

151628

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYONDA DEĞİŞEN
VARYANS ve İLGİLİ UYGULAMALAR**

İstatistikçi Mehmet YÜCE

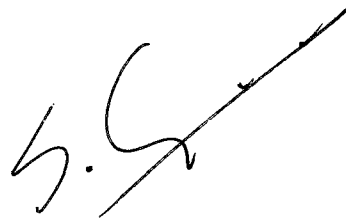
FBE İstatistik Anabilim Dalı İstatistik Programında
Hazırlanan

151628

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yard. Doç. Dr. Atif EVREN


M. Yüce


A. Evren



İSTANBUL, 2004

İÇİNDEKİLER	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	vii
KISALTMA LİSTESİ.....	viii
ŞEKİL LİSTESİ.....	ix
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xi
ÖNSÖZ.....	xii
ÖZET.....	xiii
ABSTRACT.....	xiv
1. GİRİŞ.....	1
2. DOĞRUSAL REGRESYON ANALİZİ HAKKINDA BİLGİLER.....	4
2.1 Regresyon Analizi Hakkında Ön Bilgi.....	4
2.2 Basit Doğrusal Regresyon Modeli Hakkında Temel Bilgiler.....	8
2.2.1 Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF).....	8
2.2.2 Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF).....	12
2.3 Basit Doğrusal Regresyon Modelinde Tahmin.....	16
2.3.1 Sıradan En Küçük Kareler (SEKK) Yöntemi.....	16
2.3.2 EKK Yönteminin Ardındaki Varsayımlar.....	19
2.3.3 EKK Tahmincilerinin Standart Hataları.....	22
2.3.4 EKK Tahmincilerinin Özellikleri: Gauss-Markov Teoremi.....	27
2.3.5 Belirlilik (Determinasyon) Katsayısı.....	27
2.4 Normallik Varsayımı ve Sonuçları.....	30
2.4.1 Normallik Varsayımı Altında SEKK Tahmincilerinin Özellikleri.....	32
2.4.2 Maksimum Olabilirlik Yöntemi (MOY).....	32
2.5 Basit Doğrusal Regresyonda Aralık Tahmini ve Hipotez Testi.....	35
2.5.1 Parametreler için Güven Aralıkları.....	35
2.5.2 Parametreler için Hipotez Testi.....	37
2.5.3 Varyans Analizi (ANOVA) Tablosu.....	38
2.5.4 Ortalama ve Tekil Değer Kestirimi.....	40
2.6 Doğrusal Regresyon Modeline Matris Yaklaşımı.....	43
2.6.1 Hipotez Testleri.....	49
2.6.2 Güven Sınırları.....	50
3. DOĞRUSAL EKK GEOMETRİSİ.....	51
3.1 Doğrusal EKK Geometrisi Hakkında Ön Bilgi.....	51
3.2 Doğrusal EKK'in Örneklem Uzayı ve Parametre Uzayı Yardımıyla Açıklanması.....	65

4.	DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYON MODELLERİ.....	75
4.1	Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Regresyon Modelleri.....	75
4.1.1	Doğrusal Regresyon Modelleri.....	75
4.1.2	Doğrusal Olmayan Regresyon Modelleri.....	77
4.1.3	Doğrusal Modele Dönüştürme.....	79
4.1.4	Genelleştirilmiş Doğrusal Modeller Hakkında Ön Bilgi.....	80
4.2	Regresyon Modellerinin Fonksiyon Kalıpları	81
4.2.1	Log-log Model.....	81
4.2.2	Yarı Logaritmik Modeller.....	84
4.2.3	Ters Modeller.....	86
4.3	Genelleştirilmiş ve Ağırlıklı EKK.....	87
4.3.1	Genelleştirilmiş EKK.....	87
4.3.2	Ağırlıklı EKK.....	89
4.4	GLM İçin İki Örnek: Lojistik Regresyon ve Poisson Regresyonu.....	90
4.4.1	Lojistik Regresyon Modelleri.....	91
4.4.1.1	Lojistik Regresyon Modelinde Parametrelerin Tahmini.....	95
4.4.1.2	Lojistik Regresyon Modelindeki Parametrelerin Yorumu.....	102
4.4.1.3	Parametreler ile İlgili Hipotez Testleri.....	103
4.4.1.4	Sapma Kullanılarak Parametre Altkümeleri ile İlgili Hipotez Testi.....	104
4.4.1.5	Tek Parametre için Testler.....	106
4.4.2	Poisson Regresyonu.....	106
4.4.3	Genelleştirilmiş Doğrusal Modeller (GLM).....	109
4.4.3.1	Bağlantı Fonksiyonları ve Doğrusal Kestirimciler.....	113
4.4.3.2	GLM’de Parametre Tahmini ve Çıkarsama.....	115
4.4.3.3	GLM ile Kestirim ve Tahmin.....	116
4.5	Önemli Doğrusal Olmayan Regresyon Modelleri.....	117
4.5.1	Mekanistik Büyüme Modellerine Bir Örnek: Monomoleküler Büyüme Modeli.....	117
4.5.2	Lojistik Model.....	119
4.5.3	Gompertz Modeli.....	122
4.5.4	Von Bertalanffy Modeli.....	123
4.5.5	Michaelis-Menten Modeli.....	124
4.5.6	Weibull Büyüme Modeli.....	124
4.5.7	Kompartman Modelleri ve Sistem Diyagramları.....	125
5.	DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYONDA TAHMİN.....	128
5.1	Doğrusal Olmayan Regresyonda Tahmin Hakkında Ön Bilgi.....	128
5.2	Doğrusal Olmayan Regresyonda Parametre Tahmininde Kullanılan Bazı Nümerik Yöntemler.....	130
5.2.1*	Gauss-Newton (doğrusallaştırma) Yöntemi.....	130
5.2.2	En Dik İniş(Steepest Descent) Yöntemi.....	135
5.2.3	Levenberg-Marquardt Uzlaşımı.....	137
5.2.4	Newton-Raphson Yöntemi.....	137
5.3	Büyük Örneklem Yaklaşımı.....	140
5.4	Büyük Örneklem Yaklaşımı ile Çıkarsama.....	143

5.4.1	Parametre için Güven Aralığı Tahmini.....	143
5.4.2	Birden Çok Parametre için Eşanlı Güven Aralığı.....	144
5.4.3	Parametre Testi.....	144
5.4.4	Birden Çok Parametre için Test.....	145
5.4.5	Güvenlik Konturları.....	145
6.	DOĞRUSAL OLMAYAN EKK GEOMETRİSİ.....	147
7.	DOĞRUSAL REGRESYON MODELİNDE DEĞİŞEN VARYANS.....	154
7.1	Değişen Varyans Kavramı.....	154
7.2	Değişen Varyansın Nedenleri.....	155
7.3	Değişen Varyansın Sonuçları ve Değişen Varyans Varken Tahmincilerin Özellikleri.....	157
7.4	Değişen Varyansı Saptamada Kullanılan Bazı Testler.....	164
7.4.1	Park-Glejser (PG) Testi.....	166
7.4.2	Spearman Sıra Korelasyonu (S) Testi.....	167
7.4.3	Modifiye Edilmiş Levene (ML) Testi.....	168
7.4.4	Breusch-Pagan-Godfrey (BPG) Testi.....	169
7.4.5	White (W) Testi.....	171
7.4.6	Goldfeld-Quandt (GQ) Testi.....	171
7.4.7	Ramsey'nin Reset (RR) Testi.....	172
7.4.8	Lagrange Çarpanı (LM) Testi.....	173
7.4.9	Bartlett (B) Testi.....	173
7.5	Değişen Varyansa İlişkin Düzeltici Yöntemler.....	175
8.	DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYONDA UYUMUN ÖLÇÜMÜ.....	181
8.1	Doğrusal Olmayan Regresyonda Değişen Varyans.....	183
8.1.1	Dönüştürülmüş Modeller.....	186
8.1.2	John-Draper Dönüşümleri.....	187
8.1.3	AEKK ve Model B.....	188
8.2	Eğrilik Ölçüleri.....	189
8.3	Doğrusal Olmayan Regresyonda Değişen Varyansı Saptamaya Yönelik Yaklaşık Sonuç Veren Bir Test.....	191
9.	DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYON ile İLGİLİ UYGULAMALAR.....	193
9.1	Verilerle İlgili Ön Bilgi.....	193
9.1.1	Veri A ile İlgili Bilgiler.....	193
9.1.2	Veri B ile İlgili Bilgiler.....	194
9.2	Veri A ile İlgili Uygulamalar.....	194
9.2.1	Veri A için Önerilen Modelin Parametrelerinin Tahmini.....	194
9.2.2	Model 1 ve Model 13 için Genel Hatlarıyla Kalıntı Analizi ve Doğrusal Olmayan AEKK.....	211
9.2.2.1	Model 1 için Kalıntı Analizi.....	211
9.2.2.2	Model 1 için Ağırlıkların Belirlenmesi ve Doğrusal Olmayan AEKK	

	Uygulaması.....	217
9.2.2.3	Model 13 için Kalıntı Analizi.....	228
9.2.2.4	Model 13 için Ağırlıkların Belirlenmesi ve Doğrusal Olmayan AEKK Uygulaması.....	232
9.3	Veri B ile İlgili Uygulamalar.....	242
9.3.1	Veri B için Önerilen Modelin Parametrelerinin Tahmini.....	242
9.3.2	Veri B’de Önerilen Model için Genel Hatlarıyla Kalıntı Analizi.....	244
9.3.3	Veri B’de Önerilen Model için Ağırlıkların Belirlenmesi ve Doğrusal Olmayan AEKK Uygulaması.....	247
9.4	Uygulamalardan Ulaşılan Sonuçlar.....	251
10.	SONUÇ.....	256
	KAYNAKLAR.....	258
	EKLER.....	260
Ek 1	Veri A.....	260
Ek 2	Model 1 Kalıntıları için %5 ve %10 Anlamlılık Düzeyinde Sapan Değerler....	262
Ek 3	$e_i^2 = A + BX_1 + CX_2 + D\hat{Y}_i + v_i$ Yardımcı Regresyonundan Elde Edilen Ağırlıklar.....	264
Ek 4	Çizelge 9.2’deki Model için Matlab Kodunda Kullanılan Ağırlıklar.....	265
Ek 5	Model 13 Kalıntıları için %5 ve %10 Anlamlılık Düzeyinde Sapan Değerler.....	266
Ek 6	$e_i^2 = A + BstX_1 + CstX_2 + DstX_1^2 + EstX_2^2 + FstX_1stX_2 + v_i$ Yardımcı Regresyonundan Elde Edilen Ağırlıklar.....	268
Ek 7	Model 13 için Belirlenen İkinci Ağırlıklar.....	269
Ek 8	Veri B.....	270
Ek 9	Veri B’den Tahmin Edilen Modelin %5 Anlam Düzeyinde Standart Kalıntıları.....	273
Ek 10	Veri B için Doğrusal Olmayan AEKK Uygulamasında Kullanılan Ağırlıklar...	276
	ÖZGEÇMİŞ.....	278

SİMGE LİSTESİ

A	Sapma matrisi
\mathbf{b}	Parametre tahminci vektörü
b_0	β_0 'ın tahmincisi
b_1	β_1 'in tahmincisi
c^1	Parametrizasyona bağlı eğrilik
c^y	Saf eğrilik
D	Türev matrisi
e_i	Kalıntı
e	Kalıntı vektörü
g	Doğrusal olmayan regresyonda parametre tahminci vektörü
\mathbf{g}	Doğrusal olmayan regresyonda parametre tahminci vektörü
H	Projeksiyon matrisi
L	Olabilirlik fonksiyonu
r^2	Belirlilik katsayısı
R^2	Çoklu belirlilik katsayısı
$sh(b_0)$	b_0 'ın standart hatası
$sh(b_1)$	b_1 'in standart hatası
$Var(b_0)$	b_0 'ın varyansı
$Var(b_1)$	b_1 'in varyansı
X	Bağımsız veya açıklayıcı değişken
X	Veri matrisi
Y	Bağımlı veya açıklanan değişken
\hat{Y}	Y 'nin tahmin değeri
Y	Gözlem vektörü
β_0	Sabit terim parametresi
β_1	Eğim parametresi
β	Parametre vektörü
ε	Hata payı
\mathcal{E}	Hata payı vektörü
μ	Anakütle ortalaması
σ^2	Hata payı varyansı
$\hat{\sigma}^2$	σ^2 'nin EKK tahmincisi
$\tilde{\sigma}^2$	σ^2 'nin MO tahmincisi

KISALTMA LİSTESİ

AEKK	Ağırlıklı En Küçük Kareler
ANOVA	Analysis of Variance (Varyans Analizi)
ARF	Anakütle Regresyon Fonksiyonu
B	Bartlett Testi
BLUE	Best Linear Unbiased Estimator (En İyi Doğrusal Yansız Tahminci)
BPG	Breusch-Pagan-Godfrey Testi
EKK	En Küçük Kareler
GEKK	Genelleştirilmiş En Küçük Kareler
GLM	Generalized Linear Model (Genelleştirilmiş Doğrusal Modeller)
GQ	Goldfeld-Quandt Testi
GSSW	Geometric Mean of Sum of Squares Within Groups (Grup İçi Kareler Toplamı Geometrik Ortalaması)
IRLS	Iteratively Reweighted Least Squares (İteratif Yeniden Ağırlıklandırılan EKK)
KDRM	Klasik Doğrusal Regresyon Modeli
KNDRM	Klasik Normal Doğrusal Regresyon Modeli
LM	Lagrange Multiplier Test (Lagrange Çarpanı Testi)
ML	Modified Levene Test (Modifiye Edilmiş Levene Testi)
MO	Maksimum Olabilirlik
MSE	Kalıntı Kareleri Ortalaması
MSR	Ortalama Açıklanan Kareler Toplamı
MSSW	Mean of Sum of Squares Within Groups (Grup İçi Kareler Toplamı Ortalaması)
ÖRF	Örneklem Regresyon Fonksiyonu
PG	Park-Glejser Testi
PTBS	İki Tarafta Kuvvet Dönüşümü (Power-Transform Both Sides)
PTWLS	Kuvvet Dönüşümlü AEKK Modeli (Power Transformed Weighted Least Squares)
RR	Ramsey'nin Reset Testi
S	Spearman Sıra Korelasyonu Testi
SSE	Residual or Error Sum of Squares (Kalıntı Kareleri Toplamı)
SEKK	Sıradan En Küçük Kareler
SSR	Regression Sum of Squares (Açıklanan Kareler Toplamı)
SST	Total Sum of Squares (Kareler Toplamı)
SSW	Sum of Squares Within Groups (Grup İçi Kareler Toplamı)
W	White Testi

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1	Çeşitli X 'lere karşılık Y 'lerin koşullu dağılımı.....	10
Şekil 2.2	Anakütle regresyon doğrusu.....	11
Şekil 2.3	İki ayrı örnekleme dayanan regresyon doğruları	15
Şekil 2.4	Örneklemin ve anakütlenin regresyon doğruları	16
Şekil 2.5	Y_i 'deki değişimin iki bileşene ayrılması.....	29
Şekil 2.6	Ortalama Y ile tekil Y değerlerinin güven bantları.....	43
Şekil 3.1	Tahmin uzayındaki genel bir $X \beta$ noktası	51
Şekil 3.2	Dik açılı, Y , Xb ve e vektörlerinden oluşan üçgen.....	52
Şekil 3.3	İkinci bir açıklayıcı değişkenin 1 'e göre ortogonalizasyonu.....	53
Şekil 3.4	Üç vektör tarafından tanımlanan iki boyutlu tahmin uzayı.....	56
Şekil 3.5	Tahmin uzayı Ω ve sınırlandırılmış tahmin uzayı ω	58
Şekil 3.6	$n \geq 3$, $p=2$ ve $q=1$ durumu. $A \beta = c$ 'nin geometrisi.....	62
Şekil 3.7	$n > 3$, $p=3$ ve $q=1$ durumu. $A \beta = c$ 'nin geometrisi.....	63
Şekil 3.8	$H_0: A \beta = c$ için F testinin geometrisi	63
Şekil 3.9	$R^2 = G^2 / K^2$ 'nin geometrisi.....	64
Şekil 3.10	$n=3$, $p=2$ için örneklem uzayı.....	70
Şekil 3.11	$p=2$ için parametre uzayında $S(\beta)$ konturları.....	73
Şekil 4.1a	Lojistik beklenen değer fonksiyonu ile ilgili örnekler.....	93
Şekil 4.1b	Lojistik beklenen değer fonksiyonu ile ilgili örnekler.....	93
Şekil 4.1c	Lojistik beklenen değer fonksiyonu ile ilgili örnekler.....	94
Şekil 4.2	Çeşitli β 'lar için $\omega = 1 - \beta e^{-t}$ biçimindeki teorik eğriler.....	119
Şekil 4.3	Çeşitli k 'lar için $1/(1 + e^{-kt})$ şeklindeki teorik eğriler.....	121
Şekil 4.4	Çeşitli k 'lar için $1/(1 + 8e^{-kt})$ şeklindeki teorik eğriler.....	121
Şekil 4.5	$\alpha=1$ için $\omega = \alpha.e^{-\beta e^{-kt}}$ şeklindeki Gompertz modelinden seçilmiş teorik eğriler.....	123
Şekil 4.6	Tetrasiklin modeli için bir kompartman veya sistem diyagramı..	125
Şekil 4.7	Pirolisis için sistem diyagramı.....	126
Şekil 5.1	Newton-Raphson yönteminin işleyişi.....	138
Şekil 5.2	Doğrusal olmayan EKK tahmincileri ile ilgili iki örnek.....	142
Şekil 6.1	$n=2$ için örneklem uzayı: $f(X_i, \gamma)$ doğrusal değil.....	147
Şekil 6.2	$n=3$ $p=2$ için örneklem uzayı: $f(X_i, \gamma)$ doğrusal değil.....	148
Şekil 6.3	Doğrusallaştırma yönteminin geometrik yorumu ($n=2$, $p=1$).....	149
Şekil 6.4	Doğrusallaştırma yönteminin geometrik yorumu($n=2$, $p=1$).....	150
Şekil 6.5a	Kalıntı kareleri toplamı fonksiyonunun konturları.....	151
Şekil 6.5b	Kalıntı kareleri toplamı fonksiyonunun konturları.....	151
Şekil 6.5c	Kalıntı kareleri toplamı fonksiyonunun konturları.....	151
Şekil 6.6a	Doğrusallaştırmanın geometrik görünümü.....	152
Şekil 6.6b	Doğrusallaştırmanın geometrik görünümü.....	152
Şekil 7.1	Sabit varyans	154
Şekil 7.2	Değişen varyans.....	155

Şekil 7.3	Kalıntıların açıklayıcı değişken ile birlikte grafiği.....	165
Şekil 9.1	Model 1 için $\ln Y$ ile tahmin değerleri.....	209
Şekil 9.2	Model 1'den elde edilen kalıntılar.....	210
Şekil 9.3	Model 13 için $\text{stln} Y$ ile tahmin değerleri.....	210
Şekil 9.4	Model 13'den elde edilen kalıntılar	211
Şekil 9.5	Model 1'den elde edilen kalıntıların Q-Q grafiği.....	212
Şekil 9.6	$\hat{\ln Y} = 2,6 + 0,01X_1$ modelinin kalıntıları.....	224
Şekil 9.7	$Y' = A - BX_1 e^{-CX_2} + e$ modelinin kalıntıları.....	225
Şekil 9.8	Çıktı 22'den elde edilen kalıntılar.....	227
Şekil 9.9	Son modelden elde edilen dönüştürülmüş tahmin değerleri ile Y	228
Şekil 9.10	Model 13'den elde edilen kalıntıların Q-Q grafiği.....	229
Şekil 9.11	Çıktı 24'ten elde edilen kalıntılar.....	235
Şekil 9.12	Çıktı 26'dan elde edilen tahmin değerlerinin $\text{stln} Y$ ile grafiği....	235
Şekil 9.13	Çıktı 27'den elde edilen kalıntılar.....	238
Şekil 9.14	Çıktı 27'den elde edilen tahmin değerlerinin $\text{stln} Y$ ile grafiği....	238
Şekil 9.15	Çıktı 28'den elde edilen kalıntılar.....	240
Şekil 9.16	Çıktı 28'den elde edilen tahmin değerleri ile $\text{stln} Y$	241
Şekil 9.17	Çıktı 29'dan elde edilen kalıntılar.....	243
Şekil 9.18	Çıktı 29'dan elde edilen tahmin değerleri ile Y.....	244
Şekil 9.19	Çıktı 29'dan elde edilen kalıntılar için Q-Q grafiği.....	244
Şekil 9.20	Çıktı 31'den elde edilen kalıntılar.....	248
Şekil 9.21	Çıktı 31'den elde edilen tahmin değerleri ve Y.....	248
Şekil 9.22	Çıktı 30'dan elde edilen kalıntılar.....	249
Şekil 9.23	Çıktı 30'dan elde edilen tahmin değerleri ile Y.....	250

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 2.1 Doğrusal ve doğrusal olmayan regresyon modelleri ile ilgili ayırım.....	7
Çizelge 2.2 Anakütlenin alt anakütlelere ayrılması.....	8
Çizelge 2.3 Çizelge 2.1 için koşullu olasılıklar.....	8
Çizelge 2.4 Asgari birimli bir anakütle	13
Çizelge 2.5 Asgari anakütleden çekilebilecek tüm olanaklı örneklemeler....	13
Çizelge 2.6 σ^2 için χ^2 testi.....	38
Çizelge 2.7 ANOVA tablosu.....	39
Çizelge 2.8 ANOVA tablosunun matris notasyonu ile gösterilişi.....	49
Çizelge 3.1 Şekil 3.3 için ANOVA tablosu	55
Çizelge 4.1 Bağımlı ve bağımsız değişkenlerin değişim biçimlerine göre model seçimi.....	86
Çizelge 4.2 Çeşitli fonksiyon kalıplarının eğim ve esneklikleri yönünden karşılaştırılması.....	87
Çizelge 4.3 Bernoulli raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu.....	91
Çizelge 4.4 GLM için kanonik bağlantılar.....	114
Çizelge 9.1 Matlab kodunun çıktısı.....	220
Çizelge 9.2 Ek 4'teki ağırlıklar kullanıldığı durumda Matlab kodunun çıktısı.....	223

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında, klasik regresyon analizinde varsayımlardan bir sapma olan değişen varyans, doğrusal olmayan regresyon için incelenmiştir. Doğrusal olmayan regresyon, regresyon analizinde önemli bir yer tutmaktadır. Doğrusal olmayan regresyonda çıkarsamalar ve sonuçlar, doğrusallık yaklaşımına dayandırılır. Bu yüzden, tezde, öncelikle doğrusal regresyon analizine yer verilmiştir. Daha sonra bazı önemli doğrusal olmayan regresyon modelleri tanıtılmış ve doğrusal olmayan regresyonda tahmin konusu açıklanmıştır. Doğrusal ve doğrusal olmayan regresyonunun açıklanmasında yardımcı olacağı düşüncesiyle her iki durumun geometrisine yer verilmiştir. Daha sonra, değişen varyans durumu önce doğrusal regresyon olmak üzere iki durum için incelenmiştir.

Uygulamada, biri iki, diğeri bir açıklayıcı değişkenli olmak üzere iki veri kümesi kullanılmış ve böylelikle karşılaştırma olanağı sağlanacağı düşünülmüştür.

Bazı kavramlar için, Türkçe’de birden çok karşılık kullanılmasından dolayı, karışıklık oluşturmaması bakımından, bu sözcüklerin yanında parantez içinde İngilizce karşılıkları da sunulmuştur.

Bu tezin hazırlanmasında yardımları için değerli hocam ve danışmanım Yard. Doç. Dr. Atıf Evren’e teşekkürü borç bilirim. Yetişmemde çok emekleri geçen başta merhum Prof. Dr. Aziz Bener’e, İstatistik Bölüm Başkanımız Sayın Prof. Dr. Mehmet Genceli’ye, Doç. Dr. A. Hakan Büyüklü’ye ve Yard. Doç. Dr. Doğan Yıldız’a teşekkür ederim.

Tüm bunların yanında maddi ve manevi hiçbir yardımı esirgemeyen aileme ve özellikle, her türlü teknik sorunda yardımcı olan kardeşim M. Yavuz Yüce’ye teşekkür ederim.

Mehmet Yüce

ÖZET

Klasik Regresyon Analizinde, varsayımlardan sapmalardan biri olan değişen varyans, doğrusal olmayan regresyon için incelenmiştir. Sonuçlar, iki veri kümesi üzerinde yapılan uygulamalar ile araştırılmıştır.

Uygulamalarda, her iki veri kümesi için doğrusal olmayan regresyon modelleri tahmin edilmiş ve bunların uygunluğu araştırılmıştır. Birinci veri kümesi için modelin tam tatmin edici olmadığı görülmüş ve bunu aşmak için birçok deneme yapılmıştır. Bu denemeler sırasında, parametrelerinde doğrusal ve uyumu yüksek başka bir model elde edilmiştir. Birinci veri kümesinden tahmin edilen iki modelden ve ikinci veri kümesinden elde edilen modellerden türetilen kalıntılar, sabit varyans varsayımı yönünden incelenmiştir. Değişen varyansın saptanmasında, White testi, Breusch-Pagan-Godfrey testi ve fikir vermesi açısından Endrenyi-Kwong yaklaşımı kullanılmıştır. İnceleme sonunda, değişen varyans durumunun bulunduğu karar verilmiştir. Değişen varyans durumunu düzeltmek amacıyla doğrusal olmayan AEKK yöntemi uygulanmıştır. Tatmin edici sonuç alınmadığı durumlarda ağırlıklar yeniden belirlenmiş ve bir dizi deneme gerçekleştirilmiştir. Bu şekilde de sonuç alınmadığı durumda, değişken dönüşümüne başvurulmuştur. Bu uygulamalar için SPSS 11.5 ve Excel 2002 yazılımlarından yararlanılmıştır. Bu yazılımların yeterli olmadığı durumda, Matlab 6.5'te bir kod yazılmış ve sonuç değil fakat fikir vermesi açısından kullanılmıştır.

Uygulamalar sonucunda, her üç model için test istatistiklerinin, sabit varyans hipotezinin kabul edileceği kritik değere yaklaştığı, fakat kritik değer altına inmediği görülmüştür. Bu sonuç, doğrusal olmayan modele doğrusal yaklaşımın iyi olmadığı, eğriselliğin yüksek olduğu şeklinde yorumlanmıştır.

Anahtar kelimeler: Doğrusal olmayan regresyon, değişen varyans, doğrusal olmayan tahmin, AEKK, eğrilik ölçüleri.

ABSTRACT

Heteroskedasticity, one of the violations of assumptions in classical regression analysis, has been studied. Results have been investigated with applications on two data sets.

In applications, nonlinear regression models were estimated for two data sets and their appropriateness were investigated. It was seen that the model for the first data set is not completely satisfactory and several trials were made to deal with this situation. During these trials another model, which is linear in parameters and which has good fit was obtained. The residuals obtained from the two models for the first data set and from the models for the second data set are checked with regard to heteroskedasticity. White test, Breusch-Pagan-Godfrey test and -just to get an idea- Endrenyi-Kwong approach were used in detecting heteroskedasticity. After the investigation existence of heteroskedasticity was understood. The method of nonlinear weighted least squares was applied for correcting heteroskedasticity. When a satisfactory result could not be obtained weights were re-determined and several trials were made. In cases where these trials also lacked to produce satisfactory results, variable transformation technique was applied. In these applications SPSS 11.5 and Excel 2002 softwares were used. When these softwares were not sufficient, a code written in Matlab 6.5 was used just to give some idea, but not result.

After the applications, it was seen for all three models that the test statistics were close to the critical values accepted by the heteroskedasticity hypothesis, but they could not get below these critical values. This result was interpreted as linear approximation to nonlinear model is not appropriate, and curvature is high.

Key words: Nonlinear regression, heteroskedasticity, nonlinear estimation, weighted least squares, curvature measures.

1. GİRİŞ

Bu yüksek lisans tezinin amacı, doğrusal olmayan regresyon analizini ve doğrusal regresyon varsayımlarından biri olan sabit varyans (homoskedastisite) durumu gerçekleşmediğinde ne olacağını araştırmak ve bunu uygulamalarla incelemek ve varsayımdan sapmayı belli yöntemlerle gidermektir.

Bilindiği gibi, klasik doğrusal regresyon analizinin dayandığı varsayımlardan biri de sabit varyanslılık varsayımdır. Bu varsayım yerine gelmediği durumda, yanıltıcı sonuçlara ulaşılabilmekte ve yapılan tahminler etkinliğini kaybetmektedir. Bu sorunu aşmak için, doğrusal regresyon analizi çerçevesi içerisinde birçok çözüm ve yöntem vardır. Bunlar, temelde, AEKK (Ağırlıklı En Küçük Kareler) ve değişkenlerin dönüşümü olmak üzere iki başlıkta toplanabilir. Bu yöntemler sayesinde, uygulamada fazla sorunla karşılaşılmamaktadır. Doğrusal olmayan regresyon analizinde ise durum biraz karışıktır. Doğrusal olmayan regresyonda, öncelikle modelin tahmini bir zorluk oluşturmaktadır. Model tahmininde, parametre başlangıç değerlerinin belirlenmesi, kullanılacak algoritmanın veya yazılımın seçimi, tahmin sonuçlarını etkileyebilmektedir. Bununla beraber, tahmin iyi bir şekilde gerçekleştirilse bile, yapılacak çıkarsamalar ve ulaşılan sonuçlar, büyük örneklem için geçerlidir. Bir başka deyişle, doğrusal olmayan modele, doğrusal yaklaşımın iyi ve uygun olduğu durumda geçerli olacaktır. Aksi takdirde, yapılan çıkarsamalar yaklaşık olarak görülecektir.

Geçen yüzyılda, nümerik optimizasyon yöntemlerinin ortaya çıkışı ve mevcut yöntemlerin geliştirilmesi, bu yüzyıl ortası ve sonrasında, yazılım ve donanımda meydana gelen büyük teknolojik ilerlemelerle birlikte, yukarıda bahsedilen tahmin sorununu belli ölçüde ortadan kaldırmıştır. Bu gelişmeler içerisinde, geliştirdikleri algoritmalar dolayısıyla, Goldfeld, Quandt ve Trotter (1966)'ın çalışmaları önemlidir. Bu konuda, sözü edilmesi gereken bir diğer önemli nokta, Bates ve Watts (1988)'ın geliştirdikleri eğrilik ölçüleridir. Eğrilik ölçüleri, doğrusal yaklaşımın, doğrusal olmayan modele uygunluğu konusunda bilgi sağlamakta, başka bir ifadeyle, "doğrusal olmama" (nonlinearity) durumunun bir ölçüsü olmaktadır. Böylelikle büyük örneklem yaklaşımın uygulanabilirliği anlaşılmaktadır. Bunlarla beraber, Box (1971) ve Hougaard (1985) da, doğrusal yaklaşımın uygunluğunun belirlenmesine dair önemli çalışmalar ortaya koymuştur. Bu gelişmeler sayesinde doğrusal

olmayan regresyon analizi, araştırmacılar için daha etkin bir teknik haline gelmiştir. Bu konuda gelişmeler halen sürmektedir.

Bu tez çalışmasında, doğrusal olmayan regresyon analizinin anlaşılması açısından önce doğrusal regresyon analizi incelenmiştir. Bölüm 2, doğrusal regresyon analizi hakkında ön bilgileri içermektedir. Bu bölümde, doğrusal regresyon analizinin genel hatları, tahmin yöntemleri, altında yatan varsayımlar ve bu varsayımlar yoluyla yapılan çıkarsamalar, tek açıklayıcı değişkenli ve matris gösterimiyle çok değişkenli doğrusal regresyon modelleri irdelenmiştir.

Bölüm 3'te ise, doğrusal olmayan regresyonun daha iyi anlaşılması bakımından doğrusal EKK'in geometrik yorumu verilmiştir.

Bölüm 4'te, doğrusal ve doğrusal olmayan regresyon modelleri arasındaki ayırım, genelleştirilmiş doğrusal modeller ve bazı, önemli ve yaygın olarak kullanılan doğrusal olmayan regresyon modelleri tanıtılmıştır.

Bölüm 5, doğrusal olmayan EKK tahminini ve bunun için kullanılan bazı belli başlı nümerik yöntemleri içermektedir. Yine bu bölümde, büyük örneklem yaklaşımı ve buna dayanan alışıldık çıkarsamalara değinilmiştir.

Bölüm 6'da, doğrusal olmayan EKK tahmin süreci, örneklem uzayı ve parametre uzayı yardımıyla açıklanmaya çalışılmıştır.

Bölüm 7'de, doğrusal regresyon için sabit varyans varsayımı, bu varsayımının gerçekleşmemesinin doğuracağı sonuçlar, saptanmasına yönelik test ve yöntemler ve düzeltilmesi incelenmiştir.

Doğrusal olmayan regresyon için değişen varyans, doğrusal olmayan regresyonda uyumun değerlendirilmesi başlığı altında Bölüm 8'de verilmiş, ek olarak, eğrilik çeşitleri ve ölçüleri hakkında özet bilgi sunulmuştur. Yine bu bölüm içinde doğrusal olmayan regresyonda değişen varyansın saptanmasında kullanılabilecek bir test anlatılmıştır.

Bölüm 9, uygulamaları içermektedir. Uygulamada, sonuçlarını incelemek amacıyla, biri tek, diğerleri iki açıklayıcı değişkenli, iki veri kümesi ve iki doğrusal olmayan model kullanılacaktır. Tahmin edilen modeller, değişen varyansa işaret ettiklerinden, bu durumu düzeltmek

amacıyla doğrusal olmayan AEKK yöntemi kullanılacak ve yeri geldiğinde dönüşüm yöntemlerine de başvurulacaktır.

Tüm bu uygulamalar için, Excel 2002 ve SPSS 11.5 paket programlarından faydalanılmıştır. Model tahmini için SPSS'in yeterli olmadığı bir durum için bir Matlab kodu yazılıp kullanılmıştır.

Doğrusal olmayan modellerde tahmin uzayının karmaşıklığı yüzünden uygulamalar, bir noktada sonlandırılmış ve elde edilen sonuçlar, Bölüm 9.4'te ve özet olarak da Bölüm 10'da sunulmuştur.



2. DOĞRUSAL REGRESYON ANALİZİ HAKKINDA BİLGİLER

2.1 Regresyon Analizi Hakkında Ön Bilgi:

Regresyon analizi, değişkenler arasındaki ilişkiyi araştıran ve modelleyen bir istatistiksel tekniktir. Regresyon analizinin uygulamaları çok çeşitlidir ve başta mühendislik, fizik, kimya, ekonomi, işletme ve biyoloji gibi birçok alanda yer alabilir. Regresyon terimi ilk defa Francis Galton tarafından 1886 yılında kullanılmıştır. Yaptığı bir çalışmada Galton, belli bir boydaki ana-babaların çocuklarının ortalama boyunun, genel nüfustaki ortalama boya doğru yaklaşma eğiliminde olduğunu bulmuş ve bu durumu (ingilizcede ortalamaya doğru gerileme anlamında “regression toward mean” ifadesinden) regresyon yasası olarak adlandırmıştır.

Bugünkü anlamda ise regresyon analizi, bir bağımlı değişkenin bağımsız değişken(ler)le olan ilişkisini, kendi ortalama değerini, bağımsız değişkenlerin(yinelenen örneklerdeki) bilinen ya da değişmeyen değerleri cinsinden tahmin etme ve/veya kestirme amacıyla incelenmesidir. Regresyon analizi, ağırlıklı olarak, nicel değişkenler arasındaki ilişkilerin incelenmesidir. Eğer değişkenlerin bazıları nitel bazıları nicel ise bu varyans analizi, tümü nitel ise kovaryans analizi adı altında incelenmektedir. Regresyon analizinin ilgi odağı, fonksiyonel ya da deterministik ilişkiler olmayıp istatistiksel ilişkilerdir. Değişkenler arasındaki istatistiksel ilişkilerde, genellikle rassal ya da stokastik değişkenler, bir başka deyişle belli bir olasılık dağılımına sahip değişkenler kullanılır. Bununla beraber istatistiksel bir ilişki yalnız başına bir nedensellik ifade etmez. Nedensellik, istatistik dışı varsayımlardan veya teorilerden elde edilir. Regresyon analizi ile yakından ilişkili olan korelasyon analizinde ise amaç, iki değişken arasındaki ilişkinin yönünü ve gücünü bulmaktır. Korelasyon analizinde kullanılan değişkenlerin ikisi de birer raslantı değişkenidir. Diğer bir ifade ile bir simetri mevcuttur. Fakat regresyon analizinde ise bağımlı değişken olarak adlandırılan bir raslantı değişkeninin ortalama değeri, genelde raslantı değişkeni olmayan başka değişken(ler)in sabit değerlerine dayanarak kestirilmeye çalışılır.

Bağımlı değişkenin yalnızca bir bağımsız değişkenle olan ilişkisi inceleniyorsa, bu basit ya da iki değişkenli regresyon analizi adını alır. Eğer bağımlı değişkenin birden çok bağımsız değişkenle olan ilişkisi söz konusu ise o zaman bu çok değişkenli regresyon analizi adını alır.

Bağımlı değişken ile bağımsız değişken(ler) arasındaki bağıntı model ile gösterilir. Model, sözcük anlamı olarak, herhangi bir cismin gerçeğine bağlı kalınarak küçültülmüş şeklidir. Bu,

görünüşte, gerçek cismin tam kopyası olmamakla beraber, yapılmak istenen inceleme gerçek cisim yerine, model üzerinde daha kolay yapılabilir.

Bilindiği gibi deterministik bir model kabaca

$$Y=f(X)$$

şeklinde gösterilebilir. Yukarıda değinildiği gibi regresyon analizinin ilgilendiği stokastik ilişkiyi temsil eden bir model ise:

$$Y=f(X, \varepsilon)$$

şeklinde gösterilir. Burada ε , hata payını göstermektedir. Bir raslantı değişkeni olan hata payı değişkeninin çoğunlukla toplamsal olduğu varsayıldığından yukarıdaki ifade;

$$Y=f(X)+ \varepsilon$$

şeklini alır. Buna göre herhangi bir X değerine karşılık tek bir Y değeri değil, belirli bir aralık içinde çeşitli Y değerlerinden oluşan bir dağılım karşılık gelmektedir (Genceli 2001).

Hata payı değişkeni, modelde olmayan ama bağımlı değişken Y'yi etkilediği varsayılan tüm değişkenlerin toplam etkisini içerir. Hata payının modele konulmasının nedenlerinin başlıcaları şunlardır:

1. Belirlenme(spesifikasyon) hataları. Bunları şu şekilde sıralamak mümkündür:

- i) Önemli bir bağımsız değişkenin veya bazı bağımsız değişkenlerin modele alınmaması.
- ii) Değişkenler arasındaki fonksiyonel ilişkinin yanlış seçimi, bir başka deyişle matematiksel biçimleme hatasının yapılması.
- iii) Model, eşanlı denklemler sisteminden oluştuğu halde tek denklemler gibi ele alınıp incelenmesi.

2. Modele alınan ve yalnız başına bağımlı değişkeni etkilediği düşünülen bağımsız değişkenlerden bazılarının ortak etkisi çok küçük, kural dışı ya da rassal olabilir. Bu durumda bunları modele katmak kolaylık sağlamaz ve zorluk veya maliyet açısından uygun

bulunmayabilir. Bunların bileşik etkisinin, ε raslantı değişkeni olarak ele alınabileceği umulur.

3. İlgili bütün değişkenler modele katılsa bile yine de insan davranışları gibi belirsizlikten kaynaklanan açıklanamayan bir rassallık olabilir.

4. Verilerin ölçme hatası içermesi.

5. Basitlik ilkesi uyarınca bağımlı değişkeni çok az etkileyen birçok bağımsız değişkeni ε ile temsil ederek, modeldeki gereksiz fazlalığı azaltmak (Gujarati, 2001).

İki değişkenli veya başka deyişle tek bağımsız değişkenli doğrusal regresyon modeli basit doğrusal regresyon modeli olarak da adlandırılır. Bu model şu şekildedir:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

Burada Y_i , bağımlı(veya açıklanan) değişkeni, X_i , bağımsız (açıklayıcı) değişkeni göstermektedir. β_0 ve β_1 ise parametreleri (veya katsayıları) göstermektedir. Parametre, anakütle hakkında bilgi veren sabit karakteristik değerdir. Sabit terim olarak da adlandırılan β_0 , matematiksel olarak regresyon doğrusunun ordinatı kestiği noktadır. Eğer sıfır etrafında veri yoksa, istatistiksel olarak anlamı mevcut değildir. β_1 ise eğim parametresi olarak adlandırılır ve X'teki bir birimlik değişmeye karşılık bağımlı değişken Y'deki değişme miktarını gösterir.

Bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki bağıntı doğrusal olabileceği gibi eğrisel de olabilir. Doğrusallık, parametrelerde doğrusallık ve değişkenlerde doğrusallık olmak üzere ikiye ayrılır. Eğer model için:

$$\frac{\partial Y}{\partial \beta}$$

kısmi türevi parametreden bağımsızsa model parametrelerinde doğrusal olarak adlandırılır. Aynı şekilde, bağımsız değişkenlerine göre türevi değişkenlerden bağımsızsa değişkenlerinde doğrusal olarak adlandırılır. Eğer her iki durum da söz konusu ise model hem parametrelerinde doğrusal hem de değişkenlerinde doğrusaldır denir. Buna örnek olarak aşağıdaki model verilebilir:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

Parametrelerinde doğrusal, değişkenlerinde doğrusal olmayan bir model için aşağıdaki örnek verilebilir:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \varepsilon_i$$

Görüldüğü gibi bu model polinomial bir yapıdadır fakat değişken dönüşümü ile (örneğin $X_i^2 = Z_i$) rahatlıkla doğrusal hale getirilebilir. Değişkenlerinde doğrusal, parametrelerinde doğrusal olmayan bir model ise aşağıdaki şekilde olabilir:

$$Y_i = \beta_0 + \frac{X_i}{\beta_1} + \varepsilon_i$$

Son olarak hem parametrelerinde, hem de değişkenlerinde doğrusal olmayan bir model için aşağıdaki örnek verilebilir:

$$Y_i = \beta_0 X^{\beta_1} + \varepsilon_i$$

Doğrusal model denilince, genellikle parametrelerinde doğrusal modeller anlaşılır. Sonuç olarak bir modelin parametreler veya değişkenler açısından doğrusallık koşulu, modeldeki her parametrenin(veya değişkenin) üssünün 1 olması, parametrelerin(veya değişkenlerin) üs olarak yer almaması, diğer parametreler(veya değişkenler) ile çarpılıp bölünmemesidir (Genceli, 2001). Doğrusal ve doğrusal olmayan modeller hakkındaki ayırım Çizelge 2.1'den daha kolay görülebilir.

Çizelge 2.1 Doğrusal ve doğrusal olmayan regresyon modelleri ile ilgili ayırım

Model parametrelerinde doğrusal mı?	Model değişkenlerde doğrusal mı?	
	Evet	Hayır
Evet	Doğrusal regresyon modeli	Doğrusal regresyon modeli
Hayır	Doğrusal olmayan regresyon modeli	Doğrusal olmayan regresyon modeli

Regresyon modellerinin literatürde, aşağıdakiler başta olmak üzere birçok amaç için kullanıldığı ifade edilir. Bunlar,

1. Verinin tarif edilmesi
2. Parametre tahmini
3. Kestirim ve tahmin
4. Kontrol amacıyla yapılan çalışmalar

şeklinde sıralanır (Montgomery vd., 2001).

2.2 Basit Doğrusal Regresyon Modeli Hakkında Temel Bilgiler:

2.2.1 Anakütle Regresyon Fonksiyonu (ARF):

Basit regresyon modelinde bağımlı Y_{ij} değişkeni ile bağımsız X_i değişkeni arasında bağıntı sağlanmaktadır. Bağımsız değişken X_i 'nin değerlerinin sabit olması, aynı X_i için, anakütlede, raslantısal ilişki gereği, bağımlı değişkene ait en azından iki gözlem değerinin bulunmasını zorunlu kılmaktadır. $i=1,2,\dots,n$ olmak üzere aynı X_i 'ye karşılık gelen Y_{ij} değerleri alt anakütle adı verilen gruplarda toplanabilir. Alt anakütle sayısı k araştırmacı tarafından belirlenir ve alt anakütle birim sayıları birbirine eşit olabileceği gibi farklı da olabilir. i alt anakütle sayısını, j ise her bir alt anakütledeki birim sayısını göstermek üzere durum şu çizelgede daha iyi açıklanabilir:

Çizelge 2.2 Anakütlenin alt anakütlelere ayrılması (Genceli, 2001)

X	X_1 X_2 X_k	
Y	Y_{11} Y_{21}	Y_{k1}
	Y_{12} Y_{22}	Y_{k2}
	Y_{1N1} Y_{2N2}	Y_{kNk}

Çizelge 2.2 (Devamı) Anakütlenin alt anakütlelere ayrılması (Genceli, 2001)

Toplam	$\sum_j Y_{1j} \sum_j Y_{2j} \dots$	$\sum_j Y_{kj}$	$\sum_j \sum_i Y_{ij}$
Birim mevcudu	$N_1 \ N_2 \ \dots$	N_k	$\sum N_i = N$
Ortalama μ_{YX_k}	$\mu_{YX_1} \ \mu_{YX_2} \ \dots$	μ_{YX_k}	

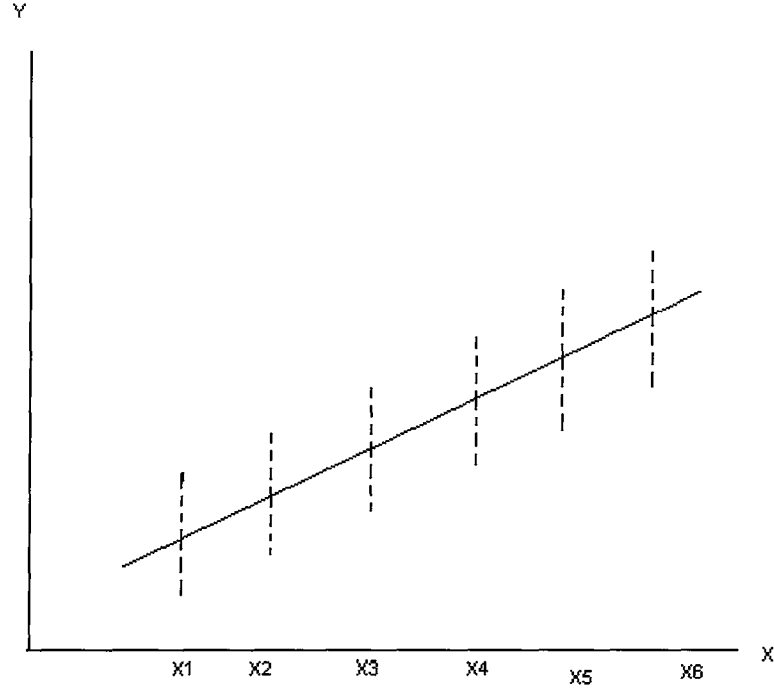
Çizelge 2.2, belli bir X düzeyine karşılık gelen Y'lerin dağılımını, belli X değerlerinin karşılığı olan Y koşullu dağılımını göstermektedir. Çizelge 2.2'den görülebileceği gibi herhangi bir alt anakütle için Y'nin koşullu olasılıkları $p(Y | X)$ belirlenebilir. Örneğin birinci alt anakütle için, Y_{1j} 'lerin koşullu olasılıkları $p(Y_{1j} | X=X_1)=1/N_1$ şeklindedir. Çizelge 2.2'deki veriler için koşullu olasılıklar Çizelge 2.3'de gösterilmiştir.

Çizelge 2.3 Çizelge 2.1 için koşullu olasılıklar (Genceli, 2001)

$P(Y X_i)$	X	X_1	$X_2 \ \dots \dots \dots X_k$
Koşullu olasılıklar		$1/N_1$	$1/N_2 \ \dots \ 1/N_k$
		$1/N_1$	$1/N_2 \ \dots \ 1/N_k$
	
		$1/N_1$	$1/N_2 \ \dots \ 1/N_k$
Y'nin koşullu olasılıkları		$E(Y X_1) \ E(Y X_2)$	$E(Y X_k)$

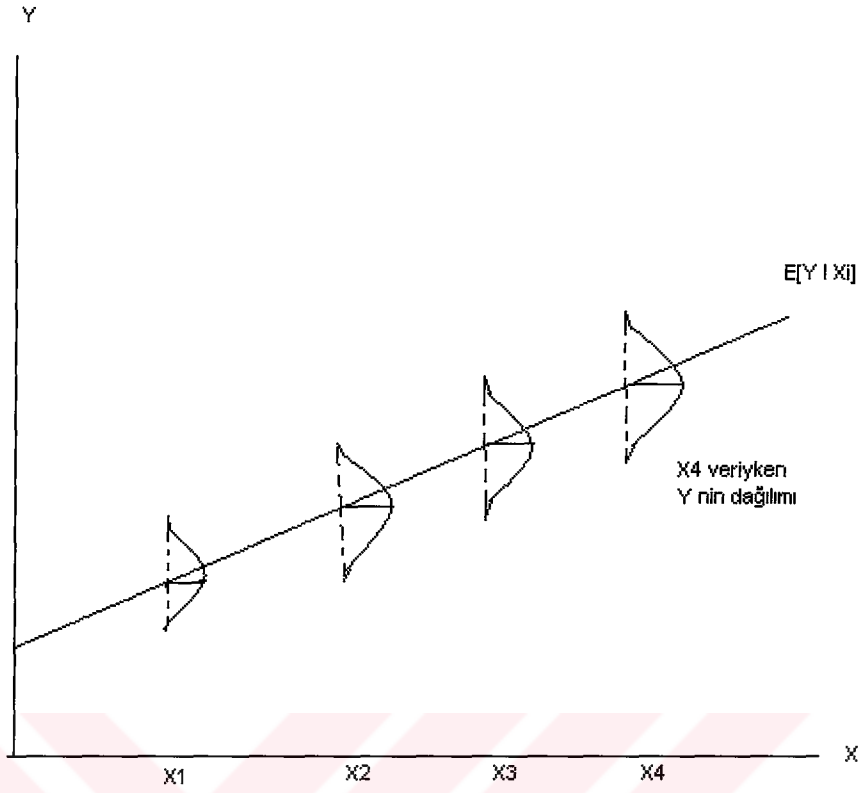
Bu durumda Y'nin her bir koşullu olasılık dağılımı için, koşullu ortalaması ya da koşullu beklenen değeri $E(Y | X=X_i)$ bulunabilir. Bu değer aynı zamanda alt anakütle ortalaması μ_{YX_i} olarak da ifade edilir (Genceli, 2001).

X'lere karşılık Y'lerin koşullu dağılımı bir serpilme diyagramında örneğin şöyle gösterilebilir.



Şekil 2.1 Çeşitli X'lere karşılık Y'lerin koşullu dağılımı

Burada yalınlık amacıyla koşullu beklenen değerlerin bir doğru üzerinde yer aldığı varsayılmıştır. Koşullu ortalamalar bir eğri üzerinde de yer alabilirler. Şekil 2.1'de gösterilen bu doğru (eğri), anakütle regresyon doğrusu olarak adlandırılır. Bir başka deyişle, geometrik olarak, bir anakütle regresyon doğrusu (eğrisi), bağımsız değişken(ler)in sabit değerlerine karşılık gelen bağımlı değişkenin koşullu ortalamalarının ya da koşullu beklenen değerlerinin geometrik yeridir. Bu durum Şekil 2.2'deki gibi gösterilebilir.



Şekil 2.2 Anakütle regresyon doğrusu

Her $E(Y | X_i)$, X_i 'nin bir fonksiyonudur. Simgelerle gösterilecek olursa

$$E(Y | X_i) = f(X_i)$$

Burada $f(X_i)$, anakütle regresyon fonksiyonu (ARF) olarak bilinir. X_i veriyken, Y 'nin (anakütle) ortalama dağılımının, X_i ile fonksiyonel bir ilişkisinin olduğunu gösterir. Başka bir deyişle, X 'teki değişmeye karşılık, Y 'deki ortalama tepkiyi (response) ifade eder. $E(Y | X_i)$ 'nin

$$E(Y | X_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$$

şeklinde olduğu kabul edilir. Bu kalıba doğrusal anakütle regresyon fonksiyonu denir.

Şekil 2.1'den X_i veriyken, tekil bir Y_i 'nin, aynı X_i düzeyindeki bütün Y_i 'lerin beklenen değeri etrafında dağıldığı görülür. Tekil bir Y_i 'nin beklenen değerinden sapması şöyle gösterilir.

$$\varepsilon_i = Y_i - E(Y | X_i)$$

ya da

$$Y_i = E(Y|X_i) + \varepsilon_i$$

Burada ε_i , pozitif veya negatif değerler alabilen ve bir rasgele değişken olan hata payıdır. Bu durumda Y_i , biri sabit, kurala bağlı, diğeri kuralsız ya da rassal olan iki bileşene ayrılabilir. Biri raslantı değişkeni (ε_i) ve öbürü de raslantı değişkeni olmayan ($E(Y | X_i)$), iki bileşenin toplamından oluşan Y_i de, bu durumda bir raslantı değişkeni olacaktır.

Daha açık bir gösterimle

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

yazılabilir. Öyleyse herhangi bir X_i için Şekil 2.1'deki durum şöyle gösterilebilir:

$$\begin{aligned} Y_{i1} &= \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_1 \\ Y_{i2} &= \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_2 \\ &\dots = \dots \\ Y_{ik} &= \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_k \end{aligned}$$

Burada k , i . alt anakütledeki birim sayısını temsil etmektedir. Eğer $Y_i = E(Y|X_i) + \varepsilon_i$ ifadesinin her iki yanının beklenen değeri alınır

$$\begin{aligned} E(Y_i|X_i) &= E(E(Y|X_i)) + E(\varepsilon_i|X_i) \\ &= E(Y|X_i) + E(\varepsilon_i|X_i) \end{aligned}$$

bulunur. $E(Y_i|X_i)$ ile $E(Y|X_i)$ aynı şeyi ifade ettiğinden yukardaki eşitlikten şu sonuç çıkarılır:

$$E(\varepsilon_i|X_i) = 0$$

Öyleyse, regresyon doğrusunun Y 'nin koşullu ortalamalarından geçtiği varsayımı (Şekil 2.2), ε_i 'lerin (X 'lere dayanan) koşullu ortalama değerlerinin sıfır olduğu anlamına gelir (Gujarati, 2001).

2.2.2 Örneklem Regresyon Fonksiyonu (ÖRF):

Çoğu uygulamada anakütle bilinmez. Bu durumda örneklemden faydalanılır. Örneklem, anakütle ile ilgili değerlerin gözlenen alt kümesi olarak tanımlanabilir. Regresyon analizinde örneklem yardımıyla ARF tahmin edilmeye çalışılır. Bazı sabit X 'lere karşılık gelen Y örneklem değerleri kullanılır.

Bunlarla birlikte örneklemin hangi birimlerden oluşacağı sorunu gündeme gelir. Asgari birime sahip bir anaküttelede 3 alt anakütle ve bu alt anakütlelerde 2 birimin var olması gereklidir. 3 alt anakütlenin gerekliliği doğrusallık ve 2 birimin bulunması da raslantısal ilişki içindir. O halde bir örneklem her alt anakütleden en az 1 birimi kapsamak koşuluyla en az 3 biçimden oluşmalıdır. Asgari birimli bir anakütle şu şekilde gösterilebilir:

Çizelge 2.4 Asgari birimli bir anakütle (Genceli, 2001)

X_i	X_1	X_2	X_3
Y_{ij}	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}
	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}
N_i	2	2	2
Ortalama	μ_{YX_1}	μ_{YX_2}	μ_{YX_3}

Çizelge 2.4'teki asgari anakütleden çekilebilecek tüm olanaklı örneklemeler ise Çizelge 2.5'teki gibi olacaktır:

Çizelge 2.5 Asgari anakütleden çekilebilecek tüm olanaklı örneklemeler (Genceli, 2001)

Örneklem	Birimler		
1	(X_1, Y_{21})	(X_2, Y_{22})	(X_3, Y_{23})
2	(X_1, Y_{11})	(X_2, Y_{12})	(X_3, Y_{13})

Çizelge 2.5 (Devamı) Asgari anakütleden çekilebilecek tüm olanaklı örneklemeler (Genceli, 2001)

3	(X ₁ , Y ₂₁)	(X ₂ , Y ₁₂)	(X ₃ , Y ₂₃)
4	(X ₁ , Y ₂₁)	(X ₂ , Y ₁₂)	(X ₃ , Y ₁₃)
5	(X ₁ , Y ₁₁)	(X ₂ , Y ₂₂)	(X ₃ , Y ₂₃)
6	(X ₁ , Y ₁₁)	(X ₂ , Y ₂₂)	(X ₃ , Y ₁₃)
7	(X ₁ , Y ₁₁)	(X ₂ , Y ₁₂)	(X ₃ , Y ₂₃)
8	(X ₁ , Y ₁₁)	(X ₂ , Y ₁₂)	(X ₃ , Y ₂₃)

Çizelge 2.5'ten görüldüğü gibi her alt anakütleden bir birim çekmek suretiyle elde edilen örneklem sayısı 8'dir. Olanaklı örneklem sayısı da

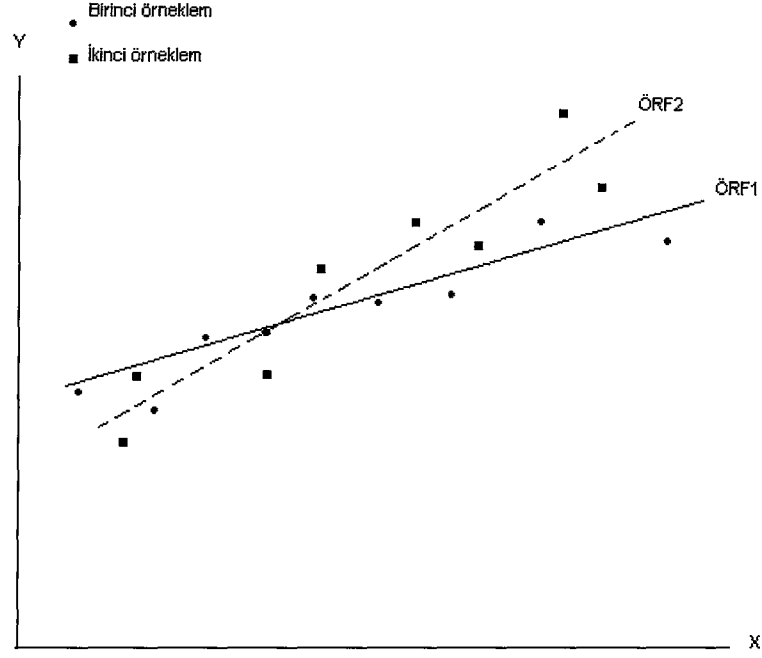
$$N_1^{n_1} N_2^{n_2} \dots N_j^{n_j}$$

ile verilir. Çizelge 2.5'teki örnek için bu ifade $2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^1 = 8$ 'dir (Genceli, 2001).

Anakütle yerine örneklemden hareket edildiği için anakütle regresyon denklemi ve dolayısıyla ε_i hata payları varyansı da hesaplanamamaktadır. Bu durumda β_0 , β_1 , σ^2 parametreleri

$$\hat{Y}_i = b_0 + b_1 X_i$$

şeklinde gösterilen örneklem regresyon fonksiyonu (ÖRF) veya örneklem regresyon doğrusu aracılığıyla tahmin edilir. Burada \hat{Y}_i , $E(Y|X_i)$ 'nin tahmincisi, b_0 , β_0 'ın tahmincisi, b_1 de, β_1 'in tahmincisidir. Çizelge 2.5'teki örnekten görülebileceği gibi çekilen her örneklem için bir ÖRF oluşturulur. Bu, Şekil 2.3'te iki örneklem için görülebilir.



Şekil 2.3 İki ayrı örnekleme dayanan regresyon doğruları

ÖRF, ARF'ye benzer olarak olasılıklı biçimde yazılabilir.

$$Y_i = b_0 + b_1 X_i + e_i$$

Burada e_i , kalıntı olarak adlandırılır. Kalıntılar, hata paylarının tahmincisi durumundadırlar.

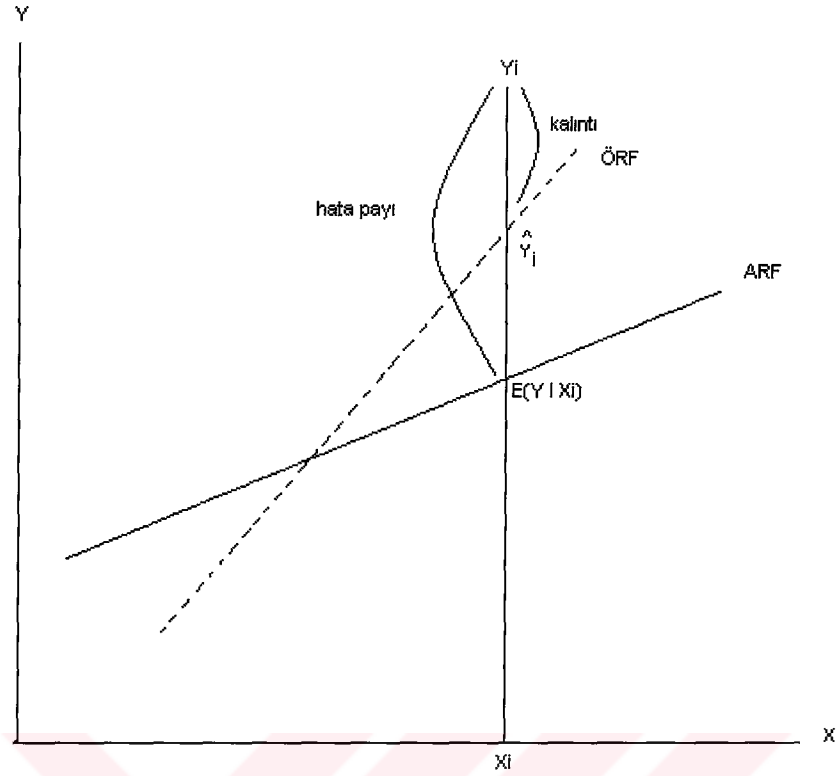
Bu durumda bir Y_i gözlem değeri, ÖRF terimleriyle

$$Y_i = \hat{Y}_i + e_i$$

şeklinde, ARF terimleriyle ise

$$Y_i = E(Y|X_i) + \varepsilon_i$$

şeklinde gösterilebilir. Bu durum Şekil 2.4'te görülmektedir.



Şekil 2.4 Örneklemenin ve anakütlenin regresyon doğruları

2.3 Basit Doğrusal Regresyon Modelinde Tahmin:

2.3.1 Sıradan En Küçük Kareler (SEKK) Yöntemi:

ÖRF'yi bulmak için çeşitli yöntemler vardır. Bunlardan en çok bilineni Carl Friedrich Gauss tarafından bulunduğu kabul edilen SEKK yöntemidir. İleriki bölümlerde tartışılacak olan bazı varsayımlar altında SEKK yöntemi, kendisini regresyon analizinin en yaygın kullanılan, en güçlü yöntemlerin biri durumuna getiren, çok aranan bazı istatistik özellikleri taşır. Bilindiği gibi ARF

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

şeklinindedir. ARF doğrudan gözlemlenemediği için ÖRF'den tahmin edilir;

$$Y_i = b_0 + b_1 X_i + e_i$$

$$Y_i = \hat{Y}_i + e_i$$

Burada \hat{Y}_i , Y_i 'nin tahmin edilmiş (koşullu ortalama) değeridir. b_0 ve b_1 istatistikleri ise parametre tahmincileridir. Bilindiği gibi tahminciler parametrelerden farklı olarak Yunan alfabesi ile değil Latin alfabesi ile gösterilirler.

ÖRF'nin belirlenmesinde amaç, n tane X ve Y çifti verilmişken, ÖRF'nin Y 'ye olabildiğince yakın olmasıdır. Burada ilk başta, kalıntıların toplamı $\sum e_i$ 'nin minimum olacak şekilde ÖRF'nin seçilmesi gerektiği düşüncesi akla gelebilir. Fakat bu düşünce kabul edilirse farklı değerlerde olan e_i kalıntı değerleri aynı ağırlığı taşıyacaklardır ve bu da kalıntıların farklı büyüklüklere sahip olmasına karşın aynı öneme sahip oldukları anlamına gelmektedir. Pozitif ve negatif değerli e_i değerleri ÖRF'nin çok uzaklarına dağılmış olmalarına karşın toplamaları çok küçük çıkabilir. Bu sorundan kurtulmak için en küçük kareler ölçütünün kullanılması gerekir. Bu ölçüt ÖRF'yi

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum (Y_i - b_0 - b_1 X_i)^2 = f(b_0, b_1)$$

ifadesi minimum olacak şekilde seçer. Yukarıdaki ifadeyi minimize etmek için ifadenin sırasıyla b_0 ve b_1 'e göre kısmi türevleri alınarak sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial(\sum e_i^2)}{\partial b_0} = -2 \sum (Y_i - b_0 - b_1 X_i) = 0$$

$$\frac{\partial(\sum e_i^2)}{\partial b_1} = -2 \sum (Y_i - b_0 - b_1 X_i) X_i = 0$$

Buradan da

$$\sum Y_i = n b_0 + b_1 \sum X_i$$

$$\sum X_i Y_i = b_0 \sum X_i + b_1 \sum X_i^2$$

şeklindeki normal denklemlere ulaşılır. Bunların çözümünden ise

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{n \sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \\
&= \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \\
&= \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}
\end{aligned}$$

Burada \bar{X} ve \bar{Y} örneklem ortalamalarıdır ve $x_i = (X_i - \bar{X})$, $y_i = (Y_i - \bar{Y})$ olarak tanımlanmışlardır. b_0 için ise

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{\sum X_i^2 \sum Y_i - \sum X_i \sum X_i Y_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \\
&= \bar{Y} - b_1 \bar{X}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadeler, β_0 ve β_1 'in EKK tahmincileridir.

Bulunan noktanın gerçekten minimum olduğu ikinci türev matrisi Hessian matrisin pozitif belirli olmasından görülebilir. Buradaki durum için, Hessian matris:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 (\sum e_i^2)}{\partial b_0^2} & \frac{\partial^2 (\sum e_i^2)}{\partial b_0 \partial b_1} \\ \frac{\partial^2 (\sum e_i^2)}{\partial b_0 \partial b_1} & \frac{\partial^2 (\sum e_i^2)}{\partial b_1^2} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. İkinci merteye kısmi türevlerin değerleri yerine yazılırsa,

$$H = \begin{bmatrix} 2n & 2\sum X_i \\ 2\sum X_i & 2\sum X_i^2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix}$$

şeklindeki simetrik matris elde edilir. *Bir simetrik matrisin, tüm ana alt matrislerinin (principal submatrix) determinanı pozitif ise, bu matrisin pozitif belirli olduğunu* ifade eden teoremden yararlanarak, yukarıdaki simetrik matrisin pozitif belirli olduğu gösterilebilir.

H 'nin ana alt matrisleri şu şekildedir:

$$A_1 = [n] \quad , \quad |A_1| = n \geq 0$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix}, \quad |A_2| = n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2$$

İlk ana alt matrisin determinantının pozitif olduğu görülmektedir. İkinci ana alt matris için eğer,

$$\sum (X_i - \bar{X})^2 > 0$$

yazılırsa, eşitsizliğin sol tarafı açılarak,

$$\begin{aligned} & \sum (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2) > 0 \\ & = \sum X_i^2 - 2\bar{X}\sum X_i + n\bar{X}^2 > 0 \\ & = \sum X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2 > 0 \\ & = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2 > 0 \\ & = \sum X_i^2 - n\left(\frac{\sum X_i}{n}\right)^2 > 0 \\ & = \sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n} > 0 \\ & = n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2 > 0 \end{aligned}$$

bulunur ve buradan ikinci ana alt matrisin determinantının da pozitif olduğu görülür.

2.3.2 EKK Yönteminin Ardındaki Varsayımlar:

β_0 ve β_1 'e ilişkin çıkarsamalar yapmak için, X_i ve ε_i 'nin nasıl türetildiğine dair bazı varsayımlara ihtiyaç vardır. Gaussgil ya da Klasik Doğrusal Regresyon Modeli (KDRM) olarak adlandırılan regresyon modeli 10 varsayım içerir. Bunlar aşağıdaki gibidir:

1. Model parametrelerinde doğrusaldır.

2. Bağımsız değişken X_i , raslantı değişkeni değildir. Tekrarlanan örneklemelerde değişmez. Diğer bir deyişle, olasılıklı olmadığı varsayılr. Bu durumda regresyon analizi, bağımsız değişken X_i 'ye göre koşullu regresyon analizidir.

3. $E[\varepsilon_i|X_i]=0$ veya $\sum \varepsilon_i = 0$ 'dır. Modele katılmayan değişkenlerin etkisini gösteren ε_i , Y_i 'yi kurallı biçimde etkilemez.

4. X değeri veriyken, ε_i 'nin varyansı bütün gözlemler için aynıdır. Bir başka deyişle ε_i 'nin koşullu varyansları sabittir.

$$\text{Var}(\varepsilon_i | X_i) = E[\varepsilon_i - E[\varepsilon_i | X_i]]^2$$

$$= E[\varepsilon_i - 0]^2$$

$$= E[\varepsilon_i^2 | X_i] = \sigma_\varepsilon^2 \quad (\text{sabit})$$

Alt anakütle varyansları birbirine eşittir. Bu duruma sabit varyanslılık (homoskedastisite) denir. Buna göre çeşitli X değerlerine karşılık gelen bütün Y değerleri eşit önem taşımaktadır. Bu varsayım, aynı zamanda Y_i 'lerin koşullu varyanslarının da sabit olduğu anlamına gelmektedir. Matematiksel gösterimle ile:

$$\text{Var}(Y_i | X_i) = \sigma_\varepsilon^2$$

yazılır. Eşvaryanslılığın gerçekleşmediği duruma ise değişen varyans (heteroskedastisite) durumu denilir ve

$$\text{Var}(\varepsilon_{ij} | X_i) = \sigma_i^2$$

şeklinde gösterilmektedir.

5. Hata payları otokorelasyonsuzdur. Bu varsayıma göre: Eğer X_1 ve X_2 , tekrarlanan örneklerde değişmeyen ve gözlem sonucu belirlenen ve rastlantı değişkeni olmayan iki X_i ise:

$$\text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2 | X_1, X_2) = E(\varepsilon_1 - E(\varepsilon_1) | X_1)(\varepsilon_2 - E(\varepsilon_2) | X_2)$$

$$= E(\varepsilon_1 | X_1)(\varepsilon_2 | X_2) = 0$$

bir başka gösterimle $\text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2 | X_1, X_2) = 0$

veya kısaca ve daha genel olarak

$$E(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-s}) = 0 \quad i > s \text{ olur.}$$

Buna göre ε_{i-s} hata payı ile ε_i hata payı birbirleri ile ilişkisizdir. Korelasyonları 0'a eşittir. Otokorelasyon , pozitif otokorelasyon (aynı yönlü) veya negatif otokorelasyon (ters yönlü) olarak iki şekilde olabilir. Pozitif otokorelasyon durumunda artı değerli bir ε 'u artı değerli bir ε , veya eksi değerli bir ε 'u eksi değerli bir ε , izlerken negatif otokorelasyonda artı değerli bir ε 'u eksi değerli bir ε veya eksi değerli bir ε 'u artı değerli bir ε izler. Hata paylarının otokorelasyonlu olmamasının istenmesinin nedeni şu şekilde açıklanabilir:

Daha önce ifade edildiği gibi ARF, $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ şeklindedir. Bu durumda eğer ε_i ile ε_{i-1} aynı yönde korelasyonlu ise Y_i , yalnızca ε_i 'ye değil ε_{i-1} 'e de bağlı olacaktır. Çünkü, ε_i 'yi bir ölçüde ε_{i-1} belirler. Hata paylarının otokorelasyonsuz olması varsayımıyla, eğer varsa X_i 'nin Y_i üzerindeki kurallı etkisinin ele alındığını, Y_i üzerinde ε_i 'ler arasındaki olası etkilerden oluşabilecek başka etkilerle ilgilenilmediği ifade edilmiş olunur.

6. X_i ile ε_i 'nin kovaryansı 0'a eşittir. Bu, şu şekilde gösterilebilir;

$$\text{Cov}(\varepsilon_i, X_i) = E[\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)][X_i - E(X_i)] \quad E(\varepsilon_i) = 0 \text{ olduğundan;}$$

$$= E[\varepsilon_i (X_i - E(X_i))] \quad E(X_i) \text{ olasılıklı olmadığından;}$$

$$E(\varepsilon_i X_i) - E(X_i)E(\varepsilon_i) \quad E(\varepsilon_i) = 0 \text{ olduğundan;}$$

$$E(\varepsilon_i, X_i) = 0$$

Bu varsayım X_i ile ε_i 'nin ilişkisiz olduğunu söyler. Bilindiği gibi ARF'de X_i ile ε_i ayrı ayrı (ve toplanabilir) bir etki yaratır. Ama eğer X_i ile ε_i ilişkili ise, herbirinin Y üzerindeki tekil etkilerini bulmak olanaksızlaşır. Bunun için varsayım gereği X_i ile ε_i 'nin ilişkisiz olduğu kabul edilir.

7. Veri sayısı n , tahmin edilecek parametre sayısından fazla olmalıdır. Bu bir yerde stokastik olma koşuludur.

8. Bir örneklemden X değerlerinin hepsi aynı olmamalıdır. Açık ifadesi ile

$$\text{Var}(X) = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1} > 0 \text{ ve sonlu olmalıdır.}$$

9. Model doğru kurulmuş olmalıdır. Spesifikasyon hatası bulunmamalıdır.

10. Çok değişkenli regresyon modellerinde, bağımsız değişkenler arasında çoklu doğrusal bağlantı yoktur (Gujarati, 2001).

2.3.3 EKK Tahmincilerinin Standart Hataları:

Bölüm 2.3.4'te de değinileceği gibi parametrelerin EKK tahmincileri, bağımlı değişkenin doğrusal bir fonksiyonudur. Bir başka deyişle doğrusal bir tahmincidirler.

$$k_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2}, \quad x_i = (X_i - \bar{X})$$

olmak üzere

$$b_1 = \sum k_i Y_i$$

yazılabilir. Burada, aslında k_i 'ler tartı olarak alındığında b_1 'in Y_i 'nin tartılı ortalaması olduğu söylenebilir. k_i 'ler şu özelliklere sahiptirler:

1. X_i 'ler raslantı değişkeni olarak varsayılmadıklarından k_i 'ler de raslantı değişkeni değildirler.

2. $\sum k_i = 0$

3. $\sum k_i^2 = 1 / \sum x_i^2$

4. $\sum k_i x_i = \sum k_i X_i = 1$

ARF'nin ifadesi $b_1 = \sum k_i Y_i$ 'de yerine konulursa

$$\begin{aligned} b_1 &= \sum k_i (\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i) \\ &= \beta_1 + \sum k_i \varepsilon_i \end{aligned}$$

Burada k_i 'nin daha önce söz edilen özelliklerinden yararlanılmıştır. Şimdi yukarıdaki ifadenin beklenen değeri alınırsa

$$E(b_1) = \beta_1 + \sum k_i E(\varepsilon_i)$$

sonucuna ulaşılır. k_i , raslantı değişkeni olmadığı için sabit gibi düşünülür ve $E(\varepsilon_i) = 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$E(b_1) = \beta_1$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik daha sonra değinileceği gibi b_1 'in sistematik hatasız (sapmasız) bir tahminci olduğu anlamına gelmektedir.

Bu durumda yukarıda elde edilen sonuçlardan b_1 'in varyansı için şunlar yazılabilir;

$$\begin{aligned} \text{Var}(b_1) &= E(b_1 - E(b_1))^2 \\ &= E(b_1 - \beta_1)^2 \\ &= E\left(\sum k_i \varepsilon_i\right)^2 \\ &= E(k_1^2 \varepsilon_1^2 + \dots + k_n^2 \varepsilon_n^2 + 2k_1 k_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \dots + 2k_{n-1} k_n \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n) \end{aligned}$$

Varsayım gereği her i için $E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$ ve $i \neq j$ için $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \text{Var}(b_1) &= \sigma^2 \sum k_i^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} \quad \left(\sum k_i^2 = 1 / \sum x_i^2 \text{ özelliğinden faydalanıldı. } \right) \end{aligned}$$

sonucuna varılır. b_0 'ın varyansı için ise

$$\begin{aligned} \text{Var}(b_0) &= \text{Var}(\bar{Y} - b_1 \bar{X}) \\ &= \text{Var}(\bar{Y}) + \text{Var}(b_1 \bar{X}) - 2\text{Cov}(\bar{Y}, b_1 \bar{X}) \\ &= \text{Var}\left(\frac{\sum Y_i}{n}\right) + \bar{X}^2 \text{Var}(b_1) - 2\text{Cov}(\bar{Y}, b_1 \bar{X}) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum \text{Var}(Y_i) + \bar{X}^2 \text{Var}(b_1) - 2\text{Cov}(\bar{Y}, b_1 \bar{X}) \\ &= \frac{1}{n^2} n \sigma^2 + \bar{X}^2 \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} - 2\text{Cov}(\bar{Y}, b_1 \bar{X}) \end{aligned}$$

yazılır. Burada $\text{Cov}(\bar{Y}, b_1 \bar{X}) = 0$ 'dır. Bu şu şekilde gösterilebilir:

$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ özelliğinden

$$\begin{aligned}
Cov(\bar{Y}, b_1 \bar{X}) &= E(\bar{Y} b_1 \bar{X}) - E(\bar{Y})E(b_1 \bar{X}) \\
&= \bar{X}E(\bar{Y} b_1) - \bar{X}E(\bar{Y})E(b_1) \\
&= \bar{X}Cov(\bar{Y}, b_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda, $Cov(\bar{Y}, b_1) = 0$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için modelin, $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ şeklindeki ifadesinin sağ tarafına, $\beta_1 \bar{X}$ ifadesinin eklenip çıkarıldığı varsayalım. Buna göre model,

$$\begin{aligned}
Y_i &= \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_1 \bar{X} - \beta_1 \bar{X} + \varepsilon_i \\
&= \beta_0 + \beta_1 \bar{X} + \beta_1 (X_i - \bar{X}) + \varepsilon_i \\
&= \beta_0^* + \beta_1 (X_i - \bar{X}) + \varepsilon_i \\
&= \beta_0^* + \beta_1 x_i + \varepsilon_i
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\beta_0^* = \beta_0 + \beta_1 \bar{X}$ şeklindedir. Öte yandan,

$$b_1 = \sum k_i Y_i = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2}$$

şeklindeydi. Burada Y_i yerine, yukarıda türetilen ifade yazılırsa

$$b_1 = \frac{\sum x_i (\beta_0^* + \beta_1 x_i + \varepsilon_i)}{\sum x_i^2}$$

elde edilir. Diğer yandan KDRM ifadesinin ortalaması alınır,

$$\begin{aligned}
Y_i &= \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \\
\sum Y_i &= n\beta_0 + \beta_1 \sum X_i + \sum \varepsilon_i \\
\frac{\sum Y_i}{n} &= \beta_0 + \beta_1 \bar{X} + \bar{\varepsilon} \\
\bar{Y} &= \beta_0 + \beta_1 \bar{X} + \bar{\varepsilon} \\
\bar{Y} &= \beta_0^* + \bar{\varepsilon}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada yine, $\beta_0^* = \beta_0 + \beta_1 \bar{X}$ şeklindedir. Elde edilen b_1 ve \bar{Y} ifadeleri,

$$Cov(\bar{Y}, b_1) = E(\bar{Y} b_1) - E(\bar{Y})E(b_1)$$

de yerine konursa,

$$\text{Cov}(\bar{Y}, b_1) = E \left[(\beta_0^* + \bar{\varepsilon}) \left(\frac{\sum x_i (\beta_0^* + \beta_1 x_i + \varepsilon_i)}{\sum x_i^2} \right) \right] - E(\bar{Y})E(b_1)$$

Daha önce değinildiği gibi $E(b_1) = \beta_1$ 'dir. Bu özelliğe sistematik hatasızlık veya sapmasızlık özelliği denir.

Bununla beraber,

$\bar{Y} = \beta_0^* + \bar{\varepsilon}$ ifadesinin her iki yanının beklenen değeri alınır,

$$E(\bar{Y}) = E(\beta_0^* + \bar{\varepsilon}) = E(\beta_0^*) + E(\bar{\varepsilon})$$

bulunur. KDRM'nin varsayımından $E(\bar{\varepsilon}) = 0$ 'dır. Bu durumda $E(\bar{Y}) = E(\beta_0^*) = \beta_0^*$ olur.

Bunlar, $\text{Cov}(\bar{Y}, b_1)$ 'de yerine konursa,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\bar{Y}, b_1) &= E \left[(\beta_0^* + \bar{\varepsilon}) \left(\frac{\beta_0^* \sum x_i}{\sum x_i^2} + \frac{\beta_1 \sum x_i^2}{\sum x_i^2} + \frac{\sum \varepsilon_i x_i}{\sum x_i^2} \right) \right] - \beta_0^* \beta_1 \\ &= E \left[(\beta_0^* + \bar{\varepsilon}) \left(\beta_1 + \frac{\sum \varepsilon_i x_i}{\sum x_i^2} \right) \right] - \beta_0^* \beta_1 \\ &= E \left[\beta_0^* \beta_1 + \beta_0^* \frac{\sum \varepsilon_i x_i}{\sum x_i^2} + \bar{\varepsilon} \beta_1 + \bar{\varepsilon} \frac{\sum \varepsilon_i x_i}{\sum x_i^2} \right] - \beta_0^* \beta_1 \\ &= \beta_0^* \beta_1 + \beta_0^* \frac{\sum x_i E(\varepsilon_i)}{\sum x_i^2} + \frac{\beta_1}{n} \sum E(\varepsilon_i) + \frac{\sum x_i E(\bar{\varepsilon} \varepsilon_i)}{\sum x_i^2} - \beta_0^* \beta_1 \end{aligned}$$

Bilindiği gibi, $\sum x_i = 0$ ve $E(\varepsilon_i) = 0$ olduğundan, ifade,

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sum x_i E\left(\frac{\sum \varepsilon_i^2}{n}\right)}{\sum x_i^2} \\
&= \frac{\sum x_i \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n E(\varepsilon_i^2)\right)}{\sum x_i^2}
\end{aligned}$$

şeklini alır. Bilindiği üzere, $Var(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i^2) - [E(\varepsilon_i)]^2 = E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$ 'dir. Buradan

$$Cov(\bar{Y}, b_1) = \frac{\sum x_i \frac{1}{n} n \sigma^2}{\sum x_i^2} = \frac{\sigma^2 \sum x_i}{\sum x_i^2} = 0$$

sonucuna ulaşılır.

Bu sonuçla beraber, b_0 'ın varyansı,

$$Var(b_0) = \frac{1}{n} n^2 \sigma^2 + \frac{\bar{X}^2 \sigma^2}{\sum x_i^2}$$

$$Var(b_0) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x_i^2} \right)$$

bulunur. Bu varyans ifadelerinin pozitif karekökünü almak suretiyle de tahmincilerin standart hataları elde edilmiş olunur. Bilindiği gibi standart hata tahmincinin örnekleme dağılımının standart sapmasıdır. Bir tahmincinin örnekleme dağılımı ise kısaca kendi olasılık dağılımıdır. Bir başka deyişle, belli bir anakütleden çekilen aynı büyüklükteki bütün olası örneklemelerden elde edilen tahminci değerleri kümesinin dağılımıdır.

σ_ε^2 'nin EKK tahmincisini bulmak için şöyle bir yol izlenebilir:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \text{ ve}$$

$$\bar{Y} = \beta_0 + \beta_1 \bar{X} + \bar{\varepsilon} \text{ 'dir. Bu iki ifade birbirinden çıkarılırsa}$$

$$y_i = \beta_1 x_i + (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}) \text{ elde edilir. Ayrıca}$$

$e_i = y_i - b_1 x_i$ 'dir. Bu ifade üstteki ifadede yerine konursa

$$e_i = \beta_1 x_i + (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}) - b_1 x_i \text{ elde edilir.}$$

Her iki yandaki terimlerin kareleri alınıp toplanırsa

$$\sum e_i^2 = (b_1 - \beta_1)^2 \sum x_i^2 + \sum (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2 - 2(b_1 - \beta_1) \sum x_i (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})$$

sonucuna ulaşılır. Her iki yanın beklenen değeri alınırsa

$$E(\sum e_i^2) = \sum x_i^2 E(b_1 - \beta_1)^2 + E(\sum (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2) - 2E((b_1 - \beta_1) \sum x_i (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}))$$

sonucu bulunur. Klasik doğrusal regresyon modelinin varsayımlarıyla az önce belirlenen sonuçlardan şunlar yazılabilir:

$$\begin{aligned} E(\sum e_i^2) &= \sigma^2 + (n-1)\sigma^2 - 2\sigma^2 \\ &= (n-2)\sigma^2 \end{aligned}$$

$$\text{Eğer } \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2} \text{ tanımı yapılırsa}$$

$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$ 'dir. Böylelikle σ^2 'nin sistematik hatasız bir tahmincisi elde edilmiş olunur. Bu σ^2 'nin EKK tahmincisidir

2.3.4 EKK Tahmincilerinin Özellikleri: Gauss-Markov Teoremi

KDRM'nin varsayımları verilmişken, SEKK tahmincileri doğrusal, sistematik hatasız ve tüm doğrusal ve sistematik hatasız tahminciler içinde minimum varyanslı olanıdır (Bir başka ifadeyle etkindir). Bu özelliği taşıyan tahmincilere kısaca BLUE (İngilizce "Best Linear Unbiased Estimator") denir.

SEKK tahmincilerinin bu özellikleri taşıdığı matris yaklaşımı ile gösterilecektir.

2.3.5 Belirlilik (Determinasyon) Katsayısı:

Belirlilik katsayısı r^2 ya da çok değişkenli regresyonda R^2 , örneklem regresyonu doğrusunun verilere ne kadar iyi uyduğunun bir göstergesidir. Bilindiği gibi Y_i

$$Y_i = \hat{Y}_i + e_i$$

şeklinde yazılabilir. Bu, $y_i = Y_i - \bar{Y}$ ve $\hat{y}_i = \hat{Y}_i - \bar{\hat{Y}} = \hat{Y}_i - \bar{Y}$ alınırsa

$$y_i = \hat{y}_i + e_i$$

şeklinde de yazılabilir. Bu ifadenin her iki yanının karesi alınıp, tüm örneklem birim sayısına kadar toplanırsa

$$\begin{aligned} \sum y_i^2 &= \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2 + 2\sum \hat{y}_i e_i \\ &= \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2 \\ &= b_1^2 \sum x_i^2 + \sum e_i^2 \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\hat{y}_i = b_1 x_i$ ve EKK'in sonuçları kullanılarak gösterilebilecek olan $\sum \hat{y}_i e_i = 0$ özelliklerinden faydalanılmıştır. Buradaki kareler toplamları sırasıyla şu şekilde tanımlanır:

$$\text{TKT (Toplam Kareler Toplamı) veya SST (Total Sum of Squares)} = \sum y_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$$

Gözlenen Y değerlerinin kendi aritmetik ortalamasına göre toplam değişimi.

$$\text{AKT(Açıklanan Kareler Toplamı) veya SSR(Regression Sum of Squares)} = \sum \hat{y}_i^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{\hat{Y}})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = b_1^2 \sum x_i^2$$

Tahmin edilen Y değerlerinin kendi ortalamalarına(veya başka deyişle gözlemlenen Y değerlerinin ortalamalarına) göre değişimi; buna da regresyondan gelen kareler toplamı denir.

KKT(Kalıntı Kareleri Toplamı) veya SSE(Residual or Error Sum of Squares)=

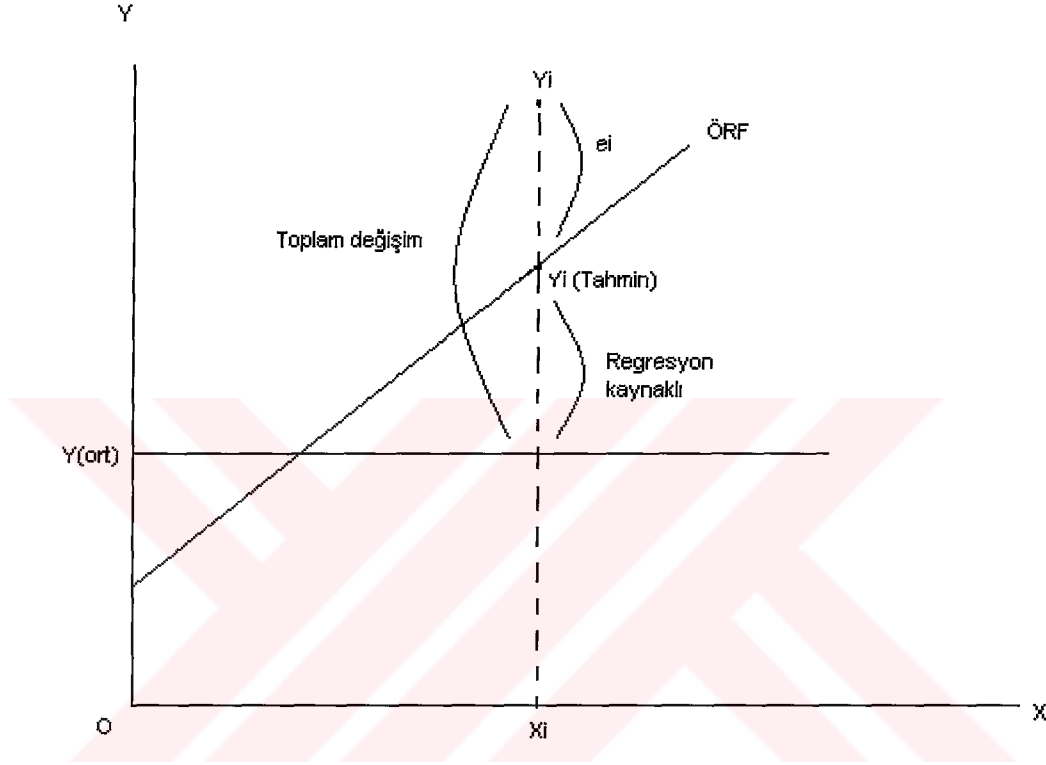
$$\sum e_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

Y değerlerinin regresyon doğrusuna göre kalıntı kareleri toplamı, ya da kısaca açıklanamayan değişimdir.

Bu durumda şöyle yazılabilir:

$$SST=SSR+SSE$$

Bir başka deyişle, Y değerlerinin toplam değişimi, oluşturulan regresyon doğrusu ile açıklanan değişim ve regresyon doğrusu ile açıklanamayan, rassal etkilere dayalı değişim olmak üzere ikiye bölünebilir. Bu, Şekil 2.5’de daha iyi görülebilir.



Şekil 2.5 Y_i 'deki değişimin iki bileşene ayrılması

$SST=SSR+SSE$ eşitliğinin her iki yanını SST 'ye bölünürse

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{SSR}{SST} + \frac{SSE}{SST} \\ &= \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} + \frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada r^2 şöyle tanımlanır:

$$r^2 = \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

Böyle tanımlanan r^2 istatistiği, (örneklem) belirlilik katsayısı olarak bilinir. r^2 , Y'deki toplam değişim içinde regresyon modelince açıklanan oranı ya da yüzdeyi verir. Sınırları $0 \leq r^2 \leq 1$ 'dir. $r^2=1$ modelin verilere tam uyduğunu gösterir. Öte yandan $r^2=0$, bağımlı değişken ile bağımsız değişken arasında hiçbir ilişki olmadığını ($b_1=0$) gösterir. Bu durumda $\hat{Y}_i = b_0 = \bar{Y}$ olur.

Genel olarak yüksek r^2 doğrunun verilere iyi uyduğuna, düşük r^2 ise iyi uymadığına işarettir. r^2 'nin yorumunda bir nedensellik düşünülmez. Bununla beraber yüksek r^2 'nin ne olduğuna ilişkin kabul görmüş genel bir görüş yoktur. Örneğin zaman serilerinde trend etkisinden dolayı yüksek r^2 'ye rastlamak mümkündür. Kesit verilerinde ise model uygun olduğu halde r^2 düşük çıkabilir. Çünkü r^2 doğrusal ilişkinin bir ölçüsüdür. Ayrıca r^2 'nin hesaplanmasında raslantı değişkenleri kullanıldığından kendisi de bir raslantı değişkeni olacaktır. Diğer bir deyişle, değeri örneklemden örnekleme değişecektir. Kısaca r^2 bir istatistiktir. Anakütle belirlilik katsayısı ρ_{XY}^2 'nin bir tahmini olabilmesi için, hipotez testine tabi tutulması gerekir.

2.4 Normallik Varsayımı ve Sonuçları:

Hatırlanacağı gibi SEKK yönteminin klasik doğrusal regresyon modeline uygulanması için, ε_i hata paylarının olasılık dağılımları hakkında herhangi bir varsayımda bulunulmamıştı. ε_i 'ler için yapılan varsayımlar, yalnızca, beklenen değerlerinin sıfır olduğu, birbirleriyle ilişkisiz ve sabit varyanslı oldukları biçimindeydi (KDRM varsayımları). Bir önceki bölümde görüldü ki bu varsayımlarla $b_0, b_1, \hat{\sigma}^2$ şeklindeki SEKK tahmincilerinin, sistematik hatasızlık, minimum varyans gibi aranan bazı istatistik özellikleri sağlanmaktadır. Fakat KDRM ve SEKK özellikleri yalnızca nokta tahmini yapmaya yarar. Regresyon analizinde amaç, yalnızca ÖRF'yi bulmak değil, ARF'ye ilişkin çıkarımlarda bulunmaktır. Başka bir deyişle, parametre tahmincilerini kullanarak gerçek parametreler hakkında birşeyler söylemektir. Yine hatırlanacağı gibi b_0 ve b_1 varsayım gereği raslantı değişkeni olan ε_i 'nin doğrusal birer fonksiyonlarıydı. Dolayısıyla, SEKK tahmincilerinin olasılık dağılımı, ε_i 'nin olasılık dağılımına ilişkin varsayıma dayanır.

SEKK yöntemi ε_i 'nin olasılık özelliğine ilişkin bir varsayımda bulunmadığı için, Gauss-Markov teoremi bir yana bırakılırsa, ÖRF'den ARF için çıkarsama yapmakta SEKK bir işe yaramaz. Bundan dolayı hipotez testi ve güven aralığı oluşturma gibi çıkarımlar için ε_i 'nin çoğunlukla normal dağılım gösterdiği varsayılır. Böylelikle KDRM'nin varsayımlarına

normallik varsayımının eklenmesiyle Klasik Normal Doğrusal Regresyon Modeli (KNDRM) elde edilmiş olunur. Bu varsayım şu şekildedir:

KNDRM her bir ε_i 'nin aşağıdaki değerlerle normal dağıldığını varsayar:

Ortalama: $E(\varepsilon_i) = 0$

Varyans: $E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$

Kovaryans: $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ $i \neq j$ için

Bu kısaca şu şekilde gösterilir: $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

Normal dağılan iki değişkenin kovaryansı veya korelasyonu 0 ise bu istatistiksel bağımsızlık anlamına geleceğinden aynı zamanda

$\varepsilon_i \sim \text{ind}(0, \sigma^2)$ (independent and normally distributed)

yazılır. $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ 'nin bir sonucu olarak $Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 X_i, \sigma^2)$ yazılabilir.

Normallik varsayımının nedenleri arasında belki de en önemlisi merkezi limit teoremidir. Bu nedenler şöyle sıralanabilir:

1. ε_i , modele katılmamış çok sayıda bağımsız değişkenin bağımlı değişken üzerindeki etkisini yansıtır. Bu çok sayıda değişkenin etkisinin rassal ya da en azından küçük olması umulur. İşte burada az sonra verilecek olan merkezi limit teoreminin önemi ortaya çıkmaktadır. Merkezi limit teoremine göre; çok sayıda bağımsız ve aynı biçimde dağılmış rassal değişkenler varsa, bu değişkenlerin sayısı sonsuza doğru arttıkça, bunların toplamının dağılımının, birkaç aykırılık dışında, normal dağılıma yaklaşır. Buna göre ε_i de birçok dış değişkenin etkisini içerdiğinden ε_i 'nin de normal dağıldığını varsaymak yerinde olur.

2. Merkezi limit teoreminin bir başka biçimine göre çok fazla sayıda değişken olmasa da ve bunlar tam bağımsız dağılmasalar da, toplamları yine yaklaşık normal olur.

3. Normal dağılımın bir özelliğine göre normal dağılan değişkenlerin doğrusal fonksiyonları da normal dağılır. Öte yandan b_0 ve b_1 'in Y_i 'nin, veya aynı şekilde ε_i 'nin doğrusal

fonksiyonu oldukları belirtilmişti. Bu durumda eğer ε_i normal dağıldığı varsayılırsa, b_0 ve b_1 de normal dağılacaklardır.

4. Normal dağılım basittir. Sadece iki parametresi vardır (Gujarati, 2001).

2.4.1 Normallik Varsayımı Altında SEKK Tahmincilerinin Özellikleri:

1. Sistemik hatasızdırlar.

2. Minimum varyanslıdırlar. 1. özellekle beraber bu, etkin oldukları anlamına gelir.

3. Tutarlıdırlar. Tutarlılık bir büyük örneklem(asimptotik) özelliğidir. Buna göre örneklemin birim sayısı sonsuza doğru arttıkça, tahminci gerçek parametre değerine yaklaşır. Bu sistemik hatasızlık ile karıştırılmamalıdır. Sistemik hatasızlık, örneklem sayısı ile ilişkili olup her örneklem büyüklüğünde sağlanabilir.

4. $b_0 \sim N(\beta_0, \sigma_{b_0}^2)$ ve $b_1 \sim N(\beta_1, \sigma_{b_1}^2)$ 'dir. Eğer $z = \frac{b_0 - \beta_0}{\sigma_{b_0}}$ ve $z = \frac{b_1 - \beta_1}{\sigma_{b_1}}$ dönüşümleri yapılırsa bu tahminciler $z \sim N(0, 1)$ şeklinde standart normal dağılırlar.

5. $\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-2}^2$ 'dir.

6. b_0 ve b_1 , $\hat{\sigma}^2$ 'den bağımsız dağılırlar.

7. b_0 ve b_1 , doğrusaldır, ama doğrusal olmasalardı bile yine minimum varyanslı olacaklardı. Gauss-Markov teoreminin tersine normallik varsayımı altında EKK tahmincileri sistemik hatasız ve minimum varyanslı tahmincilerdir (Gujarati, 2001).

2.4.2 Maksimum Olabilirlik Yöntemi (MOY):

SEKK yönteminden daha güçlü teorik özellikler gösteren bir başka nokta tahmin yöntemi maksimum olabilirlik yöntemidir(Maximum Likelihood Estimation MLE). Bunun yanında parametre tahmini için kullanılan momentler yöntemi de vardır. SEKK ile MO arasındaki en önemli fark, MOY ni kullanabilmek için ε_i hata paylarının olasılık dağılımına ilişkin varsayım yapmak gerekir. Bir başka deyişle, olasılık yoğunluk fonksiyonunun dolayısıyla de hangi dağılıma uyduğunun bilinmesi gerekir. MO tahmincileri elde edilirken önceki gibi hata

paylarının normal dağıldığı kabul edilir. Bu durumda σ^2 'nin tahmincisi dışında tüm parametreler EKK tahmincileri ile aynı çıkar. Bu da hata paylarının normal dağılımları varsayımının altında yatan nedenlerinden biri olarak görülebilir. Bilindiği üzere, ε_i hakkında hiçbir varsayım yapmadan elde edilen EKK tahmincileri tutarlıdır. Eğer EKK yöntemini kullanmadan, doğrudan ε_i 'lerin normal dağıldığı varsayıp bu varsayıma dayanan MOY uygulansaydı aranılan özelliklere sahip EKK tahmincileri yaklaşık olarak elde edilecekti. Buradan ε_i 'lerin normal dağıldığı varsayımının son derece gerçekçi ve mantıklı olduğu anlaşılmaktadır.

MOY şu şekilde açıklanabilir: $Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 X_i, \sigma^2)$ verilmişken, Y_1, Y_2, \dots, Y_n 'in ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu şu şekildedir:

$$f(Y_1, Y_2, \dots, Y_n | \beta_0 + \beta_1 X_i, \sigma^2)$$

Ancak Y 'lerin birbirinden bağımsız olduğu göz önüne alınınca bu ifade, n tane tekil olasılık yoğunluk fonksiyonunun çarpımı olarak yazılabilir:

$$= f(Y_1 | \beta_0 + \beta_1 X_1, \sigma^2) \cdot f(Y_2 | \beta_0 + \beta_1 X_2, \sigma^2) \cdot \dots \cdot f(Y_n | \beta_0 + \beta_1 X_n, \sigma^2) \quad (2.1)$$

Burada

$$f(Y_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2\right] \quad (2.2)$$

olup, bu da ortalamasıyla varyansı verilmiş, normal dağılmış bir değişkenin yoğunluk fonksiyonudur.

Herbir Y için (2.2), (2.1)'de yerine konursa

$$f(Y_1, Y_2, \dots, Y_n | \beta_0 + \beta_1 X_i, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^n (\sqrt{2\pi})^n} \exp\left[\sum \frac{-1(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (2.3)$$

elde edilir. Y_1, Y_2, \dots, Y_n biliniyor ya da verilmişken $\beta_0, \beta_1, \sigma^2$ bilinmiyorsa, (2.3)'deki fonksiyona olabilirlik fonksiyonu (likelihood function) denir. $L(\beta_0, \beta_1, \sigma^2)$ ile gösterilir.

Adından da anlaşılacağı üzere MOY bilinmeyen anakütle parametrelerine ilişkin tahminleri yaparken, verilmiş Y 'lerin gözleme olasılığını maksimize etmeye çalışır. Dolayısıyla bu da $L(\beta_0, \beta_1, \sigma^2)$ 'nin maksimize edilmesi gerektiği anlamına gelir. Bu doğrudan bir türev hesabıdır. Türev almak için (2.3)'ün logaritmasının alınması kolaylık sağlar.

$$\begin{aligned} \ln L &= -n \ln \sigma - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum \frac{(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2}{\sigma^2} \\ &= -\frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum \frac{(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2}{\sigma^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

(2.4)'ün $\beta_0, \beta_1, \sigma^2$ 'ye göre kısmi türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_0} &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)(-1) \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_1} &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)(-X_i) \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler sıfıra eşitlenerek (bu optimum değeri bulmanın birinci dereceden koşuludur) MOY tahminleri bulunur. Bu tahminler EKK'den farklı olarak parametre sembolünün üstünde bir tilda ile gösterilir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{\sigma}^2} \sum (Y_i - \tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1 X_i) &= 0 \\ \frac{1}{\tilde{\sigma}^2} \sum (Y_i - \tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1 X_i) X_i &= 0 \\ -\frac{n}{2\tilde{\sigma}^2} + \frac{1}{2\tilde{\sigma}^4} \sum (Y_i - \tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1 X_i)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Sadeleştirmelerden sonra

$$\sum Y_i = n\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 \sum X_i$$

$$\sum X_i Y_i = \tilde{\beta}_0 \sum X_i + \tilde{\beta}_1 \sum X_i^2$$

eşitlikleri elde edilir. Görüldüğü gibi bunlar EKK'deki normal denklemlerin aynısıdır. Dolayısıyla β_0 ve β_1 için EKK ve MO tahmincileri aynıdır. Zaten (2.4) incelendiğinde son terimin eksi işaretli olduğu görülür. Bu durumda (2.4)'ü maksimize etmek, bu terimi minimize etmekle aynı şeydir. Bu da EKK yaklaşımıdır. Bir başka ifade ile, farklı fikirlerden yola çıkarak, iki yöntem, aynı matematiksel yapıya ulaşırlar.

Fakat σ^2 'nin MO tahmincisi için aynı şey geçerli değildir.

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum (Y_i - \tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1 X_i)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum e_i^2\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi $\tilde{\sigma}^2$, σ^2 nin EKK tahmincisi $\hat{\sigma}^2$ (veya MSE)den farklıdır. $\hat{\sigma}^2$ 'nin sistematik hatasız bir tahminci olduğu önceki bölümlerde ifade edilmişti. Bu durumda MO tahmincisi sistematik hatalı olmaktadır.

$$\begin{aligned}E(\tilde{\sigma}^2) &= \frac{1}{n} E(\sum e_i^2) \\ &= \left(\frac{n-2}{n}\right) \sigma^2 \\ &= \sigma^2 - \frac{2}{n} \sigma^2\end{aligned} \tag{2.5}$$

Buradan görülmektedir ki, küçük örneklerde $\tilde{\sigma}^2$ aşağı doğru sapmalıdır (bir başka deyişle gerçek σ^2 değerini olduğundan küçük tahmin eder). Ama örneklem büyüklüğü n sonsuza doğru büyüdükçe (2.5)'deki ikinci terim olan sapma etmeni sıfıra yaklaşır. Bir başka deyişle, $\tilde{\sigma}^2$, asimptotik sistematik hatasızdır. Ayrıca $\tilde{\sigma}^2$ 'nin tutarlı bir tahminci olduğu da kanıtlanabilir. (Gujarati, 2001)

2.5 Basit Doğrusal Regresyonda Aralık Tahmini ve Hipotez Testi:

2.5.1 Parametreler için Güven Aralıkları:

Önceki bölümde β_0 ve β_1 'in

$$z = \frac{b_0 - \beta_0}{\sigma_{b_0}} \quad z = \frac{b_1 - \beta_1}{\sigma_{b_1}}$$

değişkenleri ile standart normal dağılım gösterdikleri belirtilmişti. Fakat güven aralıkları oluşturmada bunlardan faydalanılamaz. Bunun nedeni b_0 ve b_1 'in standart hatalarının görüldüğü gibi σ^2 'nin bilinmesini gerektirmesidir.

$$sh(b_0) = \sqrt{\sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x_i^2} \right)} \quad sh(b_1) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}}$$

σ^2 çoğu durumda bilinmez. Zaten bilinseydi örneklem çekmeye gerek kalmayacaktı. Bunun yerine onun tahmincisi olan $MSE(\hat{\sigma}^2)$ kullanılır. Fakat bu durumda örneklem kullanıldığı ve serbestlik derecesi kavramı işin içine girdiği için normal dağılım yerine serbestlik derecesi kullanan t (Student) dağılımı kullanılır. Bir başka deyişle, MSE kullanıldığı zaman b_0 ve b_1

$$t = \frac{b_0 - \beta_0}{\sqrt{MSE \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x_i^2} \right)}} \quad \text{ve} \quad t = \frac{b_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{MSE}{\sum x_i^2}}} \quad (2.6)$$

şeklinde n-2 serbestli derecesi ile t dağılımına uyan değişkenlere dönüştürülür.

Tüm bunlarla beraber parametreler için güven aralığı kurulmak istenirse t dağılımı şöyle kullanılır:

$$P(-t_{\alpha/2} \leq t \leq t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Buradaki t değeri, (2.6)'dan elde edilen t değeridir. $t_{\alpha/2}$ ise $\alpha/2$ anlamlılık düzeyinde n-2 serbestlik derecesinde t dağılımından bulunan t değeri olup, genellikle $\alpha/2$ anlamlılık düzeyindeki eşik t değeri adını alır. Parametreler için gösterilen (2.6)'daki t değerlerini yukarıda yerine koyarsak, daha açık bir ifade ile,

$$P(b_0 - t_{\alpha/2} sh(b_0) \leq \beta_0 \leq b_0 + t_{\alpha/2} sh(b_0)) = 1 - \alpha$$

$$P(b_1 - t_{\alpha/2} sh(b_1) \leq \beta_1 \leq b_1 + t_{\alpha/2} sh(b_1)) = 1 - \alpha$$

veya daha kısa şekilde,

$$b_0 \pm t_{\alpha/2} sh(b_0)$$

$$b_1 \pm t_{\alpha/2} sh(b_1)$$

şeklinde yazılır. Bu ifadeler, parametreler için %100.(1- α)'lık güven aralıklarını gösterir.

Hata payları varyansı için ise güven aralığı, normallik varsayımı altında

$$\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-2}^2$$

özelliğinden faydalanılarak

$$P(\chi_{1-\alpha/2}^2 \leq \chi^2 \leq \chi_{\alpha/2}^2) = 1 - \alpha$$

şeklinde yazılabilir. Daha açık biçimde,

$$P\left((n-2)\frac{MSE}{\chi_{\alpha/2}^2} \leq \sigma^2 \leq (n-2)\frac{MSE}{\chi_{1-\alpha/2}^2}\right) = 1 - \alpha$$

yazılabilir.

2.5.2 Parametreler için Hipotez Testi:

Regresyon parametrelerinin anlamlı olup olmadığı test edilmek istenebilir. Bu durumda hipotezler şu şekilde kurulur.

$$H_0: \beta_0 = 0 \quad H_0: \beta_1 = 0$$

$$H_1: \beta_0 \neq 0 \quad H_1: \beta_1 \neq 0$$

Eğer H_0 hipotezi reddedilirse parametrelerin anlamlı, diğer bir ifade ile, sıfırdan farklı olduğuna karar verilir. Burada karar kuralı şu şekildedir:

$$t_{test} = \frac{b_0 - \beta_0}{sh(b_0)} \quad t_{test} = \frac{b_1 - \beta_1}{sh(b_1)}$$

ve α önceden belirlenmiş anlamlılık düzeyi olmak üzere $t_{test} > t_{\alpha/2; n-2}$ ise H_0 red edilir (Gujarati, 2001). Burada β_1 'in testi, modelin test edilmesi anlamına gelmektedir.

Hata payları için hipotez testinde belirtilmesi gereken önemli bir nokta, hata paylarının diğer parametreler gibi 0'dan farklılığını test etmenin gereksiz olduğudur. Çünkü $H_0 : \sigma^2 = 0$ şeklinde bir hipotez ilişkinin determinist olduğunu iddia eder. Bu durumda hata payları, sıfırdan farklı belli bir değere göre test edilebilir (Genceli, 2001). Böyle bir testin özeti Çizelge 2.6'da verilmiştir.

Çizelge 2.6 σ^2 için χ^2 testi (Gujarati, 2001)

H_0	H_1	Red bölgesi
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} > \chi_{\alpha, sd}^2$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} > \chi_{1-\alpha, sd}^2$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} > \chi_{\alpha/2, sd}^2$ veya $< \chi_{(1-\alpha/2), sd}^2$

sd: serbestlik derecesi

2.5.3 Varyans Analizi (ANOVA) Tablosu:

Bir önceki bölümde anlatılan kareler ayrıştırması yaklaşımı ile ANOVA tablosu oluşturulabilir ve modelin anlamlılığı F testiyle test edilebilir. ANOVA veya varyans analizi, Y bağımlı değişkenine ilişkin değişkenlik ve serbestlik derecesinin kaynaklarına ayrılması ilkesine dayanmaktadır. Bilindiği gibi,

$$SST = SSR + SSE$$

dir. Burada SST, χ^2 dağılımına uyar ve serbestlik derecesi n-1'dir, çünkü örnek ortalaması \bar{Y} hesaplanırken 1 serbestlik derecesi kaybedilir. SSE ise n-2 serbestlik dereceli bir χ^2 dağılımına uyar. Burada da 2 serbestlik derecesi kaybedilmesinin sebebi 2 normal denklemden gelen 2 kısıttır (bu, tek bağımsız değişkenli doğrusal regresyon için geçerlidir). Aynı şekilde SSR'de

χ^2 dağılımına uyar ve serbestlik derecesi 1'dir, çünkü $SSR = b_1^2 \sum x_i^2$ olduğu ve $\sum x_i^2$ toplamı bilindiği için SSR yalnızca b_1 'in bir fonksiyonudur. Yukarıdaki ifadede olduğu gibi aynı eşitlik serbestlik dereceleri için de geçerlidir ($n-1 = n-2+1$).

SST, SSR ve SSE, kendi serbestlik derecelerine bölüldüğünde sırasıyla ortalamaları olan MST, MSR ve MSE elde edilir. Buna göre ANOVA tablosu aşağıdaki gibi olacaktır:

Çizelge 2.7 ANOVA tablosu

Değişim kaynağı	K. T. (kareler toplamı)	S. D. (serbestlik derecesi)	O. K. (ortalama kareler)
Regresyon	$SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$	1	MSR
Kalıntı	$SSE = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$	n-2	MSE
Toplam	$SST = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$	n-1	

Bilindiği gibi iki bağımsız χ^2 dağılımının oranı bir F dağılımını verir. Bu şekilde

$$MSR / MSE \sim F(1, n-2)$$

istatistiği ile test edilebilir. Kritik F değeri, tablo değerinden büyükse, modelin anlamsız olduğunu söyleyen H_0 hipotezi reddedilir.

Burada belirtilmesi gereken önemli bir nokta, $F_{test} = t_{test}^2$ ilişkisidir.

$$F_{test} = \frac{MSR}{MSE} = \frac{b_1^2 \sum x_i^2}{MSE} = \frac{b_1^2 \sum x_i^2}{sh^2(b_1) \sum x_i^2} = \left(\frac{b_1}{sh(b_1)} \right)^2 = t_{test}^2$$

Bilindiği gibi $\frac{b_1}{sh(b_1)}$ 'in t dağılımına uyan bir istatistik olduğuna daha önce değinilmişti. Buna göre, $F_{1,k} = t_k^2$ şeklinde ifade edilebilen teorem ile yukardaki ifadenin doğruluğu gösterilebilir.

2.5.4 Ortalama ve Tekil Değer Kestirimi:

Kestirim (prediction), bir olaya ilişkin geçmişteki ve şimdiki bilginin kullanılarak olay için sayısal tahmin yapılmasıdır. Belirli bir X değeri, örneğin X_0 'a karşılık bağımlı değişkenin anakütle regresyon doğrusu üzerinde bulunan ortalama değeri hakkında kestirimde bulunulabilir. Burada kestirilecek değer $E(Y | X_i=X_0)$ ile gösterilsin. Bunun tahmincisi, ÖRF ile şöyle gösterilir:

$$\hat{Y}_0 = b_0 + b_1 X_0$$

$\hat{Y}_0 = E(Y | X_0)$ 'ın doğrusal, minimum varyanslı, sistematik hatasız tahminci olduğu gösterilebilir. \hat{Y}_0 bir tahminci olduğuna göre, kendi gerçek değerinden farklı çıkması söz konusudur. Bu iki değer arasındaki fark, kestirim ya da tahmin hatasına ilişkin bir fikir verebilir. Bu hatanın büyüklüğünün saptanabilmesi için \hat{Y}_0 'ın örnekleme dağılımının bilinmesi gereklidir. \hat{Y}_0 'ın örnekleme dağılımı normal dağılımdır. Bu normal dağılımın ortalaması ve varyansı şöyle elde edilir:

$X_i=X_0$ veriyken, gerçek ortalamanın kestirimi şu şekilde bulunur,

$$E(Y_0 | X_0) = \beta_0 + \beta_1 X_0$$

dır ve buradan

$$\hat{Y}_0 = b_0 + b_1 X_0$$

X_0 veriyken yukardaki ifadenin beklenen değeri alınırsa,

$$\begin{aligned} E(\hat{Y}_0) &= E(b_0) + E(b_1)X_0 \\ &= \beta_0 + \beta_1 X_0 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$E(\hat{Y}_0) = E(Y_0 | X_0) = \beta_0 + \beta_1 X_0$$

yazılır. Buradan da, \hat{Y}_0 'ın, $E(Y_0 | X_0)$ 'nin sistematik hatasız tahmincisi olduğu görülür. \hat{Y}_0 'ın varyansı için

$$Var(\hat{Y}_0) = Var(b_0) + Var(b_1)X_0^2 + 2Cov(b_0, b_1)X_0$$

yazılabilir. b_0 ve b_1 'in kovaryansının

$$Cov(b_0, b_1) = -\bar{X}Var(b_1)$$

olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla b_0 ve b_1 'in varyans değerlerinin de konulması ile

$$Var(\hat{Y}_0) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum x_i^2} \right)$$

elde edilir. Bu durumda \hat{Y}_0 bulunan ortalama ve varyans değeri ile normal dağılıma uyar. Bilinmeyen σ^2 yerine tahmincisi konursa

$$t = \frac{\hat{Y}_0 - (\beta_0 + \beta_1 X_0)}{sh(\hat{Y}_0)}$$

biçimindeki t değişkeni, n-2 serbestlik derecesi ile t dağılımına uyar. Buna göre t dağılımı, gerçek $E(Y_0 | X_0)$ değerinin güven aralığını bulmakta ve hipotez testi yapmakta kullanılabilir. Buna göre,

$$P(b_0 + b_1 X_0 - t_{\alpha/2} sh(\hat{Y}_0) \leq \beta_0 + \beta_1 X_0 \leq b_0 + b_1 X_0 + t_{\alpha/2} sh(\hat{Y}_0)) = 1 - \alpha$$

yazılabilir.

Bunlarla beraber, verilmiş bir X değerine, örneğin X_0 'a, karşılık gelen tekil bir Y değeri, Y_0 kestirilmeye çalışılsın. Bir başka deyişle,

$$Y_0 = \beta_0 + \beta_1 X_0 + \varepsilon_0$$

bulunmak istensin. Bunun tahmini şu şekilde olacaktır:

$$\hat{Y}_0 = b_0 + b_1 X_0$$

Kestirim hatası $Y_0 - \hat{Y}_0$,

$$Y_0 - \hat{Y}_0 = (\beta_0 - b_0) + (\beta_2 - b_2)X_0 + \varepsilon_0 \quad (2.7)$$

şeklindedir. Bunun beklenen değeri ise,

$$\begin{aligned} E(Y_0 - \hat{Y}_0) &= E(\beta_0 - b_0) + E(\beta_2 - b_2)X_0 + E(\varepsilon_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olacaktır. Burada X_0 , sabit sayı ve varsayım gereği $E(\varepsilon_0) = 0$ 'dır. Şimdi (2.7)'nin her iki yanının karesi alınıp beklenen değeri alınsın.

$$Var(Y_0 - \hat{Y}_0) = Var(b_0) + X_0^2 Var(b_1) + 2X_0 Cov(b_0, b_1) + Var(\varepsilon_0)$$

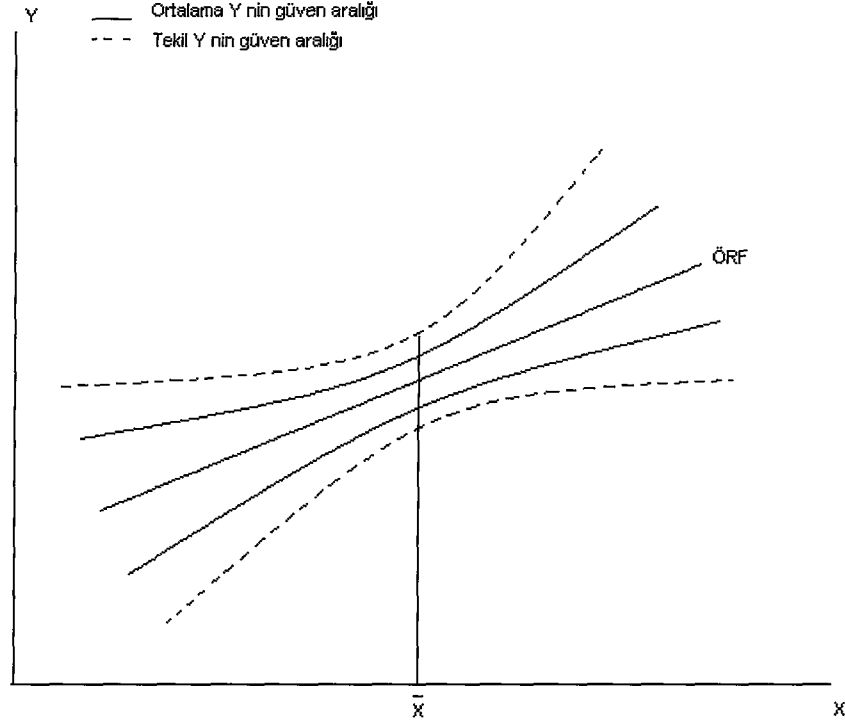
Formüldeki terimlerin değerleri yerine konup, düzenlenirse

$$Var(Y_0 - \hat{Y}_0) = \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum x_i^2} \right)$$

bulunur. Burada da bilinmeyen σ^2 yerine tahmincisi konursa

$$t = \frac{Y_0 - \hat{Y}_0}{sh(Y_0 - \hat{Y}_0)}$$

şeklinde tanımlanan değişken t dağılımına uyar ve bu dağılım, gerçek Y_0 'a ilişkin çıkarsama yapmada kullanılabilir. Oluşturulacak güven bantlarının görünümü Şekil 2.6'da verilmiştir.



Şekil 2.6 Ortalama Y ile tekil Y değerlerinin güven bantları

Görüldüğü gibi $X_0 = \bar{X}$ olduğunda bantlar en dar noktadadır. Çünkü bu değer için varyans ifadesi minimum olmaktadır. Ama X_0 , \bar{X} 'ten uzaklaştıkça, bantlar genişler. Bu da örneklem regresyonunun kestirim gücünün azalacağı anlamına gelir. Dolayısıyla, örneklem ortalaması \bar{X} 'den çok uzak bir X_0 'a ilişkin $E(Y | X_0)$ ya da Y_0 kestirimi için regresyon doğrusunu ileriye götürürken dikkatli olunmalıdır.

Ayrıca şu da belirtilmelidir ki ortalama Y ve tekil Y için test işlemlerine başvurulması gereksizdir. Çünkü β_0 ve β_1 anlamlı ise bunlar da anlamlı olacaktır (Gujarati, 2001).

2.6 Doğrusal Regresyon Modeline Matris Yaklaşımı:

p-1 değişkenli doğrusal regresyon modeli matris notasyonu ile kısaca şu şekilde gösterilir:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

Burada Y , $n \times 1$ 'lik gözlem vektörü, X , ilk sütunu 1'lerden oluşan $n \times p$ 'lik veri matrisi,

β ise $p \times 1$ boyutlu anakütle parametreleri vektörü ve ε ise $n \times 1$ boyutlu hata paylarını

gösteren vektördür. KDRM için yapılan tüm varsayımlar matris notasyonu ile şu şekilde özetlenebilir:

1. $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$ Burada $\mathbf{0}$ $n \times 1$ boyutlu 0 'lardan oluşan sıfır vektörüdür.
2. $E(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}$ Burada \mathbf{I} , $n \times n$ 'lik birim matristir.
3. $n \times n$ boyutlu \mathbf{X} matrisi, sabit sayısal değerlerden oluşur.
4. \mathbf{X} 'in rankı $\rho(\mathbf{X}) = p$ 'dir. Burada p , \mathbf{X} 'in sütun sayısı olup n 'den küçüktür. Bu, çoklu doğrusal bağlantı olmaması varsayımının ifadesidir.
5. $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$ 'dir.

SEKK tahmincisi vektörünü bulmak için

$$(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = S(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = \sum \varepsilon_i^2$$

şeklinde ifade edilebilen $S(\boldsymbol{\beta})$ 'nın önceki gibi parametre vektörüne göre türevi alınıp sıfıra eşitlenmelidir. $S(\boldsymbol{\beta})$, daha açık olarak

$$S(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\beta}} \Big|_{\boldsymbol{\beta}=\mathbf{b}} = -2\mathbf{X}'\mathbf{Y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{b} = 0$$

olur ve buradan

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{b} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

şeklindeki EKK normal denklemlerine ulaşılır. EKK tahmici vektörü ise

$$b = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

şeklinde elde edilir. Burada $(X'X)^{-1}$ 'in var olması gereklidir. Bu da açıklayıcı değişkenlerin doğrusal bağımsız olmasını, başka bir ifade ile, X 'teki sütunların hiçbirinin diğerlerinin doğrusal kombinasyonu olmamasını gerektirir.

Tahmin vektörü ise

$$\hat{Y} = X b = X (X'X)^{-1} X'Y = H Y$$

şeklinindedir. Burada $n \times n$ 'lik $H = X (X'X)^{-1} X'$, matrisi projeksiyon veya diğer bir adlandırmayla şapka matrisidir (tahmin yapmayı sağladığı için İngilizcede "hat matrix" olarak da adlandırılır). Bu matris, daha sonraki bölümlerde görüleceği üzere gözlem değerleri vektörü Y 'nin, tahmin uzayına projeksiyonunu sağlar ve böylece \hat{Y} elde edilir.

Kalıntı vektörü ise

$$e = Y - \hat{Y}$$

şeklinde olacaktır. Projeksiyon matrisi yardımıyla

$$e = Y - X b = Y - H Y = (I - H) Y$$

yazılabilir. Burada da Y vektörünün, projeksiyon matrisi yardımıyla kalıntı uzayına projeksiyonu sağlanır.

b 'nin varyans-kovaryans formülünü elde etmek için şöyle bir yol takip edilebilir:

$$b = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

de $Y = X \beta + \varepsilon$ yerine konursa

$$\begin{aligned}
b &= (X'X)^{-1} X'(X\beta + \varepsilon) \\
&= (X'X)^{-1} X'X\beta + (X'X)^{-1} X'\varepsilon \\
&= \beta + (X'X)^{-1} X'\varepsilon
\end{aligned}$$

çıkar. Dolayısıyla,

$$b - \beta = (X'X)^{-1} X'\varepsilon$$

Tanım gereği,

$$\begin{aligned}
\text{Var}(b) &= E((b - \beta)(b - \beta)') \\
&= E(((X'X)^{-1} X'\varepsilon)((X'X)^{-1} X'\varepsilon)') \\
&= E((X'X)^{-1} X'\varepsilon \varepsilon' X (X'X)^{-1})
\end{aligned}$$

dir. X'lerin olasılıklı olmadığı göz önüne alınarak bu beklenen değer

$$\begin{aligned}
\text{Var}(b) &= (X'X)^{-1} X' E(\varepsilon \varepsilon') X (X'X)^{-1} \\
&= (X'X)^{-1} X' \sigma^2 I X (X'X)^{-1} & E(\varepsilon \varepsilon') = \sigma^2 I \text{ varsayımından,} \\
&= \sigma^2 (X'X)^{-1}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada $\sigma^2 (X'X)^{-1}$ matrisi simetriktir ve matrisin köşegen elemanları, ilgili parametrelerin varyanslarını diğer elemanlar ise ilgili parametrelerin kovaryanslarını vermektedir.

SEKK Tahmincilerinin BLUE Özellikleri:

Bilindiği gibi

$$b = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

dir. $(X'X)^{-1} X'$ bir sabit sayılar matrisi olduğuna göre, b , Y'nin doğrusal bir fonksiyonudur. Öyleyse bu bir doğrusal tahmincidir. ARF'nin

$$Y = X \beta + \varepsilon$$

olduğu hatırlanırsa

$$b = \beta + (X'X)^{-1} X' \varepsilon$$

bulunur. b 'nin beklenen değeri alınır

$$E(b) = E(\beta) + (X'X)^{-1} X' E(\varepsilon) = \beta \quad E(\beta) = \beta \quad \text{ve} \quad E(\varepsilon) = 0 \quad \text{olduğundan}$$

bulunur. Bu da b 'nin sistematik hatasız tahminci olduğunu gösterir.

b 'nin aynı zamanda minimum varyanslı olduğunu görmek de kolaydır. β 'nin başka bir doğrusal tahmincisi b^* olsun. Bu da şöyle gösterilsin;

$$b^* = ((X'X)^{-1} X' + C) Y$$

Burada C , bir sabit terimler matrisidir. Yukarıdaki ifadede $Y = X \beta + \varepsilon$ yerine konursa

$$\begin{aligned} b^* &= ((X'X)^{-1} X' + C)(X \beta + \varepsilon) \\ &= \beta + C X \beta + (X'X)^{-1} X' \varepsilon + C \varepsilon \end{aligned}$$

Eğer b^* , β 'nin başka bir doğrusal tahmincisiyse ($E(b^*) = \beta$ çıkabilmesi için),

$$C X = 0$$

olmalıdır. Bu durumda b^*

$$b^* - \beta = (X'X)^{-1} X' \varepsilon + C \varepsilon$$

olur. Tanım gereği

$$E((b^* - \beta)(b^* - \beta)') = E(((X'X)^{-1}X'\epsilon + C\epsilon)((X'X)^{-1}X'\epsilon + C\epsilon)')$$

Matrisin tersi ve transpozesi özelliklerinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} \text{Var}(b^*) &= \sigma^2(X'X)^{-1} + \sigma^2 C C' \\ &= \text{Var}(b) + \sigma^2 C C' \end{aligned}$$

bulunur. $C C'$, pozitif yarı-belirli (semi-definite) bir matristir. Öyleyse b^* 'nın belli elemanlarının varyansları, b 'nin aynı elemanına eşit ya da ondan daha büyük olmak zorundadır. Bu da b 'nin BLUE olduğunu gösterir. Eğer C boş bir matris ise o zaman zaten $b = b^*$ olacaktır (Gujarati, 2001).

σ^2 'nin tahmincisi MSE matris notasyonu ile şu şekilde gösterilebilir:

$$MSE = \frac{SSE}{n-p} = \frac{Y'Y - b'X'Y}{n-p}$$

Bu σ^2 'nin EKK tahmincisidir. MO tahmincisi ise $\frac{Y'Y - b'X'Y}{n}$ şeklinde olup, sistematik hatalıdır.

Matris gösterimiyle kareler ayrıştırması şu şekildedir:

$$SST = Y'Y - n\bar{Y}^2$$

$$SSR = b'X'Y - n\bar{Y}^2 \quad SST = SSR + SSE$$

$$SSE = Y'Y - b'X'Y$$

Ve çoklu belirlilik katsayısı R^2

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\mathbf{b}' \mathbf{X}' \mathbf{Y} - n\bar{Y}^2}{\mathbf{Y}' \mathbf{Y} - n\bar{Y}^2}$$

şeklinde olacaktır.

2.6.1 Hipotez Testleri:

$\mathcal{E} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$ özelliğinin bir sonucu olarak $\mathbf{b} \sim N(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1})$. Uygulamada σ^2 bilinmediğinden MSE kullanılır ve bu şekilde t dağılımı parametreleri test etmede kullanılabilir. Regresyon modelinin bütünüünün anlamlılığı test edilmek istenirse ANOVA tablosu, matris notasyonunda şu şekli alır.

Çizelge 2.8 ANOVA tablosunun matris notasyonu ile gösterilişi

Değişim kaynağı	K. T.	S. D.	O. K.
Regresyon	$SSR = \mathbf{b}' \mathbf{X}' \mathbf{Y} - n\bar{Y}^2$	p-1	$MSR = \mathbf{b}' \mathbf{X}' \mathbf{Y} - n\bar{Y}^2 / (p-1)$
Kalıntı	$SSE = \mathbf{Y}' \mathbf{Y} - \mathbf{b}' \mathbf{X}' \mathbf{Y}$	n-p	$MSE = \mathbf{Y}' \mathbf{Y} - \mathbf{b}' \mathbf{X}' \mathbf{Y} / (n-p)$
Toplam	$SST = \mathbf{Y}' \mathbf{Y} - n\bar{Y}^2$	n-1	$MST = \mathbf{Y}' \mathbf{Y} - n\bar{Y}^2 / (n-1)$

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{p-1} = 0$ hipotezi

$$F^* = \frac{MSR}{MSE}$$

test istatistiğiyle test edilebilir. $F^* > F_{\text{tablo}}$ ise H_0 reddedilir.

Doğrusal kısıtlamaların testi ise, matris gösteriminde şu istatistik ile test edilir:

$$F^* = \frac{\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_R - \mathbf{e}_F \cdot \mathbf{e}_F}{sd_R - sd_F} / \frac{\mathbf{e}_F \cdot \mathbf{e}_F}{sd_F}$$

Burada \mathbf{e}_F kısıtlanmamış modelin kalıntı vektörü, \mathbf{e}_R ise kısıtlanmış modelin kalıntı vektörünü göstermektedir.

2.6.2 Güven Sınırları:

Parametre tahminci vektörünün varyans-kovaryans matrisinden elde edilen standart hata ifadeleri ile ve t dağılımından faydalanarak parametreler için bilinen şekliyle güven sınırları oluşturulabilir.

Bunun yanında çok değişkenli doğrusal regresyon modelindeki parametreler için ortak güven bölgesi de oluşturulabilir.

$$\frac{(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta})' (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta})}{pMSR} \sim F_{p, n-p}$$

özelliğinden tüm parametreler için %100(1- α) güven bölgesi

$$\frac{(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta})' (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta})}{pMSR} \leq F_{\alpha; p, n-p}$$

şeklinde yazılır. Ayrıca ortak güven aralığı oluşturmada Bonferroni Yaklaşımı da kullanılabilir. Buna göre,

$$b_j \pm t_{\alpha/2p; n-p} \cdot sh(b_j)$$

yazılabilir. Fakat burada her Bonferroni güven aralığı, $1-\alpha$ yerine, $1-\alpha/p$ güven katsayısına sahip olacaktır. Güvenlik bölgesi (elipsi) her zaman daha etkin bir yöntemdir, çünkü elipsin hacmi, Bonferroni aralıklarının içerdiği uzayın hacminden her zaman daha küçüktür. Ama buna karşın Bonferroni aralıklarını oluşturmak diğerine göre daha kolaydır (Montgomery vd., 2001).

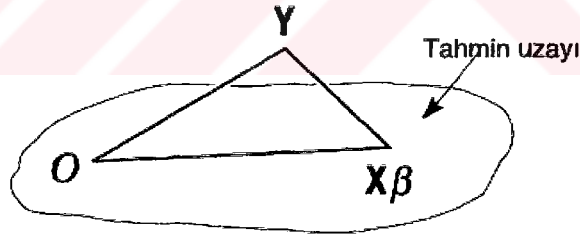
3. DOĞRUSAL EKK GEOMETRİSİ

3.1 Doğrusal EKK Geometrisi Hakkında Ön Bilgi:

Bilindiği gibi doğrusal bir model genel biçimde şu şekilde gösterilebilir:

$$Y = X \beta + \varepsilon$$

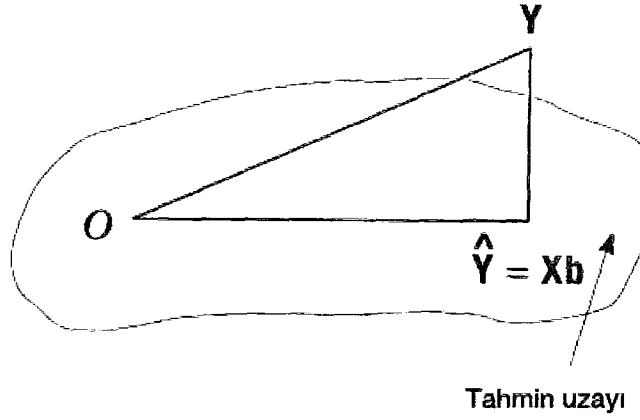
Burada, Y ve ε $n \times 1$ boyutlu, X $n \times p$ boyutlu ve β ise $p \times 1$ boyutludur. S olarak adlandırılacak n boyutlu öklidyen bir uzay göz önüne alınsın. Y 'nin Y_1, Y_2, \dots, Y_n bileşenleri bu n boyutlu uzayda Y noktasını belirtirler. Bununla beraber, X in her p sütunu doğrusal bağımsızdır, bir başka deyişle, birbirlerinin lineer kombinasyonu olarak ifade edilemezler. Bu $X'X$ 'in tekil(singular) olmadığını gösterir. Bu durumda X $p < n$ boyutlu bir alt uzay tanımlar. Bu alt uzaya 'tahmin uzayı' denir. X_i , $n \times 1$ boyutlu bir vektör ve β_i 'ler de birer



Şekil 3.1 Tahmin uzayındaki genel bir $X \beta$ noktası (Draper ve Smith, 1998)

skaler olduklarına göre $X \beta$, tahmin uzayında bir vektör olacaktır. Şekil 3.1'e bakılırsa O, orijin olmak üzere O , Y ve $X \beta$ 'nin, açıları, β_i 'lere göre değişen bir üçgen oluşturdukları görülür. Bu üçgenin kenarları, Y , $X \beta$ ve $\varepsilon = Y - X \beta$ vektörlerinden oluşur. Bu durumda, görüleceği üzere, Y vektörü tahmin uzayında olan

$X\beta$ ve genelde bu uzayda olmayan $\epsilon = Y - X\beta$ vektörlerinin bileşkesi olarak gösterilebilir. EKK yöntemi $Q(\beta) = \epsilon'\epsilon$ 'nın minimum olmasını gerektirir.



Şekil 3.2 Dik açılı, Y , Xb ve e vektörlerinden oluşan üçgen (Draper ve Smith, 1998)

Şekil 3.2'de görüldüğü gibi, Y noktasından tahmin uzayına en küçük uzaklık, Y 'den bu uzaya inilen diktir. Bundan dolayı $Q(\beta) = e'e$ 'yi en küçük yapan b tahmincileri yolu ile hesaplanan Xb ile e nin, ortogonal(dik) olması gerekmektedir. İki vektörün ortogonal olması için; $p'q=0=q'p$ olması gerekmektedir. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 &= (Xb)' \cdot e = b' X e \\ &= b' X (Y - Xb) \\ &= b' (X Y - X' X b) \end{aligned}$$

olacaktır. Ortogonalite için iki durum vardır. Ya $b = 0$ olacak ve dolayısıyla $\hat{Y} = 0$ olacak; ya da $X Y - X' X b = 0$ olacaktır ki bu da parametreler için EKK tahmincilerini veren formülü verir. Şekil 3.2'deki dik üçgende Pisagor Teoremi yardımı ile

$$Y'Y = \hat{Y}'\hat{Y} + (Y - Xb)'(Y - Xb)$$

bir başka ifade ile

$$SST = SSR + SSE$$

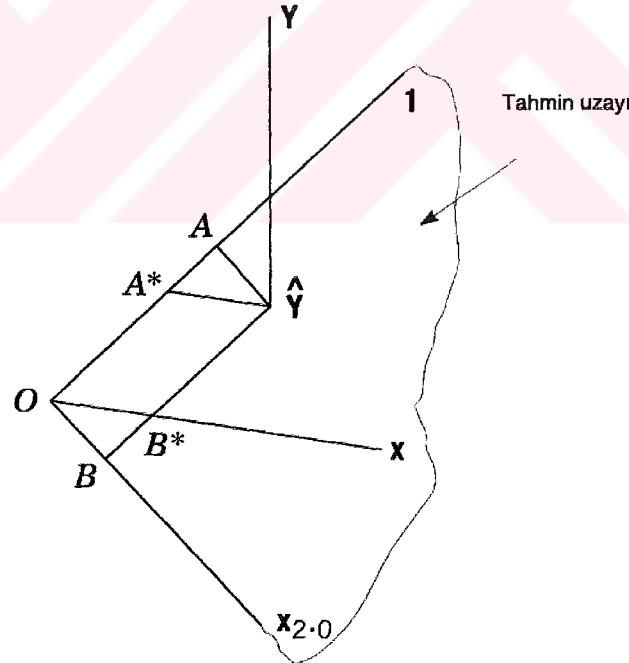
yazılabilir. İlgili serbestlik derecesi ise

$$n = p + (n - p)$$

şeklinde yazılır. Buna göre, n boyutlu S uzayı, p boyutlu tahmin uzayı ve $n - p$ boyutlu hata uzayı şeklinde iki ortogonal uzaya ayrılabilir.

X 'teki vektörleri ortogonalleştirme:

$X = (\mathbf{1}, \mathbf{x})$ olduğunu kabul edilsin. X teki vektörlerin karşılıklı (mutually) ortogonal olmadıkları durum için SSR'nin bileşenlerine ayrılması istenebilir. Bunun için ortogonalizasyon sürecine ihtiyaç vardır. Şekil 3.3, $\mathbf{x}_0 (= \mathbf{1})$ ve \mathbf{x} gibi iki vektörün $\mathbf{1} \cdot \mathbf{x} \neq 0$ olduğu durumu göstermektedir.



Şekil 3.3 İkinci bir açıklayıcı değişkenin $\mathbf{1}$ 'e göre ortogonalizasyonu (Draper ve Smith, 1998)
İlk önce başlangıç olarak bir vektör alınacak ($\mathbf{1}$ seçilecektir, fakat diğeri de alınabilir) ve \mathbf{x}_0 oluşturulacaktır. Bunun için kalıntıların, tahmin değerlerine ortogonal olduğu sonucu kullanılacaktır ($\sum e_i \hat{Y}_i = 0$).

x 'i bağımlı değişken olarak düşünüp $\mathbf{1}$ e göre regresyon modeli oluşturulduğunda katsayılar $b = (X'X)^{-1} \cdot (X'Y) = (\mathbf{1}'\mathbf{1})^{-1} \cdot (\mathbf{1}'x) = \bar{x}$ olacaktır. Buradan,

$$x_0 = x - \bar{x}\mathbf{1}$$

yazılırsa, $x_0' \cdot \mathbf{1} = 0$ olur ve iki vektör ortogonal olur. Orijinal regresyon modeli

$$\hat{Y} = b_0\mathbf{1} + b_1x \quad (3.1)$$

dir. Burada

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = (X'X)^{-1} \cdot (X'Y)$$

dır. Ortogonalize regresyon eşitliği

$$\hat{Y} = \bar{Y} \cdot \mathbf{1} + b_1 \cdot x_0 \quad (3.2)$$

şeklindedir. (3.1) ve (3.2), $O\hat{Y}$ vektörünün iki ayrı gösterimidir. \hat{Y} vektörü hem ortogonal olmayan $OA^* + OB^*$ ile , hem de ortogonal olan $OA + OB$ ile gösterilebilir. Her iki gösterim de geçerlidir; fakat yalnızca ikincisi, $O\hat{Y}^2$ 'nin $OA^2 + OB^2$ olarak ayrılmasına (Pisagor Teoremi) olanak sağlar. Burada geometrik olarak gösterilmek istenen şey, aslında cebirsel olarak bilinen bir durumdur. X 'teki vektörler karşılıklı olarak ortogonal olduğunda, açıklayıcı değişkenler arasında korelasyon 0 olmakta ve

$$SSR(X_2 | X_1) = SSR(X_2) \text{ veya } SSR(X_1 | X_2) = SSR(X_1)$$

yazılabilmektedir. Dolayısıyla,

$$SSR(X_1, X_2) = SSR(X_1) + SSR(X_2)$$

olmaktadır.

ANOVA ve regresyon için F testi:

Modelin $Y = \beta_0 \mathbf{1} + \beta_1 x + \varepsilon$ ve $\mathbf{1}'x \neq 0$ olduğu Şekil 3.3'teki durum ele alınsın. Bu durumda ANOVA tablosu Çizelge 3.1'deki gibi olur.

Çizelge 3.1 Şekil 3.3 için ANOVA tablosu (Draper ve Smith, 1998)

Kaynak	K.T.	s.d	K.O.	F
b_0	OA^2	1	OA^2	
b_1/b_0	OB^2	1	OB^2	$\frac{OB^2/1}{Y\hat{Y}^2/(n-2)}$
kalıntı	$Y\hat{Y}^2$	n-2		
Toplam	$OY^2 = Y'Y$	n		

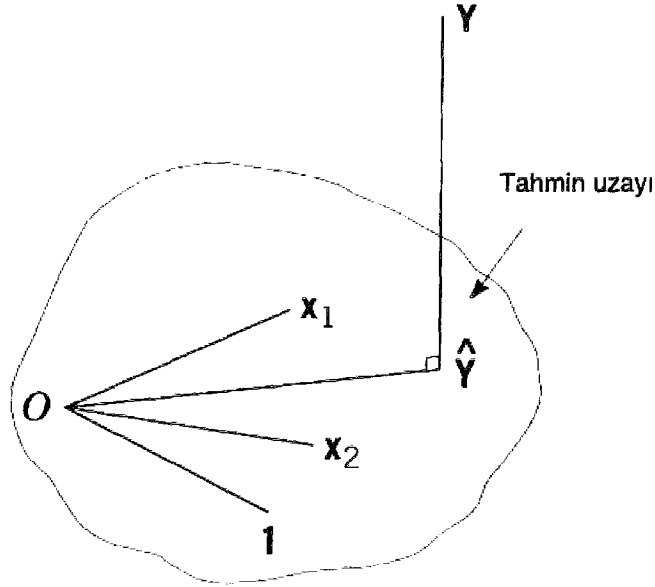
$$H_0: \beta_1 = 0$$

$$H_1: \beta_1 \neq 0$$

şeklindeki bir hipotez için F testi , basitçe, OB'nin kendi serbestlik derecesindeki uzunluğunun karesinin, $Y\hat{Y}^2$ 'nin kendi serbestlik derecesindeki uzunluğunun karesine oranı şeklinde olacaktır.

Tekil $X'X$ durumu:

Tahmin uzayının Şekil 3.4'teki gibi bir düzlem ile gösterildiği ve $X = (\mathbf{1}, x_1, x_2)$ olduğu kabul edilsin.



Şekil 3.4 Üç vektör tarafından tanımlanan iki boyutlu tahmin uzayı (Draper ve Smith, 1998)

Açıkça görülmektedir ki $|X'X| = 0$ olacaktır. Çünkü X teki 3 vektör aynı düzlemde olduklarından doğrusal bağımlı olacaklardır. Bir başka deyişle, eğer herhangi iki vektörün, düzlemi tanımladığı varsayılırsa, üçüncü vektör diğer ikisinin doğrusal kombinasyonu olacaktır. Genelde, bu durum için EKK çözümü olmadığı düşünülür. Çünkü $(X'X)^{-1}$ var olmayacaktır. Fakat Şekil 3.4'ten görülmektedir ki, sadece bir çözüm var olmakla kalmaz, ayrıca bu çözüm her zaman tektir. Başka bir ifadeyle, tahmin uzayına, \hat{Y} 'da bir dik indirilebilir ve \hat{Y} tektir ve tek bir $Y - \hat{Y}$ vektörü elde edilir ki bu da tahmin uzayına diktir ve X 'in tüm sütunlarına diktir. Burada tek olmayan şey ise $1, x_1, x_2$ ile \hat{Y} 'nın ifadesidir. Bir çok taban vektörü olabileceği için (şekilde bir tane), \hat{Y} 'yi tanımlayan sonsuz sayıda yol vardır. Normal denklemler var olabilir ve çözülebilir. Fakat parametre tahmini için çözüm tek olmayacaktır.

Genel durum için ortogonalleştirme:

$Y = X\beta + \epsilon$ modelinde $X = (Z_1, Z_2)$ şeklinde genelde ortogonal olmayan iki bileşene ayrılmış olsun. Ve $\beta' = (\theta_1', \theta_2')$ olsun. Bu durumda

$$Y = Z_1\theta_1 + Z_2\theta_2 + \varepsilon$$

yazılabilir. Bu modelin sadece $Z_1\theta_1$ bölümü için model uydurulursa,

$$\hat{Y} = Z_1(Z_1'Z_1)^{-1}(Z_1'Y) = P_1Y$$

Burada P_1 projeksiyon matrisidir. Bir başka deyişle Y vektörünün, Z_1 sütunu ile tanımlanan tahmin uzayına izdüşümünü alan matristir. Kalıntı vektörü ise $e = Y - \hat{Y} = (I - P_1)Y$ dir. \hat{Y} ile e 'nin ortogonal olduğu açıktır:

$$\hat{Y}'e = Y'P_1'(I - P_1)Y = Y'(P_1' - P_1'P_1)Y = 0$$

Çünkü P_1 simetrik ($P_1' = P_1$) ve idempotenttir ($P_1^2 = P_1$). Z_2 matrisi Z_1 'e ortogonalleştirildiğinde ($Y - \hat{Y}$ 'ye benzeterek)

$$\begin{aligned} Z_{2.1} &= Z_2 - \hat{Z}_2 \\ &= (I - P_1)Z_2 \\ &= Z_2 - Z_1(Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'Z_2 \\ &= Z_2 - Z_1A \end{aligned}$$

A 'ya burada çoğu zaman sapma(bias) matrisi denir.

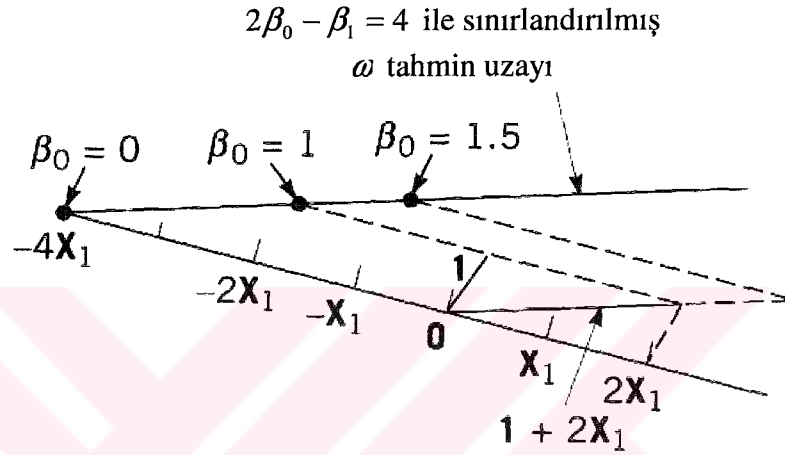
Bir H_0 hipotezinin geometrisi ile ilgili örnek:

$Y = \beta_0 + \beta_1X + \varepsilon$ şeklindeki modelin, n gözlemlili örneklemeden, $n \times 1$ 'lik Y ve X_1 vektörleri ile tahmin edildiği düşünölsün. Matris terimleri ile $Y = X\beta + \varepsilon$ şeklinde yazılır. Beklenen değeri ise,

$$X\beta = (1, X_1) \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \beta_0 \mathbf{1} + \beta_1 X_1 \quad (3.3)$$

şeklindedir. Tahmin uzayı Ω , $\mathbf{1}$ ve \mathbf{X}_1 tarafından gerilen bir düzlemdir. $H_0: \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$ şeklinde doğrusal bir hipotezin test edileceği düşünölsün. Burada \mathbf{A} , $q \times p$ boyutlu ($q < p$) ve satırları doğrusal bağımsız olan bir matristir. $\boldsymbol{\beta}$ ise $p \times 1$ boyutlu vektör ve \mathbf{c} ise $q \times 1$ boyutlu sabitlerden oluşan bir vektördür. \mathbf{X} ise $n \times p$ 'lik ve rankı p olan bir matristir.

$\mathbf{A} = (2, -1)$ ve $\mathbf{c} = 4$ olduğu varsayölsün.



Şekil 3.5 Tahmin uzayı Ω , $\mathbf{1}$ ve \mathbf{X}_1 tarafından gerilen bir düzlemdir. $2\beta_0 - \beta_1 = 4$ ile sınırlandıröldüğünde, tahmin uzayı ω , $\mathbf{1} + 2\mathbf{X}_1$ 'e paralel fakat $-4\mathbf{X}_1$ uzunluğunda ötelenmiş bir doğru olacaktır (Draper ve Smith, 1998).

Bu durumda $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$, $2\beta_0 - \beta_1 = 4$ olacaktır. $p=2$ ve $q=1$ olduğu görölmektedir. Bu ifade (3.3)'te, β_1 için yerine konulursa,

$$\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \beta_0(\mathbf{1} + 2\mathbf{X}_1) - 4\mathbf{X}_1$$

olur. Şekil 3.5'de gösterildiği gibi, bu model için ω tahmin uzayı, sabit vektör $4\mathbf{X}_1$ ve değişken uzunluk vektörü $\beta_0(\mathbf{1} + 2\mathbf{X}_1)$ 'in birleştirilmesiyle taranan bir doğrudur. Buradaki üç siyah nokta ω 'da $\beta_0 = 0, 1$ ve 1.5 değerlerini göstermektedir. Açıkça görölmektedir ki ω , Ω 'nın parçasıdır. $\Omega - \omega$ uzayı, Ω daki, hepsi ω 'ya dik olacak herhangi vektör kümesi tarafından gerilebilir. Örnek için $p=2$ ve $q=1$ 'dir. Dolayısıyla böyle bir vektör bir tanedir. Eğer (3.3)'te β_1 'in ifadesi yazılırsa, ω yı geren vektör için

$$u = \beta_0 \mathbf{1} + (2\beta_0 - 4) X_1$$

ve $\Omega - \omega$ yı geren ortogonal vektör için

$$(u' X_1) \mathbf{1} - (u' \mathbf{1}) X_1$$

yazılabilir.

Genel durum $H_0: A \beta = c$: Projeksiyon cebri:

β^* , $A \beta^* = c$ yi sağlayan herhangi bir sayısal değer olsun. Model aşağıdaki şekilde yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned} Y - X \beta^* &= X (\beta - \beta^*) + \varepsilon \\ &= X \theta + \varepsilon \end{aligned}$$

ve yeni parametre vektörü θ için,

$$A \theta = A \beta - A \beta^* = A \beta - c = 0$$

$A \theta = 0$ ifadesi, şu şekilde de yazılabilir:

$$A (X' X)^{-1} X' (X \theta) = 0$$

Bu şunu daha açık hale getirir ki p-q boyutlu ω uzayında tüm $X \theta$ noktaları, $n \times q$ 'luk

$$U = X (X' X)^{-1} A'$$

matrisinin sütunlarına ortogondur. Bu da q boyutlu $\Omega - \omega$ uzayının \bar{U} 'nun sütunları ile tanımlandığı anlamına gelir. Bundan dolayı $\Omega - \omega$ için tek projeksiyon matrisi

$$P_1 = U (U' U)^{-1} U' = X (X' X)^{-1} A' (A (X' X)^{-1} A)^{-1} A (X' X)^{-1} X'$$

ile verilir. Çünkü,

$$P = P_\Omega = X (X' X)^{-1} X'$$

matrisi Ω için tek projeksiyon matrisidir. ω için matris

$$P_\omega = P - P_1 \quad \text{'dir.} \quad (3.4)$$

$Y - X \beta^*$ 'nın (3.4) yardımıyla izdüşümü alındığında

$$P_\omega Y - P_\omega X \beta^* = P Y - P X \beta^* - P_1 (Y - X \beta^*) \quad (3.5)$$

elde edilir. Burada şunların belirtilmesi gerekir:

- i) $P_\omega Y = X b_H$ burada b_H, β^* 'nın sınırlandırılmış ω uzayındaki EKK tahmincisidir.
- ii) $P_\omega X \beta^* = X \beta^* = c$ 'dir. Çünkü zaten ω 'da olan bir vektörün ω 'ya izdüşümü, kendisini verir.
- iii) $P Y = X b$ 'dir. Burada $b = (X' X)^{-1} \cdot (X' Y)$ bilinen (sınırlanmamış) EKK tahmincisidir.
- iv) $P X \beta^* = X \beta^* = c$ ii)'ye benzer olarak
- v) $P_1 (Y - X \beta^*) = X (X' X)^{-1} A' (A (X' X)^{-1} A)^{-1} (A b - c)$

Bu eşitlikler (3.5)'te yerine konularak, iki c yok edilirse ve $(X' X)^{-1} X'$ ile çarpılıp X sadeleştirilirse, $A \beta = c$ şeklinde kısıtlandırılmış EKK tahmin vektörü

$$b_H = b - X (X' X)^{-1} A' (A (X' X)^{-1} A')^{-1} (A b - c)$$

elde edilir.

Burada b , X 'e, A 'ya ve $A b$ 'nin c 'ye olan uzaklığına bağlı olarak düzeltilmektedir.

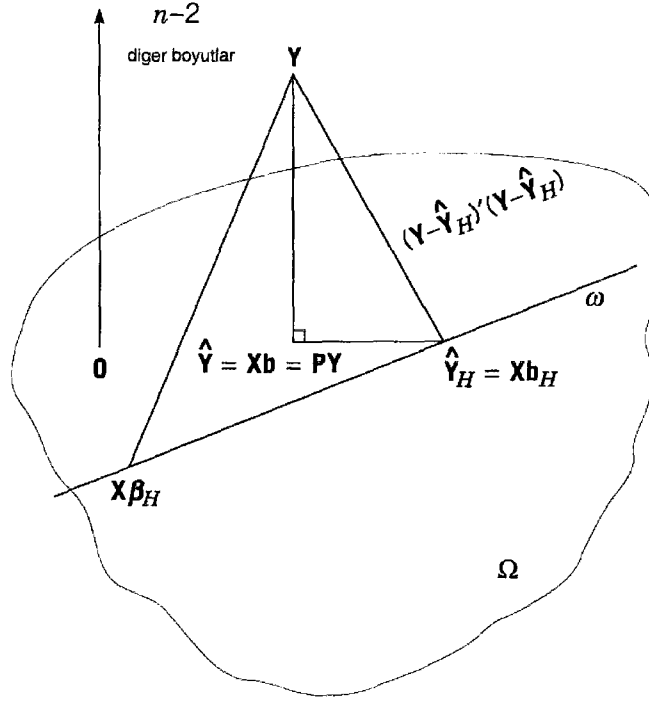
Ayrıca şu özelliklere değinmek gerekir ki ; bu üç projeksiyon matrisi, simetrik ve idempotenttir. Ayrıca ,

$$(a) P P_\omega = P_\omega = P_\omega P$$

$$(b) P P_1 = P_1 = P_1 P$$

$$(c) P_\omega P_1 = 0 = P_1 P_\omega$$

Geometrik olarak (a) bir Y vektörü önce ω 'ya sonra Ω 'ya, ya da önce Ω 'ya sonra ω 'ya izdüşüldüğünde ω 'da kalır. (b) benzer şekilde (c) $P_\omega P_1 = P_1 (P - P_1) = P_1 P - P_1^2 = P_1 - P_1 = 0$ şeklinde yazılarak ispatlanabilir. Buna göre, Ω 'nın iki alt uzaya ayrılması, $A \beta = c$ ile oluşturulan ω ve $\Omega - \omega$, ortogonal bir ayrılımadır.



Şekil 3.6 $n \geq 3$, $p=2$ ve $q=1$ durumu. $A\beta = c$ 'nin geometrisi (Draper ve Smith, 1998)

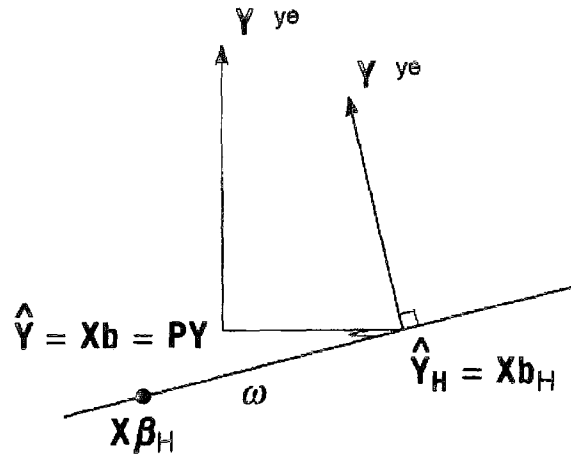
Şekil 3.6'da $n \geq 3$, $p=2$ ve $q=1$ için durum görülmektedir. Şeklin taban düzlemi Ω , X 'teki iki vektör tarafından tanımlanmıştır(Burada özel olarak gösterilmemiştir). ω uzayı bir doğrudur(gösterildiği şekilde) ve $\Omega - \omega$ uzayı dik bir doğrudur(gösterilmemiştir). Şeklin dikey boyutu diğer $(n-2)$ boyutu temsil etmektedir. $\hat{Y} = Xb$ ve $\hat{Y}_H = Xb_H$, sırasıyla Ω ve ω 'daki sınırlandırılmamış ve sınırlandırılmış EKK noktalarıdır. Buna ek olarak, ω 'da genel bir $X\beta_H$ noktası gösterilecektir. Hipotezden kaynaklanan kareler toplamı, $SS(H_0)$, \hat{Y} ile \hat{Y}_H arasındaki uzaklığın karesidir. Pisagor Teoremi yardımıyla,

$$SS(H_0) = (Y - \hat{Y}_H)'(Y - \hat{Y}_H) - (Y - \hat{Y})'(Y - \hat{Y})$$

Bir başka deyişle, iki kalıntı kareleri toplamı arasındaki farktır. Eğer $c = 0$ olursa (ω , orijin O yu içerir, fakat Şekil 3.5'teki gibi değil),

$$SS(H_0) = \hat{Y}'\hat{Y} - \hat{Y}'_H\hat{Y}_H$$

şeklinde de yazılabilir.



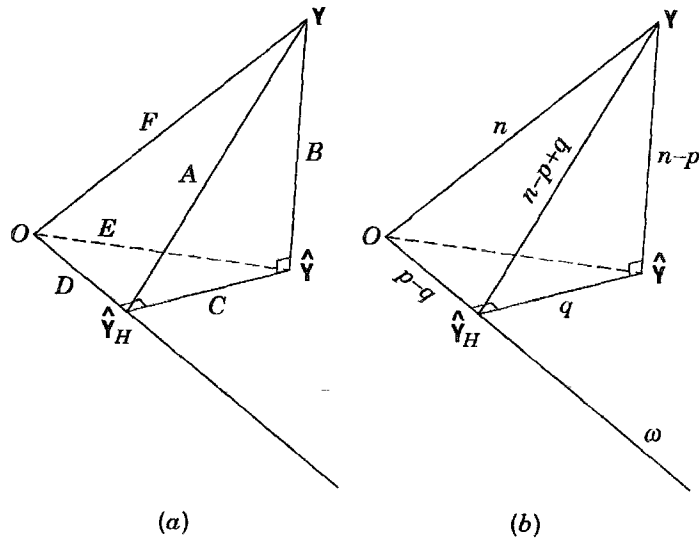
Şekil 3.7 $n>3$, $p=3$ ve $q=1$ durumu. $A \beta = c$ 'nin geometrisi (Draper ve Smith, 1998)

Şekil 3.7, $n>3$, $p=3$ ve $q=1$ için durumu göstermektedir. $\hat{Y} = X b$ noktası 3 boyutlu Ω uzayındadır. $\hat{Y}_H = X b_H$, taban düzlemi ω 'da yer almaktadır. Şekilde gösterilememesine karşın, bu iki noktadan Y 'ye giden doğrular, ilgili uzaylara diktirler. \hat{Y} ve \hat{Y}_H noktalarını içeren doğru da ($\Omega - \omega$ uzayındaki), ω 'ya ortogondur.

H_0 için F testinin geometrik açıklaması:

F testi şu orana dayanır:

$$F = (SS(H_0)/q) / s^2$$



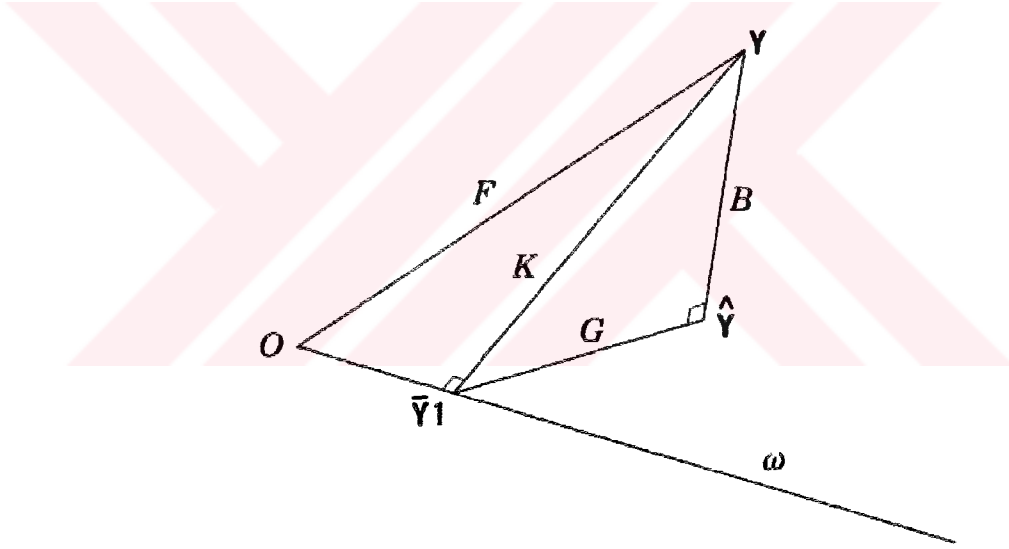
Şekil 3.8 $H_0: A\beta = c$ için F testinin geometrisi a) vektörlerin uzunlukları b) vektörlerin buldukları boyutlar (uzayların serbestlik dereceleri) (Draper ve Smith, 1998)

Burada s^2 , tam modeldeki kalıntıları göstermektedir. Uygun serbestlik dereceleri $(q, n-p)$ 'dir. Şekil 3.8, Şekil 3.7'nin yalınlaştırılmış şeklidir. Şekil 3.8a'da A B C D E ve F uzunlukları gösterilmektedir. Bu vektörlerin buldukları boyutlar, genel durum için, Şekil 3.8b'de gösterilmiştir. Bu durumda

$$F = (C^2 / q) / (B^2 / (n - p))$$

olacaktır. Bu ise, serbestlik derecelerinde C^2 ve B^2 'nin karşılaştırılmasıdır. $A\beta = c$ hipotezi, F küçük olduğunda red edilmeyecek, büyük olduğunda ise reddedilecektir.

R^2 'nin geometrisi:



Şekil 3.9 $R^2 = G^2 / K^2$ 'nin geometrisi (Draper ve Smith, 1998)

Şekil 3.9, Şekil 3.8'in genel görünümüdür. Aslında bu şekil, başlangıç modelinin

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \dots + \beta_{p-1} X_{p-1} + \varepsilon$$

olduğu ve $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{p-1} = 0$ şeklindeki hipotezin test edildiği durumu göstermektedir. Bundan dolayı kısıt $A\beta = c$, şu hale gelir:

$$[0, I_{p-1}] \beta = 0$$

İndirgenmiş model sadece $Y = \beta_0 + \varepsilon$ veya $Y = I \beta_0 + \varepsilon$ 'dur öyle ki, ω , $n \times 1$ 'lik $\mathbf{1}$ vektörü ile tanımlanır. Buradan $\hat{Y}_H = \bar{Y} \cdot \mathbf{1}$ olur. R^2 istatistiği, Şekil 3.9'dan şu şekilde tanımlanır:

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y}_i)^2}{\sum (Y_i - \bar{Y}_i)^2} = \frac{(\hat{Y} - \bar{Y} \mathbf{1})' (\hat{Y} - \bar{Y} \mathbf{1})}{(Y - \bar{Y} \mathbf{1})' (Y - \bar{Y} \mathbf{1})} = \frac{G^2}{K^2}$$

$B=0$ olduğunda,

$$R^2=1$$

ve $G=0$ olduğunda,

$$R^2=0$$

özel durumları oluşur.

3.2 Doğrusal EKK'in Örneklem Uzayı ve Parametre Uzayı Yardımıyla Açıklanması:

Doğrusal olmayan problemlerde iteratif yöntemlerin neden her zaman başarılı olmadığını anlamak için her şeyden önce doğrusal EKK'in geometrik yorumunu anlamak gerekir. Bilindiği gibi doğrusal model genel olarak

$$Y = X \beta + \varepsilon$$

şeklinde gösterilebilir. EKK yüzeyi bu durumda şu şekilde yazılabilir:

$$Q(\beta) = \sum_{i=1}^n \left[Y_i - \sum_{k=1}^p \beta_k X_{ki} \right]^2$$

Yukarıdaki ifadede, $X_{1i} = 1$ alınırsa, β_0 sabit terimi elde edilebilir. Bu ifade matris notasyonu ile yazılır ve düzenlenirse

$$= (Y - X \beta)' (Y - X \beta)$$

$$= Y'Y - 2\beta' X'Y + \beta' X'X \beta$$

elde edilir. SSR, $b' X'Y$ olarak yazılabilir ve kalıntı kareleri toplamı SSE, bu durumda,

$$Y'Y - b' X'Y$$

olur. b , normal denklemleri sağladığı sürece

$$S(b) = Y'Y - 2b' X'Y + b' X'X b$$

$$= Y'Y - b' X'Y - b' (X'Y - X'X b)$$

$$= Y'Y - b' X'Y$$

olur. $S(b)$, $S(\beta)$ 'nin en küçük değeri olduğu için, varyans analizi tablosundaki kalıntı kareleri toplamına (SSE) eşittir. Ayrıca

$$S(\beta) - S(b) = \beta' X'X \beta - 2\beta' X'Y + b' X'X b$$

$$= (\beta - b)' X'X (\beta - b)$$

yazılabilir. Eğer $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ ise ve model doğru ise aşağıdakilerin doğru olduğu gösterilebilir:

$$(1) b \sim N[\beta, (X'X)^{-1} \cdot \sigma^2]$$

$$(2) S(b) \sim \sigma^2 \chi_{n-p}^2$$

$$(3) S(\beta) - S(b) \sim \sigma^2 \chi_p^2$$

(4) $S(\beta) - S(b)$ ve $S(b)$ bağımsız dağılır ve aşağıdaki oran

$$\frac{(S(\beta) - S(b)) / p}{S(b) / (n - p)} \sim F(p, n - p)$$

şeklinde dağılır.

Doğrusal EKK'in Örneklem uzayı ile açıklanışı:

Örneklem uzayı, n boyutlu bir uzaydır. Gözlem vektörü $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)'$, orijin O 'dan koordinatları (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) olan Y noktasına $O\vec{Y}$ vektörünü tanımlar. X matrisinin p sütunu, her biri n eleman içeren vektörleri oluşturur. j . sütunun elemanları örneklem uzayında X_j noktasının $(X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jn})$ koordinatlarını tanımlar ve X 'in j . sütun vektörü, örneklem uzayında $O\vec{X}_j$ vektörünü tanımlar. $O\vec{X}_1, O\vec{X}_2, \dots, O\vec{X}_n$ şeklindeki p vektör, örneklem uzayı tarafından içerilen ve p boyutlu bir alt uzay olan tahmin uzayını tanımlarlar. Bu alt uzaydaki herhangi bir nokta, uzayı geren vektörlerin doğrusal kombinasyonu olan bir vektörün uç noktası ile temsil edilebilir. Bir başka deyişle, X 'in sütunlarının doğrusal kombinasyonu, örneğin $X\beta$ gibi. $X\beta$ 'nin T noktasını tanımladığı varsayalım. Bu durumda YT^2

$$(Y - X\beta)'(Y - X\beta) = S(\beta)$$

şeklinde verilir. Görüldüğü gibi $S(\beta)$, örneklem uzayındaki Y noktası ile, tahmin uzayındaki genel bir T noktası arasındaki uzaklığın karesini verir. $S(\beta)$ 'yi β 'ya göre minimize etmek demek, tahmin uzayında, Y ile arasındaki uzaklığın en küçük olacağı bir $P(\hat{Y} = Xb$ ile tanımlanan) noktasını bulmak demektir. Geometrik olarak, P , Y 'den tahmin uzayına inilen dikin ayağı olacaktır. Bir başka deyişle, Y 'den aşağı inen ve X 'in sütunları ile temsil edilen her vektöre ortogonal olan bir doğru olacaktır. Orijinden tanımlanan vektörler cinsinden

$$\begin{aligned}
 Y &= \hat{Y} + (Y - \hat{Y}) \\
 &= \hat{Y} + e
 \end{aligned}$$

yazılabilir. Bilindiği gibi, burada e , kalıntı vektörüdür. Bu durumda Y , iki dik (ortogonal) bileşene ayrılır.

(1) İlki tahmin uzayındaki \hat{Y} 'dir.

(2) İkincisi $e = (Y - \hat{Y})$ şeklinde tanımlanan ve hata uzayında bulunan kalıntı vektörüdür.

Hata uzayı, p boyutlu tahmin uzayı tanımlandıktan sonra tüm n boyutlu uzaydan kalan $n-p$ boyutlu alt uzaydır. Tahmin ve hata uzayları ortogonaldir. \hat{Y} ile e 'nin ortogonal olduğu şöyle gösterilebilir:

$$\begin{aligned}
 \hat{Y}'e &= (Xb)'(Y - Xb) \\
 &= b'X'(Y - Xb) \\
 &= b'(X'Y - X'Xb) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Burada, b , normal denklemleri sağlayan değerleri göstermektedir. e nin $O\vec{R}$ şeklinde bir vektör olduğu düşünülün. Öyle ki; $OR=YP$ ve OR , PY 'ye paralel olsun. Eğer T , tahmin uzayında genel bir nokta ise ve YP bu uzaya dik ise

$$YT^2 = YP^2 + PT^2$$

veya

$$S(\beta) = S(b) + PT^2$$

yazılabilir. Bundan dolayı, $S(\beta)$ = "sabit" için konturlar

$$PT^2 = S(\beta) - S(b) = \text{"sabit"}$$

şeklinde olmalıdır. Örneklem uzayında, $S(b)$ = "sabit" şeklindeki konturlar, $PT^2 = \text{"sabit"}$ şeklindeki tüm T noktalarını içerirler. Bir başka deyişle, $X|b$ ile tanımlanan P noktasını merkez alan p boyutlu kürede bulunan ve tahmin uzayında bulunan $X|\beta$ şeklindeki noktaları içerirler. Bu durumda bu kürenin yarıçapı $[S(\beta) - S(b)]^{1/2}$ 'dir. Daha önce verilen

$$\frac{(S(\beta) - S(b))/p}{S(b)/(n-p)} \sim F(p, n-p)$$

özelligi ile $X|\beta$ noktası için %100 $(1-\alpha)$ 'lık güvenlik bölgesi tanımlanabilir. Gerçek olan fakat bilinmeyen β değeri için

$$\frac{(S(\beta) - S(b))/p}{S(b)/(n-p)} \sim F(p, n-p; 1-\alpha)$$

buradan da

$$S(\beta) = S(b) [1 + (p/(n-p)) \cdot F(p, n-p; 1-\alpha)]$$

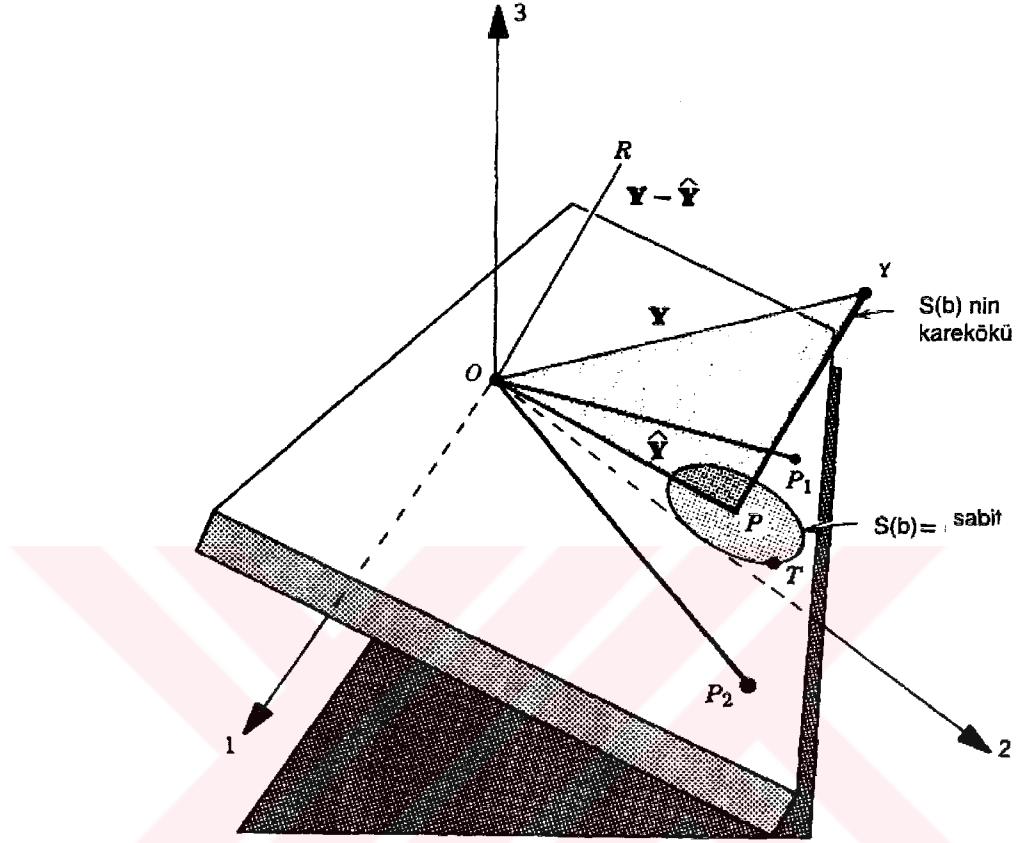
yazılabilir ve bu da $S(b) [1 + q^2]$ olarak gösterilirse $S(\beta)$ 'nın, minimum değeri olan $S(b)$ 'dan büyük olduğu söylenebilir. Bu durumda, güvenlik bölgesi, tahmin uzayında merkezi P olan ve yarıçapı

$$[S(\beta) - S(b)]^{1/2} = [S(b) (p/(n-p)) \cdot F(p, n-p; 1-\alpha)]^{1/2}$$

olan kürenin içini içerecektir.

n=3, p=2 için örneklem uzayı:

Şekil 3.10, n=3 için örneklem uzayını göstermektedir.



Şekil 3.10 n=3, p=2 için örneklem uzayı (Draper ve Smith, 1998)

Koordinat eksenleri 1, 2, ve 3 olarak adlandırılmıştır ve Y' vektörünün (Y_1, Y_2, Y_3) bileşenlerine karşılık gelmektedir. $p=2$ parametre olduğu varsayılacaktır. Bu durumda X , 3×2 'lik bir matris olacaktır. X 'in sütunları, $P_1(X_{11}, X_{12}, X_{13})$ ve $P_2(X_{21}, X_{22}, X_{23})$ şeklinde iki noktayı tanımlamaktadır. OP_1 ve OP_2 vektörleri, $\hat{Y} = Xb$ vektörünün bulunduğu iki boyutlu tahmin uzayında bir düzlemi tanımlamaktadırlar. Y noktası bu düzlemin üzerindedir ve Y 'den OP_1P_2 düzlemine inen YP dikey düzleme P noktasında değmektedir. Bundan dolayı YP , Y 'den tahmin uzayına olan en kısa uzaklıktır. P , $\hat{Y} = Xb$ ile tanımlanır ve $S(b) = YP^2$ 'dir. $OY^2 = Y'Y$ olduğu için, standart varyans analizinden,

$$Y'Y = b'X'Y + (Y'Y - b'X'Y)$$

veya

$$Y'Y = b' X'Y + s(b)$$

yazılır ve aynı ifade Pisagor Teoremi'nden

$$OY^2 = OP^2 + YP^2$$

şeklinde yazılır. Eğer O'dan PY'ye paralel OR doğru parçası çizilirse ($OR^2 = s(b)$), $O\vec{R}$, kalıntılar vektörünü gösterir. $O\vec{P}$, \hat{Y} dir ve dolayısı ile,

$$O\vec{Y} = O\vec{P} + O\vec{R}$$

veya

$$Y = \hat{Y} + (Y - \hat{Y})$$

Daha önce de bahsedildiği gibi, sabit $s(\beta)$ konturları tahmin uzayında, p boyutlu küreler olarak temsil edilir. Şekilde ise OP_1P_2 düzlemindeki konturlar çember olacaktır. Eğer T düzlemde genel bir $X \beta$ noktası ise $s(\beta) = \text{sabit}$ demek, $YT^2 = \text{"sabit"}$ demektir. Dolayısıyla $PT^2 = YT^2 - YP^2 = \text{"sabit"}$ olacaktır. Buradan P'nin çevresindeki çemberler elde edilebilir. Böyle bir çember şekilde gösterilmiştir. Gerçek $X \beta$ noktası için %100 $(1-\alpha)$ 'lık güven aralığını veren çemberin yarıçapı, genel formülde $n=3$, $p=2$ alınırsa,

$$[2S(b) F(2,1; 1-\alpha)]^{1/2}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Doğrusal EKK'in Parametre uzayı ile açıklanışı:

Parametre uzayı, $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p-1})$ 'nin bir nokta tanımladığı p boyutlu bir uzaydır.

$S(\beta)$ minimum değerine $b = (b_0, b_1, \dots, b_{p-1})$ noktasında ulaşır. Buradan

$$S(\beta) - S(b) = (\beta - b)' X' X (\beta - b)$$

β 'nin $S(\beta) = \text{"sabit"} = k$ 'yi sağlayan tüm değerleri

$$(\beta - b)' X' X (\beta - b) = k - S(b)$$

ile verilir ve gösterilebilir ki bu denklem, b noktasını çevreleyen kapalı elipsoidal konturun denklemini verir. $k_1 > k_2$ olduğunda $S(\beta) = k_1$ konturu, $S(\beta) = k_2$ konturunu tamamen kaplar ve b , bu iç içe geğmiş p boyutlu 'yumurtaya' benzeyen şekillerin merkezinde bulunur. Eğer $\epsilon \sim N(0, I \sigma^2)$ ise %100 $(1 - \alpha)$ 'lık bir güven bölgesi gerçek ama bilinmeyen β 'yi

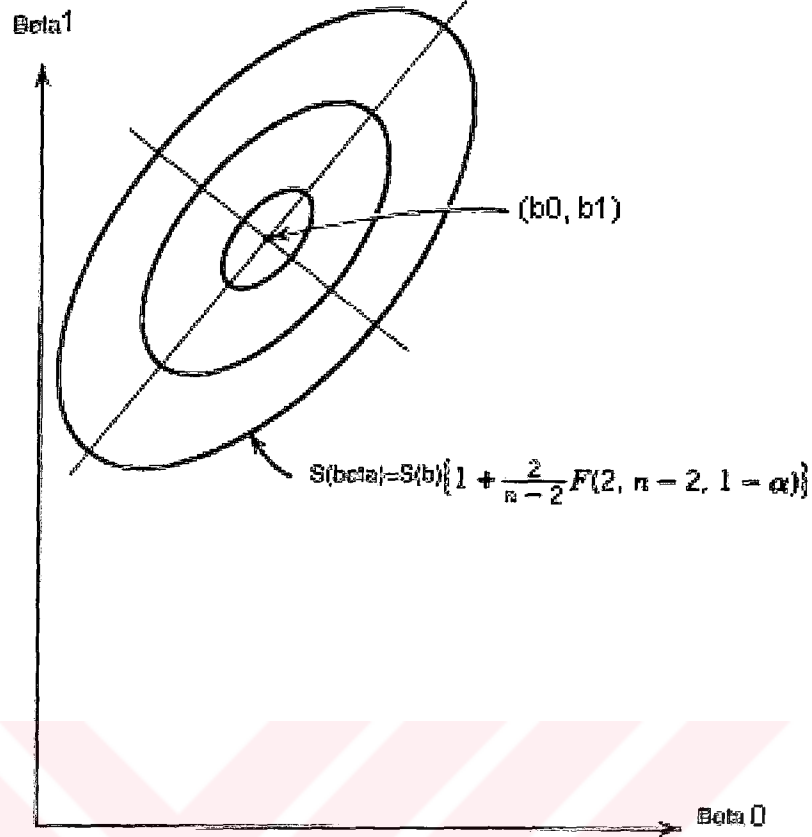
$$\frac{(S(\beta) - S(b)) / p}{S(b) / (n - p)} \sim F(p, n - p; 1 - \alpha)$$

şeklindeki bir konturla çevreler. Bu, şu şekilde düzenlenebilir:

$$S(\beta) = S(b) [1 + (p / (n - p)) \cdot F(p, n - p; 1 - \alpha)]$$

p=2 için parametre uzayı:

şekil 3.11'de, p=2 için $S(\beta) = \text{"sabit"}$ biçimindeki konturların üç durumu gösterilmektedir.



Şekil 3.11 $p=2$ için parametre uzayında $S(\beta)$ konturları (Draper ve Smith, 1998)

Dış kontur, daha önce belirtildiği gibi % 100 $(1-\alpha)$ 'lık güven konturudur. (β_0, β_1) noktası etrafında ortak merkezli elipsler olurlar. Şuna dikkat etmek gerekir ki, bu çeşit konturlar, n 'in değeri (gözlem sayısı) ne olursa olsun elde edilirler, çünkü parametre uzayının boyutu yalnızca p 'ye bağlıdır. Eğer elipsin eksenleri, β_0 ve β_1 eksenlerine paralel ise $S(\beta_0, \beta_1)$ 'yi minimum yapan b_0 değeri b_1 'e bağlı olmayacaktır. Bir başka deyişle b_1 , herhangi bir değerde sabit tutulursa, aynı $\beta_0 = b_0$ değeri $S(\beta_0, \beta_1 | \text{sabitlenmiş } \beta_1)$ 'yi minimize eder. Bu şu anlama gelir: β_1 hakkında onun değerini sabitleyen spesifik bilgi, EKK tahmini b_0 'i etkilemeyecektir. Bu durum, $S(\beta_0, \beta_1)$ ifadesinin, $\beta_0 \beta_1$ cinsinden bir çapraz çarpım terimi olmadan yazılabildiğinde meydana gelir. $p=2$ için model

$$Y_i = \beta_0 X_{1i} + \beta_1 X_{2i} + \varepsilon_i \quad i=1,2,\dots,n$$

şeklinde verilsin. Buradan

$$S(\boldsymbol{\beta}) = S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 X_{1i} - \beta_1 X_{2i})^2 = \sum Y_i^2 - \beta_0 2 \sum X_{1i} Y_i - \beta_1 2 \sum X_{2i} Y_i + \beta_0^2 \sum X_{1i}^2 + \beta_1^2 \sum X_{2i}^2 + \beta_0 \beta_1 2 \sum X_{2i} X_{1i}$$

Eğer $\beta_0 \cdot \beta_1$ 'nın katsayısı sıfır olursa, daha açık biçimde, $\sum X_{2i} X_{1i} = 0$ ise (\mathbf{X} 'in sütunları ortogonal olduğunda), $\partial S(\boldsymbol{\beta}) / \partial \beta_1 = 0$ 'ı sağlayan β_0 değeri, başka bir deyişle b_0 , β_1 'e bağlı olmayacaktır.

\mathbf{X} 'in \mathbf{X}_1 ve \mathbf{X}_2 sütunları ortogonal olmadığında, $\beta_0 \beta_1$ terimi, $S(\beta_0, \beta_1)$ 'de belirir ve elipsler, β_0 ve β_1 eksenlerine göre eğik biçimde yönelirler. $S(\beta_0, \beta_1)$ konturlarının şekli, b_0 ve b_1 tahminlerinin belirlenmesindeki göreceli hassaslığı gösterir (Draper ve Smith, 1998).



4. DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYON MODELLERİ

4.1 Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Regresyon Modelleri:

4.1.1 Doğrusal Regresyon Modelleri:

Bilindiği gibi bir model, daha karmaşık bir olguya yakınsamayı sağlayan, gerçeğin yalın bir soyutlamasıdır. Modeller deterministik ve olasılıklı olmak üzere sınıflandırılabilir. Deterministik bir modelde, sistem sonuçları ve tepkileri, çoğunlukla bir denklem kümesi ile kesin olarak belirlidir. Temel bilimlerdeki ve mühendislikteki deterministik modellerden bazıları; P, basınç, V hacim, n mol sayısı, T sıcaklık ve R de sabit olmak üzere, gazların davranışını açıklayan, ideal gaz yasası ($PV=nRT$) veya akım şiddeti (I), potansiyel (V) ve direnç (R) arasındaki ilişkiyi açıklayan Ohm yasası ($V=IR$) ve enerji korunumunu ifade eden, termodinamiğin birinci yasasıdır ($dW = JdQ$). Olasılıklı modellerde, sistem sonuçları veya tepkileri değişkenlik gösterir, çünkü model raslantı terimleri içerir ya da raslantısal etkenlerden etkilenir.

Olasılıklı modeller içinde en öne çıkanı doğrusal modeldir:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i \quad (4.1)$$

Burada Y bağımlı değişkeni, açıklanan değişken olarak da adlandırılır. X_1, X_2, \dots, X_k bağımsız değişkenleri, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ bilinmeyen parametreleri ve ε , daha önce değinildiği gibi, beklenen değeri sıfır olan hata payını göstermektedir. Bu durumda Y'nin beklenen değeri

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki}$$

şeklinde olacaktır. (4.1) doğrusal model olarak adlandırılır çünkü açıklanan değişkenin beklenen değeri, bilinmeyen $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ parametrelerinin doğrusal bir fonksiyonudur. Bu demektir ki, örneğin, k=2 değişkenli etkileşimli model,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_{12} X_{1i} X_{2i} + \varepsilon_i \quad (4.2)$$

ya da k=2 değişkenli, etkileşimli ve ikinci mertebeden polinomiyal terimlere sahip bir model,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_{12} X_{1i} X_{2i} + \beta_{11} X_{1i}^2 + \beta_{22} X_{2i}^2 + \varepsilon_i \quad (4.3)$$

ya da transandantal terimlere sahip

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \sin\left(\frac{2\pi X_i}{12}\right) + \beta_2 \cos\left(\frac{2\pi X_i}{12}\right) + \varepsilon_i$$

şeklindeki bir model, hep doğrusal model kategorisi içinde yer alır. (4.1)'deki doğrusal regresyon modeli çoğu zaman birinci mertebeden doğrusal model olarak adlandırılır. Bir doğrusal regresyon modeli kısaca

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 Z_{1i} + \beta_2 Z_{2i} + \dots + \beta_k Z_{ki} + \varepsilon_i$$

şeklinde yazılabilir. Burada Z_i , bağımsız değişken X_1, X_2, \dots, X_k ların, $\exp(X_i)$, $\sqrt{X_i}$ ve $\sin^{-1}(X_i)$ gibi herhangi bir fonksiyonunu gösterir.

Bir doğrusal regresyon modeli genel olarak da şu biçimde yazılabilir:

$$Y_i = f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\beta}) + \varepsilon_i$$

Burada $f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\beta}) = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_3 X_{2i} + \dots + \beta_{p-1,i} X_{p-1,i}$ ve

$\mathbf{X}' = [1, X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{p-1,i}]$ şeklindedir. Hata paylarının beklenen değeri sıfır olduğu sürece, Y 'nin beklenen değeri de

$$E(Y_i) = E(f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\beta}) + \varepsilon_i)$$

$$= f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\beta})$$

olacaktır. $f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\beta})$ ya, burada, beklenen değer fonksiyonu(expectation function) denir ve bilindiği gibi parametrelerin doğrusal bir fonksiyonudur.

Doğrusal regresyon modelleri, birçok nedenle yaygın olarak kullanılır. Birincisi, karmaşık fonksiyonel ilişkiler için doğal yakınsama polinomları oluştururlar. Başka bir deyişle, eğer

$E(Y)=f(X)$, bir bağımsız değişkenle beklenen değer fonksiyonu arasındaki gerçek ilişki ise, bir X_0 noktasında, bu ilişkiye yaklaşık, birinci mertebeden Taylor serisi,

$$E(Y) \cong f(X_0) + \frac{df(X)}{dX}(X - X_0) + R \cong \beta_0 + \beta_1(X - X_0)$$

$X=X_0$

şeklinde. Burada devam eden terimleri gösteren R(hata payından ayrı olarak), tek bağımsız değişkenli doğrusal bir regresyon modelidir. p-1 bağımsız değişken içerildiğinde, birinci mertebeden Taylor serisi yaklaşımı, doğrudan p-1 değişkenli doğrusal regresyon modeline dönüşecektir. İkinci mertebeden Taylor serisi kullanımı ise, (4.3)'deki ikinci mertebeden model ya da eğer saf ikinci mertebe türev terimleri ihmal edilirse, (4.2)'deki gibi etkileşimli model sonucunu verecektir. Doğrusal regresyon modelleri, polinomial yaklaşımlarda olduğu gibi, çok sıklıkla ve başarılı biçimde kullanıldıkları için, bu modellere bazen ampirik modeller de denmektedir.

Doğrusal regresyon modellerinin sıklıkla kullanılmasının diğer bir nedeni ise $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k, \dots, \beta_{p-1}$ bilinmeyen parametrelerinin tahmininde sağladığı yalınlıktır. Burada EKK yöntemi kullanılır. Bu yöntem uygulandığında, araştırmacı, p tane $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p-1}$ bilinmeyene karşılık, p tane eşanlı denklem sistemi çözmek durumundadır. Günümüzde hesap makineleri ve paket programlar bu süreci son derece kolay hale getirmişlerdir.

Eğer ε hata paylarının sabit varyansla normal ve bağımsız dağıldığı varsayılırsa, model parametreleri için istatistik testler, güven aralıkları oluşturulması ve kestirim kolaylıkla gerçekleştirilebilir. Bazı araştırmacılara (Myers vd., 2002) göre istatistikte, matematiksel estetikliği, kolaylığı ve pratik problemlerdeki etkinliğinden dolayı, doğrusal model son derece zarif bir teoridir.

4.1.2 Doğrusal Olmayan Regresyon Modelleri:

Doğrusal regresyon modelleri çoğunlukla, daha karmaşık ve genellikle bilinmeyen olgular için, ampirik modeller olarak ortaya çıkarlar. Buna karşın, olgunun iyi anlaşıldığı ve bir matematiksel ilişki ile kolayca ifade edilebildiği durumlar da vardır. Örneğin, bir cismin sıcaklığının değişme oranının, cismin şu anki sıcaklığı ile onu çevreleyen ortamın sıcaklığı arasındaki farkla orantılı olduğunu söyleyen Newton'un "Soğuma Yasası" gibi. Buna göre, eğer f , o anki sıcaklık ve T_A 'da çevresel sıcaklık ise, o zaman

$$\frac{df}{dt} = -\beta(f - T_A) \quad (4.4)$$

yazılır. Burada β oran sabitidir. β 'nın değeri cismin termal iletkenliğine ve diğer faktörlere bağlıdır. Cismin t anındaki sıcaklığı (4.4)'ün çözülmesiyle

$$f(t, \beta) = T_A + (T_I - T_A)e^{-\beta t} \quad (4.5)$$

şeklinde bulunur. Burada T_I , cismin başlangıç sıcaklığıdır. Pratikte, araştırmacı, t anındaki sıcaklığı bir alet yardımıyla ölçer, ve burada hem alet, hem de araştırmacı, (4.5)'te ifade edilmemiş bir değişimin potansiyel kaynakları durumundadır. Bu gibi etkileri ve diğer değişim kaynakları ε hata payında bir araya getirilerek, sıcaklığın, t anında gözlenen gerçek değeri,

$$\begin{aligned} Y &= f(t, \beta) + \varepsilon \\ &= T_A + (T_I - T_A)e^{-\beta t} + \varepsilon \end{aligned} \quad (4.6)$$

şeklinde yazılır. (4.6), doğrusal olmayan regresyon modellerine bir örnektir. Görüldüğü gibi, beklenen değer fonksiyonu bilinmeyen β 'nın doğrusal bir fonksiyonu değildir. Doğrusal olmayan regresyon modelleri, temel bilimlerde ve mühendislikte önemli bir rol oynar ve çoğunlukla, incelenen olguyu tarif eden mekanizma hakkındaki bilgiden elde edilirler. Bundan dolayı, bazen, doğrusal olmayan modeller, daha önce ampirik olarak adlandırılan doğrusal modellerden farklı olarak, mekanistik modeller olarak adlandırılırlar. Birçok doğrusal olmayan model, doğrudan diferansiyel denklemlerin çözümü ile elde edilir (Myers vd., 2002).

Genel olarak, doğrusal olmayan bir regresyon modeli şu şekilde gösterilir.

$$Y_i = f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma}) + \varepsilon_i$$

Burada Y_i , yine bir raslantı değişkeni olan bağımlı değişkeni, ε_i ise beklenen değeri sıfır ve sabit varyanslı, normal dağıldığı kabul edilen ve bir raslantı değişkeni olan hata terimlerini göstermektedir. \mathbf{X}_i gözlem değerleri vektörünü ve doğrusal modelden farklı olarak $\boldsymbol{\gamma}$ parametreler vektörünü göstermektedir. $f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma})$ ise parametrelerinde doğrusal

olmayan bir fonksiyonu ifade etmektedir. Hata paylarının, doğrusal olmayan regresyonda da, genel olarak normal dağıldığı varsayılır. Bu durumda Y'nin beklenen değeri

$$E(Y_i) = E(f(X_i, \gamma) + \varepsilon_i)$$

$$= f(X_i, \gamma)$$

şeklindedir. $f(X_i, \gamma)$ ya, burada, doğrusal olmayan regresyon için beklenen değer fonksiyonu denir ve parametrelerin doğrusal olmayan bir fonksiyonudur. Bir başka deyişle, $f(X_i, \gamma)$ 'in parametreler göre kısmi türevleri alınarak elde edilen fonksiyonlar da parametrelerin birer fonksiyonudur.

Doğrusal regresyon modelinde olduğu gibi, doğrusal olmayan regresyon modelinde de parametrelerin tahmini, parametreler ile ilgili güven aralıklarının oluşturulması ve hipotez testi yapılması gereklidir. Doğrusal olmayan model ile ilgili çıkarsamalar yapmak, normal dağılımın kullanımını ve gözlem değerlerinin birbirinden bağımsız ve sabit varyanslı olduğu şeklindeki tipik varsayımları gerektirir.

4.1.3 Doğrusal Modele Dönüştürme:

SEKK'in doğrusallık varsayımı, bağımsız değişken(ler)in doğrusal olmasını gerektirmez. Doğrusal modellerde katsayılarda doğrusallık önemlidir. Bununla birlikte doğrusal olmayan modeller de değişken dönüşümü ile doğrusallaştırılabilen ve değişken dönüşümü ile doğrusallaştırılamayan olmak üzere ikiye ayrılır. Örneğin;

$$Y_i = \beta_0 e^{\beta_1 X_i} + \varepsilon_i$$

modeli,

$$\ln Y_i = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln X_i + \ln \varepsilon_i$$

$$Y_i^* = \beta_0^* + \beta_1 X_i^* + \varepsilon_i^*$$

şeklinde dönüştürülebilir. Yeni tanımlanan parametreler EKK ile tahmin edilebilir, fakat ε_i^* 'nin dağılım özellikleri bilinmediği için (çünkü ε_i 'nin normal dağıldığı kabul ediliyorsa bu

durumda artık $\ln \varepsilon_i$ normal dağılmayacaktır) bu tahminlerle ilgili, bilinen anlamda güven aralığı tahminleri ve hipotez testleri gerçekleştirilemez. Bu durumda dağılımdan bağımsız olan Çebişev Eşitsizliği veya Markov Eşitsizliği kullanılabilir. Diğer taraftan ε_i 'nin modele toplam olarak katıldığı şu ifade;

$$Y_i = \beta_0 e^{\beta_1 X_i} + \varepsilon_i$$

logaritma alma veya değişken dönüştürme işlemleri ile doğrusallaştırılmaz. Eğer hata payı göz önüne alınmayıp, sadece beklenen değer fonksiyonu üzerinde doğrusallaştırma yapıp, parametreler tahmin edilse bile, bulunan tahminler, doğrusal olmayan parametre tahminleri ile aynı olmayabilir. *Bunun nedeni, orijinal doğrusal olmayan modelde EKK, Y'den elde edilen SSE'nin minimizasyonuna dayanır. Halbuki, dönüştürülmüş modelde EKK, lnY'den elde edilen SSE'nin minimizasyonuna dayanmaktadır.*

4.1.4 Genelleştirilmiş Doğrusal Modeller Hakkında:

Hem doğrusal, hem de doğrusal olmayan regresyon modelleri hakkında çıkarsamalarda bulunmak, Y değişkeninin normal dağılıma uyduğu varsayımını gerektirir. Pratikte, bu varsayımın, yaklaşık olarak bile yerine gelmediği birçok durum vardır. Örneğin, Y'nin kesikli bir değişken olduğu varsayılabilir. Çoğunlukla kusur sayımı, sakatlanmalar, hastalıklar ya da deprem, fırtına gibi doğal olayların meydana gelmesi örnek olarak verilebilir. Diğer bir durum ise açıklanan değişkenin ikili(binary) olduğu durumdur. Örneğin, açıklanan değişkenin “başarı” veya “başarısızlık” durumunu (örneğin 0 veya 1) temsil ettiği durumlar vardır. Bu durumlar, temel bilimlerde ve mühendislikte çok sık rastlanılan durumlardır. Ayrıca açıklanan değişken Y'nin sürekli olduğu, fakat normal dağıldığı varsayımının hiç gerçekçi olmadığı durumlar da vardır. Örnek olarak, mekanik elemanlardaki stresin dağılımı ya da elektronik elemanların veya sistemlerin ömrü verilebilir. Bu tür değişkenler negatif değer almazlar ve tipik sağa çarpık davranış gösterirler.

Genelleştirilmiş doğrusal modeller (Generalized Linear Models veya GLM), çok genel bir dağılım ailesi olan üstel aileye uyan tek değişkenli model verilerine uygun regresyon modelleri oluşturmak için geliştirilmişlerdir. Üstel aile, normal, binom, Poisson, geometrik, negatif binom, üstel, gama ve ters normal dağılımlarını içerir.

GLM, normal ve normal olmayan açıklanan değişken dağılımlarını kapsayan ve doğrusal ve doğrusal olmayan regresyon modellerini birleştiren bir birleşim olarak görülebilir. Model

oluşturma ve çıkarsamalarda bulunma, alışılmış şekliyle burada da yapılabilir (Myers vd., 2002).

4.2 Regresyon Modellerinin Fonksiyon Kalıpları:

Bu bölümde değişkenlerde doğrusal olmayabilen, ama katsayılar da doğrusal olan ya da uygun dönüşümlerle doğrusallaştırılabilen bazı yaygın modeller tanıtılacaktır. Bunlar:

1. Log-lin modeller
2. Yarı logaritmik modeller
3. Ters modeller

şeklindedir.

4.2.1 Log-log Model:

$Y_i = \beta_0 X_i^{\beta_1} e^{\varepsilon_i}$ biçimindeki model üslü model olarak adlandırılır. Burada'e doğal logaritma tabanını göstermektedir. Her iki tarafın doğal logaritma tabanına göre logaritması alınır, bu model aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$\ln Y_i = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln X_i + \varepsilon_i$$

$\alpha = \ln \beta_0$ alınır, ifade

$$\ln Y_i = \alpha + \beta_1 \ln X_i + \varepsilon_i$$

şekline dönüşür. Görüldüğü gibi bu model uygun dönüşümle parametrelerinde doğrusal hale getirilebilmektedir. Dolayısıyla parametreler SEKK yöntemi ile tahmin edilebilir. Bu tür modellere log-log veya çifte-log modeller denmektedir.

Logaritması alınmış üslü modelde $Y_i^* = \ln Y_i$, $X_i^* = \ln X_i$ ve $\alpha = \ln \beta_0$ dönüşümleri yapılırsa model

$$Y_i^* = \alpha + \beta_1 X_i^* + \varepsilon_i$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifadede, eğer KDRM'nin varsayımları sağlanıyorsa parametreler, SEKK ile tahmin edilebilir ve a ve b_1 tahminçileri α ve β_1 'in BLUE tahminçileri olurlar. Log-log modelinin yaygın olarak kullanılmasının en önemli nedenlerinden biri, β_1 eğim katsayısının, Y'nin X'e göre esnekliğini, bir başka deyişle, X'teki (küçük) bir yüzde değişme veriyken, Y'deki yüzde değişmeyi vermesidir. Esneklik katsayısı,

$$(dY/Y)/(dX/X) = (dY/dX)(X/Y)$$

şeklinde tanımlanır. Buradan da, Y'nin X'e göre esnekliğinin β_1 olduğu görülebilir. Bu özellikle ilgili olarak, iktisattan şöyle bir örnek verilebilir: Y, bir mala olan talep miktarını ve X, o malın birim fiyatını gösterirse, bu durumda β_1 , iktisatta önemli bir parametre olan talebin fiyat esnekliğini verir. Bu yönüyle, log-log model, ekonometrik uygulamalarda ve esas itibariyle talep tahminleri ve üretim fonksiyonları (Cobb-Douglas üretim fonksiyonu) için kullanılmaktadır.

Bununla beraber log-log modelin iki özelliğine daha değinilmelidir: Bu model Y ile X arasındaki esneklik katsayısı β_1 'in her noktada aynı olduğunu varsayar, bu nedenle de sabit esneklik modeli olarak adlandırılır. Başka bir deyişle, esneklik $\ln X$ 'in hangi değerinde ölçülürse ölçülsün, $\ln Y$ 'deki değişimin $\ln X$ 'teki değişime oranı (veya esneklik katsayısı β_1) aynı kalır.

Modelin öteki özelliği de a ve b_1 'in α ve β_1 'in tutarlı ve sistematik hatasız tahminçileri olmalarına karşın, modelin ilk biçimindeki anakütle parametresi β_0 'ın tahminçisi, $b_0 = \text{antilog}(a)$ biçiminde tahmin edildiğinde tutarlı fakat sistematik hatalı bir tahminci olmasıdır. Tutarlılık, bir başka deyişle, örneklem birim sayısının artmasıyla, varyansın ve sistematik hatanın azalması ve sifıra gitmesi durumunun, büyük örneklerde gözardı edilmesine neden olmaktadır. Buna göre, $a = \ln(b_0)$ olmak üzere $E(b_0) \neq E(e^a) = e^a = \beta_0$ ifadesi küçük örneklem için sorun olup, böyle bir hatanın düzeltilmesi gerekmektedir. Bu amaçla, $\hat{Y} = e^{\ln Y}$ yerine $\hat{Y} = e^{(\ln Y + \text{MSE}^*/2)}$ kullanılması önerilmektedir. Burada MSE^*

$$\text{MSE}^* = \frac{\sum (\ln Y - \hat{\ln Y})^2}{n-2}$$

şeklindedir. Buna rağmen, uygulamada, sabit terim ikincil bir öneme sahip olduğundan bu sorun dikkate alınmayabilir.

İki değişkenli modelde, log-log modelin verilere uygun olup olmadığını saptamanın en kolay yolu, $\ln Y$ 'nin, $\ln X$ 'e göre serpilme diyagramına bakmaktır. Eğer serpilme noktaları yaklaşık olarak bir doğru üzerinde yer alıyorsa, modelin verilere uygun olduğu söylenebilir.

Belirlilik katsayısı, örnek birim sayısının aynı ve bağımlı değişkenin aynı cinsten olduğu modellerin karşılaştırılmasında kullanılabilir. Buna göre,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

veya

$$\ln Y_i = \alpha + \beta_1 \ln X_i + \varepsilon_i$$

modellerinden hangisinin daha iyi uyum gösterdiği belirlilik katsayısı yoluyla saptanamaz. Bu, r^2 ifadesinde paydada yer alan toplam değişkenlik SST'den kaynaklanmaktadır. Birinci modelde toplam değişkenlik

$$SST = \sum (Y_i - \bar{Y})^2$$

şeklinde aritmetik ortalamadan farkların karesi olarak ifade edilirken, ikinci modelde

$$SST = \sum (\ln Y_i - \overline{\ln Y})^2$$

geometrik ortalamadan farkların karesi söz konusu olmaktadır. Her zaman için $GO \leq AO$ eşitsizliği geçerli olması nedeniyle $\sum (e^{\ln Y} - GO)^2 > \sum (Y - \bar{Y})^2$ çıkacaktır.

Bilindiği gibi KDRM'de r^2 'nin ifadelerinden biri de şu şekildedir:

$$r^2 = \frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^2 \sum y_i^2}$$

Buna benzer olarak log-log model için de;

$$r^2 = \frac{(\sum (\ln X - \overline{\ln X})(\ln Y - \overline{\ln Y}))^2}{\sum (\ln X - \overline{\ln X})^2 \sum (\ln Y - \overline{\ln Y})^2}$$

yazılabilir. Bilindiği gibi Y ile tahmin edilen Y arasındaki korelasyon katsayısına uygunluk katsayısı denilmektedir. *Doğrusal model için belirlilik katsayısı ile uygunluk katsayısı aynı olmasına karşın, log-log model için durum böyle değildir. Bunun nedeni, daha önce değinildiği gibi b_0 'ın sistematik hatalı olmasıdır.* Uygunluk katsayısı, doğrusal model için,

$$r^2 = \frac{(\sum y\hat{y})^2}{\sum y^2 \sum \hat{y}^2}$$

şeklinde yazılabilirken log-log model için

$$r^2 = \frac{\sum (Y - \bar{Y})(e^{\hat{\ln Y}} - e^{\bar{\ln Y}})}{\sum (Y - \bar{Y})^2 \sum (e^{\hat{\ln Y}} - e^{\bar{\ln Y}})}$$

veya daha kesin bir şekilde

$$r^2 = \frac{\sum (Y - \bar{Y})(e^{\hat{\ln Y} + MSE*/2} - e^{\bar{\ln Y} + MSE*/2})}{\sum (Y - \bar{Y})^2 \sum (e^{\hat{\ln Y} + MSE*/2} - e^{\bar{\ln Y} + MSE*/2})}$$

yazılır (Genceli, 2001).

4.2.2 Yarı Logaritmik Modeller:

Yarı logaritmik modeller, bağımlı veya bağımsız değişkenin birinin logaritmali olduğu modellerdir. Eğer bağımlı değişken logaritmali ise bu log-lin, bağımsız değişken logaritmali ise lin-log model olarak adlandırılır. Bir log-lin model şu şekildedir:

$$\ln Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

$Y_i' = \ln Y_i$ dönüşümü yoluyla model,

$$Y_i' = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

şeklinde kolaylıkla doğrusallaştırılabilir. Log-lin model, bağımsız değişkenin yaklaşık olarak aritmetik dizi şeklinde arttığı veya azaldığı, bağımlı değişkenin ise yaklaşık olarak geometrik dizi şeklinde arttığı veya azaldığı durumda kullanılır. Buna göre β_1 , X'teki mutlak değişmeye karşılık, Y'deki oransal ya da görel değişmeyi ölçer. Diferansiyel gösterimle

$$\beta_1 = d(\ln Y)/dX = (1/Y)/(dY/dX) = (dY/Y)/dX \approx (\text{Bağımlı değişkendeki görel değişme})/(\text{Bağımsız değişkendeki mutlak değişme})$$

yazılabilir. Log-lin modeller, iktisatta, işletmede, ekonometride ve özellikle büyüme modellerinde (Harrod-Domar büyüme modeli) yaygın olarak kullanılır. Bunun yanında, temel bilimlerde, özellikle fizikte, radyoaktif bozunma süreçlerinin açıklanmasında kullanılır. Örnek olarak, elektrikte, bir RC (bir direncin ve bir kapasitansın seri bağlandığı devre) devresinde, direncin voltajının, zamana bağlı değişimini ifade eden

$$V(t) = V(0).e^{-Rt}$$

formülü gösterilebilir.

Lin-log modeller ise bağımsız değişkenin yaklaşık olarak geometrik dizi şeklinde arttığı veya azaldığı ve buna karşın, bağımlı değişkenin yaklaşık olarak aritmetik dizi şeklinde arttığı veya azaldığı durumlarda kullanılır. Bir lin-log model şu şekilde gösterilir:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln X_i + \varepsilon_i$$

$X'_i = \ln X_i$ dönüşümü yoluyla model,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X'_i + \varepsilon_i$$

şeklinde kolaylıkla doğrusallaştırılabilir. Burada β_1 şu şekilde açıklanır:

$$\beta_1 = (Y\text{'deki değişme})/(\ln X\text{'teki değişme}) = (Y\text{'deki değişme})/(X\text{'teki görel değişme})$$

Bu durumda bağımlı ve bağımsız değişkenlerin değişim biçimlerine göre hangi modelin kullanılabileceği ile ilgili bir çizelge oluşturulabilir.

Çizelge 4.1 Bağımlı ve bağımsız değişkenlerin değişim biçimlerine göre model seçimi
(Gujarati, 2001)

X	Y	Model
AR	AR	Doğrusal model
AR	GEO	Lin-log model
GEO	AR	Log-lin model
GEO	GEO	Log-log model

AR: Aritmetik dizi GEO: Geometrik dizi

4.2.3 Ters Modeller.

Aşağıdaki türden modellere ters(reciprocal) modeller denir.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{X_i} \right) + \varepsilon_i$$

Eğer $X'_i = \frac{1}{X_i}$ alınırsa model,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X'_i + \varepsilon_i$$

şeklinde değişkenlerinde de doğrusal hale gelir. Bu modelin önemli iki özelliği vardır: X sonsuza giderken $\beta_1(1/X)$ terimi sıfıra, Y 'de β_0 limit değerine yaklaşır. Dolayısıyla ters modeller, X sonsuza doğru büyürken, Y'nin ulaştığı bir limite sahiptirler. Ters modellerin, ekonometride en çok kullanıldığı uygulama Philips eğrisidir. Philips eğrisi, parasal ücretlerdeki yüzde değişme oranı (Y) ile işsizlik oranı (X) arasında oluşan bir eğridir. Ters modellerin bir diğer uygulaması ise Engel harcama eğrisidir. Bu eğri, tüketicinin bir mala yönelik harcamasını, toplam harcamasıyla ya da geliri ile ilişkilendirir.

Sonuç olarak bahsedilen fonksiyon kalıplarının eğimleri ve esneklikleri yönünden karşılaştırmak amacıyla şöyle bir çizelge oluşturulabilir:

Çizelge 4.2 Çeşitli fonksiyon kalıplarının eğim ve esneklikleri yönünden karşılaştırılması
(Gujarati, 2001)

Model	Eşitlik	Eğim(=dY/dX)	Esneklik(=(dY/dX)(X/Y))
Doğrusal	$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i$	β_1	$\beta_1 (X/Y)^*$
Log-Log	$\ln Y_i = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln X_i$	$\beta_1 (Y/X)$	β_1
Log-lin	$\ln Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i$	$\beta_1 Y$	$\beta_1 X^*$
Lin-log	$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln X_i$	$\beta_1 (1/X)$	$\beta_1 (1/Y)^*$
Ters	$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{X_i}\right)$	$-\beta_1 (1/X^2)$	$-\beta_1 (1/XY)^*$

*: Esneklik katsayısının X'e ya da Y'ye, ya da her ikisine birden bağlı olarak değiştiğini gösterir. Uygulamada X, Y değerleri yoksa, bu esneklikler, ortalamaları üzerinden ölçülür.

4.3 Genelleştirilmiş ve Ağırlıklı EKK:

4.3.1 Genelleştirilmiş EKK:

V , elemanları bilinen $n \times n$ bir matris olmak üzere, $\text{Var}(Y) = \sigma^2 V$ olduğu durumda, SEKK yönteminde bazı değişiklikler gerekli olmaktadır. Eğer V diyagonal ise, fakat eşit olmayan diyagonal elemanlara sahipse, gözlem vektörü Y deki değerler korelasyonsuz fakat eşit olmayan varyanslara sahip olacaklardır. Benzer şekilde V deki bazı diyagonal olmayan elemanlar sıfırdan farklıysa, o zaman gözlemler korelasyonlu olacaklardır.

Model

$$Y = X \beta + \varepsilon$$

$$E(\varepsilon) = 0, \text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 V$$

şeklinde iken SEKK tahmincisi $b = (X'X)^{-1}(X'Y)$ artık istenilen tahminci özelliklerini sağlamayacaktır. Bu sorun, modelin, standart EKK varsayımlarını sağlayan yeni bir model oluşturularak çözülebilir. Bu süreçte, dönüştürülmüş verilere SEKK yöntemi uygulanır. $\sigma^2 V$, hata paylarının varyans-kovaryans matrisi olduğu sürece, V tekil olmamalı ve pozitif belirli olmalıdır ve böylece $n \times n$ tekil olmayan simetrik bir matris, K , var olur. Burada K , $K'K = K K' = V$ yı sağlayacak şekildedir. K , çoğunlukla V nin karekökü olarak adlandırılır. Aşağıdaki yeni değişkenler tanımlanırsa,

$$Z = K^{-1}Y \quad B = K^{-1}X \quad G = K^{-1}\varepsilon$$

$Y = X\beta + \varepsilon$ şeklindeki regresyon modeli, $K^{-1}Y = K^{-1}X\beta + K^{-1}\varepsilon$ veya

$$Z = B\beta + G \quad (4.6)$$

şekline gelir. Bu dönüştürülmüş modelde hata paylarının beklenen değeri sıfır olmaktadır, bir başka ifadeyle $E(G) = K^{-1}E(\varepsilon) = 0$. G 'nin varyans-kovaryans matrisi ise,

$$\text{Var}(G) = E((G - E(G))(G - E(G))')$$

$$= E(G'G)$$

$$= E(K^{-1}\varepsilon\varepsilon'K^{-1})$$

$$= K^{-1}E(\varepsilon\varepsilon')K^{-1}$$

$$= \sigma^2 K^{-1}V K^{-1}$$

$$= \sigma^2 K^{-1}K K^{-1}$$

$$= \sigma^2 I$$

Buna göre, G 'nin elemanları sıfır ortalamalı ve sabit varyanslı ve korelasyonsuz olmaktadır. (4.6) modelindeki G hata payları, varsayımları sağladığına göre, SEKK uygulanabilir. EKK fonksiyonu,

$$\begin{aligned} S(\beta) &= G'G = \varepsilon'V^{-1}\varepsilon \\ &= (Y - X\beta)'V^{-1}(Y - X\beta) \end{aligned}$$

şeklindedir. EKK normal denklemleri ise

$$(X'V^{-1}X)b = X'V^{-1}Y$$

şeklindedir ve bunların çözümü de

$$b = (X'V^{-1}X)^{-1}(X'V^{-1}Y)$$

olacaktır. Burada b ye, β 'nin genelleştirilmiş EKK tahmincisi denir. b , sistematik hatasız bir tahmincidir. b 'nin varyans-kovaryans matrisi,

$$\text{Var}(b) = \sigma^2 (B'B)^{-1} = \sigma^2 (X'V^{-1}X)^{-1}$$

şeklindedir. Daha önce yapılan varsayımlara göre, b , BLUE'dur.

4.3.2 Ağırlıklı EKK:

ε hata payları, korelasyonsuz fakat sabit olmayan varyanslara sahip iseler, bir başka ifadeyle ε 'un varyans-kovaryans matrisi

$$\sigma^2 V = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ w_1 & & & \\ \dots & \frac{1}{w_2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{1}{w_2} \end{bmatrix}$$

şeklindeyse, bu tahmin yöntemine ağırlıklı EKK yöntemi denir. $W = V^{-1}$ olsun. V bir diyagonal matris olduğu sürece, W 'da diyagonal elemanlı(ağırlıklı w_1, w_2, \dots, w_n), diyagonal bir matris olacaktır. Genelleştirilmiş EKK'deki süreç izlenerek, ağırlıklı EKK normal denklemleri

$$(X'W X)b = X'W Y$$

şeklinde ve b de

$$b = (X'W X)^{-1}(X'W Y)$$

şeklinde bulunur. Burada b 'ye ağırlıklı EKK tahmincisi denir. Önemli bir nokta, büyük varyanslı gözlemlerin ağırlığının küçük, küçük varyanslı gözlemlerin büyük olmasıdır.

Bu yöntemin kullanılabilmesi için ağırlıkların bilinmesi gerekir. Bazı durumlarda, ön bilgi, deneyim veya teorik beklentilere dayanan bilgi, ağırlıkları belirlemede kullanılabilir. Diğer durumlarda ise, görgül olarak, modelin sistematik kısmındaki değişim, bir veya daha fazla açıklayıcı değişkenin fonksiyonu olarak bulunabilir. Böylece, model, her gözlemin varyansını kestirme ve ağırlıkları belirleme amacıyla oluşturulabilir. Bazı durumlar da ise ağırlıkları tahmin etmek, analizi oluşturmak, bu sonuçlara dayanarak yeni ağırlıkları tekrar tahmin etmek ve sonra analizi tekrar düzenlemek gerekebilir. Model oluşturma sürecinde, doğru ağırlıkları ve çözümü bulmak için birçok iterasyona ihtiyaç duyulabilir. Bu tür süreçlere, iteratif yeniden ağırlıklandırılmış EKK (iteratively reweighted least squares veya IRLS) yöntemi denir. Regresyon analizinde, GLM'yi de içeren birçok IRLS uygulaması vardır.

Ağırlıklar bilindiği zaman, ağırlıklı ve genelleştirilmiş EKK'e dayanan çıkarsamalar, veriler normal dağılıma uyduğu sürece, kesindir. Buna karşın, ağırlıklar tahmin edildiğinde çıkarsama süreçleri sadece yaklaşık sonuçlar verir (Myers vd., 2002).

4.4 GLM İçin İki Örnek: Lojistik Regresyon ve Poisson Regresyonu:

Normal dağılım ve sabit varyanslılık varsayımları uygun olmadığı durumlarda, regresyon modeli kurmak için geliştirilen yaklaşım veri dönüşümüdür. Normal dağılmama durumu ve değişen varyans durumu için yaygın olarak kullanılan en etkin yollardan biri, açıklanan

değişkenin dönüşümüdür. Ağırlıklı EKK yöntemi de, sabit olmayan varyans problemini aşmada faydalı bir yoldur.

Bu bölümde, bilinen normallik ve sabit varyanslılık varsayımları sağlanmadığı durumda, veri dönüşümüne alternatif başka bir yaklaşım tanıtılacaktır. Bu yaklaşım, GLM'ye dayanmaktadır.

GLM, hem doğrusal, hem de doğrusal olmayan regresyon arasında, açıklanan değişkenin normal olmayan dağılımına izin verecek şekilde, bir birleşme sağlar. Bir GLM'de açıklanan değişkenin, Poisson, binomiyal, üstel ve gama gibi dağılımların arasında bulunduğu, üstel dağılım ailesine ait bir dağılım göstermesi gerekir. Bunun yanında, KDRM, birçok yönden GLM'nin özel bir durumu olarak düşünülebilir. Ayrıca, GLM, ampirik modelleme ve veri analizinin birçok yönünü birleştiren bir yaklaşım olarak kabul edilebilir.

Bu tür modellerden ilk önce lojistik regresyon incelenecektir. Bu, açıklanan değişkenin sadece iki mümkün sonucu (genellikle "başarı" ve "başarısızlık") olduğu durumu ifade etmektedir. Burada açıklanan değişken kalitatif bir değişkendir.

4.4.1 Lojistik Regresyon Modelleri:

Modelin,

$$Y_i = X_i' \beta + \varepsilon_i \quad (4.7)$$

şeklinde olduğu varsayalım. Bu gösterimde $X_i' = [1, X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{p-1,i}]$,

$\beta = [\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-1}]$ 'dir ve açıklanan değişken Y_i , 0 veya 1 değerini alır. Y_i açıklanan değişkeninin, olasılık fonksiyonu aşağıda verilen Bernoulli raslantı değişkeni olduğu kabul edilir.

Çizelge 4.3 Bernoulli raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu

Y_i	Olasılık
1	$P(Y_i=1)=\pi_i$

Çizelge 4.3 (Devamı) Bernoulli raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu

0	$P(Y_i=0)=1-\pi_i$
---	--------------------

$E(\varepsilon_i)=0$ olduğu sürece, açıklanan değişkenin beklenen değeri

$$E(Y_i)=1.\pi_i+0.(1-\pi_i)$$

$$= \pi_i$$

Buradan da

$$E(Y_i)= X_i' \beta = \pi_i$$

elde edilir. Bu, modelin sistematik kısmının (modelin beklenen değerinin), Y 'nin, 1 değerini alma olasılığına eşit olduğu anlamına gelir.

Bu durumda, (4.7)'de ifade edilen regresyon modelinde bazı problemler ortaya çıkmaktadır. Eğer açıklanan değişken ikili (binary) ise, ε_i hata payları sadece iki değer alabilir:

$$Y_i=1 \text{ iken } \varepsilon_i=1- X_i' \beta$$

$$Y_i=0 \text{ iken } \varepsilon_i= - X_i' \beta$$

Bunun sonucu olarak, hata payları bu modelde normal dağılamaz. Bunun yanında, hata payı varyansı sabit değildir. Çünkü,

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E(Y_i - E(Y_i))^2 \\ &= (1-\pi_i)^2 \pi_i + (0-\pi_i)^2 (1-\pi_i) \\ &= \pi_i(1-\pi_i) \end{aligned}$$

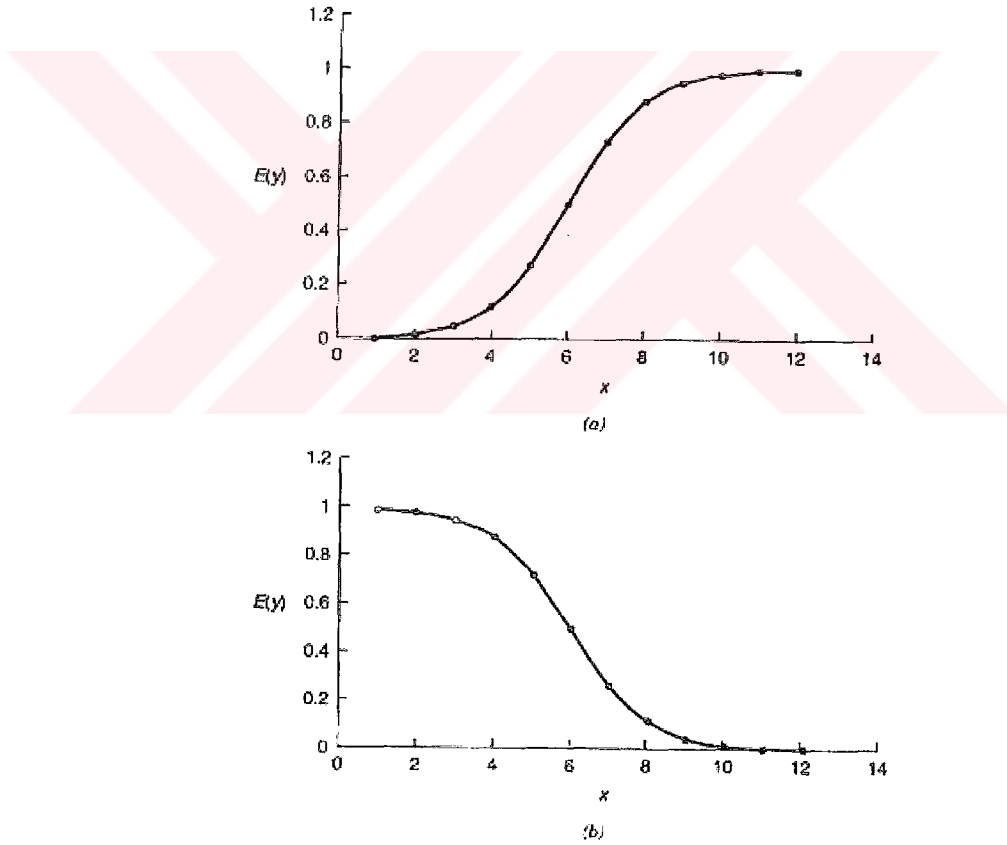
dir. Bu son ifade, $E(Y_i)= X_i' \beta = \pi_i$ iken,

$$\sigma^2 = E(Y_i)(1-E(Y_i))$$

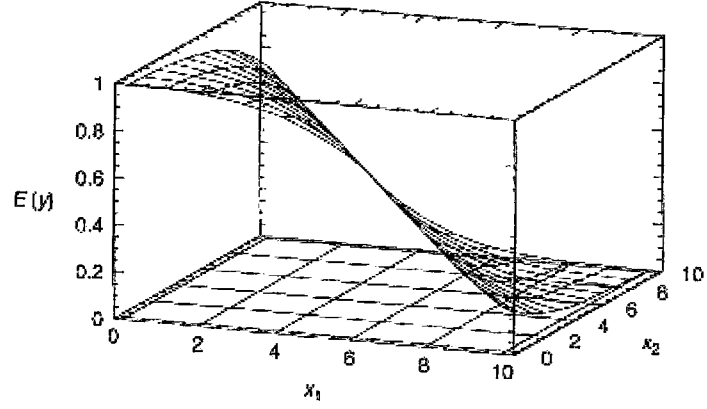
şeklindedir. Bu da, gözlemlerin varyansının (aynı zamanda hata payları varyansı, çünkü, $\varepsilon_i = Y_i - \pi_i$ ve π_i sabittir), ortalamanın bir fonksiyonu olduğu anlamına gelir. Sonuçta, beklenen değer fonksiyonu için bir kısıt ortaya çıkmış olur.

$$0 \leq E(Y_i) = \pi_i \leq 1$$

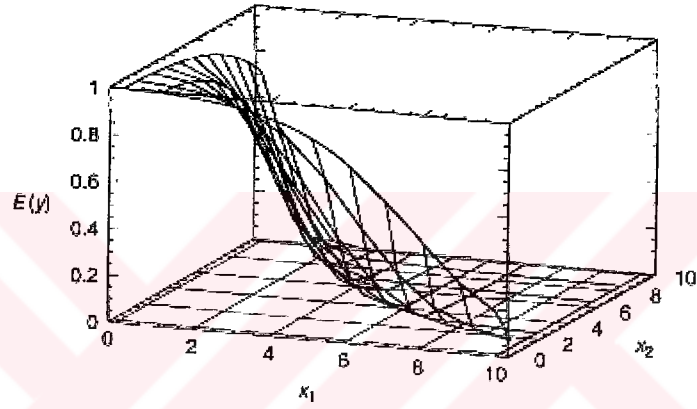
Bu kısıtlama, (4.7)'de varsayılan doğrusal beklenen değer fonksiyonu ile ilgili önemli problemlere neden olabilir. Bu durumda, 0, 1 aralığının dışında Y değerleri tahmin edebilecek modeller kurulması olasıdır. Genellikle, açıklanan değişken ikili(binary) olduğunda, beklenen değer fonksiyonunun şeklinin doğrusal olmadığına dair önemli görgül kanıt bulunur. Monoton artan(veya azalan) S-şekilli (veya ters S-şekilli) bir fonksiyon, Şekil 4.1'de gösterildiği gibi kullanılır.



Şekil 4.1 Lojistik beklenen değer fonksiyonu ile ilgili örnekler: (a) $E(Y) = 1/(1 + e^{-6-x})$ (b) $E(Y) = 1/(1 + e^{-6+x})$



(c)



(d)

Şekil 4.1(Devam) (c) $E(Y) = 1/(1 + e^{-5+0.65X_1+0.4X_2})$ (d) $E(Y) = 1/(1 + e^{-5+0.65X_1+0.4X_2+0.15X_1X_2})$
(Montgomery vd., 2001)

Bu fonksiyona lojistik beklenen değer fonksiyonu denir ve şu şekildedir:

$$E(Y_i) = \frac{\exp(X_i' \beta)}{1 + \exp(X_i' \beta)}$$

veya eşdeğer olarak,

$$E(Y_i) = \frac{1}{1 + \exp(-X_i' \beta)}$$

Lojistik beklenen değer fonksiyonu kolaylıkla doğrusallaştırılabilir.

$$\eta = X_i' \beta$$

olsun. η burada

$$\eta = \ln \frac{\pi}{1-\pi}$$

şeklinde tanımlanan doğrusal kestirimcidir. Bu dönüşüm, çoğunlukla, π olasılığının logit dönüşümü olarak adlandırılır. Dönüşümdeki $\pi/(1-\pi)$ oranı da bahis (odds) olarak adlandırılır. Bazen logit dönüşümler, log-bahis olarak da isimlendirilir.

π 'nin dönüşümü ile elde edilebilen ve lojistik fonksiyonla aynı şekle sahip başka fonksiyonlar da vardır. Bunlardan biri, π 'nin, kümülatif normal dağılım kullanılarak dönüştürülmesi ile elde edilen probit dönüşümdür. Buradan da probit regresyon modeli türetilir. Probit regresyon modeli, lojistik regresyon modeline göre daha az esnektir ve yaygın olarak kullanılmaz. Bir başka olası dönüşüm ise, $\ln(-\ln(1-\pi))$ şeklinde verilen, π 'nin tamamlayıcı log-log dönüşümüdür (complementary log-log transformation). Bu dönüşümün sonucu olarak, beklenen değer fonksiyonu, $\pi=0.5$ 'e göre simetrik değildir.

4.4.1.1 Lojistik Regresyon Modelinde Parametrelerin Tahmini:

Lojistik regresyon modelinin genel biçimi

$$Y_i = E(Y_i) + \varepsilon_i$$

şeklindedir. Burada Y_i gözlem değerleri, birbirinden bağımsız ve beklenen değeri

$$E(Y_i) = \pi_i$$

$$= \frac{\exp(X_i' \beta)}{1 + \exp(X_i' \beta)}$$

olan Bernoulli raslantı değişkenidir. Burada parametre tahmini için MO(Maksimum Olabilirlik) yöntemi kullanılacaktır.

Her örneklem gözlemi Bernoulli dağılımı gösterdiğine göre, her bir örneklem gözleminin olasılık fonksiyonu

$$f_i(Y_i) = \pi_i^{Y_i} (1 - \pi_i)^{1-Y_i}, \quad i=1,2,\dots,n$$

olacaktır ve her Y_i gözlemi de 0 veya 1 değerini alacaktır. Gözlemler bağımsız olduğu sürece olabirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} L(Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \boldsymbol{\beta}) &= \prod_{i=1}^n f_i(Y_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \pi_i^{Y_i} (1 - \pi_i)^{1-Y_i} \end{aligned}$$

şeklinde olacaktır. Yalınlık amacıyla yukarıdaki ifadenin logaritması alınırsa

$$\begin{aligned} \ln L(Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \boldsymbol{\beta}) &= \ln \prod_{i=1}^n f_i(Y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[Y_i \ln\left(\frac{\pi_i}{1 - \pi_i}\right) \right] + \sum_{i=1}^n \ln(1 - \pi_i) \end{aligned}$$

elde edilir. $1 - \pi_i = (1 + \exp(X_i' \boldsymbol{\beta}))^{-1}$ ve $\eta_i = \ln(\pi_i / (1 - \pi_i)) = X_i' \boldsymbol{\beta}$ olduğundan log-olabirlik fonksiyonu

$$\ln L(Y, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n Y_i X_i' \boldsymbol{\beta} - \sum_{i=1}^n \ln(1 + \exp(X_i' \boldsymbol{\beta}))$$

şeklinde de yazılabilir. Lojistik regresyonda, gözlemler veya denemeler, X değişkeninin her düzeyinde tekrarlanır. Buna, tasarlanmış deneylerde sıkça rastlanır. Bu durumda, Y_i , i. gözlem için gözlenen 1'lerin sayısını ve n_i de her gözlemde denemelerin sayısını gösterebilir. Buna göre log-olabirlik fonksiyonu,

$$\ln L(Y, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n Y_i \pi_i + \sum_{i=1}^n n_i \ln(1 - \pi_i) - \sum_{i=1}^n Y_i \ln(1 - \pi_i)$$

şekline gelir.

MO tahminleri, IRLS(iteratif yeniden ağırlıklı EKK) ile elde edilebilir. Bilindiği gibi, MO tahmincileri,

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 0$$

ifadesinin çözümünden elde edilir. Bu ifade

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_i} \frac{\partial \pi_i}{\partial \beta} = 0$$

şeklinde de yazılabilir. Burada

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_i} = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{\pi_i} - \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{1-\pi_i} + \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{1-\pi_i}$$

ve

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial \beta} = \left[\frac{\exp(X_i' \beta)}{1 + \exp(X_i' \beta)} - \left(\frac{\exp(X_i' \beta)}{1 + \exp(X_i' \beta)} \right)^2 \right] X_i$$

dir. Tüm bunlar yerine konursa

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \beta} &= \left[\sum_{i=1}^n \frac{n_i}{\pi_i} - \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{1-\pi_i} + \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{1-\pi_i} \right] \pi_i (1-\pi_i) X_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{n_i}{\pi_i} - \frac{n_i}{1-\pi_i} + \frac{Y_i}{1-\pi_i} \right] \pi_i (1-\pi_i) X_i \\ &= \sum_{i=1}^n (Y_i - n_i \pi_i) X_i \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre, MO tahmincisi, $Y' = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ ve $\mu' = (n_1 \pi_1, n_2 \pi_2, \dots, n_n \pi_n)$

olmak üzere

$$X'(Y - \mu) = 0$$

ifadesinin çözümünden elde edilir. Bu denklem kümelerine çoğu kez maksimum olabilirlik skor denklemleri denir. Bu eşitlikler, aslında, doğrusal EKK'den elde edilen normal denklemlerle aynı yapıya sahiptirler. Bilindiği gibi, doğrusal regresyon modeli

$$E(Y) = X \beta = \mu \text{ ve normal denklemler,}$$

$$X' X b = X' Y$$

şeklindedir ve bunlar

$$X'(Y - X \beta) = 0$$

$$X'(Y - \mu) = 0$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Lojistik regresyon modelinde, skor denklemlerinin çözümünde Newton-Raphson Yöntemi kullanılır. Bu yöntem kısaca, çözümün etrafında, birinci derece Taylor serisi açılımı kullanır:

$$p_i - n_i \approx \left(\frac{\partial \pi_i}{\partial \beta} \right)' (\beta^* - \beta) \quad (4.8)$$

Burada $p_i = Y_i/n_i$ 'dir. β^* ise, β 'nın, skor denklemlerini sağlayan değerini göstermektedir.

$$\eta_i = X_i' \beta \quad \text{ve} \quad \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta} = X_i \quad \text{ve de,}$$

$$\pi_i = \frac{\exp(\eta_i)}{1 + \exp(\eta_i)}$$

olduğundan, zincir kuralı kullanılarak

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial \beta} = \frac{\partial \pi_i}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta} = \frac{\partial \pi_i}{\partial \eta_i} X_i$$

yazılabilir. Bu durumda (4.8),

$$\begin{aligned}
p_i - \pi_i &\approx \left(\frac{\partial \pi_i}{\partial \eta_i} \right) X_i' (\beta^* - \beta) \\
p_i - \pi_i &\approx \left(\frac{\partial \pi_i}{\partial \eta_i} \right) (X_i' \beta^* - X_i' \beta) \\
p_i - \pi_i &\approx \left(\frac{\partial \pi_i}{\partial \eta_i} \right) (\eta_i^* - \eta_i)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. Burada η_i^* , η_i 'nin, β^* 'da hesaplanan değeridir.

$$(Y_i - n_i \pi_i) = (n_i p_i - n_i \pi_i) = n_i (p_i - \pi_i)$$

ve

$$\pi_i = \frac{\exp(\eta_i)}{1 + \exp(\eta_i)}$$

olduğundan

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial \eta_i} = \frac{\exp(\eta_i)}{1 + \exp(\eta_i)} \left[\frac{\exp(\eta_i)}{1 + \exp(\eta_i)} \right]^2$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$Y_i - n_i \pi_i \approx [n_i \pi_i (1 - \pi_i)] (\eta_i^* - \eta_i)$$

dir. $\eta_i^* = X_i' \beta^*$ doğrusal kestirimcisinin varyansı yaklaşık olarak

$$\text{Var}(\eta_i^*) \approx \frac{1}{n_i \pi_i (1 - \pi_i)}$$

dir. Böylece,

$$Y_i - n_i \pi_i \approx \left[\frac{1}{\text{Var}(\eta_i^*)} \right] (\eta_i^* - \eta_i)$$

olur. Skor denklemleri yeniden

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\text{Var}(\eta_i^*)} \right] (\eta_i^* - \eta_i) = 0$$

şeklinde yazılabilir. Matris notasyonu ile de

$$X' V^{-1} (\eta^* - \eta) = 0$$

şeklinde ifade etmek mümkündür. Burada V , η_i 'nin varyanslarından elde edilen ağırlıkların oluşturduğu diyagonal bir matristir. $\eta = X \beta$ olduğundan skor denklemleri

$$X' V^{-1} (\eta^* - X \beta) = 0$$

olarak yazılabilir. β 'nin MO tahmincisi de

$$\tilde{\beta} = (X' V^{-1} X)^{-1} X' V^{-1} \eta^*$$

şeklinindedir. Fakat bu, η^* 'nin bilinmesini gerektirir. Bunun için (4.9) kullanılabilir:

$$p_i - \pi_i \approx \left(\frac{\partial \pi_i}{\partial \eta_i} \right) (\eta_i^* - \eta_i)$$

ifadesi η_i^* için çözülebilir,

$$\eta_i^* \approx \eta_i + (p_i - \pi_i) \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial \pi_i} \right)$$

Eğer, $z_i = \eta_i + (p_i - \pi_i) \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial \pi_i} \right)$ ve $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ olursa Newton-Raphson formülünden

β tahmini

$$\tilde{\beta} = (X' V^{-1} X)^{-1} X' V^{-1} z$$

olur. z_i 'nin rassal kısmı $(p_i - \pi_i) \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial \pi_i} \right)$ 'dir. Böylece

$$\begin{aligned} \text{Var}[(p_i - \pi_i) \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial \pi_i} \right)] &= \left[\frac{\pi_i(1 - \pi_i)}{n_i} \right] \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial \pi_i} \right)^2 \\ &= \left[\frac{\pi_i(1 - \pi_i)}{n_i} \right] \left(\frac{1}{\pi_i(1 - \pi_i)} \right)^2 \\ &= \frac{1}{n_i \pi_i (1 - \pi_i)} \end{aligned}$$

Burada V , z 'nin rassal kısmının varyanslarından elde edilen ağırlıkların oluşturduğu diyagonal matristir. Buna göre, Newton-Raphson yöntemi'ne dayanan IRLS algoritması şu şekilde özetlenebilir:

1. SEKK kullanılarak, β 'nin, b_0 gibi bir başlangıç tahmini bulunur.
2. b_0 kullanılarak V ve π tahmin edilir.
3. $\eta_0 = X b_0$ olarak alınır.
4. η_0 'dan z_1 elde edilir.
5. Yeni tahmin b_1 elde edilir ve uygun yakınsaklık kriteri sağlanana kadar iterasyonlara devam edilir.

Model parametrelerinin son tahmini b ile gösterilirse ve model varsayımları geçerliyse, asimptotik olarak

$$E(\mathbf{b}) = \beta \quad \text{ve} \quad \text{Var}(\mathbf{b}) = (X' V^{-1} X)^{-1}$$

olduğu gösterilebilir. Bununla birlikte tahmin edilen lojistik regresyon modeli

$$\hat{Y}_i = \hat{\pi}_i = \frac{\exp(\hat{\eta}_i)}{1 + \exp(\hat{\eta}_i)}$$

$$= \frac{\exp(X_i' b)}{1 + \exp(X_i' b)}$$

$$= \frac{1}{1 + \exp(-X_i' b)}$$

şeklinde gösterilebilir.

4.4.1.2 Lojistik Regresyon Modelindeki Parametrelerin Yorumu:

Başlangıçta, modelin tek bağımsız değişkene sahip olduğu düşünülürse, belirli bir X , örneğin X_i için tahmin edilen değer

$$\hat{\eta}(X_i) = b_0 + b_1 X_i$$

şeklinde gösterilir. X_{i+1} 'deki tahmin değeri ise,

$$\hat{\eta}(X_i + 1) = b_0 + b_1 (X_i + 1)$$

olacaktır ve iki tahmin arasındaki fark da

$$\hat{\eta}(X_i + 1) - \hat{\eta}(X_i) = b_1$$

olacaktır.

$\hat{\eta}(X_i)$, açıklayıcı değişkenin X_i değerini aldığı zaman ki log-bahistir. $\hat{\eta}(X_i + 1)$, ise açıklayıcı değişkenin $X_i + 1$ olduğunda, log-bahise eşittir. Buradan, iki tahmin arasındaki fark

$$\hat{\eta}(X_i + 1) - \hat{\eta}(X_i) = \ln(\text{bahis}_{X_i+1}) - \ln(\text{bahis}_{X_i})$$

$$= \ln\left(\frac{\text{bahis}_{X_i+1}}{\text{bahis}_{X_i}}\right)$$

$$= b_1$$

şeklinde de yazılabilir. Eğer yukarıdaki ifadenin antilogaritması alınırsa, aşağıdaki bahis oranı (odds ratio) elde edilir:

$$\hat{O}_R = \left(\frac{\text{bahis}_{X_i+1}}{\text{bahis}_{X_i}} \right) = e^{b_1}$$

Bahis oranı, açıklayıcı değişkendeki bir birimlik değişmeden kaynaklanan, başarı olasılığındaki tahmini artma olarak yorumlanabilir. Çok değişkenli lojistik regresyonda parametrelerin yorumu, tek açıklayıcı değişkenli durumdakine benzer. $\exp(b_j)$ miktarı, X_j için, diğer parametreler sabit varsayıldığında, bahis oranını verir.

4.4.1.3 Parametreler ile İlgili Hipotez Testleri:

Lojistik regresyonda (ve genel olarak GLM için) hipotez testi, olabilirlik oran testlerine dayanır. Bu testler, büyük örneklem özelliklerinin sağlanmasını gerektirir. Olabilirlik oranı yaklaşımı, sapma denilen bir istatistik ile ilgilidir.

Model Sapması:

Bir modelin sapması, oluşturulan modelin (fitted model) log-olabilirlik değeri ile, n parametrelili ve örneklem verisine çok iyi uyum gösteren, doymuş (saturated) modelin log-olabilirlik değerini karşılaştırır. Lojistik regresyon için bu, π_i olasılıklarının tamamen kısıtsız olduğu ve $\pi_i = Y_i$ ($Y_i = 0$ veya 1) alınmasının olabilirlik fonksiyonunu maksimize edeceği anlamına gelir. Doymuş model için, olabilirlik fonksiyonunun maksimum değerinin 1 olduğu gösterilebilir. Buradan da, log-olabilirlik fonksiyonunun maksimum değerinin 0 olduğu anlaşılır.

Oluşturulan modelin log-olabilirlik fonksiyonu göz önüne alınsın. MO tahmincisi $\tilde{\beta}$ kullanıldığında, log olabilirlik fonksiyonu, maksimum değeri olan,

$$\ln L(\tilde{\beta}) = \sum_{i=1}^n Y_i X_i' \tilde{\beta} - \sum_{i=1}^n \ln(1 + \exp(X_i' \tilde{\beta}))$$

değerini alır. Oluşturulan modelin log-olabilirlik fonksiyonunun aldığı değer, hiçbir zaman, doymuş modelin log-olabilirlik fonksiyonunun aldığı değeri aşamaz. Çünkü oluşturulan model daha az parametreye sahiptir. Model sapması, bu durumda, şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned}\lambda(\beta) &= 2 \ln L(\text{doymus model}) - 2 \ln L(\tilde{\beta}) \\ &= 2(l(\text{doymus model}) - l(\tilde{\beta}))\end{aligned}$$

Burada l , olabilirlik fonksiyonunun e tabanına göre logaritmasını göstermektedir. Eğer lojistik regresyon modeli, doğru fonksiyon ise ve örneklem genişliği n yeterli derece büyükse, model sapması istatistiği, yaklaşık olarak, $n-p$ serbestlik dereceli bir ki-kare dağılımı gösterir. Model sapmasının büyük değerleri, oluşturulan modelin doğru olmadığına işarettir. Bu testte karar kuralı şu şekildedir: $\lambda(\beta) > \chi_{\alpha, n-p}^2$ ise oluşturulan modelin doğru, uygun model olduğunu ifade eden sıfır hipotezi reddedilir. Aslında dikkat edilirse, model sapması, KDRM'deki SSE'nin σ^2 'ye bölünmüş şeklidir.

4.4.1.4 Sapma Kullanılarak Parametre Altkümeleri ile İlgili Hipotez Testi:

KDRM'de SSR'de veya SSE'de meydana gelen değişime dayanarak testler oluşturulduğu gibi, bu durumda da, sapma istatistiği, parametrelerin altkümelerinin testinde kullanılabilir.

Model

$$\begin{aligned}\eta &= X \beta \\ &= X_1 \beta_1 + X_2 \beta_2\end{aligned}$$

olarak yeniden yazılabilir. Burada tam(full) model p parametrelidir ve β_1 , bu parametrelerin $p-r$ tanesini içerirken, β_2 , r tanesini içerir. X_1 ve X_2 matrislerinin sütunları, bu parametrelerle ilgili değişkenleri içerir. Aşağıdaki hipotezlerin test edildiği varsayalım,

$$H_0 : \beta_2 = 0$$

$$H_1 : \beta_2 \neq 0$$

Bu durumda indirgenmiş(reduced) model

$$\eta = X_1 \beta_1$$

olacaktır. İndirgenmiş modelin tahmin edilmesinden sonra elde edilen sapma $\lambda(\beta_1)$ ile gösterilsin. İndirgenmiş modelin sapması, her zaman tam modelin sapmasından daha büyük olacaktır. Çünkü indirgenmiş model daha az parametreye sahiptir. Buna karşın, eğer indirgenmiş modelin sapması, tam modelin sapmasından fazla büyük değilse, bu, indirgenmiş modelin hemen hemen tam model kadar iyi olduğu ve β_2 'deki parametrelerin yaklaşık sıfıra eşit olduğu anlamına gelir. Bu durumda üstteki H_0 hipotezi reddedilemez. Buna karşın, eğer sapmalardaki fark büyükse, β_2 'de en azından bir parametrenin yaklaşık olarak sıfıra eşit olmadığı söylenebilir ve bu durumda da H_0 hipotezi reddedilir. Sapmadaki fark

$$\lambda(\beta_2 | \beta_1) = \lambda(\beta_1) - \lambda(\beta) \quad (4.10)$$

şeklindedir ve bu istatistik

$$n - (p - r) - (n - p) = r$$

serbestlik derecesine sahiptir. Eğer sıfır hipotezi doğruysa ve n yeteri kadar büyükse, (4.10)'daki sapma r serbestlik dereceli bir ki-kare dağılımı gösterir. Bu durumda karar kuralı:

$$\lambda(\beta_2 | \beta_1) \geq \chi_{\alpha, r}^2 \text{ ise } H_0 \text{ reddedilir}$$

şeklindedir. $\lambda(\beta_2, \beta_1)$ 'e bazen kısmi sapma da denir. Bazı durumlarda bu test için olabilirlik oranı kullanılır.

$$\frac{L(\tilde{\beta}_1)}{L(\beta)}$$

Bu durumda ise test istatistiği

$$\chi^2 = -2 \ln \frac{L(\tilde{\beta}_1)}{L(\beta)}$$

şeklindedir.

4.4.1.5 Tek Parametre için Testler:

$$H_0 : \beta_j = 0$$

$$H_1 : \beta_j \neq 0$$

şeklindeki tek bir parametre için test, önceki bölümde açıklanan sapmalardaki farka dayanarak yapılabilir. Bunun yanısıra, MO tahmincileri teorisine dayanan başka bir yaklaşım da mevcuttur. Büyük örneklem için, bir MO tahmincisinin dağılımı yaklaşık olarak normaldir ve sistematik hatası yoktur veya çok azdır. Bir MO tahmincileri kümesinin varyans ve kovaryansları, log-olabilirlik fonksiyonunun, parametrelere göre alınmış ikinci mertebeden kısmi türevlerinde, MO tahmin değerlerinin konulmasıyla elde edilebilir. Sonra yukarıdaki hipotezler t testi ile yaklaşık olarak test edilebilir. Buna bazen Wald çıkarsaması denir. G , $p \times p$ 'lik, log-olabilirlik fonksiyonunun ikinci mertebeden kısmi türevlerini gösteren matris olsun.

$$G_{ij} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \quad i, j=0,1,2,\dots,p-1$$

G 'ye Hessian matris denir. Eğer Hessian matrisin elemanları, MO tahminleri $\beta = \tilde{\beta}$ için hesaplanmışsa, parametrelerin yaklaşık büyük örneklem varyans-kovaryans matrisi

$$Var(\tilde{\beta}) = \hat{\Sigma} = S = -G(\tilde{\beta})^{-1}$$

şeklinde olur. Bu matrisin diyagonal elemanlarının pozitif karekökü ise büyük örneklem standart hatalarıdır. Dolayısıyla test istatistiği

$$z = \frac{\tilde{\beta}_j}{sh(\tilde{\beta}_j)}$$

olacaktır. Bu istatistik standart normal dağılım gösterir. Bazı paket bilgisayar programları bu istatistiğin karesini almakta ve onu 1 serbestlik dereceli ki-kare dağılımı ile karşılaştırmaktadırlar.

4.4.2 Poisson Regresyonu:

Poisson regresyon modeli, Y gözlem değerlerinin normal dağılmadığı ve görece seyrek olayların sayısını temsil ettiği bir modeldir. Bu olaylar, ürünlerdeki kusurların sayısı veya çevreyi kirleten bir kirleticinin sayımı gibi olaylar olabilir. Burada araştırmacı, gözlenen sayı ile potansiyel olarak faydalı olabilecek açıklayıcı değişkenler arasındaki ilişkiyi modellemek isteyebilir. Örneğin, bir birim üründeki kusur sayısı ve üretim şartları arasındaki ilişki gibi.

Açıklayıcı değişken Y_i , bir sayıyı, örneğin $Y_i=0,1,2,\dots$ gibi gözlemleri temsil etmektedir. Bu şekildeki veriler için uygun olasılık modeli Poisson dağılımıdır:

$$f(Y) = \frac{e^{-\mu} \mu^Y}{Y!} \quad Y=0,1,2,\dots$$

Burada μ parametresi, $\mu>0$ olacak şekildedir. Poisson dağılımında ortalama ve varyans birbiriyle ilişkilidir:

$$E(Y)=\mu \quad \text{ve} \quad \text{Var}(Y)=\mu$$

Poisson regresyon modeli

$$Y_i = E(Y_i) + \varepsilon_i$$

şeklinde yazılabilir. Y_i 'nin beklenen değeri ise

$$E(Y_i) = \mu_i$$

şeklinde dir. Beklenen değeri, doğrusal kestirimciyle ilişkilendiren ve g olarak gösterilen bir bağlantı fonksiyonu mevcuttur.

$$\begin{aligned} g(\mu_i) &= \eta_i \\ &= \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_{p-1} X_{p-1} \\ &= \mathbf{X}_i' \boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

Ortalama ile doğrusal kestirimci arasındaki ilişki

$$\mu_i = g^{-1}(\eta_i) = g^{-1}(\mathbf{X}_i' \boldsymbol{\beta})$$

şeklindedir. Poisson regresyonunda kullanılan genel olarak birçok bağlantı fonksiyonu mevcuttur. Bunlardan bir tanesi

$$g(\mu_i) = \mu_i = X_i' \beta$$

şeklindeki birim bağlantıdır. Bu bağlantı kullanıldığında, $\mu_i = g^{-1}(X_i' \beta) = X_i' \beta$ olduğu sürece $E(Y_i) = \mu_i = X_i' \beta$ olur.

Çok kullanılan bir başka bağlantı fonksiyonu ise log bağlantıdır.

$$g(\mu_i) = \ln \mu_i = X_i' \beta$$

Log bağlantı için, açıklanan değişkenin ortalaması ile doğrusal kestirimci arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} \mu_i &= g^{-1}(X_i' \beta) \\ &= e^{X_i' \beta} \end{aligned}$$

şeklindedir. Log bağlantı, Poisson regresyonu için önemlidir, çünkü açıklanan değişkenin tahmin edilen değerlerinin negatif olmamasını sağlar.

Poisson regresyonunda parametre tahmini için MOY kullanılır. Süreç, lojistik regresyondaki yaklaşım ile aynıdır. Eğer n tane Y gözlem değeri varsa ve bağımsız değişken X olmak üzere, olabilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned} L(Y, \beta) &= \prod_{i=1}^n f_i(Y_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\mu_i} \mu_i^{Y_i}}{Y_i!} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n \mu_i^{Y_i} \exp(-\sum_{i=1}^n \mu_i)}{\prod_{i=1}^n Y_i!} \end{aligned}$$

olur. Burada $\mu_i = g^{-1}(X_i' \beta)$ 'dir. Bağlantı fonksiyonu belirlendikten sonra, log-olabilirlik ifadesi maksimize edilebilir:

$$\ln L(Y, \beta) = \sum_{i=1}^n Y_i \ln \mu_i + \sum_{i=1}^n \mu_i - \sum_{i=1}^n \ln Y_i!$$

Lojistik regresyonda olduğu gibi, çözüm için IRLS kullanılabilir. Tahminci $\tilde{\beta}$ elde edildikten sonra, tahmin edilen model

$$\hat{Y}_i = g^{-1}(X_i' \tilde{\beta})$$

şeklinde ifade edilebilir. Örneğin, eğer birim bağlantı kullanılırsa, model

$$\begin{aligned} \hat{Y}_i &= g^{-1}(X_i' \tilde{\beta}) \\ &= X_i' \tilde{\beta} \end{aligned}$$

olarak, eğer log bağlantı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \hat{Y}_i &= g^{-1}(X_i' \tilde{\beta}) \\ &= \exp(X_i' \tilde{\beta}) \end{aligned}$$

olarak ifade edilir. Model ile ilgili çıkarsamalarda, lojistik regresyonda olduğu gibi aynı yaklaşım uygulanabilir. Bir başka deyişle, model sapması, modelin uyum iyiliği ile ilgili genel bir ölçüdür. Tam ve indirgenmiş model arasındaki sapma farkı parametre altkümeleri ile ilgili testlerde kullanılabilir. Bunlar olabirlik oranı testleridir. MO tahmincilerinin büyük örneklem özelliklerine dayanan Wald çıkarsaması da, tek parametre testinde ve güven aralığı oluşturmada kullanılabilir.

4.4.3 Genelleştirilmiş Doğrusal Modeller (GLM):

GLM, normallik varsayımını içeren doğrusal regresyon modelleriyle, lojistik ve Poisson regresyonu gibi doğrusal olmayan modelleri birleştiren ve regresyon ve deneysel tasarım modellerini birleştirici bir yaklaşımdır. GLM'de açıklanan değişken, üstel dağılım ailesine ait bir dağılım gösterir. Bu aile, normal, binomiyal, Poisson, ters normal, üstel ve gama dağılımlarını içerir.

Üstel aileye ait dağılımlar, şu genel yapıya sahiptir:

$$f(Y_i, \theta_i, \phi) = \exp[(Y_i \theta_i - b(\theta_i)) / a(\phi) + h(Y_i, \phi)]$$

Burada ϕ , bir ölçek(scale) parametresidir ve θ_i ise doğal konum(location) parametresidir.

Üstel aileye ait dağılımlar için,

$$\begin{aligned} \mu = E(Y) &= \frac{db(\theta_i)}{d\theta_i} \\ \text{Var}(Y) &= \frac{d^2b(\theta_i)}{d\theta_i^2} a(\phi) \\ &= \frac{d\mu}{d\theta_i} a(\phi) \end{aligned}$$

dir.

$$\text{Var}(\mu) = \frac{\text{Var}(Y)}{a(\phi)} = \frac{d\mu}{d\theta_i} \quad (4.11)$$

olsun. Burada $\text{Var}(\mu)$, Y'nin varyansının kendi ortalamasına bağlılığını göstermektedir. Bu, normal dağılım dışında, üstel aileye ait tüm dağılımların bir özelliğidir. (4.11)'in sonucu olarak,

$$\frac{d\theta_i}{d\mu} = \frac{1}{\text{Var}(\mu)}$$

yazılır.

Üstel Aile:

Önceki bölümde belirtildiği gibi üstel aileye ait dağılımlar

$$f(Y_i, \theta_i, \phi) = \exp[(Y_i \theta_i - b(\theta_i)) / a(\phi) + h(Y_i, \phi)]$$

şeklinde tanımlanır. Burada normal, binomiyal ve Poisson dağılımlarının üstel aileye ait dağılımlar olduğu gösterilecektir.

1. Normal Dağılım:

$$\begin{aligned}
f(Y_i, \theta_i, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(Y - \mu)^2\right) \\
&= \exp\left[-\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{Y^2}{2\sigma^2} + \frac{Y\mu}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right] \\
&= \exp\left[\frac{1}{\sigma^2}\left(-\frac{Y^2}{2} + Y\mu - \frac{\mu^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2)\right] \\
&= \exp\left[\frac{1}{\sigma^2}\left(Y\mu - \frac{\mu^2}{2}\right) - \frac{Y^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2)\right]
\end{aligned}$$

Böylece, normal dağılım için,

$$\theta_i = \mu$$

$$b(\theta_i) = \frac{\mu^2}{2}$$

$$a(\phi) = \sigma^2$$

$$h(Y_i, \phi) = -\frac{Y^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2)$$

$$E(Y) = \frac{db(\theta_i)}{d\theta_i} = \mu$$

ve

$$\text{Var}(Y) = \frac{d^2b(\theta_i)}{d\theta_i^2} a(\phi) = \sigma^2$$

olur.

2. Binomiyal Dağılım:

$$\begin{aligned}
f(Y_i, \theta_i, \phi) &= C_{m,n} \pi^Y (1 - \pi)^{n-Y} \\
&= \exp\left[\ln C_{Y,n} + Y \ln \pi + n \ln(1 - \pi) - Y \ln(1 - \pi)\right] \\
&= \exp\left[Y \ln\left(\frac{\pi}{1 - \pi}\right) + n \ln(1 - \pi) + \ln C_{Y,n}\right]
\end{aligned}$$

Buradan, binomiyal dağılım için

$$\theta_i = \ln\left(\frac{\pi}{1 - \pi}\right) \text{ ve } \pi = \frac{\exp(\theta_i)}{1 + \exp(\theta_i)}$$

$$b(\theta_i) = -n \ln(1 - \pi)$$

$$a(\phi) = 1$$

$$h(Y_i, \phi) = \ln C_{Y,n}$$

$$E(Y) = \frac{db(\theta_i)}{d\theta_i} = \frac{db(\theta_i)}{d\pi} \frac{d\pi}{d\theta_i}$$

Burada

$$\frac{d\pi}{d\theta_i} = \frac{\exp(\theta_i)}{1 + \exp(\theta_i)} - \left(\frac{\exp(\theta_i)}{1 + \exp(\theta_i)} \right)^2$$

$$= \pi(1 - \pi) \text{ 'dir.}$$

Buradan,

$$E(Y) = \left(\frac{n}{1 - \pi} \right) \pi(1 - \pi)$$

$$= n\pi$$

bulunur. Bu, görüldüğü gibi binomiyal dağılımın ortalamasıdır. Ayrıca varyans da

$$\text{Var}(Y) = n\pi(1 - \pi)$$

olarak bulunur.

3. Poisson Dağılımı:

$$f(Y_i, \theta_i, \phi) = \frac{\lambda^Y e^{-\lambda}}{Y!}$$

$$= \exp[Y \ln \lambda - \lambda - \ln(Y!)]$$

Buradan, Poisson dağılımı için,

$$\theta_i = \ln(\lambda) \quad \text{ve} \quad \lambda = \exp \theta_i$$

$$b(\theta_i) = \lambda$$

$$a(\phi) = 1$$

$$h(Y_i, \phi) = -\ln(Y!)$$

elde edilir. Bu durumda,

$$E(Y) = \frac{db(\theta_i)}{d\theta_i} = \frac{db(\theta_i)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\theta_i}$$

dir. Buna karşın,

$$\frac{d\lambda}{d\theta_i} = \exp(\theta_i) = \lambda$$

olduğundan, Poisson dağılımının ortalaması,

$$E(Y) = 1 \cdot \lambda = \lambda$$

dır ve varyansı da,

$$Var(Y) = \frac{dE(Y)}{d\theta_i} = \lambda$$

şeklindedir.

4.4.3.1 Bağlantı Fonksiyonları ve Doğrusal Kestirimciler:

Bir GLM'deki temel fikir, açıklanan değişkenin beklenen değerinin uygun bir fonksiyonu için doğrusal bir model geliştirmektir. η_i ,

$$\eta_i = g(E(Y_i)) = g(\mu_i) = \mathbf{X}_i' \boldsymbol{\beta}$$

şeklinde tanımlanan doğrusal bir kestirimci olsun. Y'nin beklenen değeri,

$$E(Y_i) = g^{-1}(\eta_i) = g^{-1}(\mathbf{X}_i' \boldsymbol{\beta})$$

şeklindedir. Burada g'ye bağlantı fonksiyonu denir. Bağlantı fonksiyonun seçimi ile ilgili birçok seçenek vardır, fakat eğer

$$\eta_i = \theta_i$$

seçilirse η_i 'ye kanonik bağlantı denir. Çizelge 4.4'te, GLM ile birlikte kullanılan dağılımlardan en çok seçilen bazıları için kanonik bağlantılar görülmektedir.

Çizelge 4.4 GLM için kanonik bağlantılar (Montgomery vd., 2001)

Dağılım	Kanonik Bağlantı
Normal	$\eta_i = \mu_i$ (Birim bağlantı)
Binomiyal	$\eta_i = \ln(\pi_i / (1 - \pi_i))$ (Lojistik bağlantı)
Poisson	$\eta_i = \ln(\lambda)$ (Log bağlantı)
Üstel	$\eta_i = \frac{1}{\lambda_i}$ (Ters bağlantı)
Gama	$\eta_i = \frac{1}{\lambda_i}$ (Ters bağlantı)

GLM ile kullanılan başka bağlantı fonksiyonları da vardır. Bunlar:

1. Probit bağlantı:

$$\eta_i = \Phi^{-1}(E(Y_i))$$

şeklindedir ve Φ burada kümülatif standart normal dağılım fonksiyonunu ifade eder.

2. Tamamlayıcı log-log bağlantı:

$$\eta_i = \ln(\ln(1 - E(Y_i)))$$

3. Kuvvet(power) ailesi bağlantısı:

$$\eta_i = \begin{cases} E(Y_i)^\lambda, \lambda \neq 0 \\ \ln(E(Y_i)), \lambda = 0 \end{cases}$$

Temel fikir olarak, açıklanan değişken dağılımı ve bağlantı fonksiyonu olmak üzere, GLM'nin iki bileşeni olduğu kabul edilir. Bağlantı fonksiyonunun seçimi, açıklanan değişken üzerinde yapılan bir dönüşümle benzer şekildedir. Buna karşın, dönüşümden farklı olarak bağlantı fonksiyonu, açıklanan değişkenin doğal dağılımından faydalanır. Uygun olmayan bir dönüşümün, model oluşturmada önemli sorunlara neden olması gibi, bağlantı fonksiyonunun uygun olmayan seçimi de önemli sorunları beraberinde getirebilir.

4.4.3.2 GLM'de Parametre Tahmini ve Çıkarsama:

MO yöntemi, GLM'de parametre tahmini için teorik bir temel oluşturur. Buna karşın, MO yönteminin yerine getirilmesi, iteratif yeniden ağırlıklandırılmış EKK(IRLS)'ye dayanan bir algoritmayı gerektirir. Bu süreç, lojistik regresyondaki ve Poisson regresyonundaki ile aynıdır.

Eğer, $\tilde{\beta}$, IRLS sürecinden elde edilen son tahmin değeri ise ve eğer, bağlantı fonksiyonunun da seçimi dahil olmak üzere modelin tüm varsayımları doğruysa, asimptotik olarak,

$$E(\tilde{\beta}) = \beta \text{ ve } \text{Var}(\tilde{\beta}) = a(\phi)(X'V^{-1}X)^{-1}$$

olduğu gösterilebilir.

GLM hakkında bazı önemli noktalar şöyle sıralanabilir:

1. Dönüşüm kullanıldığında, model tahmini için dönüştürülmüş verilere dayanan SEKK kullanılır.
2. GLM'de ise varyans sabit değildir ve parametre tahmini için AEKK kullanılır.
3. Bu, bir GLM'nin, dönüşümle varyansı sabitlenen bir model ile aynı analiz özellikleri göstermesini gerektirir.

4. Lojistik regresyonda açıklanan tüm çıkarsamalar, GLM’de de doğrudan uygulanabilir. Başka bir deyişle, model sapması, modelin bütün olarak uyumunun testinde kullanılabilir. Bunun yanında, tam ve indirgenmiş model arasındaki sapma farkı, parametre altkümeleri ile ilgili testlerde kullanılabilir. Wald çıkarsaması, tek parametre testinde ve güven aralığı oluşturmada uygulanabilir.

4.4.3.3 GLM ile Kestirim ve Tahmin:

Herhangi bir GLM için, bir \mathbf{X}_0 noktasında ortalamanın tahmini

$$\hat{Y}_0 = \hat{\mu}_0 = g^{-1}(\mathbf{X}_0' \tilde{\boldsymbol{\beta}})$$

şeklindedir. Burada g bağlantı fonksiyonudur ve \mathbf{X}_0 , doğrusal kestirimcide bulunabilecek etkileşim terimleri gibi terimler barındırması gerekiyorsa, model biçimine genişletilebilir. Bu nokta için ortalamaya ait yaklaşık güven aralığı şöyle oluşturulur:

$$\boldsymbol{\Sigma} = a(\phi)(\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1}$$

Burada $\boldsymbol{\Sigma}$, $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ için asimptotik varyans-kovaryans matrisidir. \mathbf{X}_0 da, tahmin edilen doğrusal kestirimcinin asimptotik varyansı da,

$$\text{Var}(\hat{\eta}_0) = \text{Var}(\mathbf{X}_0' \tilde{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{X}_0' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{X}_0$$

şeklindedir. Böylelikle, bu varyansın bir tahmini $\mathbf{X}_0' \mathbf{S} \mathbf{X}_0$ şeklindedir. Burada \mathbf{S} , $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ ‘nin tahmin edilmiş varyans-kovaryans matrisidir. \mathbf{X}_0 ’daki gerçek ortalamaya ait %100(1- α)’lık güven aralığı

$$L \leq \mu(\mathbf{X}_0) \leq U$$

şeklindedir. Burada alt sınır L ve üst sınır U şu şekildedir:

$$L = g^{-1}(\mathbf{X}_0' \tilde{\boldsymbol{\beta}} - Z_{\alpha/2} \mathbf{X}_0' \mathbf{S} \mathbf{X}_0)$$

$$U = g^{-1}(\mathbf{X}_0' \tilde{\boldsymbol{\beta}} + Z_{\alpha/2} \mathbf{X}_0' \mathbf{S} \mathbf{X}_0)$$

Güven aralıkları oluşturmada kullanılan bu yöntem uygulamada iyi sonuç verir, çünkü $\tilde{\beta}$, bir MO tahmincisidir ve bundan dolayı, $\tilde{\beta}$ 'nin herhangi bir fonksiyonu da MO tahmincisi olacaktır. Ortalamanın yaklaşık güven aralığı ile ilgili başka ifadeler elde etmek mümkündür (Montgomery vd., 2001).

4.5 Önemli Doğrusal Olmayan Regresyon Modelleri:

Bu bölümde, zamanla değişen büyüme davranışını açıklayan bazı doğrusal olmayan modeller tanıtılacaktır. Büyüme modelleri birçok alanda kullanılır. Bunlar arasında biyoloji, botanik, tarım, zooloji ve ekoloji gibi bilimlere sıralamak mümkündür. Büyüme süreci, çeşitli organizmalarda, bitkilerde, hayvanlarda ve insanlarda görülür. Kimya ve kimya mühendisliğinde ise, büyüme, kimyasal reaksiyonların bir sonucu olarak yorumlanır. Bunun yanında ekonomide ve sosyal bilimlerde büyüme, organizasyonların büyümesi, madde ve yiyecek arzları ve nüfus değişimi olarak ortaya çıkar.

Büyüme modelleri, genelde, ampirik olmaktan çok mekanistiktir. Mekanistik bir model, çoğunlukla, büyümenin şekliyle ilgili yapılan varsayımların bir sonucu olarak ortaya çıkar. Bu varsayımları temsil eden diferansiyel veya fark denklemlerinin yazılması ve bu denklemlerin çözülmesi ile bir büyüme modeli elde edilir. Diğer yandan, ampirik bir model, bilinmeyen mekanistik bir modele yaklaşacak şekilde seçilen bir modeldir. Çoğunlukla, bir ampirik model, uygun mertebede bir polinomdur.

4.5.1 Mekanistik Büyüme Modellerine Bir Örnek: Monomoleküler Büyüme Modeli:

Belirli bir t zamanında büyüme oranının doğrudan büyüme miktarı ile orantılı olduğuna inanılan bir büyüme durumu göz önüne alınsın. Büyümenin maksimum değeri, α ile ve t anındaki değeri ω ile gösterilirse

$$\frac{d\omega}{dt} = k(\alpha - \omega) \quad (4.12)$$

yazılabilir. Burada k bir orantı sabitidir. Bu diferansiyel ifadenin çözümü ile;

$$\omega = \alpha(1 - \beta e^{-kt}) \quad (4.13)$$

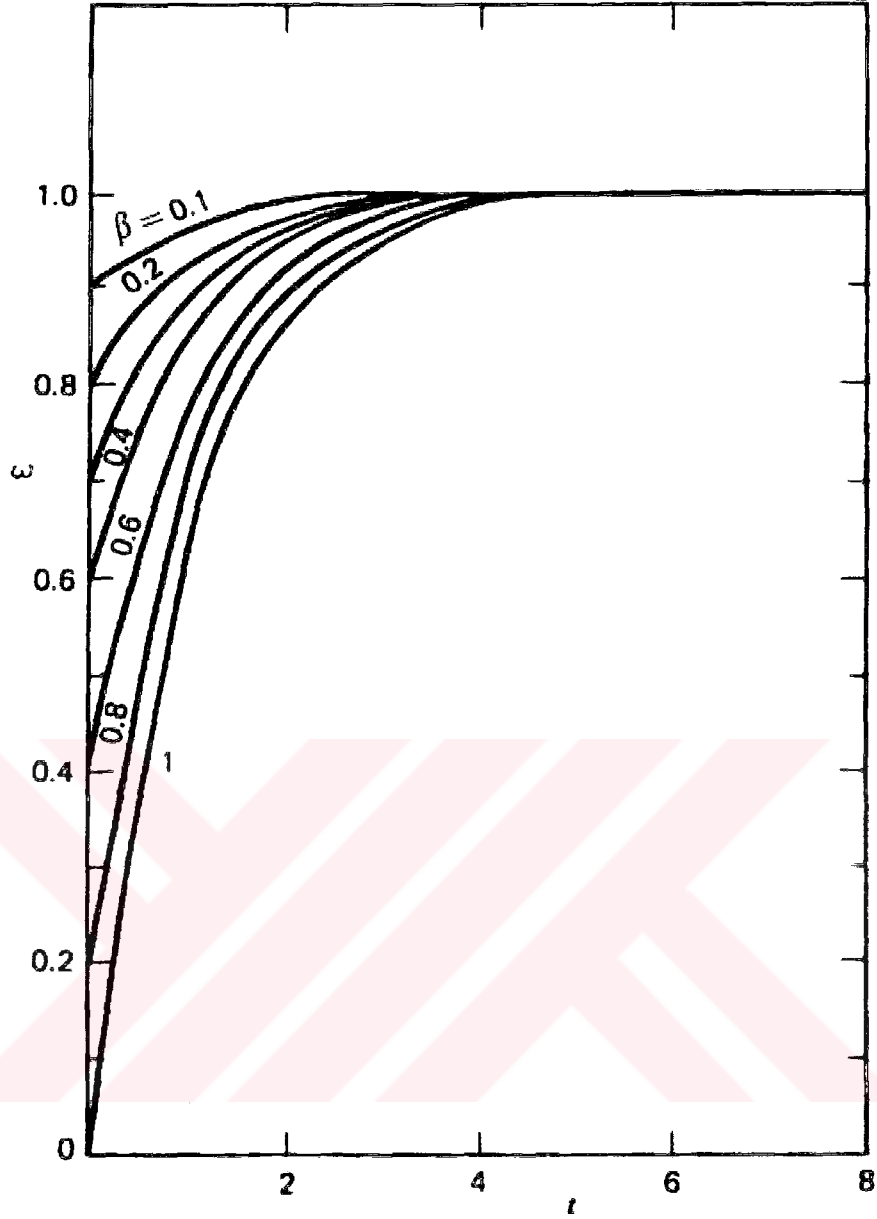
monomoleküler büyüme fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyon $t=0$ 'da, $\alpha(1-\beta)$ noktasından limit değeri α 'ya kadar yükselir. Hiçbir büküm (herhangi t için $d^2\omega/dt^2$ 'nin işaret değiştirdiği) noktası yoktur.

α bir ölçek faktörü olduğundan inceleme amacıyla $\alpha=1$ alınsın. Yine bu amaçla k ve t , bir birim olarak kt şeklinde birarada olduklarından $k=1$ alınsın. Bu durumda değişen β 'lar için Şekil 4.2'deki gibi eğriler elde edilir. Değişik bir α 'nın seçimi, eğrinin dikey skalasını değiştirecektir. Aynı şekilde değişik bir k 'nın seçimi de grafiği yatay olarak uzatacak ya da büzecektir. $t=0$ da, her eğri $\omega = \alpha(1-\beta)$ değerinden başlar ve $\alpha=1$ için bu $1-\beta$ 'dır.

Şekil 4.2'deki eğriler, (4.13)'de verilen teorik fonksiyona dayanan teorik eğrilerdir. Eğer t_1, t_2, \dots, t_n zamanlarında elde edilen gözlemlerin $w_i, i=1, 2, \dots, n$ olduğu varsayılırsa, model

$$w_i = \alpha(1 - \beta e^{-kt_i}) + \varepsilon_i \quad (4.14)$$

şeklinde varsayılabilir. ε_i burada beklenen değeri sıfır ve varyansı sabit hata paylarını göstermektedir.



Şekil 4.2 Çeşitli β 'lar için $\omega = 1 - \beta e^{-t}$ biçimindeki teorik eğriler (Draper ve Smith, 1998)

4.5.2 Lojistik Model:

Büyüme oranının

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k\omega(\alpha - \omega)}{\alpha} \quad k > 0 \quad (4.15)$$

olduğu varsayalım. Başka bir ifade ile, büyüme oranı, şu an ki büyüklük ile gelecekteki büyüme miktarının çarpımı ile orantılıdır.

Eğer (4.15), (4.12) ile karşılaştırılırsa büyüme oranının şu an ki büyüklüğe göre ifade edildiği görülür $((d\omega/dt)/\omega)$. Yukarıdaki ifade çözülerek

$$\omega = \alpha / (1 + \beta e^{-kt}) \quad (4.16)$$

lojistik veya otokatalitik büyüme fonksiyonuna ulaşılır. Eğri S şeklindedir. $t=0$ için $\omega = \alpha / (1 + \beta)$ değeri, diğer bir deyişle, başlangıç büyüme değerini elde edilir. $t=\infty$ için de $\omega = \alpha$, limit büyüme değerini bulunur. ($\beta > 0$ ve $k > 0$)

(4.15)'ten eğrinin eğiminin her zaman pozitif olduğu ve ikinci türevin

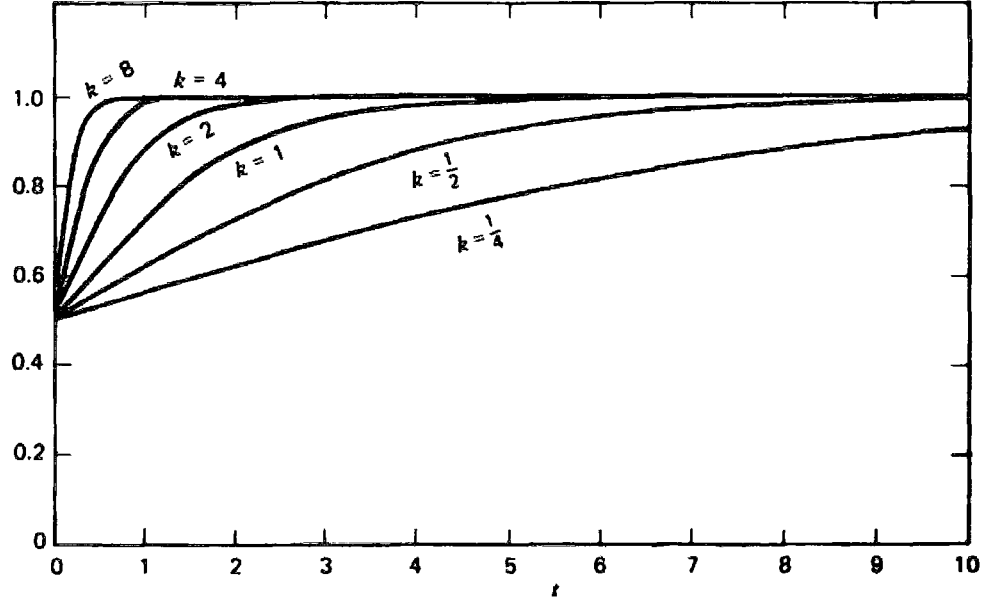
$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{k(\alpha - 2\omega)}{\alpha}$$

$\omega < 0.5\alpha$ için pozitif olduğu görülür. $\omega = \omega_i = 0.5\alpha$ noktası büküm noktasıdır. $\omega > 0.5\alpha$ için de ikinci türev negatif olur. Büküm noktası için (4.16)'dan $t_1 = (\ln \beta) / k$ bulunur. (4.16)'da $t = t_1 + u$ yazılırsa $\omega = \alpha / (1 + e^{-ku})$ olmak üzere

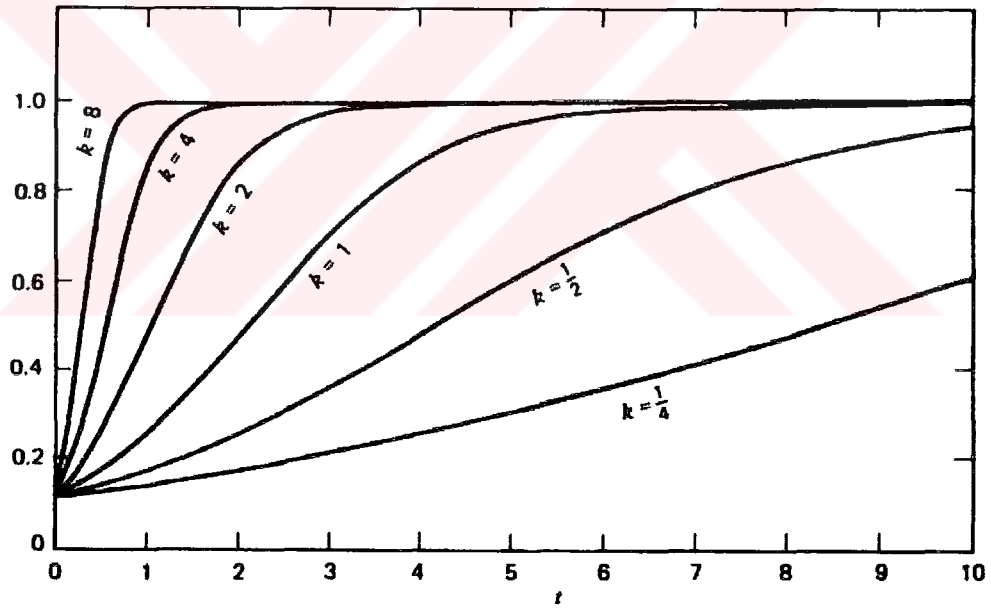
$$\omega - \omega_i = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1 - e^{-ku}}{1 + e^{-ku}} \right) = g(u)$$

bulunur. Buradan da büküm noktasına göre fonksiyonun simetrik olduğu görülür. Çünkü $g(-u) = -g(u)$ 'dur. Dikkat edilecek olursa $0 < \beta < 1$ olduğu zaman, eğri büküm noktasının üstünden başlar.

Eğrinin görünümünü elde etmek amacıyla genellikle bir şey kaybetmeden $\alpha = 1$ alınabilir. Bu durumda, (4.16), çeşitli β ve k değerleri için çizilebilir. Şekil 4.3 ve Şekil 4.4'te çeşitli durumlar için eğrinin görünümü verilmiştir. β 'nın değişimi $t=0$ 'da dikey skaladaki başlangıç noktasını değiştirir. k 'nın değişimi ise eğrinin dikliğini değiştirecektir.



Şekil 4.3 Çeşitli k'lar için $1/(1 + e^{-kt})$ şeklindeki teorik eğriler (Draper ve Smith, 1998)



Şekil 4.4 Çeşitli k'lar için $1/(1 + 8e^{-kt})$ şeklindeki teorik eğriler (Draper ve Smith, 1998)

Lojistik Modelin Başka Bir Şekli:

(4.16)'nın e tabanına göre logaritması alınırsa,

$$\eta = \delta - \ln(1 + \beta e^{-kt}) \quad (4.17)$$

elde edilir. Burada $\eta = \ln \omega$ ve $\delta = \ln \alpha$ dönüşümleri yapılmıştır. Aslında bu eğrinin şekilleri, logaritmik dönüşümden kaynaklanan dikey skaladaki değişim dışında, Şekil 4.3 ve Şekil 4.4'tekilerle aynıdır. (4.16) ve (4.17)'deki denklemlerin, EKK ile verilere uygulanması, modellerin türetilişinden dolayı tamamen farklı varsayımlara dayanır. Nelder(1961)'e göre, η , $Y_i = \ln w_i$ (w_i büyüme gözlemleri) gözlemlerinin sabit varyanslı olması, bitkilerdeki büyüme için genelde akla uygundur. Uygulamada ise, hem (4.16) hem de (4.17) modelleri oluşturulabilir ve kalıntılar incelenerek hangi modelin araştırmacının amaçlarına uygun olduğuna karar verilebilir.

4.5.3 Gompertz Modeli:

Eğer büyüme oranı

$$\frac{d\omega}{dt} = k\omega \cdot \log(\alpha / \omega) \quad (4.18)$$

olursa, bu ifade integre edilerek

$$\omega = \alpha \cdot e^{-\beta e^{-kt}} \quad (4.19)$$

şeklindeki Gompertz modeli elde edilir. Eğri, lojistik modeldeki gibi S şeklinde olmasına rağmen büküm noktasına göre simetrik değildir. $d^2\omega/dt^2 = 0$ 'dan $\omega_t = \alpha/e = 0.368\alpha$ bulunur. Büküm noktası için (4.19)'dan $t_1 = (\log \beta)/k$ elde edilir. (4.18) ve (4.19)'dan şu ilişkiler yazılabilir.

$$\frac{d\omega/dt}{\omega} = k(\log \alpha - \log \omega)$$

$$\frac{d\omega/dt}{\omega} = k\beta e^{-kt}$$

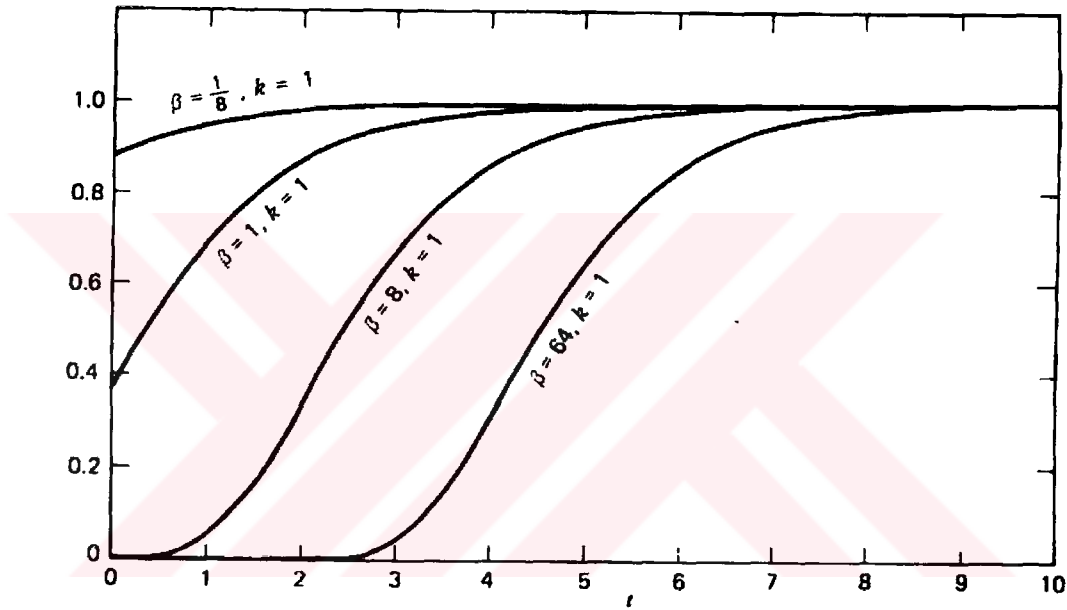
ikinci eşitlik daha yalın biçimde

$$\log\left(\frac{d\omega/dt}{\omega}\right) = \log(k\beta) - kt$$

olarak yazılabilir. Birinci eşitlik, görelî büyüme oranı ile $\log \omega$ arasında doğrusal bir ilişkiyi ifade eder. İkinci eşitlik ise, görelî büyüme oranı ile zaman arasında doğrusal bir ilişkiyi ifade

eder. Richards (1959)'a göre, bu eğri, botanik uygulamalardan daha çok, popülasyon çalışmalarında ve hayvan büyümesinde kullanılmıştır. Örneğin Medawar (1940) tarafından, bir tavuğun kalbinin büyüme süreci ile ilgili bir çalışmada kullanılmıştır. Buna karşın Pelargonium yapraklarının büyümesi ile ilgili bir çalışmada da Amer ve Williams (1957) tarafından kullanılmıştır.

Gompertz modelinde $t \rightarrow \infty$ için $\omega \rightarrow \alpha$ limit büyümeyi verir. $t=0$ için ise $\omega = \alpha^{-\beta}$ başlangıç büyüme değeri elde edilir. Eğer $\alpha=1$ alınır ve $k=1$ olmak üzere, bazı β değerleri için grafik Şekil 4.5'teki gibi olur.



Şekil 4.5 $\alpha=1$ için $\omega = \alpha \cdot e^{-\beta e^{-kt}}$ şeklindeki Gompertz modelinden seçilmiş teorik eğriler (Draper ve Smith, 1998)

4.5.4 Von Bertalanffy Modeli:

Bu model şu şekildedir:

$$\omega = (\alpha^{1-m} - \theta e^{-kt})^{1/(1-m)}$$

α , θ , k ve m olmak üzere dört parametreye sahiptir. Modelin orijinal türetilişi Von Bertalanffy(1941, 1957)'ye aittir. Bu model için şunlar söylenebilir:

- i) $m=0$ için $\theta = \alpha \cdot \beta$ olmak üzere monomoleküler büyüme modeli elde edilir.

- ii) $m=2$ için $\theta = \beta/\alpha$ olmak üzere lojistik büyüme modeli elde edilir.
- iii) $m \rightarrow 1$ 'e yaklaştıkça eğri Gompertz modeline yaklaşacaktır.
- iv) $m > 1$ ise $\theta < 0$, $m < 1$ ise $\theta \geq 0$ olacaktır (Draper ve Smith, 1998).

4.5.5 Michaelis-Menten Modeli:

Kimyasal kinetikte(enzim reaksiyonlarının hızı ile ilgili deneylerde) sıkça kullanılan modellerden biri Michaelis-Menten modelidir. Bu model şu şekildedir:

$$E(Y_i) = f(X_i, \beta) = \frac{\beta_1 X_i}{\beta_2 + X_i}$$

Beklenen değer fonksiyonu basitçe doğrusallaştırılabilir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(X_i, \beta)} &= \frac{\beta_2 + X_i}{\beta_1 X_i} \\ &= \frac{1}{\beta_1} + \frac{\beta_2}{\beta_1 X_i} \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 z_1 \end{aligned}$$

4.5.6 Weibull Büyüme Modeli:

Weibull büyüme modeli,

$$Y_i = \beta_1 - \beta_2 \exp(-\beta_3 t_i^{\beta_4}) + \varepsilon_i$$

$t=0$ için $Y_i = \beta_1 - \beta_2$ elde edilir. t sonsuza büyüdükçe, büyümenin alacağı maksimum değer β_1 olacaktır.

Bazı uygulamalarda modelin beklenen değeri, bir doğrusal diferansiyel denklemler kümesinin çözümü olarak verilir. Bu modeller çoğunlukla kompartman modelleri olarak adlandırılır. Kimyasal reaksiyonlar, çoğu kez, birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemi ile ifade edilir. Bu modeller, kimyada, kimya mühendisliğinde ve farmakolojide uygulama alanı bulur. Diğer durumlarda ise, doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü olabilir. Bazı

durumlarda ise beklenen değer, analitik çözümlü olmayan integral denklemden oluşabilir. Bu tür problemler için özel teknik ve yöntemler mevcuttur (Myers vd., 2002).

4.5.7 Kompartman Modelleri ve Sistem Diyagramları:

Kompartman modellerinin çoğunlukla kullanıldığı alan, biyolojik sistemler arası madde değişiminin araştırıldığı farmakokinetiktir. Sistem kompartmanlara bölünür ve kompartmanlar arasında ilaçların akış oranlarının birinci mertebeye kinetik(kinetics) izlediği varsayılır. Bundan dolayı, batma(alıcı) kompartmanına transfer oranı, kaynak(sağlayıcı) kompartmanındaki konsantrasyonla orantılıdır. Zamana göre sabit varsayılan transfer katsayılarına, oran sabiti adı verilir.

Örnek 1:

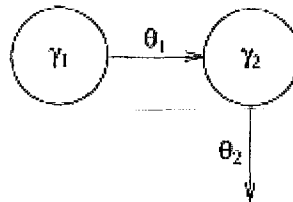
Kompartman modellerine bir örnek olarak, serumdaki tetrasiklin hidroklorid(tetracycline hydrochloride) konsantrasyonu ele alınsın. Bir tetrasiklin bileşimi, bir bireye oral yoldan verilir ve 16 saatlik periyotlarla, tetrasiklin hidroklorid konsantrasyonu serumda ölçülür.

Biyolojik sistem, kimyasalın içine girdiği bir bağırsak kompartmanı, kimyasal bağırsaktan emen bir kan kompartmanı ve bir elimine etme yolu olarak modellenebilir. Birinci mertebeye kinetik varsayımı ile, iki kompartmandaki tetrasiklinin $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))^T$ konsantrasyonu aşağıdaki diferansiyel denklemler ile açıklanabilir:

$$\frac{d\gamma_1(t)}{dt} = \dot{\gamma}_1 = -\theta_1\gamma_1(t)$$

$$\frac{d\gamma_2(t)}{dt} = \dot{\gamma}_2 = \theta_1\gamma_1(t) - \theta_2\gamma_2(t)$$

Burada nokta, zamana göre türevi temsil etmektedir. Sistem, bir kompartman veya sistem diyagramı ile Şekil 4.6'daki gibi temsil edilebilir.



Şekil 4.6 Tetrasiklin modeli için bir kompartman veya sistem diyagramı (Bates ve Watts, 1988)

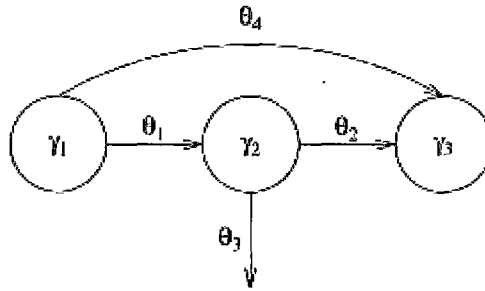
Kimyasal reaksiyonlar da birinci mertebeye diferansiyel denklemlerin doğrusal sistemleri olarak tarif edilebilirler. Bu durumda, reaksiyonun kimyasal türleri(species) kompartmanları oluştururlar.

Örnek 2:

Kimyasal reaksiyonlara örnek olarak, Ziegel ve Gorman (1980) tarafından açıklanan killi yapraktaşı yağının pirolisisi (pyrolysis of oil shale) ele alınacaktır. Killi yapraktaşı yağı, organik olarak taşın yapısına bağlanmış organik metaller içerir. Yağı taştan çıkarmak için ısı uygulanır ve bu tekniğe pirolisis denir.

Pirolisis sırasında, kerojen olarak adlandırılan benzen organik maddesi, yağa ve bitumene ayrıştırılır. Bu esnada çözünmeyen organik artıklar ve hafif gazlar şeklinde yan ürünler ortaya çıkar. Ziegel ve Gorman, Hubbard ve Robinson (1950)'dan elde edilen verileri kullanarak, birçok aday modelden oran katsayılarını tahmin etmişlerdir.

Ziegel ve Gorman, çok tepkili tahmin (multiresponse estimation) yöntemini kullanarak, 400 derecede elde edilen verilerle son modeli oluşturmuşlardır. Bu model, doğrusal diferansiyel denklemler kümesine karşılık gelir ve Şekil 4.7'deki diyagram ile gösterilebilir.



Şekil 4.7 Pirolisis için sistem diyagramı (Bates ve Watts, 1988)

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = -(\theta_1 + \theta_4)\gamma_1$$

$$\frac{d\gamma_2}{dt} = \theta_1\gamma_1 - (\theta_2 + \theta_3)\gamma_2$$

$$\frac{d\gamma_3}{dt} = \theta_4\gamma_1 + \theta_2\gamma_2$$

Burada γ_1 , kerojeni, γ_2 , bitumeni ve γ_3 de yağı göstermektedir. Modele göre, kerojen, θ_1 oran sabiti ile bitumene ve θ_4 oran sabiti ile yağa ayrışmaktadır. Sonra bitumen, θ_2 oran sabiti ile yağa ve θ_3 oran sabiti ile de ölçülmeyen yan ürünlere ayrışmaktadır (Bates ve Watts, 1988).



5. DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYONDA TAHMİN

5.1 Doğrusal Olmayan Regresyonda Tahmin Hakkında Ön Bilgi:

Daha önce ifade edildiği gibi, basit doğrusal regresyonda, EKK yöntemi, aşağıdaki $\sum e_i^2$ değerinin minimizasyonuna dayanır:

$$\sum e_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i))^2$$

Bu değeri minimize etmenin bir yolu, nümerik yöntemlere başvurmaktır. Buna göre, β_0 ve β_1 'e sistematik olarak değişecek biçimde değerler verilir ve bu şekilde en küçük kalıntı kareleri toplamını veren b_0 ve b_1 değerleri bulunur.

İkinci bir yol ise doğrudan optimizasyondur. Buna göre, $\sum e_i^2$ 'nin, sırası ile β_0 ve β_1 'e göre kısmi türevleri alınarak, bu ifadeler sıfıra eşitlenir.

Doğrusal regresyon için EKK yöntemi, doğrusal olmayan regresyona da genişletilebilir. Burada EKK için minimize edilecek değer:

$$S(\boldsymbol{\gamma}) = \sum_{i=1}^n (Y_i - f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma}))^2$$

olacaktır. $S(\boldsymbol{\gamma})$, $\boldsymbol{\gamma}$ nın parametre bileşenlerine bağlı bir fonksiyondur. EKK tahmincilerini bulmak için kullanılan iki yöntem, nümerik yöntemler ve normal denklemler, doğrusal olmayan regresyon için de kullanılabilir, fakat doğrusal regresyondan farkı, normal denklemlerin çözümü iteratif nümerik yöntemler gerektirir ve analitik çözüm çoğu zaman bulunamaz.

$Y_i = f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma}) + \varepsilon_i$ modelinde normal denklemleri elde etmek için yukarıdaki $S(\boldsymbol{\gamma})$ değerinin $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}$ 'e göre minimize edilmesi gerekir. $S(\boldsymbol{\gamma})$ 'nın γ_k 'lara göre kısmi türevi şu şekildedir:

$$\frac{\partial Q(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_k} = \sum_{i=1}^n -2(Y_i - f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma})) \left[\frac{\partial f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_k} \right]$$

Bundan sonra p tane kısmi türev sıfıra eşitlenir ve γ_k 'lar yerine onların EKK tahmincileri g_k 'lar konursa, sadeleştirmelerden sonra aşağıdaki p tane normal denklem elde edilir.

$$\sum_{i=1}^n Y_i \left[\frac{\partial f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_k} \right] - \sum_{i=1}^n f(\mathbf{X}_i, \mathbf{g}) \left[\frac{\partial f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_k} \right] = 0$$

$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{g}$ $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{g}$ $k=0,1,2,\dots,p-1$

Burada \mathbf{g} , γ_k 'ların EKK tahminini veren vektördür.

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \dots \\ g_{p-1} \end{bmatrix}$$

$p \times 1$

Doğrusal olmayan regresyon için normal denklemler, parametre tahmini g_k 'lar için doğrusal değildir ve en basit durumda bile çözümü kolay değildir. Bundan dolayı bir çözüm elde etmek için nümerik araştırma teknikleri kullanmak gerekir.

Bu durumu görmek için aşağıdaki örnek ele alınsın:

i. gözlem için $f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma}) = \gamma_0 e^{\gamma_1 X_i}$ olsun. Kısmi türevler;

$$\frac{\partial f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_0} = e^{\gamma_1 X_i}$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_1} = \gamma_0 X_i e^{\gamma_1 X_i}$$

şeklinde olacaktır. Yukarıdaki ifadelerde γ_0 ve γ_1 yerine EKK tahminleri g_0 ve g_1 koyulursa, normal denklemler,

$$\begin{aligned}\sum Y_i e^{g_1 X_i} - \sum g_0 e^{g_1 X_i} e^{g_1 X_i} &= 0 \\ \sum Y_i g_0 X_i e^{g_1 X_i} - \sum g_0 e^{g_1 X_i} g_0 X_i e^{g_1 X_i} &= 0\end{aligned}$$

şeklinde olur. Sadeleştirme yapıp düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\sum Y_i e^{g_1 X_i} - g_0 \sum e^{2g_1 X_i} &= 0 \\ \sum Y_i X_i e^{g_1 X_i} - g_0 \sum X_i e^{2g_1 X_i} &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu normal denklemler, g_0 ve g_1 'e göre doğrusal değildir ve kapalı çözüm mevcut değildir. Bu durumda çözüm için iteratif nümerik yöntemler gerekecektir. Aynı durum MOY için de geçerlidir. Daha önce ifade edildiği gibi, EKK yöntemi ve MOY, farklı teorik düşüncelere dayanmalarına karşın, sonuçta aynı matematiksel ifadeye ulaşmaktadırlar. Eğer, $\mathcal{E} \sim N(0, \sigma^2 I)$ ise, EKK tahmincileri ile MO tahmincileri aynı olacaklardır. İleriki bölümde doğrusal olmayan tahminde kullanılan bazı nümerik yöntemler hakkında genel bilgi verilecektir.

5.2 Doğrusal Olmayan Regresyonda Parametre Tahmininde Kullanılan Bazı Nümerik Yöntemler:

Birçok doğrusal olmayan problemlerde, normal denklemler için iteratif teknikler kullanmak gereklidir. Bu teknikler, kısıtlamasız optimizasyon yöntemleridir. Bu iteratif yöntemler, genellikle iyi sonuç verir ve çözülecek denklemlerin biçimine bağlı değildir. Bununla birlikte bilgisayar programlarında kullanılan birçok yöntem mevcuttur. Bunların en önemlileri ve burada değinilecek olan; Gauss-Newton (doğrusallaştırma) yöntemi, En Dik İniş yöntemi, Levenberg-Marquardt Uzlaşımı ve Newton-Raphson yöntemidir.

5.2.1 Gauss-Newton (doğrusallaştırma) Yöntemi:

Bazı kaynaklarda doğrusallaştırma yöntemi olarak da adlandırılan Gauss-Newton yöntemi doğrusal olmayan bir modeli, doğrusal terimlerle, Taylor serisini kullanarak yaklaşık olarak açar. Sonra, parametreleri tahmin etmek için SEKK yöntemini uygular. Bu şekilde devam eden adımlarla çözüme ulaşılmaya çalışılır. Gauss-Newton yöntemi önceden elde edilmiş olan parametrelerin, $g_0^{(0)}$, $g_1^{(0)}$, $g_2^{(0)}$, $g_{p-1}^{(0)}$ başlangıç değerleri ile başlar. Bu başlangıç değerleri, önceki veya ilişkili çalışmalardan, teorik beklentilerden veya $S(\beta)$ değerini

küçültecek çeşitli sayısal öngörülerden elde edilebilir. Başlangıç değerlerinin seçimi ile ilgili kesin bir kural yoksa da şu yöntemler uygulanabilir:

- i) Eğer modelde p tane parametre varsa hata terimini ihmal ederek, gözlem değerlerinden p tanesi seçilir ve p bilinmeyenli p denklem çözülerek(çözülebiliyorsa) başlangıç değerleri tahmin edilmeye çalışılır.
- ii) Eğer model dönüştürülebiliyorsa, dönüştürme yapıp doğrusallaştırılır ve bu modelin parametre tahminleri EKK ile bulunur. Sonra ters dönüşüm ile başlangıç değerleri elde edilir. Örneğin $\hat{Y}_i = g_0 e^{g_1 X_i}$ şeklindeki modelin her iki tarafının doğal logaritması alınır, $\ln \hat{Y}_i = \ln g_0 + g_1 X_i$ şeklinde doğrusallaştırılabilir. EKK ile parametreler tahmin edilir. g_1 tahmini aynı kalmasına karşın, sabit terim için bulunan değer doğal logaritma tabanına göre anti logaritması alınır ve böylelikle başlangıç değerleri tahmin edilmiş olur.
- iii) X_i 'nin sonsuzdaki veya sıfırdaki asimptotu için modelin beklenen değeri incelenebilir.
- iv) Eğer bu yöntemlerin hiç biri işe yaramıyorsa ölçekli ve kılavuz çizgili grafiklerden faydalanılabilir.

$f(X_i, \gamma)$ 'nin, başlangıç değeri $g_k^{(0)}$ etrafında, birinci mertebe türeve kadar kısaltılarak açılmış Taylor serisi, i. durum için şu şekilde olacaktır:

$$f(X_i, \gamma) \cong f(X_i, g^{(0)}) + \sum_{k=0}^{p-1} \left[\frac{\partial f(X_i, \gamma)}{\partial \gamma_k} \right] (\gamma_k - g_k^{(0)})$$

$$\gamma = g^{(0)}$$

Burada,

$$\mathbf{g}^{(0)} = \begin{bmatrix} g_0^{(0)} \\ g_1^{(0)} \\ \dots \\ g_{p-1}^{(0)} \end{bmatrix}$$

px1

şeklinde. Bu arada şu belirtilmelidir ki, [] içindeki ifade, regresyon fonksiyonunun, ilgili parametre için kısmi türevinde, $\gamma_k = g_k^{(0)}$ başlangıç değerinin koyulması ile elde edilen değeri göstermektedir.

Basitleştirme amacıyla,

$$f_i^{(0)} = f(\mathbf{X}_i, \mathbf{g}^{(0)})$$

$$\beta_k^{(0)} = \gamma_k - g_k^{(0)}$$

$$D_{ik}^{(0)} = \left[\frac{\partial f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_k} \right]$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{g}^{(0)}$$

yazılırsa, yaklaşık Taylor açılımı;

$$f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma}) \cong f_i^{(0)} + \sum_{k=0}^{p-1} D_{ik}^{(0)} \beta_k^{(0)}$$

şekline dönüştür. Doğrusal olmayan regresyon modeline yaklaşım olarak,

$$Y_i = f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma}) + \varepsilon_i \quad \text{için,}$$

$$Y_i \cong f_i^{(0)} + \sum_{k=0}^{p-1} D_{ik}^{(0)} \beta_k^{(0)} + \varepsilon_i$$

olacaktır. Eğer $Y_i^{(0)} = Y_i - f_i^{(0)}$ olarak tanımlanırsa,

$$Y_i^{(0)} \cong \sum_{k=0}^{p-1} D_{ik}^{(0)} \beta_k^{(0)} + \varepsilon_i \quad i=1, \dots, n$$

şeklinde sabit terimi olmayan doğrusal regresyon modeli yaklaşımına ulaşılır. Burada $Y_i^{(0)}$ kalıntıları gösterir. Başka bir deyişle, gözlem değerlerinin, başlangıç parametre değerlerinin yerleştirildiği doğrusal olmayan regresyon fonksiyonu etrafındaki sapmalarını gösterir. $D_{ik}^{(0)}$ ise, her n durum için, başlangıç parametre değerlerinin verildiği $f(X_i, \gamma)$ nın kısmi türev değerlerini ifade eder. $\beta_k^{(0)}$ ise gerçek parametre değeri ile parametrenin başlangıç tahmini arasındaki farkı verir. Bundan dolayı $\beta_k^{(0)}$, her adımda bir önce elde edilen parametre tahmininin ne kadar düzeltilileceğini gösterir.

Bu sabit terimi olmayan doğrusal regresyon modeli, matris notasyonu ile şöyle gösterilebilir:

$$Y^{(0)} = D^{(0)} \beta^{(0)} + \varepsilon$$

Burada:

$$Y^{(0)} = \begin{bmatrix} Y_1 - f_1^{(0)} \\ \dots \\ Y_n - f_n^{(0)} \end{bmatrix}_{nx1}$$

$$\beta^{(0)} = \begin{bmatrix} \beta_0^{(0)} \\ \dots \\ \beta_{p-1}^{(0)} \end{bmatrix}_{px1}$$

$$D^{(0)} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial f(X_1, \gamma)}{\partial \gamma_0} \right]_{\gamma=g^{(0)}} & \dots & \dots & \dots & \left[\frac{\partial f(X_1, \gamma)}{\partial \gamma_{p-1}} \right]_{\gamma=g^{(0)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left[\frac{\partial f(X_n, \gamma)}{\partial \gamma_0} \right]_{\gamma=g^{(0)}} & \dots & \dots & \dots & \left[\frac{\partial f(X_n, \gamma)}{\partial \gamma_{p-1}} \right]_{\gamma=g^{(0)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{10}^{(0)} & \dots & D_{1,p-1}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots \\ D_{n0}^{(0)} & \dots & D_{n,p-1}^{(0)} \end{bmatrix}_{n \times p}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}_{nx1}$$

şeklindedir. Buradaki $D^{(0)}$ matrisi, doğrusal regresyon modelindeki \mathbf{X} matrisinin rolünü üstlenir(sabit terim için 1'lerin dışında). Aslında \mathbf{X} de bir türev matrisidir. Fakat doğrusal regresyon modelinde, modelin beklenen değerinin, parametrelere göre kısmi türevleri, parametrelerden bağımsız oldukları için, bu matris sadece \mathbf{X} sayısal değerlerini içerecektir.

$\beta^{(0)}$ için SEKK'e göre şu yazılabilir:

$$b^{(0)} = (D^{(0)' \cdot D^{(0)})^{-1} (D^{(0)' Y^{(0)})}$$

$g_k^{(0)}$, $b_k^{(0)}$ kullanılarak, aşağıdaki şekilde düzeltilir:

$$g_k^{(1)} = g_k^{(0)} + b_k^{(0)}$$

Ve $g_k^{(1)}$ elde edilerek iterasyonun bir sonraki adımına geçilmiş olur. Burada $g_k^{(1)}$, γ_k ların yenilenmiş tahminini verir. Matris notasyonu ile,

$$\mathbf{g}^{(1)} = \mathbf{g}^{(0)} + \mathbf{b}^{(0)}$$

şeklinde yazılabilir. $b^{(0)}$ 'a bazen Gauss-Newton artışı (increment) da denir. Bu noktada, yenilenmiş parametre tahminlerinin $S(\beta)$ 'da bir iyileşmeye neden olup olmadığına bakılabilir. $\mathbf{g}^{(0)}$ 'daki $S(\beta)$, $SSE^{(0)}$ ile ve $\mathbf{g}^{(1)}$ deki $S(\beta)$ değeri de $SSE^{(1)}$ ile gösterilirse, eğer Gauss-Newton yöntemi etkili işliyorsa, o zaman $SSE^{(1)} < SSE^{(0)}$ olmalıdır.

Bu iterasyon $\mathbf{g}^{(s+1)} - \mathbf{g}^{(s)}$ farkının veya $SSE^{(s+1)} - SSE^{(s)}$ farkının ihmal edilecek düzeye inmesine kadar devam eder. Son olarak elde edilen parametre tahmini ve kalıntı kareleri toplamı sırasıyla \mathbf{g} ve SSE ile gösterilir (Draper ve Smith, 1998).

Adım Faktörü:

Bazı durumlarda, Gauss-Newton artışı, istenilen artışın, doğrusal yaklaşımın geçerli olduğu bölgenin dışına uzandığında, SSE'de bir artışa neden olabilir. Ne var ki, bu koşullarda bile,

$f(X_i, g^{(0)})$ 'nın etrafında yeteri derecede küçük bir yüzey için, doğrusal yaklaşım, gerçek yüzeye iyi bir yaklaşım olacaktır. Bundan dolayı, $b^{(0)}$ yönünde, küçük bir adım, SSE'de bir azalma ortaya çıkaracaktır. Bu nedenle λ , bir adım faktörü olmak üzere,

$$g^{(1)} = g^{(0)} + \lambda b^{(0)}$$

yazılır. λ , $SSE^{(1)} < SSE^{(0)}$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçilir. λ 'nın seçiminde yaygın bir yöntem, başlangıçta $\lambda = 1$ olarak alıp, $SSE^{(1)} < SSE^{(0)}$ ifadesi sağlanana kadar, onu yarıya bölmektir. Gauss-Newton yöntemine bu modifikasyon, Box (1960) ve Hartley (1961) tarafından önerilmiştir.

Gauss-Newton yöntemi birçok doğrusal olmayan model için etkilidir. Yakınsama için çok iterasyon gerektirmesine rağmen, yakınsamadığı durumlar enderdir.

5.2.2 En Dik İniş (Steepest Descent) Yöntemi:

En Dik İniş yöntemi, $S(\beta)$ olarak ifade edilen kalıntı kareleri toplamı üzerinde yoğunlaşır ve iteratif bir süreç ile bu ifadenin minimumunu bulmaya çalışır. Buradaki temel düşünce, başlangıç noktası $g^{(0)}$ dan, sürekli yeni değerler alan ve bileşenleri,

$$-\frac{\partial S(\gamma)}{\partial \gamma_0}, -\frac{\partial S(\gamma)}{\partial \gamma_1}, \dots, -\frac{\partial S(\gamma)}{\partial \gamma_{p-1}}$$

olan gradyent vektörü boyunca, bir yol üzerinde hareket etmektir. Diğer bir ifade ile, gradyent vektörü boyunca hareket edilerek, en çok azalmanın olduğu yol izlenmiş olur. Kısaca süreç şu şekilde işler: γ uzayında(daha sonra parametre uzayı olarak adlandırılacak) belirlenmiş bir bölgeden başlayan, birçok denemeler yapılır. Bu denemeler, $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}$ düzeylerinin n kombinasyonunu seçerek, bu düzey kombinasyonları için $S(\gamma)$ 'nın hesaplanmasını içerir.

Burada genellikle 2 düzeyli faktöryel tasarım biçimi kullanılır. Hesaplanan $S(\gamma)$ değerleri, bağımlı bir değişkenin gözlem değerleri olarak alınarak ve $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}$ düzey kombinasyonları, ilgili bağımsız değişkenin değerleri olarak alınarak, şu model oluşturulur:

$$\text{“Gözlemlenen } S(\gamma) \text{”} = \alpha + \sum_{k=0}^{p-1} \beta_k (\gamma_k - \bar{\gamma}_k) / s_k + \varepsilon_i$$

Burada $\bar{\gamma}_k$, düzeylerin ortalamasını verir. s_k ise $\sum_{i=1}^n (\gamma_{ik} - \bar{\gamma}_k)^2 / s^2_k = \text{“sabit”}$ olacak şekilde seçilen ölçekleme katsayısıdır. Bu, denemelerin yapıldığı parametre uzayında, $S(\gamma)$ ile tanımlanan gerçek yüzeyin yaklaşık olarak bir düzlem ile temsil edildiğini göstermektedir. Tahmin edilen parametreler, $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{p-1}$, en dik çıkışın yönünü ifade eder. Bunların eksi işaretlileri ise $-b_0, -b_1, -b_2, \dots, -b_{p-1}$ en dik inişin yönünü ifade eder. Bu da doğrusal yaklaşmanın gerçekçi olduğu sürece, $S(\gamma)$ daki maksimum azalmanın

$$(\gamma_k - \bar{\gamma}_k) / s_k \propto -b_k$$

noktalarından oluşan doğru boyunca hareket edilerek oluşacağını ifade eder. Yukarıdaki orantı faktörü, λ ile gösterilirse, en dik iniş yolu;

$$(\gamma_k - \bar{\gamma}_k) / s_k = -\lambda b_k \quad \lambda > 0$$

eşitliğini sağlayan $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1})$ noktalarını içerir. Veya daha değişik biçimde:

$$\gamma_k = \bar{\gamma}_k - \lambda b_k s_k$$

yazılabilir. λ ‘ya seçilmiş değerler verilmek suretiyle en dik iniş yolu izlenmiş olunur. $S(\gamma)$ azaldığı sürece λ ‘ya değerler verilir ve en dik iniş yolu izlenir. Eğer $S(\gamma)$ ‘da azalma olmuyorsa, başka bir deneysel tasarım oluşturulur ve süreç, $S(\gamma)$ yı minimize eden tahmin değerine yakınsama oluncaya kadar devam eder.

En Dik İniş yönteminin bir dezavantajı, ölçeğe göre değişmez olmayışıdır. Değişkenlerin s_k ölçek değerleri değiştiğinde (hepsi aynı oranda değişmemesi koşuluyla), hareketin yönü de değişecektir.

En Dik İniş yöntemi Gauss-Newton yöntemine göre az tercih edilmesine karşın, birçok doğrusal olmayan problemde iyi sonuç verir (Draper ve Smith, 1998).

5.2.3 Levenberg-Marquardt Uzlaşımı:

Gauss-Newton yönteminde, hataya neden olabilecek bir durum, $D^{(k)}$ 'nin, sütunlarının doğrusal bağlantılı olmasından kaynaklanan, yaklaşık tekil olma durumudur. $D^{(k)}$, yaklaşık tekil olduğunda, $b^{(k)}$, çok büyük olabilir ve bu da, tahminlerin, parametre uzayının istenmeyen bölgelerine gitmesine neden olabilir.

Bu soruna çözüm olarak, $b^{(k)}$ için, Levenberg(1944),

$$b^{(k)} = (D^{(k)'} D^{(k)} + k I)^{-1} (D^{(k)'} Y^{(k)})$$

ifadesini, Marquardt(1963) ise,

$$b^{(k)} = (D^{(k)'} D^{(k)} + k V)^{-1} (D^{(k)'} Y^{(k)})$$

ifadesini önermiştir. Son ifadede V , $D^{(k)'} D^{(k)}$ 'nin köşegen elemanlarından oluşan bir diyagonal matristir. Görüldüğü gibi, bu ifadeler, Ridge Regresyonu'ndaki tahminci vektörünün ifadesine benzemektedirler. Bu yöntem Levenberg-Marquardt Uzlaşımı denir, çünkü $b^{(k)}$ 'nin yönü, Gauss-Newton artış yönü($k \rightarrow 0$) ile en dik iniş yönü($k \rightarrow \infty$) olan

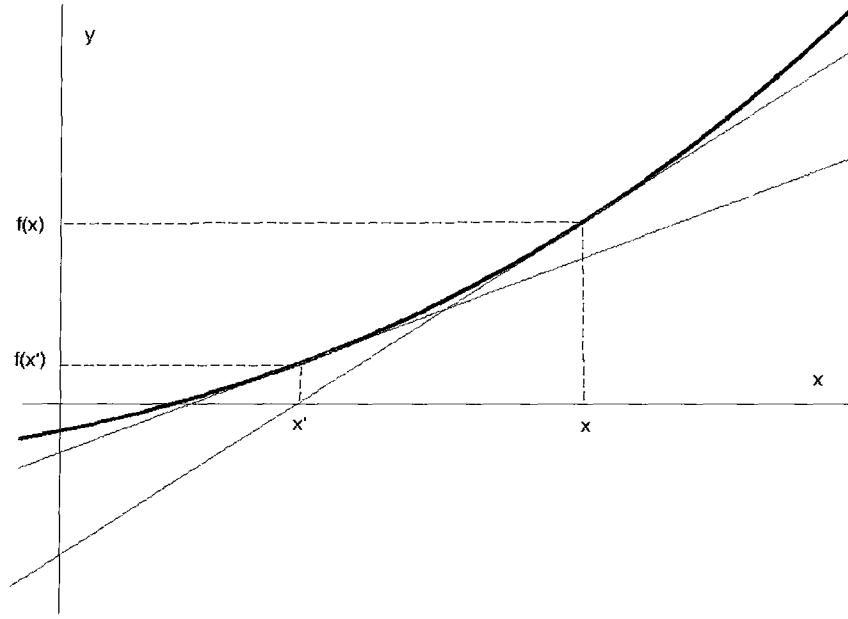
$$D^{(k)'} Y^{(k)} / \|D^{(k)'} Y^{(k)}\|$$

'nin arasında yer almaktadır.

Dikkat edilecek olursa, Levenberg'in ifadesinde, $D^{(k)'} D^{(k)}$ 'nin köşegeni, toplamsal bir faktör ile büyürken, Marquardt'ın ifadesinde bu, $(1+k)$ şeklinde çarpımsal bir faktör ile büyümektedir (Bates ve Watts, 1988).

5.2.4 Newton-Raphson Yöntemi:

Newton-Raphson yöntemi uygulamada çok basit bir yöntemdir ve tüm nümerik iteratif yöntemlerin bir yerde temelini oluşturur. Bu yöntem basitçe şu düşünceye dayanır: Örneğin, tek değişkenli eğrisel bir fonksiyonun mevcut olduğu, Şekil 5.1'deki durumu göz önüne alınsın. Eğrinin, X eksenini kestiği noktanın, bir başka deyişle, kökünün araştırıldığı düşünülün.



Şekil 5.1 Newton-Raphson yönteminin işleyişi

İterasyona başlanabilmesi için önce bir başlangıç noktasının belirlenmesi gerekir. Bu başlangıç noktasının x olduğu varsayalım. Bu durumda, x noktasından çıkılan bir dikin, eğriyi kestiği noktadan bir teğet geçirildiği düşünülün. x noktasında, fonksiyonun alacağı değer, $f(x)$ tir. Çizilen teğet ise, X eksenini x' noktasında kesmektedir. İşte bu durumda, ikinci iterasyona geçilmiş olur ve ikinci iterasyon için yenilenmiş değer, x' noktası olacaktır. Fonksiyonun x noktasındaki teğetinin eğimi $f'(x)$ tir. Aynı ifade şu şekilde de yazılabilir:

$$\frac{f(x)}{x - x'} = m = f'(x)$$

Bu ifade düzenlenirse,

$$x' = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

ifadesi elde edilir. Aynı şekilde, yine elde edilen x' noktasından bir dik çıkılırsa ve bu dikin eğriyi kestiği noktadan bir teğet çizilirse, bu teğet de X eksenini, daha uzak başka bir x'' noktasında kesecektir. Aynı işlemler, bu yeni bulunan x'' noktası için de yapılarak süreç

sürdürülmüş olunur. Dikkat edilirse, her iterasyon sonucu, elde edilen noktalar, eğrinin köküne doğru yaklaşacaktır. Ve bu şekilde $f(x)=0$ 'ı sağlayan x değeri bulunur. i . durum için

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

yazılabilir. Bu, Newton-Raphson yönteminin, tek değişkenli bir fonksiyon için basit, geometrik bir açıklamasıdır. Doğrusal olmayan regresyonda kullanılan bir Newton-Raphson yöntemi, şu şekildedir (Bates ve Watts, 1988): $\gamma^{(0)}$ etrafında, $S(\gamma)$, ikinci merteye kısmi türevlere kadar açılan bir Taylor açılımı ile yaklaşık olarak şöyle yazılabilir:

$$S(\gamma) \cong S(\gamma^{(0)}) + \omega'(\gamma - \gamma^{(0)}) + (\gamma - \gamma^{(0)})' \frac{\Omega}{2} (\gamma - \gamma^{(0)})$$

Burada ω , $\gamma^{(0)}$ 'da hesaplanan $S(\gamma)$ 'nın gradyentidir ve şu şekilde gösterilir:

$$\omega = \frac{\partial S}{\partial \gamma}$$

Buna benzer olarak, Ω da, $\gamma^{(0)}$ 'da hesaplanan $S(\gamma)$ 'nın Hessianıdır ve şu şekilde gösterilir:

$$\Omega = \frac{\partial^2 S}{\partial \gamma \partial \gamma}$$

Kareler toplamının yaklaşık ifadesi, gradyenti sıfır olduğunda, durağan bir noktaya sahip olacaktır. Başka bir ifade ile,

$$\omega + \Omega (\gamma - \gamma^{(0)}) = \mathbf{0}$$

dır. Eğer Ω , pozitif belirli (tüm özdeğerleri pozitif) ise, bu durağan nokta, bir minimum olacaktır. Ω , pozitif belirli ise, Newton-Raphson adımı,

$$b^{(0)} = -\Omega^{-1} \omega$$

şeklindedir.

$$S(\gamma) = (Y - f(X_i, \gamma))' \cdot (Y - f(X_i, \gamma))$$

fonksiyonu için, gradyent,

$$\omega = -2D'(Y - f(X_i, \gamma))$$

ve Hessian,

$$\Omega = 2D'D - 2 \frac{\partial D'}{\partial \gamma} (Y - f(X_i, \gamma))$$

şeklindedir. Eğer, $\frac{\partial D'}{\partial \gamma}$ ifadesi sıfır olursa, Gauss-Newton artışı ile Newton-Raphson artışı,

birbirine eşit olur.

5.3 Büyük Örneklem Yaklaşımı:

Doğrusal olmayan regresyonda, parametreler ile ilgili çıkarılan sonuçlar, çoğu zaman büyük örneklem teorisine dayanır. Teori kısaca, örneklem genişliği büyük olduğunda, normal dağılılan hata terimlerine sahip doğrusal olmayan regresyon modelleri için, EKK ve MO tahmincilerinin, yaklaşık olarak normal dağıldığını ve çoğu zaman sapmasız ve minimum varyansa sahip olduklarını söyler. Büyük örneklem teorisi, hata terimlerinin yaklaşık normal dağıldığı durumda da uygulanır (Neter vd, 1996).

Doğrusal olmayan regresyona ait sonuçlar hata terimleri varyansı σ^2 'nin tahminini gerektirir. Bu tahmin yine doğrusal regresyonda olduğu gibi kalıntı kareleri toplamı ile bulunur.

$$MSE = \frac{SSE}{n-p} = \frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-p} = \frac{\sum (Y_i - f(X_i, \hat{\gamma}))^2}{n-p}$$

Doğrusal olmayan regresyonda, MSE σ^2 nin sapmasız tahmincisi değildir. Fakat örneklem geniş olduğunda sapma küçüktür.

Hata terimleri bağımsız olduğunda ve normal dağıldığında ve örneklem yeteri kadar büyükse, aşağıdaki teorem, doğrusal olmayan regresyonun sonuçları için temel oluşturur:

$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ ve örneklem genişliği n anlamlı düzeyde geniş ise, \mathbf{g} 'nin örnekleme dağılımı yaklaşık olarak normaldir. Parametre tahminci vektörünün beklenen değeri yaklaşık olarak;

$$E(\mathbf{g}) \cong \boldsymbol{\gamma}$$

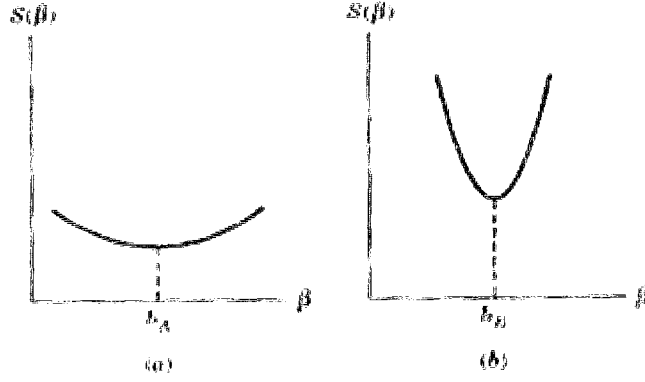
olacaktır. Regresyon katsayılarının yaklaşık varyans-kovaryans matrisi ise şu şekilde tahmin edilir:

$$s^2(\mathbf{g}) = MSE(\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1}$$

Görüldüğü gibi \mathbf{D} 'nin doğrusal regresyondaki \mathbf{X} in rolünü üstlenmesi dışında ifade doğrusal regresyondaki ile aynıdır.

Bu teoremin sonucu olarak, doğrusal regresyonda yapılan uygulamalar aynı şekilde doğrusal olmayan regresyonda da yapılabilir. Fakat bu uygulamalar sadece yaklaşık sonuç verir ama yaklaşım çoğu zaman çok iyidir. Bazı regresyon modellerinde, örneklem büyüklüğü gereği kadar büyük olmasa bile büyük örneklem yaklaşımı iyi sonuç verir. Fakat bazı modellerde örneklem büyüklüğünün büyük olması gerekebilir.

Doğrusal olmayan regresyonun daha iyi anlaşılması açısından, Şekil 5.2'deki durum örnek olarak verilebilir.



Şekil 5.2 Doğrusal olmayan EKK tahmincileri ile ilgili iki örnek: Diğer faktörler eşit olduğunda, b_A 'nin varyansı, b_B 'nin varyansından daha büyüktür (Griffiths vd., 1993).

Tek parametrelili bir problem için, bir doğrusal olmayan EKK tahmincisinin varyans ifadesi ele alınsın. Şekil 5.2a'da, $S(\beta)$ 'nin, doğrusal olmayan EKK tahmini b_A etrafında, görece olarak düz (flat) olduğu görülmektedir. Diğer yandan, Şekil 5.2b'de, $S(\beta)$ 'nin grafiği, tahmin değeri b_B etrafında dik (steep) görünmektedir. Düz durumda, b_A tahmininin güvenilirliğinin fazla olduğu söylenemez. $S(\beta)$, yaklaşık düz olduğu için, bu fonksiyonu, minimumundan, hafifçe daha büyük yapan, bazı β değerleri bulunabilir. Dik durum için, b_B 'nin daha güvenilir olduğu söylenebilir. β için, b_B 'den uzağa, küçük bir değişim, $S(\beta)$ 'de dramatik bir yükselişe neden olacaktır. Bir tahmincinin güvenilirliği, onun varyansı ile tanımlandığına göre, doğrusal olmayan EKK tahmincisinin varyansı, tahmin değeri etrafında, $S(\beta)$ 'nin ne kadar düz veya dik olduğuna bağlı olduğu söylenebilir. Bu durumda, düzlüğün veya dikliğin nasıl ölçülebileceği sorusu akla gelmektedir. Bunun için $S(\beta)$ 'nin eğiminin değişim oranına bakılabilir. Bu eğimin değişim oranı, b_B de, b_A 'da olduğundan daha büyüktür. Eğimin değişim oranı, $S(\beta)$ 'nin parametreye göre ikinci türevi, $d^2 S(\beta)/d\beta^2$ ile verilir. Eğer, b için $d^2 S(\beta)/d\beta^2$ 'nin değeri düşükse, $S(\beta)$ 'nin düz ve b 'nin varyansının görece olarak büyük olduğu söylenebilir. Buna karşın, $d^2 S(\beta)/d\beta^2$ 'nin değeri yüksekse, $S(\beta)$ 'nin dik ve b 'nin varyansının da görece olarak düşük olduğu söylenebilir.

Buna göre, doğrusal olmayan EKK tahmincisinin varyansı $d^2 S(\beta)/d\beta^2$ 'nin bir fonksiyonudur. Yaklaşık olarak,

$$\text{Var}(b) \approx 2\sigma^2 \left(\frac{d^2 S}{d\beta^2} \right)^{-1}$$

yazılabilir. Daha önce ifade edildiği gibi burada $S(\beta)$, tek değişkene (parametreye) sahiptir (β vektörü tek β bileşenine sahiptir) (Griffiths vd., 1993).

Büyük örneklem yaklaşımını kullanmanın uygun olduğu durumları belirten genel bir kural yoktur. Buna rağmen faydalı olacak birçok ana hatlar bulunabilir. Bunları şöyle sıralamak mümkündür:

- i) Parametre tahmini için kullanılan iteratif yöntemlerde çabuk yakınsama, doğrusal olmayan regresyonda doğrusal yaklaşımın iyi bir yaklaşım olduğuna ve bundan dolayı regresyon tahminlerinin asimptotik özelliklerinin uygulanabilir olduğuna işaretir.
- ii) Farklı başlangıç değerlerinin, örneğin koordinat sisteminin dört ayrı bölgesinde seçilmiş değerlerin, iterasyonlar sonunda aynı çözümü vermesi, büyük örneklem yaklaşımının uygunluğuna ilişkin kanıt sayılabilir.
- iii) Büyük örneklem sonuçlarını kullanmanın uygunluğu ile ilgili bir çok ölçü geliştirilmiştir. Bates ve Watts (1988), doğrusal olmama durumunu ölçen eğrilik ölçüleri geliştirmişlerdir. Bunlar, doğrusal olmayan regresyonun doğrusala yaklaşımını ölçmeye yaramaktadır ve Bölüm 8.2'de açıklanacaktır. Ayrıca Box (1971), tahmin edilen parametrelerdeki sapmayı tahmin eden bir formül geliştirmiştir. Hougaard (1985) ise, tahmin edilen parametrelerin örnekleme dağılımının çarpıklığının tahminini geliştirmiştir. Dağılımın çarpıklığının az oluşu yaklaşık normal dağıldığının göstergesi olmakta, bu da büyük örneklem sonuçlarının uygulanabilirliğini getirmektedir (Neter vd., 1996).

5.4 Büyük Örneklem Yaklaşımı ile Çıkarsama:

5.4.1 Parametre için Güven Aralığı Tahmini:

Örnekleme genişliği büyük olduğunda ve hata terimleri normal dağıldığında, büyük örneklem teoremine dayanarak aşağıdaki ifade yaklaşık olarak geçerlidir:

$$\frac{g_k - \gamma_k}{s(g_k)} \sim t(n-p) \quad k=0,1,\dots,p-1$$

Buradan herhangi tek γ_k için $1-\alpha$ güven aralığı:

$$g_k \pm t(1-\alpha/2; n-p) \cdot s(g_k)$$

şeklinde yazılabilir.

5.4.2 Birden Çok Parametre için Eşanlı Güven Aralığı:

Doğrusal olmayan regresyonda birden çok parametre için yaklaşık ortak güven aralığı Bonferroni yöntemi ile geliştirilebilir. Yaklaşık $1-\alpha$ güven katsayısı ile m tane parametrenin güven aralığı tahmin edilecekse ortak Bonferroni güven sınırları:

$$g_k \pm Bs(g_k)$$

dır. Burada

$$B = t(1-\alpha/2m; n-p)$$

dir.

5.4.3 Parametre Testi:

Bir tek γ_k için büyük örneklem testi şu şekilde kurulabilir:

$$H_0: \gamma_k = \gamma_{k0}$$

$$H_1: \gamma_k \neq \gamma_{k0}$$

Burada γ_{k0} , γ_k 'nın belli bir değerini ifade etmektedir. Örneklem genişliği büyük olduğunda test istatistiği şu olur:

$$t^* = \frac{g_k - \gamma_{k0}}{s(g_k)}$$

Eğer $|t^*| > t(1 - \alpha/2; n - p)$ ise H_0 red edilir.

5.4.4 Birden Çok Parametre için Test:

Birden çok γ_k için eşanlı, büyük örneklem testi yapılmak istenirse, genel doğrusal testteki aynı yaklaşım uygulanabilir. Buna göre, tam model oluşturup, elde edilen kalıntı kareleri toplamı $SSE(F)$ ile, sonra da indirgenmiş model oluşturulup, kalıntı kareleri toplamı $SSE(R)$ ile gösterilirse, test istatistiği doğrusal regresyonda olduğu gibi,

$$F^* = \frac{SSE(R) - SSE(F)}{sd_R - sd_F} / MSE(F)$$

şeklinde yazılabilir. $F^* > F(1 - \alpha; sd_R - sd_F, sd_F)$ ise H_0 red edilir (Neter vd., 1996).

5.4.5 Güvenlik Konturları:

Modelin doğrusallaştırılmış biçiminin, γ 'nın son tahmini g etrafında geçerli olduğu varsayımı altında, elipsoid güven bölgesi elde edilebilir. Bu şu formülle verilir:

$$(\gamma - g)' \cdot \hat{D}' \cdot D \cdot (\gamma - g) \leq ps^2 F(p, n - p; 1 - \alpha)$$

Burada \hat{D} , γ yerine g yazılarak elde edilen D matrisidir. Ve

$$s^2 = S(g) / (n - p)$$

şeklinindedir. Model doğrusal olmadığında yukarıdaki elipsoid, gerçek güven bölgesi olmayacaktır.

Gerçek güvenlik konturu, $S(\gamma) = \text{"sabit"}$, alınmca tanımlanır, fakat genel doğrusal olmayan durumda, gerçek dağılım özellikleri bilinmediği için, belirli bir olasılık düzeyi elde edilemez. Buna rağmen, kontur, örneğin

$$S(\gamma) = S(g) [1 + (p/(n-p)) \cdot F(p, n-p; 1-\alpha)]$$

şeklinde seçilebilir. Bu şekilde belirlenen kontur, bu durum için, doğru güvenlik konturu olacaktır, fakat, sadece olasılık düzeyi yaklaşık olacaktır.

Genel olarak, doğrusal olmayan modelin doğrusallaştırılmış biçimi kullanıldığında, doğrusal regresyonda kullanılan tüm formül ve analizler uygulanabilir. Elde edilen sonuçlar, ancak, doğrusallaştırılmış modelin gerçek modele iyi yakınsadığı durumda geçerli olur (Draper ve Smith, 1998).



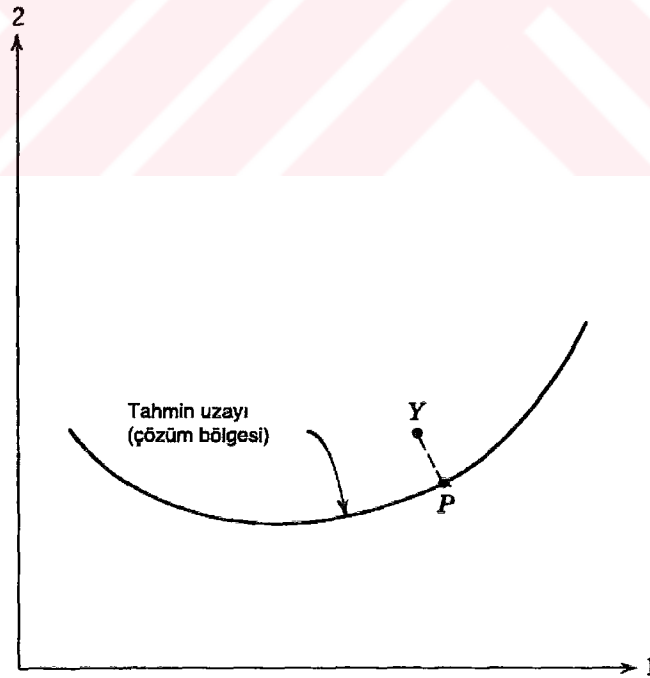
6. DOĞRUSAL OLMAYAN EKK GEOMETRİSİ

Doğrusal Olmayan EKK'in Örneklem Uzayı ile Açıklanışı:

Model doğrusal olmadığına , doğrusal modeldeki gibi X matrisi yoktur. Yine bir tahmin uzayı olmasına rağmen , bir vektör kümesi tarafından tanımlanmaz ve çok karmaşık olabilir. Tahmin uzayı (çözüm bölgesi olarak da adlandırılır)

$$\{ f(X_1, \gamma), f(X_2, \gamma), \dots, f(X_n, \gamma) \}$$

şeklinde ifade edilen koordinatlara sahip tüm noktaları içerir. $S(\gamma)$ [$S(\beta)$ olarak da gösterilen], yine (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) noktasından tahmin uzayıdaki bir noktaya olan uzaklığın karesidir. $S(\gamma)$ 'nın minimizasyonu, tahmin uzayında en küçük uzaklığı verecek P noktasının bulunmasıdır.

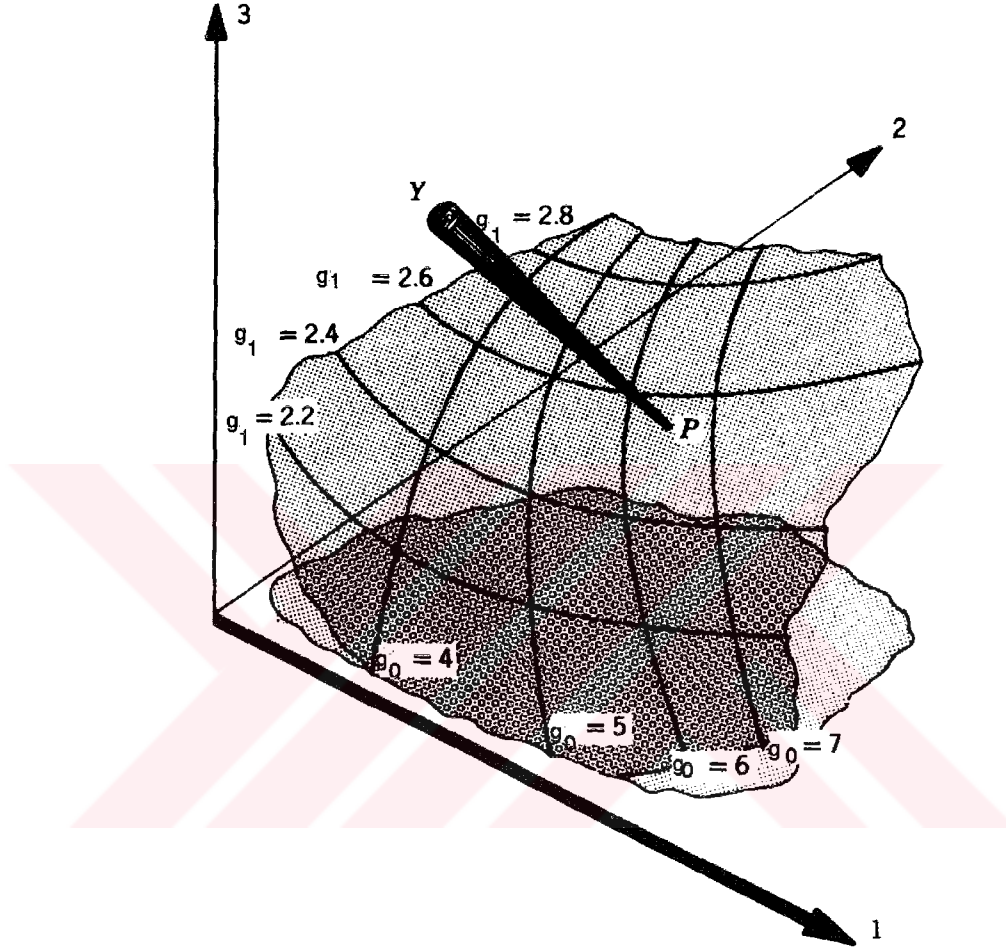


Şekil 6.1 n=2 için örneklem uzayı: $f(X_i, \gamma)$ doğrusal değil (Draper ve Smith, 1998)

Şekil 6.1, $n = 2$ için X_1 ve X_2 'ye karşılık gelen Y_1 ve Y_2 gözlem değerlerini ve tek parametre γ yı göstermektedir. Tahmin uzayı

$$\{f(X_1, \gamma), f(X_2, \gamma)\}$$

noktalarını içeren eğriden oluşmaktadır. X_1 ve X_2 sabittir ve γ değişmektedir. Y (Y_1, Y_2) koordinatlarına sahiptir ve P , tahmin uzayında, Y 'ye en yakın noktayı göstermektedir.



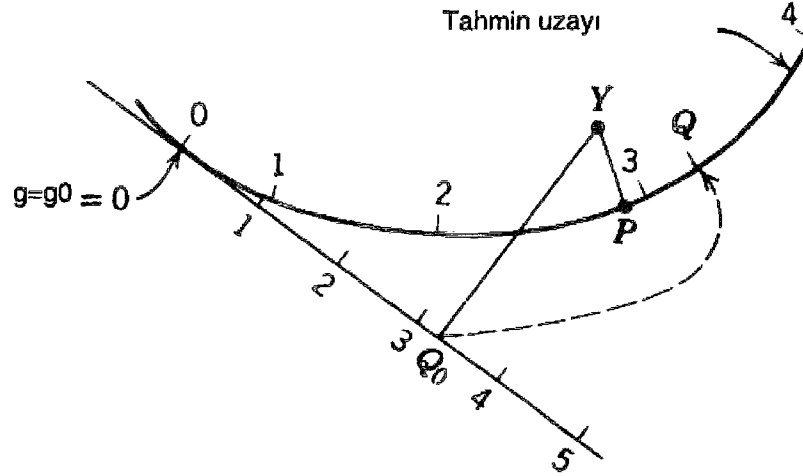
Şekil 6.2 $n=3$ $p=2$ için örneklem uzayı: $f(X_i, \gamma)$ doğrusal değil (Draper ve Smith, 1998)

Şekil 6.2, X_1, X_2 ve X_3 için $n = 3$, Y_1, Y_2 ve Y_3 gözlemlerini ve γ_0 ve γ_1 iki parametreyi göstermektedir. Eğriler, parametrelerin tahmin uzayındaki veya çözüm bölgesindeki koordinat sistemlerini temsil etmektedir. Bunlar

$$\{f(X_1, \gamma_0, \gamma_1), f(X_2, \gamma_0, \gamma_1), f(X_3, \gamma_0, \gamma_1)\}$$

şeklindeki noktaları içerirler. Doğrusal olmayan bir probleme, doğrusallaştırma (Gauss-Newton) tekniği uygulandığında, tahmin uzayında bir $\gamma^{(0)}$ noktası seçilir. Bu nokta, yeni orijin olur ve doğrusallaştırılmış tahmin uzayı, bu noktaya teğet bir uzay olarak düşünülür ve

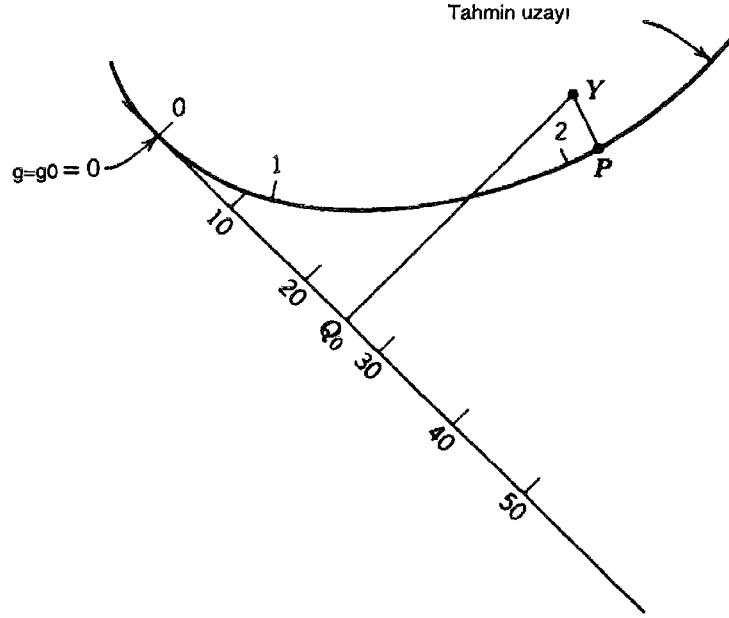
doğrusallaştırılmış EKK problemi bu şekilde çözülür. Bu çözüm doğru olmayabilir ve bu durumda yeni bir iterasyon başlar.



Şekil 6.3 Doğrusallaştırma yönteminin geometrik yorumu (n=2, p=1) (Draper ve Smith, 1998)

Şekil 6.3'de, iki gözlem ve bir parametre için doğrusal olmayan bir problem gösterilmektedir. Şekil 6.3, tahmin uzayını veya çözüm bölgesini, üzerindeki γ birimleri cinsinden göstermektedir. Burada $\gamma^{(0)}=0$ olduğu ve $\gamma=1$ ile işaretlenmiş noktanın da $\gamma=1$ ve diğerleri için elde edilen tahmin uzayının noktası olduğu varsayılır. Şunu belirtmek gerekir ki, γ 'nın işaretleri, eğrisellik ve koordinat sisteminin düzgün olmayışından dolayı eşit aralıklı değildir. $\gamma = \gamma^{(0)}=0$ 'da tahmin uzayı eğrisine ait teğet doğrusu gösterilmiştir ve $\gamma^{(0)}$ 'daki değişim oranından elde edilen, $\gamma=0,1,2,\dots$ birimleri ile bölümlenmiştir. Bu birimler eşit aralıklıdır.

Buna göre, doğrusallık varsayımına dayanarak, γ 'nın EKK tahmini bulunabilir. Geometrik olarak bu, YQ_0 in, teğete dik olacağı bir Q_0 noktası bulmak demektir. Doğrusallaştırılmış birimlerde görülür ki; γ 'nın bir değeri yaklaşık 3,2(Q_0 'da) olarak saptanır. Bir sonraki iterasyonda bunun için teğet doğrusu, tahmin uzayı eğrisinin $\gamma = 3,2$ olduğu noktada, diğer bir deyişle, Q noktasında kullanılır. Doğrusallaştırma (Gauss-Newton) yönteminin bazen neden işe yaramadığı kolayca görülebilir. Eğer $\gamma^{(0)}$ 'da $f(X_i, \gamma)$ 'nın değişim oranı küçükse, fakat hızlı artıyorsa, teğet doğrusundaki birimler fazlasıyla gerçek dışı olabilir.



Şekil 6.4 Doğrusallaştırma yönteminin geometrik yorumu ($n=2$, $p=1$) (Draper ve Smith, 1998)

Örneğin, Şekil 6.4'de, $\gamma^{(0)}$ 'daki değişim oranı küçüktür. Dolayısıyla, γ 'nın doğrusallaştırılmış birimleri küçüktür. Gerçek birimler ise hızlı artmaktadır. Bundan dolayı eğer sonraki iterasyona γ 'nın, Q_0 'daki 26 değeri ile başlanırsa, tahmin uzayındaki başlangıç noktası, ilk $\gamma = \gamma^{(0)} = 0$ tahminindeki en iyi nokta olan P 'den uzakta kalacaktır. Bu durum sonraki iterasyonlarda düzeltilebileceği gibi, düzeltilemeye debilir (Her ne kadar basitlik için $\gamma^{(0)}$, 0 ve birimler 1,2,..... şeklinde seçildiyse de, benzer saptamalar, genelde $\gamma^{(0)}$ ve birimler ne olursa işleyecektir).

Daha fazla gözlem ve iki veya daha fazla parametre için aynı tartışma geçerlidir. Ancak buradaki durum çok daha zor ve şekille gösterilmesi imkansız olacaktır.

Model doğrusal olduğunda örneklem uzayındaki sabit $S(\gamma)$ konturları, kürelerden meydana gelir. Doğrusal olmayan problemlerde ise oldukça düzensiz konturlar oluşabilir. Bu konturlar tahmin uzayındaki, belli bir $Y:(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ noktasına eşit uzaklıktaki (seçilmiş bir uzaklık) bütün noktalardan meydana gelebilir.

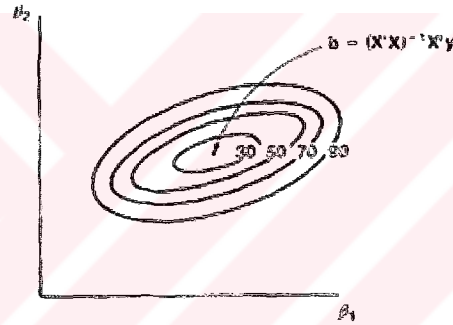
Doğrusal Olmayan EKK'in Parametre Uzayı ile Açıklanışı:

Doğrusal model için sabit $S(\beta)$ konturları parametre uzayında ortak merkezli elipslerden oluşuyorlardı. Model doğrusal olmadığında, bu konturlar bazen "muz şeklinde", sık sık

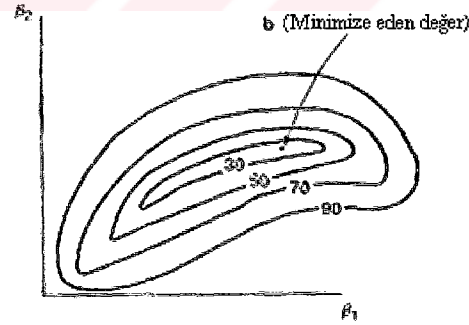
uzamış halde olurlar. Bazı durumlarda konturlar sonsuza uzar ve kapalı bir şekil oluşturmazlar. Veya birçok durağan değer için bu değerleri çevreleyen çok sayıda halkaya sahip olabilirler. Birçok durağan değer mevcut olduğunda, konturlar, çeşitli seviyelere veya $S(\gamma)$ için alternatif minimumlara sahip olabilirler. Örneğin,

$$Y = \frac{\gamma_0 e^{-\gamma_1 t} - \gamma_1 e^{-\gamma_0 t}}{\gamma_1 - \gamma_0} + \varepsilon$$

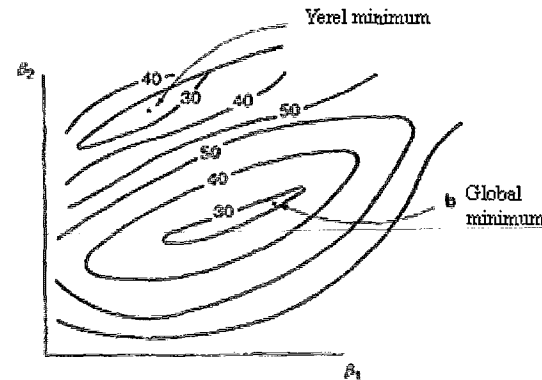
modeli düşünölsün. γ_0 ve γ_1 aralarında değıştirildiklerinde model değışmez. $S(\gamma)$ için minimum $(\gamma_0, \gamma_1) = (g_0, g_1)$ 'de elde edilirse, aynı minimum değeri $(\gamma_0, \gamma_1) = (g_1, g_0)$ 'da da elde edilir. Başka bir deyişle, çift çözümler mevcuttur (Draper ve Smith, 1998).



(a) Doğrusal model



(b) Doğrusal olmayan model



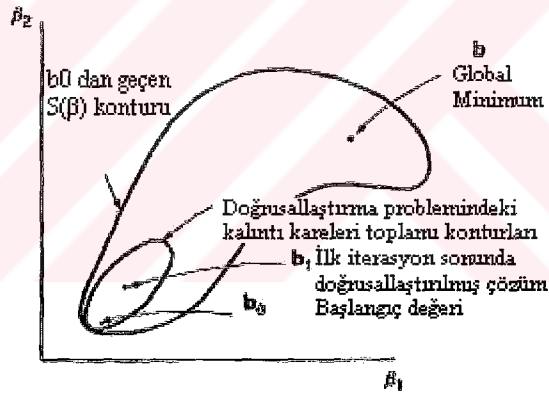
(c) İki yerel minimuma sahip doğrusal olmayan model

Şekil 6.5 Kalıntı kareleri toplamı fonksiyonunun konturları: (a) doğrusal model; (b) doğrusal olmayan model; (c) bir yerel ve bir global minimuma sahip doğrusal olmayan model (Montgomery vd., 2001)

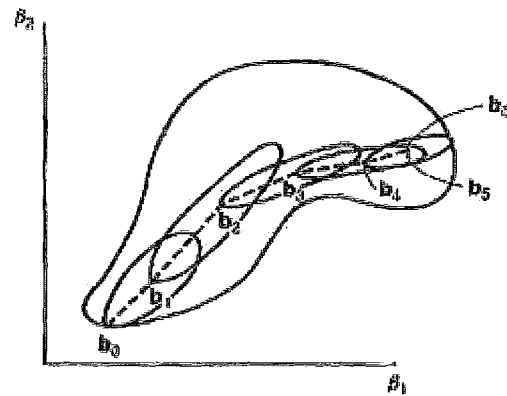
Şekil 6.5, parametre uzayında $S(\beta)$ nın, doğrusal, doğrusal olmayan ve iki yerel minimuma sahip doğrusal olmayan durum için görünümünü sunmaktadır. Model, doğrusal olduğu zaman, $S(\beta)$ yı temsil eden konturlar, elipsoid biçimli ve tek bir global minimuma sahip olacaktır. Bu durum Şekil 6.5a'da gösterilmiştir.

Modelin doğrusal olmadığı durumda, konturların şekli, Şekil 6.5b'deki gibi olur. Konturların şekli doğrusal olmayan modelin biçimine bağlıdır.

Bazı durumlarda, konturlar öyle düzensiz olurlar ki, birçok yerel minimum ve belki de birden çok global minimum var olabilir. Şekil 6.5c, bir yerel ve bir global minimumun var olduğu durumu göstermektedir.



(a) Birinci iterasyon



(b) İzleyen doğrusallaştırma iterasyonlarının görünümü

Şekil 6.6 Doğrusallaştırmanın geometrik görünümü: (a) ilk iterasyon; (b) İzleyen doğrusallaştırma iterasyonlarının görünümü (Montgomery vd., 2001).

Doğrusal olmayan modelde, $S(\beta)$ nın görünümü düzensiz “muz” şeklinde olmasına karşılık, doğrusal model için bu görünüm, eliptik, ve global minimuma, Şekil 6.6a’daki “sürahi”nin tabanında, sahip olmaktadır. Doğrusallaştırma yöntemi, doğrusal olmayan regresyon problemini, \mathbf{b}_0 ’dan başlayarak, bir dizi doğrusal regresyona dönüştürür. Doğrusallaştırma ile, bir dizi eliptik kontur yardımıyla, global minimuma doğru hareket edilir. Bu, SEKK ile yapılır. Bir sonraki iterasyon, Şekil 6.6b’de gösterildiği gibi, yeni \mathbf{b}_1 çözümünden başlayarak, süreci tekrar eder (Montgomery vd., 2001).



7. DOĞRUSAL REGRESYON MODELİNDE DEĞİŞEN VARYANS

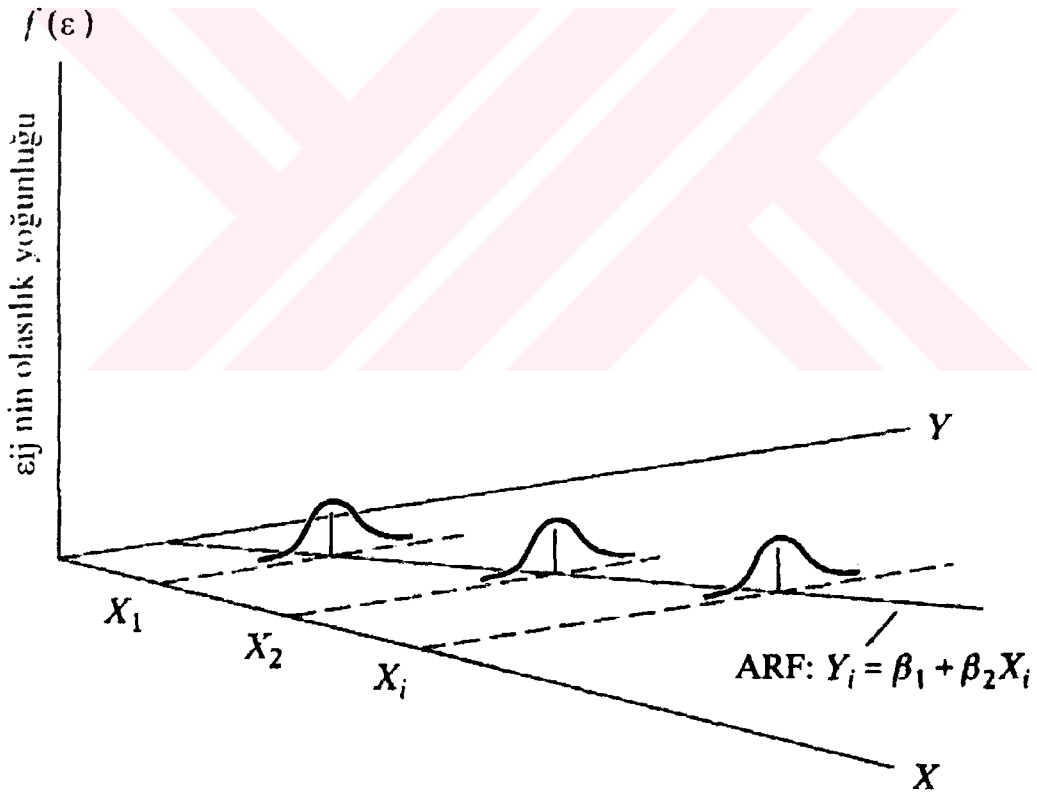
7.1 Değişen Varyans Kavramı:

Bölüm 2.3.2’de değinildiği üzere, KDRM’nin varsayımlarından biri, her alt anakütle için, hata payları varyansının aynı olduğu şeklindeki, sabit varyanslılık varsayımdır. Bu durum,

$$\text{Var}(\varepsilon_{ij}|X_i) = \sigma_i^2$$

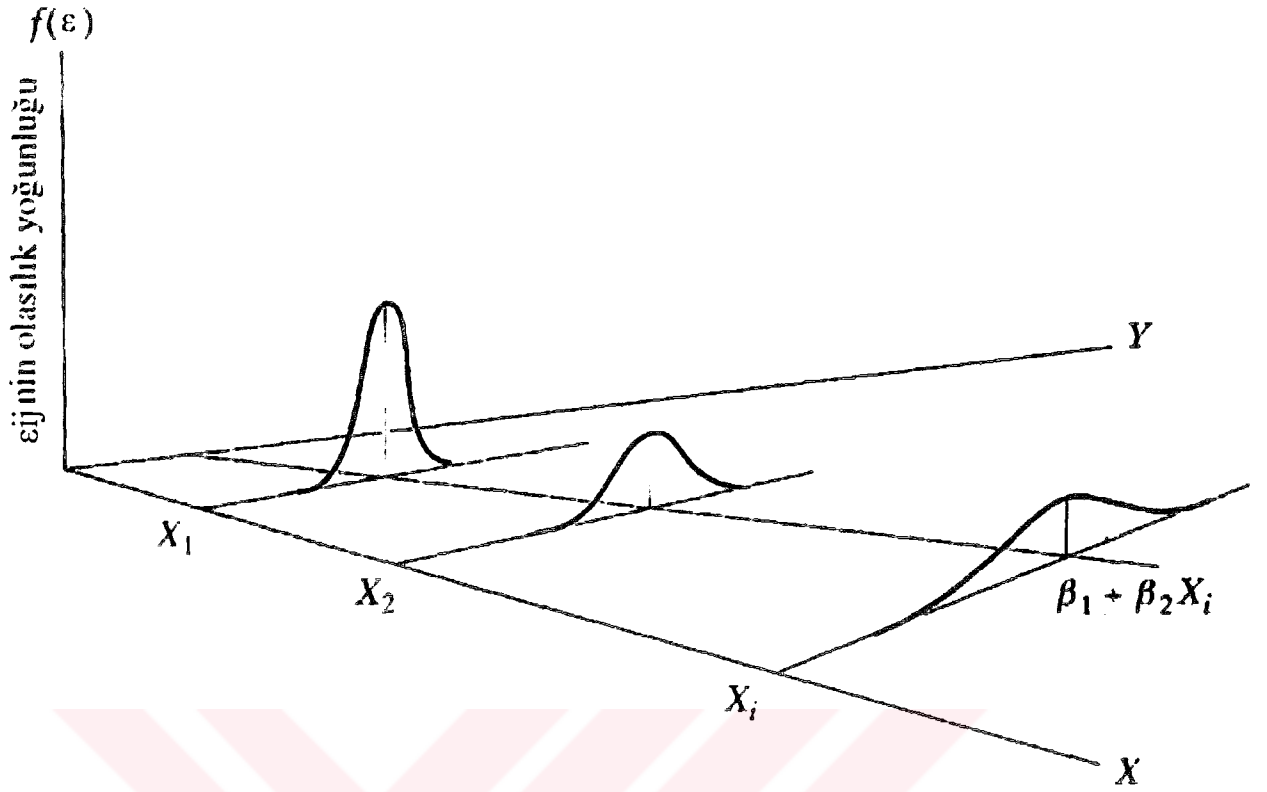
ile gösterilir. Aynı durum, diğer varsayımların geçerliliği altında, Y_{ij} için de söylenebilir:

$$\text{Var}(Y_{ij}|X_i) = \sigma_i^2$$



Şekil 7.1 Sabit varyans (Gujarati, 2001)

Sabit varyanslılık durumu, bağımsız değişken X ve bunlara karşılık gelen Y’lerin dağılımı ve bunlara karşılık gelen, hata paylarının olasılık yoğunluk fonksiyonu değerlerinin verildiği, Şekil 7.1’deki üç boyutlu grafikte gösterilmiştir. Görüldüğü gibi, her alt anakütlenin varyansı ya da diğer bir deyişle yayıklığı (dispersion) aynıdır.



Şekil 7.2 Değişen varyans (Gujarati, 2001)

Değişen varyansta ise, durum, Şekil 7.1'dekinden farklı olacaktır. Bunun için Şekil 7.2'deki durum örnek olarak verilebilir. Görüldüğü gibi, her alt anakütle için hata paylarının veya bağımlı değişken değerlerinin varyansı aynı değildir.

7.2 Değişen Varyansın Nedenleri:

Değişen varyans, zaman serilerinden çok kesit verilerinde görülmektedir. Değişen varyans, spesifikasyon hatasından veya model tahmininde kullanılan verilerden kaynaklanmaktadır.

Spesifikasyon hatasına örnek olarak, modelde bulunması gereken bir bağımsız değişkenin dışlanması verilebilir. Buna göre, kurulması gereken model,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_3 X_{2i} + \dots + \beta_{p-1} X_{p-1,i} + \epsilon_i$$

iken, bir bağımsız değişkenin dışlanmasıyla

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_3 X_{2i} + \dots + \beta_{p-2} X_{p-2,i} + u_i$$

halini alır ve indirgenmiş modeldeki hata payı,

$$u_i = \beta_{p-1} X_{p-1,i} + \varepsilon_i$$

olarak yazılır. Burada, u_i 'nin varyansı,

$$Var(u_i) = \beta_{p-1}^2 Var(X_{p-1,i}) + Var(\varepsilon_i)$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi, bu ifade, dışlanan bağımsız değişkene bağlıdır ve bu da değişen varyansa neden olabilecektir.

Değişen varyansa neden olabilecek diğer bir durum ise, model tahmininde, zaman serisi verileri ile kesit verilerine birlikte yer vermektir. Bu durumda, zaman serisi verileri ile ilgili parametre, zamana göre değişimi yansıtırken, kesit verileri ile ilgili parametre ise birimlere göre değişimi yansıtacaktır.

Genel olarak, değişen varyansa neden olabilecek durumlar, şu şekilde ifade edilebilir:

- i) Hata-öğrenme modellerine göre, deneyim arttıkça hata azalmaktadır. Örneğin, belirli bir zaman dilimi içerisinde, daktilo yazım hataları ile daktilo çalışma saatleri arasındaki ilişki gibi. Eğer, daktilo yazım hataları bağımlı değişken olarak alınırsa, hataların çalışma saatlerine göre azalacağından(en azından azalması bekleneceğinden), değişen varyans durumu ile karşılaşmak fazlasıyla olasıdır.
- ii) Bazı değişkenlerin kullanımı sonucu oluşan özel durumlar. Örneğin, tasarrufların gelire göre regresyonunda, değişen varyansla karşılaşmak mümkündür. Çünkü, gelir yükseldikçe, insanların istedikleri gibi harcayabilecekleri gelir daha çok olur. Harcayabilecekleri seçenekler genişler. Böylece alt anakütle varyanslarının gelire birlikte büyümesi olasıdır.
- iii) Veri toplama tekniklerinin gelişmesi daha az hataya neden olabilir. Böylece, alt anakütle varyansları azalma eğiliminde olabilir.

- iv) Sapan değerlerin(outliers) varlığı, değişen varyansa neden olabilir. Bu durumda, sapan değerlerin atılıp atılmaması araştırılmalıdır.
- v) Daha önce, örnek verildiği gibi, değişen varyans, spesifikasyon hatalarından kaynaklanabilir.

7.3 Değişen Varyansın Sonuçları ve Değişen Varyans Varken Tahmincilerin Özellikleri:

Bilindiği gibi, sabit varyanslılık, her alt anakütlenin eşit öneme sahip olduğunu ifade eder. Başka bir deyişle, örnekleme, her gözlemin güvenilirliği aynıdır. Sabit varyans varsayımı geçerli olmadığında, bu durum bozulur ve örnekleme giren her gözlem, farklı varyanslara sahip alt anakütleden geldiklerinden, eşit güvenilirliğe sahip olmayacaklardır. Değişen varyans durumunda, şu sonuçlarla karşılaşılır:

- i) Tahminciler, yine doğrusal ve sistematik hatasız olurlar. Sistematik hatasız olduklarından asimptotik olarak da sistematik hatasız olacaklardır.
- ii) Tahminciler, artık minimum varyanslı olmayacaklardır. Bundan dolayı, etkin tahminciler değildirler. Asimptotik olarak da etkin değildirler.
- iii) Tahmincilerin varyansları, sistematik hatalı olurlar. Bu sapma, σ^2 'nin bilinen tahmincisi MSE'nin, değişen varyans varken, artık sistematik hatasız olmamasından kaynaklanır.
- iv) Değişen varyans söz konusu olduğunda, alışıldık t ve F testleri, güvenilirliklerini kaybederler (Gujarati, 2001).

Tahmincilerin bilinen, küçük örneklem ve büyük örneklem özelliklerinin, değişen varyans durumunda, nasıl etkilendikleri aşağıda ayrıntılı olarak incelenecektir:

Değişen Varyansın Söz Konusu Olduğu Durumda Parametre Tahmincilerinin Özellikleri:

- i) **Sistematik Hatasızlık:**

ARF'nin

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

şeklinde basit doğrusal regresyon modeli olduğu düşünölsün. Bu ifadenin ortalaması alınırsa,

$$\bar{Y} = \beta_0 + \beta_1 \bar{X} + \bar{\varepsilon}$$

olacaktır. Bölüm 2.3.3'te,

$$k_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2}, \quad x_i = (X_i - \bar{X})$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} b_1 &= \sum k_i (\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i) \\ &= \beta_1 + \sum k_i \varepsilon_i \end{aligned}$$

olduğu ifade edilmişti. b_1 'in beklenen değeri ise, bu durumda, parametreye (β_1) eşit olacaktır:

$$E(b_1) = \beta_1$$

Aynı şekilde b_0 'ın beklenen değeri,

$$\bar{Y} = \beta_0 + \beta_1 \bar{X} + \bar{\varepsilon}$$

eşitliğinden,

$$E(b_0) = (\beta_0 + \beta_1 \bar{X} + \bar{\varepsilon}) - b_1 \bar{X} = \beta_0$$

olarak elde edilir. Görüldüğü gibi, tahminçiler sistematik hatasızdırlar. Aynı zamanda asimptotik olarak da sistematik hatasızdırlar. Çünkü zaten EKK tahminçilerinin sistematik hatasızlığı, sabit varyans varsayımını gerektirmez.

ii) Etkinlik:

Değişen varyans durumunda, tahminçilerin varyanslarının minimum olamadığı şu şekilde gösterilebilir:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

şeklindeki ARF de, sabit varyans varsayımı gerçekleşmediğinde parametrelerin β_0^* ve β_1^* oldukları kabul edilsin. Burada, $\hat{\beta}_0^*$ ve $\hat{\beta}_1^*$ 'in varyansları en iyi doğrusal sapmasız tahmin yöntemi ile belirlenecektir.

Doğrusallık koşulu gereği,

$$\hat{\beta}_1^* = \sum a_i Y_i$$

$\hat{\beta}_1^*$ 'in beklenen değer ve varyansı,

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}_1^*) &= \sum a_i E(Y_i) \\ &= \beta_0 \sum a_i + \beta_1 \sum a_i X_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\beta}_1^*) &= E[\sum a_i Y_i - E(\sum a_i Y_i)]^2 \\ &= E[\sum a_i (Y_i - E(Y_i))]^2 \end{aligned}$$

$Y_i - E(Y_i) = \varepsilon_i$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\beta}_1^*) &= E(\sum a_i \varepsilon_i)^2 \\ &= E[\sum a_i^2 \varepsilon_i^2 + 2E(\sum_{i < j} a_i \varepsilon_i a_j \varepsilon_j)] \end{aligned}$$

elde edilir. $E(\varepsilon_i^2) = \sigma_i^2$ ve $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ olduğundan,

$$\text{Var}(\hat{\beta}_1^*) = \sum a_i^2 \sigma_i^2$$

olarak bulunur. Bu sonuçlara göre, sistematik hatasızlık gereği,

$$\sum a_i = 0$$

$$\sum a_i X_i = 1$$

olacaktır ve Lagrange fonksiyonu,

$$H = \sum a_i^2 \sigma_i^2 - \lambda_1 (\sum a_i) - \lambda_2 (\sum a_i X_i - 1)$$

olarak elde edilir. H'nin a_1, a_2, \dots, a_n ve $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 'e göre kısmi türevleri,

$$\frac{\partial H}{\partial a_1} = 2a_1 \sigma_1^2 - \lambda_1 - \lambda_2 X_1$$

$$\frac{\partial H}{\partial a_2} = 2a_2 \sigma_2^2 - \lambda_1 - \lambda_2 X_2$$

.....

$$\frac{\partial H}{\partial a_n} = 2a_n \sigma_n^2 - \lambda_1 - \lambda_2 X_n$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = -\sum a_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = -\sum a_i X_i + 1$$

olacaktır. Bunlar sıfıra eşitlenirse,

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\sigma_1^2} + \lambda_2 \frac{X_1}{\sigma_1^2} \right)$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\sigma_2^2} + \lambda_2 \frac{X_2}{\sigma_2^2} \right)$$

.....

$$a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\sigma_n^2} + \lambda_2 \frac{X_n}{\sigma_n^2} \right)$$

elde edilir. Bu durumda a_i 'lerin toplamı,

$$\sum a_i = \frac{1}{2} \left(\lambda_1 \sum \frac{1}{\sigma_i^2} + \lambda_2 \sum \frac{X_i}{\sigma_i^2} \right)$$

şeklinde elde edilir. Her bir a_i 'nin X_i 'ler ile çarpımlarının toplamı da

$$\sum a_i X_i = \frac{1}{2} \left(\lambda_1 \sum \frac{X_i}{\sigma_i^2} + \lambda_2 \sum \frac{X_i^2}{\sigma_i^2} \right)$$

şeklinde yazılır.

$$\begin{aligned}\sum a_i &= 0 \\ \sum a_i X_i &= 1\end{aligned}$$

olması gerektiğinden,

$$\sum a_i = \frac{1}{2}(\lambda_1 \sum \frac{1}{\sigma_i^2} + \lambda_2 \sum \frac{X_i}{\sigma_i^2}) = 0$$

$$\sum a_i X_i = \frac{1}{2}(\lambda_1 \sum \frac{X_i}{\sigma_i^2} + \lambda_2 \sum \frac{X_i^2}{\sigma_i^2}) = 0$$

eşitliklerinden, λ_1 ve λ_2 çekilirse,

$$\lambda_1 = \frac{-2(\sum \frac{X_i}{\sigma_i^2})}{(\sum \frac{1}{\sigma_i^2})(\sum \frac{X_i^2}{\sigma_i^2}) - (\sum \frac{X_i}{\sigma_i^2})^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-2(\sum \frac{1}{\sigma_i^2})}{(\sum \frac{1}{\sigma_i^2})(\sum \frac{X_i^2}{\sigma_i^2}) - (\sum \frac{X_i}{\sigma_i^2})^2}$$

bulunur. λ_1 ve λ_2 'nin bu ifadelerinin a_i lerde yerine koyulması ile, genelleştirerek,

$$a_i = \frac{-\frac{1}{\sigma_i^2}(\sum \frac{X_i}{\sigma_i^2}) + \frac{X_i}{\sigma_i^2}(\sum \frac{1}{\sigma_i^2})}{(\sum \frac{1}{\sigma_i^2})(\sum \frac{X_i^2}{\sigma_i^2}) - (\sum \frac{X_i}{\sigma_i^2})^2}$$

yazılabilir. Bu ifade, $\hat{\beta}_1^* = \sum a_i Y_i$ 'de yerine konursa

$$\hat{\beta}_1^* = \frac{(\sum \frac{1}{\sigma_i^2})(\sum \frac{X_i Y_i}{\sigma_i^2}) - (\sum \frac{X_i}{\sigma_i^2})(\sum \frac{Y_i}{\sigma_i^2})}{(\sum \frac{1}{\sigma_i^2})(\sum \frac{X_i^2}{\sigma_i^2}) - (\sum \frac{X_i}{\sigma_i^2})^2}$$

ve $\hat{\beta}_1^*$ 'in varyansı da

$$\text{Var}(\hat{\beta}_1^*) = \frac{(\sum \frac{1}{\sigma_i^2})}{(\sum \frac{1}{\sigma_i^2})(\sum \frac{X_i^2}{\sigma_i^2}) - (\sum \frac{X_i}{\sigma_i^2})^2}$$

olacaktır. $\hat{\beta}_0^*$ ise,

$$\hat{\beta}_0^* = \bar{Y} - \hat{\beta}_1^* \bar{X}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum \frac{Y_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad \text{ve} \quad \bar{X} = \frac{\sum \frac{X_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

olduğundan,

$$\hat{\beta}_0^* = \frac{\sum \frac{Y_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}} - \hat{\beta}_1^* \frac{\sum \frac{X_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

olacaktır. $\hat{\beta}_0^*$ 'ın varyansı da aynı şekilde,

$$\text{Var}(\hat{\beta}_0^*) = \frac{(\sum \frac{X_i^2}{\sigma_i^2})}{(\sum \frac{1}{\sigma_i^2})(\sum \frac{X_i^2}{\sigma_i^2}) - (\sum \frac{X_i}{\sigma_i^2})^2}$$

olarak elde edilir. Bu sonuçlara göre, değişen varyans durumunda, tahmincilerin varyansları minimum olmamaktadır. Bir başka ifade ile, EKK tahmincileri, sabit varyans varsayımı geçerli olmadığında, etkin değildirler.

iii) Tutarlılık:

Daha önce açıklandığı gibi,

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta} = \theta$$

ise, $\hat{\theta}$, θ 'nin tutarlı tahmincisidir.

$$\begin{aligned} b_1 &= \sum k_i (\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i) \\ &= \beta_1 + \sum k_i \varepsilon_i \end{aligned}$$

olduğundan,

$$p \lim b_1 = \beta_1 + p \lim k_i \varepsilon_i$$

olacaktır.

$$Cov(X_i, \varepsilon_i) = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})}{n} = \frac{\sum (X_i - \bar{X}) \cdot \varepsilon_i}{n} = 0$$

olduğundan,

$$\sum (X_i - \bar{X}) \cdot \varepsilon_i = 0$$

olacaktır. $\sum (X_i - \bar{X})^2$ ise sabit sayıdır. Bu nedenle,

$$p \lim b_1 = \beta_1 + p \lim \frac{0}{\sum (X_i - \bar{X})^2} = \beta_1$$

olarak elde edilir. Sabit varyans varsayımı geçerli olmadığında da b_1 , β_1 'in tutarlı tahmincisi olmaktadır.

Aynı şekilde, β_0 için de

$$p \lim b_0 = p \lim (\bar{Y} - b_1 \bar{X})$$

yazılacaktır.

$$\bar{Y} = \beta_0 + \beta_1 \bar{X} + \bar{\varepsilon}$$

olduğundan,

$$p \lim b_0 = p \lim (\beta_0 + \beta_1 \bar{X} + \bar{\varepsilon} - b_1 \bar{X})$$

$$\begin{aligned}
&= \beta_0 + \beta_1 \bar{X} + p \lim(\bar{\varepsilon}) - p \lim(b_1 \bar{X}) \\
&= \beta_0 + \beta_1 \bar{X} + 0 - \beta_1 \bar{X} \\
&= \beta_0
\end{aligned}$$

olur. Burada da görüldüğü gibi, sabit varyans varsayımı geçerli olmasa bile b_0 , β_0 'in tutarlı tahmincisi olacaktır.

iv) Asimptotik Etkinlik:

Sabit varyans varsayımı geçerli olmadığında, b_1 'in varyansı,

$$Var(b_1) = E(b_1 - \beta_1)^2$$

ile gösterilsin.

$$b_1 = \beta_1 + \sum k_i \varepsilon_i$$

olduğundan,

$$E(b_1 - \beta_1)^2 = E(\sum k_i \varepsilon_i)^2$$

$$E(\sum k_i^2 \varepsilon_i^2) + 2E[\sum_{i < j} \frac{(X_i - \bar{X})\varepsilon_i (X_j - \bar{X})\varepsilon_j}{\sum (X_i - \bar{X})^2}]$$

olur. $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ olduğundan,

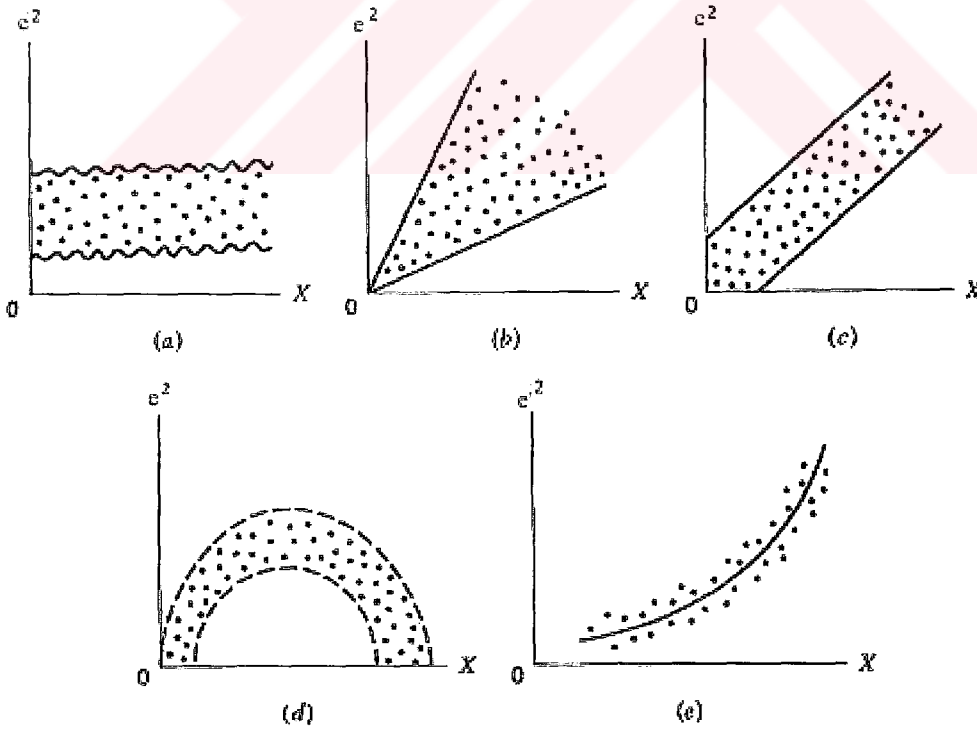
$$= E[\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2 \varepsilon_i^2}{(\sum (X_i - \bar{X})^2)^2}] = k_i^2 E(\varepsilon_i^2) = k_i^2 \sigma_i^2$$

bulunur. Görüldüğü gibi, $Var(b_1)$, daha önce elde edilen $Var(\hat{\beta}_1^*)$ 'den farklıdır ve n arttıkça farklılaşacaktır. Aynı durum b_0 için de geçerlidir. Bu nedenle, sabit varyans varsayımı geçerli olmadığı durumda, b_0 ve b_1 asimptotik olarak etkin değildirlir (Güriş ve Çağlayan, 2000).

7.4 Değişen Varyansı Saptamada Kullanılan Bazı Testler:

Değişen varyansın araştırılmasında kesin kurallar yoktur, çünkü uygulamada seçilmiş X_i 'lere karşılık, bütün Y_{ij} 'ler elde edilemez. Anakütle hata payı varyansı σ^2 (eğer değişiyorsa σ^2_i)'nin elde edilmesi, ancak, anakütle, Çizelge 2.2'deki gibi biliniyorsa, mümkündür. Temel bilimlerin aksine, birçok sosyal bilimlerde, inceleme konuları, laboratuvar gibi denetimli koşullarda yapılamaz. Bundan dolayı, genellikle, belli bir X değerine karşılık, tek bir Y değeri bulunur. Başka bir deyişle, tekrarlı verilere fazla rastlanılmaz. Bunun için de, alt anakütle varyanslarının bilinmesi imkansızdır. Bunun sonucu olarak, değişen varyansı belirlemeye yönelik yöntemler, kesin kurallar olmaktan çok, sezgilere veya önsel deneyimlere dayalı yöntemlerdir.

Değişen varyansı incelemeye yönelik yöntemlerde ilk akla gelen grafiksel incelemedir. Eğer sabit varyanslılık varsayımı dahil diğer tüm klasik varsayımlar yerine gelmişse ve örneklem hacmi büyükse, kalıntıların, hata paylarının yaklaşık tahmincisi olduğu söylenebilir. Buna göre, kalıntıların mutlak değerlerinin veya karelerinin, tahmin değerlerine veya açıklayıcı değişken(ler)e göre grafiklerine bakılır. Eğer, grafikte belirli bir düzenli yapı göze çarpıyorsa, değişen varyansın söz konusu olduğu söylenebilir. Bu grafikler Şekil 7.3'deki gibi olabilir.



Şekil 7.3 Kalıntıların açıklayıcı değişkenle grafiği (Gujarati, 2001)

Şekil 7.3’de görüldüğü gibi, (a) dışındaki diğer tüm grafiklerde belirli bir yapı göze çarpmaktadır. Bundan dolayı, görsel olarak (a) dışında diğer grafikler için, kalıntıların, değişen varyanslı anakütlelerden çekilmiş örneklemelerden elde edilmiş olduğu söylenebilir. Şekil 7.3’teki grafikler, kalıntılar ile tahmin değerleri için de aynı olacaklardır. Eğer, modelde birden fazla açıklayıcı değişken varsa, $e_i - \hat{Y}_i$ grafiği incelenecektir.

Değişen varyansın araştırılmasında, grafik incelemeden daha etkin ve gelişmiş birçok test mevcuttur. Bunlardan, burada bahsedilecek olanlar, Park-Glejser (PG) testi, Spearman sıra korelasyonu (S) testi, Goldfeld-Quandt(GQ) testi, Breusch-Pagan-Godfrey (BPG) testi, White (W) testi, Modifiye edilmiş Levene testi (ML), Ramsey’nin Reset(RR) testi, Lagrange Çarpanı (LM) testi ve tekrarlı veriler gerektiren Bartlett (B) testidir.

7.4.1) Park-Glejser (PG) Testi:

PG testi, σ_i^2 ‘nin, açıklayıcı değişkenin bir fonksiyonu olduğu düşüncesine dayanır. Böylece yukarıdaki grafikleri biçimselleştirir. Burada önerilen fonksiyon,

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 X_i^\beta e^{v_i}$$

ya da,

$$\ln \sigma_i^2 = \ln \sigma^2 + \beta \ln X_i + v_i$$

şeklinde. σ_i^2 bilinmediğinden, onun yerine kalıntıların kareleri kullanılarak şu model tahmin edilir:

$$\begin{aligned} \ln e_i^2 &= \ln \sigma^2 + \beta \ln X_i + v_i \\ &= \alpha + \beta \ln X_i + v_i \end{aligned}$$

Eğer β istatistik bakımdan anlamlı çıkarsa, değişen varyans bulunduğu söylenebilir. Anlamsız çıkarsa sabit varyans varsayımı kabul edilir.

PG testi, iki adımlıdır. Önce, sabit varyans varsayımının geçerli olduğu düşünülerek SEKK ile model tahmin edilir. Sonra, elde edilen kalıntılar ile yukarıdaki model tahmin edilir.

Park tarafından önerilen bu yöntem daha sonraları, şu ek fonksiyon kalıpları ile Glejser tarafından geliştirilmiştir.

$$|e_i| = \beta_0 + \beta_1 X_i + v_i$$

$$|e_i| = \beta_0 + \beta_1 \sqrt{X_i} + v_i$$

$$|e_i| = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_i} + v_i$$

$$|e_i| = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{\sqrt{X_i}} + v_i$$

$$|e_i| = \sqrt{\beta_0 + \beta_1 X_i} + v_i$$

$$|e_i| = \sqrt{\beta_0 + \beta_1 X_i^2} + v_i$$

Goldfeld ve Quandt, PG testine giren hata payı v_i 'nin, ortalamasının sıfır olmaması, otokorelasyonlu olması ve daha da fazlası, değişen varyanslı olması gibi sorunlara dikkati çekmişlerdir. Başka bir güçlük de, Glejser'in önermiş olduğu,

$$|e_i| = \sqrt{\beta_0 + \beta_1 X_i} + v_i$$

$$|e_i| = \sqrt{\beta_0 + \beta_1 X_i^2} + v_i$$

modellerinin parametrelerinde doğrusal olmaması ve bilinen SEKK yöntemi ile tahmin edilememesidir.

7.4.2) Spearman Sıra Korelasyonu(S) Testi:

S testi, korelasyon katsayısının, sıra numaralarının yarattığı ilişkiden faydalanılarak, kısaltılması sonucu elde edilen Spearman sıra korelasyon katsayısına dayanır:

$$r_s = 1 - 6 \frac{\sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

Burada d_i , i inci kişi ya da olgunun iki farklı özelliğine verilen sıra numaraları arasındaki farktır. n ise sıralanan kişi ya da olgu sayısını gösterir.

Bu testin altında yatan düşünce şudur: Eğer kalıntılar, değişen varyanslı anakütleden çekilen bir örneklemden elde edilmişlerse, o zaman, bu kalıntılar, büyük olasılıkla, Şekil 7.3'dekine benzer, X 'e(veya \hat{Y}_i 'ya) bağlı yapılar sergileyeceklerdir. Bu da r_s ile belirlenebilir. Hipotezler,

$H_0 : \rho_s = 0$ sabit varyans

$H_1 : \rho_s \neq 0$ değişen varyans

şeklinde kurulur. Burada doğrusal korelasyon yerine, sıra korelasyonunun kullanılmasının nedeni, KDRM'nin varsayımları gereği, kalıntılar ile bağımsız değişkenler arasında ilişki olmamasıdır.

Test için, önce model tahmin edilerek, kalıntılar hesaplanır. Kalıntıların mutlak değerleri ile bağımsız değişkenin(tahmin değerlerinin) değerlerine göre her ikisine de sıra numaraları verilir. Sıra numarası verilirken değişkenlerin aldıkları değer birden fazla tekrarlanıyorsa, bu değerler ile ilgili sıra numarasının ortalaması alınarak sıra numarası verilir. Bu durumda korelasyon katsayısında küçük bir sapma olacaksa da bu ihmal edilebilir. Bulunan sıra korelasyonu katsayısı,

$$t_s = \frac{r_s \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_s^2}}$$

test istatistiği kullanılarak t testi ile test edilir. Çok değişkenli doğrusal modellerde her bağımsız değişken için bu testin yapılması gerekir. Eğer hepsinde H_0 kabul edilirse sabit varyans varsayımı kabul edilebilir (Gujarati, 2001).

7.4.3 Modifiye Edilmiş Levene(ML) Testi:

Modifiye edilmiş Levene testi, kalıntıların değişkenliğine dayanır ve normallik varsayımı gerektirmez. Bu test, normallik varsayımından önemli sapmalara karşı dayanıklıdır. Hata paylarının dağılımı normal dağılımdan çok farklı ise, hata paylarının varyansları eşit olduğunda, nominal anlamlılık düzeyi yaklaşık olarak doğru olur.

ML testi şu şekilde uygulanır: Kalıntılar, X'in düzeyine göre iki gruba ayrılır. Böylece, bir grup, X'in görece düşük seviyesine karşılık gelen kalıntıları içerirken, diğer grup, görece daha yüksek X seviyesine karşılık gelen kalıntıları içerecektir. Böylelikle, bir grubun, kalıntılarının grup ortalamalarından mutlak sapmaları, diğer grubun kalıntılarının grup ortalamalarından mutlak sapmalarından daha büyük olacaktır. Testin daha sağlam olması için, grup ortalamaları yerine grup medyanları kullanılır.

ML testi, iki-örneklem t testine dayanır. n_1 ve n_2 her iki gruptaki veri sayısını gösterirse toplam,

$$N = n_1 + n_2$$

tane veri olacaktır. \tilde{e}_1 ve \tilde{e}_2 grupların medyanlarını göstermek üzere, medyandan mutlak sapmalar,

$$d_{i1} = |e_{i1} - \tilde{e}_1| \quad d_{i2} = |e_{i2} - \tilde{e}_2|$$

olacaktır. İki-örneklem test istatistiği ise,

$$t_L^* = \frac{\bar{d}_1 - \bar{d}_2}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

şeklinde. Burada, \bar{d}_1 ve \bar{d}_2 , sırasıyla, d_{i1} ve d_{i2} 'nin örneklem ortalamalarıdır. Ortak varyans s^2 ise,

$$s^2 = \frac{\sum (d_{i1} - \bar{d}_1)^2 + \sum (d_{i2} - \bar{d}_2)^2}{n-2}$$

şeklinde. t_L^* , ML testinin test istatistiğini göstermektedir.

Eğer hata payları sabit varyanslı ise ve n_1 ve n_2 çok küçük değilse, t_L^* , yaklaşık olarak n-2 serbestlik dereceli t dağılımını izler. Büyük mutlak değerli t_L^* değerleri, değişen varyansa işaretler (Neter vd., 1996).

7.4.4 Breusch-Pagan-Godfrey(BPG) Testi:

BPG testi, bir büyük örneklem testidir. Bu testte, hata paylarının otokorelasyonsuz olduğu ve normal dağıldığı varsayılır. Model,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_{p-1} X_{p-1,i} + \varepsilon_i$$

olmak üzere, her alt anakütle varyansı σ_i^2 'nin,

$$\sigma_i^2 = f(\alpha_0 + \alpha_1 Z_{1i} + \dots + \alpha_m Z_{mi})$$

şeklinde, raslantı değişkeni olmayan Z'lerin bir fonksiyonu olduğu varsayılır. Z, bağımsız değişkenlerden bazıları olabileceği gibi, hepsi de olabilir. Burada fonksiyon, herhangi biçimde düşünülebilir. Örneğin doğrusal fonksiyon için,

$$\sigma_i^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Z_{1i} + \dots + \alpha_m Z_{mi}$$

olacaktır.

BPG testi şu adımları izler:

i) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_{p-1} X_{p-1,i} + \varepsilon_i$ modeli SEKK ile tahmin edilip, kalıntılar bulunur.

ii) Hata payı varyansının MO tahmini $\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n}$ bulunur.

iii) $p_i = \frac{e_i^2}{\tilde{\sigma}^2}$ şeklinde p_i 'ler bulunur.

v) p_i 'ler bağımlı değişken, Z'ler de bağımsız değişkenler olmak üzere, hangi fonksiyon yapısı seçilmişse, ona göre model oluşturulur. Örneğin yukarıda doğrusal fonksiyon örnek verilmişti. Buna göre oluşturulacak model,

$$p_i = \alpha_0 + \alpha_1 Z_{1i} + \dots + \alpha_m Z_{mi} + v_i$$

olacaktır.

vi) Tahmin edilen modelin SSR'siyardımıla $Q = SSR/2$ istatistiği hesaplanır. Sabit varyans ve hata paylarının normal dağıldığı varsayımı altında, Q istatistiği, asimptotik olarak m-1 serbestlik derecesi ile χ^2 dağılır.

Dolayısıyla, sabit varyans durumunu gösteren,

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$$

hipotezi, $Q > \chi_{m-1}^2$ ise reddedilecektir.

7.4.5 White(W) Testi:

W testi, normallik varsayımına dayanmaz ve PG ve BPG testlerinde olduğu gibi yardımcı regresyon modeli tahmini gerektirir. Buna göre önce model tahmin edilerek kalıntılar belirlenir. Belirlenen kalıntıların karelerinin bağımlı değişken olduğu, bağımsız değişkenlerin ise, modeldeki bağımsız değişkenler, onların kareleri ve birbirleri ile çarpımları olduğu, doğrusal model oluşturulur. Asıl model,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_{p-1} X_{p-1,i} + \varepsilon_i$$

ise, yardımcı model,

$$e_i^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_{p-1} X_{p-1} + \gamma_1 X_1^2 + \gamma_2 X_2^2 + \dots + \gamma_{p-1} X_{p-1}^2 + \delta_1 X_1 X_2 + \dots + \delta_2 X_1 X_{p-1} + \theta_1 X_2 X_3 + \dots + v_i$$

olacaktır. Yardımcı modelde, X'in daha yüksek kuvvetleri de modele sokulabilir. Asıl modelde, sabit terim olsun olmasın, yardımcı regresyon modelinde sabit terim bulunmalıdır. Sabit varyans anlamına gelen ve yardımcı modelde, sabit terim dışında tüm parametrelerin sıfır olduğunu ifade eden sıfır hipotezi altında, nR^2 istatistiği, asimptotik olarak, χ_m^2 dağılımına uyar. Burada R^2 , yardımcı modelin belirlilik katsayısıdır. m ise, yardımcı modeldeki açıklayıcı değişken sayısıdır.

Bu test, değişken sayısı az iken iyi işlemesine karşın, değişken sayısı arttığında serbestlik derecesi azalacaktır.

7.4.6 Goldfeld-Quandt(GQ) Testi:

GQ testinde, değişen varyans σ_i^2 'nin, bağımsız değişkenlerden birine bağlı olduğu varsayılmaktadır. GQ testinde de sıfır hipotezi, "sabit varyans varsayımı geçerlidir" şeklinde kurulur. Testteki temel düşünce büyük X^* değerlerinin, büyük kalıntıların oluşmasına neden olacağı şeklindedir. X^* , burada, değişen varyansa neden olan bağımsız değişkeni göstermektedir. GQ testinde, değişen varyansın,

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 X_i^{*2}$$

şeklinde değiştiği varsayılmaktadır.

Test için önce model tahmin edilir ve kalıntılar bulunur. X^* değerleri, küçükten büyüğe doğru sıralanır. Bunlara karşılık gelen Y_i değerleri dizisi oluşturulur. Sonra, ortadan c tane gözlem atılarak, veriler iki gruba ayrılır. Herbir grupta $(n-c)/2$ tane gözlem olacaktır. Sonra her bir gruptaki verilere ayrı ayrı SEKK ile model uydurulup, bunların SSE'leri bulunur. Bunlar SSE_1 ve SSE_2 olarak gösterilsin. Her iki SSE'nin de serbestlik dereceleri aynı ve $[(n-c)/2]-k$ 'dır. Ve her ikisi de birbirinden bağımsız χ^2 değişkenidir. Buna göre

$$\lambda = \frac{SSE_2 / ((n-c)/2 - k)}{SSE_1 / ((n-c)/2 - k)} \sim F_{[(n-c)/2]-k, [(n-c)/2]-k}$$

şeklinde dağılan λ test istatistiği, kritik F değerinde büyükse, sabit varyans varsayımı reddedilir.

Ortakdaki c tane veri, SSE_1 ile SSE_2 arasındaki farkı keskinleştirmek için atılır. GQ testinin başarılı olması, c 'nin seçimine bağlıdır.

Goldfeld ile Quandt'ın basit doğrusal regresyon modeli için yaptıkları Monte Carlo denemelerinde, örneklem büyüklüğü 30 dolayındayken, $c=8$, örneklem büyüklüğü 60 dolayındayken $c=16$ olmasının iyi bir seçim olacağını bulmuşlardır (Gujarati, 2001).

7.4.7 Ramsey'nin Reset (RR) Testi:

Esas olarak spesifikasyon hatalarında kullanılan RR testi, değişen varyansın testinde de kullanılmaktadır. RR testinde, önce model tahmin edilir ve kalıntılar belirlenir. Sonra, kalıntıların bağımlı değişken ve asıl modeldeki bağımlı değişkenin tahmin değerleri \hat{Y}_i 'nin karesi, kübü ve dördüncü kuvvetinin bağımsız değişken olduğu, yardımcı model oluşturulur.

Asıl model,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_{p-1} X_{p-1,i} + \varepsilon_i$$

ise, yardımcı model,

$$e_i = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{Y}_i^2 + \alpha_2 \hat{Y}_i^3 + \alpha_3 \hat{Y}_i^4 + v_i$$

olacaktır. Yardımcı modelde parametrelerin anlamlılığı t testi ile test edilir. Parametreler anlamlı ise, sabit varyans varsayımının geçerli olduğunu ifade eden sıfır hipotezi, ilgili anlam düzeyinde reddedilir.

7.4.8 Lagrange Çarpanı(LM) Testi:

LM testinde önce model tahmin edilir ve kalıntılar belirlenir. İncelenecek model basit regresyon modeli ise, kalıntılar, bağımsız değişkenin mutlak değerlerinin büyüklüğüne göre sıralanır. İncelenen model çok değişkenli ise, kalıntılar, \hat{Y}_i 'nin büyüklük sırasına göre sıralanır.

Sıralanan kalıntılar, herbiri n_i gözlemden oluşan k sayıda gruba bölünür. Buna göre,

$$\sum_{i=1}^k n_i = n$$

olacaktır. Sonra her grup için, hata payları varyansının MO tahminleri bulunur:

$$\tilde{\sigma}_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_i} e_{ki}^2}{n_i}$$

Test istatistiği,

$$LR = \prod_{i=1}^k \frac{(\tilde{\sigma}_i)^{n_i}}{\tilde{\sigma}^n}$$

şeklindedir. LR, k-1 serbestlik dereceli χ^2 dağılımına uyar. Eğer, LR değeri, ilgili anlam düzeyindeki χ^2_{k-1} değerinden büyükse, sabit varyans varsayımının geçerli olduğunu ifade eden sıfır hipotezi reddedilir (Güriş ve Çağlayan, 2000).

7.4.9 Bartlett(B) Testi:

Değişen varyansın saptanmasında da kullanılan Bartlett testi, tekrarlı veriler gerektirmektedir. Buna göre, örnekleme, aynı X değerleri için çeşitli Y değerleri bulunmalıdır. Bu da, sosyal bilimler başta olmak üzere ender rastlanılan bir durumdur.

Test kısaca şu şekildedir: Her biri, normal dağılımdan gelen, serbestlik dereceleri f_1, f_2, \dots, f_k olan, k tane $s_1^2, s_2^2, \dots, s_k^2$ bağımsız örneklem varyansı olsun.

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2 = \sigma^2$$

Şeklinde, her örneklem varyansının aynı anakütle varyansının tahmincisi olduğunu ifade eden sıfır hipotezi test edilmek istensin. Görüleceği gibi, bu, sabit varyans varsayımına karşılık gelmektedir. H_0 doğruysa,

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i s_i^2}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i s_i^2}{\sum f_i}$$

formülü, anakütlenin ortak varyansı σ^2 'nin bir tahmincisi olur. Burada $f_i = (n_i - 1)$, n_i , i inci gruptaki gözlem sayısı, $f = \sum_{i=1}^k f_i$ 'dir.

Bartlett, bu sıfır hipotezinin, $k-1$ serbestlik dereceli χ^2 dağılımına yaklaşık olarak uyan A/B oranı ile test edilebileceğini göstermiştir (Gujarati, 2001). Burada,

$$A = f \ln s^2 - \sum (f_i \ln s_i^2)$$

$$B = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left(\sum \left(\frac{1}{f_i} \right) - \frac{1}{f} \right)$$

dir. A, şu düşünceden elde edilir. Daha önce bahsedildiği gibi, normal dağılımdan çekilen k tane örneklemden, örneklem arası değişkenlik SSW(sum of squares within groups) bulunur. SSW'nin, k tane serbestlik derecesinin tartı olduğu, tartılı aritmetik ortalaması MSSW ve k tane serbestlik derecesinin tartı olduğu, tartılı geometrik ortalaması da GSSW ile gösterilirse, $GSSW \leq MSSW$ olacaktır. Çünkü, analitik ortalamalar için, $GO \leq AO$ ilişkisi vardır. s_i^2 'ler birbirlerine yakın değerler almaları durumunda, iki ortalama arasındaki fark azalacak, s_i^2 'ler arasındaki fark arttıkça da MSSW-GSSW farkı büyüyecektir. Diğer bir deyişle, $\frac{MSSW}{GSSW} \geq 1$ olacaktır. s_i^2 'ler aynı olması durumunda, $GSSW = MSSW$ olacaktır.

Bartlett, MSSW/GSSW oranı yerine, $\ln(MSSW/GSSW)$ oranından ($\ln MSSW - \ln GSSW$) hareketle, sıfır hipotezinin geçerli olması durumunda, $A = \ln MSSW - \ln GSSW$ ifadesinin

yaklaşık χ^2_{k-1} dağılacığını göstermiştir. A'nın B ifadesine bölünmesi ise, bu yaklaşıklık artırmaktadır.

χ^2 dağılımına iyi bir yaklaşıklık sağlanması için her gruptaki gözlem sayısının 4'ten büyük olması gerekmektedir. Ayrıca B testi, normallik varsayımından sapmalara karşı çok duyarlıdır (Genceli, 2001).

Bu bölümde değinilen testlerin dışında, Bartlett testine benzeyen ve tekrarlı veri gerektiren Hartley testi, bunun yanında otokorelasyonun saptanmasında kullanılan Von Neuman oran testi ve Modifiye edilmiş Levene testinin daha farklı bir şekli gibi, değişen varyansın belirlenmesinde kullanılan birçok test mevcuttur.

7.5 Değişen Varyansa İlişkin Düzeltici Yöntemler:

Bölüm 7.3'te, değişen varyans durumunda, SEKK tahmincilerin, sistematik hatasızlık ve tutarlılık özelliklerinin bozulmadığını, fakat asimptotik olarak bile etkin olmadıkları görülmüştü. Tahmincilerin etkin olmaması, bilinen hipotez testlerinin sonuçlarını kuşku duruma sokar. Bunun için düzeltici yöntemlere ihtiyaç vardır. Bunlar, σ^2_i 'nin bilindiği durumlarda başvuru yöntemler ve σ^2_i 'nin bilinmediği durumlarda başvuru yöntemler olmak üzere ikiye ayrılır:

σ^2_i Biliniyorsa:

σ^2_i 'nin bilinmesi durumunda GEKK yönteminin özel bir durumu olan AEKK yöntemi kullanılır. Bu yöntemler, Bölüm 4.3'te ayrıntılı olarak verilmişti. Fakat pratikte, σ^2_i 'nin bilinmesi pek mümkün değildir. Eğer, σ^2_i bilinmiyorsa, tahmin edilebilir, fakat bunun için de, tekrarlı verilere, her X için minimum 2 tane Y değerine ihtiyaç vardır.

GEKK ve AEKK, matris notasyonu ile daha önce verilmişti. Hatırlanacağı üzere AEKK yönteminde, ağırlıklar,

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

şeklinde belirlenmekteydi. Buradaki amaç, regresyon doğrusundan daha uzak olan birimlerin ağırlığını düşük olarak seçmek, başka bir deyişle, tahminde etkisini azaltmaktır. Böylece,

AEKK ile SEKK yöntemi ile elde edilen tahmincilerden daha etkin tahminciler elde edilmiş olur. Bunun nedeni, homojen birimlerin, heterojen birimlere göre daha fazla bilgi sağlamasıdır. Başka bir deyişle, hata payı varyansı daha küçük olan alt anakütleden, hata payı varyansı daha büyük olan alt anakütleyle göre daha fazla bilgi sağlanabilir. Bu görece farklılığı ortaya koyabilmek için bunlar ağırlıklandırılır. Bir gözlemin ağırlığının w_i olması, onun w_i kere tekrarlandığı anlamına gelmektedir. Ağırlıklar, yukarıdaki gibi seçilince, $Var(w_i \varepsilon_j)$, her alt anakütle için sabit olacak ve sabit varyans durumu sağlanmış olacaktır.

σ^2_i Bilinmiyorsa:

Bu durumda, değişen varyansın yapısı hakkında akla uygun varsayımlar yapılır ve dönüşümler uygulanır.

Varsayımlar şu şekilde olabilir:

- i) Hata payı varyansı X_i^2 ile orantılıdır.

$$E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2 X_i^2$$

Bu durumda,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

olan model, her yanı X_i 'ye bölünerek

$$\begin{aligned} \frac{Y_i}{X_i} &= \frac{\beta_0}{X_i} + \beta_1 + \frac{\varepsilon_i}{X_i} \\ &= \beta_1 + \frac{\beta_0}{X_i} + v_i \end{aligned}$$

şeklinde dönüştürülebilir. Bu dönüşüm sonucunda,

$$E(v_i^2) = \frac{E(\varepsilon_i^2)}{X_i^2} = \sigma^2$$

elde edilir. Böylece sabit varyans durumu sağlanmış olunur. İlk modele dönmek için, tahmin edilen dönüştürülmüş modelin her iki yanı X_i ile çarpılır.

ii) Hata payı varyansı X_i ile orantılı olabilir.

$$E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2 X_i$$

Eğer hata payı varyansının X_i^2 ile değil de X_i ile orantılı olduğuna inanılıyorsa,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

şekildeki ilk model, her iki yanı $\sqrt{X_i}$ 'e bölünerek

$$\begin{aligned} \frac{Y_i}{\sqrt{X_i}} &= \frac{\beta_0}{\sqrt{X_i}} + \beta_1 \sqrt{X_i} + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{X_i}} \\ &= \frac{\beta_0}{\sqrt{X_i}} + \beta_1 \sqrt{X_i} + v_i \end{aligned} \quad (7.1)$$

şeklinde dönüştürülür. Dikkat edilirse, $X_i \geq 0$ olmalıdır. (7.1)'e SEKK uygulanarak, $Y_i / \sqrt{X_i}$ 'in , $1/\sqrt{X_i}$ ile $\sqrt{X_i}$ 'ye göre regresyonu bulunur. Dönüştürülmüş modelde sabit terim yoktur. Bunun için β_0 ve β_1 tahmin edilirken orijinden geçen regresyon modeli uygulanmalıdır. (7.1) belirlendikten sonra $\sqrt{X_i}$ ile çarpılarak ilk modele dönülebilir.

iii) Hata payı varyansı, Y'nin beklenen değerinin karesi ile orantılıdır. Bu,

$$E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2 [E(Y_i)]^2$$

şeklinde ifade edilir.

$$E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$$

dir ve ilk model,

$$\begin{aligned} \frac{Y_i}{E(Y_i)} &= \frac{\beta_0}{E(Y_i)} + \frac{\beta_1 X_i}{E(Y_i)} + \frac{\varepsilon_i}{E(Y_i)} \\ &= \frac{\beta_0}{E(Y_i)} + \frac{\beta_1 X_i}{E(Y_i)} + v_i \end{aligned} \quad (7.2)$$

şeklinde dönüştürülür. Bu durumda, $E(v_i^2) = \sigma^2$ olur. Fakat (7.2)'deki dönüşüm uygulanabilir değildir, çünkü $E(Y_i)$, bilinmeyen β_0 ve β_1 'e bağlıdır. $E(Y_i)$ yerine, onun tahmincisi \hat{Y}_i kullanılabilir. Buna göre, önce model, sabit varyans durumu düşünülerek, SEKK ile tahmin edilir. Sonra, \hat{Y}_i kullanılarak model,

$$\frac{Y_i}{\hat{Y}_i} = \frac{\beta_0}{\hat{Y}_i} + \frac{\beta_1 X_i}{\hat{Y}_i} + v_i$$

şeklinde dönüştürülür. \hat{Y}_i 'ler, her ne kadar $E(Y_i)$, ye tam olarak eşit olmasa da, tutarlı tahmincilerdir. Örneklem büyüklüğü sonsuza doğru artarken, $E(Y_i)$ 'ye yakınsarlar.

iv) $\ln Y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln X_i + \varepsilon_i$ şeklinde, logaritmik bir dönüşüm, değişen varyans sorununu, $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ regresyonuna göre çoğu zaman daha düşüğe indirir. Bunun nedeni, logaritma alınması ile ölçeklendirmenin değişmesidir (Gujarati, 2001).

Bunlara ek olarak, daha çeşitli varsayımlar getirilebilir. Görüldüğü gibi, bu varsayımlarda, değişen varyansın yapısı hakkında bir ön kabul mevcuttur. Bu, ön kabullere dayanarak, veriler üzerinde dönüşüm yapılır. Verilerin sergiledikleri yapı incelenerek, bağımlı değişken Y üzerinde dönüm yapılır. Sıklıkla kullanılan dönüşümler;

$$Y' = \sqrt{Y}$$

$$Y' = \ln Y$$

$$Y' = 1/Y$$

şeklindedir. Aynı anda X üzerinde de dönüşüm yapmak faydalı veya gerekli olabilir.

Bazı durumlarda, grafikten, Y üzerinde hangi dönüşümün yapılacağını belirlemek zor olabilir. Box-Cox süreci, kuvvet dönüşümleri ailesinden uygun dönüşümü belirler. Kuvvet dönüşümleri ailesi,

$$Y' = Y^\lambda$$

şeklinde tanımlanır. λ , verilerden belirlenen bir parametredir. λ 'nın bazı değerleri için dönüşüm şu biçimleri alır:

$$\lambda=2 \quad Y'=Y^2$$

$$\lambda=0.5 \quad Y'=\sqrt{Y}$$

$$\lambda=0 \quad Y'=\ln Y \quad (\text{tanım olarak})$$

$$\lambda=-0.5 \quad Y'=\frac{1}{\sqrt{Y}}$$

$$\lambda=-1 \quad Y'=1/Y$$

Bağımlı değişkeninin, kuvvet dönüşümü ailesine ait olduğu KDRM şu şekilde yazılır:

$$Y^{\lambda}_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

Görüleceği üzere, model ek bir parametre λ 'yı içermektedir ve bunun da tahmin edilmesi gerekmektedir. Box-Cox süreci, λ 'yı tahmin etmek için MOY ni kullanır. Bu durumda, tahmin edilecek dört parametre için olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\beta_0, \beta_1, \sigma^2, \lambda) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (Y_i^{\lambda} - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2\right)$$

şekindedir. Bu ifade, $\beta_0, \beta_1, \sigma^2, \lambda$ 'ya göre maksimize edilir. Box-Cox süreci, bu şekilde, $\hat{\lambda}$ yı belirlemiş olur. Sonra λ 'ya göre Y^{λ} , standardize edilir. Böylece, SSE, λ 'nın değerine bağlı olmaz ve karşılaştırılabilir hale gelir. Buna göre Box-Cox dönüşümü

$$W_i = \begin{cases} K_1(Y_i^{\lambda} - 1)\lambda & \lambda \neq 0 \\ K_2 \ln Y & \lambda = 0 \end{cases}$$

şeklinde verilir. Burada

$$K_2 = \left(\prod_{i=1}^n Y_i\right)^{1/n}$$

$$K_1 = \frac{1}{\lambda K_2^{\lambda-1}}$$

dir. Görüldüğü üzere, K_2 , Y_i 'nin geometrik ortalamasıdır (Montgomery vd., 2001).

Sonuçta, uygulanacak dönüşüm, o duruma özgüdür. Ele alınan dönüşümlerle ilgili bazı sorunlar da mevcuttur. Bunlar,

- i) Çok değişkenli modelde, hangi bağımsız değişkenin seçilmesi gerektiği soruna neden olacaktır.
- ii) Eğer verilerde negatif değer(ler) varsa, logaritmik dönüşüm yapılamaz,
- iii) Düzmece korelasyon sorunu var olabilir. Karl Pearson'un ortaya attığı bu terim, esas değişkenler, ilişkisiz ya da raslantısal olsalar bile, bu değişkenlerin oranları arasında korelasyon bulunduğu durumları gösterir. Böylece, $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ modelinde Y_i ile X_i ilişkisiz iken, dönüştürülmüş $\frac{Y_i}{X_i} = \frac{\beta_0}{X_i} + \beta_1 + \frac{\varepsilon_i}{X_i}$ modelinde, $\frac{Y_i}{X_i}$ ile $\frac{1}{X_i}$ çoğu zaman korelasyonlu çıkar.
- iv) σ^2_i bilinmiyor ya da tahmin edilmişse, t ve F testleri ve bütün diğer testler, asimptotik olarak geçerlidir. Bundan dolayı, küçük örneklerde, dönüştürülmüş değerlere dayanan bulgular yorumlanırken dikkatli olunmalıdır (Gujarati, 2001).

8. DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYONDA UYUMUN ÖLÇÜMÜ

Doğrusal olmayan regresyonda, doğrusal durumda olduğu gibi, modelin verilere uyumunun belirlenmesi ve hata payları ile ilgili varsayımların geçerliliğinin incelenmesi gerekir. Bunun için ortalamaların karşılaştırılması, ekstra kareler toplamı, kalıntıların grafiksel olarak incelenmesi gibi, doğrusal durumdaki aynı tekniklere başvurulur. Eğer modelde bir uygunsuzluk varsa veya bazı varsayımlar geçerli görünmüyorsa, model modifiye edilmeli ve tatmin edici bir sonuca ulaşana kadar analize devam edilmelidir.

Doğrusal olmayan tahminde, yanlış olduğu belli veya yanlış olduğundan şüphelenilen parametre tahmin değerlerine yakınsamak mümkündür. Bunun nedeni, yerel minimuma yakınsamadan veya beklenen değer yüzeyinin durumundan ileri gelebilir. Bunun için modelin uyumunun incelenmesi, herşeyden önce parametre tahminlerinin dikkatli incelenmesi ile başlar. Eğer parametre tahminleri anlamsızsa, doğru başlangıç değerlerinin seçilip seçilmediği araştırılmalıdır. Bunun yanında, iterasyon süreci hakkında bilgiler, yakınsamanın pürüzsüz biçimde gerçekleşip gerçekleşmediği hakkında fikir verebilir.

Eğer kullanılan program, görünüşte uygun bir noktaya, pürüzsüz biçimde yakınsamayı sağlıyorsa, fakat parametreler anlamsızsa, o zaman, beklenen değer fonksiyonu, onun türevleri ve değerleri, başlangıç değerleri ve veriler incelenmelidir. Bağımlı değişkenin doğru belirlenip belirlenmediği araştırılmalı, kalıntıların davranışına bakılmalıdır.

Tüm bunlar tatmin edici, fakat parametre vektörü tatmin edici değilse, değişik bir başlangıç vektörü denenebilir. Eğer yine aynı noktaya yakınsama oluyorsa, bu, beklenen değer fonksiyonunun uygun olmadığını gösterebilir. Bu aşamada, araştırmacı ile görüşmek faydalı olabilir. Tartışma sonunda basit ve belirgin bir hata keşfedilebilir.

Anlamlı ve uygun değerlere yakınsama meydana geldiğinde, parametre tahmincilerinin yaklaşık standart hataları ve t oranları incelenmelidir. Eğer bir t istatistiğinin değeri anlamlı değilse, o parametrenin beklenen değer fonksiyonundan dışlanması ve modelin yeniden oluşturulması düşünülebilir.

Genel anlamda, daha basit model daha iyidir (Occam'ın usturası). Bunlara ek olarak, parametre tahmincilerinin yaklaşık korelasyon matrisi de kontrol edilmelidir. Bazı parametre tahminleri yüksek korelasyonlu ise bu, aşırı belirlilik (over parametrization) durumuna işaret

olabilir. Burada, hangi değerlerin “yüksek” korelasyon olarak kabul edileceği, verinin türüne ve incelenen modele bağlıdır. Genel olarak, mutlak değerce, 0,99’un üzerindeki korelasyonlar araştırılmalıdır. Tüm bunların doğrultusunda, beklenen değer fonksiyonu, bilimsel anlamına sadık kalınarak, değişken veya parametre dönüşümleri ile yalınlaştırılmalı ve böylelikle doğrusal bağlantılar azaltılmalıdır.

Yalın ve uygun bir beklenen değer fonksiyonu bulunduğunda, tahmin değerleri ile gözlem değerlerinin grafiğinin incelenmesi, uyumun araştırılmasında mükemmel bir yoldur. Ayrıca, kalıntıların, tahmin değerlerine, ya da bağımsız değişkenlere karşı grafiğinin incelenmesi de faydalıdır. Kalıntıların düzgün bir yayılmaya sahip olup olmadığı özellikle incelenmeli ve sistematik olmayan bir davranış, değişen varyans belirtisi olarak görülmelidir. Eğer değişen varyans durumu mevcutsa, veriler, sabit varyanslı olacak şekilde dönüştürülmelidir.

Kalıntıların, açıklayıcı değişken(ler) veya tahmin değerlerine göre grafiğinde saptanabilecek, rastlantısal olmayan davranışı, beklenen değer fonksiyonunun yeterliliğinde bir kayıba işarettir. Bu durumlarda, model, teoriye uygun olarak, rastlantısal olmayan yapıyı ortadan kaldırmak için, genişletilmelidir. Örneğin, gözlemler, gözlem grupları veya günler arasındaki farkları dikkate almak için arttırıcı (incremental) parametreler eklenmesi gibi. Üstel ifadelerin toplamları ile uğraşıldığı durumlarda, sıfırdan farklı bir asimptota inişi (decay) sağlamak için, sabit terim eklenebilir.

Kalıntıların olasılık grafiği, hata paylarının normallik varsayımını doğrulamada kullanılabilir. Eğer normallikten önemli bir uzaklaşma söz konusu ise, bunun, birkaç sapan değerden mi, yoksa beklenen değer fonksiyonunun yetersizlendiğinden mi ileri geldiği saptanmalıdır. Aşık sapan değerler için, verinin doğru kaydedilip kaydedilmediği veya bilgisayara doğru girilip girilmediği belirlenmelidir. Eğer doğru girildi ise, sapan değerlerin dışlanması uygunluğu, araştırıcı ile tartışılmalıdır. Bunların atılması ile ilgili istatistiksel olmayan birçok neden var olabilir. Kirlenmiş (contaminated) örneklem, buna örnek olarak verilebilir. Şüpheli verilerin dışlanması veya dışlanmamasının, parametre tahminlerine, standart hatalara, tahmin değerlerine olacak etkileri, araştırıcıya sunulmalıdır.

Eğer kalıntılar açıkça normal dağılmıyorsa, verinin ve modelin dönüştürülmesi düşünölmelidir. Veya EKK kriteri yerine bir “sağlam” (robust) tahmin kriteri kullanılabilir. Bu arada şü belirtilmelidir ki, EKK kriteri yerine başka bir kriter kullanımı, çoğunlukla özel bir yazılım gerektirir.

Eğer tekrarlı veri söz konusu ise, beklenen değer fonksiyonunun doğruluğunu incelemek daha kolay olacaktır. Çünkü bu durumda, model tahmin edilmeden önce, alt anakütle hata payları varyansının sabitliğini belirlemek veya dönüşümle bunu sağlamak daha mümkündür. Tekrarlı veriler, ayrıca, uyum iyiliğini (lack of fit) test etmeye olanak sağlar (Bates ve Watts, 1988).

8.1 Doğrusal Olmayan Regresyonda Değişen Varyans:

Önceki bölümlerde, Y ile X arasındaki doğrusal olmayan ilişkinin nasıl doğrusallaştırılacağına dair birçok örnek verilmişti. Doğrusal regresyon, kullanımındaki görece basitlik nedeniyle, pratikte tercih edilir. Beklenen değeri,

$$E(Y) = e^{\beta_0 + \beta_1 X}$$

olan bir model ele alınsın. Modeldeki hata payı ifadesinin de, Y'nin beklenen değer büyüklüğü ile orantılı olduğu, fakat X'ten bağımsız olduğu varsayalım (bazı yerlerde buna sabit görece hata denir). Buna göre,

$$\begin{aligned} Y &= e^{\beta_0 + \beta_1 X} (1 + \varepsilon_0) \\ &= e^{\beta_0 + \beta_1 X} + \varepsilon \end{aligned} \quad (8.1)$$

yazılabilir. Burada $E(\varepsilon_0)=0$ ve $\text{Var}(\varepsilon_0)=\sigma_0^2$ 'dır ve σ_0^2 , X'ten bağımsızdır. Buna karşın ε 'nın varyansı X ile değişir ($\text{Var}(\varepsilon)=\sigma_0^2 [E(Y)]^2$).

Eğer bunun yerine logaritma alırsa,

$$\begin{aligned} \ln Y &= \beta_0 + \beta_1 X + \ln(1 + \varepsilon_0) \\ &= \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon_0^* \end{aligned}$$

elde edilir. Burada küçük ε_0 için, $E(\varepsilon_0^*) \approx E(\varepsilon_0)=0$ ve $\text{Var}(\varepsilon_0^*)$, X'ten bağımsızdır. Şunu da belirtmek gerekir ki, ε_0 'ın normal dağılması durumunda, ε_0^* normal dağılmayacaktır.

Diğer yandan eğer hata payı, toplamsal ve X'ten bağımsız (sabit mutlak hata) ise model,

$$\begin{aligned} Y &= e^{\beta_0 + \beta_1 X} + \varepsilon_0 \\ &= e^{\beta_0 + \beta_1 X} \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{E(Y)}\right) \end{aligned} \quad (8.2)$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}\ln Y &= \beta_0 + \beta_1 X + \ln\left(1 + \frac{\varepsilon_0}{E(Y)}\right) \\ &= \beta_0 + \beta_1 X + \nu_0\end{aligned}$$

olur. Burada $E(Y)$ 'ye göre küçük ε_0 için, $E(\nu_0) \approx E(\varepsilon_0/E(Y)) = 0$ olur ve $\text{Var}(\nu_0)$, $E(Y)$ 'ye göre değişir. Bundan dolayı ilk durumda (8.1)'deki model için logaritma almak varyansı sabitlerken ikinci durumda, (8.2)'de, hata payı varyansı, $E(Y) = e^{\beta_0 + \beta_1 X}$ ile X 'e bağlı olmaktadır.

Dönüşüm işleminin yapılması, üç temel nedene dayanır. Bunlardan ilki, doğrusallığın sağlanmasıdır. İkincisi, yaklaşık normal dağılımlı hata paylarının elde edilmesi ve üçüncü olarak, sabit varyanslılık durumunun sağlanmasıdır.

Yukarıda görüldüğü gibi, hata payı modele, toplamsal, oransal veya çarpımsal olarak katılabilmektedir. Dönüşümün uygunluğu, hata payının bu yapısına bağlıdır. Daha önce belirtildiği gibi, doğrusal regresyonda yapılan bütün testler ve çıkarsamalar, büyük örneklem yaklaşımı geçerli olduğu sürece, doğrusal olmayan regresyonda da uygulanabilir. Doğrusal regresyonda, değişen varyans, kalıntılara bağlı olarak saptanıp incelenebilir. Buna karşın, doğrusal olmayan regresyonda, sıradan kalıntılar yanıltıcı olabilir. Eğer modeldeki doğrusal olmama durumu “yüksek derecede” ise (yüksek saf eğrilik-intrinsic curvature), modifiye edilmiş kalıntılar kullanılmalıdır. Bu izdüşürülmüş kalıntılar, doğrusal regresyondaki sıradan kalıntılar ile aynı özelliklere sahiptir ve normallikten sapmayı ve değişen varyansı saptamada kullanılırlar. EKK tahmincileri, değişen varyans durumunda yanıltıcı sonuçlar verir. Daha önce belirtildiği gibi, değişen varyans iki biçimde ortaya çıkabilir. Buna göre:

- i) $\text{Var}(Y)$, $E(Y)$ 'nin bir fonksiyonu ile orantılı olabilir.
- ii) $\text{Var}(Y)$, X 'in (ve büyük olasılıkla parametre vektörünün) bir fonksiyonu ile orantılı olabilir.

Eğer i) durumunda $\text{Var}(Y)$, $E(Y)$ 'nin bilinen bir fonksiyonu ise kuasi-olabilirlik yöntemi kullanılabilir. Kuasi-olabilirlik, değişkenin dağılımının bilinmediği, yalnızca birinci ve ikinci momentlerinin (beklenen değer ve varyans) bulunduğu durumda uygulanan bir tahmin

yöntemidir. ii) durumunda ise GEKK kullanılır. i) durumunda $\text{Var}(Y)$, $E(Y)$ 'nin bilinmeyen bir fonksiyonu ise iki modelleme yöntemi mevcuttur. Bunlar aşağıda açıklanacaktır.

Box-Cox dönüşümü, yalın olarak,

$$\frac{Y^\lambda - 1}{\lambda}, \lambda \neq 0$$

$$Y^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{Y^\lambda - 1}{\lambda} & (Y > 0) \end{cases}$$

$$\ln Y, \lambda = 0$$

şeklinde yazılabilir. Taylor açılımı kullanılarak, birinci mertebe yaklaşıklıkla,

$$E(Y^{(\lambda)}) \approx [E(Y)]^{(\lambda)}$$

ve

$$\text{Var}(Y^{(\lambda)}) \approx \text{Var}(Y) \left[\frac{dY^{(\lambda)}}{dY} \right]^2_{Y=E(Y)} \quad (8.3)$$

$$= \text{Var}(Y)(E(Y))^{2\lambda-2}$$

yazılır. Burada λ , (8.3)'teki ifade sabit olacak şekilde seçilebilir. Bu da sabit varyans varsayımını kabul edip, $Y^{(\lambda)}$ 'nin kullanılabileceğini, ya da Y 'yi kullanıp, değişen varyansa izin verilebileceği anlamına gelir. İkinci durumda, Y 'nin varyansı $(E(Y))^{2\lambda-2}$ ile orantılı olur. Dolayısıyla, kalıntıların değişkenliğinde \hat{Y} ile birlikte bir artma veya azalma olduğunda, uygulanabilecek iki yaklaşım vardır:

Model A: PTBS(power-transform both sides)-iki tarafta kuvvet dönüşümü. Bu model,

$$Y_i^{(\lambda)} = f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma})^{(\lambda)} + \varepsilon_i$$

şeklinde. Burada bazı λ_1 için $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$. Bu model sadece yaklaşıktır. Log-normal dağılım ($\lambda_1=0$) dışında $Y_i^{(\lambda)}$, pozitif Y için normal dağılmaz.

Model B: PTWLS(power transformed weighted least squares)-kuvvet dönüşümlü AEKK modeli. Bu model,

$$Y_i = f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma}) + \varepsilon_i$$

şeklinde. Burada $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2 f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma})^{2\lambda_2})$ ve birbirinden bağımsızdır. (8.3)'ten $\lambda_2 \approx 2 - 2\lambda_1$ olur. Model B, ağırlıkları, tahmin edilecek parametrelere bağlı olan bir AEKK modeli olur.

$f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma})$, $\boldsymbol{\gamma}$ 'nin doğrusal fonksiyonu olduğunda, Model B, Model A'ya sıklıkla tercih edilir. Buna karşın, A gibi dönüştürülmüş modeller, doğrusal olmayan durumda tercih edilir. Model A ve B temelde birbirlerinden farklıdır. A, sabit varyansa sahip olacak ve Y'den farklı bir dağılıma sahip olacak şekilde bir dönüşüm uygularken, B, değişen varyansı modeller, fakat, Y'nin dağılımını değiştirmez. Buna karşın iki yaklaşım arasındaki benzerlik Taylor yaklaşımı ile gösterilebilir:

$$Y^\lambda \approx f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\gamma})^\lambda + \lambda f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\gamma})^{\lambda-1} (Y - f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\gamma}))$$

Model A için kareler toplamı da

$$\begin{aligned} S_A(\boldsymbol{\gamma}) &= \sum_i (Y_i^{(\lambda)} - f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma})^{(\lambda)})^2 \\ &= \sum_i \left(\frac{Y_i^\lambda - f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma})^\lambda}{\lambda} \right)^2 \\ &\approx \sum_i f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma})^{2\lambda-2} (Y_i - f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma}))^2 \\ &= S_B(\boldsymbol{\gamma}) \end{aligned}$$

B için ağırlıklı kareler toplamı olacaktır. İki modelde de, Box-Cox kuvvet dönüşümü dışındaki dönüşümler de kullanılabilir.

8.1.1 Dönüştürülmüş Modeller:

Modelin bilinen varsayımları geçerli iken, h şeklinde bir dönüşüm fonksiyonunun var olduğu kabul edilsin.

$$h(Y_i) = h(f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\gamma})) + \varepsilon_i \quad (8.4)$$

Burada $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$.

Eğer $h(Y_i) = Y_i^{(\lambda)}$ alınırsa (8.4)'teki h dönüşümü Box-Cox dönüşümü olur. Ve (8.4), Model A halini alır.

Box-Cox dönüşümü, görüleceği üzere, Y_i negatif olduğunda, kullanılamayacaktır. Bunun için Box ve Cox daha genel olarak,

$$Y^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{(Y + \lambda_2)^{\lambda_1} - 1}{\lambda_1}, & \lambda_1 \neq 0 \\ \ln(Y + \lambda_2), & \lambda_1 = 0 \end{cases} \quad (Y > -\lambda_2)$$

dönüşüm ailesini tanımlamışlardır. Bu genişletilmiş aile, pozitif Y_i için de daha esnek dönüşüm aralığı sağlar. Fakat yine de bazı sorunlar mevcuttur. λ_2 'nin MO tahmini $-Y_{\min}$ 'dur ve tahmin sürecinde sonsuzlukla karşılaşılır. Bunun için daha tatmin edici bir tahmin yöntemi gereklidir. İleri tartışmalar için Carroll ve Ruppert (1988).

Box-Cox dönüşümü gibi dönüşüm aileleri, $Y^{(\lambda)}$ 'nın dağılımının şeklini etkiledikleri gibi, $Y^{(\lambda)}$ 'nın varyansı ile beklenen değeri arasındaki ilişkiyi de etkiler. Aslında Box-Cox dönüşümü, çoğunlukla bir dağılımı simetrik hale dönüştürmek için kullanılır. $\lambda > 1$ olduğunda, Y 'nin dağılımının üst kuyruğu uzar, $\lambda < 1$ için ise alt kuyrukta uzama olur.

Bir kere daha ifade edilmelidir ki, yukarıdaki teori yaklaşıktır. $\lambda \neq 0$ için $Y^{(\lambda)}$, normal dağılamaz. Ya üstten ya da alttan sınırlı olacaktır. Daha da ötesi, model doğru kurulmamış olabilir. Dönüştürülmüş veriden elde edilen kalıntıların normal dağılıp dağılmadıkları kontrol edilmelidir.

8.1.2 John-Draper Dönüşümleri:

John ve Draper (1980), λ için en iyi tahminin kullanıldığı bir modelin tatmin edici olmadığını gösteren bir örnek sunmuşlardır. Bu örnekte, dönüştürülmemiş veriden elde edilen kalıntılar, simetrik fakat kuyruklarda toplanmıştır (heavy-tailed) ve değişen varyanslıdır. Buna karşın, modül ailesini kullanarak, başarılı bir dönüşüm elde etmişlerdir. Bu dönüşüm,

$$(\text{sign}Y) \frac{(|Y|+1)^\lambda - 1}{\lambda} \quad \lambda \neq 0$$

$$Y^{(\lambda)} = \{$$

$$(\text{sign}Y) \ln(|Y|+1) \quad \lambda = 0$$

şeklinde. Y_i , sıfır etrafında dağıldığında bu dönüşüm, dağılımın kuyruklarını etkileme eğiliminde olacaktır. Fakat çarpıklık üzerine etkisi daha az olacaktır. Tüm gözlemler pozitif ise modül ve kuvvet dönüşümleri aynı olacaktır. Tekrar belirtmelidir ki dönüşüm ailelerinden hangisi uygulanırsa uygulansın, dönüştürülmüş model uygunluk yönünden kontrol edilmelidir.

8.1.3 AEKK ve Model B:

Varyansı stabilize etmek için, Y ve $E(Y)$ 'nin dönüştürüldüğü Model A'dan farklı bir yol şöyledir: Model, kuvvet dönüşümlü AEKK(PWLS)'de olduğu gibi değiştirilmeden bırakılır, fakat analizde, bir AEKK yöntemi kullanarak değişen varyansa izin verilir. Bu yaklaşım, ilgilenilen model zaten doğrusallaştırılmış ise, özellikle uygundur. Bu tür bir doğrusallaştırma, değişen varyansa neden olabilir. Örneğin Currie (1982), Michaelis-Menten modeli,

$$E(Y_i) = \frac{vX_i}{k + X_i}$$

ile ilgili olarak en iyi doğrusallaştırmanın ters dönüşüm olduğu

$$E\left(\frac{X_i}{Y_i}\right) = \frac{k}{v} + \frac{X_i}{v}$$

modelinin güvenilir olmayan tahminler ürettiğini bulmuştur ve sonuç olarak, varyansı stabilize eden durumlar hariç, diğer durumlarda dönüşümlerin kullanılmaması gerektiğini ifade etmiştir (Seber ve Wild, 1989).

8.2 Eğrilik Ölçüleri:

Doğrusal olmayan regresyonda, doğrusal yaklaşıma dayanan çıkarsamalar, beklenen değer yüzeyinin düz olduğu varsayımına dayanmaktadır. Böylece teğet(tanjant) düzlemi iyi bir yaklaşıklık sağlamaktadır. Bates ve Watts (1988), diferansiyel geometri kullanarak, eğrilik fikrine dayanan doğrusal olmama ölçüleri geliştirmişlerdir. Bu ölçüler, verilerde ve parametre(ler)deki ölçek değişmelerinden bağımsızdırlar. Farklı modellerin, değişik veri kümeleri ile değişik parametrisasyonların bileşimi kullanılarak karşılaştırılmasına olanak verirler.

n boyutlu $\eta (\gamma)$ vektörü ($\gamma \in R^p$),

$$\eta_i(\gamma) = f(X_i, \gamma) \quad i=1, \dots, n$$

bileşenlerine sahiptir ve n boyutlu örneklem uzayında p boyutlu, beklenen değer uzayı ya da çözüm bölgesi denilen bir uzay tanımlar.

$\eta (\gamma)$ 'nın ikinci mertebe Taylor açılımında, kuadratik terim ihmal edilirse, \mathbf{g} etrafında γ için

$$\eta (\gamma) - \eta (\mathbf{g}) \cong D(\gamma - \mathbf{g}) \quad (8.5)$$

doğrusal yaklaşımı elde edilir. Burada D , $n \times p$ lik, $\gamma = \mathbf{g}$ noktasında $\frac{\partial \eta (\gamma)}{\partial \gamma}$ Jacobi

matrisidir. D matrisinin doğrusal bağımsız vektörleri, \mathbf{g} noktasında beklenen değer yüzeyine yatay olan bir düzlem gerer ve doğrusal yaklaşım (8.5), \mathbf{g} etrafında, beklenen değer uzayına yaklaşımı, bu düzlem aracılığıyla gerçekleştirir. (8.5) kullanılarak,

$$\|\eta (\gamma) - \eta (\mathbf{g})\|^2 \cong (\gamma - \mathbf{g})' D' D (\gamma - \mathbf{g}) \quad (8.6)$$

elde edilir. Bu da γ için, merkezi \mathbf{g} olan yaklaşık $\%100(1-\alpha)$ 'lık güvenlik bölgesini verir:

$$(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{g})' \cdot \hat{\boldsymbol{D}}' \cdot \boldsymbol{D} \cdot (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{g}) \leq ps^2 F(p, n-p; \alpha) \quad (8.7)$$

(8.5) ve (8.6) ve (8.7)'den, $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\gamma})$ 'nin, merkezi $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{g})$ ve yarıçapı $\sqrt{ps^2 F(p, n-p; \alpha)}$ olan küre ile teğet düzleminin kesişiminin içinde yer aldığı görülür.

Doğrusal bir regresyon modeli doğrusal bir çözüm bölgesine sahiptir. $p > 3$ için bu bir hiperdüzlem olacaktır ve (8.6) tam olarak sağlanacaktır. Buna ek olarak, çözüm bölgesinde, parametre çizgileri olarak adlandırılan ve γ_i 'lerin sabit değerlerini temsil eden çizgiler, düz, birbirlerine paralel ve eşit uzaklıkta ve eşit artımlı (increment) olacaktır.

Doğrusal olmayan çözüm bölgesinde ise durum farklıdır. Çözüm bölgesi, eğri bir yüzeydir ve bu yüzeydeki parametre çizgileri veya bu çizgilerin teğet uzayına iz düşümleri, genellikle düz, paralel ve eşit aralıklı değildir.

Çözüm bölgesinin eğriliğine “saf doğrusal olmama durumu (intrinsic nonlinearity)” denir. Bu doğrusal olmama durumu, *yeniden parametrisasyon* ile giderilemez. Bu, yüzeyin kendine özel geometrik bir özelliğidir.

Parametre çizgilerinin eğriliği ya da paralelliklerindeki ve eşit aralıklı olma özelliklerindeki kayıp ise “parametre etkileri ile doğrusal olmama durumu (parameter effects nonlinearity)” olarak adlandırılır. Bu durum, parametrelerin modele nasıl yerleştirileceğine, bir başka deyişle, parametrisasyona bağlıdır.

(8.5)'deki teğet düzlemi yaklaşımının geçerliliği, $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\gamma})$ 'nin Taylor açılımındaki kuadratik terimin, doğrusal terime göre büyüklüğüne bağlı olacaktır. Bu karşılaştırma için, kuadratik terimi, teğet düzlemine kendi iz düşümleri ve teğet düzlemine dik bileşeni olmak üzere ayırmak faydalı olacaktır. Bates ve Watts (1988), bu bileşenleri, doğrusal terimle karşılaştırmış ve iki doğrusal olmama ölçüsü geliştirmişlerdir. Bunlar, parametre etkileriyle eğrilik ve saf eğrilik şeklindedir. Modeli ve verileri standardize etmek, bağımsız büyüklüklerin ölçeklendirilmesine götürür. Her iki ölçü de, $(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{g})$ yönüne bağlıdır.

RMS(Root Mean Square) eğriliği, tüm yönlerdeki eğriliklerin karelerinin ortalamasının kareköküdür. Saf eğrilik ölçüsü c^1 , parametre etkileriyle eğrilik ölçüsü c^2 ve standartlaştırılmış kürenin yarıçapının tersi de, $1/\sqrt{F}$ ile gösterilir.

Uygun bir karşılaştırma çizelgesi, RMS eğriliğinin belirli bir $(1-\alpha)$ anlam düzeyindeki (ölçeklendirilmiş) güvenlik diskiyle karşılaştırılması sonucunda hazırlanabilir. Bu da, “eğriliğin yarıçapı” $1/c$ ile bir güvenlik diskinin yarıçapı \sqrt{F} ile karşılaştırılması anlamına gelir. Bir RMS eğriliği, $c \ll 1/\sqrt{F}$ veya $c\sqrt{F} \ll 1$ ise, düşük olarak değerlendirilir. Eğrilik yarıçapı $1/c$ ($c=c'$ veya $c=c''$) olan bir beklenen değer yüzeyi tasarlanabilir. Bates ve Watts'a göre, teğet düzleminin bu yüzeyden sapması veya parametre çizgilerinin, \sqrt{F} uzaklıktaki düz çizgilerden sapmaları belirlenebilir. Bu sapma, güvenlik diskinin yarıçapının bir yüzdesi, $\%100(1 - \sqrt{1 - c^2 F}) / c\sqrt{F}$ olarak ifade edilir. Buna göre,

$c' \sqrt{F}=0,2$ değeri, yüzeyin güvenlik diski kenarındaki güvenlik yarıçapının $\%10$ 'u kadar sapmasına neden olur.

$c' \sqrt{F}=0,5$ değeri, yüzeyin güvenlik diski kenarındaki güvenlik yarıçapının $\%27$ 'si kadar sapmasına neden olur.

$c' \sqrt{F}=1$ değeri, yüzeyin güvenlik diski kenarındaki güvenlik yarıçapının $\%100$ 'ü kadar sapmasına neden olur.

Eğer yukarıda c' yerine c'' alınsaydı, parametre çizgilerinin doğrudan sapmaları elde edilirdi.

Uygulamada, birçok durumda, saf eğrilik c' , parametre etkilerinden kaynaklanan doğrusal olmama c'' 'dan çok küçüktür. c'' , parametrisasyona dayandığı için, parametre etkilerinden kaynaklanan doğrusal olmama durumunu azaltmak, yeniden parametrisasyon ile mümkündür.

8.3 Doğrusal Olmayan Regresyonda Değişen Varyansı Saptamaya Yönelik Yaklaşık Sonuç Veren Bir Test:

Endrenyi ve Kwong, kinetik modellerden yola çıkarak, Goldfeld-Quandt testindeki düşünceye dayanan, değişen varyansı saptamaya yarayan yaklaşık bir test geliştirmişlerdir. Buna göre model önce bilinen şekliyle oluşturulup, kalıntılar tahmin edilir. Sonra tahmin değerleri $\hat{Y}_{(1)} > \hat{Y}_{(2)} \dots \dots > \hat{Y}_{(n)}$ şeklinde büyükten küçüğe doğru dizilir ve bunlara karşılık gelen kalıntılar $e_{(1)}, e_{(2)}, \dots \dots e_{(n)}$ belirlenir. Daha sonra, son k tane kalıntı kareleri toplamı, ilk k tane kalıntı kareleri toplamına oranlanır:

$$F_{(k)} = \frac{e_{(n)}^2 + e_{n-1}^2 + \dots + e_{n-k+1}^2}{e_{(1)}^2 + e_{(2)}^2 + \dots + e_{(k)}^2}$$

Sabit varyansı ifade eden H_0 hipotezi altında, kalıntıların sıralanışı rastgele olacaktır ve bu oran yaklaşık olarak $F_{k,k}$ dağılacaktır. Eğer bu istatistik 1'den çok büyükse H_0 reddedilecektir. Endrenyi ve Kwong, k 'nın $(n+3)/4$ ün tamsayı kısmı kadar olmasını önermişlerdir. Bu test, saf eğrilik çok büyük olduğu zaman, tatmin edici sonuçlar vermez (Seber ve Wild, 1989).



9. DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYON ile İLGİLİ UYGULAMALAR

9.1 Verilerle İlgili Ön Bilgi:

Bu uygulamada biri iki açıklayıcı değişkenli diğeri ise tek açıklayıcı değişkenli iki veri kümesi incelenecektir. Bunların ilki, Wayne Nelson'un, yalıtımın dielektrik arızalanma kuvveti ile ilgili olarak eskime-bozunma(age-degradation) arasındaki ilişkiyi belirlemek üzere yaptığı deney sonuçlarından oluşmaktadır¹. İkinci veri kümesi ise, D. Chwirut ve D. G. Eitzen'in ultrasonik ölçümlerin güvenilirliğinin geliştirilmesine yönelik yaptıkları deney sonuçlarını içermektedir. Kolaylık bakımından bu veri kümelerinin birincisi Veri A, ikincisi ise Veri B olarak adlandırılacaktır.

9.1.1 Veri A ile İlgili Bilgiler:

Bilindiği gibi birçok ürünün performansı zamanla bozunmaktadır. Örneğin, bir elektrik yalıtımının(bir kondansatör olarak düşünülebilir) arızalanma kuvveti, sıcaklığa ve zamana bağlı olarak değişir. Burada yalıtımın arızalanma kuvveti, o yalıtımın artık yalıtkan olmadığı voltaj düzeyi olarak tanımlanabilir. Bu deneyde, dört sıcaklık düzeyi (180, 225, 250, 275 santigrad derece) ve sekiz süre düzeyi (1, 2, 4, 8, 16, 32, 48, 64 hafta) vardır. Bunların herbir kombinasyonu için dört tane denek kullanılmıştır. Toplam 4x4x8=128 tane gözlem elde edilmiştir. Veri A, bütün olarak Ek 1'de verilmiştir. Y bağımlı değişkeni, dielektrik kuvveti(kVolt)ni, X_1 bağımsız değişkeni zamanı (hafta) ve X_2 bağımsız değişkeni de sıcaklığı(santigrad derece) göstermektedir.

Nelson, Arrhenius bozunma yasasından ve Whitman ve Doigan²'ın deneysel çalışmalarından yola çıkarak,

$$\ln Y = \alpha - \beta X_1 e^{-\gamma X_2} + \varepsilon$$

modelini uygulamıştır. Model, Bölüm 4.5.6'da verilen Weibull büyüme modeline benzemektedir. Bu çalışmada ise, önce makalede önerilen bu mekanistik model uygulanacak, modelin ve parametre tahminlerinin anlamlılığı incelenecektir. Bunun yanında, değişik

¹ Nelson, W. (1981) Analysis of Performance-Degradation Data. IEEE Transactions on Reliability. Vol. 2, R-30, No. 2, pp. 149-155

² L. C. Whitman, P. Doigan, "Calculation of life characteristics of insulation," AIEE Trans., vol 73, 1954, pp 193-8.

başlangıç noktaları seçilerek yakınsama durumu araştırılacak, genel hatlarıyla kalıntı analizi uygulanacak ve karşılaşılan sorunları aşmak için değişik modeller denenecektir.

9.1.2 Veri B ile İlgili Bilgiler:

Veri B, bir ultrasonik kalibrasyon deneyinden elde edilmiştir. 214 gözlemden oluşmuştur. Bağımlı değişken Y, ultrasonik tepkiyi, bağımsız değişken X ise metal uzaklığını göstermektedir. Bu veri kümesi www.itl.nist.gov/div898/strd/nls/nls_main.shtml internet adresinden alınmıştır³ ve tamamı Ek 8'de verilmiştir.

Orijinal çalışmada önerilen ve kullanılan model,

$$Y_i = \frac{e^{-\alpha X}}{\beta + \gamma X} + \varepsilon_i$$

şeklinindedir. Buradaki uygulamada da bu model kullanılacak ve incelenecektir.

9.2 Veri A ile İlgili Uygulamalar:

9.2.1 Veri A için Önerilen Modelin Parametrelerinin Tahmini:

Modelin tahmininde SPSS 11.5 istatistik paket programı kullanılacaktır. SPSS 11.5'ta veriler girildikten sonra, Analyze menüsünden sırasıyla Regression, Nonlinear Regression seçeneği seçilip, makalede önerilen yukarıdaki model ve parametreler için deneysel öngörüler doğrultusunda önerilen başlangıç değerleri girilirse, aşağıdaki Çıktı 1 elde edilir:

Çıktı 1:

```
Run stopped after 48 model evaluations and 22 derivative evaluations.
Iterations have been stopped because the relative reduction between
successive
residual sums of squares is at most SSSCON = 1.000E-08
```

Nonlinear Regression Summary Statistics Dependent Variable LNY

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
--------	----	----------------	-------------

³ D. Chwirut and D. G. Eitzen, "Improving the Reliability of Ultrasonic Measurements: Recent NBS Progress," Proceedings, 1978 Symposium on Ultrasonic Reliability, Columbus, OH, American Society of Nondestructive Testing, (1978)

D. Chwirut and D. G. Eitzen, "Toward the Development of Improved Reference Fatigue Cracks for Use'in Ultrasonic Nondestructive Evaluation," International Advances'in Nondestructive Testing, 6, pp. 179-197, (1979)

Regression	3	716.36766	238.78922
Residual	125	3.79768	.03038
Uncorrected Total	128	720.16534	

(Corrected Total) 127 54.41263

R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS = .93021

Parameter	Estimate	Asymptotic Std. Error	Asymptotic 95 % Confidence Interval	
			Lower	Upper
A	2.590683601	.019149999	2.552783376	2.628583826
B	5.61777E-09	6.11250E-09	-6.47963E-09	1.77152E-08
C	-.057701014	.003957231	-.065532864	-.049869163

Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	A	B	C
A	1.0000	.4509	.4420
B	.4509	1.0000	.9997
C	.4420	.9997	1.0000

SPSS 11.5 çıktısı kolaylık olması bakımından text dosyası olarak çıkarılmıştır. Burada yer kaplamaması açısından çıktı notları ve iterasyon değerleri verilmeyecektir. Çıktı 1'de görüldüğü gibi, $R^2 = 0,93021$ bulunmuştur. Doğrusal olmayan regresyonda R^2 'nin 0,95 ya da daha yüksek çıkması beklenmesine karşın bu değer fazla düşük değildir. α , β ve γ parametrelerinin tahmincileri sırasıyla A, B ve C olarak gösterilmiştir. Başlangıç değerleri ise $A=2,5$, $B=0$ ve $C=-0,05$ olarak alınmıştır. SPSS 11,5'ta Nonlinear Regression menüsünde Levenberg-Marquardt ve Sequential Quadratic Programming olmak üzere iki optimizasyon yöntemi sunulmaktadır. Sequential Quadratic Programming yöntemi, Levenberg-Marquardt yöntemine göre daha karmaşıktır. Yakınsaklık için birçok faktör içermektedir ve bunların herbirinin çözüm üzerinde farklı etkileri olacaktır. Bundan dolayı daha basit bir yöntem olan Levenberg-Marquardt yöntemi seçilmiştir. Bu yöntemde kalıntı kareleri toplamı ve parametre için yakınsaklık 10^{-8} olarak seçilmiştir.

Parametre tahmincileri incelendiğinde ise, %5 anlam düzeyinde ($t_{126;0,025}=1,98$) B'nin anlamlı olmadığı görülür. A, B ve C parametreleri için t istatistiği değerleri $t_A=135,2837547$, $t_B=0,919062$ ve $t_C=-14,5911701$ şeklindedir. Bununla birlikte parametre tahmincilerinin korelasyon matrisine bakıldığında $r_{BC} = 0,9997$ olduğu görülür. Bu da B ve C parametreleri için, modelin, yüksek parametrisasyon açısından incelenmesini önerir.

Verilen başlangıç değerleri ile 22 iterasyonda çözüme ulaşılmıştır. Ulaşılan bu çözümün global minimum olup olmadığını incelemek amacıyla parametre tahminçileri için seçilen başlangıç değerlerinin üç boyutlu kartezyen koordinat sisteminde eksenlere göre simetrisi alınarak, koordinat sisteminin diğer bölgelerinden başlanıldığında aynı çözüme ulaşıp ulaşılmadığına bakılabilir. Başlangıç değeri olarak $B=0$ olduğundan bu inceleme diğer iki nokta için yapılacak bu da boyutu ikiye indirecektir. Daha önce (2,5; 0; -0,05) olarak seçilen başlangıç noktası, koordinat sisteminde birinci bölgedeki (2,5; 0; 0,05) noktasına taşınırsa, yapılan analiz sonucu Çıktı 2 elde edilir:

Çıktı 2:

Run stopped after 41 model evaluations and 18 derivative evaluations.
Iterations have been stopped because the relative reduction between successive residual sums of squares is at most SCON = 1.000E-08

Nonlinear Regression Summary Statistics Dependent Variable LNY

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	668.49358	222.83119
Residual	125	51.67176	.41337
Uncorrected Total	128	720.16534	
(Corrected Total)	127	54.41263	
R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS =			.05037

Parameter	Estimate	Asymptotic Std. Error	Asymptotic 95 % Confidence Interval	
			Lower	Upper
A	2.220819650	.070334351	2.081619240	2.360020059
B	-637.1444431	15699.925184	-31709.24489	30434.956005
C	.061386579	.137381040	-.210507550	.333280708

Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	A	B	C
A	1.0000	-.4828	.4880
B	-.4828	1.0000	-.9999
C	.4880	-.9999	1.0000

Bu model önceki ile karşılaştırıldığında yetersiz gözükmektedir. $R^2=0,05037$ bulunmuş ve %5 anlam düzeyinde B ile birlikte C de anlamsız çıkmıştır. A, B ve C parametreleri için t istatistiği değerleri $t_A=3,157517797$, $t_B=-0,04058264201$ ve $t_C=0,4468344322$ şeklindedir. Yakınsama 18 iterasyonda gerçekleşmiştir. r_{BC} ise mutlak değerce az da olsa artmıştır.

Başlangıç noktası (-2,5; 0; 0,05) olarak alındığında, tahmin modeli Çıktı 3'teki gibi olur.

Çıktı 3:

Run stopped after 38 model evaluations and 17 derivative evaluations.
Iterations have been stopped because the relative reduction between successive residual sums of squares is at most SSSCON = 1.000E-08

Nonlinear Regression Summary Statistics Dependent Variable LNY

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	668.49358	222.83119
Residual	125	51.67176	.41337
Uncorrected Total	128	720.16534	
(Corrected Total)	127	54.41263	

R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS = .05037

Parameter	Estimate	Asymptotic Std. Error	Asymptotic 95 % Confidence Interval	
			Lower	Upper
A	2.220819359	.070331302	2.081624983	2.360013735
B	-637.2040307	15773.131034	-31854.18794	30579.779879
C	.061387070	.137503460	-.210749343	.333523482

Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	A	B	C
A	1.0000	-.4827	.4880
B	-.4827	1.0000	-.9999
C	.4880	-.9999	1.0000

Bu durumda ise R^2 ve r_{BC} değişmemiş, çözüme 17 iterasyonda ulaşılmıştır.

Başlangıç değeri (-2,5; 0; -0,05) noktasına ve son olarak koordinat sisteminde dördüncü bölgeye(2,5; 0; -0,05) alındığında ise, sonuç Çıktı 1'dekininki aynıdır.

Sonuç olarak görülmektedir ki başlangıç noktasının değişimi parametre tahminlerini etkilemekte ve bu da eğriselliğin yüksek olabileceğini akla getirmektedir.

Dikkat edilirse, tahmin edilen modellerde B ve C parametre tahminleri arasındaki korelasyon katsayısı yüksek gözükmemektedir. Bu yüksek değer, parametrelerden birinin dışlanması durumunda ne olacağı incelenebilir. Bu amaçla B ve C parametrelerinden önce biri, sonra diğeri çıkarılarak model tahmin edilebilir. Önce B parametresi dışlansın ve

$$\ln Y = A - X_1 e^{-CX_2} + e$$

modeli tahmin edilsin.

Çıktı 4:

Run stopped after 26 model evaluations and 13 derivative evaluations.
Iterations have been stopped because the relative reduction between successive residual sums of squares is at most SSCON = 1.000E-08

Nonlinear Regression Summary Statistics Dependent Variable LNY

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	665.75271	332.87636
Residual	126	54.41263	.43185
Uncorrected Total	128	720.16534	
(Corrected Total)	127	54.41263	

R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS = .00000

Parameter	Estimate	Asymptotic Std. Error	Asymptotic 95 % Confidence Interval	
			Lower	Upper
A	2.280612426	.062157238	2.157605080	2.403619772
C	.147695303	157476.81541	-311641.8405	311642.13588

Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	A	C
A	1.0000	-.3560
C	-.3560	1.0000

Görüldüğü gibi parametre tahminçileri arasındaki korelasyon azalmasına karşın, model, $R^2=0$ olduğundan dikkate alınacak nitelikte değildir. Burada başlangıç noktası olarak (0; 0) noktası alınmıştır.

B parametresi modelde tutulup, C parametresi dışlandığında ise Çıktı 5'teki sonuçlar elde edilir.

Çıktı 5:

Run stopped after 3 model evaluations and 2 derivative evaluations.

Iterations have been stopped because the magnitude of the largest correlation between the residuals and any derivative column is at most RCON = 1.000E-08

Nonlinear Regression Summary Statistics Dependent Variable LNY

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	713.71592	356.85796
Residual	126	6.44942	.05119
Uncorrected Total	128	720.16534	
(Corrected Total)	127	54.41263	

R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS = .88147

Parameter	Estimate	Asymptotic Std. Error	Asymptotic 95 % Confidence Interval	
			Lower	Upper
A	2.510123376	.021356601	2.467859290	2.552387463
B	1.55572-121	5.08222-123	1.45515-121	1.65630-121

Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	A	B
A	1.0000	.3511
B	.3511	1.0000

Görüldüğü gibi, parametre tahmincileri arasındaki korelasyon oldukça azalmıştır ve parametre tahmincileri, %5 anlam düzeyinde oldukça anlamlıdır. R^2 ise Çıktı 1'dekinden az olmasına karşın fazla küçük bir değer değildir. Burada da Çıktı 4'teki gibi, başlangıç noktası olarak (0; 0) noktası alınmıştır. Ayrıca yakınsamanın 2 iterasyonda gerçekleşmesi dikkat çekicidir.

Sonuçlarını görmek amacıyla modelde sadece B parametresi tutulup diğer parametreler dışlansın. Bu durumda

$$\ln Y = -BX_1 e^{-X_2} + e$$

modelinin tahmini sonucunda Çıktı 6 elde edilir:

Çıktı 6:

Run stopped after 3 model evaluations and 2 derivative evaluations.
Iterations have been stopped because the magnitude of the largest correlation between the residuals and any derivative column is at most RCON = 1.000E-08

Nonlinear Regression Summary Statistics Dependent Variable LNY

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	1	6.62347	6.62347
Residual	127	713.54187	5.61844
Uncorrected Total	128	720.16534	

(Corrected Total) 127 54.41263

R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS = -12.11353

Parameter	Estimate	Asymptotic Std. Error	Asymptotic 95 % Confidence Interval	
			Lower	Upper
B	5.41327-122	4.98568-122	-4.45250-122	1.52790-121

B için başlangıç değeri 0 alınmıştır. Burada B parametresi %5 anlam düzeyinde anlamlı olmamakla beraber R^2 de negatif çıkmıştır.

Şu ana kadar, parametre tahmincileri arasındaki yüksek korelasyonu azaltmak için modelde yapılan değişimler olumlu sonuç vermemiştir. Özellikle B parametresinin dışlanması modeli tamamen anlamsız duruma getirmiştir. Bu durumda B parametresinin olduğu gibi kalması, buna karşın, yüksek korelasyonlu olduğu C parametresinin üstel ifade de değil fakat, etkileşimli terim şeklinde toplamsal olarak modele katıldığı aşağıdaki yapı ele alınsın:

$$\ln Y = A - BX_1 e^{-X_2} + CX_1 X_2 + e$$

Bu modelin tahmini sonucunda Çıktı 7'deki sonuçlar elde edilir:

Çıktı 7:

Run stopped after 3 model evaluations and 2 derivative evaluations.
Iterations have been stopped because the magnitude of the largest
correlation
between the residuals and any derivative column is at most RCON = 1.000E-08

Nonlinear Regression Summary Statistics Dependent Variable LNY

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	685.50827	228.50276
Residual	125	34.65707	.27726
Uncorrected Total	128	720.16534	
(Corrected Total)	127	54.41263	

R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS = .36307

Parameter	Estimate	Asymptotic Std. Error	Asymptotic 95 % Confidence Interval	
			Lower	Upper
A	2.659590753	.000000000	2.659590753	2.659590753
B	.000000000	8.82754E-06	-.000017471	.000017471
C	-.000074515	.064666409	-.128057363	.127908334

Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	A	B	C
A	1.0000	.	.
B	.	1.0000	-.6943
C	.	-.6943	1.0000

Görüldüğü gibi R^2 oldukça düşük, B parametresi son derece anlamsızdır.

Etkileşim teriminin üstel ifadeye yer aldığı şu model;

$$\ln Y = A - Be^{-CX_1X_2} + e$$

denendiğinde ise Çıktı 8 elde edilir:

Çıktı 8:

Run stopped after 142 model evaluations and 65 derivative evaluations.
Iterations have been stopped because the relative reduction between
successive
residual sums of squares is at most SSSCON = 1.000E-08

Nonlinear Regression Summary Statistics Dependent Variable LNY

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	688.41873	229.47291
Residual	125	31.74661	.25397
Uncorrected Total	128	720.16534	
(Corrected Total)	127	54.41263	

R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS = .41656

Parameter	Estimate	Asymptotic Std. Error	Asymptotic 95 % Confidence Interval	
			Lower	Upper
A	2.582006037	.097468331	2.389104114	2.774907961
B	.056588517	.048782351	-.039957810	.153134845
C	-.000199560	.000050177	-.000298867	-.000100253

Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	A	B	C
A	1.0000	.8610	.8270
B	.8610	1.0000	.9924
C	.8270	.9924	1.0000

Burada başlangıç noktası (-2,5; 0; 0)'dır. R^2 yine düşük ve B parametresi anlamsızdır. $r_{BC}=0,9924$ olup, yine yüksektir. Yukarıda denenen modelden B dışlanırsa,

Çıktı: 9

Run stopped after 12 model evaluations and 6 derivative evaluations. Iterations have been stopped because the relative reduction between successive residual sums of squares is at most SCON = 1.000E-08

Nonlinear Regression Summary Statistics Dependent Variable LNY

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	686.76616	343.38308
Residual	126	33.39918	.26507
Uncorrected Total	128	720.16534	
(Corrected Total)	127	54.41263	
R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS =			.38619
Parameter	Estimate	Asymptotic Std. Error	Asymptotic 95 % Confidence Interval Lower Upper
A	3.634060214	.057688082	3.519897197 3.748223232
C	-.000051655	3.91966E-06	-.000059412 -.000043898

Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	A	C
A	1.0000	-.6146
C	-.6146	1.0000

Başlangıç noktası (-2,5; 0) seçilmiştir. Korelasyon düşük ve parametreler anlamlı gözükmesine karşın R^2 çok düşük ve tatmin edici olmaktan uzaktır.

Bu durumda gözükmektedir ki, modeli değiştirmek korelasyonu düşürmemekte, düşürse bile diğer istatistikleri olumsuz yönde değiştirmektedir. Bunun yerine değişkenler üzerinde dönüşüm yapmak önerilebilir. Buna göre, değişkenler arasındaki korelasyonu azaltmak amacıyla standardize değişkenlerin kullanılması denenebilir. Yalınlık bakımından önce

$$\ln Y = A + BstX_1 + CstX_2 + e$$

modeli denenecektir. Burada $\ln Y$, stX_1 ve stX_2 sırasıyla $\ln Y$, X_1 ve X_2 değişkenlerinin standartlaştırılmış biçimini göstermektedir. Görüldüğü gibi model parametrelerinde doğrusaldır ve iteratif nümerik çözüm yöntemi gerektirmez. Modelin tahmini sonucu şu sonuçlar elde edilmiştir:

Çıktı 10:

Variables Entered/Removed(b)

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	STX2, STX1(a)	.	Enter

a All requested variables entered.

b Dependent Variable: STLNY

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.748(a)	.560	.553	.66854

a Predictors: (Constant), STX2, STX1

ANOVA(b)

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	71.132	2	35.566	79.575	.000(a)
	Residual	55.869	125	.447		
	Total	127.000	127			

a Predictors: (Constant), STX2, STX1

b Dependent Variable: STLNY

Coefficients(a)

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	95% Confidence Interval for B		Correlations		
		B	Std. Error	Beta			Lower Bound	Upper Bound	Zero-order	Partial	Part
1	(Constant)	1.911 E-07	.059		.000	1.000	-.117	.117			
	STX1	-.465	.059	-.465	-7.838	.000	-.582	-.348	-.465	-.574	-.465
	STX2	-.586	.059	-.586	-9.885	.000	-.704	-.469	-.586	-.662	-.586

a Dependent Variable: STLNY

Görüldüğü gibi R^2 düşük ve sabit terim anlamlı olmaktan uzaktır. Aynı model, Nonlinear menüsünde tahmin edildiğinde tamamen aynı sonuçlar elde edilmekte ve süreç 2 iterasyonda yakınsamaktadır.

Bu değişkenlerle ilk önerilen model tekrar denenirse

$$\ln Y = A - BstX_1 e^{-CstX_2} + e$$

Çıktı 11:

Run stopped after 19 model evaluations and 7 derivative evaluations. Iterations have been stopped because the relative reduction between successive residual sums of squares is at most SSCON = 1.000E-08

Nonlinear Regression Summary Statistics Dependent Variable STLNY

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	61.88960	20.62987
Residual	125	65.11055	.52088
Uncorrected Total	128	127.00015	
(Corrected Total)	127	127.00015	
R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS =			.48732
Parameter	Estimate	Asymptotic Std. Error	Asymptotic 95 % Confidence Interval Lower Upper
B	.133896550	.074878300	-.014296899 .282090000
C	-1.915029005	.476856958	-2.858788108 -.971269902
A	4.70675E-06	.063788447	-.126240547 .126249960

Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	B	C	A
B	1.0000	.9865	.0001
C	.9865	1.0000	.0001
A	.0001	.0001	1.0000

Burada başlangıç noktası olarak (-2,5; 0; 0) alınmıştır. Görüldüğü gibi %5 anlam düzeyinde sabit terim anlamsız, R^2 düşük ve r_{BC} yine yüksektir. Bu sorunları aşmak için standartlaştırılmamış değişkenlerde uygulandığı gibi, diğer parametreler modelde kalmak koşuluyla, sırasıyla B ve C parametreleri modelden çıkarılabilir. Bu denendiğinde tahmin

edilen modeller son derece anlamsız çıkmaktadır. Bunun için yer kaplamaması bakımından burada çıktılar sunulmayacaktır.

Yeniden parametrelerinde doğrusal modellere geri dönülürse, Çıktı 11'de denenen modele etkileşim terimi eklenmesi önerilebilir. Bu durumda model şu şekilde olacaktır:

$$st \ln Y = A + BstX_1 + CstX_2 + DstX_1stX_2 + e$$

Çıktı 12:

Run stopped after 18 model evaluations and 2 derivative evaluations.
Iterations have been stopped because the relative reduction between successive residual sums of squares is at most SSCON = 1.000E-08

Nonlinear Regression Summary Statistics Dependent Variable STLNY

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	4	93.81855	23.45464
Residual	124	33.18160	.26759
Uncorrected Total	128	127.00015	
(Corrected Total)	127	127.00015	
R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS =			.73873
Parameter	Estimate	Asymptotic Std. Error	Asymptotic 95 % Confidence Interval Lower Upper
A	1.91113E-07	.045534799	-.090125931 .090126314
B	-.464993126	.045902483	-.555846999 -.374139254
C	-.586406509	.045902909	-.677261225 -.495551794
D	-.424315990	.046082819	-.515526798 -.333105183

Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	A	B	C	D
A	1.0000	-.0012	.0044	.0000
B	-.0012	1.0000	.0000	.0000
C	.0044	.0000	1.0000	.0000
D	.0000	.0000	.0000	1.0000

Çıktı 12'de görüldüğü üzere, sabit terimin anlamsız olması dışında neredeyse bütün istatistikler olumlu durumdadır. R^2 ise doğrusal bir model için iyi sayılabilir. Bu doğrultuda

sabit terimin modelden dışlanması durumunda uyumun nasıl olacağı merak edilebilir. Buna göre denenecek model

$$st \ln Y = BstX_1 + CstX_2 + DstX_1stX_2 + e$$

olacaktır.

Çıktı 13:

Run stopped after 3 model evaluations and 2 derivative evaluations.
Iterations have been stopped because the magnitude of the largest correlation between the residuals and any derivative column is at most RCON = 1.000E-08

Nonlinear Regression Summary Statistics Dependent Variable STLNY

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	93.81855	31.27285
Residual	125	33.18160	.26545
Uncorrected Total	128	127.00015	
(Corrected Total)	127	127.00015	

R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS = .73873

Parameter	Estimate	Asymptotic Std. Error	Asymptotic 95 % Confidence Interval	
			Lower	Upper
B	-.464993126	.045718473	-.555475660	-.374510593
C	-.586406509	.045718485	-.676889064	-.495923954
D	-.424315990	.045898118	-.515154061	-.333477919

Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	B	C	D
B	1.0000	.0000	.0000
C	.0000	1.0000	.0000
D	.0000	.0000	1.0000

Görüldüğü gibi, R^2 değişmemiş fakat parametreler anlamlı ve parametre tahmincileri arasındaki korelasyon katsayıları 0 bulunmuştur. Burada şu belirtilmelidir ki, $st \ln Y = Y'$ ve $stX_1.stX_2 = X'$ şeklinde dönüşümlerle yukarıdaki modeller doğrusallaştırılıp SEKK ile tahmin yapıldığında Çıktı 12 ve Çıktı 13'tekilerle tamamen aynı sonuçlar elde edilmektedir.

Standardizasyonun yanında değişkenler için ortalamalardan farklar şeklinde bir dönüşüm de uygulanabilir. Dönüştürülmüş değişkenler,

$$(\ln Y)^* = \ln Y - \overline{\ln Y}$$

$$X_1^* = X_1 - \overline{X_1}$$

$$X_2^* = X_2 - \overline{X_2}$$

şeklindedir ve model de

$$(\ln Y)^* = A - BX_1^* e^{-CX_2^*} + e$$

halini alacaktır. Başlangıç noktası (2; 0,01; -0,01) alınırsa sonuç Çıktı 14'teki gibi olur:

Çıktı 14:

Run stopped after 15 model evaluations and 7 derivative evaluations. Iterations have been stopped because the relative reduction between successive residual sums of squares is at most SSSCON = 1.000E-08

Nonlinear Regression Summary Statistics Dependent Variable LNYX

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	26.47631	8.82544
Residual	125	27.85419	.22283
Uncorrected Total	128	54.33050	
(Corrected Total)	127	54.33046	

R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS = .48732

Parameter	Estimate	Asymptotic Std. Error	Asymptotic 95 % Confidence Interval	
			Lower	Upper
A	-.000547651	.041723892	-.083124411	.082029108
B	.003932311	.002199093	-.000419967	.008284588
C	-.054362937	.013536506	-.081153361	-.027572512

Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	A	B	C
A	1.0000	.0000	.0000
B	.0000	1.0000	.9865
C	.0000	.9865	1.0000

Görüldüğü gibi bu dönüşüm varolan sorunlara çözüm getirememiştir.

Modelin uyumunu iyileştirmeye yönelik bu girişimlerin yanında birim değişikliğinin ne gibi etkilerinin olacağı da araştırılabilir. Hatırlanacağı üzere verideki değişkenler, Y dielektrik kuvveti kVolt, X_1 zamanı hafta ve X_2 sıcaklık santigrad derece cinsinden ölçülmüşlerdi. Tahmin edilebileceği gibi, kVolt'u, Volt'a ya da haftayı güne veya saate dönüştürmek değişkenlerin açıklayıcılığını artırmayacaktır. Fakat santigrad dereceyi Fahrenheit dereceye dönüştürmek ilginç görünebilir. Çünkü Fahrenheit derece ile santigrad derece arasında

$$F=C^{\circ}(9/5)+32$$

şeklinde hem çarpımsal hem toplamsal değişmeye dayalı bir ilişki vardır. X_2 'nin biriminin Fahrenheit derece olduğu ve diğer değişkenlerin birimlerinin değişmediği orijinal model için şu sonuçlar elde edilir:

Çıktı 15:

Run stopped after 148 model evaluations and 68 derivative evaluations.
Iterations have been stopped because the relative reduction between successive residual sums of squares is at most SSCON = 1.000E-08

Nonlinear Regression Summary Statistics Dependent Variable LNY

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	715.61244	238.53748
Residual	125	3.79406	.03035
Uncorrected Total	128	719.40650	
(Corrected Total)	127	54.33046	

R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS = .93017

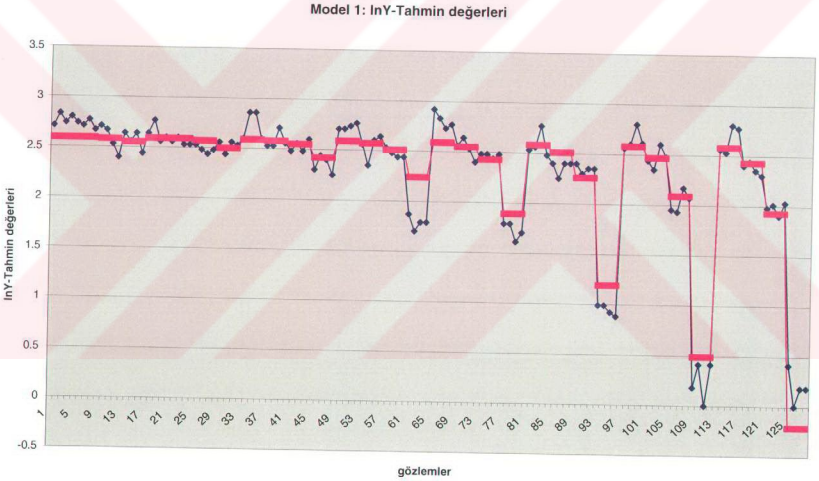
Parameter	Estimate	Asymptotic Std. Error	Asymptotic 95 % Confidence Interval	
			Lower	Upper
A	2.589339801	.019141842	2.551455720	2.627223882
B	2.02801E-09	2.34825E-09	-2.61947E-09	6.67549E-09
C	-.032041518	.002197513	-.036390668	-.027692368

Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	A	B	C
A	1.0000	.4504	.4421
B	.4504	1.0000	.9998
C	.4421	.9998	1.0000

Görüldüğü gibi ilk modelin sonuçlarından farklı sonuçlar elde edilmemiştir. Yalnızca iterasyon sayısında bir artma olmuştur. Bununla birlikte diğer değişkenler için de birim değişiklikleri yapılmış ve teker teker ya da bir arada modele dahil edilmişlerdir, fakat bulunan sonuçlara, buraya kadar denenen modellerden daha iyi olmadıkları için, kısalık bakımından yer verilmeyecektir.

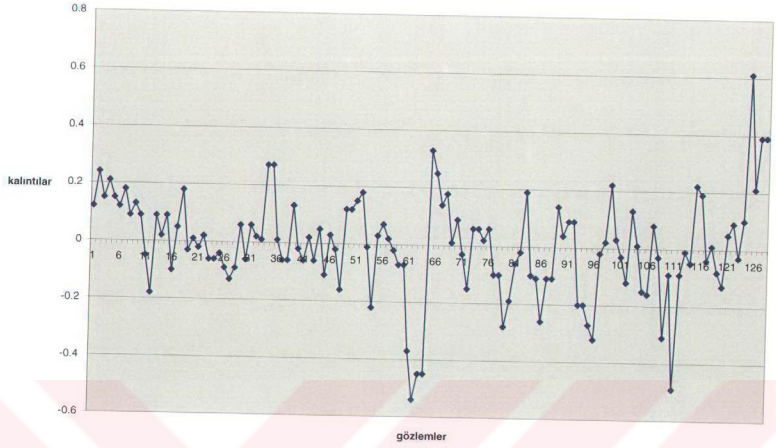
Şu ana kadar yapılan bütün denemelerden dikkate alınabilecek iki modele ulaşılmıştır. Bunlar, orijinal makalede önerilen ve sonuçları Çıktı 1’de sunulan 1.Model ve standardize değişkenler ile elde edilen, parametrelerinde doğrusal olarak değerlendirilebilecek Çıktı 13’te sunulan 13. Modeldir. Bu modellerin gözlem değerleri ile uyumu Excel’de hazırlanan aşağıdaki grafiklerde görülebilir:



Şekil 9.1 Model 1 için lnY ile tahmin değerleri (tahmin değerleri pembe renkle gösterilmiştir.)

Kalıntılar ise Şekil 9.2’deki gibidir:

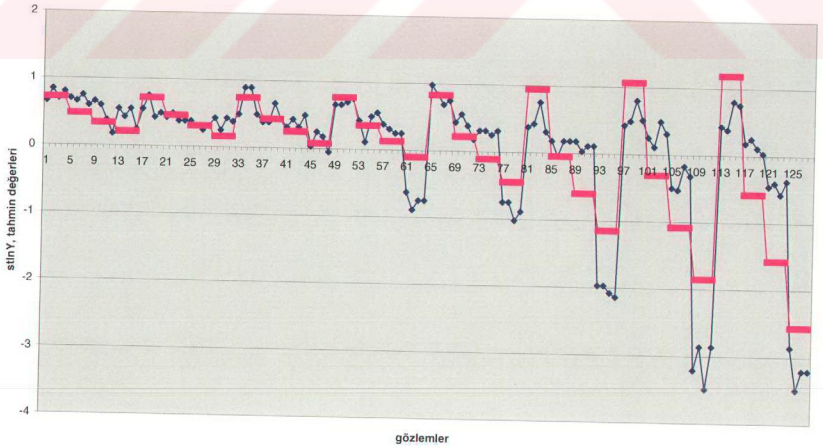
Model 1 Kalıntıları



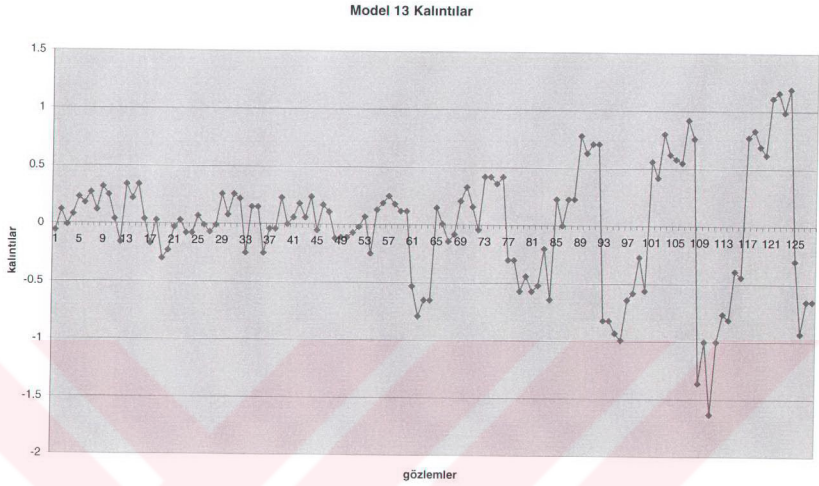
Şekil 9.2 Model 1'den elde edilen kalıntılar

Model 13 için ise bu grafikler sırasıyla,

Model 13 için stnY ile tahmin değerleri (Tahmin değerleri pembe renkle gösterilmiştir.)



Şekil 9.3 Model 13 için stlnY ile tahmin değerleri (tahmin değerleri pembe renkle gösterilmiştir.)



Şekil 9.4 Model 13'den elde edilen kalıntılar

şeklinde dirler. Model 1'de belirgin olmamakla beraber, Model 13'teki kalıntıların grafiğinde değişen varyans göze çarpmaktadır. Bunun için belirlenen bu iki model için genel hatlarıyla kalıntı analizi uygulamak yerinde olacaktır.

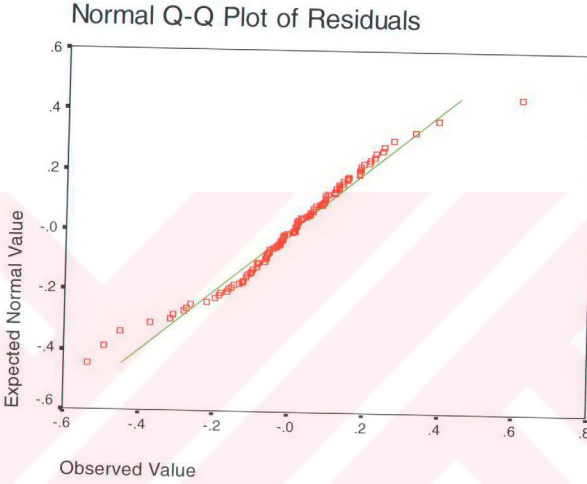
9.2.2 Model 1 ve Model 13 için Genel Hatlarıyla Kalıntı Analizi ve Doğrusal Olmayan AEKK:

Bu bölümde kalıntıların normalliği, sapan değerlerin varlığı, otokorelasyon ve değişen varyans araştırılacaktır. Normallik varsayımının araştırılmasında Q-Q Plot ve Jarque-Bera testinden faydalanılacak, sapan değerler %5 ve %10 anlam düzeyinde araştırılacaktır. Otokorelasyonunun araştırılmasında ise Durbin-Watson, BG(Breusch-Godfrey) testi gibi, daha çok doğrusal modellerde başvuru olan testler yerine daha basit ve görgül bir yöntem, kalıntıların birbirleriyle birinci ve ikinci dereceden gecikmeli otokorelasyon düzeyleri, kullanılacaktır. Değişen varyansın saptanmasında ise W testi, BPG testi ve Endrenyi ve Kwong'un önerdikleri değişen varyans testi kullanılacaktır. Değişen varyans durumu saptanması halinde doğrusal olmayan AEKK yöntemine başvurulacaktır.

9.2.2.1 Model 1 için Kalıntı Analizi:

Normalliğin Araştırılması:

Model 1'den elde edilen kalıntılar için Q-Q grafiği çizdirildiğinde, Şekil 9.5'teki görüntü ortaya çıkar:



Şekil 9.5 Model 1'den elde edilen kalıntılarının Q-Q grafiği

Bilindiği gibi normal dağılım durumunda, z_i değerleri ile sıralı gözlemler arasındaki noktaların düz bir çizgi izlemesi gereklidir. Görüldüğü gibi, burada az da olsa normallikten sapma söz konusudur.

Normalliği sınamak için Jarque-Bera testinden de faydalanılabilir. Buna göre,

$$n \left[\frac{S^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24} \right]$$

şeklinde tanımlanan test istatistiği, ilgili anlam düzeyinde χ^2_2 değerinden büyükse, kalıntılarının normal dağıldığı sıfır hipotezi reddedilir. Burada S (skewness) çarpıklığı ve K (kurtosis) basıklığı simgeler. Model 1 kalıntıları için bu değerler aşağıda görülebilir:

<i>resid1</i>	
Mean	-0.000312
Standard Error	0.0152602
Median	0.01
Mode	0.09
Standard Deviation	0.1726493
Sample Variance	0.0298078
Kurtosis	1.8152186
Skewness	-0.212428
Range	1.15
Minimum	-0.54
Maximum	0.61
Sum	-0.04
Count	128

Bu değerlerden hesaplanan test istatistiği

$$JB= 8.449117795$$

%5 anlam seviyesinde tablo değeri ise $\chi^2_{2,0.05} = 5.991476357$ 'dir. Bu durumda kalıntıların normal dağılmadıkları söylenebilir.

Sapan Değerlerin İncelenmesi:

Sapan değerlerin varlığının araştırılması için kalıntılar standardize edilir. Sonra standardize edilen bu kalıntılar arasında, önceden belirlenen anlam düzeyine karşılık gelen tablo değeri yardımıyla oluşturulan aralığın dışında kalan gözlemler belirlenir. Eğer anlam düzeyi %5 olarak belirlenirse, buna karşılık gelen tablo değeri yaklaşık olarak $t_{\text{tablo}}= 1,96 \approx 2$ alınabilir. (-2, +2) yaklaşık aralığı dışında kalan kalıntı değerleri %5 düzeyinde sapan değer olarak işaretlenmiş ve Ek 2'de verilmiştir. Bunlar, sırasıyla 61., 62., 63., 64., 111., 125., 127. ve 128. gözlemlere karşılık gelen standart kalıntı değerleridir.

Bu gözlemler Veri A'dan atıldıktan sonra model tahmininin sonuçlarının ne olacağı merak edilebilir. Bu sonuçlar Çıktı 16'da sunulmuştur.

Çıktı 16:

```
Run stopped after 97 model evaluations and 45 derivative evaluations.
Iterations have been stopped because the relative reduction between
successive
residual sums of squares is at most SSCON = 1.000E-08
```

Nonlinear Regression Summary Statistics Dependent Variable LNY17.1

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	704.56037	234.85346
Residual	117	1.81813	.01554
Uncorrected Total	120	706.37850	
(Corrected Total)	119	34.95498	

R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS = .94799

Parameter	Estimate	Asymptotic Std. Error	Asymptotic 95 % Confidence Interval	
			Lower	Upper
A	2.616692286	.013977166	2.589011242	2.644373330
B	5.87354E-09	4.28568E-09	-2.61403E-09	1.43611E-08
C	-.057840623	.002661320	-.063111228	-.052570017

Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	A	B	C
A	1.0000	.4422	.4308
B	.4422	1.0000	.9996
C	.4308	.9996	1.0000

Görüldüğü gibi R^2 de yükselme olmuştur. B parametre tahmincinisinin t istatistik değerinde bir artma olmuşa da %5 anlam düzeyinde B yine anlamsız çıkmaktadır. Ayrıca r_{BC} hemen hemen aynı kalmıştır. Başlangıç noktası olarak (2; 0,001; -0,01) alınmıştır.

Sapan değerlerin araştırılmasında anlam düzeyi olarak %10 alınırsa, karşılık gelen tablo değeri 1,65 olmakta ve (-1,65, +1,65) aralığı dışında kalan standart kalıntılar sapan değer olarak belirlenecektir. Bu durumda, önceki 8 gözleme ek olarak 3 gözlem daha, sırasıyla 65., 96. ve 109. gözlemler katılacaktır. Bu değerler de Ek 2'de sunulmaktadır.

Sonuç olarak bu 11 değerın sapan değer olarak Veri A'dan çıkarılması, model tahminini Çıktı 17'deki gibi etkiliyecektir.

Çıktı 17:

Run stopped after 115 model evaluations and 51 derivative evaluations.
Iterations have been stopped because the relative reduction between successive residual sums of squares is at most SSSCON = 1.000E-08

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	695.40923	231.80308
Residual	114	1.63607	.01435
Uncorrected Total	117	697.04530	
(Corrected Total)	116	27.58191	

R squared = $1 - \text{Residual SS} / \text{Corrected SS} = .94068$

Parameter	Estimate	Asymptotic Std. Error	Asymptotic 95 % Confidence Interval	
			Lower	Upper
A	2.613109511	.013536645	2.586293521	2.639925501
B	-6.79626E-09	4.85124E-09	-1.64065E-08	2.81401E-09
C	-.057216407	.002608398	-.062383623	-.052049191

Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	A	B	C
A	1.0000	-.4403	.4279
B	-.4403	1.0000	-.9995
C	.4279	-.9995	1.0000

Model tahmininde bir önceki başlangıç noktası (2; 0,001; -0,01) olarak alındığında SPSS 11.5 "iterasyon limitinin aşıldığı" uyarısını vermektedir. Bunun için başlangıç noktası olarak (0; 0; 0) alınmıştır. Tahmin sonucunda R^2 , Çıktı 16'dakinden daha düşüktür. Diğer istatistikler yaklaşık olarak değişmemiştir.

Sonuç olarak sapan değer olarak nitelendirilen bu gözlemlerin dışlanması model tahmininde genel bir iyileştirme ortaya koymasına karşın yeterli düzeyde değildir.

Otokorelasyonun Araştırılması:

Bu analizde, doğrusal regresyonda otokorelasyonun saptanmasında sıklıkla kullanılan testlere başvurulmayacaktır. Bunun yerine kalıntıların birinci ve ikinci mertebe gecikmeli değerleri ile olan otokorelasyon katsayısı değerlendirilecektir. Model 1'den elde edilen kalıntıların birinci mertebe otokorelasyon katsayısı 0.509437 düzeyindedir. İkinci mertebe otokorelasyon katsayısı ise 0.275369 düzeyindedir. Bu değerler, otokorelasyonun bulunmadığını düşündürmektedir.

Değişen Varyansın Araştırılması:

Değişen varyansın araştırılmasında W testi, BPG testi ve Endrenyi-Kwong yaklaşımı uygulanacaktır.

W testi için şu yardımcı regresyon modeli hesaplanmıştır:

$$e_i^2 = A + BX_1 + CX_1^2 + DX_2 + EX_2^2 + FX_1X_2 + v_i$$

Bu modelin belirlenirlik katsayısı $R^2=0,27570$ bulunmuştur. W test istatistiği ise,

$$nR^2=72.74624$$

olup, %5 anlam düzeyi için 5 serbestlik dereceli χ^2 değeri 11.07048257'dir. Bu durumda H_0 reddedilir ve değişen varyansın olduğuna karar verilir.

BPG testinde ise hesaplanan,

$$p_i = \alpha + \beta X_1 + \gamma X_2 + v_i, \quad p_i = e_i^2 / \hat{\sigma}^2$$

yardımcı regresyon modelinden elde edilen test istatistiği

$$\theta=17.716$$

olarak bulunmuştur. %5 anlam düzeyinde 2 serbestlik dereceli χ^2 değeri 5.991476357 olduğundan H_0 hipotezi reddedilir ve değişen varyansın olduğuna karar verilir.

Endrenyi-Kwong yaklaşımı için ise hesaplanan test istatistiği,

$$S_1=2.4023$$

$$S_2=0.801$$

$$S_1/S_2=2.99$$

olarak bulunur. Bu sınamada için Endrenyi ve Kwong'un önerisi doğrultusunda, $k=(128+3)/4=32,75 \approx 32$ alınmıştır. Bulunan istatistik değeri, tablo değeri $F_{32, 32; 0,05} = 1.804480121$ 'den büyük olduğu için sıfır hipotezi reddedilir ve değişen varyansın olduğu sonucuna ulaşılr.

Uygulanan üç testin de sonucu değişen varyans sorununun varlığını göstermektedir. Bu sorunun giderilmesine yönelik olarak, modelin tahmin edilmesinde, doğrusal olmayan AEKK yöntemi kullanılacaktır.

9.2.2.2 Model 1 için Ağırlıkların Belirlenmesi ve Doğrusal Olmayan AEKK Uygulaması:

Model 1'in tahmin edildiği Veri A'nın değişen varyanslı anakütleden geldiğine karar verildikten sonra, modelin daha etkin tahmini için doğrusal olmayan AEKK yönteminin uygulanması ve bunun için de öncelikle ağırlıkların belirlenmesi gerekmektedir. Bölüm 7.5'te ağırlıkların belirlenmesi ve nasıl kullanılacağı konusunda bilgi verilmişti. Bu doğrultuda ağırlıkların belirlenmesi için birçok model denenmiştir ve kalıntı kareleri üzerinde açıklayıcılığı en yüksek olan aşağıdaki modelin tahmin değerleri ile ağırlıklar belirlenecektir.

$$e_i^2 = A + BX_1 + CX_2 + D\hat{Y}_i + v_i$$

Burada \hat{Y}_i , Model 1'den elde edilen tahmin değerleridir. Ağırlık olarak $w_i = 1/e_i^2$ değerleri kullanılacaktır. Bu yardımcı modelin tahmini sonucunda $R^2=0,30$ düzeyinde bulunmuştur. Bu Çıktı 18'de görülebilir:

Çıktı 18:

Model Summary(b)

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.547(a)	.300	.283	.04837

a Predictors: (Constant), PRED_1, X2, X1

b Dependent Variable: RES1SQ

ANOVA(b)

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	.124	3	.041	17.686	.000(a)
	Residual	.290	124	.002		
	Total	.414	127			

a Predictors: (Constant), PRED_1, X2, X1

b Dependent Variable: RES1SQ

Buradan elde edilen tahmin değerleri ve ağırlıklar Ek 3'te verilmiştir. STATISTICA ve E-Views dışında SPSS'de dahil olmak üzere diğer yazılımlarda doğrusal olmayan AEKK

yöntemi bulunmamaktadır. Bu programlar ise modelin tahmininde yakınsayamamakta ve tekillik uyarısı vermektedirler. Aynı durum sapan değerlerin çıkarıldığı halde de geçerli olmaktadır.

Bunların yanında, SPSS 11.5'ta Nonlinear Regression menüsünde Loss Function seçeneği bulunmaktadır. Bu menüde, user-defined loss function seçeneği seçilirse, AEKK ifadesi

$$\sum_i w_i (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

kullanıcı tarafından yazıldığı takdirde, doğrusal olmayan AEKK uygulaması mümkün olmaktadır. Böyle bir uygulamada Levenberg-Marquardt algoritması seçilememekte ve çıkan uyarı doğrultusunda zorunlu olarak Sequential Quadratic Programming algoritması kullanılmaktadır. Fakat bu durumda da uyarı gelmekte(warning 612) ve üstel ifadenin çok büyük olduğu belirtilmektedir. Süreç, yukarıdaki uyarı ya da maksimum iterasyon sayısına ulaşılması dolayısıyla sona erdirilmektedir. Ayrıca başlangıç noktasının seçimine göre çok farklı sonuçlar elde edilmektedir. Örneğin başlangıç noktasının (2; 0; 0) seçildiği bir deneme için son iterasyon değerleri aşağıdaki şekilde olmaktadır.

Çıktı 19:

All the derivatives will be calculated numerically.

Iteration	Loss funct	A	B	C
0.1	3956.696364	2.00000000	.000000000	.000000000
1.1	1752.536122	2.00021981	-.00910863	.000000000
2.1	925.5289050	2.53377196	-.46078364	5.95962123
3.1	923.3195459	2.51974508	-.46113126	5.96096929
4.1	923.3195459	2.51974508	-.46113126	5.96096929

Loss Fuction son değeri 923.3195459 olurken, (0; 0; 0) noktası için

Çıktı 20:

40.1	778.5081425	2.40537742	-1.1727515	.031773342
41.1	776.6327153	2.40593307	-1.3924580	.032545826
42.1	775.8076018	2.40565174	-1.6531383	.033664051
43.1	774.6056627	2.40543096	-1.8722856	.034260206
44.1	773.3108671	2.40545218	-2.1742235	.034958255
45.1	772.7424473	2.40577460	-2.5264600	.035945068
46.1	771.5944611	2.40635426	-2.9224919	.036679273
47.1	770.6433199	2.40627275	-3.3355654	.037300499

```

48.1    770.2035710    2.40643943    -3.8341398    .038208347
49.1    769.3207615    2.40680833    -4.4009108    .038915993
50.1    768.5456705    2.40685491    -4.9746334    .039476224

```

Run stopped after 50 major iterations.
Too many major iterations.

769.3207615 olmaktadır. Görüldüğü gibi, süreç bir minimuma yakınsayamamakta ve sonlandırılmaktadır.

Bu durum hakkında, SPSS'in sağlaması umulan sonuç kadar olmasa da, en azından kaba bir fikir sahibi olmak için Matlab 6,5 programı kullanılarak bir algoritma hazırlanmıştır. Yazılan bu program şu şekilde çalışmaktadır: Herbir parametre için önceden aralıklar belirlenmektedir. Sonra, her aralık için bir adım büyüklüğü kullanılarak, herbir parametreye karşılık gelen değer kümeleri oluşturulur. Daha sonra, parametrelerin alabileceği değerlerin tüm kombinasyonlarıyla Loss fonksiyonu hesaplanır. Hesaplanan bu Loss değerleri içinden en küçük olanı ve bunun elde edildiği parametre değerleri bir tablo olarak Word formatında aktararak kullanıcıya sunulur. Bunu gerçekleştiren Matlab kodu şu şekildedir:

```

[x,y,z] = meshgrid(1.0:0.1:3.5,-0.01:0.002:0.01,-1:0.2:1);
dummy1=size(x);
a1=dummy1(1);
a2=dummy1(2);
a3=dummy1(3);
result=[];
count=0;
for k=1:a1;
    (k/a1)*100
    for l=1:a2;
        for m=1:a3;
            count=count+1;
            v=[x(k,l,m),y(k,l,m),z(k,l,m)];
            result(count,1)=v(1);
            result(count,2)=v(2);
            result(count,3)=v(3);
            result(count,4)=f(v);
        end
    end
end
save('result00','result','-ASCII');
min_value=min(result(:,4))
[i,j] = find(result(:,4)==min_value);
rapor=result(i,:);
titles = {'b0','b1','b2','f'};
table2word(titles,rapor,'Table List 1','rapor00.doc','Optimum Cozum Uzayi');

```

Bu kodun 18. satırında çağırılan f fonksiyonu ise aşağıda verilmiştir:

```

function r = f(v)
b0=v(1);
b1=v(2);

```



```

b2=v(3);
yi=importdata('yi.txt');
wi=importdata('wi.txt');
x1=importdata('x1.txt');
x2=importdata('x2.txt');
u=size(yi,1);
f=0;
for i=1:u;
    dummy = ((yi(i)-b0+b1*x1(i)*exp(-b2*x2(i)))^2)*wi(i);
    f=f+dummy;
end
r=f;

```

Model 1 için, bu kod ile Ek 3'te verilen ağırlıklar kullanılarak, değişik aralıklarla, yapılan birçok deneme sonucunda en iyi sonuç olarak şu çizelge elde edilmiştir:

Çizelge 9.1 Matlab kodunun çıktısı (Her parametreye denk gelen aralık ve adım değeri tablonun altında verilmiştir).

Optimum Cozum Uzayi				
	b0	b1	b2	f
	2.5	-0.01	0.2	924.311
	2.5	-0.01	0.4	924.311
	2.5	-0.01	0.6	924.311
	2.5	-0.01	0.8	924.311
	2.5	-0.01	1	924.311
	2.5	-0.008	0.2	924.311
	2.5	-0.008	0.4	924.311
	2.5	-0.008	0.6	924.311
	2.5	-0.008	0.8	924.311
	2.5	-0.008	1	924.311
	2.5	-0.006	0.2	924.311
	2.5	-0.006	0.4	924.311
	2.5	-0.006	0.6	924.311

2.5	-0.006	0.8	924.311
-----	--------	-----	---------

Çizelge 9.1 (Devamı) Matlab kodunun çıktısı (Her parametreye denk gelen aralık ve adım değeri tablonun altında verilmiştir).

2.5	-0.006	1	924.311
2.5	-0.004	0.2	924.311
2.5	-0.004	0.4	924.311
2.5	-0.004	0.6	924.311
2.5	-0.004	0.8	924.311
2.5	-0.004	1	924.311
2.5	-0.002	0.2	924.311
2.5	-0.002	0.4	924.311
2.5	-0.002	0.6	924.311
2.5	-0.002	0.8	924.311
2.5	-0.002	1	924.311
2.5	0	-1	924.311
2.5	0	-0.8	924.311
2.5	0	-0.6	924.311
2.5	0	-0.4	924.311
2.5	0	-0.2	924.311
2.5	0	0	924.311
2.5	0	0.2	924.311
2.5	0	0.4	924.311
2.5	0	0.6	924.311
2.5	0	0.8	924.311

2.5	0	1	924.311
2.5	0.002	0.4	924.311

Çizelge 9.1 (Devamı) Matlab kodunun çıktısı (Her parametreye denk gelen aralık ve adım değeri tablonun altında verilmiştir).

2.5	0.002	0.6	924.311
2.5	0.002	0.8	924.311
2.5	0.002	1	924.311
2.5	0.004	0.4	924.311
2.5	0.004	0.6	924.311
2.5	0.004	0.8	924.311
2.5	0.004	1	924.311
2.5	0.006	0.4	924.311
2.5	0.006	0.6	924.311
2.5	0.006	0.8	924.311
2.5	0.006	1	924.311
2.5	0.008	0.4	924.311
2.5	0.008	0.6	924.311
2.5	0.008	0.8	924.311
2.5	0.008	1	924.311
2.5	0.01	0.4	924.311
2.5	0.01	0.6	924.311
2.5	0.01	0.8	924.311
2.5	0.01	1	924.311

1.5:0.2:3.5,-0.01:0.002:0.01,-1:0.2:1

f 'nin minimum değeri 924,311 olarak elde edilmiş ve bu değeri gerçekleyen pek çok parametre kombinasyonu olduğu görülmüştür. Parametrelerin tahmini gerçekleştirilememiştir.

Bu sonuçlar değerlendirildiğinde, farklı bir ağırlık kullanmanın uygun olacağı düşünülmüştür. Yeni ağırlıkların belirlenmesinde şöyle bir yöntem izlenmiştir: Model 1'den elde edilen kalıntı kareleri küçükten büyüğe doğru sıralanır. Sonra, sıralı kalıntıların küçükten büyüğe doğru her % 10'luk bölümüne karşılık gelecek şekilde, sırasıyla 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9 ve 1/10 ağırlıkları verilir. Böylece her kalıntı karesi ve gözlem için karşılık gelen ağırlıklar belirlenir. Görüldüğü gibi ağırlıklar kalıntı kareleri ile ters yönlüdür. Burada ağırlıkların değerleri keyfi olarak seçilmiştir. Önemli olan küçük kalıntı karesi için büyük, büyük kalıntı karesi için küçük ağırlık vermektir. Bunlar Ek 4'te verilmiştir.

Çizelge 9.2, Ek 4'teki ağırlıklar kullanıldığı durumda Matlab kodunun çıktısı (her parametreye denk gelen aralık ve adım değeri tablonun altında verilmiştir)

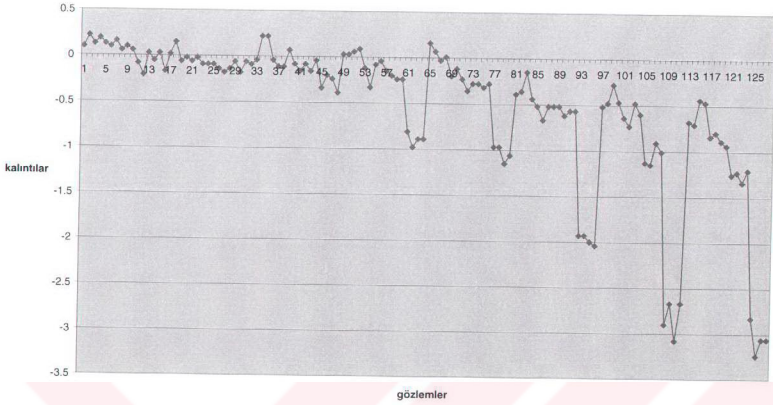
Optimum Cozum Uzayi			
b0	b1	b2	f
2.6	0.01	0	5.867996
1.0:0.1:3.5,-0.01:0.002:0.01,-1:0.2:1			

Çizelge 9.2'de görüldüğü gibi, Loss fonksiyonunun değeri 5,867996 çıkmıştır. Bu değere, tek bir kombinasyonda, (2,6; 0,01; 0) değerinde ulaşılmıştır. Bu sonuca göre, C (çizelgede b2)=0 tahmin edildiği için X_2 'nin modelin açıklayıcılığında hiçbir önemi kalmamaktadır ve üstel ifade 1 olacağı için model

$$\hat{\ln Y} = 2,6 + 0,01X_1$$

şeklinde doğrusal bir modele indirgenmektedir. Bu da sıcaklığın, dielektrik kuvveti üzerinde bir etkisi olmadığı anlamına gelmektedir. Kullanılan bu ağırlıklar, SPSS'te denendiğinde yakınsama sağlanamamakta ve iterasyonlar sona erdirilmektedir. Bu modelden elde edilen kalıntıların grafiği şu şekildedir:

Çizelge 8.6'da sunulan modelin kalıntıları

Şekil 9.6 $\hat{A} \ln Y = 2,6 + 0,01X_1$ modelinin kalıntıları

Görüldüğü gibi, grafikte değişen varyansın varlığı kuvvetli biçimde görülmektedir. Ayrıca dikkat edilirse, grafikten, kalıntılarının toplamının 0 olmadığı da görülebilir.

Tüm bunların sonucu olarak, Veri A için doğrusal olmayan AEKK yönteminin tatmin edici sonuç vermediği görülmektedir. Bu durumda, daha basit ve görgül tekniklere, örneğin bağımlı değişkenin karekökünün veya logaritmasının alınması gibi değişken dönüştürme yöntemlerine başvurulacaktır. Bağımlı değişken $\ln Y$ 'nin karekökü alınıp,

$$Y' = A - BX_1 e^{-CX_2} + e \quad , \quad Y' = \sqrt{\ln Y}$$

modeli tahmin edilirse Çıktı 21'deki sonuç elde edilir:

Çıktı 21:

```
Run stopped after 89 model evaluations and 42 derivative evaluations.
Iterations have been stopped because the relative reduction between
successive
residual sums of squares is at most SSSCON = 1.000E-08
```

Nonlinear Regression Summary Statistics			Dependent Variable SQRT_LNY
Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	290.90196	96.96732
Residual	125	.86804	6.944284E-03
Uncorrected Total	128	291.77000	

(Corrected Total) 127 12.76600

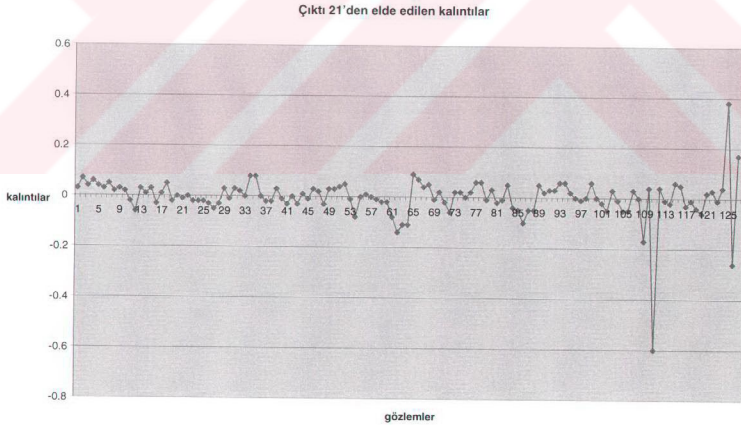
R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS = .93200

Parameter	Estimate	Asymptotic Std. Error	Asymptotic 95 % Confidence Interval	
			Lower	Upper
A	1.615712949	.008964778	1.597970540	1.633455357
B	7.81656E-11	1.19103E-10	-1.57554E-10	3.13885E-10
C	-.070612783	.005537296	-.081571779	-.059653788

Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	A	B	C
A	1.0000	.4348	.4289
B	.4348	1.0000	.9999
C	.4289	.9999	1.0000

Çıktı 21'de görüldüğü gibi $R^2=0,932$ olup, orijinal modele göre çok küçük bir artma söz konusudur. B parametresi yine anlamsızdır. Bu modelden elde edilen kalıntılar Şekil 9.7'de verilmiştir.



Şekil 9.7 $Y' = A - BX_1e^{-CX_2} + e$ modelinin kalıntıları

Grafik, 111., 125. ve 126. kalıntı değerleri dışında iyi görünmektedir. Bu değerler, daha önce kalıntı analizi sırasında sapan değerler arasındaydılar. Eğer bu gözlemler Veri A'dan dışlanırsa, aynı model yeniden tahmin edildiğinde şu sonuçlar bulunur:

Çıktı 22:

Run stopped after 75 model evaluations and 35 derivative evaluations.
Iterations have been stopped because the relative reduction between
successive
residual sums of squares is at most SSCON = 1.000E-08

Nonlinear Regression Summary Statistics Dependent Variable SQRTLNY

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	291.08332	97.02777
Residual	122	.27668	2.267870E-03
Uncorrected Total	125	291.36000	
(Corrected Total)	124	7.59270	

R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS = .96356

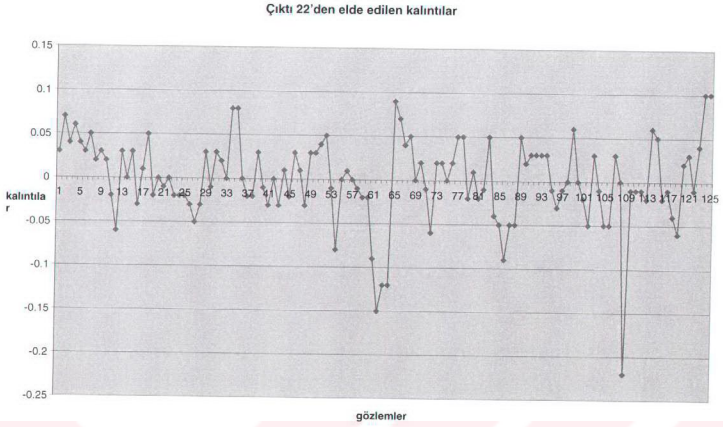
Parameter	Estimate	Asymptotic Std. Error	Asymptotic 95 % Confidence Interval	
			Lower	Upper
A	1.615321198	.005150979	1.605124321	1.625518076
B	1.23530E-10	1.07907E-10	-9.00830E-11	3.37143E-10
C	-.068768428	.003177527	-.075058659	-.062478197

Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	A	B	C
A	1.0000	.4297	.4223
B	.4297	1.0000	.9998
C	.4223	.9998	1.0000

B parametresi yine anlamsız olmakla birlikte, diğer istatistiklerde çok az bir iyileşme vardır.

Çıktı 22'den türetilen kalıntılarn grafiği de şu şekildedir:



Şekil 9.8 Çıktı 22'den elde edilen kalıntılar

Grafikte görülen yapı, sabit varyans izlenimi vermektedir. Daha ileri inceleme için W test istatistiği hesaplanırsa şu bulunur:

$$nR^2=14,60625$$

%5 anlam düzeyi için 5 serbestlik dereceli χ^2 değeri 11.07048257'dir. Buna göre H_0 reddedilir, ama bulunan bu değer, kalıntı analizi sırasında hesaplanan önceki değer, 72,75'e göre çok düşüktür. BPG testinin istatistiği ise

$$\theta=11.0455$$

bulunur ve bu %5 anlam düzeyinde 2 serbestlik dereceli χ^2 değeri 5.991476357'den yüksek olduğu için H_0 reddedilir ve sabit varyans varsayımının geçerli olmadığı söylenir. Dikkat edilirse bu, BPG testi için önce hesaplanan 17.716 değerinden daha düşüktür. Bunlara ek olarak Endrenyi ve Kwong sınamasına da bakılabilir. Test istatistiği,

$$S_1=0,1513$$

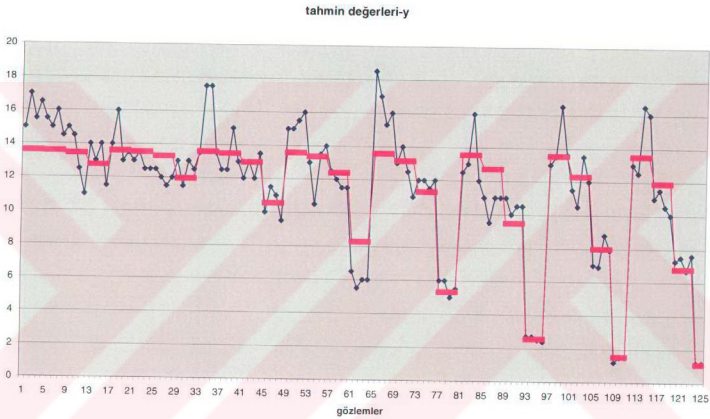
$$S_2=0,0648$$

$$S_1/S_2=2,33$$

$F_{32, 32; 0,05}=1,8$ olduğu için H_0 reddedilir, fakat test istatistiği azalmış ve tablo değerine, öncekine göre daha yaklaşmıştır.

Sonuç olarak, değişen varyans test istatistiklerindeki iyileşmeye dayanarak, Model 1'de var olan değişen varyans durumunun azaldığı söylenebilir.

Bulunan son modelden tahmin için, modelden gelen tahmin değerlerinin karesi alınır ve bu kareli değerlerin e tabanında ters logaritması alınır. Elde edilen tahmin değerlerinin, Y, dielektrik kuvveti değişkeni ile grafiği aşağıdaki gibidir:

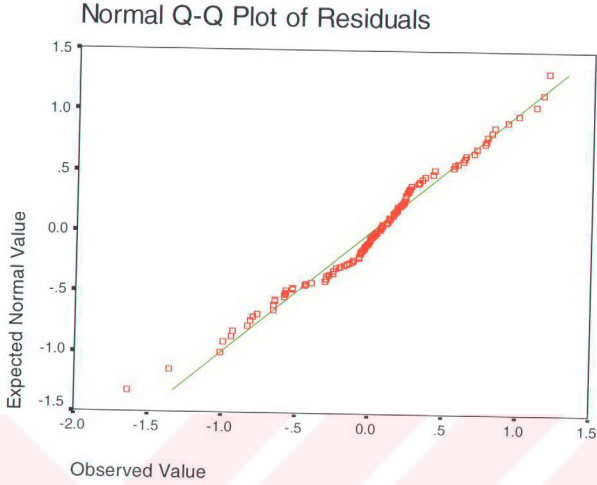


Şekil 9.9 Son modelden elde edilen dönüştürülmüş tahmin değerleri ile Y (tahmin değerleri pembe renkte gösterilmiştir)

9.2.2.3 Model 13 için Kalıntı Analizi:

Normalliğin Araştırılması:

Model 1 için olduğu gibi burada da kalıntıların normal dağılıp dağılmadıklarının incelenmesinde Q-Q grafiğine bakılacaktır. Model 13'ten elde edilen kalıntıların Q-Q Plot çıktısı şu şekildedir:



Şekil 9.10 Model 13'den elde edilen kalıntıların Q-Q grafiği

Görüldüğü gibi biraz normallikten sapma varsa da bu fazla büyük değildir. Çarpıklık ve basıklık katsayıları ise aşağıdaki şekildedir:

<i>resid13</i>	
Mean	7.8125E-05
Standard Error	0.045169804
Standard Deviation	0.511037999
Sample Variance	0.261159836
Kurtosis	0.493668827
Skewness	-0.313659616
Range	2.82
Sum	0.01
Count	128

Buradan elde edilen test istatistiği

$$JB = 3.398604424$$

dir ve %5 anlam düzeyinde $\chi^2_2 = 5.991476357$ 'dir. Bu durumda sıfır hipotezi kabul edilir ve kalıntıların normal dağıldığı kabul edilir.

Sapan Değerlerin İncelenmesi:

%5 anlam düzeyinde (-2;+2) yaklaşık aralığının dışında kalan standart kalıntılar ve bunlara karşılık gelen gözlemler, sapan değer olarak nitelendiriliyordu. Buna göre, 109., 111., 121., 122. ve 124. standart kalıntılar sapan değer olarak nitelendirilebilir. Bu gözlemlerin çıkarılmasından sonra kalan verilerle model tahmin edildiğinde şu sonuçlar elde edilir:

Çıktı 23:

Run stopped after 3 model evaluations and 2 derivative evaluations.
Iterations have been stopped because the magnitude of the largest correlation between the residuals and any derivative column is at most RCON = 1.000E-08

Nonlinear Regression Summary Statistics Dependent Variable STNY17.2

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	79.50471	26.50157
Residual	120	24.64229	.20535
Uncorrected Total	123	104.14700	
(Corrected Total)	122	103.63187	

R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS = .76221

Parameter	Estimate	Asymptotic Std. Error	Asymptotic 95 % Confidence Interval	
			Lower	Upper
B	-.490473787	.042772227	-.575159820	-.405787754
C	-.571514481	.040841632	-.652378070	-.490650891
D	-.417989300	.041652485	-.500458321	-.335520279

Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	B	C	D
B	1.0000	.0510	.0740
C	.0510	1.0000	.0435
D	.0740	.0435	1.0000

Görüldüğü gibi, tüm parametre tahmincileri anlamlı ve aralarındaki korelasyon düşüktür. R^2 'de ise Model 13'e göre artma vardır.

%10 anlam düzeyinde ise ek olarak 95., 96., 107., 110., 112., 123. ve 126. gözlemler dışlanmaktadır. Sapan değerler Ek 5'te sunulmaktadır. Bu durumda ise tahmin edilen model,

Çıktı 24:

Run stopped after 3 model evaluations and 2 derivative evaluations.
Iterations have been stopped because the magnitude of the largest correlation between the residuals and any derivative column is at most RCON = 1.000E-08

Nonlinear Regression Summary Statistics Dependent Variable STLNY25

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	49.15580	16.38527
Residual	113	19.05660	.16864
Uncorrected Total	116	68.21240	
(Corrected Total)	115	64.09292	
R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS =			.70267

Parameter	Estimate	Asymptotic Std. Error	Asymptotic 95 % Confidence Interval	
			Lower	Upper
B	-.468742682	.042764140	-.553466157	-.384019207
C	-.532155689	.039018037	-.609457458	-.454853920
D	-.378978633	.041572157	-.461340573	-.296616692

Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	B	C	D
B	1.0000	.1655	.2329
C	.1655	1.0000	.1619
D	.2329	.1619	1.0000

şeklinde olmaktadır. Diğer tüm istatistikler Çıktı 23'deki ile yaklaşık aynı olmasına karşın R^2 'de azalma söz konusudur.

Otokorelasyonun Araştırılması:

Model 13'den elde edilen kalıntılar için birinci mertebeye otokorelasyon katsayısı 0.690321, ikinci mertebeye otokorelasyon katsayısı ise 0.474164 olarak bulunmuştur. Bu değerler az da olsa otokorelasyonun varlığını düşündürmektedir.

Değişen Varyansın Araştırılması:

Değişen varyansın saptanmasına yönelik W testinde yine

$$e_i^2 = A + BstX_1 + C(stX_1)^2 + DstX_2 + E(stX_2)^2 + FstX_1stX_2 + v_i$$

biçimindeki yardımcı regresyon modelinden faydalanılacaktır. Bu modelin tahmininden elde edilen R^2 yardımıyla test istatistiği,

$$nR^2=72.9165$$

bulunmuştur. %5 anlam düzeyi için 5 serbestlik dereceli χ^2 değeri 11.07048257'dir. Bu durumda H_0 reddedilir ve değişen varyansın olduğuna karar verilir.

BPG testi için

$$p_i = A + BstX_1 + CstX_2 + v_i, \quad p_i = e_i^2 / \hat{\sigma}^2$$

yardımcı modelinin SSR'si kullanılarak hesaplanan test istatistiği

$$\Theta=73.798$$

olarak bulunmuştur. %5 anlam düzeyinde 2 serbestlik dereceli χ^2 değeri 5.991476357 olduğundan H_0 hipotezi reddedilir ve değişen varyansın olduğuna karar verilir. Değişen varyansın varlığı büyük ölçüde Şekil 9.4'ten de görülmektedir.

9.2.2.4 Model 13 için Ağırlıkların Belirlenmesi ve Doğrusal Olmayan AEKK Uygulaması:

Model 13 için ağırlıkların belirlenmesinde birçok yardımcı regresyon modeli denenmiş ve açıklayıcılığı en yüksek bulunan

$$e_i^2 = A + BstX_1 + CstX_2 + D(stX_1)^2 + E(stX_2)^2 + FstX_1stX_2 + v_i$$

modeli seçilmiştir. Model ile ilgili sonuçlar Çıktı 25'de görülmektedir:

Çıktı 25:

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	6	20.48228	3.41371
Residual	122	8.97503	.07357
Uncorrected Total	128	29.45730	
(Corrected Total)	127	20.85560	

R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS = .56966

Tahmin değerleri e_i^2 ler $1/e_i^2$ şeklinde, ağırlık olarak kullanılacaklardır. Bu tartılar Ek 6'da sunulmuştur. Model 13'ün parametrelerinde doğrusal bir model olması dolayısıyla modeldeki etkileşim terimi (stX₁.stX₂), bir değişken (X') şeklinde yazıldığında iterasyon gerektirmeyen AEKK yöntemi uygulanabilir. Bu durumda dönüşüm sunucunda model

$$\ln Y = BstX_1 + CstX_2 + DX' + e$$

şeklini alır. AEKK yönteminin uygulanması ile model Çıktı 26'daki gibi tahmin edilir:

Çıktı 26:

Variables Entered/Removed(b,c,d)

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	X_PRIME, STX1, STX2(a)	.	Enter

- a All requested variables entered.
b Dependent Variable: STLNY
c Linear Regression through the Origin
d Weighted Least Squares Regression - Weighted by W_36

Model Summary

Model	R	R Square(a)	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.896(b)	.803	.797	.92262

- a For regression through the origin (the no-intercept model), R Square measures the proportion of the variability in the dependent variable about the origin explained by regression. This CANNOT be compared to R Square for models which include an intercept.
b Predictors: X_PRIME, STX1, STX2

ANOVA(c,d,e)

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	337.325	3	112.442	132.095	.000(a)
	Residual	82.568	97	.851		
	Total	419.893(b)	100			

- a Predictors: X_PRIME, STX1, STX2
 b This total sum of squares is not corrected for the constant because the constant is zero for regression through the origin.
 c Dependent Variable: STLNY
 d Linear Regression through the Origin
 e Weighted Least Squares Regression - Weighted by W_36

Coefficients(a,b,c)

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	STX1	-.515	.039	-.635	-13.345	.000
	STX2	-.496	.036	-.835	-13.790	.000
	X_PRIME	-.379	.046	-.517	-8.269	.000
	E					

- a Dependent Variable: STLNY
 b Linear Regression through the Origin
 c Weighted Least Squares Regression - Weighted by W_36

Residuals Statistics(b,c,d)

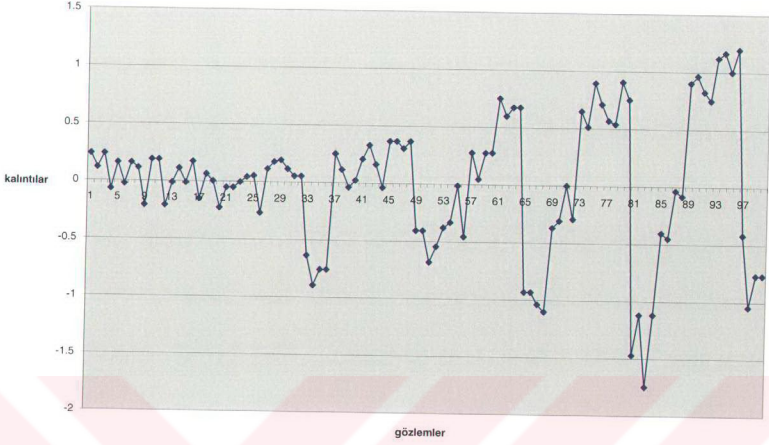
	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation	N
Predicted Value	-2.4391	.8335	-.1458	.85890	100
Residual	-1.7451	1.1965	.0004	.58817	100
Std. Predicted Value(a)	0
Std. Residual(a)	0

- a Not computed for Weighted Least Squares regression.
 b Dependent Variable: STLNY
 c Linear Regression through the Origin
 d Weighted Least Squares Regression - Weighted by W_36

Görüldüğü gibi, modelin uyumunda artma söz konusudur. Fakat dikkat edilecek nokta, ağırlıkların bazılarının negatif olması dolayısıyla tahmin sürecinde, 1-12, 17-28 ve 37-40 arasındaki gözlemler katılmamış, geri kalan 100 gözlem üzerinden sonuç bulunmuştur. Sonuç olarak Çıktı 26'daki modelden elde edilen kalıntılar, değişen varyansın varlığı açısından incelenmelidir.

Çıktı 26'da elde edilen kalıntıların ve tahmin değerlerinin grafikleri sırasıyla şu şekildedir:

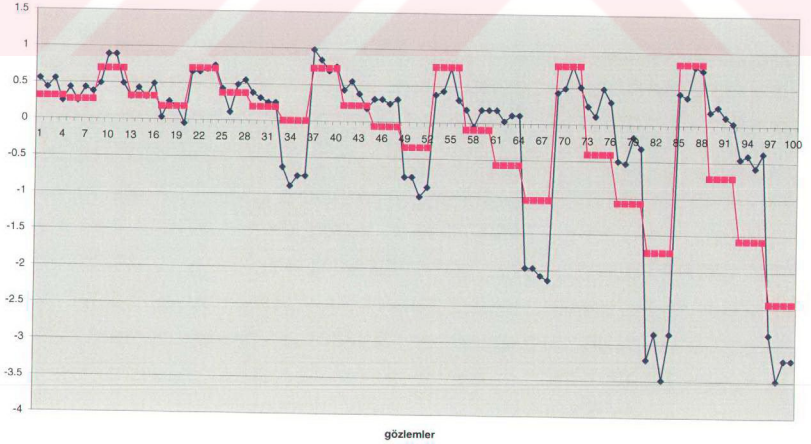
Çıktı 26'dan elde edilen kalıntılar



Şekil 9.11 Çıktı 24'ten elde edilen kalıntılar

Kalıntuların grafiğinden, değişen varyansın varlığı açık bir şekilde görülmektedir. .

Çıktı 26'dan elde edilen tahmin değerlerinin stlnY ile grafiği



Şekil 9.12 Çıktı 26'dan elde edilen tahmin değerlerinin stlnY ile grafiği (tahmin değerleri pembe renkte gösterilmiştir)

Şekil 9.11 ve 9.12'den uygulanan AEKK yöntemiyle Model 13'teki değişen varyans sorununun giderilemediği görülmektedir. Bununla birlikte, ağırlıklandırma sürecinde karşılaşılan negatif değerlerden dolayı veri kaybı da olmuştur. Bu sorunları aşmak amacıyla, ağırlıklandırma yöntemini değiştirmek ve modele özgü ve uygun bir ağırlıklandırma kullanmak yerinde olacaktır. Şöyle bir yöntem uygun olabilir: Model 13'ten elde edilen kalıntı kareleri küçükten büyüğe göre sıralanır. Sonra, sıralı kalıntıların küçükten büyüğe doğru her % 10'luk bölümüne karşılık gelecek şekilde, sırasıyla 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 ve 1 ağırlıkları verilir. Böylece her kalıntı karesi ve gözlem için karşılık gelen ağırlıklar belirlenir. Görüldüğü gibi ağırlıklar kalıntı kareleri ile ters yönlüdür. Burada ağırlıkların değerleri keyfi olarak seçilmiştir, fakat bu, tahmin sürecini olumsuz yönde etkilemez. Önemli olan küçük kalıntı karesi için büyük, büyük kalıntı karesi için küçük ağırlık vermektir. Bu yolla elde edilen ağırlıkların tamamı Ek 7'de sunulmuştur.

İkinci ağırlıklarla, Model 13, tekrar AEKK yöntemi ile tahmin edilirse, Çıktı 27'deki sonuçlar elde edilir:

Çıktı 27:

Variables Entered/Removed(b,c,d)

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	X_PRIME, STX1, STX2(a)	.	Enter

a All requested variables entered.

b Dependent Variable: STLNY

c Linear Regression through the Origin

d Weighted Least Squares Regression - Weighted by BBOLUW13

Model Summary

Model	R	R Square(a)	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.851(b)	.724	.718	.37507

a For regression through the origin (the no-intercept model), R Square measures the proportion of the variability in the dependent variable about the origin explained by regression. This CANNOT be compared to R Square for models which include an intercept.

b Predictors: X_PRIME, STX1, STX2

ANOVA(c,d,e)

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	46.212	3	15.404	109.500	.000(a)

Residual	17.584	125	.141		
Total	63.796(b)	128			

a Predictors: X_PRIME, STX1, STX2

b This total sum of squares is not corrected for the constant because the constant is zero for regression through the origin.

c Dependent Variable: STLNY

d Linear Regression through the Origin

e Weighted Least Squares Regression - Weighted by BBOLUW13

Coefficients(a,b,c)

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	95% Confidence Interval for B	
		B	Std. Error	Beta			Lower Bound	Upper Bound
1	STX1	-.403	.058	-.336	-6.966	.000	-517	-.288
	STX2	-.717	.073	-.504	-9.823	.000	-.862	-.573
	X_PRI	-.438	.067	-.343	-6.574	.000	-.570	-.306
	ME							

a Dependent Variable: STLNY

b Linear Regression through the Origin

c Weighted Least Squares Regression - Weighted by BBOLUW13

Coefficient Correlations(a,b,c)

Model			X_PRIME	STX1	STX2
1	Correlations	X_PRIME	1.000	-.185	-.381
		STX1	-.185	1.000	-.060
		STX2	-.381	-.060	1.000
	Covariances	X_PRIME	.004	-.001	-.002
		STX1	-.001	.003	.000
		STX2	-.002	.000	.005

a Dependent Variable: STLNY

b Linear Regression through the Origin

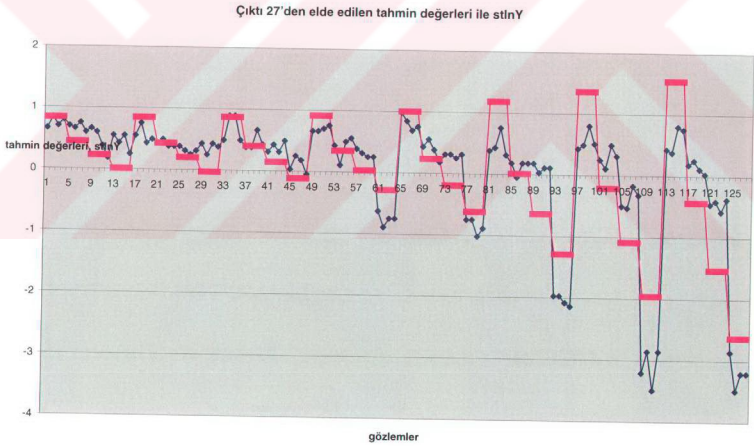
c Weighted Least Squares Regression - Weighted by BBOLUW13

Çıktı 27'de görüldüğü gibi $R^2=0,718$ olup, önceki değerinden küçüktür. Parametre tahminçileri anlamlı ve aralarındaki korelasyon düşüktür. Modelde genel bir iyileşme söz konusudur.

Kalıntıları ve tahmin değerlerinin, gözlem değerleri ile uyumunu gösteren grafikler sırasıyla aşağıdaki gibidir:



Şekil 9.13 Çıktı 27'den elde edilen kalıntılar



Şekil 9.14 Çıktı 27'den elde edilen tahmin değerlerinin stnY ile grafiği (tahmin değerleri pembe renkte gösterilmiştir)

Şekil 9.9 ve 9.10'dan görülebildiği üzere değişen varyans sorunu azalmakla beraber yine devam etmektedir. Bu durumda, ağırlıkların yeniden düzenlenmesi, örneğin karelerinin veya küplerinin alınmasıyla aralarındaki göreceli farkların kuvvetlendirilmesi düşünülebilir. Bu doğrultuda, ağırlıkların kareleri almırsa, geometrik bir ağırlıklandırma söz konusu olacaktır.

Model bir önceki modelde kullanılan ve Ek 6'da verilen ağırlıkların karesi ile tahmin edildiğinde Çıktı 28'deki sonuçlar elde edilir:

Çıktı 28:

Variables Entered/Removed(b,c,d)

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	X_PRIME, STX1, STX2(a)	.	Enter

a All requested variables entered.

b Dependent Variable: STLNY

c Linear Regression through the Origin

d Weighted Least Squares Regression - Weighted by BBOLUW3

Model Summary

Model	R	R Square(a)	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.868(b)	.753	.747	.29584

a For regression through the origin (the no-intercept model), R Square measures the proportion of the variability in the dependent variable about the origin explained by regression. This CANNOT be compared to R Square for models which include an intercept.

b Predictors: X_PRIME, STX1, STX2

ANOVA(c,d,e)

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	33.417	3	11.139	127.270	.000(a)
	Residual	10.940	125	.088		
	Total	44.357(b)	128			

a Predictors: X_PRIME, STX1, STX2

b This total sum of squares is not corrected for the constant because the constant is zero for regression through the origin.

c Dependent Variable: STLNY

d Linear Regression through the Origin

e Weighted Least Squares Regression - Weighted by BBOLUW3

Coefficients(a,b,c)

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	95% Confidence Interval for B	
		B	Std. Error	Beta			Lower Bound	Upper Bound
1	STX1	-.266	.069	-.199	-3.876	.000	-.402	-.130
	STX2	-1.032	.118	-.551	-8.731	.000	-1.266	-.798
	X_PRIME	-.406	.104	-.262	-3.916	.000	-.611	-.201

a Dependent Variable: STLNY

b Linear Regression through the Origin

c Weighted Least Squares Regression - Weighted by BBOLUW3

Coefficient Correlations(a,b,c)

Model			X_PRIME	STX1	STX2

1	Correlations	X_PRIME	1.000	-.336	-.642
		STX1	-.336	1.000	-.069
		STX2	-.642	-.069	1.000
	Covariances	X_PRIME	.011	-.002	-.008
		STX1	-.002	.005	-.001
		STX2	-.008	-.001	.014

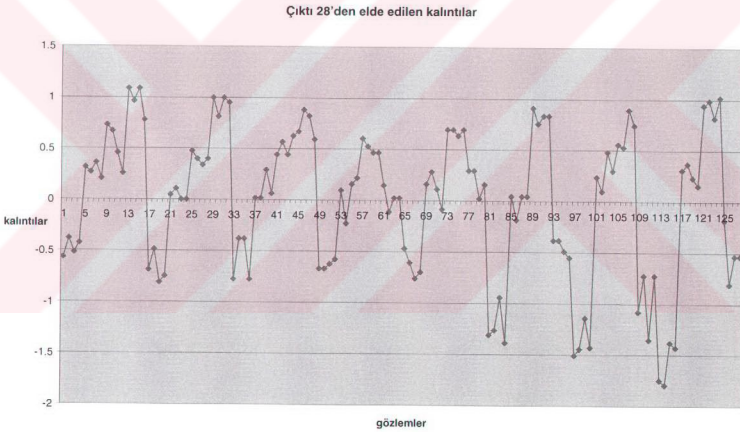
a Dependent Variable: STLNY

b Linear Regression through the Origin

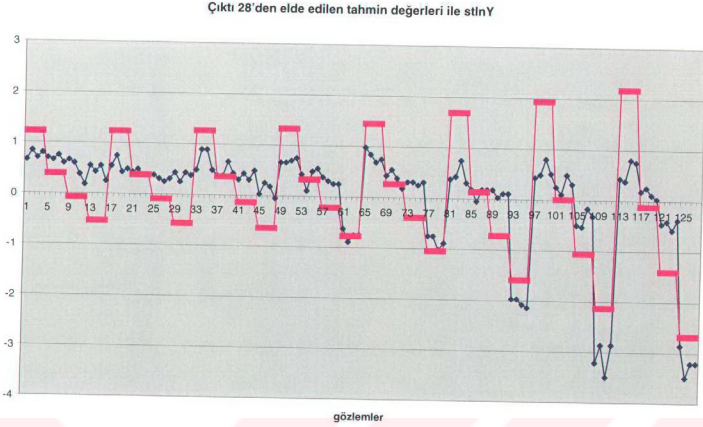
c Weighted Least Squares Regression - Weighted by BBOLUW3

$R^2 = 0,747$ çıkmıştır. Bu, Çıktı 13'de tahmin edilen Model 13'ün R^2 değerinden yüksektir. Model, parametre tahminicileri anlamlı ve parametre tahminicileri arasındaki korelasyon düşüktür. Fakat standart hatalar, öncesine göre yüksektir.

Çıktı 28'deki modelin kalıntılarının ve uyumunun grafiği ise aşağıdaki gibidir:



Şekil 9.15 Çıktı 28'den elde edilen kalıntılar



Şekil 9.16 Çıktı 28'den elde edilen tahmin değerleri ile stnY (tahmin değerleri pembe renkte gösterilmiştir)

Şekil 9.15'deki kalıntıların grafiği, değişen varyans olmadığını düşündürmektedir. Bunu araştırmak amacıyla, önceki gibi W ve BPG testlerine başvurulacaktır.

W testi için yardımcı regresyon modeli olarak yine

$$e_i^2 = A + BstX_1 + C(stX_1)^2 + DstX_2 + E(stX_2)^2 + FstX_1stX_2 + v_i$$

modeli kullanılacaktır. Modelin tahmininden W test istatistiği

$$nR^2=81,92$$

bulunur. %5 anlam düzeyi için 5 serbestlik dereceli χ^2 değeri 11.07048257'dir. H_0 reddedilir ve değişen varyansın var olduğu şeklinde ilginç bir sonuca ulaşılr.

BPG test istatistiği ise,

$$p_i = A + BstX_1 + CstX_2 + v_i, \quad p_i = e_i^2 / \hat{\sigma}^2$$

yardımcı modelinden faydalanılarak

$$\Theta=22,67$$

olarak bulunur. %5 anlam düzeyinde 2 serbestlik dereceli χ^2 değeri 5.991476357 olduğundan H_0 hipotezi reddedilir ve değişen varyansın olduğuna karar verilir. Fakat, test istatistiği önceki değerine göre bir hayli düşüktür. Dolayısıyla, BPG testine dayanarak, değişen varyans sorununun giderilemediği, ama azaltıldığı söylenebilir.

9.3 Veri B ile İlgili Uygulamalar:

9.3.1 Veri B için Önerilen Modelin Parametrelerinin Tahmini:

Modelin tahmininde yine SPSS 11.5, Nonlinear Regression menüsü kullanılacaktır. Tahmin modeli

$$Y_i = \frac{e^{-AX}}{B + CX} + e_i$$

şeklindeir. Veri B'nin temin edildiği internet sayfasında önerilen ve orijinal kaynağa paralel olarak (0,15; 0,008; 0,01) noktası başlangıç noktası olarak alınacaktır. Veri B, SPSS'e girilip, tahmin yapıldığında, Çıktı 29'daki sonuç bulunur:

Çıktı 29:

```
Run stopped after 10 model evaluations and 5 derivative evaluations.
Iterations have been stopped because the relative reduction between
successive
residual sums of squares is at most SSSCON = 1.000E-08
```

Nonlinear Regression Summary Statistics Dependent Variable Y

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	313023.79567	104341.26522
Residual	211	2384.47714	11.30084
Uncorrected Total	214	315408.27281	
(Corrected Total)	213	119436.03953	

R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS = .98004

Parameter	Estimate	Asymptotic Std. Error	Asymptotic 95 % Confidence Interval	
			Lower	Upper
A	.190277915	.021938442	.147031309	.233524521
B	.006131397	.000345000	.005451308	.006811486
C	.010530918	.000792817	.008968060	.012093775

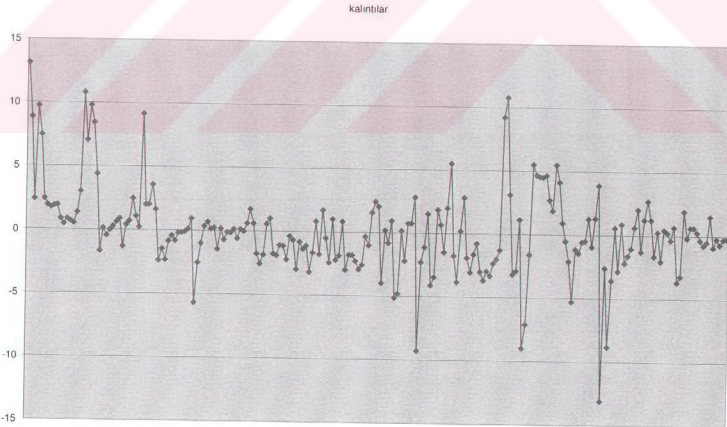
Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	A	B	C
A	1.0000	.8386	-.9505
B	.8386	1.0000	-.9490
C	-.9505	-.9490	1.0000

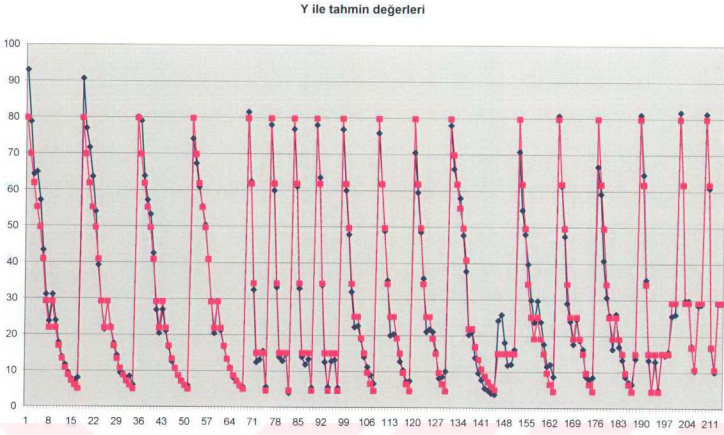
Çıktı 29'da görüldüğü üzere, $R^2=0,98004$ olup, süreç, 5 iterasyonda yakınsamıştır. Parametre tahmincileri için asimptotik standart hataları yardımıyla hesaplanan t istatistiklerinin değerleri, $t_A=8,6733$, $t_B=17,7722$ ve $t_C=13,2829$ şeklindedir. Parametre tahmincileri %5 düzeyinde anlamlıdır. Öte yandan katsayılar arasındaki korelasyon değerleri yüksek sayılabilir.

Model tahmininde farklı başlangıç noktaları kullanıldığında, parametre tahminleri değişmemekte, yalnızca iterasyon sayısı değişmektedir. Bu da, bu veri kümesi için saf eğriliğin düşük olduğu anlamına gelebilir. Yer kaplamaması açısından bu çıktılar sunulmayacaktır.

Çıktı 29'dan türetilen kalıntıların ve tahmin değerlerinin gözlem değerleri ile uyum grafiği sırasıyla aşağıdaki gibidir:



Şekil 9.17 Çıktı 29'dan elde edilen kalıntılar



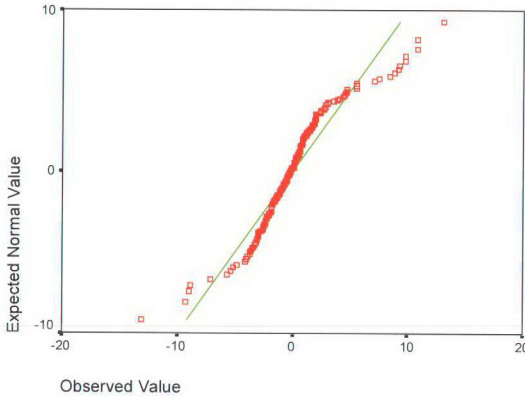
Şekil 9.18 Çıktı 29'dan elde edilen tahmin değerleri ile Y (tahmin değerleri pembe renkte gösterilmiştir)

9.3.2 Veri B'de Önerilen Model için Genel Hatlarıyla Kalıntı Analizi:

Normalliğin Araştırılması:

Çıktı 29'dan elde edilen kalıntılar için Q-Q grafiği şu şekildedir:

Normal Q-Q Plot of Residuals



Şekil 9.19 Çıktı 29'dan elde edilen kalıntılar için Q-Q grafiği

Görüldüğü gibi normallikten belirli bir sapma söz konusudur. Grafiğin yapısı, veride aşırı değerlerin olduğuna işaret sayılabilir. Jarque-Bera test istatistiği ise,

$$JB= 15.42202$$

bulunur ve bu $\chi^2_{2,0.05}=5,9915$ değerini aştığı için normal dağılımı ifade eden H_0 reddedilir.

Sapan Değerlerin İncelenmesi:

Standart kalıntılar oluşturulduğunda, %5 anlam düzeyine karşılık gelen yaklaşık (-2; 2) aralığı dışında toplam 16 değer sapan değer olarak belirlenmiştir. Bunlar, 1., 2., 4., 5., 18., 19., 20., 21., 36., 120., 146., 147., 152., 153., 176. ve 178. gözlemlerdir. Bu gözlemler Veri B'den dışlandığında, modelin tahmini Çıktı 30'daki gibi olmaktadır:

Çıktı 30:

Run stopped after 10 model evaluations and 5 derivative evaluations. Iterations have been stopped because the relative reduction between successive residual sums of squares is at most SSCON = 1.000E-08

Nonlinear Regression Summary Statistics

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	248038.94872	82679.64957
Residual	195	1095.36039	5.61723
Uncorrected Total	198	249134.30911	
(Corrected Total)	197	96927.66323	

$$R \text{ squared} = 1 - \text{Residual SS} / \text{Corrected SS} = .98870$$

Parameter	Estimate	Asymptotic Std. Error	Asymptotic 95 % Confidence Interval	
			Lower	Upper
A	.176103694	.015584234	.145368405	.206838984
B	.005809502	.000268510	.005279945	.006339058
C	.011291028	.000598629	.010110410	.012471646

Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	A	B	C
A	1.0000	.8354	-.9492
B	.8354	1.0000	-.9466
C	-.9492	-.9466	1.0000

Sonuçlara bakıldığında, R^2 'de, parametrelerin anlamlılığında artış gözükmemektedir. Parametre tahminçileri arasındaki korelasyonlarda azalma söz konusudur.

Otokorelasyonun Araştırılması:

Kalıntılar için birinci mertebeli otokorelasyon katsayısı 0.490358, ikinci mertebeli otokorelasyon ise, 0.287603 bulunmaktadır. Bu değerler, otokorelasyonun varlığını düşündürmemektedir.

Değişen Varyansın Araştırılması:

W testi için kullanılacak yardımcı regresyon modeli,

$$e_i^2 = A + BX + CX^2 + v_i$$

biçimindedir. Buradan, test istatistiği,

$$nR^2=25,038$$

bulunur. Bu, $\chi^2_{2,0.05}=5.9914764$ tablo değerinden büyük olduğu için W testine göre, değişen varyansın varolduğu söylenebilir. BPG testi için kullanılacak yardımcı model

$$p_i = A + BX + v_i, \quad p_i = e_i^2 / \tilde{\sigma}^2$$

şeklindedir. Test istatistiği ise,

$$0=39.488$$

şeklindedir. Tablo değeri, $\chi^2_{1,0.05} = 3.841455$ 'dir. Bu durumda, yine sabit varyansı ifade eden H_0 hipotezi reddedilir. Endrenyi-Kwong'un istatistiği ise,

$$S_1=1410,99$$

$$S_2=205,914$$

$$S_1/S_2=6,8523$$

şeklinde. Burada $k, n=214$ gözlem olduğu için $(214+3)/4 \approx 54$ olarak alınır. $F_{54, 54; 0,05} = 1,57$ olduğundan sabit varyans hipotezi rahatlıkla reddedilir. Görüldüğü gibi, uygulanan üç test de aynı sonucu vermiştir. Bu durumda, doğrusal olmayan AEKK yöntemine başvurulmalıdır.

9.3.3 Veri B'de Önerilen Model için Ağırlıkların Belirlenmesi ve Doğrusal Olmayan AEKK Uygulaması:

Ağırlıkların belirlenmesi için kalıntı kareleri bağımlı değişken olmak üzere birçok model denenmiştir. Bunlardan açıklayıcılığı en yüksek olan

$$e_i^2 = A + e^{B\hat{Y}} + \omega_i$$

modeli seçilmiştir. Buradan elde edilen tahmin değerlerinin çarpmaya göre tersleri, ağırlık olarak kullanılacaktır. Bu şekilde bulunan ağırlıkların tamamı Ek 10'da verilmiştir.

SPSS 11.5'ta, Nonlinear Regression menüsünde user-defined loss function seçeneği yardımıyla yapılan uygulamada Çıktı 31'deki sonuç elde edilir:

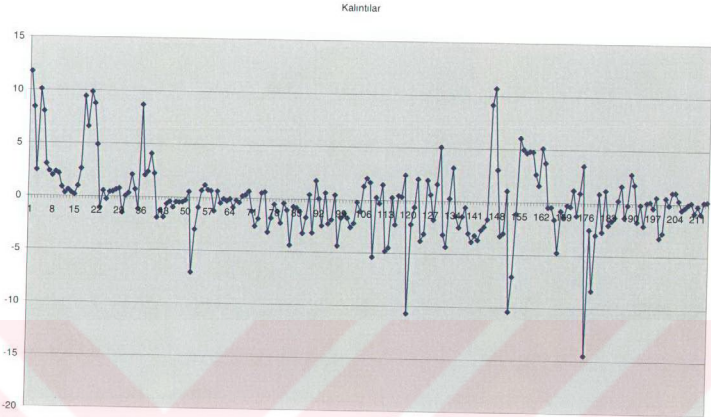
Çıktı 31:

Iteration	Loss funct	A	B	C
0.1	339.9805492	.150000000	.008000000	.010000000
1.1	279.4735756	.150039839	.007228850	.010605060
2.1	279.3161067	.150039850	.007219809	.010597495
3.1	278.6042904	.154494228	.007297341	.010422305
4.1	212.6617576	.162789017	.005271725	.011804331
5.1	209.9993756	.161146235	.005523078	.011818554
6.1	209.8492966	.159616494	.005428394	.011917603
7.1	209.8365442	.158409720	.005393413	.011977370
8.1	209.8344895	.157749367	.005380352	.012006889
9.1	209.8344349	.157685378	.005380084	.012009237
10.1	209.8344343	.157686565	.005380259	.012009099
11.1	209.8344343	.157686950	.005380272	.012009078
12.1	209.8344343	.157686952	.005380272	.012009078
13.1	209.8344343	.157686952	.005380272	.012009078
14.1	209.8344343	.157686952	.005380272	.012009078

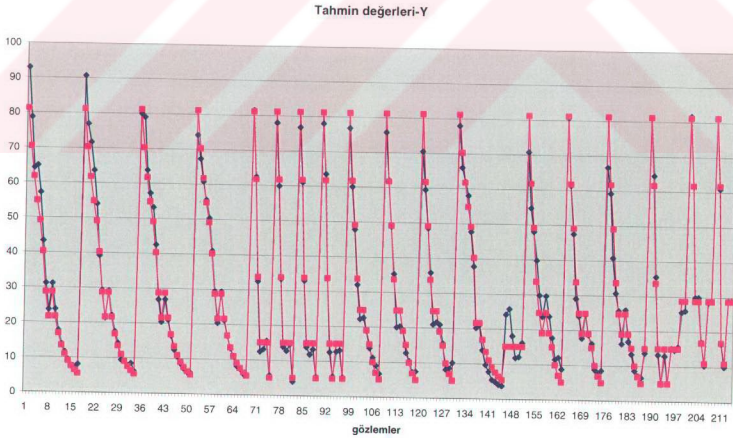
Run stopped after 14 major iterations.
Optimal solution found.

Başlangıç noktası olarak orijinal kaynakta verilen (0,15; 0,08; 0,01) noktası alınmıştır. Çıktıda model uyumuyla ilgili hiçbir sonuç sunulmamıştır. Parametreler için en son tahmin noktası (0,158; 0,0054; 0,012) şeklindedir. (0,15; 0,08; 0,01) etrafında başka başlangıç noktaları

denendiğinde parametre tahminleri değişmemekte, iterasyon sayısı değişmektedir. Çıktı 31'de bulunan modelin kalıntı ve tahmin değerlerinin Y ile uyumunun grafiği aşağıdaki şekildedir:



Şekil 9.20 Çıktı 31'den elde edilen kalıntılar



Şekil 9.21 Çıktı 31'den elde edilen tahmin değerleri ve Y (tahmin değerleri pembe renkte gösterilmiştir)

Grafikler değişen varyans durumunun devam ettiği izlemine vermektedir. Bunu anlamak için yapılan W test istatistiğinin değeri şöyledir:

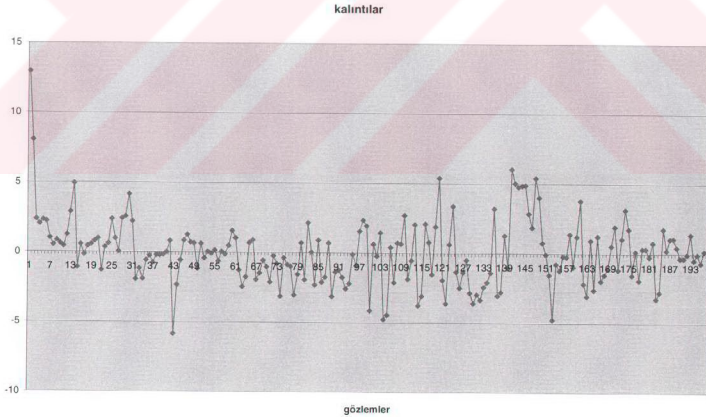
$$nR^2=28,034$$

Bu değer, esas modelin kalıntıları için hesaplanan değerden daha büyüktür. BPG test istatistiği ise,

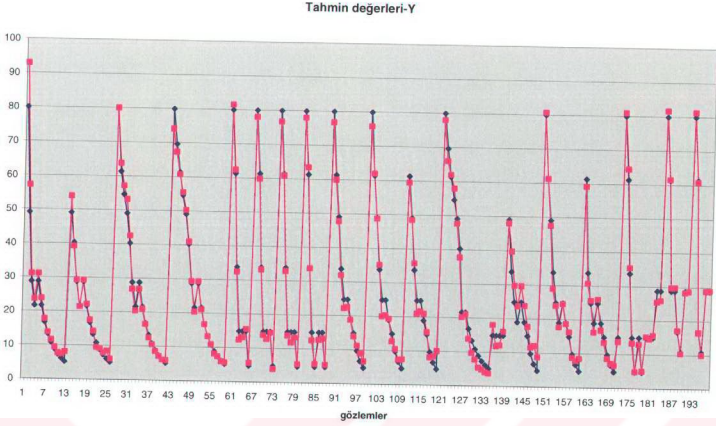
$$\theta=46,247$$

şeklinde. Bu da önceki hesaplanan test istatistiği değerinden büyüktür. Görülmektedir ki, oluşturulan bu tartılarla uygulanan doğrusal olmayan AEKK, işe yaramamaktadır.

Şekil 9.21 tekrar incelenirse, sabit varyans görünümünü bozan aşırı değerlerin büyük çoğunluğunun, kalıntı analizi sırasında belirlenen sapan değerler olduğu görülür. Bu değerler, sapan değerlere ek olarak 52., 130., 155. ve 162. gözlemlere karşılık gelen değerlerdir. Bölüm 9.2.2.2 de, Model I için, Çıktı 21'in kalıntılarında olduğu gibi, burada da bu değerler atılırsa, sabit varyans durumunun sağlanacağı düşünülebilir. Sapan değerlerin dışlandığı 198 gözlemden oluşan Veri B için model, Çıktı 30'daki gibi tahmin ediliyordu. Çıktı 30'dan türetilen kalıntı grafiği ve tahmin değerlerinin uyum grafiği şu şekildedir:



Şekil 9.22 Çıktı 30'dan elde edilen kalıntılar



Şekil 9.23 Çıktı 30'dan elde edilen tahmin değerleri ile Y (tahmin değerleri pembe renkte gösterilmiştir)

Grafiklerden değişen varyans durumunun azaldığı görülmektedir. Bunu daha iyi anlamak için test istatistiklerini incelemek gerekir. W test istatistiği,

$$nR^2=8,118$$

değerine inmiştir ve bu $\chi^2_{2,0,05}=5.9914764$ tablo değerinden büyük olduğu için W testine göre, azalmasına karşın yine değişen varyansın var olduğu söylenir. BPG testi için ise test istatistiği

$$\theta=5,5321$$

olup, $\chi^2_{1,0,05}=3.841455$ tablo değerinden yüksektir. Yine değişen varyansın olduğu kabul edilir fakat, bu değer, başlangıçtaki 39.488 değerinden oldukça düşüktür. Endrenyi-Kwong istatistiği ise

$$S_1=461,39$$

$$S_2=182,23$$

$$S_1/S_2=2,532$$

bulunur ve $F_{50, 50, 0,05} = 1,599$ olduğu için sabit varyans hipotezi reddedilir. Görüldüğü gibi, test istatistiğinin değeri tablo değerine görece daha yakındır.

Sonuç olarak, kullanılan bu testler temel alındığında, değişen varyans düzeltilememiş fakat önemli ölçüde azaltılmıştır.

9.4 Uygulamalardan Ulaşılan Sonuçlar:

Bu bölümde, uygulama amacıyla iki veri kümesi kullanılmıştır. Bu veri kümelerinden biri iki, diğeri tek bağımsız değişkene sahiptir. İki bağımsız değişkenli veri kümesi Veri A, tek bağımsız değişkenli veri kümesi ise Veri B olarak adlandırılmıştır.

Veri A için yapılan uygulamada karşılaşılan noktalar şu şekilde sıralanabilir:

- 1) Öncelikle, kaynakta kullanılan model ve başlangıç noktası alınmış, sonra değişik başlangıç noktaları denenmiş ve uygun başlangıç değerlerinin kaynakta önerilen nokta etrafında olduğu görülmüştür.
- 2) Tahmin edilen modelde bir parametrenin (B), %5 anlam düzeyinde anlamlı olmadığı ve parametre tahmincileri arasındaki korelasyonun yüksek olduğu görülmüştür.
- 3) Bu amaçla, farklı modeller denenmiş ve çıkan sonuçlara göre birçok deneme yapılmıştır. Bu denemeler sırasında açıklayıcılığı yüksek, parametrelerinde doğrusal ve standardize değişkenlerle oluşturulmuş başka bir model daha saptanmıştır. Bu modelin tüm parametreleri, %5 düzeyinde anlamlı ve tahmincileri arasındaki korelasyon düşüktür. Bu modellerin ilki Model 1 ve standardize değişkenlere sahip olan ikincisi ise, Model 13 olarak adlandırılmıştır.
- 4) Her iki model için ayrıntıya girmeden, genel yönleriyle kalıntı analizi yapılmıştır.

Buna göre, Model 1'den türetilen kalıntıların tam olarak normal dağılmadığı, sapan değerlerin bulunduğu ve bunların dışlanmasıyla model uyumunun arttığı, görsel anlamda otokorelasyonun bulunmadığı ve uygulanan testlere göre değişen varyansın bulunduğu görülmüştür.

Model 13'ten türetilen kalıntıların ise normal dağıldığı, sapan değerlerin bulunduğu ve bunların dışlanmasıyla model uyumunun arttığı, otokorelasyonsuz olduğu ve uygulanan testlere göre değişen varyansın bulunduğu görülmüştür.

5) Saptanan değişen varyans durumunu düzeltmek amacıyla Model 1 için doğrusal olmayan AEKK ve Model 13 için AEKK yöntemi uygulanmış ve bunun için önce kullanılacak ağırlıklar belirlenmeye çalışılmıştır.

Buna göre, Model 1 için, önce, kalıntı karelerinin bağımlı değişken olduğu yardımcı regresyon modelinin tahmin değerleri ile ağırlıklar belirlenmiş, fakat çözüm vermediği için, Matlab 6,5'ta bir program yazılmış ve çözüm aranmıştır. Bu durumda da birden çok ve gerçekçi olmayan çözümler bulunmuştur. Sorunu aşmak için değişik ve öznel bir ağırlıklandırma yöntemi uygulanmış ve bu ağırlıklarla deneme yapılmıştır. SPSS yine bir çözüm vermemiş ve kullanılan Matlab programı da doğrusal modele indirgenen parametre tahmin değerleri sunmuştur. Doğrusal olmayan AEKK yöntemiyle modelin tahmini sağlıklı biçimde gerçekleşmeyince, değişen varyans sorunu aşılamamıştır. Bu durumda, bağımlı değişken için karekök alma işlemi denenmiş ve bu şekilde tahmin edilen modelin kalıntıları, birkaç nokta dışında grafiksel olarak düzelme göstermiştir. Bu noktaların çoğunluğunun, kalıntı analizi sırasında saptanan sapan değerler olmasından dolayı, sapan değerlerin dışlandığı Veri A için Model 1 tahmin edilmiştir. Bu tahminden elde edilen kalıntılar grafiksel olarak sabit varyans izlenimi vermekle birlikte uygulanan testler değişen varyans sonucu vermiş, fakat, test istatistikleri, tablo değerlerine önemli ölçüde yaklaşmıştır.

Model 13 için ise ağırlıkların belirlenmesinde, yine elde edilen kalıntı karelerinin bağımlı değişken olduğu bir yardımcı regresyon fonksiyonunun tahmin değerleri kullanılmıştır. Modelin parametrelerinde doğrusal olmasından dolayı, bilinen AEKK yöntemi kullanılmıştır. Sonucun tatmin edici olmaktan uzak olduğu ve bazı ağırlıkların negatif olmalarından kaynaklanan veri kaybından dolayı, ağırlıkların öznel olarak belirlenmesi yoluna gidilmiştir. Yapılan bir çok deneme sonucunda grafiksel olarak tatmin edici bir sonuca ulaşılmıştır, fakat, uygulanan testler değişen varyans sonucunu vermekle birlikte, BPG test istatistiğindeki azalma dikkat çekicidir.

Veri B için yapılan uygulamada karşılaşılan noktalar ise şu şekildedir:

1) Veri B için öncelikle, temin edildiği kaynaktaki model ve başlangıç değerleri kullanılmıştır. Sonra birçok değişik başlangıç noktası ve model denenmiş ve en uygun olanı kaynaktaki verilen olduğu görülmüştür.

2) Model istatistiklerinin istatistiksel olarak anlamlı olduğu bulunmuştur.

3) Yapılan kalıntı analizi sonucunda, kalıntıların tam olarak normal dağılmadığı, sapan değerlerin var olduğu ve dışlandıklarında model uyumunun arttığı, yapılan önsel inceleme sonucunda otokorelasyonun olmadığı ve değişen varyans sorununun var olduğu görülmüştür.

4) Ağırlıkların belirlenmesinde, kalıntı karelerinin bağımlı değişken olduğu birçok model denenmiş ve uyumu en yüksek olan modelin tahmin değerleri kullanılmıştır. Yapılan birçok deneme sonunda istenen sonuca ulaşamamış ve kalıntı grafiğinin incelenmesi sonucunda sapan değerlerin dışlanması gerektiğine karar verilmiştir. Sapan değerlerin dışlandığı modelden elde edilen kalıntılar incelendiğinde ise, sıfır hipotezinin reddedilmesine karşın, test istatistiklerinin azaldığı ve tablo değerlerine çok yaklaştığı görülmüştür.

Sonuç olarak şunlar belirtilebilir: İki uygulamada da ilk önce kaynakta kullanılan model denenmiştir. Daha iyi uyuma sahip başka model bulunamamıştır. Doğrusal modellerin aksine, eldeki parametre ve değişkenlerle parametrelerinde doğrusal olmayan birçok model oluşturulabilir. Bundan dolayı, doğrusal olmayan regresyon ile ilgili uygulamalarda, model çoğunlukla ilgili teori tarafından önceden belirlidir. Hangi değişkenlerin birbirlerine ne şekilde ilişkili oldukları bilimsel bir yasaya dayandırılır. Model 1'in Arrhenius yasasından türetilmesi buna örnek gösterilebilir. Bir başka deyişle, doğrusal olmayan regresyon analizinde daha çok, ampirik değil, mekanistik modeller kullanılır. Bunun doğal sonucu olarak R^2 'nin doğrusal regresyon modellerine göre daha yüksek çıkması beklenir.

Yakınsama konusunda Veri A'daki uygulamalarda, Veri B'dekinden daha çok sorunla karşılaşmıştır. Aynı durum, Model 1 ve Model 13 için de geçerlidir. Model 1 daha zor yakınsamış, hatta tatmin edici bir çözüm vermemiştir. Bunun nedeni, Veri B'de doğrusal yaklaşımın daha iyi olması ve Veri A'nın saf eğriliğinin Veri B'ye göre daha yüksek olmasıyla açıklanabilir. Model 1 ve Model 13 arasındaki yakınsama güçlüğü farklılığı da parametrisasyona bağlı eğriliğe dayandırılabilir.

Bilindiği gibi, doğrusal olmayan regresyon modelinden yapılan çıkarsamalar, doğrusallığa yaklaşımın iyi olduğu durumda geçerlidir. Buna göre, örneğin Model 1'deki B parametresinin %5 düzeyinde anlamsız olması gibi sonuçlar, büyük örneklem yaklaşımının uygun olduğunda geçerli olmaktadır. Bölüm 4.3'te belirtilen maddelere dayanarak büyük örneklem yaklaşımının bu uygulamada geçerli olduğu fazla söylenemez. Bu şu şekilde gösterilebilir. Bilindiği gibi, eğer doğrusal olmayan regresyon parametreleri yaklaşık normal dağılıyorsa, doğrusal olmayan tahmin yöntemi ile hesaplanan standart hatalar, yinelemeli örneklem (bootstrap sampling) ile tahmin edilen standart hatalara yakın olmalıdır. Bu standart hatalar

arasındaki sapma, büyük örneklem yaklaşımının geçerliliğinin göstergesi olarak görülebilir. Veri A ile ilgili olan Model 1 ve Model 13'e karşılık gelen Çıktı 1 ve Çıktı 13 ve Veri B için kullanılan modelin belirlendiği Çıktı 29, bootstrap standart hataları verecek şekilde yeniden elde edilmeye çalışılmıştır. Model 1 için deneme yapıldığında SPSS uzun süre çalışmış fakat hiçbir sonuç vermemiştir. Çıktı 13 için asimptotik tahminler ile bootstrap tahminleri farklı çıkmıştır. Çıktı 13'te verilen asimptotik tahminlere ek olarak bootstrap tahminleri şu şekildedir:

Çıktı 32:

Parameter	Estimate	Asymptotic Std. Error	Asymptotic 95 % Confidence Interval	
			Lower	Upper
B	-.464993127	.045718474	-.555475661	-.374510594
C	-.586406510	.045718485	-.676889065	-.495923954
D	-.424315987	.045898118	-.515154059	-.333477916

Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	B	C	D
B	1.0000	.0000	.0000
C	.0000	1.0000	.0000
D	.0000	.0000	1.0000

Bootstrap statistics based on 60 samples

Parameter	Estimate	Std. Error	95% Conf. Lower	Bounds Upper	95% Trimmed Lower	Range Upper
B	-.4649931	.0673581	-.5997764	-.3302098	-.5729784	-
C	-.5864065	.0500742	-.6866048	-.4862082	-.6929411	-
D	-.4243160	.0610901	-.5465570	-.3020750	-.5651611	-

Bootstrap Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	B	C	D
B	1.0000	.1909	.2687
C	.1909	1.0000	.7890
D	.2687	.7890	1.0000

Bu sonuç, Veri A'daki saf eğriliğin yanı sıra, Model 1'den kaynaklanan parametrisasyona bağlı eğriliğin de yüksek olduğunu gösteren bir bulgu olarak yorumlanabilir. Çıktı 29'da ise, her iki tür standart hata birbirinin aynı bulunmuştur.

Uygulamada, değişen varyansı test etmek için W ve BPG testleri ve fikir vermesi açısından Endrenyi-Kwong yaklaşık sınaması kullanılmıştır. Ulaşılan son modellerde test istatistiklerinin değerleri iyice düşmüşse de kritik değerin altına inmemiştir. Kullanılan bu testlerin, doğrusal olmayan regresyonda da kullanılabilceği düşünölmüşse de, esasında bu testler, doğrusal modellere yöneliktir. Doğrusal olmayan regresyon modeli için sonuçları yaklaşık olarak görölmelidir. Aslında, W ve BPG testleri temelde aynı düşünönceye dayanmakta ve kalıntı kareleri ile açıklayıcı değişkenler arasında kurulan regresyonun anlamlılığının sınanmasından ibarettirler. Ayrıca bu testler asimptotik testler olup, büyük örnekleme için geçerlidir.



10. SONUÇ

Doğrusal olmayan regresyon analizinde, klasik regresyon analizi varsayımlarının geçerliliğinin araştırılması oldukça zor ve karmaşık bir süreçtir. Bölüm 9'da görüldüğü gibi, herşeyden önce, modelin tahmini başlı başına bir sorun olarak ortaya çıkmaktadır. Bilindiği gibi, değişen varyans ya da otokorelasyon gibi varsayımlardan sapmalar, hata payları doğrudan gözlemlenemediği için kalıntılardan yola çıkılarak araştırılmaktadır. Eğer ÖRF'nin tahmini etkin biçimde gerçekleştirilememişse, elde edilen kalıntılar yanıltıcı olacak ve yanlış tanı konulmasına neden olabilecektir. Bu doğrultuda başvurulmuş düzeltici yöntemler de işe yaramayacaktır. Buna göre, doğrusal olmayan regresyon analizinde, ileri araştırmalar için, modelin tahmini çok önemlidir. Öte yandan, doğrusal olmayan regresyon analizinde, tüm çıkarsamalar, büyük örneklem yaklaşımına dayanır. Modelin doğrusallaştırılmış biçiminin modeli temsil edebileceği varsayımına bağlıdır. Buna karşın, modelin beklenen değer ifadesinin açılımındaki doğrusal olmayan terimler, önemli sayılabilecek kadar büyükse, bir başka deyişle yüksek eğrilik ölçütleri söz konusu ise, çıkarsamaların ve bulguların gücü de azalacaktır.

Bu saptamalar ışığında, uygulamalar değerlendirilirse, Model 1 için sorunların tahmin sürecinden başladığı söylenebilir. Zamanı temsil eden parametre, %5 anlam düzeyinde anlamlı çıkmamıştır. Bunun yanında, sıcaklığı ve zamanı temsil eden parametrelerin tahminçileri arasındaki korelasyon değeri de yüksek boyuttadır. Bu sorunları gidermek amacıyla başlangıç değerlerinin değiştirilmesi, modelin yeniden parametrisasyonu ve değişken dönüşümü yöntemleri kullanılarak birçok deneme gerçekleştirilmiştir. Bu denemeler sırasında standardize değişkenlere dayanan ve parametrelerinde doğrusal, uyum gücü yüksek başka bir model daha bulunmuştur ve Model 13 olarak adlandırılmıştır. Model 13'te tüm parametreler anlamlı, parametre tahminçileri arasında korelasyon düşük bulunmuştur. Her iki modelin kalıntıları, değişen varyans yönünden incelenmiş ve uygulanan testler sonucunda değişen varyans durumunun mevcut olduğuna karar verilmiştir.

Değişen varyansın bulunduğu belirlendikten sonra, her iki model doğrusal olmayan AEKK yöntemi kullanılarak yeniden tahmin edilmiştir. Model 1, değişik ağırlıkların kullanılmasına karşın bir çözüme yakınsamamıştır. Bunun üzerine, Matlab 6,5'ta bir kod hazırlanmıştır. Bir dizi deneme yapılmasına karşın yine bir çözüm bulunamamış ve bağımlı değişken için dönüşüm uygulanmıştır. Dönüştürülmüş model, birkaç değer atılması koşuluyla olumlu

görülebilecek bir sonuca ulaşmıştır. Model 13 için ise, bir dizi farklı ağırlıklandırma kullanılarak denemeler yapılmış ve grafiksel olarak tatmin edici bir sonuca ulaşılmıştır.

Elde edilen her iki model için değişen varyans testleri tekrarlandığında test istatistiklerinin önceki değerlerine göre kritik değerlere daha yakın olduğu ama kritik değer in altına inmediği gözlenmiştir.

Veri B için önerilen modelin tahmin sürecinde, Veri A'daki kadar zorlukla karşılaşmamıştır. Model tahmin edildikten sonra, kalıntılar, değişen varyans yönünden incelenmiş ve değişen varyansın var olduğuna karar verilmiştir. Aynı şekilde bu model için de doğrusal olmayan AEKK yöntemine başvurulmuş ve yapılan birçok deneme sonucunda, sapan değerlerin dışlanması gerektiğine karar verilmiştir. Değişen varyans testleri tekrar edildiğinde, test istatistik değerlerinin azaldığı ve tablo değerine yaklaştığı görülmüştür.

Konu çok geniş ve araştırmaya açıktır. Bu açıdan başka çalışmaların konusu olabilir. Bu yüzden, uygulamalar belli bir noktada sonlandırılmıştır.

Sonuç olarak, Veri A ve Veri B için yapılan uygulamalardan, değişen varyans durumunun ortadan kaldırılamadığı, fakat düzeltildiği söylenebilir. Bölüm 9.4'te değinilen sonuçlar ve yapılan açıklamalara ek olarak, doğrusal olmayan regresyon uygulamaları için, şu şekilde bir öneri sunulabilir: Doğrusal olmayan regresyon analizinde modelin tahmini süreci çok önemlidir. Model, etkin ve doğru biçimde tahmin edilmediğinde, bu, ileri incelemeler için sorun oluşturacaktır. Model, doğru tahmin edildikten sonra ise büyük örneklem yaklaşımının uygulanabilirliği, başta eğrilik ölçüleri olmak üzere diğer yöntemlerle araştırılmalıdır.

KAYNAKLAR

- Bates, D. M. ve Watts, D. G. (1988), *Nonlinear Regression Analysis and Its Applications*, John Wiley & Sons, New York.
- Draper, N. R. ve Smith, H. (1998), *Applied Regression Analysis*, Wiley & Sons, New York.
- Genceli, M. (2001), *Ekonometri ve İstatistik İlkeleri*, Filiz Yayınevi, İstanbul.
- Gujarati, D. N., Çevirenler: Şenesen, Ü. ve Şenesen, G. G. (2001), *Temel Ekonometri, Literatür Yayıncılık*, İstanbul.
- Güriş, S. ve Çağlayan, E. (2000), *Ekonometri Temel Kavramlar*, Der Yayınları, İstanbul.
- Griffiths, W. E., Hill, R. C. ve Judge, G. G. (1993), *Learning and Practicing Econometrics*, Wiley & Sons, New York.
- Montgomery, D. C., Peck, E. A. ve Vining, G. G. (2001), *Introduction to Linear Regression Analysis*, Wiley & Sons, New York.
- Myers, R. H., Montgomery, D. C., Peck, E. A. ve Vining, G. G. (2002), *Generalized Linear Models with Applications in Engineering and the Sciences*, Wiley & Sons, New York.
- Nelson, W. (1981), "Analysis of Performance-Degradation Data", *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 2, R-30, No. 2, pp. 149-155.
- Neter, J., Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J. ve Wasserman, W. (1996), *Applied Linear Models*, McGraw-Hill, Boston.
- Seber, G. A. F. ve Wild, C. J. (1989), *Nonlinear Regression*, Wiley & Sons, New York.

İNTERNET KAYNAKLARI

www.itl.nist.gov/div898/strd/nls/data/chwirut1.shtml

www.it.lut.fi/mat/EcmiNL/ecmi32/case5/node5.html

EKLER

- Ek 1 Veri A
Ek 2 Model 1 Kalıntıları için %5 ve %10 Anlamlılık Düzeyinde Sapan Değerler
Ek 3 $e_i^2 = A + BX_1 + CX_2 + D\hat{Y}_i + v_i$ Yardımcı Regresyonundan Elde Edilen Ağırlıklar
Ek 4 Çizelge 9.2'deki Model için Matlab Kodunda Kullanılan Ağırlıklar
Ek 5 Model 13 Kalıntıları için %5 ve %10 Anlamlılık Düzeyinde Sapan Değerler
Ek 6 $e_i^2 = A + BstX_1 + CstX_2 + DstX_1^2 + EstX_2^2 + FstX_1stX_2 + v_i$ Yardımcı Regresyonundan Elde Edilen Ağırlıklar
Ek 7 Model 13 için Belirlenen İkinci Ağırlıklar
Ek 8 Veri B
Ek 9 Veri B'den Tahmin Edilen Modelin %5 Anlam Düzeyinde Standart Kalıntıları
Ek 10 Veri B için Doğrusal Olmayan AEKK Uygulamasında Kullanılan Ağırlıklar

EKLER

Ek 1: Veri A

gözlemler	Y	x1	x2	gözlemler	Y	x1	x2
1	15	1	180	47	11	4	275
2	17	1	180	48	9.5	4	275
3	15.5	1	180	49	15	8	180
4	16.5	1	180	50	15	8	180
5	15.5	1	225	51	15.5	8	180
6	15	1	225	52	16	8	180
7	16	1	225	53	13	8	225
8	14.5	1	225	54	10.5	8	225
9	15	1	250	55	13.5	8	225
10	14.5	1	250	56	14	8	225
11	12.5	1	250	57	12.5	8	250
12	11	1	250	58	12	8	250
13	14	1	275	59	11.5	8	250
14	13	1	275	60	11.5	8	250
15	14	1	275	61	6.5	8	275
16	11.5	1	275	62	5.5	8	275
17	14	2	180	63	6	8	275
18	16	2	180	64	6	8	275
19	13	2	180	65	18.5	16	180
20	13.5	2	180	66	17	16	180
21	13	2	225	67	15.3	16	180
22	13.5	2	225	68	16	16	180
23	12.5	2	225	69	13	16	225
24	12.5	2	225	70	14	16	225
25	12.5	2	250	71	12.5	16	225
26	12	2	250	72	11	16	225
27	11.5	2	250	73	12	16	250
28	12	2	250	74	12	16	250
29	13	2	275	75	11.5	16	250
30	11.5	2	275	76	12	16	250
31	13	2	275	77	6	16	275
32	12.5	2	275	78	6	16	275
33	13.5	4	180	79	5	16	275
34	17.5	4	180	80	5.5	16	275
35	17.5	4	180	81	12.5	32	180
36	13.5	4	180	82	13	32	180
37	12.5	4	225	83	16	32	180
38	12.5	4	225	84	12	32	180
39	15	4	225	85	11	32	225
40	13	4	225	86	9.5	32	225
41	12	4	250	87	11	32	225
42	13	4	250	88	11	32	225
43	12	4	250	89	11	32	250
44	13.5	4	250	90	10	32	250
45	10	4	275	91	10.5	32	250
46	11.5	4	275	92	10.5	32	250

gözlemler	Y	x1	x2
93	2.7	32	275
94	2.7	32	275
95	2.5	32	275
96	2.4	32	275
97	13	48	180
98	13.5	48	180
99	16.5	48	180
100	13.6	48	180
101	11.5	48	225
102	10.5	48	225
103	13.5	48	225
104	12	48	225
105	7	48	250
106	6.9	48	250
107	8.8	48	250
108	7.9	48	250
109	1.2	48	275
110	1.5	48	275
111	1	48	275
112	1.5	48	275
113	13	64	180
114	12.5	64	180
115	16.5	64	180
116	16	64	180
117	11	64	225
118	11.5	64	225
119	10.5	64	225
120	10	64	225
121	7.27	64	250
122	7.5	64	250
123	6.7	64	250
124	7.6	64	250
125	1.5	64	275
126	1	64	275
127	1.2	64	275
128	1.2	64	275

Ek 2: Model I Kalıntıları için %5 ve %10 Anlamlılık Düzeyinde Sapan Değerler

gözlemler	stardardized residuals1	gözlemler	stardardized residuals1	
1	0.68847371	46	0.172118428	
2	1.376947421	47	-0.114745618	
3	0.860592138	48	-0.917964947	
4	1.204828993	49	0.68847371	
5	0.860592138	50	0.68847371	
6	0.68847371	51	0.860592138	
7	1.032710566	52	1.032710566	
8	0.516355283	53	-0.057372809	
9	0.74584652	54	-1.262201802	
10	0.516355283	55	0.172118428	
11	-0.286864046	56	0.401609664	
12	-1.032710566	57	0.114745618	
13	0.516355283	58	-0.114745618	
14	0.114745618	59	-0.401609664	
15	0.516355283	60	-0.401609664	
16	-0.573728092	61	-2.12279394	outlier?%5%10
17	0.286864046	62	-3.098131697	outlier?%5%10
18	1.032710566	63	-2.581776414	outlier?%5%10
19	-0.172118428	64	-2.581776414	outlier?%5%10
20	0.057372809	65	1.893302704	outlier?%10
21	-0.114745618	66	1.43432023	
22	0.114745618	67	0.803219329	
23	-0.344236855	68	1.032710566	
24	-0.344236855	69	0.057372809	
25	-0.229491237	70	0.516355283	
26	-0.516355283	71	-0.172118428	
27	-0.74584652	72	-0.860592138	
28	-0.516355283	73	0.344236855	
29	0.344236855	74	0.344236855	
30	-0.344236855	75	0.114745618	
31	0.344236855	76	0.344236855	
32	0.114745618	77	-0.573728092	
33	0.057372809	78	-0.573728092	
34	1.549065848	79	-1.606438658	
35	1.549065848	80	-1.090083375	
36	0.057372809	81	-0.344236855	
37	-0.344236855	82	-0.114745618	
38	-0.344236855	83	1.090083375	
39	0.74584652	84	-0.573728092	
40	-0.114745618	85	-0.631100901	
41	-0.344236855	86	-1.491693039	
42	0.114745618	87	-0.631100901	
43	-0.344236855	88	-0.631100901	
44	0.286864046	89	0.803219329	
45	-0.631100901	90	0.229491237	

91	0.516355283	
92	0.516355283	
93	-1.147456184	
94	-1.147456184	
95	-1.549065848	
96	-1.835929894	outlier?%10
97	-0.114745618	
98	0.114745618	
99	1.262201802	
100	0.172118428	
101	-0.172118428	
102	-0.68847371	
103	0.74584652	
104	0.057372809	
105	-0.860592138	
106	-0.917964947	
107	0.458982474	
108	-0.172118428	
109	-1.778557085	outlier?%10
110	-0.516355283	
111	-2.811267651	outlier?%5%10
112	-0.516355283	
113	-0.057372809	
114	-0.286864046	
115	1.262201802	
116	1.090083375	
117	-0.229491237	
118	0.057372809	
119	-0.458982474	
120	-0.74584652	
121	0.286864046	
122	0.516355283	
123	-0.172118428	
124	0.573728092	
125	3.499741361	outlier?%5%10
126	1.204828993	
127	2.237539559	outlier?%5%10
128	2.237539559	outlier?%5%10

Ek 3: $e_i^2 = A + BX_1 + CX_2 + D\hat{Y}_i + v_i$ Yardımcı Regresyonundan Elde Edilen Ağırlıklar

gözlemler	$w_i=1/e_i^2$	gözlemler	$w_i=1/e_i^2$	gözlemler	$w_i=1/e_i^2$
1	34.89	46	43.92	91	42.55
2	34.89	47	43.92	92	42.55
3	34.89	48	43.92	93	11.95
4	34.89	49	39.08	94	11.95
5	46.14	50	39.08	95	11.95
6	46.14	51	39.08	96	11.95
7	46.14	52	39.08	97	124.13
8	46.14	53	51.14	98	124.13
9	54.97	54	51.14	99	124.13
10	54.97	55	51.14	100	124.13
11	54.97	56	51.14	101	134.23
12	54.97	57	51.57	102	134.23
13	61.57	58	51.57	103	134.23
14	61.57	59	51.57	104	134.23
15	61.57	60	51.57	105	38.11
16	61.57	61	31.77	106	38.11
17	35.44	62	31.77	107	38.11
18	35.44	63	31.77	108	38.11
19	35.44	64	31.77	109	8.44
20	35.44	65	45.28	110	8.44
21	46.79	66	45.28	111	8.44
22	46.79	67	45.28	112	8.44
23	46.79	68	45.28	113	959.19
24	46.79	69	58.36	114	959.19
25	54.46	70	58.36	115	959.19
26	54.46	71	58.36	116	959.19
27	54.46	72	58.36	117	383.44
28	54.46	73	48.17	118	383.44
29	54.3	74	48.17	119	383.44
30	54.3	75	48.17	120	383.44
31	54.3	76	48.17	121	34.51
32	54.3	77	20.46	122	34.51
33	36.57	78	20.46	123	34.51
34	36.57	79	20.46	124	34.51
35	36.57	80	20.46	125	6.52
36	36.57	81	66.36	126	6.52
37	48.16	82	66.36	127	6.52
38	48.16	83	66.36	128	6.52
39	48.16	84	66.36		
40	48.16	85	81.35		
41	53.46	86	81.35		
42	53.46	87	81.35		
43	53.46	88	81.35		
44	53.46	89	42.55		
45	43.92	90	42.55		

Ek 4: Çizelge 9.2'deki Model için Matlab Kodunda Kullanılan Ağırlıklar

gözlemler	wi	gözlemler	wi	gözlemler	wi
1	1	46	0.25	91	0.125
2	0.5	47	0.33	92	0.125
3	1	48	0.33	93	0.111
4	0.5	49	0.33	94	0.111
5	0.25	50	0.33	95	0.111
6	0.25	51	0.5	96	0.111
7	0.2	52	0.5	97	0.125
8	0.5	53	0.5	98	0.143
9	0.166	54	0.2	99	0.166
10	0.2	55	0.33	100	0.143
11	1	56	0.25	101	0.143
12	0.25	57	0.2	102	0.143
13	0.166	58	0.25	103	0.111
14	0.25	59	0.33	104	0.143
15	0.166	60	0.33	105	0.143
16	1	61	0.143	106	0.143
17	0.25	62	0.111	107	0.111
18	1	63	0.125	108	0.125
19	0.166	64	0.125	109	0.1
20	0.25	65	0.33	110	0.111
21	1	66	0.5	111	0.1
22	1	67	0.33	112	0.1
23	0.5	68	0.33	113	0.125
24	0.33	69	0.25	114	0.111
25	1	70	0.166	115	0.166
26	1	71	0.25	116	0.143
27	1	72	0.5	117	0.125
28	1	73	0.166	118	0.111
29	0.2	74	0.166	119	0.125
30	0.33	75	0.166	120	0.125
31	0.2	76	0.143	121	0.1
32	0.2	77	0.166	122	0.1
33	0.2	78	0.166	123	0.111
34	0.33	79	0.143	124	0.1
35	0.33	80	0.143	125	0.166
36	0.2	81	0.143	126	0.111
37	1	82	0.143	127	0.125
38	1	83	0.25	128	0.125
39	0.2	84	0.125		
40	1	85	0.2		
41	0.5	86	0.5		
42	0.25	87	0.2		
43	0.5	88	0.2		
44	0.2	89	0.111		
45	0.5	90	0.125		

Ek 5: Model 13 Kalıntıları için %5 ve %10 Anlamlılık Düzeyinde Sapan Değerler

gözlemler	standardized residuals13	gözlemler	standardized residuals13
1	-0.116455468	46	0.32995716
2	0.232910936	47	0.213501692
3	-0.019409245	48	-0.232910936
4	0.155273958	49	-0.213501692
5	0.446412628	50	-0.213501692
6	0.349366404	51	-0.135864713
7	0.524049607	52	-0.038818489
8	0.232910936	53	0.135864713
9	0.62109583	54	-0.485231117
10	0.485231117	55	0.252320181
11	0.077636979	56	0.368775649
12	-0.310547915	57	0.485231117
13	0.659914319	58	0.349366404
14	0.427003383	59	0.232910936
15	0.659914319	60	0.232910936
16	0.077636979	61	-1.028689969
17	-0.32995716	62	-1.53333033
18	0.058227734	63	-1.261600905
19	-0.582277341	64	-1.261600905
20	-0.446412628	65	0.29113867
21	-0.058227734	66	0.019409245
22	0.058227734	67	-0.271729426
23	-0.155273958	68	-0.155273958
24	-0.155273958	69	0.407594138
25	0.135864713	70	0.640505075
26	-0.019409245	71	0.310547915
27	-0.135864713	72	-0.077636979
28	-0.019409245	73	0.815188277
29	0.504640362	74	0.815188277
30	0.155273958	75	0.698732809
31	0.504640362	76	0.815188277
32	0.427003383	77	-0.582277341
33	-0.485231117	78	-0.582277341
34	0.29113867	79	-1.106326947
35	0.29113867	80	-0.854006766
36	-0.485231117	81	-1.106326947
37	-0.077636979	82	-1.009280724
38	-0.077636979	83	-0.388184894
39	0.446412628	84	-1.24219166
40	0	85	0.446412628
41	0.116455468	86	0
42	0.349366404	87	0.446412628
43	0.116455468	88	0.446412628
44	0.465821873	89	1.513921086
45	-0.097046223	90	1.222782415

91	1.378056373	
92	1.378056373	
93	-1.591558065	
94	-1.591558065	
95	-1.805059756	outlier?%10
96	-1.921515224	outlier?%10
97	-1.24219166	
98	-1.125736192	
99	-0.524049607	
100	-1.086917703	
101	1.086917703	
102	0.815188277	
103	1.552739575	
104	1.203373171	
105	1.125736192	
106	1.067508458	
107	1.785650511	outlier?%10
108	1.475102596	
109	-2.639657278	outlier?%5%10
110	-1.940924469	outlier?%10
111	-3.163706884	outlier?%5%10
112	-1.940924469	outlier?%10
113	-1.475102596	
114	-1.57214882	
115	-0.756960543	
116	-0.854006766	
117	1.494511841	
118	1.610967309	
119	1.339237884	
120	1.203373171	
121	2.154426161	outlier?%5%10
122	2.251472384	outlier?%5%10
123	1.921515224	outlier?%10
124	2.309700118	outlier?%5%10
125	-0.582277341	
126	-1.805059756	outlier?%10
127	-1.261600905	
128	-1.261600905	

Ek 6: $e_i^2 = A + BstX_1 + CstX_2 + DstX_1^2 + EstX_2^2 + FstX_1stX_2 + v_i$ Yardımcı Regresyonundan Elde Edilen Ağırlıklar

gözlemler	wi	gözlemler	wi	gözlemler	wi
1	-77.45	46	6.18	91	2.19
2	-77.45	47	6.18	92	2.19
3	-77.45	48	6.18	93	1.49
4	-77.45	49	19.46	94	1.49
5	-12.16	50	19.46	95	1.49
6	-12.16	51	19.46	96	1.49
7	-12.16	52	19.46	97	3.41
8	-12.16	53	56.11	98	3.41
9	-40.3	54	56.11	99	3.41
10	-40.3	55	56.11	100	3.41
11	-40.3	56	56.11	101	2.16
12	-40.3	57	10.51	102	2.16
13	9.88	58	10.51	103	2.16
14	9.88	59	10.51	104	2.16
15	9.88	60	10.51	105	1.53
16	9.88	61	4.15	106	1.53
17	-300.82	62	4.15	107	1.53
18	-300.82	63	4.15	108	1.53
19	-300.82	64	4.15	109	1.09
20	-300.82	65	8.56	110	1.09
21	-14.8	66	8.56	111	1.09
22	-14.8	67	8.56	112	1.09
23	-14.8	68	8.56	113	3.03
24	-14.8	69	8.05	114	3.03
25	-137.4	70	8.05	115	3.03
26	-137.4	71	8.05	116	3.03
27	-137.4	72	8.05	117	1.72
28	-137.4	73	4.46	118	1.72
29	8.23	74	4.46	119	1.72
30	8.23	75	4.46	120	1.72
31	8.23	76	4.46	121	1.22
32	8.23	77	2.55	122	1.22
33	64.73	78	2.55	123	1.22
34	64.73	79	2.55	124	1.22
35	64.73	80	2.55	125	0.89
36	64.73	81	4.5	126	0.89
37	-25.93	82	4.5	127	0.89
38	-25.93	83	4.5	128	0.89
39	-25.93	84	4.5		
40	-25.93	85	3.21		
41	36.51	86	3.21		
42	36.51	87	3.21		
43	36.51	88	3.21		
44	36.51	89	2.19		
45	6.18	90	2.19		

Ek 7: Model 13 için Belirlenen İkinci Ağırlıklar

gözlemler	ikinci ağırlıklar	gözlemler	ikinci ağırlıklar	gözlemler	ikinci ağırlıklar
1	1	46	0.7	91	0.3
2	0.9	47	0.8	92	0.3
3	1	48	0.8	93	0.2
4	0.9	49	0.8	94	0.2
5	0.7	50	0.8	95	0.2
6	0.7	51	0.9	96	0.2
7	0.6	52	0.9	97	0.3
8	0.9	53	0.9	98	0.4
9	0.5	54	0.6	99	0.5
10	0.6	55	0.8	100	0.4
11	1	56	0.7	101	0.4
12	0.7	57	0.6	102	0.4
13	0.5	58	0.7	103	0.2
14	0.7	59	0.8	104	0.4
15	0.5	60	0.8	105	0.4
16	1	61	0.4	106	0.4
17	0.7	62	0.2	107	0.2
18	1	63	0.3	108	0.3
19	0.5	64	0.3	109	0.1
20	0.7	65	0.8	110	0.2
21	1	66	0.9	111	0.1
22	1	67	0.7	112	0.1
23	0.9	68	0.8	113	0.3
24	0.8	69	0.7	114	0.2
25	1	70	0.5	115	0.5
26	1	71	0.7	116	0.4
27	1	72	0.9	117	0.3
28	1	73	0.5	118	0.2
29	0.6	74	0.5	119	0.3
30	0.8	75	0.5	120	0.3
31	0.6	76	0.4	121	0.1
32	0.6	77	0.5	122	0.1
33	0.6	78	0.5	123	0.2
34	0.8	79	0.4	124	0.1
35	0.8	80	0.4	125	0.5
36	0.6	81	0.4	126	0.2
37	1	82	0.4	127	0.3
38	1	83	0.7	128	0.3
39	0.6	84	0.3		
40	1	85	0.6		
41	0.9	86	0.9		
42	0.7	87	0.6		
43	0.9	88	0.6		
44	0.6	89	0.2		
45	0.9	90	0.3		

Ek 8: Veri B

gözlemler	y	x	gözlemler	y	x
1	92.9	0.5	46	12.53	3.25
2	78.7	0.63	47	10.54	3.75
3	64.2	0.75	48	8.59	4.25
4	64.9	0.88	49	7.13	4.75
5	57.1	1	50	6.11	5.25
6	43.3	1.25	51	5.96	5.75
7	31.1	1.75	52	74.1	0.5
8	23.6	2.25	53	67.3	0.63
9	31.05	1.75	54	60.8	0.75
10	23.78	2.25	55	55.5	0.88
11	17.74	2.75	56	50.3	1
12	13.8	3.25	57	41	1.25
13	11.59	3.75	58	29.4	1.75
14	9.41	4.25	59	20.4	2.25
15	7.73	4.75	60	29.36	1.75
16	7.35	5.25	61	21.15	2.25
17	8.03	5.75	62	16.76	2.75
18	90.6	0.5	63	13.2	3.25
19	76.9	0.63	64	10.88	3.75
20	71.6	0.75	65	8.18	4.25
21	63.6	0.88	66	7.35	4.75
22	54	1	67	5.96	5.25
23	39.2	1.25	68	5.63	5.75
24	29.3	1.75	69	81.5	0.5
25	21.4	2.25	70	62.4	0.75
26	29.18	1.75	71	32.5	1.5
27	22.13	2.25	72	12.41	3
28	17.51	2.75	73	13.12	3
29	14.25	3.25	74	15.56	3
30	9.45	3.75	75	5.63	6
31	9.15	4.25	76	78	0.5
32	7.91	4.75	77	59.9	0.75
33	8.48	5.25	78	33.2	1.5
34	6.11	5.75	79	13.84	3
35	80	0.5	80	12.75	3
36	79	0.63	81	14.62	3
37	63.8	0.75	82	3.94	6
38	57.2	0.88	83	76.8	0.5
39	53.2	1	84	61	0.75
40	42.5	1.25	85	32.9	1.5
41	26.8	1.75	86	13.87	3
42	20.4	2.25	87	11.81	3
43	26.85	1.75	88	13.31	3
44	21	2.25	89	5.44	6
45	16.46	2.75	90	78	0.5

gözlemler	y	x	gözlemler	y	x
91	63.5	0.75	140	9.67	3.25
92	33.8	1.5	141	7.76	3.75
93	12.56	3	142	5.44	4.25
94	5.63	6	143	4.87	4.75
95	12.75	3	144	4.01	5.25
96	13.12	3	145	3.75	5.75
97	5.44	6	146	24.19	3
98	76.8	0.5	147	25.76	3
99	60	0.75	148	18.07	3
100	47.8	1	149	11.81	3
101	32	1.5	150	12.07	3
102	22.2	2	151	16.12	3
103	22.57	2	152	70.8	0.5
104	18.82	2.5	153	54.7	0.75
105	13.95	3	154	48	1
106	11.25	4	155	39.8	1.5
107	9	5	156	29.8	2
108	6.67	6	157	23.7	2.5
109	75.8	0.5	158	29.62	2
110	62	0.75	159	23.81	2.5
111	48.8	1	160	17.7	3
112	35.2	1.5	161	11.55	4
113	20	2	162	12.07	5
114	20.32	2	163	8.74	6
115	19.31	2.5	164	80.7	0.5
116	12.75	3	165	61.3	0.75
117	10.42	4	166	47.5	1
118	7.31	5	167	29	1.5
119	7.42	6	168	24	2
120	70.5	0.5	169	17.7	2.5
121	59.5	0.75	170	24.56	2
122	48.5	1	171	18.67	2.5
123	35.8	1.5	172	16.24	3
124	21	2	173	8.74	4
125	21.67	2	174	7.87	5
126	21	2.5	175	8.51	6
127	15.64	3	176	66.7	0.5
128	8.17	4	177	59.2	0.75
129	8.55	5	178	40.8	1
130	10.12	6	179	30.7	1.5
131	78	0.5	180	25.7	2
132	66	0.63	181	16.3	2.5
133	62	0.75	182	25.99	2
134	58	0.88	183	16.95	2.5
135	47.7	1	184	13.35	3
136	37.8	1.25	185	8.62	4
137	20.2	2.25	186	7.2	5
138	21.07	2.25	187	6.64	6
139	13.87	2.75	188	13.69	3

gözlemler	y	x
189	81	0.5
190	64.5	0.75
191	35.5	1.5
192	13.31	3
193	4.87	6
194	12.94	3
195	5.06	6
196	15.19	3
197	14.62	3
198	15.64	3
199	25.5	1.75
200	25.95	1.75
201	81.7	0.5
202	61.6	0.75
203	29.8	1.75
204	29.81	1.75
205	17.17	2.75
206	10.39	3.75
207	28.4	1.75
208	28.69	1.75
209	81.3	0.5
210	60.9	0.75
211	16.65	2.75
212	10.05	3.75
213	28.9	1.75
214	28.95	1.75

Ek 9: Veri B'den Tahmin Edilen Modelin %5 Anlam Düzeyinde Standart Kalıntıları

gözlemler	st-resid29		gözlemler	st-resid29
1	3.9027918		46	-0.267814
2	2.6291875	outlier?%5	47	-0.0794641
3	0.6978532		48	-0.070495
4	2.8892898	outlier?%5	49	-0.0465776
5	2.2166114	outlier?%5	50	0.0162058
6	0.7098119		51	0.2613596
7	0.5543484		52	-1.7178096
8	0.5035238		53	-0.7790496
9	0.5394		54	-0.3186386
10	0.5543484		55	0.0789891
11	0.2344525		56	0.1836279
12	0.1148652		57	0.0221851
13	0.2344525		58	0.0461026
14	0.1776486		59	-0.4531743
15	0.1328033		60	0.0341438
16	0.3839366		61	-0.2289481
17	0.877234		62	-0.0555466
18	3.215165	outlier?%5	63	-0.0645157
19	2.0910448	outlier?%5	64	0.0221851
20	2.9102175	outlier?%5	65	-0.193072
21	2.5006311	outlier?%5	66	0.0221851
22	1.2898101		67	-0.0286395
23	-0.5159576		68	0.1597105
24	0.0162058		69	0.4945548
25	-0.1542061		70	0.1597105
26	-0.0226601		71	-0.5518338
27	0.061051		72	-0.7880186
28	0.1686795		73	-0.5757512
29	0.2494009		74	0.1537311
30	-0.4053394		75	0.2852771
31	0.0999168		76	-0.5518338
32	0.1896073		77	-0.5877099
33	0.7217706		78	-0.342556
34	0.3062049		79	-0.3604941
35	0.0461026		80	-0.6863694
36	2.7188779	outlier?%5	81	-0.127299
37	0.5782659		82	-0.2199791
38	0.5872349		83	-0.9105955
39	1.0506356		84	-0.258845
40	0.4706374		85	-0.4322465
41	-0.7312146		86	-0.3515251
42	-0.4531743		87	-0.9673995
43	-0.7162662		88	-0.5189473
44	-0.2737934		89	0.2284731
45	-0.1452371		90	-0.267814

gözlemler	st-resid29	gözlemler	st-resid29
91	0.4885754	136	-0.934513
92	-0.1631751	137	-0.5129679
93	-0.7431734	138	-0.2528656
94	0.2852771	139	-0.9225543
95	-0.6863694	140	-1.1198733
96	-0.5757512	141	-0.9105955
97	0.2284731	142	-1.009255
98	-0.9105955	143	-0.7192559
99	-0.5578131	144	-0.6146171
100	-0.5637925	145	-0.39936
101	-0.7013178	146	2.7338263 outlier?%5
102	-0.8956471	147	3.2032063 outlier?%5
103	-0.7850289	148	0.9041412
104	-0.1183299	149	-0.9673995
105	-0.3276076	150	-0.8896678
106	0.4497096	151	0.3211533
107	0.7068222	152	-2.7044045 outlier?%5
108	0.596204	153	-2.1423444 outlier?%5
109	-1.2095637	154	-0.5039988
110	0.0401232	155	1.6306338
111	-0.2648243	156	1.3765109
112	0.2553803	157	1.3406347
113	-1.5533771	158	1.3226966
114	-1.4577073	159	1.3735212
115	0.0281645	160	0.793523
116	-0.6863694	161	0.5394
117	0.201566	162	1.6246544
118	0.201566	163	1.2150681
119	0.8204301	164	0.2553803
120	-2.7940949 outlier?%5	165	-0.1691545
121	-0.7072972	166	-0.6534829
122	-0.3545148	167	-1.5982223
123	0.4347612	168	-0.3575044
124	-1.2544089	169	-0.4531743
125	-1.0541003	170	-0.1900823
126	0.5334207	171	-0.1631751
127	0.1776486	172	0.3570295
128	-0.4711123	173	-0.3007005
129	0.5722865	174	0.3689882
130	1.6276441	175	1.1463054
131	-0.5518338	176	-3.9301739 outlier?%5
132	-1.1677082	177	-0.7969876
133	0.0401232	178	-2.6565696 outlier?%5
134	0.8264095	179	-1.0899764
135	-0.5936893	180	0.1507414

gözlemler	st-resid29
181	-0.8717297
182	0.2374422
183	-0.6774004
184	-0.5069885
185	-0.3365767
186	0.1686795
187	0.5872349
188	-0.4053394
189	0.3450707
190	0.7875436
191	0.3450707
192	-0.5189473
193	0.0580613
194	-0.6295655
195	0.1148652
196	0.0431129
197	-0.127299
198	0.1776486
199	-1.1198733
200	-0.9853376
201	0.5543484
202	-0.0794641
203	0.1656898
204	0.1686795
205	0.0640407
206	-0.1243093
207	-0.2528656
208	-0.1661648
209	0.4347612
210	-0.2887418
211	-0.0914228
212	-0.2259585
213	-0.1033815
214	-0.0884331

Ek 10: Veri B için Doğrusal Olmayan AEKK Uygulamasında Kullanılan Ağırlıklar

gözlemler	ağırlıklar	gözlemler	ağırlıklar	gözlemler	ağırlıklar	gözlemler	ağırlıklar
1	0.02	46	0.19	91	0.05	136	0.1
2	0.04	47	0.2	92	0.12	137	0.16
3	0.05	48	0.2	93	0.18	138	0.16
4	0.06	49	0.21	94	0.21	139	0.18
5	0.08	50	0.21	95	0.18	140	0.19
6	0.1	51	0.21	96	0.18	141	0.2
7	0.14	52	0.02	97	0.21	142	0.2
8	0.16	53	0.04	98	0.02	143	0.21
9	0.14	54	0.05	99	0.05	144	0.21
10	0.16	55	0.06	100	0.08	145	0.21
11	0.18	56	0.08	101	0.12	146	0.18
12	0.19	57	0.1	102	0.15	147	0.18
13	0.2	58	0.14	103	0.15	148	0.18
14	0.2	59	0.16	104	0.17	149	0.18
15	0.21	60	0.14	105	0.18	150	0.18
16	0.21	61	0.16	106	0.2	151	0.18
17	0.21	62	0.18	107	0.21	152	0.02
18	0.02	63	0.19	108	0.21	153	0.05
19	0.04	64	0.2	109	0.02	154	0.08
20	0.05	65	0.2	110	0.05	155	0.12
21	0.06	66	0.21	111	0.08	156	0.15
22	0.08	67	0.21	112	0.12	157	0.17
23	0.1	68	0.21	113	0.15	158	0.15
24	0.14	69	0.02	114	0.15	159	0.17
25	0.16	70	0.05	115	0.17	160	0.18
26	0.14	71	0.12	116	0.18	161	0.2
27	0.16	72	0.18	117	0.2	162	0.21
28	0.18	73	0.18	118	0.21	163	0.21
29	0.19	74	0.18	119	0.21	164	0.02
30	0.2	75	0.21	120	0.02	165	0.05
31	0.2	76	0.02	121	0.05	166	0.08
32	0.21	77	0.05	122	0.08	167	0.12
33	0.21	78	0.12	123	0.12	168	0.15
34	0.21	79	0.18	124	0.15	169	0.17
35	0.02	80	0.18	125	0.15	170	0.15
36	0.04	81	0.18	126	0.17	171	0.17
37	0.05	82	0.21	127	0.18	172	0.18
38	0.06	83	0.02	128	0.2	173	0.2
39	0.08	84	0.05	129	0.21	174	0.21
40	0.1	85	0.12	130	0.21	175	0.21
41	0.14	86	0.18	131	0.02	176	0.02
42	0.16	87	0.18	132	0.04	177	0.05
43	0.14	88	0.18	133	0.05	178	0.08
44	0.16	89	0.21	134	0.06	179	0.12
45	0.18	90	0.02	135	0.08	180	0.15

gözlemler	ağırlıklar
181	0.17
182	0.15
183	0.17
184	0.18
185	0.2
186	0.21
187	0.21
188	0.18
189	0.02
190	0.05
191	0.12
192	0.18
193	0.21
194	0.18
195	0.21
196	0.18
197	0.18
198	0.18
199	0.14
200	0.14
201	0.02
202	0.05
203	0.14
204	0.14
205	0.18
206	0.2
207	0.14
208	0.14
209	0.02
210	0.05
211	0.18
212	0.2
213	0.14
214	0.14

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi: 11.02.1979

Doğum Yeri: İstanbul

Lise: 1990-1997 Terakki Vakfı Özel Şişli Terakki Lisesi

Lisans: 1997-2002 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fak. İstatistik Bölümü

