal, ağaç veya plastik tirizlerin fiziksel karşılığı olmasıdır. Özellikle gemi inşaatında gemi en kesit eğrilerinin, su hattı eğrilerinin matematiksel olarak modellenmesiyle, çalışmanın yapıldığı bilgisayara da bağlı olarak istenen hassasiyette hesaplama olanağı sunulmaktadır. Bu da günümüzde gemi tasarımı için kullanılan bilgisayar programlarının temelini oluşturmaktadır. Ayrıca bu yöntemlerin gelişmesiyle de 1/1 ölçekte yapılan eğri düzeltme ya da kalıp çıkarma gibi endaze işlemlerine de gerek kalmamıştır. Böylelikle zaman ve para tasarrufu sağlanmıştır.

Gemi formunun matematiksel olarak ifade edilme amacı aşağıda sıralanmıştır.

- Gemi tasarımı ve inşaatında bütün hesaplamalar gemi formuna bağlı olduğu için diğer hesapların da düzgün şekilde yapılabilmesi için matematiksel ifade gereklidir.
- Hidrodinamik, hidrostatik ve stabilite hesaplarında büyük kolaylık sağlamaktadır. Matematiksel yüzey denklemleriyle tasarım hesaplarında istenen hassasiyette sonuçlar elde edilebilmektedir
- Matematiksel ifade bilgisayar destekli imalatın temelini oluşturmaktadır.
- Eğrilerin ve yüzeylerin teğetleri, eğrilik yarıçapları vb. özellikleri kolayca hesaplanabilmektedir.
- Gemi endazesinin bire bir ölçekle çizilme zorunluluğu ortadan kalkmıştır. Ayrıca istenen hassasiyette değerler elde edilebilmektedir.

Gemi gövde formunun matematiksel olarak ifade edilmesi uzun süreden beri araştırılmaktadır. Daire ve elips gibi basit geometrik şekiller, kolay imalatından dolayı, eski gemilerde sıkça kullanılmıştır.

1940'lı senelerin başlarında kaynak teknolojisinin gemi inşaat sanayiine girmesiyle, parçaların daha hassas bir şekilde imal edilmesi gerekliliğini ortaya koymuştur. Bu ihtiyaç üzerine birçok araştırmacı gemi formunun matematiksel olarak ifade edilmesi konusunda araştırmalar yapmıştır.

Gemi formunun matematiksel olarak ifade yöntemi ilk olarak , İsveçli bilim adamı Chapman (1760) tarafından araştırılmıştır. İlk olarak su hatları için parabol eğrilerini kullandı. Daha sonra Nystrom (1863) Chapman'ın çalışmalarını genişleterek gemi eğrilerinin ifadesinde çeşitli mertebede polinomlarda kesirleri ve integral bileşenlerini de kullandı.

Matematiksel gemi eğrilerinin ifadesinde bir öncülük niteliği taşıyan çalışmalar D.W. Taylor tarafından yapılmıştır. Taylor matematiksel ifadeler kullanarak prototip bir gemi formunu yaratmış, daha sonra bu formu çeşitli geometrik form parametreleriyle türeterek çeşitli gemi formu serileri yaratmıştır. Amacı, şekil olarak birbirine benzeyen ve sistematik olarak form parametreleriyle türetilen gemi eğrileri oluşturmaktır. Taylor form parametreleri yardımıyla kesit alan eğrileri, su hatları ve en kesit eğrilerini çizdirmiştir. Kesit alan eğrisi ve su hatları eğrilerinin ifadesinde 4. ve 5. mertebeden kapalı olmayan fonksiyonlar yaklaşımından yararlanmıştır.

$$y(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (2.1y)$$

Bu yaklaşımla Taylor, Taylor serileri olarak bilinen ve sistematik olarak gemi form parametrelerine bağlı olarak çeşitli form serileri üretmiştir. Çeşitli sayıda Amerikan savaş gemisi Taylor serilerine göre inşa edilmiştir. Gemi formunun polinomlarla ifadesi her ne kadar basit ve kullanışlı olsa da, düz dip, sabit sintine dönüm yarıçapı, sintine kalkımı gibi gemi formlarının ifadelerinde yeterli değildir.

Benson (1940) su hatlarının ifadesinde, form parametrelerine bağlı olarak 5. dereeden polinomlar kullanmıştır.

Watanabe (1946) benzer şekilde Benson 'un yaptığı gibi su hatlarının ifadesinde sadece çift sayı olmak üzere 10. dereceye kadar polinomlar kullanmıştır. Polinom katsayıları alan, statik moment ve giriş-çıkış açıları gibi form parametrelerine bağlıydı.

1950'li yılların başlarında bilgisayarın gemi inşaa alanına girmesiyle gemi formunun matematiksel olarak ifade yöntemlerinde de bir takım değişiklikler oldu. Gemi elemanlarının imalatında sayısal kontrollü tezgahların kullanılmasına başlanmasıyla daha hassas bilgilere, verilere ihtiyaç duyulduğu anlaşıldı. Böylelikle eğrilerin ifadesinde yeni matematiksel metotlar kullanılmaya başlandı. Bu metotlar önceki kapalı ve kapalı olmayan fonksiyonların tersine parametrik olarak ifade edilmekteydi.

Gemi eğrilerinin matematiksel ifadesinde kullanılan uzay eğrilerini parametrik ve parametrik olmayan tipte olmak üzere ikiye ayırabiliriz. Parametrik olmayan eğriler kapalı veya kapalı olmayan fonksiyonlar şeklinde olabilir. Kapalı olmayan fonksiyonlar  $y = f(x)$  şeklinde ifade edilmektedir.  $f(x)$   $x$ 'e bağlı bir fonksiyon olmak üzere  $x$  ve  $y$  sırasıyla bağımsız ve bağımlı değişkenlerdir. Kapalı veya aynı değişkene bağlı olarak birden fazla değere sahip olan eğriler bu formda ifade edilememektedir. Kapalı fonksiyonlar bu sorunun üstesinden gelmektedir. Kapalı fonksiyonlar  $f(x, y) = 0$  şeklinde ifade edilmektedir.  $f(x, y)$  hem  $x$  hem de  $y$ ' e bağlı bir fonksiyondur. Kapalı bir eğride bir nokta denklemin köklerinin hesaplanmasıyla bulunabilir. Bunun için de uzun hesaplamalar gerekebilir. Kuvvet fonksiyonları, üstel fonksiyonlar ve polinomlar parametrik olmayan eğrilere birer örnektir. Bu fonksiyonlar gemi tekne formunun matematiksel ifadesinde kullanılan ilk fonksiyonlardır. İlerleyen zamanlarda bu tip fonksiyonların gemi tekne formunun ifadesinde yetersiz kaldığı görülmüş ve sınırlı kullanım alanı bulmuştur.

Parametrik eğriler, gemi tekne formunun ifadesinde parametrik olmayan eğrilerden daha esnek ve kullanışlıdır. Eğri üzerindeki her bir nokta bir veya birden fazla parametrenin fonksiyonu olarak ifade edilmektedir. Örnek olarak  $t$  parametre değişkeni olmak üzere  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  şeklinde ifade edilmektedir. Bir eğri üzerindeki bir noktanın konum vektörü matris formunda aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir.

$$P(t) = \begin{bmatrix} f(t) & g(t) \end{bmatrix}$$

Parametrik eğriler kapalı eğrilerin ve bağımsız bir değişkene bağlı çoklu değerlere sahip eğrilerin ifadesi için uygun bir yöntemdir. Böylelikle parametrik olmayan fonksiyonlarda ortaya çıkan sonsuz teğet değerleri, birden fazla değer ifade edilememesi gibi problemlerin de üstesinden gelinmiş olundu. Ayrıca parametrik eğrinin matrisi döndürme, ölçeklendirme, projeksiyon gibi transformasyon işlemlerinde diğer matrislerle kolayca işleme sokulabilmektedir. Bu özelliği de bilgisayarda grafik işlemlerinde önemli bir avantaj sağlamaktadır.

Bilgisayar destekli geometrik tasarım alanındaki en büyük gelişme spline eğri ve yüzey teorilerinin geliştirilmesiyle olmuştur. Spline adını gemi endazesi çiziminde kullanılan ve adına tiriz denilen ince uzun çubuklardan almaktadır. Fiziksel spline'nın avantajları ve kullanımındaki başarı araştırmacıları matematiksel olarak ifade etmeye zorladı. Fiziksel spline'larla ilgili ilk çalışmalar 18.yüzyıla dayanmaktadır. Bernoulli kardeşler, ince bir çubuğu eğmek için gerekli işin çubuğun eğriliğinin karesiyle doğru orantılı olduğunu

gördüler. Euler de eğriliğin diferansiyel denklemini türeterek aşağıdaki ifadeyi bulmuş oldular.

$$M(x) = \frac{EI}{R(x)} \quad (2.2)$$

Fakat matematiksel olarak spline ilk olarak Schoenberg (1946) tarafından n. dereceden parça parça eğriler olarak ele alındı. Bu parça eğriler birbirlerine  $C^{n-1}$  sürekliliğiye bağlıydı. Spline eğrileri, verilen noktalardan geçen eğri uydurma teknikleri (Kübik spline) ve eğri yaklaşım teknikleri(B-spline) olarak iki türde ifade edilmekteydi.

Kübik spline daha önceki paragrafta anlatıldığı gibi gemi çiziminde kullanılan fiziksel tirizin matematiksel ifadesiydi. Tirizlerle çizilen bir eğri ağırlıkların bulunduğu noktalar arasında kübik polinomlarla ifade edilmekteydi. Küçük eğimlerde tiriz çizdiği eğri formu parçalı kübik spline biçiminde olduğundan kübik spline fonksiyonu olarak anılmaktadır. Tek parça parametrik bir kübik spline aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$P(t) = \sum B_i t^{i-1} \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (2.3)$$

Bu çalışmalardan sonra spline eğrilerinin kendine özgü dezavantajlarını gidermek için beta-spline,  $\tau$ -spline,  $\nu$ -spline gibi çeşitli spline yöntemleri geliştirilmiştir.

Theilheimer (1957) gemi formunun ifadesinde kübik spline eğrilerini kullanmıştır. Su hatları verilen yarı genişliklerden geçecek şekilde polinomlarla ifade edilmekteydi.

Kerwin (1960) gemi formunun ifadesinde aşağıda verilen yaklaşım fonksiyonunu kullanmıştır.

$$g(x, z) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{nm} \psi_m \phi_n \quad (2.4)$$

Burada  $\psi_m$  ve  $\phi_n$  sırasıyla su hatlarının ifadesinde kullanılan m.dereceden ve en kesit eğrilerinde kullanılan n. dereceden polinomları ifade etmektedir.  $a_{nm}$  katsayısı ise verilen  $f_{ij}$  ofset noktalarından küçük kareler yöntemiyle elde edilmektedir.

Taylor (1963) kesit alan eğrisini ifade etmek için küçük kareler metodunu ve Chebyshev polinomlarını kullandı. Chebyshev polinomları, aynı dereceden diğer polinomlarla kıyaslandığında maksimum sapması minimum olan polinomlardır.

Kübik spline eğrileri eğri uydurma yöntemine dayandığı için her zaman iyi sonuç vermemektedir. Spline eğrisi verilen her noktadan geçtiği için , eğride kimi zaman hatalar ve sapmalar olmaktadır. Bu dezavantajları gidermek için araştırmacılar yeni eğri yaklaşım teknikleri geliştirmişlerdir. Bu yeni tekniklerle eğri kontrol poligonlarıyla ifade edilmektedir. Eğri genellikle kendini kontrol eden bu poligonların şeklini almakta, temel veya ağırlık fonksiyonu olarak adlandırabileceğimiz fonksiyonlara bağlı olarak eğri şekli değişmektedir. De Casteljaou (1959) ve Bézier (1966) bu alanda araştırmaları başlatmıştır. Her ikisi de birbirlerinden bağımsız olarak Bézier eğri ve yüzeylerini geliştirmişlerdir. Her ne kadar De Casteljaou daha önce bu yöntemi geliştirmiş olsa da çalışmaları yayınlanmadığından Bernstein formundaki bu eğri ve yüzey polinomları Bézier 'in ismiyle anılmaktadır.

Bézier eğrileri açık bir çokgeni(poligon) oluşturan köşegen noktalarıyla tanımlanmaktadır. Eğri çokgenin ilk ve son kenarlarına teğettir. Eğrinin mertebesi tanımlandığı kontrol noktalarına bağlı olarak değişmektedir. Örnek olarak bir Bézier eğrisi 5 noktayla tanımlanmışsa , bu eğri 5.mertebeden ve 4. derece bir eğridir. Parametrik bir Bézier eğrisi aşağıdaki gibi ifade edilmektedir,

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i J_{n,i}(t) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (2.5)$$

$$J_{n,i} = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (2.6)$$

B-spline eğrileri ise Bernstein polinomlarını parçalara bölünmüş şeklidir. B-spline eğriler gemi formu ifadesinde geniş bir uygulama alanı bulmuştur. B-spline eğrileri, her biri bir polinomla ifade edilen eğri parçalarından oluşmaktadır. B-spline eğrisi aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i N_{i,k}(t) \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max} \quad 2 \leq k \leq n+1 \quad (2.7)$$

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & x_i \leq t \leq x_{i-1} \\ 0 & \end{cases}$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t-x_i)N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1}-x_i} + \frac{(x_{i+k}-t)N_{i-1,k-1}(t)}{x_{i+k}-x_{i+1}}$$



B-spline eğrisi, Bézier eğrisinde olduğu gibi kontrol noktalarından geçen çokgenin şeklini almaktadır. Bézier eğrilerin kıyasla bir avantajı vardır. Düğüm noktası vektörüne bağlı olarak B-spline eğrisinin derecesi, Bézier eğrilerindekinin aksine kontrol noktası sayısından bağımsızdır. Bu da B-spline eğrilerine esneklik sağlamaktadır.

Versprille (1975) tarafından B-spline eğrileri biraz daha geliştirilerek daire, elips, hiperbol gibi konik eğrilerinin de B-spline eğrileriyle ifade edilmesine olanak sağlandı. Bu eğrinin adına düzgün olmayan rasyonel B-spline(Non-Uniform Rational B-spline(NURBS)) eğrisi dendi. Bu yöntemle her kontrol noktasında ayrı bir parametreyle ek bir kontrol mekanizması daha eklenmiştir. Bu parametreye ağırlık değeri denilmektedir ve bu değerın değışmesiyle eğri kontrol noktasına uzaklaşmakta ya da yakınlaşmaktadır. NURBS eğrisi aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i R_{i,k}(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i \frac{h_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=1}^{n+1} h_i N_{i,k}(t)} \quad (2.9)$$

Yukarıdaki ifadede  $h_i$  değerleri 1' e eşit olduğunda NURBS eğrisi rasyonel olmayan B-spline eğrisi şeklini almaktadır.

Matematiksel yüzeylerin ifadesinde en büyük gelişme Coons(1964) yüzeyleriyle olmuştur. Coons yüzeyi Ferguson yüzeyinin genelleştirilmiş bir halidir. Bu yöntemde her sınır eğrisi için normalize edilmiş kübik spline eğrisi kullanılmıştır. Bir yüzey parçası her köşesinde tanımlanmış birer konum vektörü , ikişer teğet vektörü , dört büküm vektörü ve bir temel fonksiyonla tanımlanmış dört köşe noktasıyla ifade edilmektedir. Coons yüzeyleri esnek bir tasarım yöntemi olmasına karşın , birleşme noktalarında ve eğri kontrolünde bir takım problemlerle karşılaşılmaktaydı. Bu problemlerin üstesinden Bézier eğrilerinin bir yüzeye taşınmasıyla üstesinden gelinmiştir. Bir Bézier yüzeyi aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$Q(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,j} J_{n,i}(u) K_{m,j}(w) \quad (2.10)$$

Her ne kadar Bézier yüzeyleri Coons yüzeylerinin problemlerini ortadan kaldırmış olsa da, Bézier yüzeylerinin de bir takım problemleri vardır. Bunlar sırasıyla eğrinin derecesinin kontrol sayısına bağlı olması, lokal kontrolün zayıf olması gibi. Kontrol sayısı arttıkça eğri mertebesi de arttığında eğrinin şeklinde değışiklik olmaktadır. Bu problemler B-spline yüzeyleri sayesinde ortadan kalkmıştır. Bir B-spline yüzeyi aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$Q(u, v) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,l}(w)$$

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max} \quad 2 \leq k \leq n+1$$

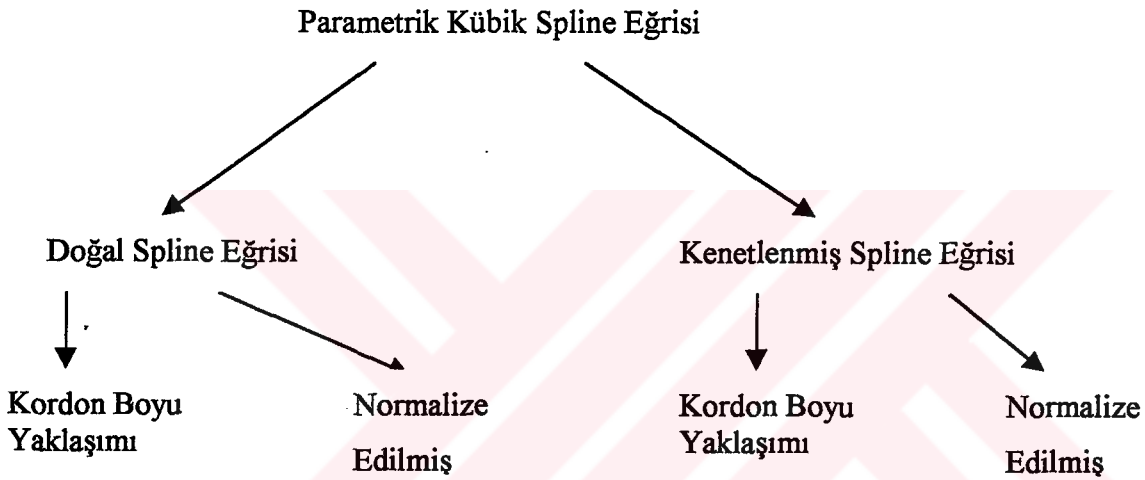
$$w_{\min} \leq w \leq w_{\max} \quad 2 \leq l \leq m+1$$



### 3. GEMİ TEKNE FORMUNUN MODELLENMESİNDE KULLANILAN EĞRİLERİN MATEMATİKSEL OLARAK İFADE YÖNTEMLERİ

#### 3.1 Kübik Spline Eğri Yöntemleri

Kübik spline eğri yöntemi, birbirini takip eden noktaların geometrik sürekliliğine sahip olacak şekilde bir eğriyle birleştirme işlemidir. Parametrik kübik spline eğrisi de sınır şartı koşullarına göre ikiye, yine her yöntem kendi arasında da  $t$  parametresinin hesaplama yöntemine göre de ikiye ayrılmaktadır. Bu da 4 çeşit kübik spline eğrisinin varolduğu anlamına gelmektedir.



Fiziksel spline yani tiriz, gemi tasarımı gibi çizim gerektiren alanlarda teknik ressamlar tarafından verilmiş noktalardan düzgün bir eğri geçirmek için kullanılan ince, uzun elastik bir araçtır. Matematik spline ise bu fiziksel spline'dan türetilen ve onun matematiksel olarak ifade edilmiş bir modelidir.

Fiziksel spline ince elastik bir kiriş olarak göz önüne alınırsa, matematiksel olarak spline eğrisinin şekli, Euler denklemi ile elde edilen elastik  $y$  kirişinin çökmesine karşılık gelmektedir. Bu çökme de kiriş boyunca  $M(x)$  olarak eğilme momentini hesaplayan Euler denkleminde elde edilir.

$$M(x) = \frac{EI}{R(x)}$$

Çok ufak çökmelerde  $y'' \ll 1$  eğrilik yarıçapı yaklaşık olarak

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \cong y''$$

alınır. Burada ilk üs , x kiriş boyunca almak üzere, x'e göre alınan türevini ve y de kiriş eğimini göstermektedir. Böylece Euler denklemi

$$y'' = \frac{M(x)}{EI}$$

şekline dönüşür. Eğer tirizin üzerine konulan ağırlıklar yani kirişin mesnet noktalarında, kiriş basit mesnetli olarak kabul edilirse, bu destek noktaları arasındaki kirişin eğilme momentinin

$$M(x) = Ax + B$$

şeklinde doğrusal olarak değiştiği kabul edilebilir. Böylece Euler denklemi

$$y'' = \frac{Ax + B}{EI}$$

formunu alır. Burada  $E = 1.0$  kabul edilirse daha sonras spline eğrisi elde edilirken denklemin her iki tarafı EI'ya bölüneceğinden götürecektir. Böylece

$$y'' = Ax + B$$

olur. Bu ifade iki defa integre edilirse genel halde kirişin çökmesi, yani

$$y = A_1x^3 + B_1x^2 + C_1x + D_1$$

olarak elde edilir. Bu da bize üzerine konulan ağırlıklar arasındaki fiziksel bir spline'nın şeklinin kübik polinomlarla ifade edilebileceğini göstermektedir. Böylece fiziksel olarak bir spline'ı kübik polinomlar kullanarak matematiksel olarak modellememiz mümkündür. Genel olarak matematiksel spline eğrisi, birleşme noktalarında (k-1).dereceden sürekli türevlere sahip olan k. derecedeki parça parça polinomlardır. Buna göre de kübik spline birleşme noktalarında 2.derece sürekliliğe sahip parçalı üçüncü derece polinomlardan oluşmaktadır. Düşük dereceli polinomlar eğri uydurmasında ve düzeltmesinde çok kullanışlıdır, çünkü düşük dereceden polinomlar hem hesaplama gereksinimlerini ve hem de yüksek dereceli eğrilerin yarattığı dengesizlikleri de azaltırlar. Esasında bu dengesizlikler ortak eğri içindeki çeşitli noktaların birleştirilmesi sırasında arzu edilmeyen bazı salınımlara sebep olmaktadır.

Fakat düşük dereceli polinomlar rastgele seri noktalar arasında uzanmayıp, birbirini takip eden bitişik polinom parçaları kullanıldığından ve bu polinomlar sadece birbirleri ile iki noktadan bağlantılı olduklarından, her parça ile kübik spline parça serileri arasındaki uyumu sağlamak için ortak bir teknik kullanılır. Kübik spline 'ların diğer bir avantajı da düşük dereceden oluşan eğriler bir noktada iç bükeyden dış bükeye veya tersine müsaade edebilecek şekilde uzayda dönme kabiliyetine sahip olmasıdır. Yukarıda kısaca tanımı verilen spline eğrilerini genel şekilde şöyle tanımlamak mümkündür. Herhangi bir  $f(t)$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında ve  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  ( $a = t_1, b = t_n$ ) noktalarında tanımlı olsun. Bu  $f(t)$  fonksiyonuna yaklaşan üçüncü derecede spline eğrisi  $P(t)$  aşağıdaki koşulları sağlar.

Üçüncü dereceden polinom  $P [t_k, t_{k+1}]$  alt aralığında ( $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ )  $P_k$  olarak gösterilir.

$$P(t_k) = f(t_k) \quad k = 1, \dots, n$$

$$P_{k+1}(t_{k+1}) = P_k(t_{k+1}) \quad k = 1, \dots, n-1$$

$$P'_{k+1}(t_{k+1}) = P'_k(t_{k+1}) \quad k = 1, \dots, n-2$$

$$P''_{k+1}(t_{k+1}) = P''_k(t_{k+1}) \quad k = 1, \dots, n-2$$

Aşağıda verilen sınır koşullarından birisinin sağlanması gereklidir.

$$P'(t_1) = f'(t_1) \quad \text{ve} \quad P'(t_n) = f'(t_n)$$

$$P''(t_1) = P''(t_n) = 0$$

Bu sınır şartlarından birincisini sağlayan  $P(t)$  spline eğrisine kenetlenmiş spline, ikincisini sağlayan  $P(t)$  eğrisine de doğal spline eğrisi adı verilir.

Bu koşullar sağlandıktan sonra bir tek kübik spline parçasının denklemini aşağıdaki şekilde yazmak mümkündür.

$$P(t) = \sum_{i=1}^4 B_i t^{i-1} \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (3.1)$$

Bu ifadedeki  $t_1$  ve  $t_2$  spline parçasının başlangıç ve bitiş noktalarındaki parametrik değerleridir.  $P(t)$  ise kübik spline parçası üzerindeki herhangi bir noktanın konum vektörüdür. Üç boyutlu kartezyen koordinatlarda bir kübik spline eğrisi üzerindeki bir noktanın yer vektörü aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.

$$P(t) = [x(t) \quad y(t) \quad z(t)]$$

$P(t)$  'nin her bir bileşeni kendisine benzer bir ifadeye sahiptir.

$$x(t) = \sum_{i=1}^4 B_{i_x} t^{i-1} \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^4 B_{i_y} t^{i-1} \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

$$z(t) = \sum_{i=1}^4 B_{i_z} t^{i-1} \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

Burada "B", spline parçalarında verilen sınır şartlarının kullanılmasıyla tespit edilen sabit katsayılardır.

$$P(t) = B_1 + B_2 t + B_3 t^2 + B_4 t^3 \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (3.2)$$

Aşağıda Şekil 3.1'de gösterildiği gibi spline parçasının sonlarındaki yer vektörleri  $P_1$  ve  $P_2$  olsun diğer taraftan  $P(t)$  'nin  $t$ 'ye göre alınan türevleri  $P_1'$  ve  $P_2'$  de spline parçasının uç noktalarındaki teğet vektörleri olsun. Böylece (1) nolu denklemin türevini aldığımızda

$$P'(t) = [x'(t) \quad y'(t) \quad z'(t)] = \sum_{i=1}^4 B_i (i-1) t^{i-2} \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (3.3)$$

elde edilir.

Bunu (3.2) nolu denklemi kullanarak daha açık bir şekilde yazdığımızda aşağıdaki ifade elde edilir.

$$P'(t) = B_2 + 2B_3 t + 3B_4 t^2 \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (3.4)$$

Genel özelliğini kaybetmeyecek şekilde  $t_1 = 0$  olduğunu farz eder ve dört sınır şartını uygularsak

$$\begin{aligned} P(0) &= P_1 \\ P(t_2) &= P_2 \\ P'(0) &= P_1' \\ P'(t_2) &= P_2' \end{aligned} \quad (3.5)$$

bulunur. Bu ifadeler denklem (3.2) ve (3.3) 'te kullanılırsa

$$P(0) = B_1 = P_1 \quad (3.6.a)$$

$$P'(0) = \sum (i-1)t^{i-2}B_i \Big|_{t=0} = B_2 = P_1' \quad (3.6.b)$$

$$P(t_2) = \sum_{i=1}^4 B_i t^{i-1} \Big|_{t=t_2} = B_1 + B_2 t_2 + B_3 t_2^2 + B_4 t_2^3 \quad (3.6.c)$$

$$P'(t_2) = \sum_{i=1}^4 (i-1)B_i t^{i-2} \Big|_{t=t_2} = B_2 + 2B_3 t_2 + 3B_4 t_2^2 \quad (3.6.d)$$

elde edilir. Bu ifadelerden  $B_3$  ve  $B_4$  çözümlerse

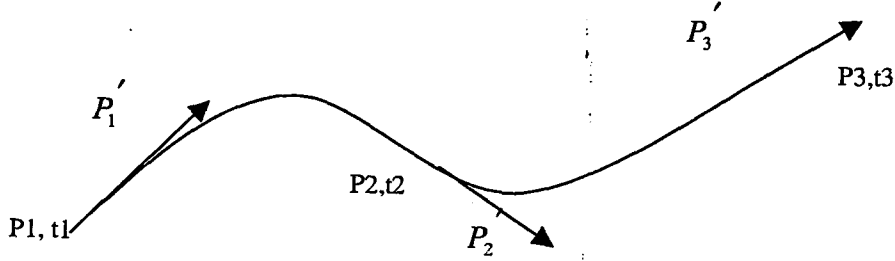
$$B_3 = \frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2} \quad (3.7.a)$$

$$B_4 = \frac{3(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2} \quad (3.7.b)$$

değerleri elde edilmiş olur. Bu  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  değerleri kübik spline parçasını belirlerler. Buradan da görüldüğü gibi; spline parçasının şekli, parçanın sonlarındaki teğet ve yer vektörlerine bağlıdır. Her bir spline parçasının yer ve teğet vektörlerinin üç bileşeni olduğundan, kübik uzay eğrisinin de parametrik denklemi spline parçasının sonundaki parametre değerine ve 12 vektör bileşenine bağlı olacaktır. (3.6) ve (3.7) ifadeleri (3.1) denklemine yerine konulduğunda, tek bir kübik spline parçası için aşağıdaki denklem elde edilir.

$$P(t) = P_1 + P_1' t + \left[ \frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2} \right] t^2 + \left[ \frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{2P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2} \right] t^3 \quad (3.8)$$

Bu ifade tek bir kübik spline parçasının denklemdir. Eğer bütün eğriyi tanımlamak istersek o zaman, birden fazla parçanın bir araya getirilerek birleştirilmesi gereklidir.



Şekil 3.1 Kübik spline eğrisi

Şekil (3.1)'den de görüldüğü gibi  $P_1, P_2, P_3$  yer vektörleri  $P_1', P_2', P_3'$  teğet vektörleri ve  $t_2, t_3$  bilinen parametre değerleri denklem (3.8) 'in kullanılmasıyla sırayla her iki spline parçasına uygulanarak spline parçalarının şekilleri belirlenir. Burada  $P_2'$  teğet vektörü bilinmemektedir. Bu iç teğet vektörü  $P_2'$ 'nin değeri iç birleşim noktasında (düğüm noktasında) süreklilik şartının uygulanmasıyla elde edilir. Daha önceden söylendiği gibi  $k$ . dereceden parça parça bir spline'in iç birleştirme noktalarında  $(k-1)$ . dereceden sürekliliğe sahip olacaktır. Bunun anlamı ise, birleştirme noktalarında bir eğri parçasından diğerine geçişte  $P_2''(t)$  yani ikinci türevi sürekli olacaktır. Diğer bir deyimle birleşim geçişlerinde eğri sürekliktir. Bu noktadan hareketle denklem (3.5)'in iki defa türevi alınırsa

$$P''(t) = \sum_{i=1}^4 (i-1)(i-2)B_i t^{i-3} \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (3.9)$$

ifadesi elde edilir. Burada  $0 \leq t \leq t_2$  arasındaki birinci spline parçasında, parçanın  $t = t_2$  olan yerinde yani sonunda (9) denklemini uygulandığında

$$P'' = 6B_4 t_2 + 2B_3$$

elde edilir. Benzer şekilde  $0 \leq t \leq t_3$  arasındaki ikinci spline parçasında, parçanın  $t = 0$  yani başlangıç noktasında denklem (9)'un uygulanması sonucunda

$$P'' = 2B_3$$

elde edilir. (3.6) ve (3.7) nolu denklemlerin kullanılması ve yukarıda son olarak verilen bu iki denklemin eşitlenmesinden



$$6t_2 \left[ \frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2} \right] + 2 \left[ \frac{2(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2} \right] = 2 \left[ \frac{3(P_3 - P_2)}{t_3^2} - \frac{2P_2'}{t_3} - \frac{P_3'}{t_3} \right]$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade de sol taraf birinci spline parçasının sonundaki, sağ taraf ise ikinci spline parçasının başlangıcındaki eğriliği verir. Burada denklem düzenlendiğinde ifade aşağıdaki şekle dönüşür.

$$t_3 P_1' + 2(t_3 + t_2)P_2' + t_2 P_3' = \frac{3}{t_2 t_3} \left[ t_2^2 (P_3 - P_2) + t_3^2 (P_2 - P_1) \right] \quad (3.10)$$

Bu ifadenin iç birleşim noktalarındaki bilinmeyen  $P_2'$  teğet vektörleri çözülebilir. Buradan da görüleceği gibi  $t$  parametresinin uç değerleri  $t_2$  ve  $t_3$  sonuç denkleminde her zaman yer alırlar.

Yukarıda denklem (3.10) 'da bulunan sonuç , (n-1) kübik spline parçalarında yer, eğim ve eğriliği, örneğin her birleşim iç noktasında sürekliliği olacak şekilde verilen n data noktası için genel halde yazılabilir. Şekil (3.1)'deki gibi verilen notasyon sistemini kullanarak herhangi iki  $P(t)$  ve  $P_{k+1}(t)$  bitişik kübik spline parçaları için genelleştirilmiş denklemler aşağıda verilmektedir.

Birinci kübik spline parçası için

$$P_k(t) = P_k + P_k' t + \left[ \frac{3(P_{k+1} - P_k)}{t_{k+1}^2} - \frac{2P_k'}{t_{k+1}} - \frac{2P_{k+1}'}{t_{k+1}} \right] t^2 + \left[ \frac{(P_k - P_{k+1})}{t_{k+1}^3} + \frac{P_k'}{t_{k+1}^2} + \frac{P_{k+1}'}{t_{k+1}^2} \right] t^3$$

İkinci kübik spline parçası için

$$P_{k+1}(t) = P_{k+1} + P_{k+1}' t + \left[ \frac{3(P_{k+2} - P_{k+1})}{t_{k+2}^2} - \frac{2P_{k+1}'}{t_{k+2}} - \frac{2P_{k+2}'}{t_{k+2}} \right] t^2 + \left[ \frac{(P_{k+1} - P_{k+2})}{t_{k+2}^3} + \frac{P_{k+1}'}{t_{k+2}^2} + \frac{P_{k+2}'}{t_{k+2}^2} \right] t^3$$

Burada herbir parça için parametre aralığı sıfırdan başlamaktadır. Örneğin birinci parçada  $0 \leq t \leq t_{k+1}$  ve ikinci parçada  $0 \leq t \leq t_{k+2}$  dir.

Herhangi iki komşu spline parçası için , ortak iç birleşme noktalarında ikinci türevleri eşitlenirse yani  $P_k''(t_k) = P_{k+1}''(0)$  alınırsa , (3.10)'a denk olan genelleştirilmiş sonuç ifadesi elde edilir.

$$t_{k+2} P_k' + 2(t_{k+1} + t_{k+2})P_{k+1}' + t_{k+1} P_{k+2}' = \frac{3}{t_{k+1} t_{k+2}} \left[ t_{k+1}^2 (P_{k+2} - P_{k+1}) + t_{k+2}^2 (P_{k+1} - P_k) \right] \quad (3.13)$$

Bu ifadeden herhangi iki  $P_k$  ve  $P_{k+1}$  spline parçası arasında bulunan iç birleşim noktalarındaki teğet tespit edilir. (3.13) birbirini takip eden bütün spline parçalarına uygulandığı zaman teğet vektör  $P'_k$ ,  $2 \leq k \leq n-1$  için  $(n-2)$  adet denklem elde edilir. Bu denklem takımı sistemi matris formunda aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{bmatrix}
 t_3 & 2(t_2 + t_3) & t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & t_4 & 2(t_3 + t_4) & t_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & t_3 & 2(t_4 + t_3) & t_4 & 0 & 0 & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_n & 2(t_n + t_{n-1}) & t_{n-1}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 P'_1 \\
 P'_2 \\
 P'_3 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 P'_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \frac{3}{t_2 t_3} \{t_2^2 (P_3 - P_2) + t_3^2 (P_2 - P_1)\} \\
 \frac{3}{t_3 t_4} \{t_3^2 (P_4 - P_3) + t_4^2 (P_3 - P_2)\} \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \frac{3}{t_{n-1} t_n} \{t_{n-1}^2 (P_n - P_{n-1}) + t_n^2 (P_{n-1} - P_{n-2})\}
 \end{bmatrix}
 \quad (3.14)$$

Sadece  $(n-2)$  denkleme karşılık  $n$  adet teğet vektörü olduğundan dolayı,  $[M^*]$  bir kare matris değildir ve böylece  $[P']$  'nün çözümü buradan elde edilemez çünkü problem belirsizdir.

Bu matris sınır şartlarına göre iki farklı yaklaşımla çözülebilir.

Birinci yöntemde başlangıç ve bitiş vektörlerini bildiğimiz kabul edilerek yukarıdaki matrise iki denklem daha eklenerek denklem çözülebilir hale gelir. Bu tip spline eğrisine kenetlenmiş sınır koşuluna sahip spline eğrisi kısaca kenetlenmiş spline (clamped spline) eğrisi denmektedir. Bu yöntemle birlikte yukarıdaki matris aşağıdaki hali alır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_3 & 2(t_2 + t_3) & t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_n & 2(t_n + t_{n-1}) & t_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P'_n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} P'_1 \\ \frac{3}{t_2 t_3} \{t_2^2 (P_3 - P_2) + t_3^2 (P_2 - P_1)\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{3}{t_{n-1} t_n} \{t_{n-1}^2 (P_n - P_{n-1}) + t_n^2 (P_{n-1} - P_{n-2})\} \\ P'_n \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

2) Diğer bir yöntem ise spline eğrisinin uç noktalarındaki eğriliğin belirlenmesi ile elde edilir. Eğer uç noktalarda eğrilik sıfır ise fiziksel tirizlere benzer serbest ya da diğer adıyla gevşetilmiş sınır şartı elde edilir. Bu tip spline eğrilerine doğal (natural) ya da gevşetilmiş (relaxed) spline eğrileri denilmektedir. Uç noktalarda yaklaşık olarak eğrilik ikinci türevle bulunmaktadır.

$$P''(t) = \sum_{i=3}^4 (i-1)(i-2) B_i t^{i-3} \quad (3.16)$$

Spline eğrisinin başlangıç noktasında  $t = 0$  olduğundan sadece  $i = 3$  'ten gelen terim sonuç ifadesine katkıda bulunacaktır. Böylece

$$P''(0) = 2B_3 = 2 \left( \frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P'_1}{t_2} - \frac{P'_2}{t_2} \right) = 0$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra sonuçta

$$P'_1 + \frac{P'_2}{2} = \frac{3(P_2 - P_1)}{2t_2} \quad (3.17)$$

elde edilir.

Parçalı spline eğrisinin son parçasında ise denklem (16)'da  $t = t_n$  ifadesi yerine konursa

$$P''(t_n) = 2B_3 + 6B_4 t_n = 0$$

$$2 \left( \frac{3(P_n - P_{n-1})}{t_n^2} - \frac{2P'_{n-1}}{t_2} - \frac{P'_n}{t_2} \right) + 6 \left( \frac{2(P_{n-1} - P_n)}{t_n^3} - \frac{P'_{n-1}}{t_n^2} - \frac{P'_n}{t_n^2} \right) = 0$$

$$P'_{n-1} + 2P'_n = \frac{3}{t_n} (P_n - P_{n-1}) \quad (3.18)$$

denklem (3.17) ve (3.18)'i de denklem (3.14) 'teki matrisle eklersek aşağıdaki ifade

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_3 & 2(t_2 + t_3) & t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_n & 2(t_n + t_{n-1}) & t_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P'_n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2t_2} (P_2 - P_1) \\ \frac{3}{t_2 t_3} \{ t_2^2 (P_3 - P_2) + t_3^2 (P_2 - P_1) \} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{3}{t_{n-1} t_n} \{ t_{n-1}^2 (P_n - P_{n-1}) + t_n^2 (P_{n-1} - P_{n-2}) \} \\ \frac{3}{t_n} (P_n - P_{n-1}) \end{bmatrix}$$

elde edilir. (3.17) ve (3.18) 'deki matrisleri  $[M][P'] = [R]$  formunda yazarsak  $[M]$  matrisinin tersini alarak teğet vektörlerinin değerlerini ve buna bağlı olarak  $B_i$  değerlerini bulabiliriz.

(3.1)'i matris formunda yazarsak herhangi bir spline eğrisi (k) aşağıdaki şekilde ifade elde edilir.

$$P_k(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1k} \\ B_{2k} \\ B_{3k} \\ B_{4k} \end{bmatrix} \quad 0 \leq t \leq t_{k+1} \quad (3.19)$$

Genelde eğri ve yüzey tanımlarında parametrik denklemler, adına karışım fonksiyonu ya da ağırlık fonksiyonu denilen fonksiyonlarla ve geometrik şartlarının bulunduğu matrislerle gösterilmektedir. (3.1)'deki spline eğrisi denkleminiz ağırlık fonksiyonuna bağlı olarak matris formunda aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$P_k(u) = \begin{bmatrix} F_1(u) & F_2(u) & F_3(u) & F_4(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ P'_k \\ P'_{k+1} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \leq u \leq 1 \\ 1 \leq k \leq n-1 \end{matrix} \quad (3.20)$$

$$u = \frac{t}{t_{k+1}}$$

$$F_{1k}(u) = 2u^3 - 3u^2 + 1$$

$$F_{2k}(u) = -2u^3 + 3u^2$$

$$F_{3k}(u) = (u^3 - 2u^2 + u)t_{k+1}$$

$$F_{4k}(u) = (u^3 - u^2)t_{k+1}$$

Parçalı bir kübik spline eğrisi yer vektörlerine, teğet vektörlerine ve parametre değerlerine örneğin, herbir spline parçasının uç noktalarındaki  $t_k$  'lara göre tespit edilir.  $t_k$  'nin seçimi eğrinin düzgünlüğüne etki eder.

İç birleşim noktalarındaki ikinci türevlerin sürekliliği tek başına eğri boyunca minimum eğrilik yönünden kübik spline eğrisinin düzgünlüğünü veya düzeltilmesini sağlamaz. Minimum eğrilik ve dolayısıyla maksimum düzgünlük elde etmek için herbir spline parçasına uygun  $t_k$ 'ların seçilmesi gereklidir. Daha önce de açıklandığı gibi iki yaklaşım uygulanabilir.  $t_k$ 'ların tespitinde kullanılan bir yaklaşım, birbirini takip eden data noktaları arasındaki uzaklığın parametrik değerlere eşitlenmesi suretiyle yapılır. Pratik amaçlar yönünden kabul edilebilir düzgün eğriler bu tekniğin kullanılmasıyla elde edilirler. Birinci noktadaki t değeri sıfır kabul edilmek üzere birinci spline parçasının ikinci t değeri o parçaya ait noktalar

arasındaki uzaklığa eşit alınarak parametrik denklemin çözümü yapılmaktadır. (3.22) 'de iki boyutlu bir spline eğrisinin parametrik değerlerinin çözümü verilmiştir. Burada  $n$  nokta sayısıdır.

$$t_{k+1} = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2} \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (3.22)$$

Diğer bir yaklaşım yöntemi de her bir kübik spline parçası için  $t_{k+1} = 1.0$  seçilerek değişimin normalize edilmesidir. Bu yöntem hesaplama işlemlerini basitleştirir. Bu tip çözüm yöntemine ise normalize edilmiş çözüm yöntemi denilmektedir.

Yukarıda ve daha önceden de açıklandığı gibi kübik spline eğrileri sınır şartı koşullarına göre ikiye ayrılmaktadır. Bu her iki sınır şartı koşulu sağlanan spline eğrisi kendi içerisinde tekrar parametrik çözüm yöntemine göre ikiye ayrılmaktadır. Dolayısıyla verilen aynı data noktalarından dört ayrı kübik spline eğrisi geçmektedir.

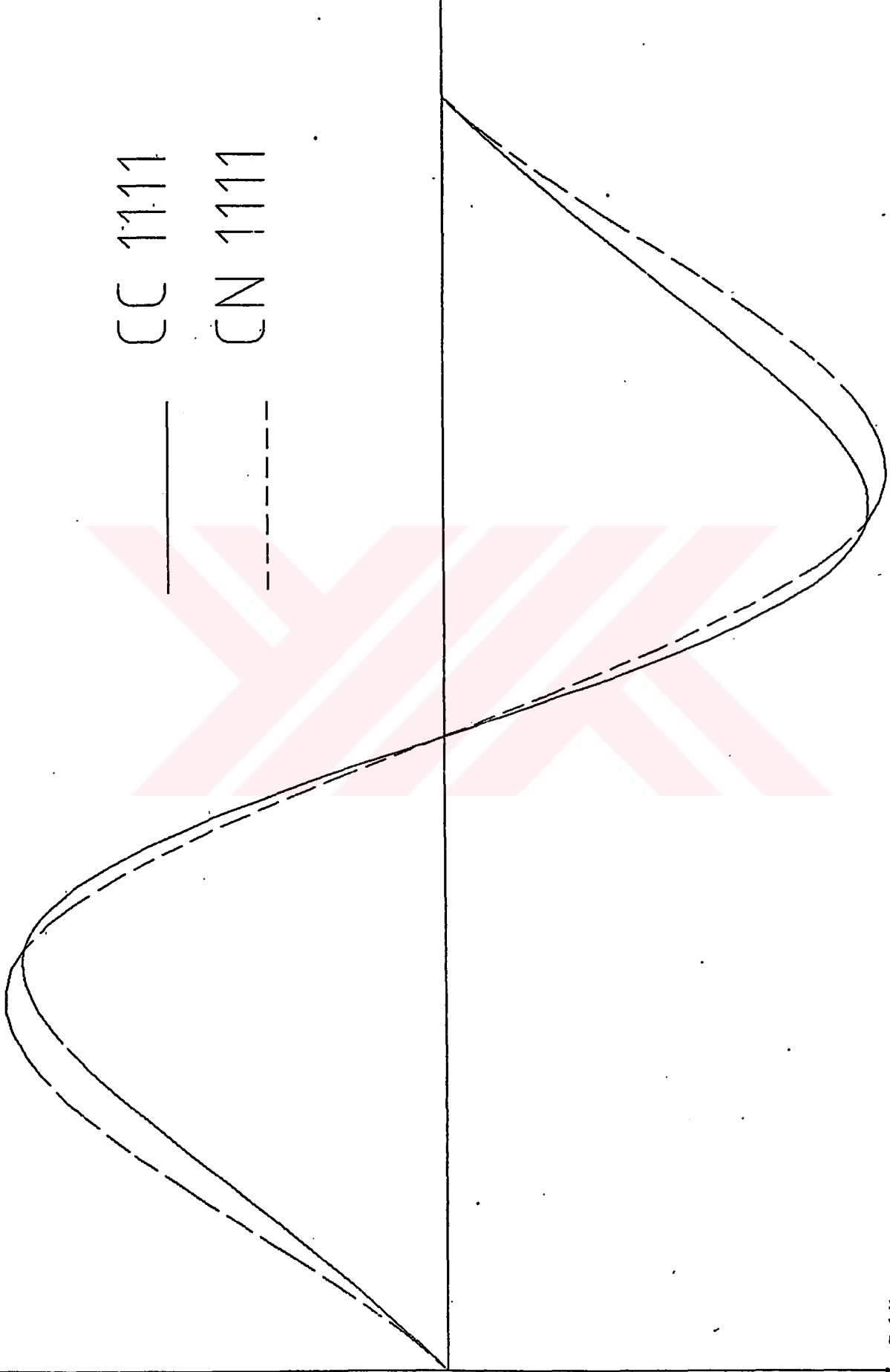
Şekil 3.2, 3.3, 3.4 'de  $P_1(0,0)$ ,  $P_2(1,1)$ ,  $P_3(2,-1)$ ,  $P_4(3,0)$  noktalarından geçen parametrik kübik spline eğrisinin  $t_k$ 'nin çözüm yöntemine ve sınır şartı koşullarına göre hesaplanmış ve AutoCad çizim programında çizilmiş sonuçları görülmektedir. Şekil 3.2'de sınır şartı olarak kenetlenmiş spline eğrisi çözümü uygulanmıştır. Buna göre  $t_k$ 'nin çözüm yöntemine göre değişimi incelenmiştir. Şekil 3.3'de ise sınır şartı olarak doğal spline şartı uygulanmıştır. Şekil 3.4'de sınır şartı olarak kenetlenmiş sınır şartı uygulanmıştır. Burada başlangıç ve bitiş teğet vektörlerinin şiddetinin eğrilerdeki değişimi incelenmiştir. Teğet vektörlerinin [5 5] ve [5 5] seçildiğinde grafikte görüldüğü gibi diğer eğrilerden farklı bir ilmik şekli oluşmuştur. Buradan anlaşılacağı gibi teğet vektör değerleri belirli aralıklar arsında seçilmelidir.

Şekil 3.5, 3.6, 3.7' de Seri 60 tipi bir geminin 5. ve 1 / 2 . postasındaki bilgisayar programı sonuçları görülmektedir. Bu hesaplamalarda kenetlenmiş spline eğrisinde birden fazla alternatif olduğundan sadece doğal spline eğrisindeki değişimler incelenmiştir. Şekil 5'de  $t_k = 1.0$  olduğu durumda eğride bir sapma olduğu görülmektedir. Şekil 6'da ise kaide hattı ile sintine dönüşümünde eğride bir sapma olduğu görülmektedir. Bu sapma, o noktanın  $\Delta t$  yakınına bir nokta daha eklenerek giderilebilir. Şekil 3.7'de nokta eklenmiş hali görülmektedir. Burada  $\Delta t = 0.001$  alınmıştır. Şekilden görüldüğü gibi kordon boyu yaklaşımında bir düzelme görülmesine karşılık diğer eğride sapma daha da artmıştır. Bu grafiklerden görüldüğü gibi parametrik kübik spline eğrisi çözüm yöntemlerinden kordon boyu yaklaşımıyla çözülmüş parametrik kübik spline eğrileri daha iyi sonuçlar vermektedir. Şekil 3.8 ve 3.9'de ise yine

aynı Seri 60 tipi gemiye ait en kesit ve su hattı çizimleri verilmiştir. Burada yine doğal spline eğrisi ve kordon boyu yaklaşımı uygulanmıştır.

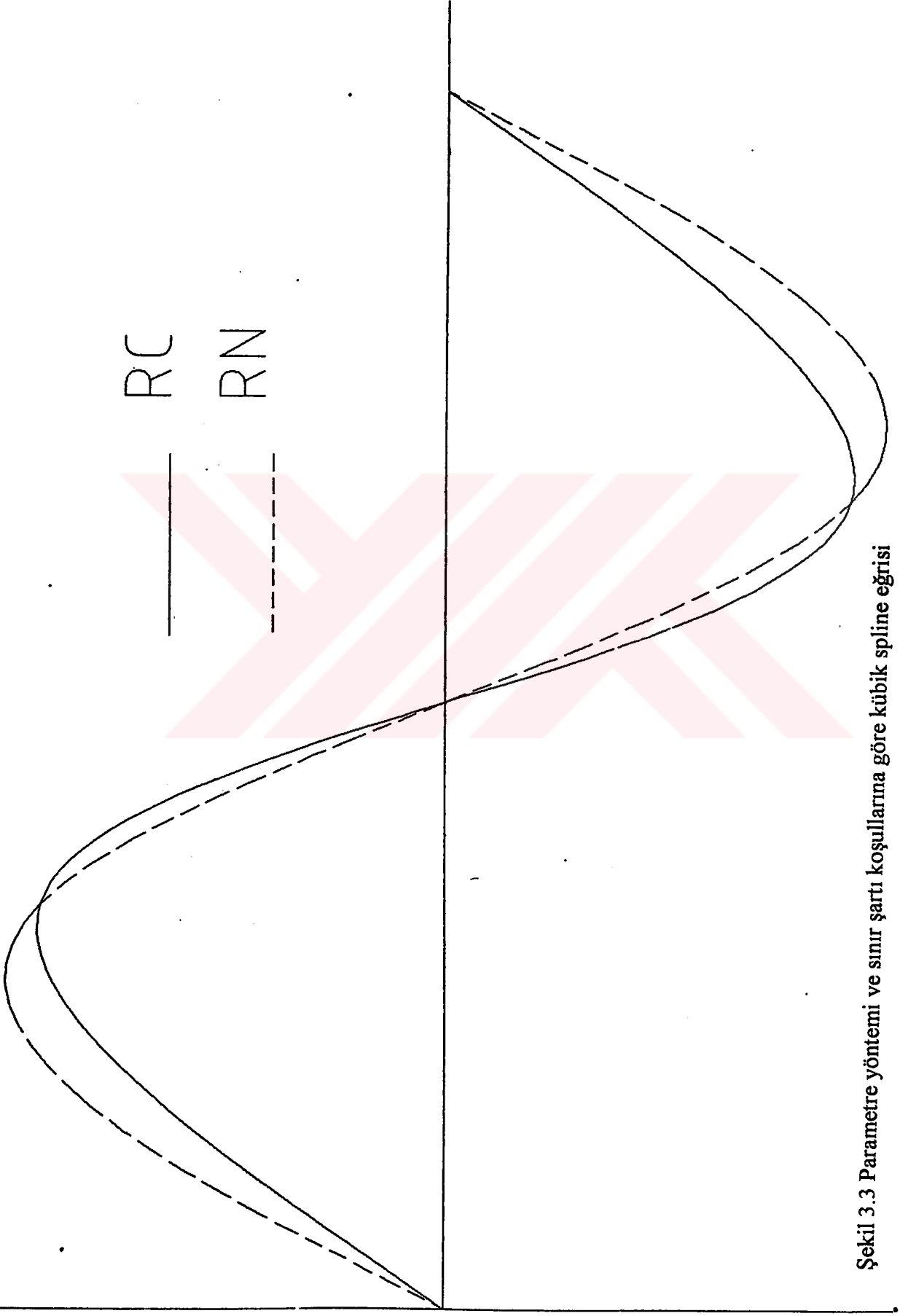
Parametrik kübik spline eğrilerinin bir diğer dezavantajı da bir noktanın konumu değiştiğinde tüm işlemlerin tekrar baştan yapılması gerektirir. Ayrıca koni kesit eğrileri parametrik kübik spline eğrileriyle çizilememektedir.



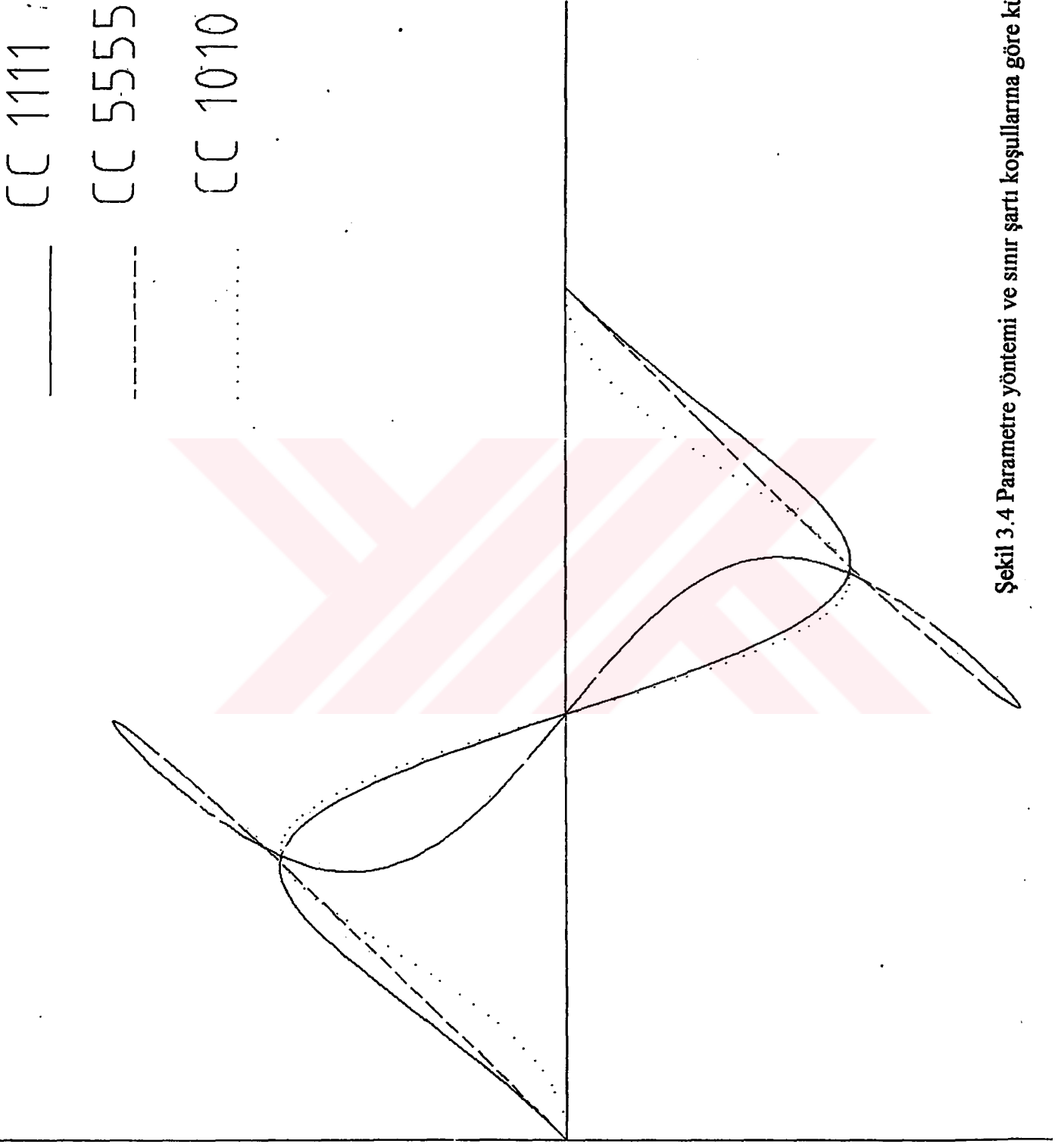


Şekil 3.2 Parametre yöntemi ve sınır şartı koşullarına göre kübik spline eğrisi





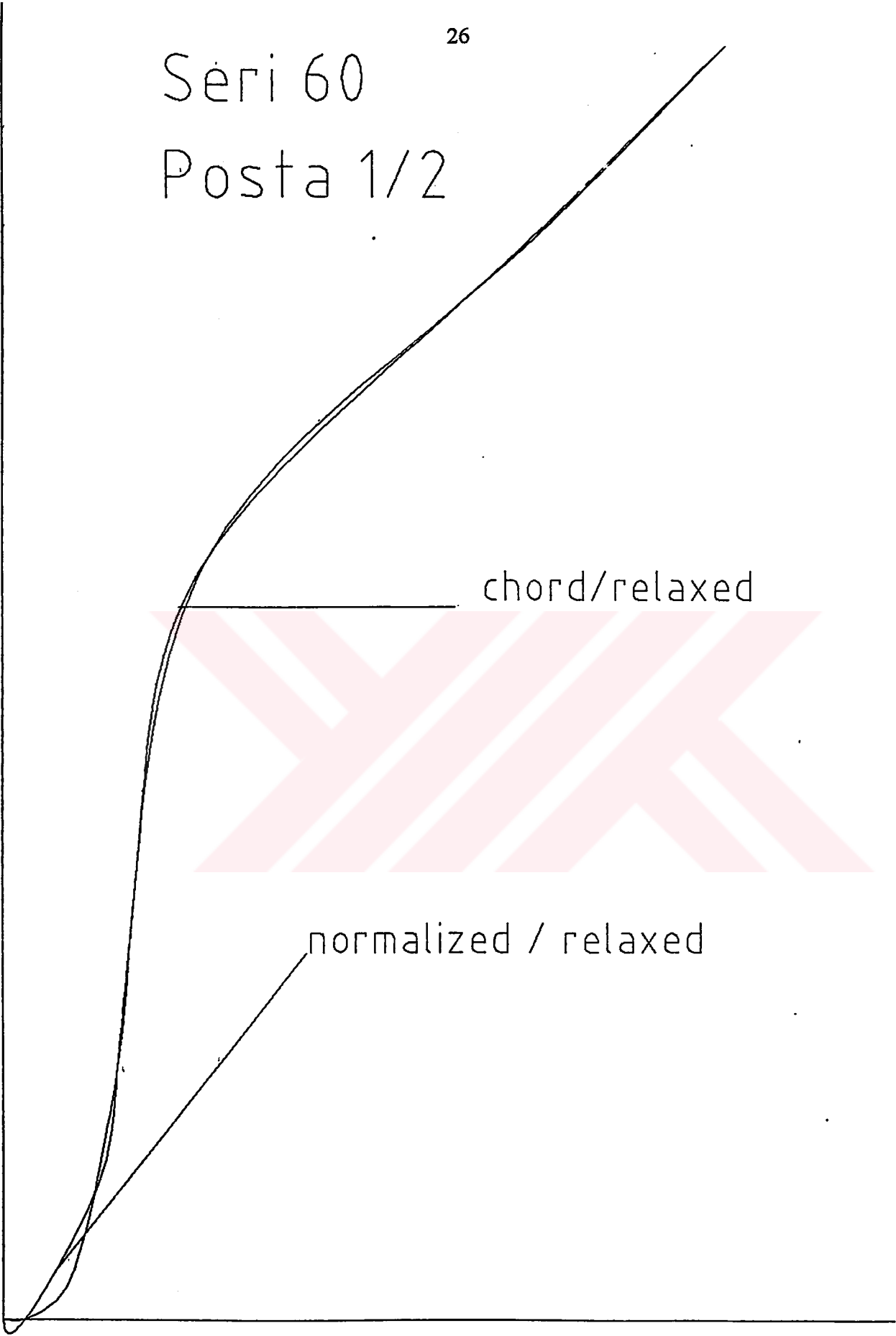
Şekil 3.3 Parametre yöntemi ve sınır şartı koşullarına göre kübik spline eğrisi



Şekil 3.4 Parametre yöntemi ve sınır şartı koşullarına göre kübik spline eğrisi

Seri 60

Posta 1/2



Şekil 3.5 Kübik spline yöntemine göre çizilmiş seri 60 tipi bir geminin posta kesiti

SERI 60

Posta 5

----- relaxed/chord

\_\_\_\_\_ relaxed/normalized

SERI 60

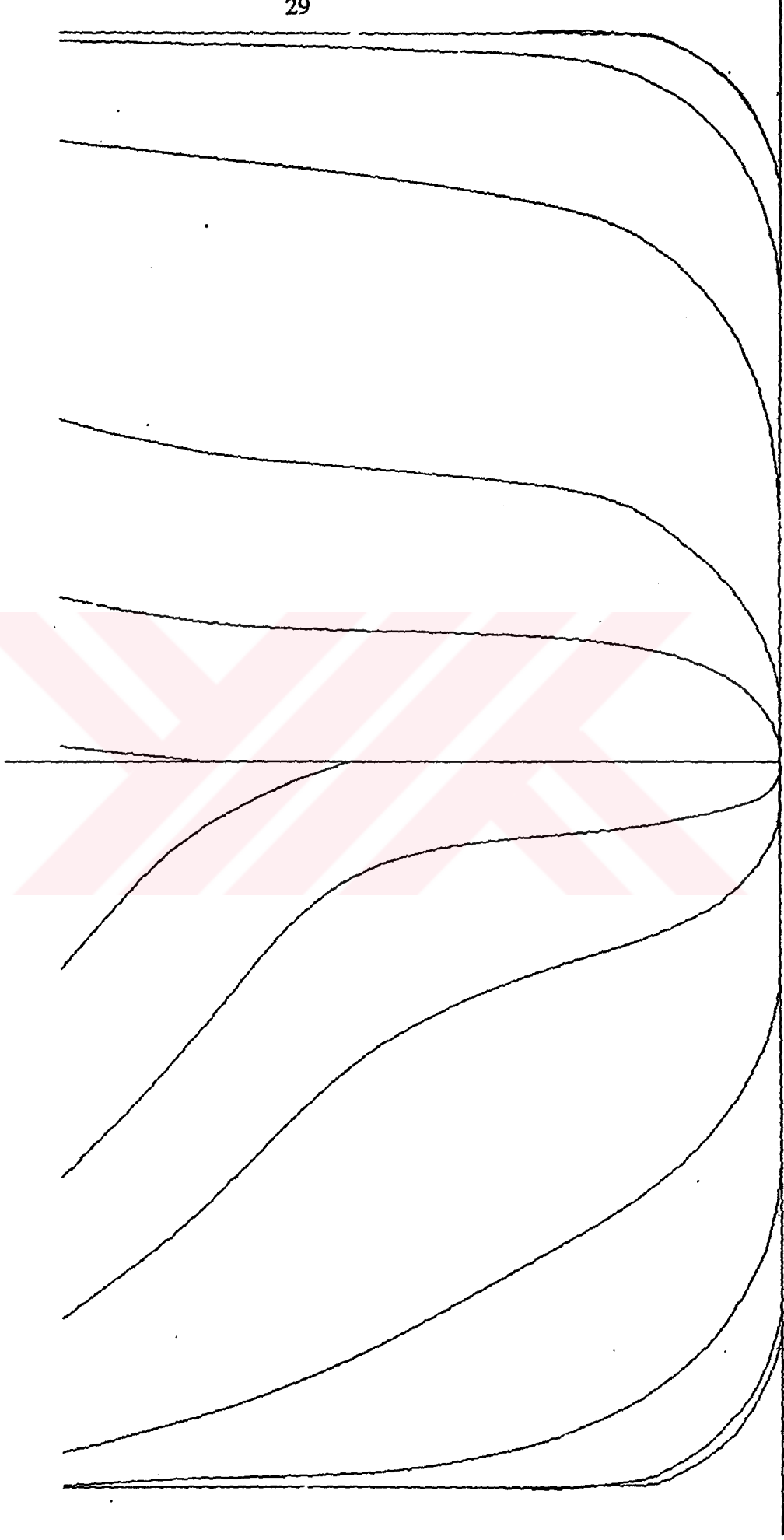
Posta 5

— relaxed/chord/point added

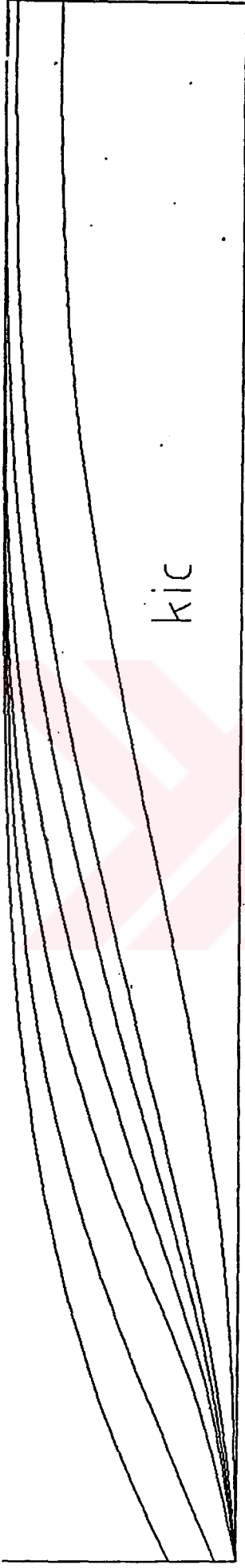
relaxed/normalized/point added

SERI 60

relaxed/chord length



Şekil 3.8 Kübik spline yöntemine göre çizilmiş seri 60 tipi bir geminin su hattı eğrileri



SERI 60 / Su Hatları  
relaxed / chord length



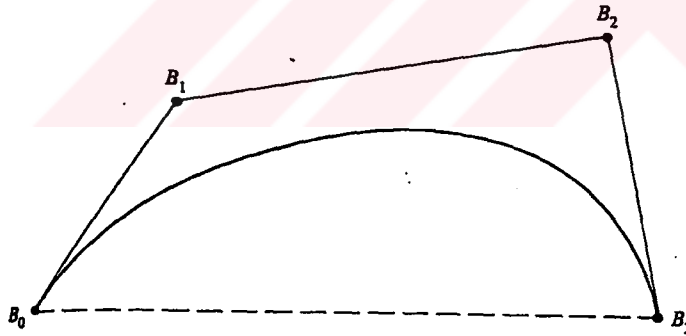
Şekil 3.9 Kübik spline yöntemine göre çizilmiş seri 60 tipi bir geminin su hattı eğrileri

### 3.2 Bézier Eğrileri

Önceki bölümde incelenen kübik spline yöntemi belirli noktalardan geçmektedir. Literatürde eğri uydurma yöntemi olarak bilinmektedir. Bu yöntem daha çok deneysel yöntemler ve matematiksel hesaplamalar sonucunda elde edilmiş sonuçlardan bir eğri ya da şekil elde etmek için kullanılır. Örnek olarak uçak kanatları, motor valfları, mekanik ya da yapısal parçalar. Bir diğer tasarım yöntemi ise elde herhangi bir veri olmadan, estetik olarak sıfırdan tasarım yöntemidir. Bu yöntemde örnek olarak en çok bilinen, otomobil prototipleri, gemilerin tekne kısımları, mobilya vb. eşyaların tasarımı gösterilebilir. Bu tip tasarım yöntemine yabancı literatürde *ab initio* tasarım yöntemi olarak rastlanmaktadır.

Bu tip tasarım yöntemi Bézier tarafından geliştirilmiştir. Her ne kadar Bézier, yöntemin matematiksel temellerini geometrik düşüncelerden almış olsa da Forres, Gordon ve Riesenfield 'in yaptığı çalışmalar Bézier 'in çıkarmış olduğu temel fonksiyonların Bernstein temel fonksiyonlarıyla eş olduğunu göstermiştir.

Bir Bézier eğrisi, noktalarını tayin eden bir çokgen ile belirlenmektedir.



Şekil 3.10 Bezier eğrisi ve kontrol noktaları

Bézier eğrilerinin temel fonksiyonlarının Bernstein fonksiyonlarıyla eş olmasından dolayı, aynı zamanda Bernstein temel fonksiyonlarının özelliklerini taşımaktadır.

Eğri parçalarını belirleyen polinomun derecesi eğriyi tayin eden çokgenin kontrol nokta sayısına bağlıdır ve nokta sayısından bir eksiktir. Örneğin, bir Bézier eğrisini tayin eden çokgenin kontrol nokta sayısı 5 ise, eğri 4. derecedendir. Eğri genellikle çokgenin şeklini



takip etmektedir. Eğrinin ilk ve son noktaları, eğriyi tayin eden çokgenin ilk ve son noktalarıyla çakışiktır. Eğri sonlarındaki teğet vektörleri , eğriyi tayin eden çokgenin ilk ve son parçalarının yönüyle aynı yöndedir.

Eğri çokgenin kontrol noktalarının kaplama alanı içerisinde kalmaktadır. (Şekil 3.11) Yani eğri bu noktaların sınırladığı alanın dışına çıkamaz. Bu da kübik spline 'da görülen sapmaları önlemektedir. Eğri kendini tayin eden çokgenden uzaklaşma ya da sapma göstermemektedir

Eğri bilgisayarda döndürme, yer değiştirme ve ölçeklendirme işlemleri altında değişiklik göstermemektedir. Bu işlemler eğriyi tayin eden çokgenin kontrol noktalarına uygulanarak yapılmaktadır. Matematiksel olarak Bézier eğrisi aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i J_{n,i}(t) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.23)$$

$B_i$ : Çokgen kontrol noktaları konum vektörü

$J_{n,i}$ : Bézier veya Bernstein karışım fonksiyonu

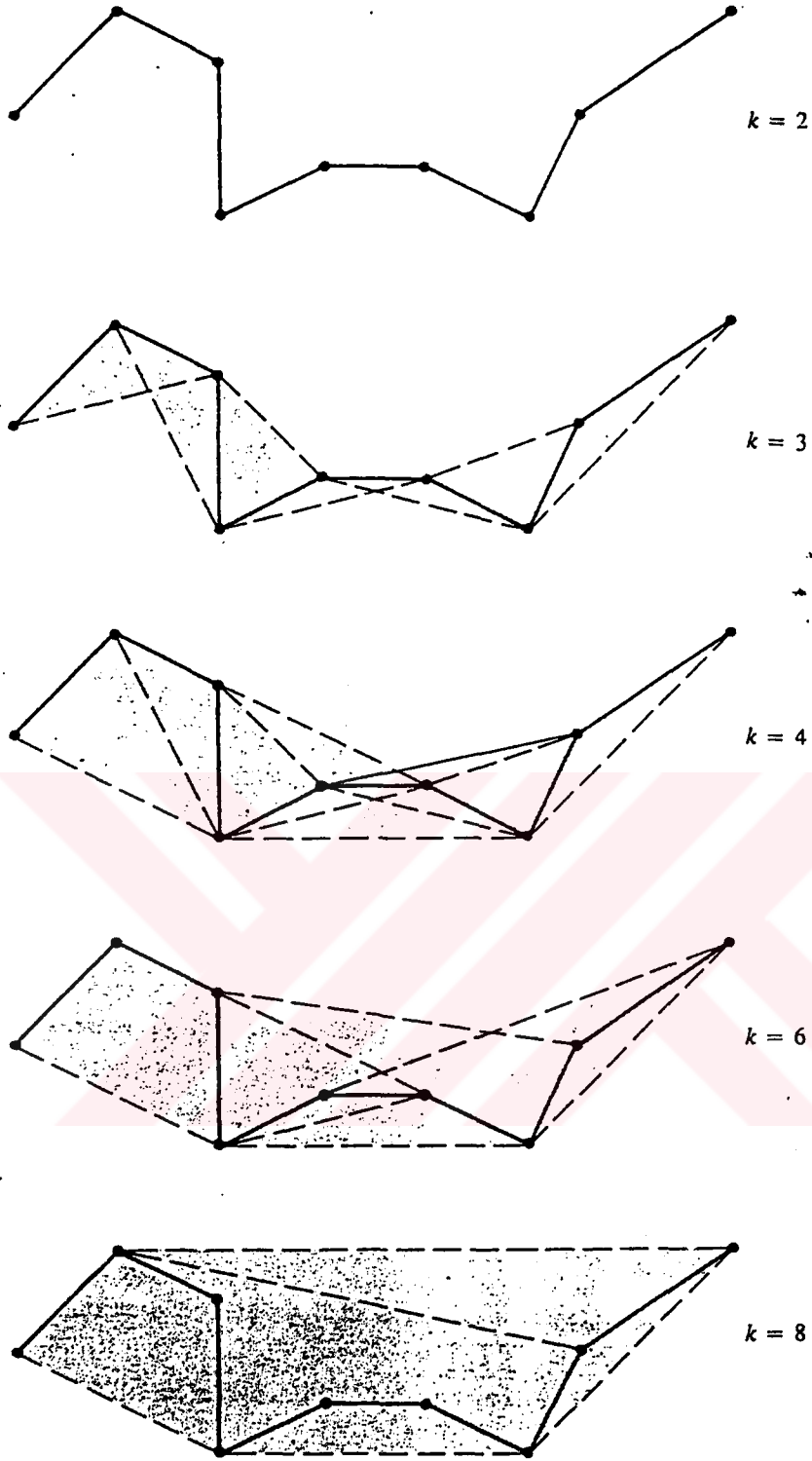
$t$ : Parametre

$$J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (3.24)$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (3.25)$$

Burada  $n$  Bernstein temel fonksiyonlarının derecesini belirtmektedir ve bu çokgenin kontrol nokta sayısından bir eksiktir. Ayrıca  $\binom{0}{0} \equiv 1$  ve  $0! \equiv 1$ 'dir.

Şekil (3.12)'de çeşitli  $n$  sayılarına ve  $t$ 'ye bağlı olarak çizilmiş temel fonksiyonları görülmektedir.



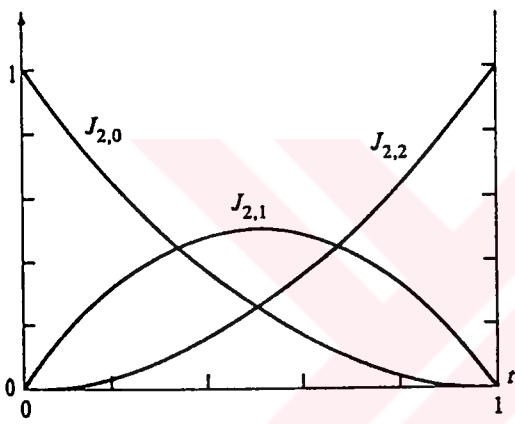
Şekil 3.11 Bezier eğrisinin mertebesine göre kontrol noktalarının kaplama alanı

Bézier eğrilerinin matris olarak ifadesi aşağıdaki şekildedir.

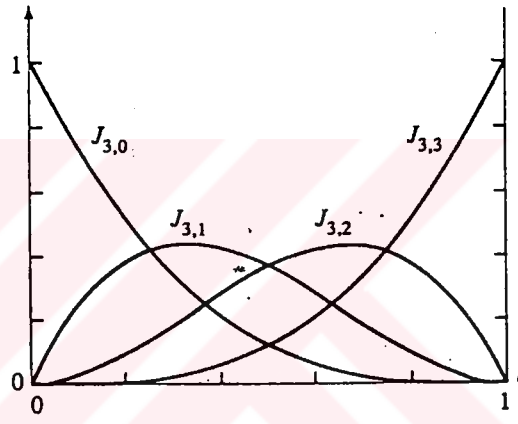
$$P(t) = [T] [N] [G] \quad (3.26)$$

$$[T] = [t^n \quad t^{n-1} \quad \dots \quad t \quad 1] \quad [G]^T = [B_0 \quad B_1 \quad \dots \quad B_n]$$

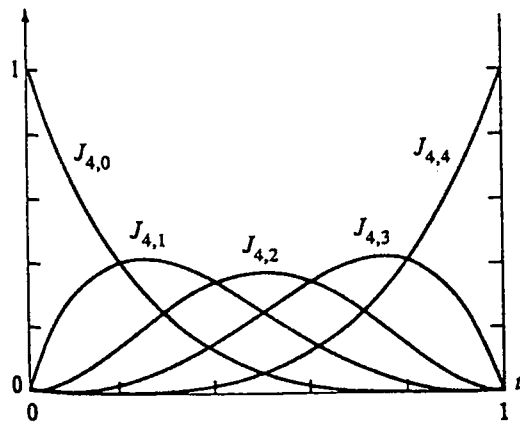
$$[N] = \begin{bmatrix} \binom{n}{0} \binom{n}{n} (-1)^n & \binom{n}{1} \binom{n-1}{n-1} (-1)^{n-1} & \dots & \binom{n}{n} \binom{n-n}{n-n} (-1)^0 \\ \binom{n}{0} \binom{n}{n-1} (-1)^{n-1} & \binom{n}{1} \binom{n-1}{n-2} (-1)^{n-2} & \dots & 0 \\ \binom{n}{0} \binom{n}{1} (-1)^1 & \binom{n}{1} \binom{n-1}{0} (-1)^0 & \dots & 0 \\ \binom{n}{0} \binom{n}{0} (-1)^0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$



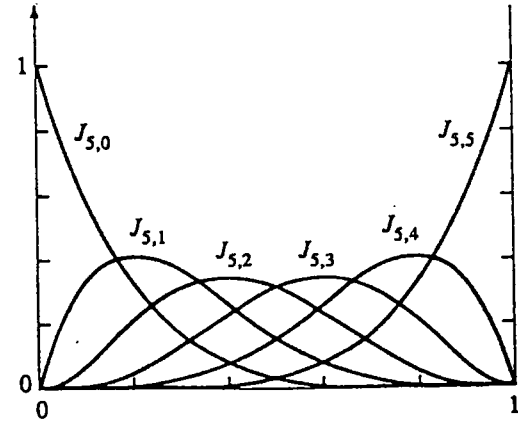
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 3.12 Bezier / Bernstein temel fonksiyonları , a) 3 kontrol noktası,  $n = 2$ ; b) 4 kontrol noktası,  $n = 3$ ; c) 4 kontrol noktası,  $n = 5$ ; d) 5 kontrol noktası,  $n = 6$

### 3.3 B-spline Eğrileri

Bir çokgenle ifade edilen eğrileri matematiksel olarak incelediğimiz zaman aralarındaki ilişkinin enterpolasyon ve yaklaşım şekline bağlı olduğu görülür. Bu yaklaşım şekli temel fonksiyonlar veya karışım fonksiyonlarıyla sağlanmaktadır.

Bir önceki bölümde incelenen Bézier eğrisinin iki dezavantajı vardır. Bu özellikler Bézier eğrisinin kullanımda esnekliğini sınırlamaktadırlar. Bunlar ;

- Eğriyi tayin eden çokgenin kontrol nokta sayısı aynı zamanda eğriyi derecesini tayin etmektedir ve bu nokta sayısını dışına çıkamaz. Örnek olarak kübik bir eğri 4 kontrol noktalı bir çokgen ile ifade edilebilir. Eğrinin derecesini düşürmek , ancak kontrol sayısını düşürmekle gerçekleşebilir.
- Eğri üzerindeki herhangi bir nokta kontrol noktalarının karışım fonksiyon değerlerine bağlı olduğundan kontrol noktalarından birisinde yapılan değişiklik bütün eğriyi etkilemektedir. Bu özellik eğride lokal bir değişiklik yapma imkanını sınırladığından bilgisayar uygulamalarında bir dezavantaj oluşturmaktadır.

Diğer bir karışım fonksiyonu ise B-spline karışım fonksiyonudur. Bu fonksiyon belli bir durum için Bernstein karışım fonksiyonu özelliklerini de taşımaktadır ancak Bernstein karışım fonksiyonlarından avantajlı yönleri vardır.

Bu fonksiyonun avantajlı yönü ise eğriyi tayin eden çokgenin her bir kontrol noktası ayrı bir karışım fonksiyonuyla ifade edilmektedir. Dolayısıyla her bir kontrol noktası eğrinin belirli bir parçasını etkilemektedir. Bu da karışım fonksiyonunun parametre değerine bağlı olarak sıfır dışı olduğu değerlerdir. Ayrıca B-spline eğrilerinin derecesi Bézier eğrilerinin aksine kontrol noktası sayısından bağımsız olarak sabit kalabilmektedir. B-spline eğrilerinin teorisi ilk defa Schoenberg tarafından çıkarılmıştır. Bilgisayar uygulaması ise birbirinden bağımsız olarak Cox - de Boor ve Gordon – Riesenfeld tarafından yapılmıştır. Bir B-spline eğrisi aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i N_{i,k}(t) \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max} \quad 2 \leq k \leq n+1 \quad (3.27)$$

Karışım fonksiyon ise aşağıdaki gibi Cox-de Boor formülüyle ifade edilmektedir.

$$N_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & x_i \leq u \leq x_{i-1} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (3.28a)$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - x_i)N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t)N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}} \quad (3.28b)$$

$$0 / 0 = 0$$

Bir B-spline eğrisi aşağıdaki koşulları sağlamak şartıyla  $k$ . mertebeden ( $k-1$ ). dereceden) bir polinom olarak ifade edilir.  $P(t)$  fonksiyonu her  $x_i \leq t \leq x_{i+1}$  aralığında ( $k-1$ ). dereceden bir polinomdur.  $P(t)$  fonksiyonu ve 1., 2. .... , ( $k-2$ ). türevleri eğri boyunca süreklidir. Örneğin , 4. mertebeden ( $k=4$ ) bir B-spline eğrisi kübik bir eğridir. Yukarıdaki özelliklere ek olarak B-spline eğrisinin özellikleri aşağıdaki gibidir.

- Herhangi bir  $t$  parametresi değeri için B-spline karışım fonksiyonları değerleri toplamı aşağıdaki gibidir

$$\sum_{i=1}^{n+1} N_{i,k}(t) \equiv 1 \quad (3.29)$$

- Her bir karışım fonksiyonunun değeri pozitif ve sıfırdışı bir değerdir.
- $k = 1$  ifadesi hariç her bir karışım fonksiyonunun bir maksimum değeri vardır.
- Eğrinin mertebe değeri maksimum kontrol nokta sayısına eşit olabilir.
- Eğri genellikle kendini tayin eden çokgenin şeklini alır.
- Eğri döndürme, yer değiştirme ve ölçeklendirme gibi transformasyon işlemleri kontrol noktalarına uygulanarak yapılabilir.
- Eğri, kontrol noktalarını kaplayan alan içerisinde yer alır. Bu özellik Bézier eğrilerinden daha avantajlıdır.  $k$ . mertebeden ( $k-1$ . derece) bir eğri üzerindeki nokta  $k$  adet komşu noktaları arasındaki eğri üzerinde bulunmaktadır. Şekil 3.11'de bu özellik çeşitli  $k$  sayısına göre verilmiştir.

(3.28)'de görüldüğü gibi düğüm noktası vektörü B-spline eğri formunu önemli ölçüde etkilemektedir. Düğüm noktası vektörü için şart sadece  $x_i \leq x_{i+1}$  şartını sağlamalıdır. Temelde iki tip düğüm noktası vektörü vardır. Bunlar

- Düzgün (uniform) düğüm noktası vektörü,
- Düzgün olmayan (non-uniform) düğüm noktası vektörü

Her iki tip düğüm vektörü kendi arasında periyodik ve açık olmak üzere ikiye ayrılır.

Periyodik uniform düğüm vektöründe, değerler düzgün artan şekildedir. Genelde uniform düğüm vektörü 0 ile başlayıp 1 artarak devam eder

$$[X] = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4]$$

Ya da 0 ile 1 arasında normalize edilmiştir.

$$[X] = [0 \ 0.25 \ 0.5 \ 0.75 \ 1.0]$$

Açık uniform düğüm vektörü başta ve sonda  $k$  merteye değerine bağlı sayıda tekrarlılık gösterir. Aşağıda çeşitli  $k$  değerleri için düğüm vektörleri verilmiştir.

Artan sırada düğüm vektörü

$$k = 2 \text{ için} \quad [X] = [0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4]$$

$$k = 3 \text{ için} \quad [X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$$

$$k = 4 \text{ için} \quad [X] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2]$$

Normalize edilmiş düğüm vektörü

$$k = 2 \quad [X] = [0 \ 0 \ 1/4 \ 1/2 \ 3/4 \ 1 \ 1]$$

$$k = 3 \quad [X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1/3 \ 2/3 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$k = 4 \quad [X] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1/2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

Genel olarak açık düğüm vektörü aşağıdaki formülasyonla elde edilebilir ,

$$x_i = 0 \quad 1 \leq i \leq k$$

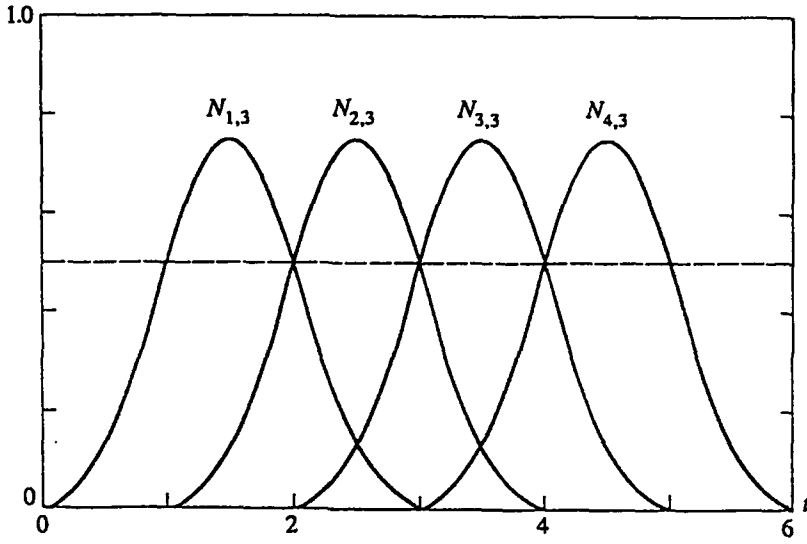
$$x_i = i - k \quad k+1 \leq i \leq n+1$$

$$x_i = n - k + 2 \quad n+2 \leq i \leq n+k+1$$

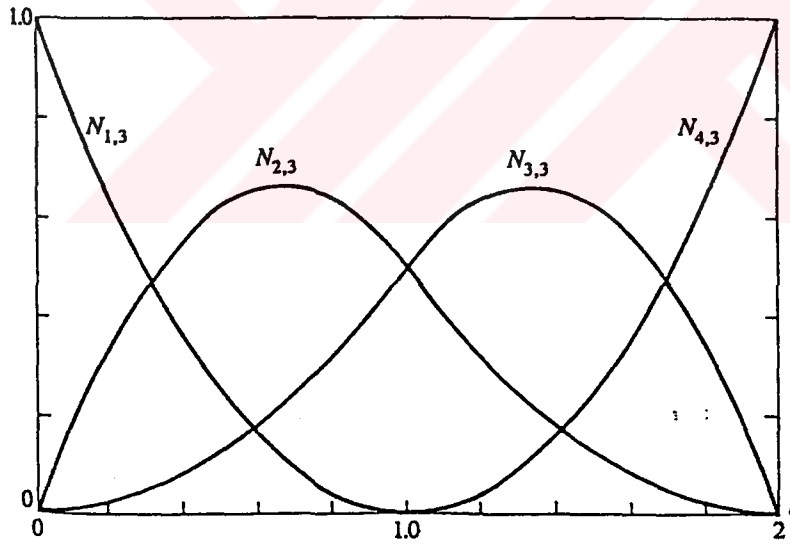
Yukarıdaki formülasyona göre hesaplanan düğüm vektörüne göre hesaplanmış karışım fonksiyonları, Bézier karışım fonksiyonlarına benzemektedir. Aslında B-spline eğrisi mertebesi kendini tayin eden çokgen kontrol sayısına eşit olduğu zaman B-spline karışım fonksiyonu değerleri Bézier karışım fonksiyonlarına eşit olmaktadır. Dolayısıyla B-spline eğrisi, Bézier eğrisine dönüşmektedir.

Düzgün olmayan düğüm vektörleri de yine düğüm vektörleri gibi periyodik ve açık olmak üzere ikiye ayrılmaktadır.

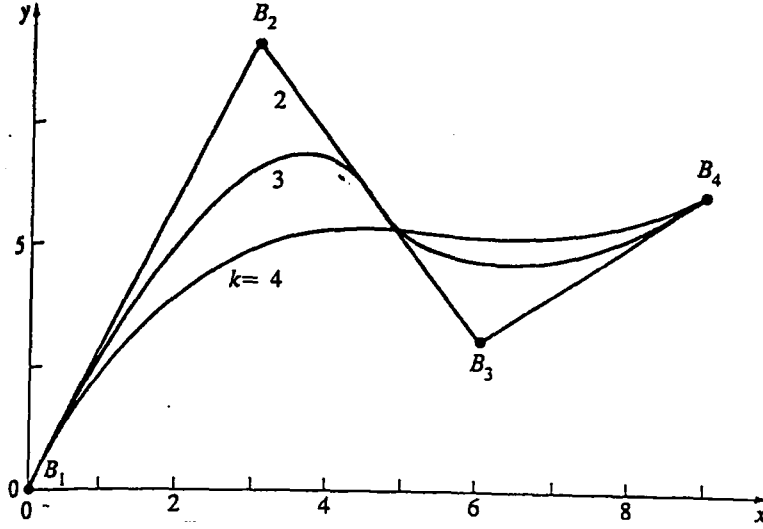
Şekil 3.15'de farklı mertebelere göre çizilmiş B-spline eğrileri görülmektedir. Şekilden görüldüğü gibi merteye sayısı arttıkça daha düzgün bir eğri edilmektedir.



Şekil 3.13 Düzgün periyodik B-spline temel fonksiyonları,  
 $[X] = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7]$ ,  $n+1=4$ ,  $k=3$



Şekil 3.14 Düzgün açık B-spline temel fonksiyonları,  $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ ]$   
 $n+1=4$ ,  $k=3$



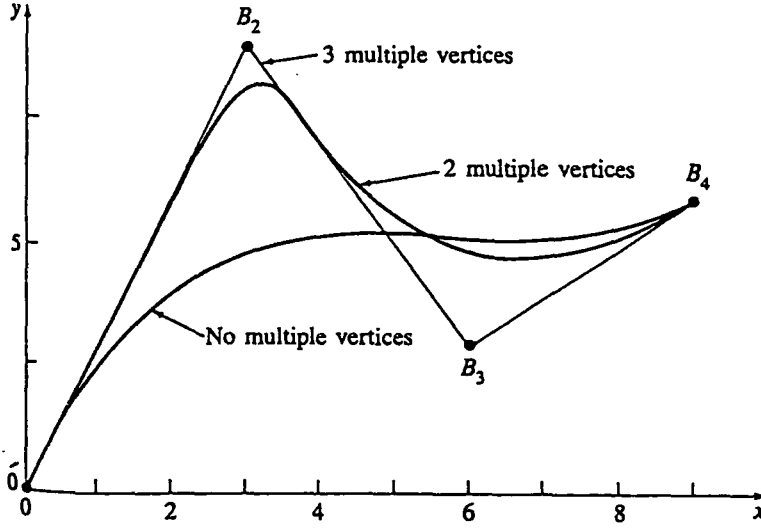
Şekil 3.15 Değişik mertebe değerlerinin B-spline eğrisine etkisi

Şekil 3.16 'de ise aynı kontrol noktası üzerinde birden fazla nokta tanımlandığında eğrinin nasıl bir şekil aldığı görülmektedir. Şekil'de görülen tüm eğriler  $k = 4$  mertebesine sahiptir. En alttaki eğri 4 kontrol noktası tanımlanarak çizilmiştir ( $B_1, B_2, B_3, B_4$ ). Ortadaki eğri ise 5 kontrol noktası tanımlanarak çizilmiştir. Bu noktalardan ikisi  $B_2$  noktası üzerinde çakışmıştır ( $B_1, B_2, B_2, B_3, B_4$ ). En üstteki eğri ise 6 kontrol noktası tanımlanarak çizilmiştir. Bu noktalardan üçü  $B_2$  noktası üzerinde çakışmıştır. Şekilden de görüldüğü gibi aynı nokta üzerinde birden fazla nokta tanımlanırsa eğri o noktaya yaklaşmaktadır. Aynı nokta üzerinde tanımlanan nokta sayısı  $k-1$  olduğu zaman o nokta üzerinde eğride keskin bir köşe oluşmaktadır. Bu da bize B-spline eğrilerinin bir başka özelliğini göstermektedir. Gemi formu belirlenirken çene hatları bu özellik sayesinde çizilebilmektedir.

B-Spline karışım fonksiyonlarındaki düğüm vektörlerine bağlı esneklik, B-spline eğrilerinde çeşitli şekillerde müdahale olanakları sağlamaktadır. Bu olanaklar şöyledir :

- Düğüm vektör çeşitliliği (Uniform, Nonuniform)
- Karışım fonksiyonunun mertebesinde değişiklik yapma olanağı
- Eğriyi tayin eden çokgenin kontrol noktalarında yapılabilecek değişiklikler
- Aynı kontrol noktası üzerinde çoklu kontrol noktası tanımlanabilmesi (Çene hattının belirlenebilmesi)
- Düğüm vektöründe çoklu düğüm noktası değerleri kullanılabilmesi





Şekil 3.16 Bir kontrol noktası üzerinde birden fazla kontrol noktası tanımlanmasının B-spline eğrisine etkisi

### 3.4 NURBS Eğrileri

Rasyonel eğri ve yüzey ifadeleri bilgisayar grafik literatüründe ilk olarak Coons tarafından ele alınmıştır. NURBS eğrileri, bilgisayarla grafik tasarımı alanında bağımsız formdaki eğrilerin yanı sıra aynı zamanda çizgi, düzlem, konik eğrilerin (daire, elips, hiperbol) de ifadesinde kullanılabilen matematiksel bir yöntemdir. NURBS eğrileri ilk olarak Versprille tarafından ele alınmıştır. NURBS eğrileri aynı zamanda Amerikan Standartlar Enstitüsü'nde grafik paylaşımı olarak bir standart olarak kabul edilmiştir. IGES standartları olarak da anılan bu standart bilgisayar ve bilgisayar yazılımları arasında dosya değiştirme işlemlerinde kullanılmaktadır.

Rasyonel bir B-spline eğrisi, dört boyutlu bir homojen koordinat uzayında ifade edilen rasyonel olmayan bir eğrinin üç boyutlu fiziksel uzaydaki izdüşümüdür. Rasyonel B-spline eğrisinin ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$P(t) = \sum B_i^h N_{i,k}(t) \quad (3.30)$$

Burada  $B_i^h$  dört boyutlu uzaydaki kontrol noktalarıdır.  $N_{i,k}(t)$  daha önce (3.28)'de verilen rasyonel olmayan B-spline temel fonksiyonlarıdır. Dört boyutlu uzaydan üç boyutlu uzaya izdüşüm aşağıdaki gibi dört boyutlu uzayın homojen bir koordinata bölünmesiyle aşağıdaki gibi yapılmaktadır.

$$P(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} B_i h_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=1}^{n+1} h_i N_{i,k}(t)} = \sum_{i=1}^{n+1} B_i R_{i,k}(t) \quad (3.31)$$

$$R_{i,k}(t) = \frac{h_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=1}^{n+1} h_i N_{i,k}(t)} \quad (3.32)$$

$h_i$  burada homojen koordinatları ifade etmektedir.  $h_i$  değerlerine aynı zamanda ağırlık değerleri denmektedir. (3.31)'de görüldüğü gibi  $h_i$  değerleri 1'e eşit olduğunda denklem ifadesi daha önceki bölümde incelediğimiz rasyonel olmayan B-spline eğrisi halini almaktadır. Yukarıdaki ifadeden de görüldüğü gibi rasyonel B-spline eğrileri rasyonel olmayan B-spline eğrilerinin genel bir halidir. Dolayısıyla rasyonel olmayan B-spline eğrilerinin özelliklerine sahiptir.

Rasyonel olmayan B-spline eğrilerinde kullanılan düğüm vektörleri, rasyonel B-spline eğrilerinde de kullanılmaktadır.

$h_i$  ağırlık değerlerinin etkileri Şekil 3.17 ve 3.18'de gösterilmiştir. Şekil 3.17'de 5 kontrol noktası,  $k = 3$  ve açık düzgün düğüm vektörüne göre çeşitli  $h_i$  değerleri için çizilmiş temel fonksiyonlar görülmektedir. Şekil 3.18'de yine  $h_i$  değerlerinin eğriye olan etkisi görülmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi  $h_3 = 0$  olduğu zaman eğri düz bir çizgi halini almaktadır.  $h_3$  değeri arttığı zaman ise eğrinin kontrol noktasına yaklaştığı görülmektedir.

Daha önce de belirtildiği gibi NURBS eğrileri aynı zamanda tüm konik kesitlerin ifadesinde de kullanılabilir. Konik kesitler ikinci dereceden denklemlerle ifade edildiğinden, NURBS eğrisi yöntemiyle ifade edilebilmeleri için  $k = 3$  olarak ve üç kontrol noktasıyla tanımlanabilmeleri gereklidir. Üç nokta tanımlandığı için burada ağırlık değerlerinden  $h_2$ 'nin değeri konik kesitin formunu belirlemektedir. Aşağıda  $h$  belirli değerlerine karşılık gelen konik kesitler verilmiştir.

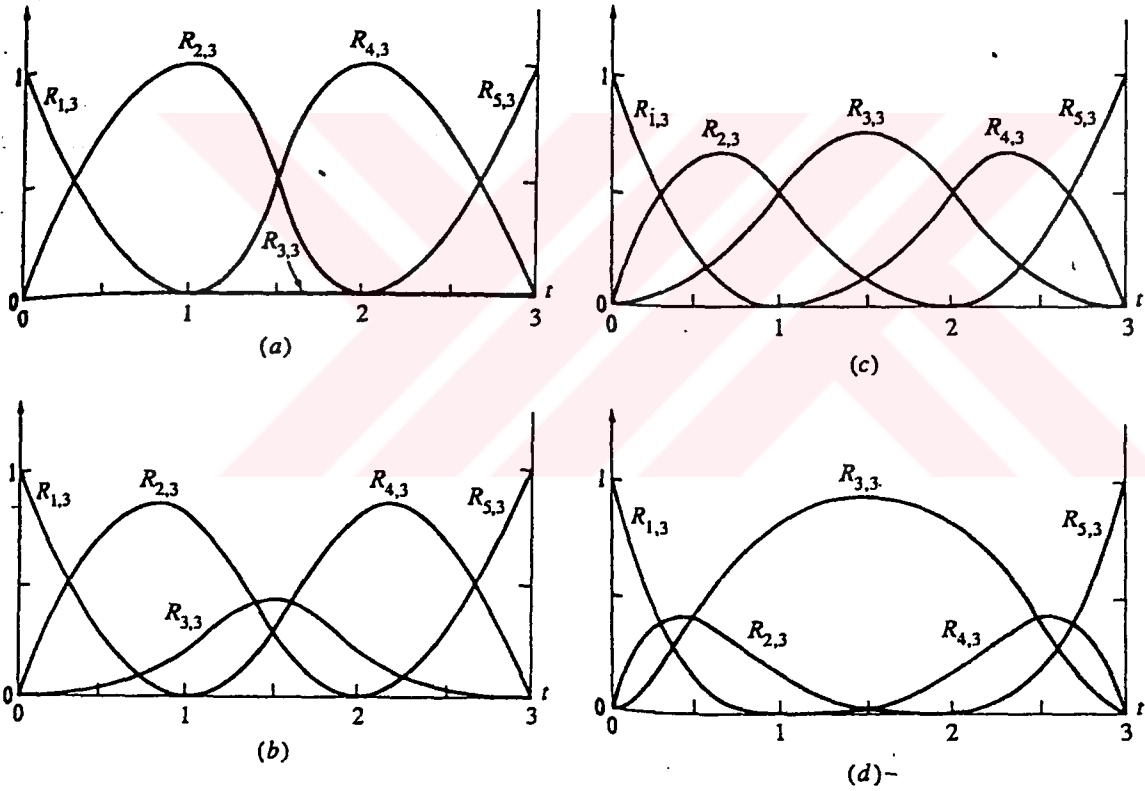
$h_2 = 0$  düz çizgi

$0 < h_2 < 1$  elips eğri parçası

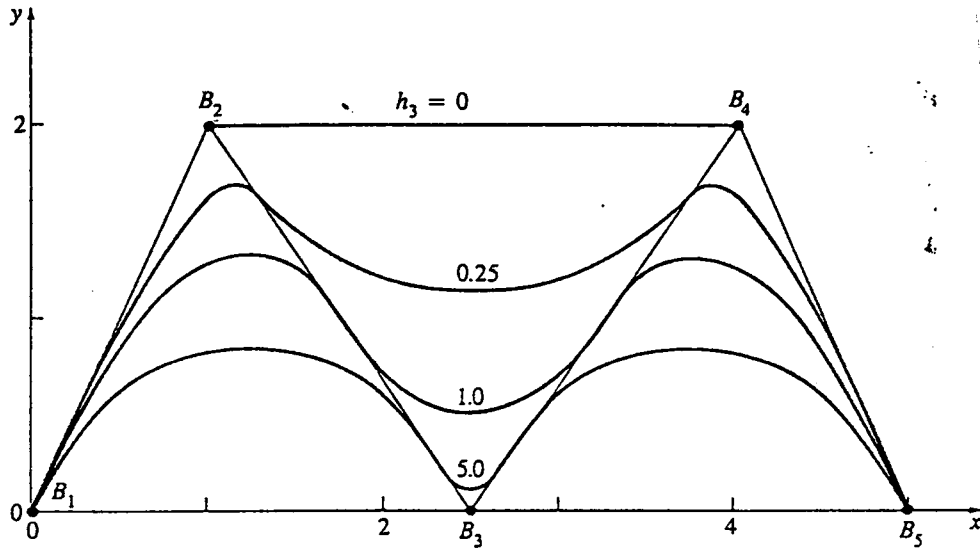
$h_2 = 1$  parabolik eğri parçası

$h_2 > 1$  hiperbolik eğri parçası

Konik kesitler gemi formunun tanımında en çok sintine dönümü bölgesinde ve çeyrek daire formunda kullanılmaktadır. Sintine dönümünü çeyrek daire olarak ifade edebilmek için  $h_2 = \sqrt{2}/2$  değeri kullanılmalıdır.



Şekil 3.17 Rasyonel B-spline temel fonksiyonları  $n+1 = 5$ ,  $k = 3$ , açık düğüm vektörü  $[X] = \{0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3\}$ ,  $[H] = [1 \ 1 \ h_3 \ 1 \ 1]$ , a)  $h_3=0$ , b)  $h_3=0.25$ , c)  $h_3=1.0$ , d)  $h_3=5$



Şekil 3.18 Rasyonel B-spline eğrisi,  $n+1 = 5$ ,  $k = 3$ , açık düğüm vektörü  $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$ ,  $[H] = [1 \ 1 \ h_3 \ 1 \ 1]$ , a)  $h_3=0$ , b)  $h_3=0.25$ , c)  $h_3=1.0$ , d)  $h_3=5$

#### 4. GEMİ FORMUNUN MODELLENMESİNDE KULLANILAN YÜZEYLERİN MATEMATİKSEL OLARAK İFADE YÖNTEMLERİ

Yüzeyler ve yüzey tanımlamaları bilgisayarla tasarım ve imalat alanında büyük bir rol oynamaktadır. Bilgisayar destekli tasarımda, üç boyutlu gerçek bir yüzeyin matematiksel olarak ifade edilmesi çok önemlidir. Böylelikle tasarımın ilk aşamalarında bile eğrilik gibi yüzeysel özellikleri ve hacim, yüzey alanı, atalet momenti gibi fiziksel özellikleri hesaplamaya olanak sağlanmıştır. Bunun yanında elde edilen yüzeyin imalatı için gerekli bilgi klasik yöntemlere göre daha kısa sürede elde edilmektedir. Örnek olarak imalat için sayısal kodların çıkarılması yine yardımcı bilgisayar yazılımlarıyla çok kısa sürede elde edilmektedir.

Yüzey belirleme tekniklerinde temel olarak iki teknik kullanılmaktadır. Bunlardan birincisi çoğunlukla Coons'un ismiyle anılmaktadır. Coons yüzey ifade tekniğinde bilinen noktalardan yüzey elde etme tekniği kullanılmaktadır. İkinci olarak ise çoğunlukla Bézier'in ismiyle anılmaktadır.

Bu bölümde yine Bézier yüzeylerinin doğal bir uzantısı olan B-spline ve NURBS yüzeyleri incelenecektir.

##### 4.1 B-Spline Yüzeyleri

Bézier yüzeyinin doğal bir uzantısı olan B-spline yüzeyinin kartezyen çarpımı aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$Q(u, v) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,l}(w) \quad (4.1)$$

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max} \quad 2 \leq k \leq n+1$$

$$w_{\min} \leq w \leq w_{\max} \quad 2 \leq l \leq m+1$$

$$N_{i,k}(u) = \begin{cases} 1 & x_i \leq u \leq x_{i-1} \\ 0 & \end{cases} \quad (4.2 a)$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u - x_i) N_{i,k-1}(u)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - u) N_{i+1,k-1}(u)}{x_{i+k} - x_{i+1}} \quad (4.2 b)$$

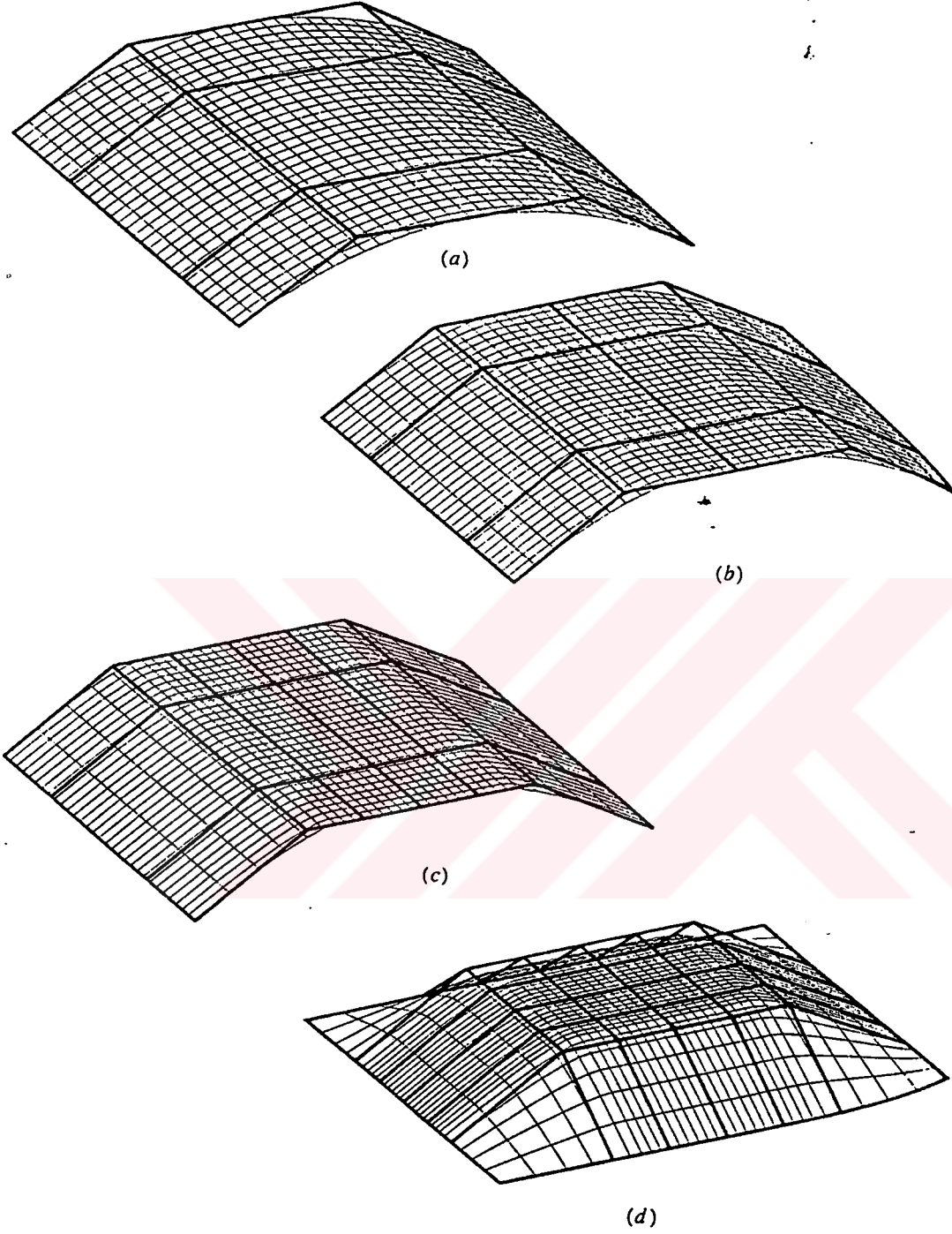
$$M_{j,l}(w) = \begin{cases} 1 & y_j \leq w \leq y_{j+1} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$M_{j,l}(w) = \frac{(w - y_{j-1})M_{j,l-1}(w)}{y_{j+1} - y_{j-1}} + \frac{(y_{j+2} - w)M_{j+1,l-1}(w)}{y_{j+2} - y_{j+1}} \quad (4.3 b)$$

B-spline eğrilerinde olduğu gibi B-spline yüzeyinin şeklini ve karakterini  $[X]$  ve  $[Y]$  düğüm noktası vektörleri belirlemektedir. Burada da yine açık, periyodik ve düzgün olmayan düğüm noktası vektörleri kullanılmaktadır. Her iki parametrik yönde de aynı tip düğüm noktası vektörü kullanılsa da bu gerekli değildir. Örnek olarak bir yönde açık bir yönde periyodik düğüm noktası vektörü kullanılabilir. Buna örnek silindirik yüzey verilebilir. Sınır eğrileri ve aradaki eğrilerin ifadesinde B-spline temel fonksiyonları kullanıldığından B-spline yüzeyinin özellikleri aşağıdaki gibidir.

- Her iki parametrik yöndeki yüzeyin mertebesi aynı yöndeki kontrol sayısına eşittir
- Her iki parametrik yöndeki süreklilik, aynı yöndeki mertebeye sayısından iki eksiktir
- B-spline yüzeylerinin bilgisayarda ölçeklendirme, döndürme vb. transformasyon işlemleri tel kafesin kontrol noktalarına uygulanarak yapılabilir.
- Poligon tel kafesin bir kontrol noktasının etkisi her iki parametrik yönde de  $\pm k/2, \pm l/2$  kadar kenar sayısı içerisinde.
- Tel kafesin kontrol noktası sayısı, her iki parametrik yönde de eğrinin mertebesine eşit olduğunda ve ara düğüm noktası değeri kullanılmadığında yüzey Bézier yüzeyine indirgenmektedir.
- Yüzey kontrol noktalarının alanı içerisinde kalmaktadır.

Daha önceki B-spline eğrileri bölümünde de incelendiği gibi B-spline yüzeylerinde de düz yüzeyler veya keskin köşelere sahip yüzeyler ifade etmek mümkündür. Şekil 4.1 – 4.3 ‘de üçüncü mertebeden (ikinci derece) yüzeylere ait örnekler bulunmaktadır. Şekil 4.1’de  $4 \times 4$  tel kafesten oluşan bir yüzey görülmektedir. Aradaki noktalar doğrusaldır. Sınır kontrol noktalarıyla ifade edilen eğrinin ötelenmesiyle oluşturulmuştur. Şekil 4.1’ de ise ara noktalara eklenen bir sıra kontrol noktasının eklenmesi sonucunda oluşan yüzey görülmektedir. Yine burada da ara noktalar doğrusaldır. Ara noktalarda yüzeyin düzleştiği görülmektedir. Şekil 4.1’de ara noktalara bir sıra daha kontrol noktası eklenmiştir. Bu şekilden de görüldüğü gibi Şekil 4.1’den daha geniş bir düz alana sahip yüzey elde edilmiştir.

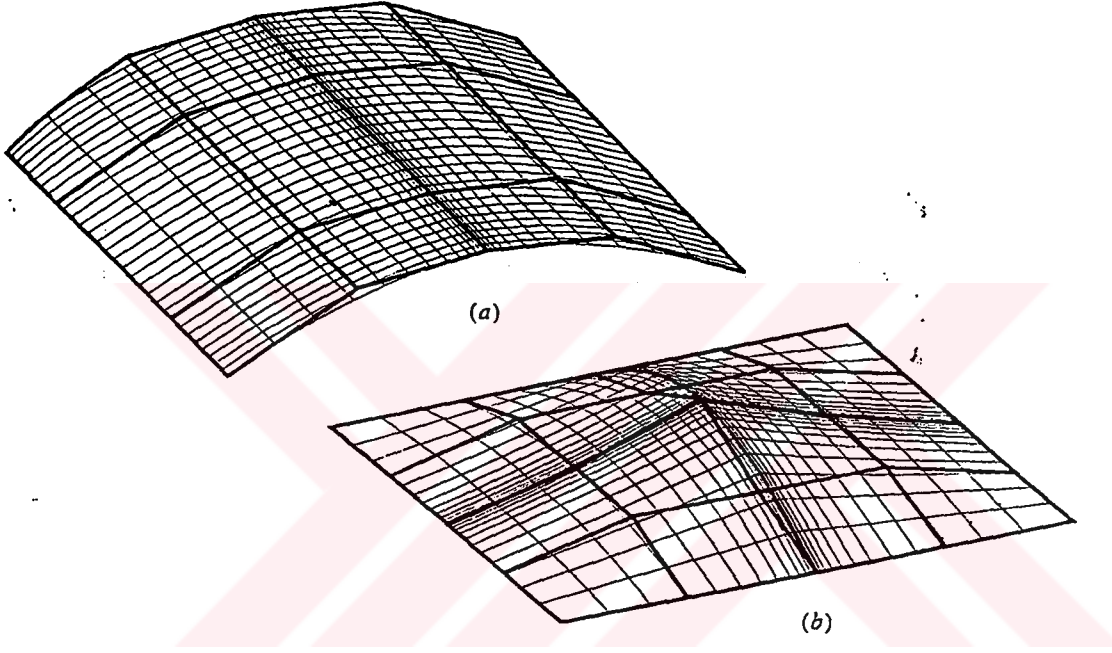


Şekil 4.1 Üçüncü dereceden B-spline yüzeyleri

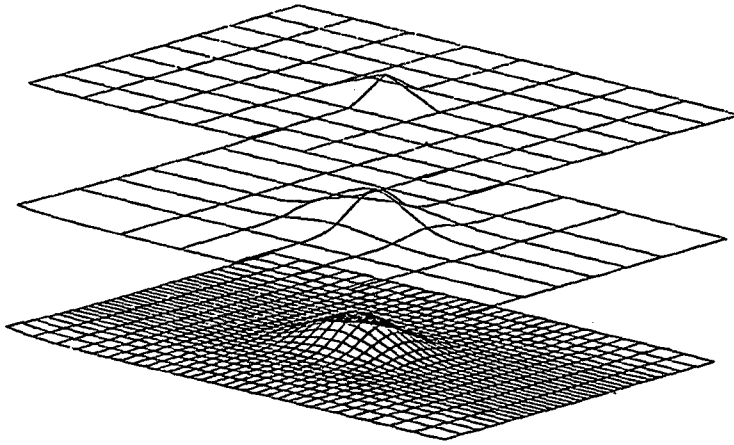
Şekil 4.2'de aynı kontrol noktası üzerinde  $k-1$  adet çakışık nokta tanımlanması sonucunda oluşan B-spline yüzeyi görülmektedir. Burada sadece bir parametre yönünde çakışık nokta

tanımlanmıştır. Tanımlanan yönde keskin bir köşe oluşmaktadır. Her iki yönde de çakışık nokta tanımlandığında, her iki yönde de noktaların tanımlandığı kontrol noktaların çakıştığı yerde bir köşe nokta oluşmaktadır. (Şekil 4.2b) B-spline eğrilerinin ve yüzeylerinin her yerde  $C^{k-2} / C^{l-2}$  sürekli olmasından dolayı bu köşe noktalarda da  $C^{k-2} / C^{l-2}$  . dereceden sürekli dir.

B-spline eğrilerinin ve yüzeylerinin bir diğer avantajlı özelliği ise kontrol noktaları üzerinde  $\pm k/2, \pm l/2$  kenar sayısı veya tel kafes sayısı kadar lokal kontrole olanak sağlamasıdır. (Şekil 4.3)



Şekil 4.2 Aynı nokta üzerinde birden fazla tanımlanmış kontrol noktasının dördüncü mertebeden B-spline yüzeyine etkisi



Şekil 4.3 B-spline yüzeyinde lokal kontrol



## 4.2 NURBS Yüzeyleri

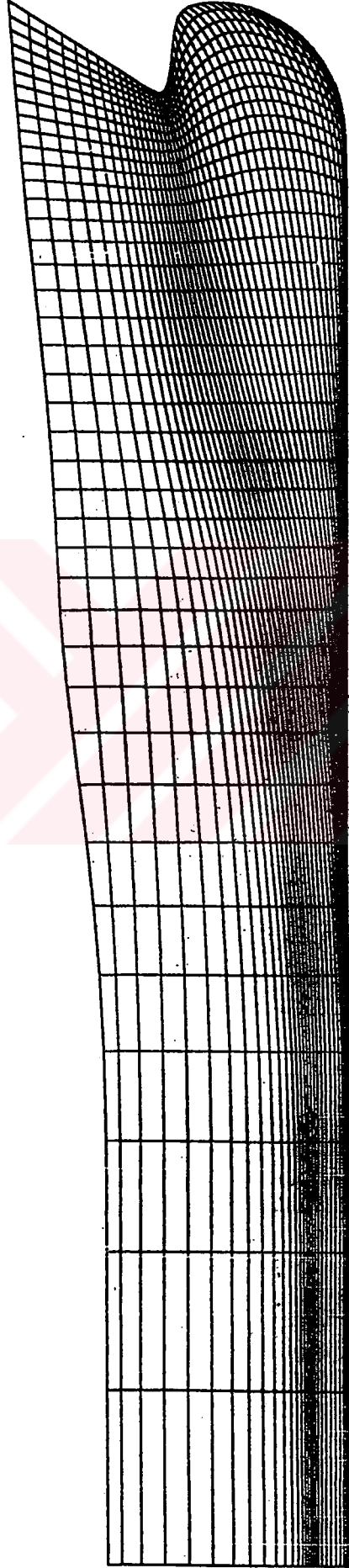
Bir NURBS eğrisinin dört boyutlu homojen koordinatlarda kartezyen çarpımı aşağıdaki gibidir.

$$Q(u, v) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j}^h N_{i,k}(u) M_{j,l}(w) \quad (4.4)$$

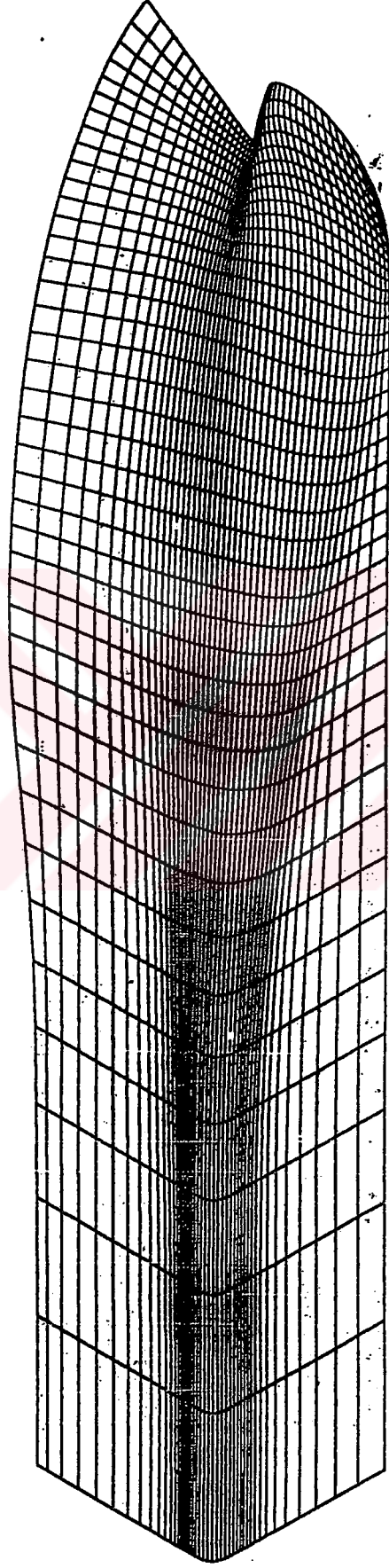
Yukarıdaki denklemde  $B_{i,j}^h$  dört boyutlu homojen kontrol noktalarını,  $N_{i,k}(u), M_{j,l}(w)$  ise daha önceki bölümde ifade edilen rasyonel olmayan B-spline temel fonksiyonlarını ifade etmektedir. Yukarıdaki ifadeyi homojen koordinatlara böldüğümüzde üç boyutlu uzaydaki izdüşümü olan rasyonel B-spline yüzeyini elde ederiz.

$$Q(u, v) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} B_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,l}(w)}{\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,l}(w)} = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j} S_{i,j}(u, w)$$

$$S_{i,j}(u, w) = \frac{h_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,l}(w)}{\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,l}(w)}$$



Şekil 4.4 Kimyasal bir tankerin baş formunun NURBS yüzeyi ile ifadesi



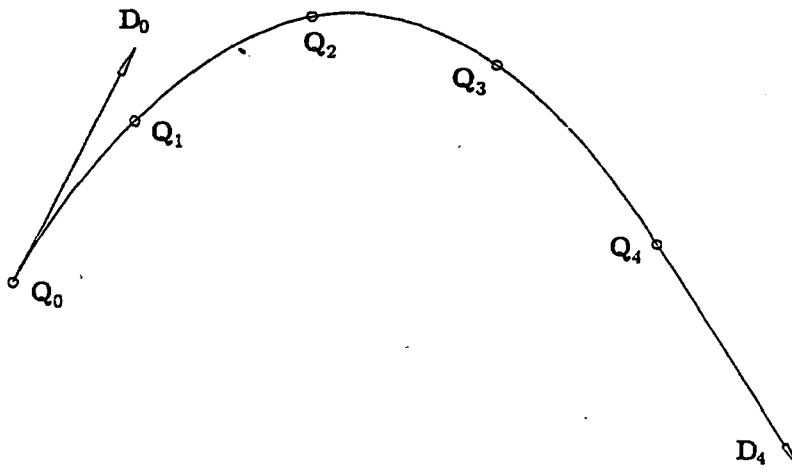
Şekil 4.5 Kimyasal bir tankerin baş formunun NURBS yüzeyi ile ifadesi

## 5. EĞRİ UYDURMA YÖNTEMLERİNİN İNCELENMESİ

Bir önceki bölümde B-spline eğrisinin nasıl çizdirildiğini görmüştük. B-spline eğrisi kendini tayin eden çokgenler yardımıyla ifade edilir. B-spline eğri uydurma yönteminde ise elimizde var olan noktalardan geçen eğrinin kontrol çokgenlerinin kontrol noktalarının elde edilmesi gerekir.

Eğri uydurma yöntemleri ikiye ayrılmaktadır. Bunlar sırasıyla enterpolasyon ve yaklaşım yöntemleridir. Enterpolasyon yönteminde eğri ya da yüzey verilen noktalardan geçmektedir. (Şekil 9.1.) Yaklaşım yönteminde ise eğri noktaların tam üstünden geçmeyebilir fakat belli bir hata payıyla yakınından geçmektedir. Bazı uygulamalarda , örneğin sayısal tabletler yardımıyla bilgisayara bilgi aktarırken ufak hatalarla aktarılmaktadır. Eğrinin bu noktalardan tam olarak geçmesini istersek eğride bir takım sapmalar ve gezinmeler olabilir. Böyle durumlarda yaklaşım yöntemi uygulanarak bu sapma ve gezinmeler ortadan kaldırılabilir. Yaklaşım yönteminde eğri belirli bir sınır değerinde verilen noktadan sapma yapabilir.

Eğri uydurma yöntemlerine ilişkin geniş bir araştırma yapılmıştır ve halen yapılmaktadır. Fakat genellikle kesin bir sonuç elde edilememektedir. Örnek olarak Şekil 5.1 ve Şekil 5.2 'de belirli noktalardan birden fazla NURBS eğrisi geçebilir. Bu tamamen uygulayan kişinin tatminine bağlıdır. Daha önceki bölümlerde de bahsedildiği gibi NURBS eğrisinin formu birden fazla parametreye bağlıdır. Bunlar sırasıyla parametre değeri ,düğüm noktası vektörü, ağırlık noktalarının tayinidir. Bunlar birden fazla yöntemle belirlenebilmektedir.



Şekil 5.1 Enterpolasyon yöntemine göre eğri uydurma



Eğer bir nokta bir eğri üzerinde ise yukarıda verilen denkleme göre aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$P_1(t_1) = N_{1,k}(t_1)B_1 + N_{2,k}(t_1)B_2 + \dots + N_{i,k}(t_1)B_i$$

$$P_2(t_2) = N_{1,k}(t_2)B_1 + N_{2,k}(t_2)B_2 + \dots + N_{i,k}(t_2)B_i$$

$$P_j(t_j) = N_{1,k}(t_j)B_1 + N_{2,k}(t_j)B_2 + \dots + N_{i,k}(t_j)B_i$$

$$2 \leq k \leq n+1 \leq j$$

Yukarıdaki denklem sistemi matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$[P] = [N][B]$$

$$[P]^T = [P_1(t_1) \quad P_2(t_2) \quad \dots \quad P_j(t_j)]$$

$$[B] = [B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_i]$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_{1,k}(t_1) & \dots & \dots & N_{i,k}(t_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ N_{1,k}(t_j) & \dots & \dots & N_{i,k}(t_j) \end{bmatrix}$$

$2 \leq k \leq n+1 = j$ , olduğunda  $[N]$  kare matris haline dönüşmektedir. Denklemin çözümü  $[N]$  matrisinin tersini alarak çözülebilir.

$$[B] = [N]^{-1}[P] \quad 2 \leq k \leq n+1 = j$$

Bu durumda eğri bütün noktalardan geçmektedir. Her ne kadar eğrinin sürekliliği her yerde  $C^{k-2}$  sürekliliğinde olsa da bilinmeyen nokta sayısı kontrol nokta sayısına eşit olduğundan eğri düzgün olmayabilir.

Daha düzgün bir eğri daha az sayıda kontrol noktasıyla elde edilebilir. Bu halde Denklem 5.1.1'in çözümü aşağıdaki şekilde olur.

$$[P] = [N][B]$$

$$[N]^T [P] = [N]^T [N][B]$$

$$[B] = \left[ [N]^T [N] \right]^{-1} [N]^T [P]$$

Yukarıdaki her iki çözüm yöntemi  $[N]$  matrisinin bilindiği kabulüne göre yapılmaktadır.

Her ne kadar çözüm basit gibi görünse de parametre değerlerinin hesaplanması ve düğüm noktası vektörünün hangi yöntemle göre hesaplanacağı iyi tayin edilmek zorundadır. Aksi takdirde tekil matris oluşmakta ve çözüm yapılamamaktadır. Parametre değişkenlerinin hesaplanmasında çoğunlukla aşağıdaki üç yöntem kullanılmaktadır.

- Eşit aralıklarla hesap yöntemi
- Kordon boyu yaklaşımı
- Merkezci hesap yöntemi

Eşit aralıklarla hesap yöntemi verilen noktalar düzensiz ise istenmeyen kapalı eğriler vermektedir. Dolayısıyla tavsiye edilmemektedir.

$$t_0 = 0 \qquad t_n = 1$$

$$t_k = \frac{k}{n} \qquad k = 1, \dots, n-1$$

Kordon boyu yaklaşımı en çok kullanılan yöntemlerden bir tanesidir. Noktalar arasında mesafeyi baz alan bir hesaplama yöntemidir. Düzgün parametre değerleri vermektedir.

$$d = \sum_{k=1}^n |P_k - P_{k-1}|$$

$$t_0 = 0 \qquad t_n = 1$$

$$t_k = t_{k-1} + \frac{|P_k - P_{k-1}|}{d} \qquad k = 1, \dots, n-1$$

n : Nokta sayısı

Merkezcil hesaplama yöntemi diğer hesaplama yöntemlerine kıyasla yeni bir yöntemdir. Yöntem keskin dönüşler veren noktalar için diğer yöntemlerden daha iyi sonuç vermektedir.

$$d = \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{|P_k - P_{k-1}|}$$

$$t_0 = 0$$

$$t_{n-1} = 1$$

$$t_k = t_{k-1} + \frac{\sqrt{|P_k - P_{k-1}|}}{d} \quad k=1, \dots, n-2$$

$n$  : Nokta sayısı

Düğüm noktası vektörü hesabı için ise açık, düzgün olmayan düğüm vektörü hesabının yanı sıra ortalama düğüm vektörü hesaplama yöntemi de kullanılmaktadır.

$$t_0 = \dots = t_k = 0 \quad t_{m-p} = \dots = t_m = 1$$

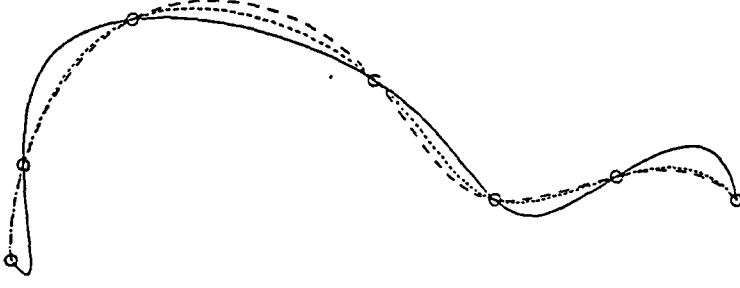
$$t_{j+k} = \frac{1}{k} \sum_{i=j}^{j+p-1} t_i \quad j=1, \dots, n-k-1$$

$k$  : Eğrinin derecesi

$n$  : Nokta sayısı

Şekil 5.3'te 7 noktadan geçen ve yukarıdaki yöntemlere göre hesaplanmış eğrilerin karşılaştırılması görülmektedir. Düz çizgiyle çizilen eğri eşit aralıklı parametre ve periyodik düğüm noktası vektörüne göre hesaplanmış eğridir. Kesikli çizgiyle gösterilen eğri kordon boyu parametre yaklaşımı ve ortalama düğüm vektörü hesabına göre hesaplanmıştır. Nokta nokta olan eğri ise merkezci parametre yaklaşım ve ortalama düğüm vektörü hesap yöntemine göre hesaplanmıştır. Şekil 5.4'te ise yine aynı parametre ve düğüm noktası hesaplama yöntemine göre hesaplanmış farklı noktalardan geçen eğri görülmektedir.





Şekil 5.3 Değişik parametre ve düğüm vektörüne göre eğri uydurma örneği

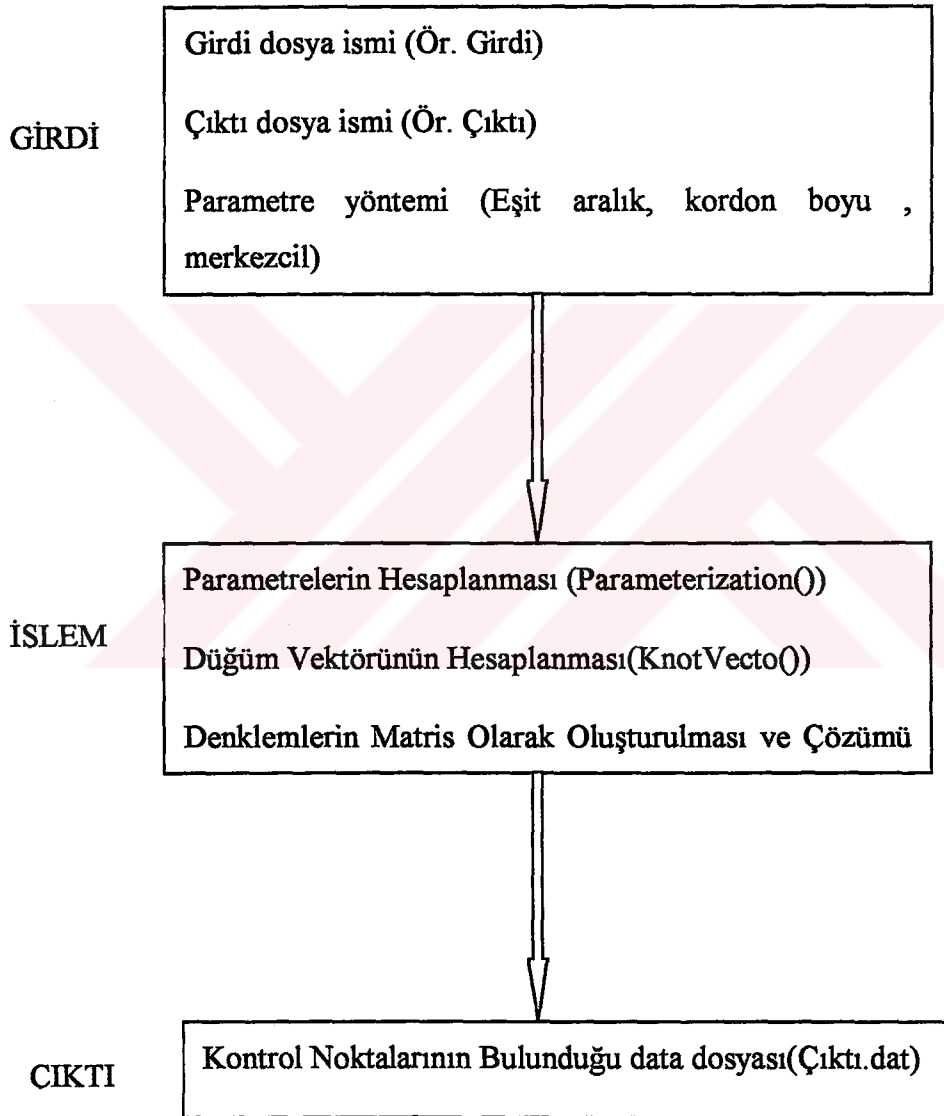


Şekil 5.4 Değişik parametre ve düğüm vektörüne göre eğri uydurma örneği

## 6. EĞRİ UYDURMA YÖNTEMİNİN GEMİ TEKNE FORMUNUN MODELLENMESİNDEKİ UYGULAMASI

Bu bölümde ,beşinci bölümdeki incelenen global enterpolasyon eğri uydurma yöntemi için bir uygulama çalışması yapılmıştır. Bu uygulama için C programlama diliyle yazılmış bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Programın genel akış şeması aşağıda verilmiştir.

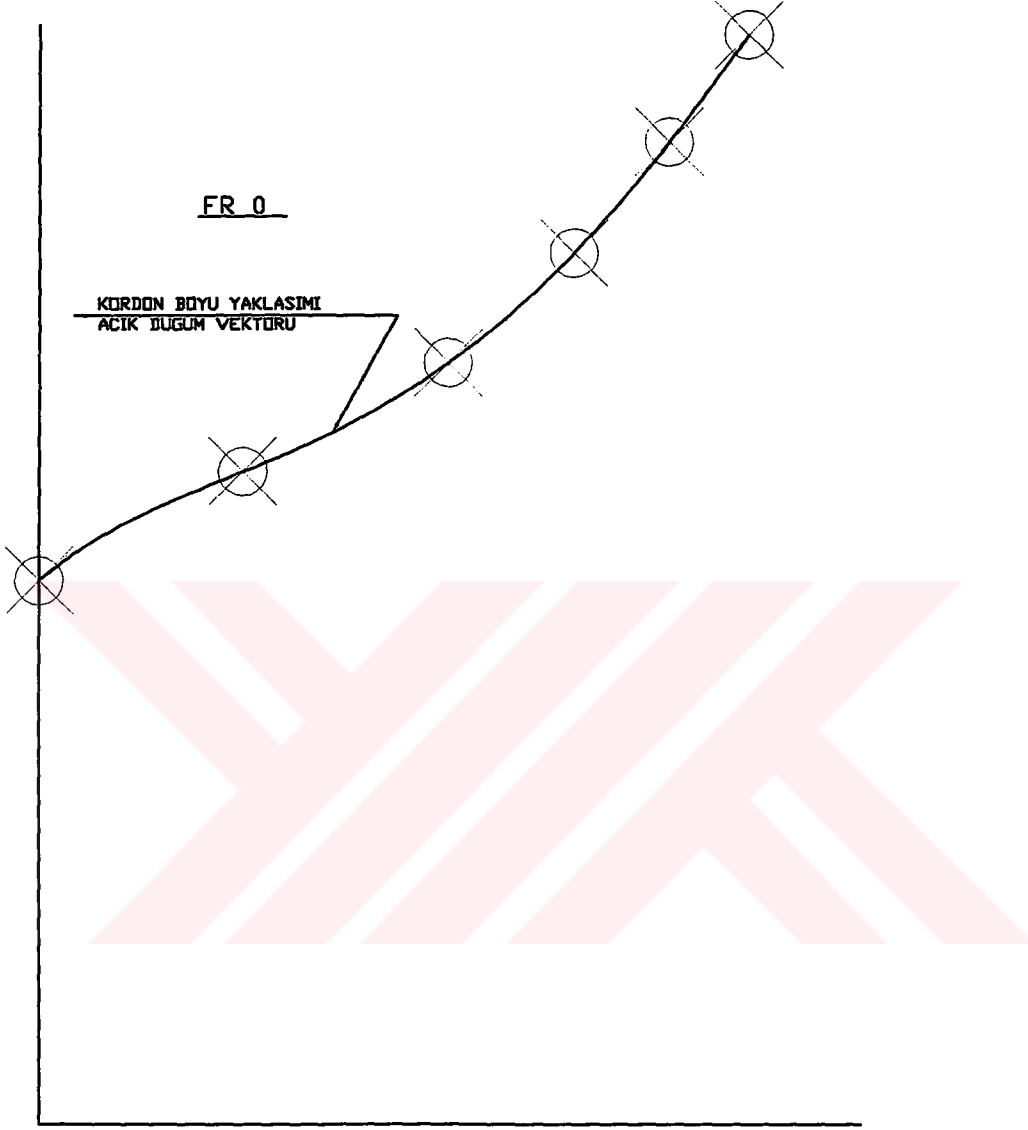
BsplineCurveFit programının akış şeması



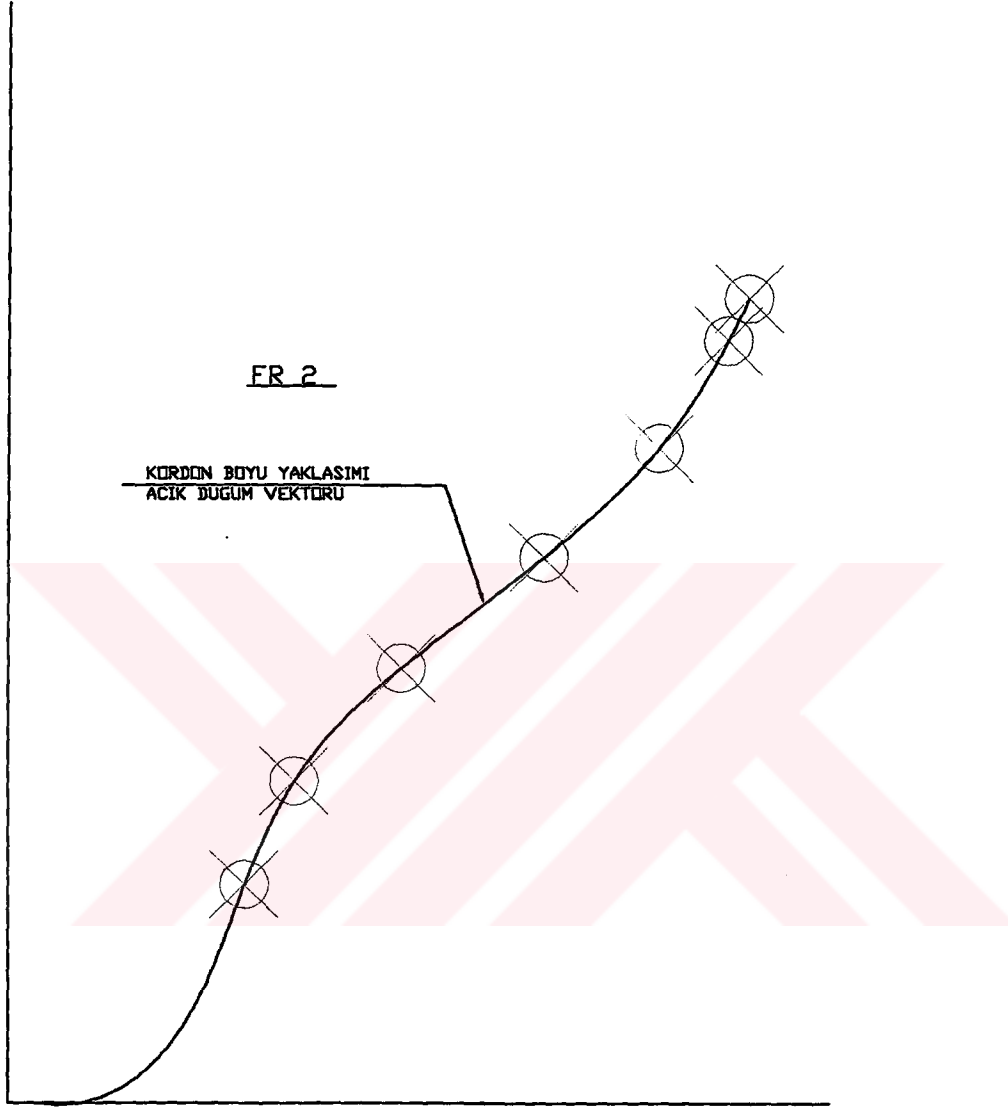
Program girdi olarak eğrinin geçirileceği noktaların bulunduğu .txt uzantısında bir dosya almaktadır. Aynı zamanda çıktı dosyalarının ismi girilmektedir. Programa eğri uydurmada kullanılacak parametre ve düğüm noktası vektörü hesap yöntemleri de seçenek olarak girilmektedir. Yapılan ön çalışmalar sonucunda bu seçenek kordon boyu parametre hesap yöntemi ve açık düğüm vektörü hesap yöntemi olarak sabitlenmiştir. Parametre ve düğüm vektörü hesabı yapıldıktan sonra matris işlemlerine sokularak kontrol noktaları elde edilmektedir. DrawBspline fonksiyonu tarafından alınan bu kontrol noktaları eğriyi çizdirmektedir. Çıktı olarak daha önceden girilen dosya isminde .dat ve .scr uzantılı dosyaları alınmaktadır. .dat uzantılı dosyada sonuç eğrisinin çizdirildiği B-spline kontrol noktaları bulunmaktadır. .scr uzantılı dosya ise Autocad isimli bilgisayar programında sonuç eğrinin çizdirilmesinde kullanılmaktadır.

Şekli 6.1 – 6.4’de 4500 DWT’luk bir kimyasal tankere ait program çıktısı posta kesitleri görülmektedir.

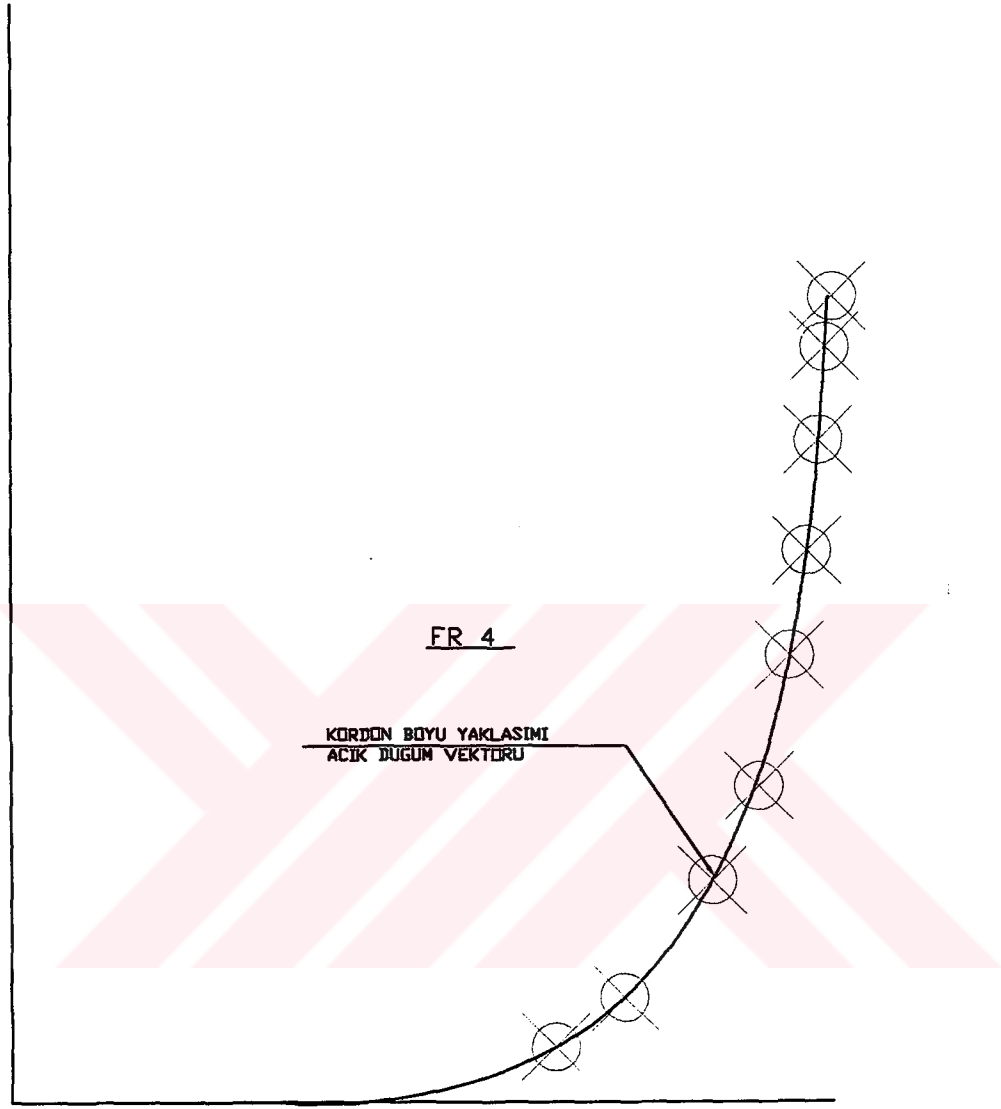




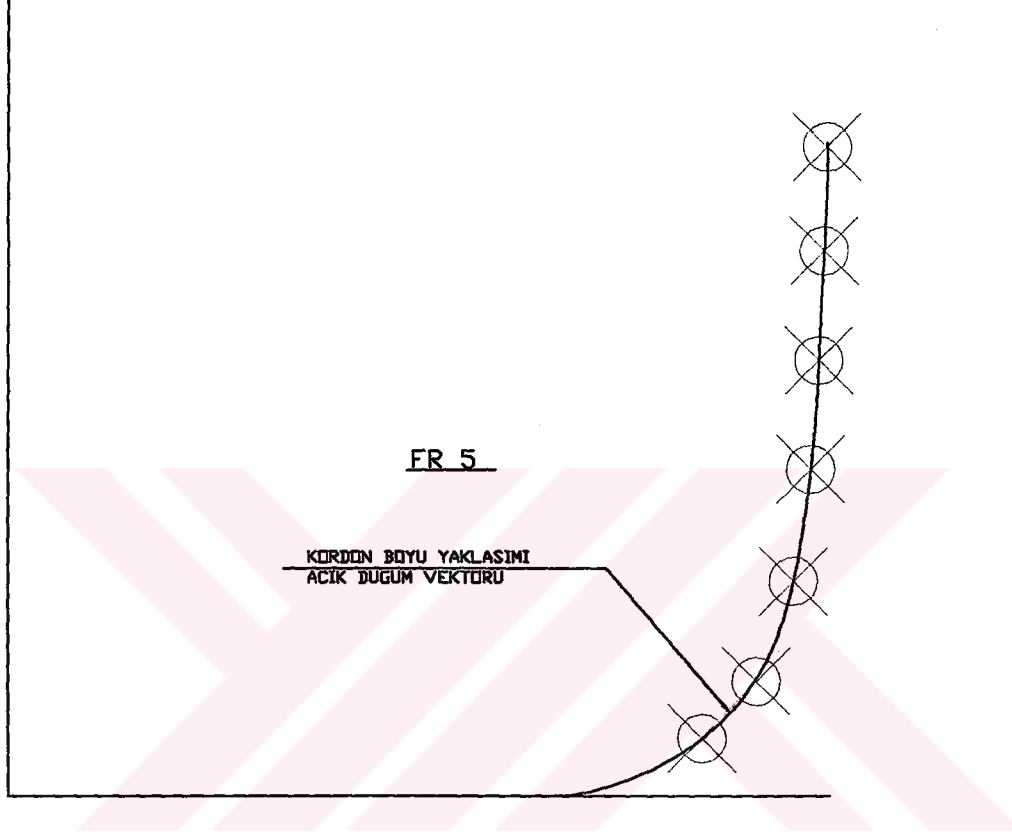
Şekil 6.1 Ofset değerlerinden B-spline eğrisi geçirilmiş posta kesiti



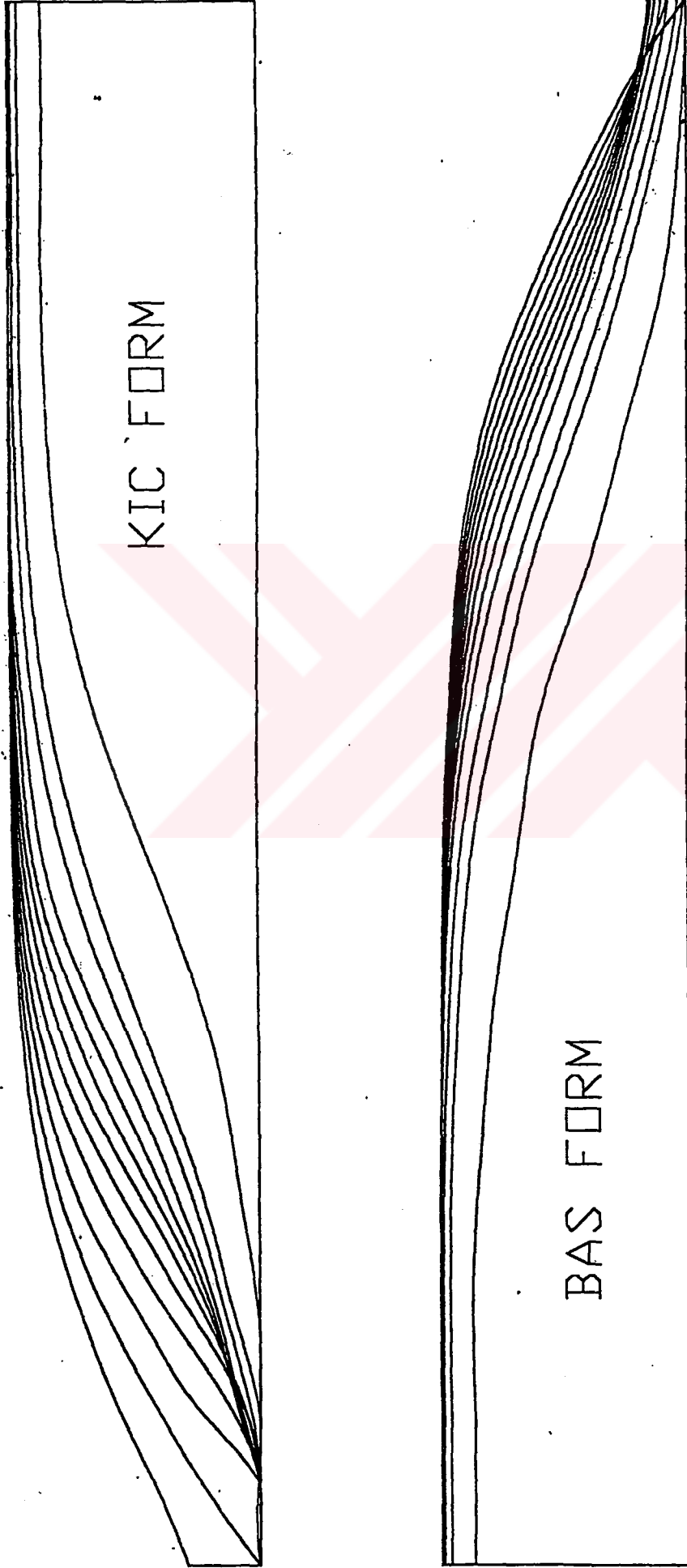
Şekil 6.2 Ofset değerlerinden B-spline eğrisi geçirilmiş posta kesiti



Şekil 6.3 Ofset değerlerinden B-spline eğrisi geçirilmiş posta kesiti



Şekil 6.4 Ofset değerlerinden B-spline eğrisi geçirilmiş posta kesiti



Şekil 6.5 Ofset değerlerinden B-spline eğrisi geçirilmiş su hattı kesitleri



## 7. SONUÇ

Gemi formunun matematiksel ifadesi sayesinde, optimum gemiye ulaşmak için gemi dizayn spiralinde yapılan döngüler son derece kısa zamanda gerçekleştirilebilir, alternatif çözümler süratle elde edilebilir. Daha önceden de belirtildiği gibi, gemi mühendisliğinin temelini oluşturan hesaplamaların hemen hepsi, gemi formuna direkt olarak bağlıdır ve bu hesapların konvansiyonel yöntemler kullanılarak el ile yapılması çok uzun zaman almaktadır. Bu ise zaman kaybı, maliyetlerin yükselmesi ve analitik hesap yerine bazı nümerik yaklaşımlar yapmanın getirdiği hatalar gibi, dezavantajlara sebep olur. Gemi formunun başarılı bir şekilde matematiksel ifadesi sayesinde bugün endehane işlemleri (endazenin çizilmesi ve düzeltilmesi , posta ve tülani eğim kalıplarının çıkarılması, dış kaplama saçlarının açılması, saç eğim kalıplarının çıkarılması, vb.) tamamen bilgisayar ortamında süratle yapılabilmektedir. Yine gemi formunun matematiksel ifadesi sayesinde bazı CFD programları kullanılarak formun temel direnç ve sevk karakteristikleri, oluşturduğu dalga sistemi, akım hatları, denizcilik özellikleri hakkında dizaynın çok erken safhalarında bilgi sahibi olunabilmekte , bu ise model deneylerinde daha sonuca varmadan bir yerden başlama imkanı verdiğinden büyük bir zaman ve para tasarrufu sağlanmaktadır.

Üçüncü ve dördüncü bölümlerde gemi tekne formunun modellenmesinde kullanılan eğri ve yüzey yöntemleri incelenmiştir. Bu inceleme sonucunda NURBS eğri ve yüzeyleri hem serbest formdaki hem de düzlem , konik formdaki eğri ve yüzeylerin ifadesine olanak sağladığından diğer yöntemlere üstünlük sağlamıştır. Bu üstünlük Amerikan Ulusal Standartlar Enstitüsü (ANSI) tarafından yayınlanan IGES dosya paylaşım standartlarıyla tasdiklenmiştir. IGES standartları NURBS eğri ve yüzeylerinin bilgisayar programları arasında paylaşımına olanak sağlamaktadır. NURBS eğri ve yüzeyleri bilgisayar programlarının temelini oluşturmaktadır.

Uygulama çalışması olarak beşinci bölümde incelenen global enterpolasyon eğri uydurma yönteminin gemi tekne formunun modellenmesindeki uygulaması yapılmıştır. Daha önceki bölümde de incelendiği gibi B-spline eğrisinin formu , parametre hesap türü , düğüm noktası vektörü hesap türü, ağırlık değerleri gibi birden fazla parametreye bağlıdır. Uygulama çalışmasında kullanılan global enterpolasyon yöntemi ise diğer yöntemlere kıyasla daha basit olması bakımından uygun görülmüştür. Eğri uydurma yönteminin başarısı parametre ve düğüm vektörü hesap yönteminin seçimine bağlıdır. Yapılan ön çalışmalar sonucunda parametre türü için kordon boyu yaklaşımı daha uygun görülmüştür. Yine düğüm vektörü hesabı için de açık düğüm vektörü hesap yöntemi daha uygun görülmüştür.

**KAYNAKLAR**

Bloors, M.I.G., Nowacki, H., Oleksiewicz, B. ,(1995) Computational Geometry For Ships, World Scientific

Kükner,Abdi, Tiriz Eğrileri,Ders Notları

Piegl, L., Tiller W., (1997) The NURBS Book, Springer, New York

Piegl, L., Tiller W., (1987) Curve and Surface Constructions Using B-Splines, Computer Aided Design, Vol : 19, Number : 9

Piegl, L., (1989) Modifying the Shape of Rational B-Splines. Part 1: Curves, Computer Aided Design, Vol : 21, Number : 8

Piegl, L., (1989) Modifying the Shape of Rational B-Splines. Part 2: Surfaces, Computer Aided Design

Rogers, D. F., Fog, N.G. (1989), Constrained B-Spline Curve and Surface Fitting, Computer Aided Design, Vol : 21, Number : 10

Rogers,David F.,Adams, J.Alan,(1990) Mathematical Elements For Computer Graphics, McGraw-Hill, New York

Narlı E., Fairing of Two Dimensional Ship Lines,Yüksek Lisans Tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü

Narlı E., (1999), Computer Aided Fairing of Ship Hull Forms,Doktora Tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü

**ÖZGEÇMİŞ**

Doğum tarihi	10.10.1974	
Doğum yeri	Bandırma	
Lise	1985-1992	Bandırma Kültür Eğitim Vakfı Özel Lisesi
Lisans	1993-1997	Yıldız Üniversitesi Mühendislik Fak. Gemi İnşaat Mühendisliği Bölümü

**Çalıştığı kurumlar**

1997-1998	Poyraz Denizcilik Ltd.Şti.
2000-Devam ediyor	Navtek Deniz Teknolojileri A.Ş.

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU  
DOKÜMANTASYON MERKEZİ