

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYONDA BAZI  
EĞRİSELLİK ÖLÇÜLERİ**

İstatistikçi Zehra Zeynep ŞAHİNBAŞOĞLU

**FBE İstatistik Anabilim Dalı İstatistik Programında  
Hazırlanan**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Tez Danışmanı:** Yrd. Doç. Dr. Atif EVREN

**İSTANBUL, 2005**

# İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ .....	v
KISALTIMA LİSTESİ .....	vii
ŞEKİL LİSTESİ .....	viii
ÇİZELGE LİSTESİ .....	ix
ÖNSÖZ.....	x
ÖZET .....	xi
ABSTRACT .....	xii
1. GİRİŞ.....	1
2. DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYON MODELLERİNİN GENEL YAPISI..	4
2.1 Regresyon Parametrelerinin Tahmini .....	6
2.1.2 Doğrusal Olmayan Regresyonda EKK Tahmini .....	6
2.1.1.1 Gauss – Newton Yöntemi .....	7
2.2 Doğrusal Olmayan Regresyon Parametrelerinin Sonuçları .....	11
2.2.1 Hata Terimlerinin Varyansının Tahmin Edilmesi .....	12
2.2.2 Büyük Örnek Teorisi .....	12
2.2.2.1 Büyük Örnek Özellikleri.....	13
2.2.2.1.1 Asimptotik Sapmasızlık.....	13
2.2.2.1.2 Tutarlılık .....	13
2.2.2.1.3 Asimptotik Etkinlik .....	14
2.2.3 $\gamma_k$ Parametresinin Güven Aralığı.....	15
2.2.4 Eşzamanlı Birçok $\gamma_k$ Parametrelerinin Güven Aralığı .....	15
2.2.5 Tek $\gamma_k$ Parametresinin Hipotez Testi.....	15
2.2.6 Birçok $\gamma_k$ Parametrelerinin Hipotez Testi .....	16
3. DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYONUN GEOMETRİSİ .....	17
3.1 Çevrilebilen Doğrusal Modeller(Transformably Linear Models) .....	17
3.2 Şartlı Doğrusal Parametreler(Conditionally Linear Parameters).....	18
3.3 Beklenti Yüzeyinin Geometrisi(The Geometry of Expectation Surface).....	18
3.4 En Küçük Kareler Tahmincilerinin Elde Edilmesi .....	19
3.4.1 Gauss – Newton Yöntemi .....	20
3.4.1.1 Adım Etkisi(Step Factor) .....	21
3.4.2 Newton – Raphson Yöntemi.....	22
3.4.3 Levenberg – Marquardt Uzlaşması.....	24
3.4.4 Sayısal Türevler(Numerical Derivatives) .....	25
3.4.5 Türevden Bağımsız Yöntemler(Derivatives – Free methods).....	25

3.4.6	Şartlı Doğrusal Parametrelerin Çıkarılması.....	26
3.4.7	Doğrusal Olmayan En Küçük Karelerin Geometrisinin Adımları .....	27
3.5	Yakınsama(Convergence).....	27
3.6	Doğrusal Yaklaşımları Kullanarak Doğrusal Olmayan Regresyon Sonuçları Elde Etmek.....	28
3.6.1	Parametreler için Yaklaşık Güven Bölgeleri .....	28
3.6.2	Beklenen Bağımlı Değişkenler için Yaklaşık Güven Bandları .....	29
4.	DOĞRUSAL OLMAYAN EĞRİSELLİK ÖLÇÜLERİ .....	32
4.1	Hız ve İvme Vektörleri(Velocity and Acceleration Vectors).....	32
4.1.1	Teğetsel ve Normal İvmeler (Tangential and Normal Accelerations).....	34
4.1.2	İsteğe Bağlı(keyfi) Yöndeki İvme Hareketi .....	36
4.2	Bağıl (Nispi) Eğrisellikler(Relative Curvatures) .....	37
4.2.1	Eğrisellik Dizilerindeki Adımların Yorumlanması .....	39
4.2.1.1	Saf Eğrisellikler(Intrinsic Curvatures).....	39
4.2.1.2	Parametre Etkili Eğrisellikler(Parameter Effects Curvatures).....	39
4.2.2	Yeniden Parametrelendirme(Reparametrization) .....	41
4.3	RMS Eğrisellikleri(Root Mean Square) .....	43
4.3.1	RMS Eğriselliklerinin Hesaplanması .....	44
5.	UYGULAMA .....	46
5.1	Veri ile ilgili Bilgi.....	46
5.2	Verilere Doğrusal Regresyon Uygulaması .....	48
5.2.1	Parametrelerin Tahmini .....	49
5.2.2	Modelin Kalıntı Analizi.....	53
5.2.2.1	Modelin Doğrusallığı.....	53
5.2.2.2	Hata Terimlerinin Sabit Varyanslılık Durumu .....	54
5.2.2.3	Hata Terimlerinin Normal Dağılımı Durumu.....	55
5.2.2.4	Sapan Değer Araştırması .....	56
5.2.2.5	Kalıntı Çeşitleri.....	57
5.2.2.6	Etkinlik Ölçütleri .....	60
5.3	Verilere Doğrusal Olmayan Regresyon Uygulaması .....	63
5.3.1	Kalıntı Analizi .....	67
5.3.1.1	Normallik Araştırması: .....	69
5.3.1.2	Değişen Varyans Araştırması .....	70
5.3.1.3	Kalıntı Çeşitleri ve Sapan Değer Araştırması:.....	71
5.3.1.3.1	Etkinlik Ölçütleri .....	76
5.3.2	Eğrisellik Ölçüleri.....	79
6.	SONUÇ.....	89
	KAYNAKLAR.....	92
	EKLER .....	93
	Ek 1 Matrislerle İlgili Genel Bilgiler.....	94
	Ek2 Projeksiyon Matrisi .....	99
	Ek3 Doğrusal Regresyonun Geometrisi .....	101
	Ek 4 Uygulamada Kullanılan Projeksiyon Matrisi.....	106
	Ek 5 İterasyon Sonuçlarının Excel ile Elde Edilmesi.....	107

Ek 6 Başlangıç Değerlerinin Sonuçları .....	110
ÖZGEÇMİŞ.....	114

## SİMGE LİSTESİ

$A$	İvme Dizisi (Acceleration Array)
$b$	Parametre tahminci vektörü
$b_0$	$\beta_0$ 'in tahmincisi
$b_1$	$\beta_1$ 'in tahmincisi
$c^l$	Saf eğrisellik dizisi (intrinsic relative curvature array)
$c^\theta$	Parametreye bağlı eğrisellik dizisi (parameter effects relative curvature array)
$C$	Nispi eğrisellik dizisi (relative curvature array)
$D$	Türev Matrisi
$f$	Doğrusal olmayan regresyonda beklenti fonksiyonu
$f(X_i, \gamma)$	Doğrusal olmayan fonksiyon
$g$	Doğrusal olmayan regresyonda EKK tahmincileri vektörü
$H$	Projeksiyon Matrisi
$I$	Birim Matrisi
$L$	Olabilirlik fonksiyonu
$p$	Bağımsız değişken sayısı
$P$	Parametre sayısı
$q$	Doğrusal olmayan regresyonda bağımsız değişken sayısı
$r^2$	Belirlilik katsayısı
$R^2$	Çoklu belirlilik katsayısı
$s(b_0)$	$b_0$ 'in standart hatası
$s(b_1)$	$b_1$ 'in standart hatası
$S(\theta)$	Kalıntı kareleri toplamı
$V$	$N \times P$ boyutlu türev matrisi
$\{\dot{V}\}_{np}$	$N \times P$ boyutlu hız vektörleri
$\{\ddot{V}\}_{npq}$	$N \times P \times P$ boyutlu ivme vektörleri
$Var(b_0)$	$b_0$ 'in varyansı
$Var(b_1)$	$b_1$ 'in varyansı
$X$	Bağımsız veya açıklayıcı değişken
$X$	Veri matrisi
$Y$	Bağımlı veya açıklanan değişken
$\hat{Y}$	$Y$ 'nin tahmin değeri
$Y$	Gözlem vektörü
$\ddot{A}$	İvme dizisinin matris gösterimi
$\beta_0$	Sabit terim parametresi
$\beta_1$	Eğim parametresi
$\beta$	Parametre vektörü
$\theta$	Doğrusal olmayan modellerde parametre vektörü
$\varepsilon$	Hata terimleri
$\mathcal{E}$	Hata terimleri vektörü

$\mu$	Ana kütle ortalaması
$\gamma$	Doğrusal olmayan regresyonda parametre vektörü
$\eta(\theta)$	Tahmin modeli
$\sigma^2$	Hata payı varyansı
$\hat{\sigma}^2$	$\sigma^2$ 'nin EKK tahmincisi
$\lambda$	Adım faktörü
$\delta^i$	Gauss artışı

## **KISALTMA LİSTESİ**

ANOVA	Varyans Analizi (Analysis of Variance)
BP	Breusch – Pagan Testi
DORM	Doğrusal Olmayan Regresyon Modeli
DUD	Türev Kullanılmayan Yöntemler (Doesn't Use Derivatives)
EKK	En Küçük Kareler
GLM	Genelleştirilmiş Doğrusal Modeller (Generalized Linear Models)
KDRM	Klasik Doğrusal Regresyon Modeli
OHK	Ortalama Hata Kareleri
MO	Maksimum Olabilirlik
MSE	Kalıntı Kareleri Ortalaması
MSR	Ortalama Açıklanan Kareler Toplamı
RMS	Ortalamaların Kare Kökü (Root Mean Square)
SSE	Kalıntı Kareleri Toplamı (Residual Sum of Squares)
SSR	Açıklanan Kareler Toplamı (Regression Sum of Squares)
W	White Testi

## ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1 Doğrusal olmayan EKK'nın gözlem uzayı .....	5
Şekil 2.2 $\hat{\theta}$ 'nın örnekleme dağılımının $\theta$ etrafında yoğunlaşması halinde tutarlılığı.....	14
Şekil 3.1 Doğrusal olmayan EKK problemi için gözlem uzayı .....	19
Şekil 3.2 Newton - Raphson yönteminin işleyişi .....	23
Şekil 3.3 İki parametrelili doğrusal olmayan regresyon modeli için olasılık kontürleri .....	31
Şekil 3.4 İki parametrelili doğrusal olmayan regresyon modeli için olasılık kontürleri .....	32
Şekil 5.1 Çeşitli $\beta$ 'lar için $z = 1 - \beta e^{-t}$ biçimindeki teorik eğriler .....	47
Şekil 5.2 Dağılım grafiği .....	48
Şekil 5.3 Tahmin edilen modelin grafiği .....	51
Şekil 5.4 Doğrusal modelin kalıntı grafiği .....	53
Şekil 5.5 Tahmin değerleri ile kalıntıların grafiği .....	54
Şekil 5.6 Doğrusal modelin kalıntıları için Mahalonabis uzaklığı .....	59
Şekil 5.7 Doğrusal modelin kalıntıları için kaldıraç(leverage) değerleri .....	59
Şekil 5.8 Misra verisi için Cook mesafesi .....	63
Şekil 5.9 Tahmin edilen Y değerlerine karşılık X değerlerinin grafiği .....	69
Şekil 5.10 Kalıntıların Q - Q grafiği.....	69
Şekil 5.11 Doğrusal olmayan modelin kalıntıları için kaldıraç değerleri.....	73
Şekil 5.12 Semistudentized kalıntılar - tahmin değerleri grafiği.....	74
Şekil 5.13 Semistudentized kalıntılar - gözlem değerleri grafiği .....	74
Şekil 5.14 Studentized kalıntılar - tahmin değerleri grafiği .....	75
Şekil 5.15 Deleted kalıntılar - gözlem değerleri grafiği .....	75
Şekil 5.16 Cook uzaklığı grafiği.....	77
Şekil 5.17 DFFITS grafiği .....	78
Şekil Ek 2.1 y'nin M üzerindeki projeksiyonu .....	100
Şekil Ek 3.1 EKK tahmincisi.....	106



## ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 4.1 RMS eğriselliklerine göre doğrusal olmama durumunun ölçüsü .....	45
Çizelge 5.1 Veri seti .....	49
Çizelge 5.2 Analiz sonucu elde edilen tahmin ve kalıntı verileri .....	52
Çizelge 5.3 Kalıntıların çarpıklık ve basıklık sonuçları .....	56
Çizelge 5.4 Sapan değer araştırması .....	56
Çizelge 5.5 Doğrusal modelin kalıntı çeşitleri .....	57
Çizelge 5.6 Misra verisi için Mahalanobis mesafesi .....	60
Çizelge 5.7 Doğrusal kalıntıların etkinlik ölçütleri .....	60
Çizelge 5.8 Misra verisi için Cook mesafesi .....	62
Çizelge 5.9 Parametre tahminleri ve EKK ölçüleri .....	66
Çizelge 5.10 Başlangıç değerlerinin sonuçlarının karşılaştırılması .....	67
Çizelge 5.11 Doğrusal olmayan regresyon analizi sonucu elde edilen sonuçlar .....	68
Çizelge 5.12 Doğrusal olmayan modelin kalıntı çeşitleri .....	72
Çizelge 5.13 Doğrusal olmayan modelin kalıntılarının etkinlik ölçütleri .....	76
Çizelge 5.14 Hız ve ivme vektörleri .....	80
Çizelge 6.1 Sonuçların karşılaştırılması .....	91

## ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında, doğrusal olmayan regresyonun eğrisellik ölçüleri incelenmiştir. Doğrusal olmayan regresyon analizi geliştirilmeden önce, doğrusal olmayan modeller, doğrusallaştırılır ve analizler bu modeller üzerinden yapılırdı. Doğrusal olmayan regresyon analizi ile birlikte, model ile ilgili parametreler iteratif yöntemler kullanılarak elde edilmeye başlanmıştır. Doğrusal olmayan regresyon analizinden elde edilen sonuçlar doğrusallık yaklaşımına dayandırılır. Dolayısıyla doğrusal regresyon modellerine uygulanan kalıntı analizi, doğrusal olmayan regresyon modellerine de uygulanmıştır. Yapılan eğrisellik ölçüleri araştırmaları sonucunda, doğrusal olmayan regresyon modeline uygulanan kalıntı analizi sonuçları incelenmiştir.

Bazı kavramların, Türkçede tam karşılıkları olmadığı için ya da birden fazla karşılıkları olduğundan, kavram karmaşası olmaması açısından, bu sözcüklerin yanına parantez içerisinde İngilizce karşılıkları da yazılmıştır.

Bu tezin hazırlanmasında yardımları için değerli hocam ve danışmanım Yrd. Doç. Dr. Atıf EVREN'e teşekkürü borç bilirim.

Tüm bunların yanında, tez çalışmam sırasında, maddi ve manevi hiçbir yardımı esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Zehra Zeynep Şahinbaşoğlu

## ÖZET

Doğrusal regresyonda kullanılan kalıntı analizi, normallik varsayımı altında gerçekleştirilmektedir. Elde edilen sonuçlar bu varsayımlara göre yorumlanmaktadır. Doğrusal olmayan regresyonda ise asimptotik özellikler söz konusudur. Dolayısıyla doğrusal regresyon için uygulanan kalıntı analizi sonuçları, doğrusal olmayan regresyon için hatalı sonuçlar verebilmektedir. Kalıntı analizi sonuçlarının güvenilirliğini anlamak için eğrisellik ölçüleri araştırılmıştır. Eğrisellik ölçüleri saf ve parametre etkili eğrisellik olmak üzere iki çeşittir. Saf eğrisellik sadece veri seti ve model arasındaki geometrik anlamı verir. Parametre etkili eğrisellik ise, yeniden parametrelendirme yöntemiyle değiştirilebilir. Bu araştırma karşılaştırmalı bir uygulama içermektedir. İlk olarak, veri kümesinin doğrusal görünümlü bir grafiğe sahip olduğu görüldüğünden, ilk önce doğrusal regresyon analizi uygulanmıştır. Elde edilen modelin kalıntılarında kalıntı analizi uygulanmıştır. Daha sonra aynı veri kümesi için doğrusal olmayan regresyon analizi araştırılmıştır. Elde edilen modele kalıntı analizi uygulanmış, sonuçların doğrusal regresyon sonucu uygulanan kalıntı analizi sonuçlarıyla paralellik gösterdiği görülmüştür. Doğrusal olmayan modele uygulanan kalıntı analizi sonuçlarının güvenilirliğini test etmek için bazı eğrisellik ölçüleri araştırılmıştır. Sonuç olarak bulunan eğrisellik ölçülerinin çok küçük olduğu ve kalıntı analizini etkilemediği görülmüştür. Bu uygulamalar için, SPSS 11.5, Excel 2003 ve Mathcad 6 kullanılmıştır.

Uygulamalar sonucunda, eldeki veri seti için doğrusal olmayan regresyon modeline uygulanan kalıntı analizinin eğrisellikten çok etkilenmediği, dolayısıyla sonuçlarına güvenilebileceği şeklinde yorumlanmıştır.

**Anahtar kelimeler:** Doğrusal olmayan regresyon, doğrusal regresyon, kalıntı analizi, eğrisellik ölçüleri

## **ABSTRACT**

Residual analysis of linear regression has been studied for nonlinear regression analysis. To evaluate the significance of the results, curvature measures have been investigated.

In application, it was seen that the relationship between the model and the data sets seemed to be linear. So first of all, linear analysis were done and residual analysis were searched for the appropriate model. Then, for the same data sets, nonlinear regression analysis were studied and again residuals were analysed for the fitted model. It was seen that, the results of the linear regression analysis and nonlinear regression analysis were parallel to each other. To investigate the reliability of the residual analysis, curvature measures were calculated. At the end of these calculations, it was understood that the curvature measures were small and they did not effect the results of the residual analysis. In these applications, SPSS 11.5, Excel 2003 and Mathcad 6 were used.

Consequently, it was seen that residual analysis of nonlinear regression analysis was not effected by curvature measures for the attendant data set. This result was interpreted as residual analysis of nonlinear regression is convenient because curvature is low.

**Key words:** Nonlinear regression, linear regression, residual analysis, curvature measures

## 1. GİRİŞ

Bu yüksek lisans tezinin amacı, doğrusal regresyon analizi sonucu elde edilen modele uygulanan kalıntı analizinin, doğrusal olmayan regresyona uygulanması ile elde edilen sonuçlara güvenilip güvenilemeyeceğinin araştırılmasıdır. Bu araştırma sırasında elde edilen sonuçlar bir uygulama ile yorumlanacaktır.

Klasik regresyon analizi birçok varsayıma dayanır. Parametre tahminleri yapılarak uygun model elde edildikten sonra kalıntı analizi araştırması ile model hakkında daha iyi bilgiler elde edilir. Kalıntı analizinde, modelin uygunluğu ve modelin veriyi yeterli derecede açıklayıp açıklayamadığı araştırılır. Bu araştırma sırasında, modelin doğrusal olup olmadığı, kalıntıların sabit varyanslı olup olmadığı, modelde sapan değerlerin varlığı, modelden önemli bir bağımsız değişkenin çıkarılıp çıkarılmadığı ve hata terimlerinin bağımlı olup olmadığı incelenmiştir. Bu araştırmalar sonucunda model hakkında daha iyi bilgilere sahip olunur. Doğrusal olmayan regresyon analizi ise daha karmaşık bir yapıya sahiptir. Model için uygun parametre tahminleri, klasik regresyon analizindeki gibi normal denklemler elde edilerek kolayca bulunmazlar. Parametre tahminleri için iteratif yöntemler kullanılır. Bu yöntemler için gerekli ve önemli olan ilk adım başlangıç değerlerinin oluşturulmasıdır. Bu değerler araştırma sırasında elde edilebileceği gibi, önceki araştırmalarda elde edilen değerler de kullanılabilir. Yapılan bütün bu araştırmalar büyük örneklem için geçerlidir. Sonuç olarak, doğrusal olmayan regresyon modeli, doğrusal yaklaşıma en iyi ve en uygun olduğu durumda geçerli olacaktır.

Doğrusal olmayan modeller, bu modellerin elde edilme süreçleri ve kullanıldığı yerler ile ilgili günümüze kadar birçok araştırma yapılmıştır ve halen yapılmaktadır. Doğrusal olmayan modeller, doğrusal yaklaşıma en iyi ve en uygun olduğu durumlarda geçerli olacağından, bu durumların belirlenmesinde çeşitli yöntemler geliştirilmiştir.

“Doğrusal” terimi doğrusal en küçük karelerde(LLSQ- linear least square fitting) iki şeyi tanımlar: birincisi, değişkenler arasındaki doğrusal ilişki, ikincisi ise parametreleri doğrusal şekilde tahmin edilmeye çalışılan modellerdir.

Saf doğrusal modellerde, bütün parametreler modele doğrusal yolla dahil edilir. Diğer taraftan, eğer parametreler modele doğrusal olmayan biçimde dahil edilirse, model “doğrusal olmayan model” olarak tanımlanır. Doğrusal ve doğrusal olmayan yollar anlaşılması güç kavramlardır. Doğrusal kavramı aslında tahmin edilen modelin parametrelerine göre birinci türevleri alınarak anlaşılabilir. Alınan türevler sonucu elde edilen değerler sabitse yani diğer

parametre değerlerinden bağımsızsa model doğrusal olarak tanımlanabilir. Bu doğrusallık kavramı iki şekilde açıklanabilir. Değişkenlerine göre doğrusallık ve parametrelerine göre doğrusallık. Buradaki doğrusallık kavramında söz edilen doğrusallık parametrelerine göre doğrusallıktır. Doğrusal modellerde tahminciler, yansız, minimum varyanslı EKK tahmincileridir.

Doğrusal olmayan en küçük kareler ise bu kavramlara bağlı değildir. Bunlar genellikle yanlış, rasgele dağılmamış ve minimum varyansa sahip değildir. Bu özellikler her model için geçerli değildir. Modelden modele değişebileceği gibi, bir model içinde de değişiklik gösterebilirler. Bunun birçok nedeni vardır; veri sayısı, bunların dağılımı gibi. Dolayısıyla doğrusal olamama durumundan ve doğrusal olmayan modellerin tahminlerinden bahsederken model/veri kombinasyonu incelenmelidir.

Doğrusal olmayan modellerin doğrusal modellerden farkını ölçmek için ve doğrusallığa yakın hesaplamalar yapabilmek için birçok deneme yapılmıştır. Doğrusal olmamanın ölçüsünü ilk olarak 1960 yılında Beale hesaplamıştır. Sonra Guttman ve Meter Beale'nin yöntemlerine kısıtlamalar getirmişlerdir. 1971 yılında Box EKK'lerde yanlışlığın tahmini için formüller geliştirmiştir. Formülleri daha sonra Gillis ve Ratkowski tarafından büyük çalışmalarda kullanılmıştır. Modern doğrusal olmama ölçüleri 1980 yılında Bates ve Watts tarafından oluşturulmuştur. "Journal of the Royal Statistical Society" adlı dergide yayınlanmıştır. Geometrik eğriselliğe dayalı doğrusal olmama ölçüleri geliştirmişlerdir. Bunlar çok boyutlu uzayda uygulanmaktadır. Ayrıca kendi ölçüleri ve Beale tarafından oluşturulan ölçüler arasında ilişki kurmuşlardır ve Box'ın doğrusal olmama için yanlışlık ölçüleri ile kendi tezlerinin nasıl bağlantılı olduğunu göstermişlerdir.

Bu tez çalışmasında, doğrusal olmayan regresyon analizi sonuçlarına güvenilip güvenilemeyeceği, bazı eğrisellik ölçüleri araştırılarak test edilmiştir. Bölüm 2, doğrusal olmayan regresyon modellerinin genel yapısı hakkında bilgi vermektedir. Bu bölümde, doğrusal olmayan regresyon parametrelerinin tahminleri, parametrelerinin sonuçları incelenmiştir.

Bölüm 3'te ise, doğrusal olmayan modellerin geometrik yapısı incelenmiştir. EKK tahminleri, bu tahminler sırasında kullanılan yöntemler incelenmiştir.

Bölüm 4'te doğrusal olmama durumunun eğrisellik ölçüleri incelenmiştir. Eğrisellik ölçüleri tanımlanmış ve sonuçları yorumlanmıştır.

Bölüm 5 uygulamaları içermektedir. Uygulama için seçilen veri setine ilk önce doğrusal regresyon analizi uygulanmış ve bu analiz sonucu model hakkında bilgiler elde edilmiştir. Daha sonra aynı veri setine doğrusal olmayan regresyon analizi uygulanmıştır. Bu analiz sonucuna uygulanan kalıntı analizi sonucu, doğrusal regresyon sonucu elde edilen bilgilerle paralellik göstermiştir. Doğrusal olmayan regresyona analizi sonuçları, eğrisellik araştırması yapılarak test edilmiştir.

Bölüm 7’de araştırma sonuçları anlatılmıştır.

Bu uygulamalar sırasında, Excel 2003, SPSS 11.5 ve Mathcad 6 paket programları kullanılmıştır.

## 2. DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYON MODELLERİNİN GENEL YAPISI

Doğrusal olmayan regresyon modellerinin formu genelde doğrusal regresyon modelleri gibidir.

$$Y_i = f(X_i, \gamma) + \varepsilon_i \quad (2.1)$$

(2.1) denklemi doğrusal olmayan regresyon modelinin genel formunu gösterir. Burada  $Y_i$  gözlemi, doğrusal olmayan  $f(X_i, \gamma)$  fonksiyonu ve  $\varepsilon_i$  hata terimlerinin toplamıdır. Hata terimlerinin doğrusal regresyon modelindeki gibi, beklenen değerlerinin sıfır, sabit varyanslı ve korelasyonsuz olduğu varsayılır.  $f(X_i, \gamma)$  fonksiyonu ise,  $Y$  bağımlı değişkeninin,  $X$  bağımsız değişkenlerinin bir fonksiyonu olduğunu gösterir.

$f(X_i, \gamma)$  fonksiyonunda, parametre vektörü  $\beta$  yerine  $\gamma$  kullanılır, böylece fonksiyonun parametrelerinde doğrusal olmadığı ifade edilir.

Doğrusal olmayan regresyon modelinin, doğrusal regresyon modelinden en büyük farkı; regresyon parametre sayılarının modeldeki bağımsız  $X$  değişkenlerinin sayılarıyla ilişkili olmamasıdır. Doğrusal regresyon modellerinde, eğer modelde  $p-1$  tane bağımsız  $X$  değişken varsa “ $p$ ” tanede regresyon katsayısı bulunurdu. Fakat doğrusal olmayan regresyon modellerinde bu durum geçerli değildir. Dolayısıyla doğrusal olmayan regresyon modellerinde  $X$  bağımsız değişkenlerinin sayısı  $q$  ile fonksiyondaki regresyon parametreleri sayısı  $p$  ile gösterilir.

Doğrusal olmayan regresyon modellerindeki bir diğer fark ise bağımsız  $X$  değişkeni vektöründedir.  $X_i$  gözlemlerinden oluşan  $X$  vektörü “1” başlangıç elemanı olmadan kullanılır.

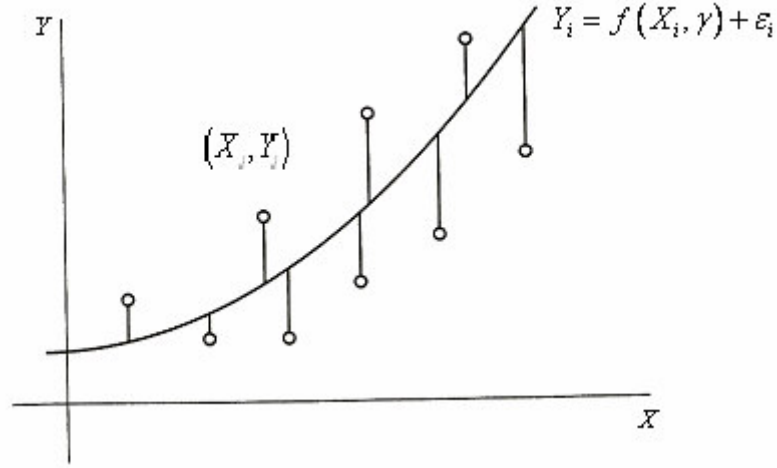
Doğrusal olmayan regresyon modeli aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Y_i = f(X_i, \gamma) + \varepsilon_i$$

Burada;



$$X_i = \begin{bmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ \vdots \\ X_{iq} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_p \end{bmatrix}$$



Şekil 2.1 Doğrusal olmayan EKK'nın gözlem uzayı

Doğrusal olmayan modeller, dönüşüm yapılarak doğrusal hale getirilebilirler. Böyle modellere “intrinsically linear(saf doğrusal)” modeller denir. Örneğin; üssel bağımlı fonksiyon  $f(X, \gamma) = \gamma_0 [\exp(\gamma_1 X)]$ , logaritmik dönüşüm yapılarak aşağıdaki şekilde doğrusal regresyon modeli şekline getirilebilir:

$$\log_e f(X, \gamma) = \log_e \gamma_0 + \gamma_1 X$$

$$g(X, \gamma) = \log_e f(X, \gamma)$$

$$\beta_0 = \log_e \gamma_0$$

$$\beta_1 = \gamma_1$$

Yukarıdaki kısaltmalar yapıldığında doğrusal olmayan regresyon modeli aşağıdaki gibi doğrusal regresyon modeli haline getirilir:

$$g(X, \gamma) = \beta_0 + \beta_1 X$$

Doğrusal olmayan fonksiyonun doğrusal hale getirilmesi, doğrusal regresyon modelinin uygun olduğu anlamına gelmez. Çünkü fonksiyonu doğrusal hale getirmek için yapılan dönüşüm, modeldeki hata terimlerini etkileyebilir. Örneğin; aşağıdaki üssel regresyon modelinin normal ve sabit hata terimlerine sahip olduğu düşünüldüğünde:

$$Y_i = \gamma_0 \exp(\gamma_1 X_i) + \varepsilon_i$$

fonksiyonu doğrusallaştırmak için  $Y$  'de yapılacak logaritmik bir dönüşüm  $\varepsilon_i$  normal hata terimlerini etkileyecek ve hata terimleri artık sabit varyanslı olmayacaktır. Dolayısıyla doğrusal olmayan regresyon modellerinin doğrusallaştırılması her zaman uygun değildir, hatalı ve yanıltıcı sonuçlar verebilir.

## 2.1 Regresyon Parametrelerinin Tahmini

Doğrusal regresyon modellerinde olduğu gibi, doğrusal olmayan regresyon modellerinde de parametre tahmini EKK ya da En çok benzerlik kullanılarak bulunur. Doğrusal olmayan regresyondaki hata terimleri bağımsız, sabit varyanslı ve normal oldukları zaman iki yöntemle elde edilen parametre tahminleri birbirlerine eşit olur. Doğrusal regresyonun tersine, doğrusal olmayan regresyonda EKK ve EÇB tahminlerini bulmak kolay değildir. Bu modellerin analizi genellikle bilgisayar programları ile elde edilir.

### 2.1.2 Doğrusal Olmayan Regresyonda EKK Tahmini

Doğrusal regresyonda EKK metodu “Q” kriterinin minimizasyonuna dayanır:

$$Q = \sum_{i=1}^n [Y_i - (\beta_0 - \beta_1 X_i)]^2 \quad (2.3)$$

Burada  $\beta_0$  ve  $\beta_1$  'in  $Q$  'yu minimize eden değerleri  $b_0$  ve  $b_1$  ile ifade edilir ve bu değerler EKK tahmincileri olarak adlandırılır\*.

Doğrusal olmayan regresyon modeli için  $Q$  kriteri aşağıdaki gibi yazılır:

$$Q = \sum_{i=1}^n [Y_i - f(X_i, \gamma)]^2 \quad (2.4)$$

Burada EKK kriteri  $Q$  'yu minimize eden, doğrusal olmayan regresyon parametreleri  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}$  kullanılarak EKK tahmin edicileri bulunur. Doğrusal regresyondan farkı normal denklemlerinin çözümünün “iteratif sayısal araştırma yöntemlerini” gerektirmesidir. Çünkü analitik çözümleri bulmak genellikle zordur. Bazı durumlarda yazılım gerektirirler.

---

\*Neter, J., Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J. ve Wasserman, W., (1996)

$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}$  değerlerine göre  $Q$  kriterinin  $\gamma_k$  'ya göre kısmi türevleri alındığında:

$$\frac{\partial Q}{\partial \gamma_k} = \sum_{i=1}^n -2[Y_i - f(X_i, \gamma)] \left[ \frac{\partial f(X_i, \gamma)}{\partial \gamma_k} \right] \quad (2.5)$$

elde edilir. Bu kısmi türevler sıfıra eşitlenip,  $\gamma_k$  regresyon parametreleri yerine en küçük kareler tahmincileri olan  $g_k$  'lar yerleştirildiğinde,  $p$  tane normal denklem bulunur:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \gamma_k} &= -2 \sum_{i=1}^n Y_i \left[ \frac{\partial f(X_i, \gamma)}{\partial \gamma_k} \right]_{\gamma=g} + 2 \sum_{i=1}^n f(X_i, \gamma) \left[ \frac{\partial f(X_i, \gamma)}{\partial \gamma_k} \right]_{\gamma=g} = 0 \\ \sum_{i=1}^n Y_i \left[ \frac{\partial f(X_i, \gamma)}{\partial \gamma_k} \right]_{\gamma=g} - \sum_{i=1}^n f(X_i, \gamma) \left[ \frac{\partial f(X_i, \gamma)}{\partial \gamma_k} \right]_{\gamma=g} &= 0 \quad k=0,1,\dots,p-1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

(2.6)'da  $g$  ifadesi, en küçük kareler tahmincileri olan  $g_k$  'ların vektörüdür:

$$g = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{p-1} \end{bmatrix}_{p \times 1} \quad (2.7)$$

Dikkat edilirse (2.6)'daki parantez içindeki ifadelerin, (2.5)'deki denklemin kısmi türevleri olduğu ve  $\gamma_k$  yerine  $g_k$  'ların kullanıldığı görülür. Doğrusal olmayan regresyon modeli için (2.6)'daki normal denklemleri  $g_k$  parametre tahmincileri için doğrusal değildir ve en basit durumlarda bile çözülmesi zordur.

Birçok doğrusal olmayan regresyon modelinde, EKK tahminlerini iterasyon yöntemleri ile bulmak, normal denklemleri kullanarak bulmaktan daha kolaydır. Aşağıda bazı iterasyon yöntemleri anlatılmıştır.

### 2.1.1.1 Gauss – Newton Yöntemi

Bu yöntem “doğrusallaştırma yöntemi(linearization method)” olarak da bilinir. Taylor serisini kullanarak doğrusal olmayan regresyon modelini doğrusal terimlere yaklaştırır ve EKK yöntemini kullanarak parametre tahmini yapar. Bu adımların iterasyonları yapılarak, genellikle doğrusal olmayan regresyon problemlerinin çözümleri yapılır.

Gauss – Newton Yöntemi, regresyon parametreleri  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}$  için “ilk ya da başlangıç

değerleri(initial or starting values)” kullanarak çözüme başlar. Bu değerler  $g_0^{(0)}, g_1^{(0)}, \dots, g_{p-1}^{(0)}$  ile gösterilir, parantez içindeki sayılar ise iterasyon sayısını gösterir.  $g_k^{(0)}$  başlangıç değeri, daha önce yapılmış ya da ilgili çalışmalardan, teorik beklentilerden ya da  $Q$  kriterini minimum yapan parametrelerden seçilebilir.

Parametreler için başlangıç değerleri elde edildikten sonra,  $g_k^{(0)}$  başlangıç değeri çevresinde Taylor serisinin doğrusal terimlerinin açılımı  $f(X_i, \gamma)$ ’nin n.durumu için yazılır. i.durum için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$f(X_i, \gamma) \approx f(X_i, g^{(0)}) + \sum_{k=0}^{p-1} \left[ \frac{\partial f(X_i, \gamma)}{\partial \gamma_k} \right]_{\gamma=g^{(0)}} (\gamma_k - g_k^{(0)}) \quad (2.8)$$

Burada  $g^{(0)}$  parametre başlangıç değerleri vektörüdür:

$$g_{p \times 1}^{(0)} = \begin{bmatrix} g_0^{(0)} \\ g_1^{(0)} \\ \vdots \\ g_{p-1}^{(0)} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

(2.8)’deki parantez içindeki ifadeler regresyon fonksiyonununun kısmi türevleridir sadece ( $k = 0, 1, \dots, p-1$ ) için  $\gamma_k = g_k^{(0)}$  şeklinde değerlendirilir. (2.8)’deki ifade için aşağıdaki kısaltmalar yapılır:

$$f_i^{(0)} = f(X_i, g^{(0)}) \quad (2.10)$$

$$\beta_k^{(0)} = \gamma_k - g_k^{(0)} \quad (2.11)$$

$$D_{ik}^{(0)} = \left[ \frac{\partial f(X_i, \gamma)}{\partial \gamma_k} \right]_{\gamma=g^{(0)}} \quad (2.12)$$

Bu durumda (2.8)’deki ifade aşağıdaki şekli alır:

$$f(X_i, \gamma) \approx f_i^{(0)} + \sum_{k=0}^{p-1} D_{ik}^{(0)} \beta_k^{(0)}$$

Bu ifade (2.1)’deki regresyon modeline yaklaştırıldığında  $Y_i = f(X_i, \gamma) + \varepsilon_i$  ifadesi yerine

aşağıdaki ifade yazılır:

$$Y_i \approx f_i^{(0)} + \sum_{k=0}^{p-1} D_{ik}^{(0)} \beta_k^{(0)} \quad (2.13)$$

Sağ taraftaki  $f_i^{(0)}$  terimi sol tarafa geçirildiğinde  $Y_i - f_i^{(0)}$  ifadesi elde edilir. Bu ifade  $Y_i^{(0)}$  ile gösterildiğinde aşağıdaki doğrusal regresyon modeli yaklaşımı elde edilir:

$$Y_i^{(0)} \approx \sum_{k=0}^{p-1} D_{ik}^{(0)} \beta_k^{(0)} + \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.14)$$

Burada;

$$Y_i^{(0)} = Y_i - f_i^{(0)} \quad (2.15)$$

$Y_i^{(0)}$  değeri “kalıntılar” olarak adlandırılır. Parametrelerin yerine başlangıç tahminleri yerleştirildiğinde gözlemlerin doğrusal olmayan regresyon etrafındaki sapmalarıdır.

$D_{ik}^{(0)}$  değerleri X değerleri gibidir. Parametreler yerine başlangıç tahminleri yerleştirildiğindeki kısmi türevlerdir.

$\beta_k^{(0)}$  değeri, gerçek regresyon parametresi ile parametre başlangıç tahmini arasındaki farkı verir. Regresyon katsayıları, hangi başlangıç regresyon katsayılarının doğru olduğu hakkındaki uyum miktarını verir.

(2.14) modeline uyum sağlamadaki amaç;  $\beta_k^{(0)}$  regresyon katsayılarını tahmin etmek ve bunları kullanarak regresyon katsayılarının “düzeltmiş başlangıç tahminlerini” tahmin etmektir. Uygun doğrusal regresyon tahmininde “sabit terimin” bulunmadığına dikkat etmek gerekir.

(2.14)’deki doğrusal regresyon modeli matris formuyla yazılabilir:

$$Y^{(0)} \approx D^{(0)} \beta^{(0)} + \varepsilon \quad (2.16)$$

(2.16) modeli doğrusal regresyon modelindedir ve (2.16)’daki ifadelerin açılımları aşağıda verilmiştir:

$$Y = X \beta + \varepsilon$$

$n \times 1$     $n \times p$     $p \times 1$     $n \times 1$

$$Y_{n \times 1}^{(0)} = \begin{bmatrix} Y_1 - f_1^{(0)} \\ \vdots \\ Y_n - f_n^{(0)} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$D_{n \times p}^{(0)} = \begin{bmatrix} D_{10}^{(0)} & \cdots & D_{1,p-1}^{(0)} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{n0}^{(0)} & \cdots & D_{n,p-1}^{(0)} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\beta_{p \times 1}^{(0)} = \begin{bmatrix} \beta_0^{(0)} \\ \vdots \\ \beta_{p-1}^{(0)} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

(2.18)'deki D matrisi X matrisinin rolünü oynar fakat 1'lerden oluşan sabit terim sütunu yoktur. Buradan hareketle EKK tahminlerini kullanarak  $\beta^{(0)}$  parametre tahmini bulunur:

$$b^{(0)} = \left( D^{(0)T} D^{(0)} \right)^{-1} D^{(0)T} Y^{(0)} \quad (2.21)$$

$b^{(0)}$ ; EKK ile tahmin edilen regresyon katsayıları vektörüdür. Herhangi bir çoklu regresyon modülü içeren bir bilgisayar programı kullanarak ve “no intercept(sabit terim yok)” seçeneği işaretlenerek  $b_k^{(0)}$  regresyon katsayıları tahminleri elde edilebilir.

Daha sonra EKK tahminleri kullanılarak “düzeltilmiş regresyon katsayıları tahminleri” elde edilir. Bunlar  $g_k^{(1)}$  ile gösterilir:

$$g_k^{(1)} = g_k^{(0)} + b_k^{(0)} \quad (2.22)$$

$g_k^{(1)}$ ; 1. iterasyon sonunda  $\gamma_k$ 'nın düzeltilmiş tahminidir. Bu ifade matris formunda yazılabilir:

$$g^{(1)} = g^{(0)} + b^{(0)} \quad (2.23)$$

Bu noktada, düzeltilmiş regresyon katsayılarının doğru yönde uyum sağlayıp sağlamadığı

araştırılabilir.

$$SSE^{(0)} = \sum_{i=1}^n \left[ Y_i - f(X_i, g^{(0)}) \right]^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - f_i^{(0)})^2 \quad (2.24)$$

1.iterasyonun sonunda, düzeltilmiş regresyon katsayıları tahmini  $g^{(1)}$  olur. Bu seviyede hesaplanan EKK kriteri ölçümü  $SSE^{(1)}$  ile gösterilir:

$$SSE^{(1)} = \sum_{i=1}^n \left[ Y_i - f(X_i, g^{(1)}) \right]^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - f_i^{(1)})^2 \quad (2.25)$$

Eğer Gauss – Newton yöntemi ilk iterasyon sonucu doğru bir şekilde çalışıyorsa (uygun sonuçlar veriyorsa)  $SSE^{(1)}$ ,  $SSE^{(0)}$ , dan küçük olmalıdır\*. Böylelikle düzeltilmiş regresyon katsayıları tahmincisi olan  $g^{(1)}$  iyi bir tahminci olur. Eğer  $g^{(1)}$  iyi bir tahminci değil ise,  $g^{(1)}$  kullanılarak  $g^{(2)}$  bulunur ve aynı karşılaştırma  $SSE^{(2)}$  ile  $SSE^{(1)}$  için yapılır.

Bu iterasyon olayı  $g^{(s+1)} - g^{(s)}$  ya da  $SSE^{(s+1)} - SSE^{(s)}$  arasındaki fark ihmal edilebilir derecede azalana kadar devam eder. İterasyon sonucunda son olarak elde edilen regresyon katsayıları tahminleri “g” ile gösterilir ve en son EKK kriteri ölçümü de “SSE” ile gösterilir ki bu hata kareleri toplamıdır. Gauss – Newton yöntemi birçok doğrusal olmayan regresyon modelinde başarılı sonuçlar verir.

## 2.2 Doğrusal Olmayan Regresyon Parametrelerinin Sonuçları

Normal hata terimli doğrusal regresyon modellerinde, örnek boyutu ne olursa olsun, regresyon parametrelerinin kesin sonuçları vardır. Fakat normal hata terimli doğrusal olmayan regresyon modellerinde bu geçerli değildir. Çünkü herhangi bir örnek boyutu için, EKK ya da en çok benzerlik yöntemi kullanılarak elde edilen tahminciler, normal dağılmayan, minimum varyansa sahip olmayan ve yansız olmayan tahminciler olur.

Bu nedenle, doğrusal olmayan regresyonda, regresyon parametrelerinin sonuçları “büyük örnek teorisine” dayanır. Bu teori, örnek boyutu büyük olduğunda, normal hata terimli doğrusal olmayan regresyon modelinde, EKK ya da en çok benzerlik kullanılarak elde edilen tahmincilerin, yaklaşık olarak normal dağıldığını, neredeyse yansız olduklarını ve hemen

---

\* Neter, J., Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J. ve Wasserman, W., (1996)

hemen en az varyansa sahip olduklarını belirtir. Hata terimlerinin normal dağılmadığı durumlarda da bu teori geçerlidir.

### 2.2.1 Hata Terimlerinin Varyansının Tahmin Edilmesi

Doğrusal olmayan regresyon parametrelerinin sonuçları hata terimleri varyansı  $\sigma^2$ 'nin tahminini gerektirir. Bu tahmin doğrusal regresyondaki gibidir:

$$MSE = \frac{SSE}{n-p} = \frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-p} = \frac{\sum [Y_i - f(X_i, g)]^2}{n-p} \quad (2.26)$$

Burada “g” ifadesi, en son parametre tahmin vektörüdür. Dolayısıyla kalıntılar, en son parametre tahmin vektörü g kullanılarak tahmin edilen doğrusal olmayan regresyon fonksiyonunun etrafındaki sapmalardır. Doğrusal olmayan regresyon için MSE,  $\sigma^2$ 'nin yansız bir tahmin edicisi değildir. Yalnız örnek boyutu büyük olduğunda eğilim azalır.

### 2.2.2 Büyük Örnek Teorisi

Doğrusal olmayan regresyon modelleri için, hata terimleri bağımsız olduğunda, normal dağıldıklarında ve örnek boyutu yeterince büyük olduğunda aşağıdaki teorem geçerlidir:

Örnek boyutu “n” yeterince büyük olduğunda ve hata terimleri  $\varepsilon_i$ 'ler bağımsız olup  $N(0, \sigma^2)$  ile dağıldıklarında, g'nin örnekleme dağılımı yaklaşık olarak normaldir\*. Ortalama vektörün beklenen değeri yaklaşık olarak:

$$E\{g\} \approx \gamma \quad (2.27)$$

Regresyon katsayılarının, varyans – kovaryans matrisi aşağıdaki şekilde tahmin edilir:

$$s^2\{g\} = MSE(D'D)^{-1} \quad (2.28)$$

Burada D, elde edilen son “g” en küçük kareler tahmincisinin kullanıldığı kısmi türevler matrisidir. Örnek boyutu büyük olduğunda, bağımsız, sabit varyanslı ve normal dağıldıklarında, doğrusal olmayan regresyon için en küçük kareler tahmincisi “g” yaklaşık olarak normal dağılır ve yansızdır. Ayrıca yaklaşık olarak minimum varyansa sahip

---

\* Güriş, S., Çağlayan, E., (2000), “Ekonometri Temel Kavramlar”, DER Yayınları, İstanbul



olduklarından dolayı, hata terimleri normal dağılmadığında da yukarıdaki teorem geçerlidir.

Yukarıdaki teoreme göre, örnek boyutu yeterince büyük olduğunda aynı doğrusal regresyondaki gibi, doğrusal olmayan regresyonda da tahminler yapılarak elde edilen sonuçlar aynı şekilde yorumlanır. Bazı doğrusal olmayan regresyon modellerinde örnek boyutu küçük olduğundan büyük örnek yaklaşımı doğru sonuçlar vermeyebilir.

### 2.2.2.1 Büyük Örnek Özellikleri

Örnek birim sayısı artarak sonsuza yaklaştığında tahmincilerde farklı özellikler aranır. Bu özelliklere büyük örneklem özellikleri denir. Örnek birim sayısının artması, örnekleme dağılımı ne olursa olsun, örnekleme dağılımını normal dağılıma yaklaştıracaktır. Bir tahmincinin dağılımı, örnek birim sayısının artması ile belirli bir dağılıma yaklaşıyorsa, bu dağılım tahmincinin asimptotik dağılımı olarak adlandırılır(Gujarati,2001).

- **Asimptotik Sapmasızlık**

Bir tahmincinin sapmasız olabilmesi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta$$

şartını sağlaması gerekir. Burada  $\hat{\theta}_n$ , tahmin edicinin n gözlemlili bir örnekleme dayandığı anlamına gelir. Örneklem büyüklüğü gittikçe artarken,  $\hat{\theta}$ 'nin beklenen ya da ortalama değeri gerçek değere doğru yakınsarsa,  $\hat{\theta}$ ,  $\theta$ 'nin büyük örneklem için sapmasız bir tahmin edicisidir.

- **Tutarlılık**

Örnek birim sayısı gittikçe büyürken  $\hat{\theta}$  tahmin edicisi gerçek  $\theta$  değerine yakınsarsa  $\hat{\theta}$ 'nin tutarlı bir tahmin edici olduğu söylenir. Diğer bir ifadeyle n'in sonsuza yaklaşması ile  $\hat{\theta}$ 'nin  $\theta$ 'ya eşit olması olasılığı 1'e yaklaşacaktır.  $\varepsilon$ 'nin küçük bir sayı olduğu varsayılırsa, n'in artarak sonsuza yaklaşması ile,

$$P(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) \rightarrow 1$$

olması durumunda  $\hat{\theta}$ ,  $\theta$ 'nin tutarlı tahmincisidir. Bu durumda n sonsuza giderken limit alındığında,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) = 1$$

olacaktır.

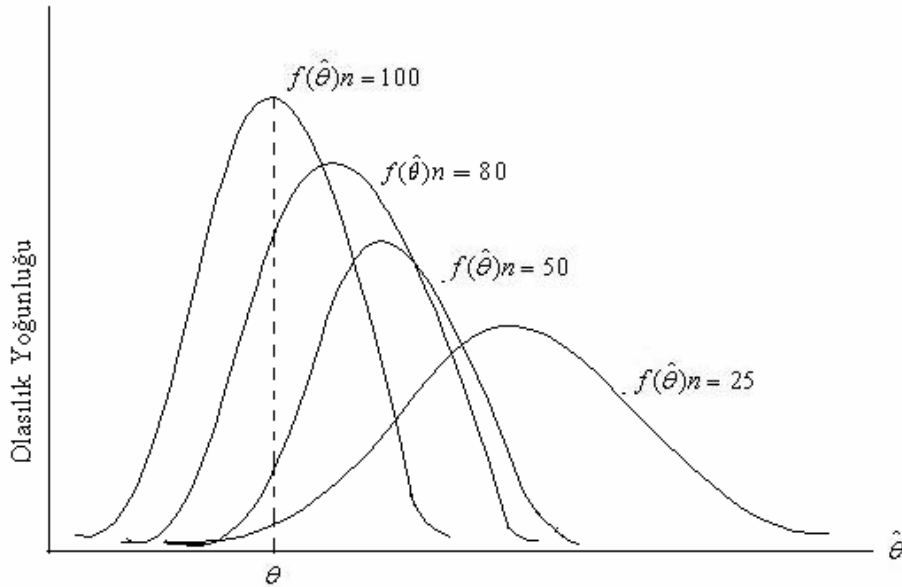
Örnek birim sayısının artması ile ortalama hata karelerinin küçülmesi beklenmektedir.  $n$ 'in artarak sonsuza gitmesi durumunda ortalama hata karesinin de sıfıra yaklaşması gerekir.  $n$  sonsuza yaklaşırken,

$$OHK(\hat{\theta}) \rightarrow 0$$

ise  $\hat{\theta}$ ,  $\theta$ 'nın tutarlı bir tahmincisidir. Bu durumda limit alınırsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} OHK(\hat{\theta}) = 0$$

olacaktır. Bu sonuç tahmincinin tutarlı olup olmadığını anlamak için kullanılabilir. Şekil 2.2'de örneklem büyüklüğü 25, 50, 100 olduğu durumlarda  $\hat{\theta}$ 'nin dağılımı gösterilmiştir. Görüldüğü gibi  $n = 25$  için  $\hat{\theta}$ , sistematik hatalıdır. Çünkü örnekleme dağılımı gerçek  $\theta$  değerinde ortalanmamıştır. Fakat  $n$  büyüdükçe dağılımın ortalaması  $\theta$  değerine yaklaşmaktadır.  $\hat{\theta}$  dağılımının varyansı sıfır olursa,  $\theta$ 'nın tutarlı tahmincisi olur.



Şekil 2.2  $\hat{\theta}$ 'nin örnekleme dağılımının  $\theta$  etrafında yoğunlaşması halindeki tutarlılık grafiği

- **Asimptotik Etkinlik**

Asimptotik etkinlik sadece sonlu ortalama ve sonlu varyansı olan tahminciler için

aranabilecek bir özelliktir. Burada üç şart aranacaktır:

- $\hat{\theta}$ 'nin sonlu ortalama ve sonlu varyanslı bir asimptotik dağılımı var ise,
- $\hat{\theta}$  tutarlı ise,
- $\theta$ 'nin tutarlı tahmincilerinden asimptotik varyansı en küçük olan tahmincisi  $\hat{\theta}$  ise,

$\hat{\theta}$ ,  $\theta$ 'nin asimptotik etkin tahmincisidir. Bir tahminci etkin ise asimptotik olarak da etkin olacaktır.

### 2.2.3 $\gamma_k$ Parametresinin Güven Aralığı

Büyük örneklem teorisine dayanarak, örnek sayısı yeterince büyük olduğunda ve hata terimleri normal dağıldığında  $\gamma_k$  parametresi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{g_k - \gamma_k}{s\{g_k\}} \approx t(n-p) \quad k = 0, 1, \dots, p-1 \quad (2.29)$$

Burada  $t(n-p)$ ; (n-p) serbestlik dereceli t dağılımıdır. Herhangi bir  $\gamma_k$  parametresi için  $1-\alpha$ 'lık güven aralığı aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$g_k \pm t(1-\alpha/2; n-p) s\{g_k\} \quad (2.30)$$

$t(1-\alpha/2; n-p)$ ; (n-p) serbestlik dereceli t dağılımının  $(1-\alpha/2)100$ 'lük kısmıdır.

### 2.2.4 Eşzamanlı Birçok $\gamma_k$ Parametrelerinin Güven Aralığı

Doğrusal olmayan regresyonda, birçok regresyon parametresi için birleşik güven aralıkları, Bonferroni yöntemi ile bulunur.  $1-\alpha$  güven aralığında m parametrenin Bonferroni birleşik güven aralığı aşağıdaki gibi bulunur:

$$g_k \pm Bs\{g_k\} \quad (2.31)$$

Bu aralıkta "B" ifadesinin açılımı aşağıda verilmiştir:

$$B = t(1-\alpha/2m; n-p) \quad (2.32)$$

### 2.2.5 Tek $\gamma_k$ Parametresinin Hipotez Testi

Tek  $\gamma_k$  parametrelili büyük örneklem testinin hipotezi aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$H_0 : \gamma_k = \gamma_{k0}$$

$$H_a : \gamma_k \neq \gamma_{k0}$$

Burada  $\gamma_{k0}$ ,  $\gamma_k$  'nın belirtilen bir değeridir. n yeterince büyük olduğunda  $H_0$  hipotezi  $t^*$  ile test edilir:

$$t^* = \frac{g_k - \gamma_{k0}}{s\{g_k\}} \quad (2.33)$$

Karar kuralı ise şu şekilde oluşur:

Eğer  $|t^*| \leq t(1 - \alpha/2; n - p)$  ise  $H_0$  kabul edilir.

Eğer  $|t^*| > t(1 - \alpha/2; n - p)$  ise  $H_a$  kabul edilir.

### 2.2.6 Birçok $\gamma_k$ Parametrelerinin Hipotez Testi

Eğer büyük örnek testine bağlı birçok, eşzamalı  $\gamma_k$  test edilmek isteniyorsa, genel doğrusal test için uygulanan için uygulanan yöntem burada da geçerli olur: ilk önce uygun full(tam) model oluşturulur,  $SSE(F)$  elde edilir ve uygun indirgenmiş model oluşturulur,  $SSE(R)$  bulunur. Daha sonra doğrusal regresyonda olduğu gibi (2.57)'deki test istatistiği kullanılır:

$$F^* = \frac{SSE(R) - SSE(F)}{df_R - df_F} \div MSE(F) \quad (2.34)$$

Yeterince büyük n değerleri için  $H_0$  kabul edilir ve test istatistiği  $F(df_R - df_F, df_F)$  ile dağılır.

### 3. DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYONUN GEOMETRİSİ

Doğrusal olmayan regresyon modeli aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$Y_n = f(X_n, \theta) + Z_n \quad (3.1)$$

Burada “ $f$ ” beklenti fonksiyonudur, “ $X_n$ ” ise  $n$ .durum için bağımsız değişkenlerden oluşan vektördür. Bu model, doğrusal regresyon modeli gibidir. Fakat bağımlı değişkenler parametrelerin doğrusal olmayan fonksiyonlarıdır.

Doğrusal modeller ile doğrusal olmayan modeller arasındaki farkı belirtmek için, doğrusal olmayan modellerde parametreler “ $\theta$ ” ile gösterilir. Parametrelerin sayısını göstermek için “ $P$ ” kullanılır.

Verilerden oluşan belirli bir grubu analiz ederken  $n = 1, 2, \dots, N$  olmak üzere “ $X_n$ ” vektörü ve “ $\theta$ ” parametresi kullanılarak beklenen (tahmin edilen) bağımlı değişkenler elde edilir. “ $N$ ” boyutlu “ $\eta(\theta)$ ”  $n$  elemandan oluşur ve aşağıdaki gibi gösterilir\*:

$$\eta(\theta) = f(X_n, \theta) \quad n = 1, \dots, N$$

Bu durumda doğrusal olmayan regresyon modeli aşağıdaki gibi yazılır:

$$Y = \eta(\theta) + Z \quad (3.2)$$

Burada  $Z$  asimptotik normal dağılıma sahiptir ve doğrusal modellerde olduğu gibi

$$E[Z] = 0$$

$$\text{Var}(Z) = E[ZZ^T] = \sigma^2 I \text{ 'dir.}$$

#### 3.1 Çevrilebilen Doğrusal Modeller(Transformably Linear Models)

Dönüşümle doğrusal hale getirilebilen modellerdir. Bu modellerin doğrusal olmayan regresyonda bazı avantajları vardır. Örneğin bu modellerde başlangıç değerleri elde etmek çok kolaydır. Fakat dikkat edilmesi gereken bir durum vardır. Verilerde yapılacak bir dönüşümün, hata teriminin dönüşümüne de yol açtığı ve dolayısıyla hata terimlerinin varsayımlarını etkilediği unutulmamalıdır. Verileri dönüştürmek doğrusal davranış

---

\* Bates, D. M. ve Watts D. G., (1988)

gösterebilir ama hata terimlerini etkiler. Dolayısıyla her zaman uygulanması uygun değildir. Örneğin aşağıdaki Michaelis – Menton modeli ele alındığında:

$$f(X, \theta) = \frac{\theta_1 X}{\theta_2 + X} \quad (3.3)$$

gerçek modeldir. Bu modele dönüşüm uygulandığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{1}{\theta_1} + \frac{\theta_2}{\theta_1} \cdot \frac{1}{X} \\ &= \beta_1 + \beta_2 u \end{aligned}$$

### 3.2 Şartlı Doğrusal Parametreler(Conditionally Linear Parameters)

Modelde parametre tahmini yapılırken, bir parametrenin tahmin edilmesi diğer parametreye bağlıysa, bu parametreye şartlı parametre denir. (3.3)'deki modelde, “ $\theta_1$ ” parametresi şartlı doğrusal parametreye bir örnektir. Çünkü beklenti fonksiyonunun  $\theta_1$ 'e göre türevi,  $\theta_1$  içermez. Dolayısıyla  $\theta_1$  elde edildikten sonra,  $\theta_1$ 'e göre  $\theta_2$  parametresi elde edilir.

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_1} = \frac{X}{\theta_2 + X}, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta_2} = \frac{-\theta_1 X}{(\theta_2 + X)^2}$$

### 3.3 Beklenti Yüzeyinin Geometrisi(The Geometry of Expectation Surface)

Z hata terimi, asimptotik normal dağılıma sahiptir. Dolayısıyla bu dağılımın varsayımlarını kullanarak N-boyutlu bağımlı değişken uzayında Öklit geometrisi kullanılarak, parametrelerin en küçük kareler tahmincisi olan  $\hat{\theta}$  elde edilebilir. N tane vektörden oluşan  $\eta(\theta)$ , P boyutlu yüzeyi tanımlar. Bu yüzeye bağımlı değişken uzayında “Beklenti Yüzeyi(expectation surface)” denir. Beklenti yüzeyindeki noktaya bağlı en küçük kareler tahmincileri aşağıdaki gibi oluşur:

$$\hat{\eta} = \eta(\hat{\theta})$$

$\hat{\theta}$ , Y'ye en yakın noktadır ve kalıntı kareleri toplamını minimize eden değerdir:

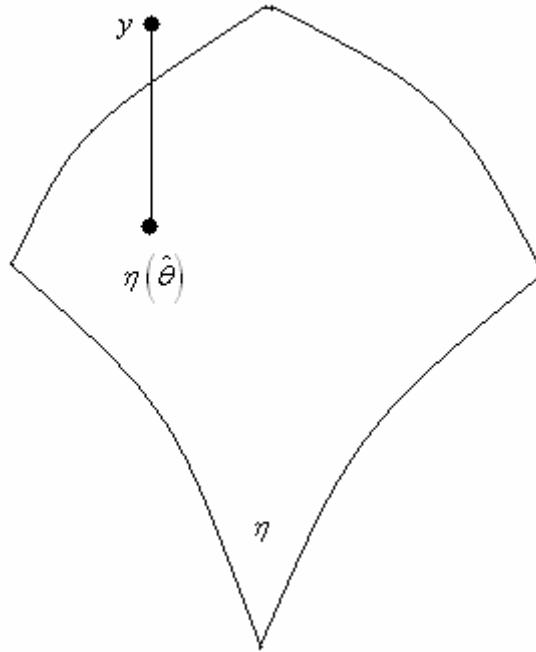
$$S(\theta) = \|Y - \eta(\theta)\|^2$$

Beklenti yüzeyi, doğrusal modellerin tersine eğriseldir ve sonlu büyüklüktedir. Doğrusal modellerde beklenti yüzeyi düzlemsel ve sonsuz büyüklüktedir. Bu noktalar,  $\theta$  parametre

doğrusunda eşit aralıklarla gösterilirken, beklenti yüzeyinde farklı aralıklarla ifade edilirler. Doğrusal modellerin tersine, beklenti yüzeyi sonsuz bir düzlem değildir. Parametre düzlemi doğrularla ifade edilirken, bunlar beklenti yüzeyine taşındığında artık doğru şeklinde ifade edilmezler.

P parametrelili doğrusal olmayan modeller için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- Beklenti yüzeyi,  $\eta(\theta)$ , N boyutlu bağımlı değişken uzayında, P boyutlu eğrisel yüzeydir.
- Parametre uzayındaki parametre doğruları, eğrisel beklenti yüzeyinde eğrilere dönüşür.
- $\theta$ 'daki birim alanların,  $\eta(\theta)$ 'da ne kadar genişlediğini hesaplayan Jakobian determinanı, parametrelere bağlı olduğundan sabit değildir(türevler alındığında sonuçlar  $\theta$ 'ya bağlı olduğu için) .



Şekil 3.1 Doğrusal olmayan EKK problemi için değişken uzayı(Robert I. Jennrich, 1995)

### 3.4 En Küçük Kareler Tahmincilerinin Elde Edilmesi

En küçük kareler tahmincilerini bulma problemi geometrik olarak kolayca açıklanabilir:

Y verilerden oluşan vektör,  $f(X_n, \theta)$  beklenti fonksiyonu ve  $X_n (n = 1, \dots, N)$  bağımsız değişkenlerden oluşan vektör olmak üzere, aşağıdaki sıralama ile bulunabilir:

- Beklenti yüzeyinde Y'ye en yakın nokta olan  $\hat{\eta}$  bulunur.
- $\hat{\eta}$  noktasına bağlı olan  $\hat{\theta}$  parametre vektörü bulunur.

Doğrusal model için beklenti yüzeyi sonsuz büyüklüğün düzlemidir. Düzlemde Y'ye en yakın nokta kolayca bulunabilir.

Doğrusal olmayan modellerde beklenti yüzeyi eğriseldir ve sonlu büyüklüktedir (en azından köşelere sahiptir). Dolayısıyla  $\hat{\eta}$ 'yi bulmak oldukça zordur.  $\hat{\eta}$  bilinse bile, o noktaya uygun  $\hat{\theta}$  parametre düzlemi koordinatlarını belirlemek zordur. Bu gibi zorlukların üstesinden gelebilmek için, en küçük kareler parametrelerini belirlemede "iteratif teknikler" kullanılır. Bu iteratif tekniklerden bazıları aşağıda anlatılmıştır.

### 3.4.1 Gauss – Newton Yöntemi

Gauss tarafından önerilen bir yöntemdir. Bu yöntem, beklenti fonksiyonu için doğrusal yaklaşımlar kullanarak, iteratif bir şekilde  $\theta$  için  $\theta^0$  başlangıç tahmini geliştirmektir. Herhangi bir değişim olmadığı ana kadar bu tahminleri geliştirmeye devam etmek şeklindedir.

$f(X_n, \theta)$  beklenti fonksiyonu Taylor serisinin 1. açılımı kullanılarak yazıldığında:

$$f(X_n, \theta) \approx f(X_n, \theta^0) + v_{n1}(\theta_1 - \theta_1^0) + v_{n2}(\theta_2 - \theta_2^0) + \dots + v_{np}(\theta_p - \theta_p^0)$$

Burada;

$$v_{np} = \left. \frac{\partial f(X_n, \theta)}{\partial \theta_p} \right|_{\theta^0} \quad p = 1, 2, \dots, P$$

N durum için yazılırsa;

$$\eta(\theta) \approx \eta(\theta^0) + V^0(\theta - \theta^0) \quad (3.4)$$

Burada  $V^0$ ,  $N \times P$  boyutlu türev matrisidir ve  $\{v_{np}\}$  elemanlarından oluşur. Bu ifade yaklaşık olarak  $z(\theta) = Y - \eta(\theta)$  ile ifade edilen kalıntılara eşittir.

$$z(\theta) \approx Y - [\eta(\theta^0) + V^0 \delta] = z^0 - V^0 \delta \quad (3.5)$$



$z^0 = Y - \eta(\theta^0)$  ve  $\delta = \theta - \theta^0$  ile ifade edilir.

Daha sonra  $\|z^0 - V^0 \delta\|^2$  ile ifade edilen kalıntı kareleri toplamını minimize eden ve  $\delta^0$  ile gösterilen ‘‘Gauss increment(artışı)’’ hesaplanır. İşlemleri kolaylaştırmak için QR ayrıştırması kullanılır ve aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$V^0 = QR = Q_1 R_1$$

$$w_1 = Q_1^T z^0$$

$$\hat{\eta}^1 = Q_1 w_1$$

$$R_1 \delta^0 = w_1$$

Burada  $Q$ ,  $N \times N$  boyutlu ve ortogonal bir matristir.  $R$  ise  $N \times P$  boyutlu bir matristir.

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R_1$ ,  $P \times P$  boyutlu bir matristir.

$$Q = [Q_1 | Q_2]$$

$Q_1$ ,  $Q$  matrisinin ilk  $P$  sütunundan oluşur.  $Q_2$  ise son  $N - P$  sütunundan oluşur.

$\hat{\eta}_1$  noktası aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\hat{\eta}_1 = \eta(\theta^1) = \eta(\theta^0 + \delta^0)$$

Bu şekilde elde edilen  $\hat{\eta}_1$  noktası  $Y$ 'ye  $\eta(\theta^0)$ 'dan daha yakındır. Daha iyi bir parametre değeri için  $\theta^1 = \theta^0 + \delta^0$  hesaplanır ve yeni  $z^1 = Y - \eta(\theta^1)$  kalıntıları, yeni  $V^1$  türev matrisi ve yeni artış değeri hesaplanarak iterasyon tekrar edilir. Bu süreç yakınsama(convergence) sağlanana kadar devam eder.

#### 3.4.1.1 Adım Etkisi(Step Factor)

Gauss – Newton iterasyonu, kareler toplamında artışa sebep olur.  $\eta(\theta^0)$  etrafında yeteri kadar küçük bir bölge için, doğrusal yaklaşım gerçek yüzeye oldukça yaklaşacaktır.  $\delta^0$  yönünde atılacak bir adım, kareler toplamını azaltacaktır. Burada devreye ‘‘adım faktörü(step factor)’’

kavramı girer. Adım faktörü “ $\lambda$ ” ile gösterilir ve aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\theta^1 = \theta^0 + \lambda \delta^0$$

$\lambda$  aşağıdaki ifadeyi karşılaştırmak için seçilir:

$$S(\theta^1) < S(\theta^0)$$

$\lambda$ 'yı seçmenin genel yolu,  $\lambda = 1$ 'i kullanarak,  $S(\theta^1) < S(\theta^0)$  sağlanana kadar değeri yarıya bölmektir. Gauss – Newton algoritmindeki bu geliştirme işlemi Box(1960) ve Hartley(1961) tarafından önerilmiştir.

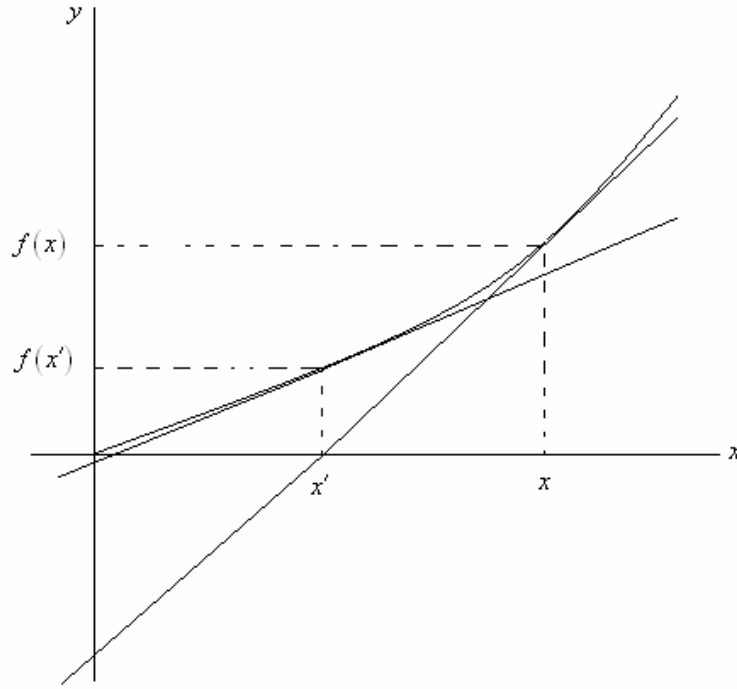
### 3.4.2 Newton – Raphson Yöntemi

Doğrusal olmayan parametreler tahmini için kullanılan Gauss – Newton yöntemi genel Newton – Raphson yönteminin özel bir durumudur. Bu yöntemde kuadratik yaklaşımlar kullanılır. Basit olarak şu şekilde anlatılabilir: İterasyona başlanabilmesi için bir başlangıç değerinin belirlenmesi gerekir. Bu değer  $x$  olduğu varsayılırsa, bu noktadan çıkılan bir dikin eğriyi  $f(x)$  noktasında kestiği düşünülün. Bu noktadan bir teğet çizildiğinde, bu teğet  $X$  eksenini  $x'$  noktasında keser. Bu durumda ikinci iterasyon başlar ve aynı işlemler ikinci iterasyon için tekrar edilir. Yani;

$\frac{f(x)}{x - x'} = m = f'(x)$  şeklinde ifade edilebilir. Burada  $m$ ,  $x$  noktasındaki teğetin eğimini gösterir. Bu ifade düzenlendiğinde,

$x' = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$  elde edilir. Yeni elde edilen nokta  $x'$  noktasıdır. Aynı işlemler bu nokta

içinde tekrar edilerek süreç  $f(x) = 0$ 'ı sağlayan  $x$  değeri elde edilene kadar devam eder. Bu ifade Şekil 3.3'de gösterilmiştir.



Şekil 3.2 Newton – Raphson yönteminin işleyişi

Doğrusal olmayan regresyonda kullanılan Newton – Raphson yöntemi ise aşağıdaki şekilde açıklanabilir:

$\theta^0$  yakınında,  $S(\theta)$  ikinci mertebe kısmi türevlere kadar açılan Taylor açılımı ile aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$S(\theta) = S(\theta^0) + \omega'(\theta - \theta^0) + (\theta - \theta^0)' \frac{\Omega}{2} (\theta - \theta^0)$$

Burada  $\omega = \frac{\partial S}{\partial \theta}$ , dir,  $\theta^0$  için hesaplanan  $S(\theta)$ 'nin gradyantıdır. Ayrıca  $\Omega = \frac{\partial^2 S}{\partial \theta \partial \theta'}$ , dir,  $\theta^0$  için hesaplanan  $S(\theta)$ 'nin Hessianıdır.

Gradyant sıfır olduğu zaman, yaklaşık kareler toplamı fonksiyonunun sabit noktası elde edilir.

$$\omega + \Omega(\theta - \theta^0) = 0$$

Eğer  $\Omega$  pozitif belirli olursa (tüm özdeğerleri pozitif), bu sabit nokta minimum olur. Eğer  $\Omega$  pozitif belirliyse, Newton – Raphson adımı aşağıdaki gibi oluşur:

$$\delta^0 = -\Omega^{-1}\omega$$

Fonksiyon için:

$S(\theta) = (y - \eta)'(y - \eta)$ 'dır. Bu fonksiyonun gradyanı  $\omega = -2V^T(y - \eta)$ 'dır.  $V$  türev matrisi olmak üzere Hessian'ı  $\Omega = 2V^T V - 2\frac{\partial V^T}{\partial \theta^T}(y - \eta)$  şeklinde gerçekleşir.

Böylece Gauss – Newton artışı, ikinci türevde  $\partial V^T / \partial \theta^T$  ifadesini sıfır yapan Newton – Raphson terimine eşit olur.

### 3.4.3 Levenberg – Marquardt Uzlaşması

Gauss – Newton iterasyonlarında düzensiz hareketlere neden olan durum,  $V$  türev matrisinin tekil olmasına neden olan sütunları arasındaki çoklubağlantı sorunudur(collinearity).  $V$  matrisi tekil olduğunda,  $\delta$  oldukça büyük olur ve bu parametrelerin parametre uzayında istenmeyen bölgelere ulaşmasına neden olur.

Tekillik sorununu gidermenin bir yolu artma miktarını normal denklemler yerine QR ayrıştırması gibi sabit bir yolla geliştirmektir.

Diğer bir yöntem ise Gauss – Newton artışını Levenberg'in(1944) önerdiği gibi aşağıdaki gibi geliştirmektir:

$$\delta(k) = (V^T V + kI)^{-1} V^T (y - \eta)$$

Ya da Marquart'ın(1963) önerdiği gibi:

$$\delta(k) = (V^T V + kD)^{-1} V^T (y - \eta) \quad (3.7)$$

Burada  $k$  şart faktörü,  $D$  ise köşegen matristir. Buna “Levenbeg – Marquardt yaklaşımı” denir çünkü  $\delta(k)$ 'nın yönü, Gauss – Newton artışı ( $k \rightarrow 0$ ) ile steepest descent  $V^T (y - \eta) / \|V^T (y - \eta)\| (k \rightarrow 0)$  yönünün ortasındadır.

Levenberg – Marquardt yaklaşımını uygulamak Gauss – Newton algoritmini uygulamaktan daha zordur. Artış değerini  $V^T V$  matrisinin tersinin terimleriyle ifade etmek yerine  $V$  matrisinin QR ayrıştırması kullanılması daha uygun olur. En küçük kareler çözümü Levenberg artışı olduğu sürece sistem aşağıdaki gibi ifade edilir:

Türev matrisi:

$$\begin{bmatrix} V \\ \sqrt{k}I \end{bmatrix}$$

Bağımlı değişken vektörü:

$$\begin{bmatrix} y - \eta \\ 0 \end{bmatrix} \text{ olarak ifade edilir.}$$

Marquart artışı için türev matrisi aşağıda ifade edilen şekilde değişir:

$$\begin{bmatrix} V \\ \sqrt{k}D^{1/2} \end{bmatrix}$$

#### 3.4.4 Sayısal Türevler(Numerical Derivatives)

Algoritma uygulamalarında parametrelere bağlı olarak türevler kullanılır. Bu türevleri elde etmek ve bunları kodlamak doğrusal olmayan analizde en can sıkıcı ve hata ortaya çıkarıcı durumlardır. Genel kural olarak, bir tahminin doğruluğu açısından türevler önerilir.

p. parametre için ileri fark alma yöntemi ile, p. hariç modelin bütün parametrelerin şimdiki değerleri kullanılarak oluşturulan model ile artış değeri  $\theta_p(1 + \varepsilon)$ 'ye yükseltilir. Fonksiyon değerlerinin farklarını cüzi bir kısım olan  $\varepsilon\theta_p$  ile bölmek yaklaşık türev değerini verir. Bu işlem her iterasyonda beklenen bağımlı değişken vektörü için 1+P değerlendirme gerektirir.

#### 3.4.5 Türevden Bağımsız Yöntemler(Derivatives – Free methods)

Yaklaşık türevleri kullanmayan bazı serbest türev yöntemleri vardır. Ralston ve Jennrich(1978), DUD(doesn't use derivatives=türevleri kullanmayan) adı altında bir yöntem önermişlerdir. Bu yöntem, beklenti yüzeyinde teğet düzlemi yaklaşımı yerine, ikinci bir "secant" düzlem kullanılmasına dayanır.

DUD'u kullanmak için öncelikle  $\theta^0$  başlangıç değeri geliştirilmelidir. Bu parametreler daha sonra  $\eta_1, \eta_2, \dots$  beklenti vektörlerini hesaplamak için kullanılır ve beklenti yüzeyini P+1 noktada yakalayan secant düzlemi oluştururlar. Doğrusal koordinatlar kümesi secant düzlemde oluşur ve y'nin secant düzlem üzerindeki izdüşümü parametre düzlemi üzerinde oluşur. Bu bilgi yeni bir  $\theta$  vektörü hesaplamak için kullanılır. Bu yeni vektör  $\theta'$  ile gösterilir ve  $\eta(\theta')$  y'ye diğer parametre vektörlerinden daha yakın olur.  $\eta$ 'ya göre oluşan  $\theta$

parametre vektörü  $y$  'den en uzak vektör olur ve  $\theta'$  bu parametre vektörü yerine kullanılır. Bu süreç yakınsama sağlanana kadar devam eder.

$P$  parametre olduğu genel durumlarda,  $i$ .iterasyonda  $\theta_1^i, \theta_2^i, \dots, \theta_{p+1}^i$  değerlerini  $\eta(\theta)$  değerlerinde kullanarak  $P$  boyutlu secant düzlemi oluşturulur. Doğruluk için,  $\theta_{p+1}^i$  'nin  $y$  'ye en yakın nokta olduğu kabul edilir.  $p$ . sütunu  $\theta_p^i - \theta_{p+1}^i$  'ye eşit olan  $P \times P$  boyutlu  $T$  matrisi ve  $p$ . sütunu  $\eta(\theta_p^i) - \eta(\theta_{p+1}^i)$  'e eşit olan  $N \times P$  boyutlu  $H$  matrisi oluşturulur. Bu ifade formül olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\hat{\alpha} = (H^T H)^{-1} H^T [y - \eta(\theta_{p+1}^i)]$$

$$\theta_{yeni} = \theta_{p+1}^i + T \hat{\alpha}$$

$$\theta_{trial} = \theta_{yeni} \lambda + \theta_{p+1}^i (1 - \lambda)$$

Ralston ve Jennrich,  $\lambda$  'yı  $1, 1/2, -1/4, 1/8, -1/16, \dots$  sıralı (dizi şeklindeki) değerlerden seçerek, adım faktörünün negatif olmasına izin verirler. Yakınsama sağlanan durumda doğrusal yaklaşımlı parametre kovaryans matrisi  $s^2 T (H^T H)^{-1} T^T$  olarak kullanılır, burada  $s^2$  normal varyans tahminidir.

### 3.4.6 Şartlı Doğrusal Parametrelerin Çıkarılması

Doğrusal olmayan regresyon problemini basitleştirmenin bir yolu şartlı doğrusal parametreleri elemektir. Eğer parametre vektörü  $\theta$ ,  $P_1$  boyutlu şartlı doğrusal  $\beta$  parametreleri ve  $P_2$  boyutlu doğrusal olmayan  $\phi$  parametreleri olarak ikiye bölünürse ( $P = P_1 + P_2$  olmak üzere), beklenen bağımlı değişken aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\eta(\beta, \phi) = A(\phi)B$$

Bu fonksiyonda  $A$ ,  $N \times P_1$  boyutlu bir matris olup, doğrusal olmayan parametrelere dayanır.  $\phi$  'nın herhangi bir değeri için,  $\beta$  'nin şartlı tahmini:

$$\hat{\beta}(\phi) = A^+(\phi)y$$

olur. Burada  $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$  'dir. Ortak beklenen bağımlı değişkenler aşağıdaki gibi oluşur:

$$\hat{\eta}(\phi) = A(\phi)A^+(\phi)y$$

Golub ve Pereyra(1973)'de indirilmiş kareler toplamı fonksiyonunu minimize etmek için kullanılan Gauss – Newton algoritması aşağıdaki gibidir:

$$S_2(\phi) = \|y - A(\phi)\hat{\beta}(\phi)\|^2$$

Bu formül de sadece doğrusal olmayan parametrelere dayanmaktadır.

### 3.4.7 Doğrusal Olmayan En Küçük Karelerin Geometrisinin Adımları

Geometrik olarak Gauss – Newton yaklaşımı aşağıdaki adımlardan oluşur:

- Taylor serisi açılımları kullanılarak  $\eta(\theta)$ ,  $\eta^0 = \eta(\theta^0)$ 'a yaklaştırılır(Düzlemsel yaklaşımdır. Beklenti yüzeyi  $\eta(\theta)$ ,  $\eta(\theta^0)$ 'deki teğet düzlemi yardımıyla  $\eta(\theta^0)$ 'a yaklaştırılır).
- $z^0 = Y - \eta^0$  kalıntı vektörü elde edilir.
- $z^0$  kalıntılarının teğet düzlemine üzerindeki izdüşümü kullanılarak  $\hat{\eta}^1$  (Y'ye en yakın nokta) bulunur.
- $\hat{\eta}^1$ , doğrusal koordinat sisteminde çizilerek,  $\delta^0$  artışı elde edilir.
- $\eta(\theta^0 + \lambda\delta^0)$  bulunur.

### 3.5 Yakınsama(Convergence)

Gauss – Newton metodu,  $\theta$  değerleri iterasyon sırasında sabit kalıncaya(dengede oluncaya) kadar devam eder. Bu her parametre değeri için bir önceki parametre değeri kullanılarak bulunur. Bu yakınsamayı ortaya çıkaran temel kriterdir. Yakınsama için kullanılan bir başka temel kriter de, birbirini izleyen iterasyonlara bağlı olarak değişen en küçük kareler toplamının küçük çıkmasıdır.

Doğrusal olmayan en küçük karelerin geometrisini incelemek, yakınsama ile ilgili daha iyi bilgi verir. Kalıntı vektörü  $Y - \eta(\theta)$ , beklenti yüzeyine dik(ortogonal) olduğunda ve bundan dolayı beklenti yüzeyindeki teğet düzlemine dik olduğunda kritik nokta elde edilir. Böylece, kalıntı vektörünün teğet düzlemine olan dikliği, yakınsama kriteri olarak kabul edilir.

Uygulamada, en iyi dikliği(ortagonallığı) elde etmek için parametre vektöründe küçük değişiklikler yaparak zaman ve çaba harcamak gereksizdir. Dolayısıyla kalıntı vektörünün, “yeterli derecede dik(sufficiently orthogonal)” olduğunu belirtmek için “tolerance

level(dayanıklılık sınırı)” ortaya çıkar. Bunu elde etmenin bir yolu en küçük kareler tahmincilerinde istatistiksel değişkenliği hesaba katmaktır.

Eğer teğet düzleminin, beklenti yüzeyindeki  $\hat{\theta}$ 'ya iyi bir yaklaşım oluşturduğu varsayılırsa,  $\theta$  için olasılık bölgesi, teğet düzlemindeki yuvarlak alana bağlıdır. Bu alan yarıçapın  $S\sqrt{\hat{\theta}}$ 'ya oranı ile orantılıdır.

Bu kriter bilinmeyen en küçük kareler vektörü  $\hat{\theta}$ 'yı içerir. Dolayısıyla bu kriter geliştirilerek  $\hat{\theta}$  için,  $\theta^i$  tahmincisi oluşturulur ve aşağıdaki “görelî denge yakınsama kriteri(relative offset convergence criterion)” hesaplanır.

$$\frac{\|Q_1^T(Y - \eta(\theta^i))\| / \sqrt{P}}{\|Q_2^T(Y - \eta(\theta^i))\| / \sqrt{N - P}} \quad (3.8)$$

V matrisinin QR ayrıştırmasından elde edilen Q matrisinin ilk P sütunundan  $Q_1$  ve N-P sütunundan da  $Q_2$  oluşur. Bu kriter, kalıntı vektörünün teğet düzlemi ile yaptığı açının kotanjantıdır. Yakınsama, modelin uygun olduğu varsayımı altında parametreler için en iyi tahminin elde edildiğini belirtir. Yakınsamanın ifade edilebilmesi için görelî denge kriterinin 0,001'den az olması beklenir.

### 3.6 Doğrusal Yaklaşımları Kullanarak Doğrusal Olmayan Regresyon Sonuçları Elde Etmek

Gauss – Newton algoritmi,  $\hat{\theta}$ 'yı hesaplamak için, V türev matrisini her iterasyon için oluşturarak, artışları ve yakınsama değerini hesaplar.

$$\eta(\theta) = \eta(\hat{\theta}) + \hat{V}(\theta - \hat{\theta}) \quad (3.9)$$

Dolayısıyla, EKK parametre tahmincileri kullanılarak elde edilen türev matrisli doğrusal olmayan modeller için, doğrusal yaklaşımlar kullanılarak sonuçlar bulunabilir.

#### 3.6.1 Parametreler için Yaklaşık Güven Bölgeleri

Doğrusal durumda  $1 - \alpha$  'lık parametre güven bölgesi aşağıdaki gibi ifade ediliyordu:

$$(\beta - \hat{\beta})^T X^T X (\beta - \hat{\beta}) \leq P s^2 F(P, N - P; \alpha) \quad (3.10)$$

Geometrik olarak yukarıdaki bölge meydana gelir çünkü beklenti yüzeyi bir düzlemdir ve



kalıntı vektörü bu düzleme diktir. Dolayısıyla bu beklenti düzleminde noktaların oluşturduğu bölge disk şeklindedir. Bu disk, beklenti yüzeyinden parametre düzlemine taşındığında elips olur.

Doğrusal olmayan modeller için güven bölgesi (3.10)'e benzer bir eşitliktir:

$$(\theta - \hat{\theta})^T \hat{V}^T \hat{V} (\theta - \hat{\theta}) \leq P s^2 F(P, N - P; \alpha) \quad (3.11)$$

Ya da,  $\hat{\theta}$  ile hesaplandığında türev matrisi  $\hat{V} = \hat{Q}_1 \hat{R}_1$  olmak üzere;

$$(\theta - \hat{\theta})^T \hat{R}_1^T \hat{R}_1 (\theta - \hat{\theta}) \leq P s^2 F(P, N - P; \alpha) \quad (3.12)$$

ile hesaplanır.

(3.10)'daki bölgenin sınırı:

$$\left\{ \theta = \hat{\theta} + \sqrt{P s^2 F(P, N - P; \alpha)} \hat{R}_1^{-1} d \mid \|d\| = 1 \right\} \quad (3.13)$$

$\theta_p$  için yaklaşık standart hata,  $\hat{R}_1^{-1}$ 'nin p.sütununun uzunluğunun s katıdır.

### 3.6.2 Beklenen Bağımlı Değişkenler için Yaklaşık Güven Bandları

Doğrusal olmayan regresyonda beklenen bağımlı değişken için, doğrusal yaklaşım ile elde edilen güven aralıkları ve bandları, doğrusal regresyon için kullanılan aşağıdaki denklemlerin benzerleri geliştirilerek kullanılır.

$$se(\hat{\beta}) = s \sqrt{\left\{ (X^T X)^{-1} \right\}_{pp}} \quad (3.14)$$

$$X_0^T \hat{\beta} \pm s \sqrt{X_0^T (X^T X)^{-1} X_0} \cdot t(N - P; \alpha/2) \quad (3.15)$$

Bu denklemlerde tahmin değerleri  $X_0^T \hat{\beta}$  yerine  $f(X_0, \hat{\theta})$  ile X matrisi  $\hat{V}$  ile ve türev vektörü  $X_0$ ,  $v_0$  ile değiştirilir:

$$v_0 = \left. \frac{\partial f(X_0, \theta)}{\partial \theta^T} \right|_{\hat{\theta}}$$

Bu durumda  $1 - \alpha$  'lık güven aralığı:

$$f(X_0, \hat{\theta}) \pm s \|v_0^T \hat{R}_1^{-1}\| t(N - P; \alpha/2)$$

ve  $1 - \alpha$  'lık güven bandı:

$$f(X, \hat{\theta}) \pm s \left\| v^T \hat{R}_1^{-1} \right\| \sqrt{PF(P, N - P; \alpha)} \quad (3.16)$$

Güven bandları doğrusal olmayan modellerde doğrusal modellerden daha farklıdır.

$Y = \eta(\theta) + Z$  modelinde,  $Z$  hata terimi asimptotik normal dağılıma sahip olduğundan, benzerlik yaklaşımı kullanılarak elde edilen istatistiksel sonuçlar, bağımlı uzaydaki beklenti yüzeyinin geometrisine bağlıdır.

Asimptotik normal varsayımlı doğrusal ve doğrusal olmayan modeller, olasılık sınırı(likelihood region),  $\eta(\theta)$ 'dan  $y$ 'ye uygun uzaklıkta olduğundan,  $\theta$ 'nın bütün değerlerini kapsar.

Güven bölgesi bir sınır ile birleştirilmek istenirse, doğrusal modeldeki;

$$S(\beta) = S(\hat{\beta}) \left\{ 1 + \frac{P}{N - P} F(P, N - P; \alpha) \right\}$$

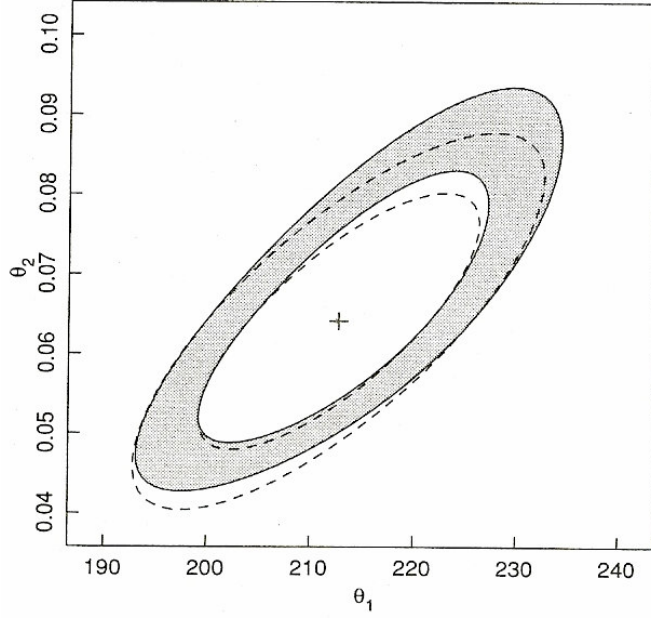
ifadesine benzer şekilde,  $1 - \alpha$  'lık birleşik olasılık bölgesi(joint likelihood region), bütün  $\theta$  değerleri için aşağıdaki gibi gerçekleşir:

$$S(\theta) \leq S(\hat{\theta}) \left[ 1 + \frac{P}{N - P} F(P, N - P; \alpha) \right] \quad (3.17)$$

Doğrusal model için bu ifade, beklenti yüzeyi ile  $y$  merkezli kürenin kesişimidir. Yüzey düzlemsel olmadığı halde ve bu noktalar kesişim bölgesinde tanımlanmadığı halde, bunları beklenti yüzeyinden parametre uzayına aktarmak oldukça zordur.

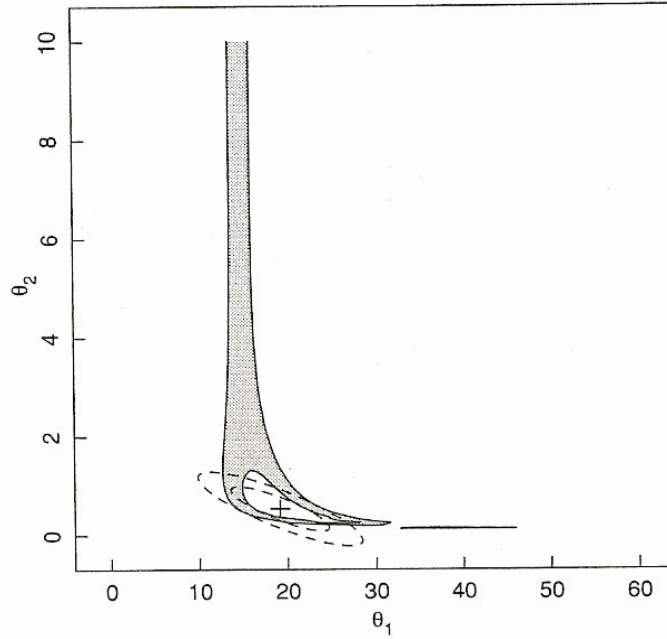
$P = 2$  olduğu durumlarda,  $\theta$ 'da olasılık sınırı, standart eşdüzeltim yöntemiyle(standart contouring methods) ifade edilebilir. Kesişen  $\theta$  değerleri için  $S(\theta)$ 'yı ölçmek ve bu kesişen hatlar sisteminde( for a grid), dik doğru parçalarıyla bu sınırı biçimlemek olarak tanımlanabilir.

Olasılık kontürleri için aşağıda iki örnek gösterilmiştir. Şekil 3.3'de EKK tahmincisi  $+$  ile gösterilmiştir. Kontürler oval biçimde ve eş merkezli oluşmuşlardır. EKK tahmincisi olan  $\hat{\theta}$  ise bölgenin merkezinde oluşmuştur. Doğrusal yaklaşımlı elipsler kesikli çizgilerden oluşmaktadır ve iyi bir yaklaşım yapıldığını göstermektedir.



Şekil 3.3 İki parametrelı doğrusal olmayan regresyon modeli için %80 ve %95'lik olasılık kontürleri(Bates ve Watts, 1988)

Şekil 3.4'de ise, kontürlerin elips şeklinde olmadığı daha çok hiperbole benzediği görülmektedir. + ile ifade edilen bölge EKK tahmincisi olan  $\hat{\theta}$ 'dir. Görüldüğü gibi grafik  $\theta_2$ 'den  $\infty$ 'a doğru pozitif yönde genişlemektedir. Dolayısıyla doğrusal yaklaşımlı elipsler bu örnek için yeterli değildir.



Şekil 3.4 İki parametrelı doğrusal olmayan regresyon modeli için %80 ve %95'lik olasılık kontürleri(Bates ve Watts, 1988)

#### 4. DOĞRUSAL OLMAYAN EĞRİSELLİK ÖLÇÜLERİ

Doğrusal yaklaşımlı sonuç bölgeleri  $\hat{\theta}$ 'da değerlendirilen beklenti fonksiyonunun 1.dereceden Taylor serisi açılımı ile elde edilir.  $V$  ,  $\hat{\theta}$  için hesaplanan türev matrisi  $(1 - \alpha)$ 'lık güven bölgesi:

$$(\theta - \hat{\theta})^T \hat{V}^T \hat{V} (\theta - \hat{\theta}) \leq P_{S^2} F(P, N - P; \alpha) \quad (4.1)$$

Geometrik olarak, doğrusal yaklaşımlı sonuç bölgesi olan (4.1), ilgilenilen bölge üzerinde,  $\theta$ 'nın  $\eta(\theta)$ 'ya göre çizimi ile  $\hat{\eta} + \hat{V}(\theta - \hat{\theta})$  elde edilir.

Beklenti yüzeyinin ne kadar düz olduğunu belirlemek için ve teğet düzleminde parametre doğrularının hepsinin aynı biçimde olup olmadığını anlamak için, beklenti fonksiyonunun ikinci türevleri kullanılır. Bu türevlerle, saf eğrisellik ölçütleri ve parametrelerin doğrusal olmayan durumlardaki etkileri elde edilir. Eğrisellikler aynı zamanda, beklenti fonksiyonunun “reparametrization(yeniden parametrelendirme)” araştırmalarında kullanılır. En geçerli doğrusal yaklaşımlı sonuç parametrelerine sahip modeller elde edilir.

##### 4.1 Hız ve İvme Vektörleri(Velocity and Acceleration Vectors)

Doğrusal modellerin temel özelliği, parametrelere göre beklenti fonksiyonunun ikinci ya da daha yüksek dereceden türevleri alındığında sonucun sıfır olmasıdır. Dolayısıyla modelin doğrusal olmamasını ölçmek için beklenti fonksiyonunun ikinci türevleri araştırılır. Birinci ve ikinci türevleri ifade edebilmek için “nokta” gösterimi kullanılacaktır.

Doğrusal olmayan  $\eta(\theta)$  modeli için  $N \times P$  boyutlu türev matrisi  $\dot{V}$ 'nın elemanlarıyla aşağıdaki gibi gösterilir\*:

$$\left\{ \dot{V} \right\}_{np} = \frac{\partial f(x_n, \theta)}{\partial \theta_p} \quad (4.2)$$

$$= \left[ \left. \frac{\partial v_1(\theta)}{\partial \theta_p} \right|_{\theta=\hat{\theta}} \quad \dots \quad \left. \frac{\partial v_n(\theta)}{\partial \theta_p} \right|_{\theta=\hat{\theta}} \right], p = 1, 2, \dots, P$$

---

\* Bates, D. M. ve Watts D. G., (1988)

$$\dot{V}(\hat{\theta}) = [\dot{v}_1(\hat{\theta}) \cdots \dot{v}_n(\hat{\theta})] \quad , \quad n = 1, \dots, N$$

Hız vektörleri teğet düzleminde  $n -$  boyutlu uzayı oluştururlar. Ve  $N \times P \times P$  boyutlu ikinci türev sırası  $\ddot{V}$  şeklinde ifade edilir ve aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\left\{ \ddot{V}_{npq} \right\} = \frac{\partial^2 f(x_n, \theta)}{\partial \theta_p \partial \theta_q} \quad p, q = 1, \dots, P \quad (4.3)$$

İvme vektörleri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$\ddot{v}_{pq}(\hat{\theta}) = \ddot{v}_{qp}(\hat{\theta})$$

$$\ddot{v}_{pq}(\hat{\theta}) = \left. \frac{\partial \dot{v}_p(\theta)}{\partial \theta_q} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = \left. \frac{\partial \dot{v}_q(\theta)}{\partial \theta_p} \right|_{\theta=\hat{\theta}}$$

Yukarıdaki ifade matris formunda aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\dot{V} = \frac{\partial \eta}{\partial \theta^T}$$

Burada  $\dot{V}$ 'nin her bir satırı,  $\eta(\theta)$ 'nin  $\theta$ 'ya bağlı koordinatının gradyantıdır. Ayrıca  $\dot{V}$  matrisi,  $\dot{v}_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ) olan vektörlerden oluşur. Diğer taraftan,  $P \times P$  boyutlu ikinci türev matrisi  $\ddot{V}$  ile gösterilir.  $\ddot{v}_{pq}$  ( $p, q = 1 \dots P$ ) olan vektörlerden oluşur ve aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\ddot{V} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta \partial \theta^T}$$

$\ddot{V}_m(\hat{\theta}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  olduğu düşünüldüğünde  $\ddot{V}_m(\hat{\theta})$ ,  $\dot{V}(\hat{\theta})$ 'nin m.yüzü(face) olarak adlandırılır\*.

Matris notasyonu ile aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\ddot{V}_m(\hat{\theta}) = \begin{bmatrix} \ddot{v}_{m11}(\hat{\theta}) & \cdots & \ddot{v}_{m1n}(\hat{\theta}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \ddot{v}_{mm1}(\hat{\theta}) & \cdots & \ddot{v}_{mnn}(\hat{\theta}) \end{bmatrix}, \quad m = 1, \dots, M$$

---

\* <http://citeseer.ist.psu.edu/286959.html>

$\dot{V}$  vektörleri teğet vektörleridir ayrıca “hız(velocity) vektörleri” olarak adlandırılırlar. Bunlar her parametreye göre  $\eta$ ’daki değişme oranını verirler.

$\ddot{V}$  vektörlerine “ivme(acceleration) vektörleri” denir. Bunlar parametrelere göre hız vektörlerindeki değişim oranını veririrler. Bu ifade aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$\ddot{v}_{pq} = \frac{\partial \dot{v}_p}{\partial \theta_q}$$

Projeksiyon(izdüşüm) matrisi, teğet düzlemindeki n vektörün izdüşümünü ifade eder:

$$P_T = \dot{V}(\hat{\theta}) [\dot{V}'(\hat{\theta}) \dot{V}(\hat{\theta})]^{-1} \dot{V}'(\hat{\theta})$$

#### 4.1.1 Teğetsel ve Normal İvmeler (Tangential and Normal Accelerations)

İvme vektörleri, teğet düzleminin içinde olan ve bu düzleme dik olan olmak üzere iki bileşene ayrıştırılabilirler. Çünkü  $P(P+1)/2$  tane farklı ivme vektörü olduğundan, ivme vektörleri bağımlı değişken uzayında,  $P(P+1)/2$  maksimum boyutlu alt uzayı kapsar. Dolayısıyla teğet ve ivme bölgelerinin(uzaylarının) birleşmiş maksimum boyutu  $P(P+3)/2$  olur. Birçok durumda birleşik boyutlar P boyutundan biraz daha büyük olur. Bu yeni boyut  $P + P'$  olarak ifade edilir.

İvme vektörünün teğetsel ve dik bileşenlerini belirlemek için, ivme vektörlerinin teğet düzlemindeki izdüşümleri alınır.  $\ddot{v}^T(\hat{\theta})$  ve  $\ddot{v}^N(\hat{\theta})$ ,  $\ddot{v}(\hat{\theta})$  ivme vektörünün sırasıyla teğet ve normal bileşenlerini temsil eder.

$$\ddot{v}_{pq}^T(\hat{\theta}) = P_T \ddot{v}_{pq}(\hat{\theta})$$

$$\ddot{v}_{pq}^N(\hat{\theta}) = (I - P_T) \ddot{v}_{pq}(\hat{\theta})$$

$$\ddot{v}_{pq}(\hat{\theta}) = \ddot{v}_{pq}^T(\hat{\theta}) + \ddot{v}_{pq}^N(\hat{\theta})$$

$$\ddot{v}_{pq}^T \perp \ddot{v}_{pq}^N$$

Bu olay  $P(P+1)/2$  boyutlu ivme vektörlerini  $\ddot{W}$  matrisinde bir araya getirerek ve  $\dot{V}$ ’daki teğet vektörleriyle birleştirerek aşağıdaki ifade elde edilir:

$$D = \left( \dot{V}, \ddot{W} \right) \quad (4.4)$$

Daha sonra  $D$  üzerinde  $QR$  ayrıştırması uygulanır ve  $D = (Q_1|Q'_1|Q_2)R$  elde edilir.

$$D[\dot{V}, \ddot{W}] = QR = [Q_1|Q'_1|Q_2] \cdot \begin{bmatrix} R_1 & A^t \\ 0 & A^n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Daha sonra  $\ddot{V}$  dizisi  $(Q_1|Q'_1)^T$  ile çarpılarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\ddot{A} = [(Q_1|Q'_1)^T] \cdot [\ddot{V}] \quad (4.5)$$

Burada  $Q_1$ ,  $Q$ 'nin ilk  $P$  sütunudur,  $Q'_1$  ise  $Q$ 'nin geri kalan  $P'$  sütunudur. Bu ifade  $(P+P') \times P \times P$  boyutlu ivme dizisini oluşturur ve  $\ddot{A}$ 'nın  $P$  yüzü teğet uzayında,  $P'$  yüzü de ivme uzayındadır (kare parantez çarpımları,  $B$   $N_1 \times N_2$  boyutlu bir matris ve  $C$   $N_2 \times N_3 \times N_4$  şeklinde dizi olmak üzere, aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\{A\}_{npq} = \sum_{i=1}^{N_2} \{B\}_{ni} \{C\}_{ipq}$$

Burada  $A$   $N_1 \times N_3 \times N_4$  şeklinde bir dizidir,  $npq$  ifadesi, n.yüzü, p.satırı ve q.sütunu ifade eder).

$A_r$ ,  $N \times P(P+1)/2$  boyutlu  $A$  matrisinden elde edilen  $P \times P$  boyutlu matrisin  $N$  boyutlu dizisidir:

$$A_r = \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{cccc} a_{111} & a_{112} & \cdots & a_{11P} \\ a_{121} & a_{122} & \cdots & a_{12P} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1P1} & a_{1P2} & \cdots & a_{1PP} \end{array} \right) \left( \begin{array}{cccc} a_{211} & a_{212} & \cdots & a_{21P} \\ a_{221} & a_{222} & \cdots & a_{22P} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2P1} & a_{2P2} & \cdots & a_{2PP} \end{array} \right), \dots, \left( \begin{array}{cccc} a_{N11} & a_{N12} & \cdots & a_{N1P} \\ a_{N21} & a_{N22} & \cdots & a_{N2P} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{NP1} & a_{NP2} & \cdots & a_{NPP} \end{array} \right) \end{array} \right]'$$

Simetriden dolayı bu dizi tekrar düzenlenip,  $N \times P(P+1)/2$  boyutlu  $A$  matrisi olarak aşağıdaki şekilde yazılır:

$$A = \begin{pmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{122} & \cdots & a_{11P} & a_{12P} & \cdots & a_{1PP} \\ a_{211} & a_{212} & a_{222} & \cdots & a_{21P} & a_{22P} & \cdots & a_{2PP} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{N11} & a_{N12} & a_{N22} & \cdots & a_{N1P} & a_{N2P} & \cdots & a_{NPP} \end{pmatrix}$$

İvme vektörlerinin teğet düzlemi dışında kalan mesafesinin(alanının) ölçümü, beklenti yüzeyinin düzlemsel olmama durumunu (miktarını) ölçer. Bu düzlemsel olmama durumuna “saf doğrusal olmama(intrinsic nonlinearity)” denir çünkü beklenti fonksiyonu için seçilen parametrelendirme değerlerine bağlı değildir. Teğet düzlemindeki ivme vektörlerinin izdüşümleri parametrelendirmeye bağlıdır ve teğet düzlemindeki parametre doğrularının tekdüze(tam benzerlik) olmama durumunu ölçer. Bu tekdüze olmama durumuna “doğrusal olmama durumunun parametre etkileri(parameter effects of nonlinearity) ya da kısaca “parametre etkileri(parameter effects)” denir.

$\ddot{A}$  dizisindeki elemanlar, parametre etkileri ve saf doğrusal olmama durumu hakkında bilgi verdiklerinden, ifade karışıklığı olmaması için  $\ddot{A}$ ’nın ilk  $P$  yüzü(yüzeyi)  $A^\theta$  ile gösterilir ve parametre etkili ivme dizisi olarak adlandırılır. Son  $P'$  yüzü ise,  $A^l$  ile gösterilir ve saf ivme dizisi olarak adlandırılır.

#### 4.1.2 İsteğe Bağlı(keyfi) Yöndeki İvme Hareketi

Hız ve ivme vektörleri, parametre uzayındaki parametre eksenlerindeki değişmelere bağlı olarak, beklenti yüzeyi hakkında bilgi verir. Parametre uzayında keyfi  $u$  yönünde,  $\hat{\theta}$ ’ya yakın hız ve ivmeyi ölçmek için “uzaklık parametresi(distance parameter)  $b$ ” ve  $\theta = \hat{\theta} + bu$  olacak şekilde  $P \times 1$  boyutlu  $u$  vektörü tanımlanır.  $\theta(b) = \hat{\theta} + bu$  ifadesi beklenti yüzeyinde doğru şekilde çizildiğinde  $\eta(\hat{\theta})$ ’dan geçen  $\eta_u(b) = \eta(\hat{\theta} + bu)$  eğrisi elde edilir. Bu eğrisel ifadede  $\hat{\theta}$  noktasında teğet ve ivme vektörleri  $b$ ’ya göre ayrılarak ve  $b = 0$  noktasındaki türevler alınarak elde edilir. Bu durumda:

$$\left. \frac{d\eta_u}{db} \right|_0 = \sum_{p=1}^P \left. \frac{\partial \eta}{\partial \theta_p} \right|_{\hat{\theta}} \left. \frac{d\theta_p}{db} \right|_0 = \sum_{p=1}^P \dot{V}_p u_p$$

$$\dot{\eta}_u = \dot{V} u \quad (4.6)$$



Aynı şekilde  $u$  yönüne bağlı ivme vektörü:

$$\frac{d^2 \eta_u}{db^2} \Big|_0 = \sum_{q=1}^P \frac{\partial \sum_{p=1}^P \dot{v}_p u_p}{\partial \theta_q} \Big|_{\hat{\theta}} \frac{d\theta_q}{db} \Big|_0 = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^P \ddot{v}_{pq} u_p u_q \quad (4.7)$$

$$\ddot{\eta}_u = u^T \ddot{V} u \quad (4.8)$$

(4.6)'da görüleceği üzere  $u$  yönüne bağlı hız,  $\dot{v}$  hız vektörlerinin doğrusal kombinasyonudur.

(4.7) ve (4.8)'den de ivmenin  $\ddot{v}$  ivme vektörlerinin doğrusal kombinasyonu olduğu görülür.

(4.8)'de  $\ddot{\eta}_u$   $N \times 1$  boyutlu vektördür.

Buradaki asıl konu, teğet düzleminin içinde olan ve bu düzleme normal olan ivmeleri göstermek olduğunda  $\ddot{V} \ddot{A}$  şeklinde yazılır:

$$Q^T \ddot{\eta}_u = u^T \ddot{A} u \quad (4.9)$$

Ya da

$$Q^T \ddot{\eta}_u = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^P \left\{ \ddot{A} \right\}_{pq} u_p u_q \quad (4.10)$$

Burada;  $\left\{ \ddot{A} \right\}_{pq}$ ,  $\ddot{A}$  dizisindeki  $(P+P') \times 1$  boyutlu vektördür. Bunlar aslında D'nin QR ayrıştırmasından elde edilen  $R_1$  matrisinin sütunlarıdır. Matris biçiminde ifade edildiğinde:

$$\begin{bmatrix} R_{12} \\ R_{22} \end{bmatrix} = [r_{11}, r_{12}, r_{22}, \dots, r_{PP}] \quad (4.11)$$

Dolayısıyla (4.10) aşağıdaki gibi ifade edilir ve bu denklem hesaplamalara daha uygundur:

$$Q^T \ddot{\eta}_u = \sum_{p=1}^P r_{pp} u_p^2 + 2 \sum_{p=1}^P \sum_{q=p+1}^P r_{pq} u_p u_q \quad (4.12)$$

## 4.2 Bağlı (Nispi) Eğrisellikler(Relative Curvatures)

İvmeler, doğrusal olmama durumunun göstergeleri olduğu halde, hesaplamalarda uygulanışları kullanışlı değildir çünkü bunlar, verilerin ve parametrelerin ölçeklenmelerine

bağlıdır. Örneğin bir veri setinde, sıcaklığın Fahrenheit yerine Celsius ile ölçülmesi ya da zaman değişkeninin dakika yerine saat cinsinden ölçülmesi farklı ivmeler oluşmasına neden olur. Bu bağımlılığı ortadan kaldırmak için, ivmeler “Nispi Eğriselliklere(relative curvatures)” dönüştürülür.

Bir noktada  $u$  yönündeki “ $c_u$ ” eğriselliği(çarpıklığı), ivme vektörünün uzunluğunun, teğet vektörünün uzunluğunun karesine oranı olarak tanımlanır:

$$c_u = \frac{\|\ddot{\eta}_u\|}{\|\dot{\eta}_u\|^2}$$

Parametre etkili eğrisellik için;

$$c_u^\theta = \frac{\|\ddot{\eta}_u^\theta\|}{\|\dot{\eta}_u\|^2} \quad (4.13)$$

Saf eğrisellik için;

$$c_u^l = \frac{\|\ddot{\eta}_u^l\|}{\|\dot{\eta}_u\|^2} \quad (4.14)$$

İvme ve teğet vektörlerini  $\theta^T$  ile çarpmak pay ya da payda da bir değişiklik yapmaz. Dolayısıyla (4.13)’deki payı hesaplamak için  $A^\theta$  dizisi kullanılır:

$$\|u^T A^\theta u\|^2 = \sum_{p=1}^P \left( u^T \ddot{A}_p u \right)^2$$

ve (4.14)’deki pay kullanılarak:

$$\|u^T A^l u\|^2 = \sum_{p=P+1}^{P+P'} \left( u^T \ddot{A}_p u \right)^2$$

Payda kısımları aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\|\dot{\eta}_u\|^2 = \|\dot{V}u\|^2 = u^T R_{11}^T R_{11} u = \|R_{11}u\|^2$$

Burada  $R_{11}$ , D matrisinin QR ayrıştırmasından elde edilir.

Eğrisellik hesaplamalarını kolaylaştırmak için  $\|\dot{\eta}_u\|^2 = 1$  ayarlanır. Bu şekilde her  $u$  için,

$\|u\| = 1$  olmak üzere, doğrusal dönüşümle dik parametreler elde edilir:

$$\phi = R_{11}(\theta - \hat{\theta}) \quad (4.15)$$

Ayrıca eğrisellikler, 1/bağımlı değişken cinsinden hesaplandığında, bunların değerleri verilerin ölçeklenmesine bağlıdır. Bu bağımlılığı kaldırmak için, bağımlı değişken ve eğrisellik  $s\sqrt{P}$  ile çarpılır. Sonuç olarak nispi eğrisellik dizisi aşağıdaki şekilde oluşur:

$$C = R_{11}^{-T} \ddot{A} R_{11}^{-1} s\sqrt{P} \quad (4.16)$$

$P \times P \times P$  boyutlu parametre etkili nispi eğrisellik dizisi  $C^\theta$  ve  $P' \times P \times P$  boyutlu saf nispi eğrisellik dizisi  $C^l$ 'den oluşur. Tanjant düzleminde oluşan diskin yarıçapı  $\sqrt{F(P, N - P; \alpha)}$ 'dır. Bu yarıçap da eğriselliğin anlaşılabilmesi için önemli bir ölçüdür.

## 4.2.1 Eğrisellik Dizilerindeki Adımların Yorumlanması

### 4.2.1.1 Saf Eğrisellikler(Intrinsic Curvatures)

Saf eğriselliğin geometrik yorumu,  $\eta_u$  yönünde beklenti yüzeyine en iyi yaklaşan çemberin karşılıklı olarak yarıçapı ile açıklanabilir. Eğer düzlemsel yaklaşım iyi ise, saf eğrisellik küçük olacaktır. Eğer saf eğrisellik yüksek ise, modelin doğrusal olmama durumu yüksektir. Doğrusal teğet düzlemi yaklaşımı geçerli değildir.

### 4.2.1.2 Parametre Etkili Eğrisellikler(Parameter Effects Curvatures)

Nispi eğrisellik dizisinde(relative curvature array) her  $c_{npq}$  teriminin geometrik bir anlamı vardır. Bu özellik doğrusal olmama durumunun anlaşılmasına yardımcı olur.  $c_{npq}$  terimlerinin yorumunun anlaşılabilmesi için 2 parametrelilik bir durum seçilmiştir:

Hız ve ivme vektörlerinin  $\phi = 0$ 'da hesaplanmış teğetsel bileşenleri aşağıda verilmiştir:

$$\dot{v}_1(\phi = 0) = q_1$$

$$\dot{v}_2(\phi = 0) = q_2$$

ve

$$\ddot{v}_{11} = c_{111}q_1 + c_{211}q_2$$

$$\ddot{v}_{12} = c_{112}q_1 + c_{212}q_2$$

$$\ddot{v}_{22} = c_{122}q_1 + c_{222}q_2$$

$\phi = \delta$  gibi bir noktadaki yeni teğet vektörleri yaklaşık olarak;

$$\dot{v}_1(\delta) \approx \dot{v}_1(0) + \delta_1 \left. \frac{\partial \dot{v}_1}{\partial \phi_1} \right|_{\phi=0} + \delta_2 \left. \frac{\partial \dot{v}_1}{\partial \phi_2} \right|_{\phi=0} = q_1 + \delta_1 \ddot{v}_{11} + \delta_2 \ddot{v}_{12}$$

$q_1$  ve  $q_2$  terimleri bir araya toplandığında:

$$\dot{v}_1(q) = q_1(1 + \delta_1 c_{111} + \delta_2 c_{112}) + q_2(\delta_1 c_{211} + \delta_2 c_{212})$$

$$\dot{v}_2(q) = q_1(\delta_1 c_{112} + \delta_2 c_{122}) + q_2(1 + \delta_1 c_{212} + \delta_2 c_{222})$$

- $c_{111}$ ,  $\phi_1$ 'deki birim değişmeye bağlı olarak  $q_1$  yönündeki  $\dot{v}_1$  vektöründeki değişmeyi verir.  $c_{ppp}$  formunun terimleri  $\dot{v}_p$  vektörünün uzunluğunda değişmeye neden olur. Dolayısıyla  $c_{ppp}$ 'ye “compansion terimi” denir. Çünkü bunlar  $\phi_p$  parametre doğrusunda basınç(compression) ya da genişleme(expansion) meydana getirirler. Bu kelime basınç ve genişleme teriminin birleşmesinden oluşur. Dolayısıyla türkçede tam karşılığı bulunmamaktadır.
- $c_{211}$  terimi,  $\phi_1$ 'deki birim değişmeye bağlı olarak  $q_2$  yönünde  $\dot{v}_1$  vektöründeki değişmeyi verir.  $c_{qpp}$  ( $q \neq p$ );  $\phi_p$  parametre doğrusunda  $q_q$  yönünde değişmeye neden olur. Böyle terimlere “arcing terms(yay/kavis terimleri)” denir.
- $c_{212}$  terimi,  $\phi_1$ 'deki birim değişmeye bağlı olarak,  $q_2$  yönünde  $\dot{v}_2$  vektöründe meydana gelen değişmeyi verir. Dolayısıyla,  $c_{qpq}$  formu,  $q_q$  yönünde  $\phi_p$  parametre eğrisinin değişmesine neden olur. Bu terimlere “fanning terms(pervane/yelpaze

terimleri)” denir.  $\phi_q$  parametre doğruları  $q_p$  ekseninde belirli bir noktadan yayılırlar. İki parametre ile sadece baskı, yay, yelpaze oluşur. İki parametreden daha fazla parametre olduğunda, daha çok çeşit parametre etkisi ortaya çıkabilir.

- $c_{npq}$  gibi bir terim  $\phi_q$ ’daki birim değişmeye bağlı olarak  $q_n$  yönünde  $v_p$  teğetsel vektörün değişmesine neden olur. Bu gibi terimlere “torsion(bükme) terimleri” denir.
- $C$ ’deki ayrı ayrı her elemanın yorumu, eğriselliği etkileyen parametre etkilerini yorumlamaya yardımcı olur.  $u$  yönü için (bu yön parametre eksenine paraleldir)  $c_u^\theta$ , compansion teriminin kareler toplamının kare köküdür ve genel  $u$  terimi için de geçerlidir.

#### 4.2.2 Yeniden Parametrelendirme(Reparametrization)

Parametre dönüşümlerinin doğrusal olmama durumunda, parametre etkilerinde büyük değişiklikler yaptığı görülmüştür. Bates ve Watts’da dönüşümlerin çeşitli parametre çeşitlerine göre yapıldığı ve bir veri seti için modellerin, doğrusal olmamadaki parametre etkilerini azalttığı, bir diğeri için arttırdığı görülür. Sonuç olarak en uygun olanı bulana kadar birçok dönüşüm uygulanabilir.

Belirli beklenti fonksiyonları için, eğrisellik dizisindeki parametre etkilerini, parametre dönüşümleriyle hesaplamak oldukça sıkıcıdır. Veri seti yeniden parametrelendirme yöntemiyle aşağıdaki adımlar uygulanarak birleştirilebilir:

- Yeni parametreler kullanılarak model yeniden kurulur.
- Türevler yeniden hesaplanır.
- $C$  dizisi yeniden elde edilir.

Bu yöntem pek fazla kullanılmaz çünkü oldukça sıkıcı ve yorucudur.

Parametre etkileri dizisinin elde edilmeye çalışıldığı düşünölsün.  $C^\beta$  yeniden parametrelendirmeye bağılı olarak,  $\beta$ ’lar  $\theta$ ’nın doğrusal olmayan dönüşümleri olmak üzere;

$$\beta = G(\theta)$$

ya da

$$\beta_p = G_p(\theta) \quad (p = 1, 2, \dots, P)$$

Bu ifadenin ters dönüşümünün aşağıdaki gibi ifade edildiğı düşünölsün:

$$\theta = D(\beta)$$

ya da

$$\theta_p = D_p(\beta) \quad (p=1,2,\dots,P)$$

Bu ifadelerin  $P \times P$  boyutlu Jacobien matrisleri,  $\dot{D}$  ve  $\dot{G}$  ile ifade edilir. Bunların  $(n, p)$ . elemanları sırasıyla  $\partial D_n / \partial \beta_p$  ve  $\partial G_n / \partial \theta_p$  ile bulunur.

$P \times P \times P$  boyutlu ikinci türev dizileri  $\ddot{D}$  ve  $\ddot{G}$  ile ifade edilir ve  $\partial^2 D_n / \partial \beta_p \partial \beta_q$  ve  $\partial^2 G_n / \partial \theta_p \partial \theta_q$  ile bulunur.  $npq$  ifadesinde n yüzeyi, p satırı ve q'da sütunu ifade eder.

EKK tahmincileri  $\hat{\beta} = G(\hat{\theta})$ 'nın yeni teğet vektörleri aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\dot{b}_p = \left. \frac{\partial \eta}{\partial \beta_p} \right|_{\hat{\beta}} = \sum_{q=1}^P \left( \left. \frac{\partial \eta}{\partial \theta_q} \right|_{\hat{\theta}} \right) \{\dot{D}\}_{qp} = \sum_{q=1}^P \dot{v}_q \{\dot{D}\}_{qp}$$

Yukarıdaki ifadede  $\dot{v}_q$ ,  $\dot{V}$ 'nin

q.sütunudur. Dolayısıyla yukarıdaki eşitlik aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$\dot{B} = (\dot{b}_1, \dot{b}_2, \dots, \dot{b}_p) = \dot{V} \dot{D} = Q_1 R_1 \dot{D}$$

Yeni ikinci türev vektörleri ise;

$$\ddot{b}_{pq} = \left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial \beta_p \partial \theta_q} \right|_{\hat{\beta}} = \frac{\partial}{\partial \beta_q} \left( \sum_{r=1}^P (\dot{v}_r) \{\dot{D}\}_{rp} \right) = \sum_{r=1}^P \dot{v}_r \{\dot{D}\}_{rpq} + \sum_{r=1}^P \sum_{s=1}^P \{\dot{D}\}_{rp} \ddot{v}_{rs} \{\dot{D}\}_{sq}$$

ile bulunur. Burada  $\ddot{v}_{rs}$ ,  $\ddot{V}$  dizisinin  $(r, s)$ .vektörüdür. Matris notasyonu ile bu eşitlik şu şekilde ifade edilir:

$$\ddot{B} = \dot{D}^T \ddot{V} \dot{D} + [\dot{V}] [\ddot{D}]$$

Yukarıda verilen eşitliklere dayanarak  $A^\beta$  dizisi aşağıdaki gibi bulunur:

$$A^\beta = [Q_1^T] [\ddot{B}] = \dot{D}^T A^\theta \dot{D} + [R_1] [\ddot{D}]$$

$$C^\theta = R_1^{-T} A^\theta R_1^{-1}$$

$$C^\beta = (R_1 \dot{D})^{-T} A^\beta (R_1 \dot{D})^{-1}$$

Yukarıdaki ifadeler  $C^\beta$  ifadesinde yerine koyulursa:

$$\begin{aligned} C^\beta &= (R_1 \dot{D})^{-T} [R_1] [\ddot{D}] (R_1 \dot{D})^{-1} + R_1^{-T} A^\theta R_1^{-1} \\ &= (R_1 \dot{D})^{-T} [R_1] [\ddot{D}] (R_1 \dot{D})^{-1} + C^\theta \\ &= [R_1] [R_1^{-T} \dot{D}^{-T} \ddot{D} \dot{D}^{-1} R_1^{-1}] + C^\theta \\ &= -[R_1] [R_1^{-T} T R_1^{-1}] + C^\theta \end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $T = \dot{D}^{-T} \ddot{D} \dot{D}^{-1}$  ile bulunur ve “dönüşüm eğrisellik dizisi” olarak ifade edilir.  $\beta$  parametresi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\beta = G(D(\beta))$$

$\beta$ 'ya göre türev alındığında aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\frac{\partial \beta}{\partial \beta^T} = I = \dot{G} \dot{D}$$

ve

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial \beta \partial \beta^T} = 0 = \dot{D}^T \ddot{G} \dot{D} + [\dot{G}] [\ddot{D}]$$

$$T = [\dot{G}^{-1}] [\ddot{G}]$$

Sonuç olarak parametre etkili, yeniden parametrelendirilmiş  $C^\beta$  dizisi aşağıdaki gibi bulunur:

$$C^\beta = C^\theta - [R_1] [R_1^{-T} [\dot{G}^{-1}] [\ddot{G}] R_1^{-1}]$$

### 4.3 RMS Eğrisellikleri(Root Mean Square)

Eğrisellik dizisindeki terimlerin değer kazanması, doğrusal olmama durumunun anlaşılmasına yardımcı olur fakat veri analizlerinde doğrusal olmama için daha basit ama ayrıntılı ölçümler gerekmektedir. Böylece belirli durumlarda doğrusal yaklaşımın niteliği tayin edilebilir. Bu

amaç için, “root mean square(RMS-eğrisellik kök kareler ortalaması)” kullanılır. Bu ifade, kareli eğriselliklerin bütün yönlerdeki ortalamasının kareköklü ifadesidir. RMS eğrisel parametre etkileri  $c^\theta$  ile RMS saf eğrisellik ise  $c^l$  ile ifade edilir.

#### 4.3.1 RMS Eğriselliklerinin Hesaplanması

Teğet düzlemindeki  $u$  yönündeki eğrisellik;

$$c_u = \|u^T C u\| = \sqrt{\sum_n (u^T C_n u)^2} \quad (4.17)$$

$C_n$ ,  $C$ 'nin n.yüzeyidir. Eğrisellik ortalama kareleri,  $u$ 'nun bütün yönleri için,  $c_u^2$  ile integrali alınarak ve P boyutlu kürenin A yüzey alanına bölünerek elde edilir:

$$c^2 = \frac{1}{A} \int \sum_n (u^T C_n u)^2 dA \quad (4.18)$$

dA küre üzerindeki yüzey alanının elemanıdır. Bu integral toplam ifadesi şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$c^2 = \frac{1}{P(P+2)} \sum_n \left[ 2 \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^P c_{npq}^2 + \left( \sum_{p=1}^P c_{npp} \right)^2 \right]$$

İki parametre için eğrisellik ortalama karesi,  $u = [\cos w, \sin w]^T$  olduğunda  $w$  açısı kullanılarak bir boyutlu integral şeklinde gösterilebilir. Dolayısıyla eşitlik aşağıdaki gibi gösterilir:

$$c^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_n \int_0^{2\pi} [c_{n11} \cos^2 w + 2c_{n12} \sin w \cos w + c_{n22} \sin^2 w]^2 dw$$

RMS eğrisellik ölçüsü, standartlaştırılmış kürenin yarıçapının tersi ( $1/\sqrt{F}$ ) ile gösterilir. Karşılaştırma çizelgesi, RMS eğriliğinin belirli bir  $(1-\alpha)$  anlam düzeyindeki güvenlik diskiyle karşılaştırılması sonucu hazırlanır. Eğriliğin yarıçapı  $1/c$  ile bir güvenlik diskinin yarıçapı  $\sqrt{F}$  ile karşılaştırılması anlamına gelir. Bir RMS eğriselliği,  $c \ll 1/\sqrt{F}$  veya  $c\sqrt{F} \ll 1$  ise, düşük olarak değerlendirilir. Bu durumda eğrisellik yarıçapı  $1/c$  olan bir beklenen değer yüzeyi oluşturulur. Teğet düzleminin bu yüzeyden sapması veya parametre çizgilerinin  $\sqrt{F}$  uzaklıktaki düz çizgilerden sapmaları belirlenebilir (Bates ve Watts, 1988).



Bu sapma güvenlik diskinin yarıçapının bir yüzdesi,  $\%100(1 - \sqrt{1 - c^2 F}) / c\sqrt{F}$ , olarak ifade edilir. Aşağıdaki tabloda RMS eğriselliklerine göre doğrusal olmama durumunun ölçüsü verilmiştir:

Çizelge 4.1 RMS eğriselliklerine göre doğrusal olmama durumunun ölçüsü

RMS Eğrisellikleri	% Sapmalar
0.1	5
0.2	10
0.3	15
0.4	21

- $c\sqrt{F} = 0.1$  değeri, yüzeyin güvenlik diski kenarındaki güvenlik yarıçapının %5'i kadar sapmaya neden olur.
- $c\sqrt{F} = 0.2$  değeri, yüzeyin güvenlik diski kenarındaki güvenlik yarıçapının %10'u kadar sapmasına neden olur.
- $c\sqrt{F} = 0.3$  değeri, yüzeyin güvenlik diski kenarındaki güvenlik yarıçapının %15'i kadar sapmasına neden olur.
- $c\sqrt{F} = 0.4$  değeri, yüzeyin güvenlik diski kenarındaki güvenlik yarıçapının %21'i kadar sapmasına neden olur.

## 5. UYGULAMA

### 5.1 Veri ile ilgili Bilgi

Bu uygulamada kullanılacak olan veri seti, 1978 yılında D. Misra tarafından yapılan “dişçilik ile ilgili verilerin monomoleküler büyüme modeli ile incelenmesi(Dental research in monomolecular adsorbtion)” adlı araştırma sonucu elde edilmiştir. Veriler [www.itl.nist.gov/div898/strd/nls/data/misra1a.shtml](http://www.itl.nist.gov/div898/strd/nls/data/misra1a.shtml) adresinden alınmıştır. Bu araştırmada bağımlı değişken olan “hacim(volume)” ve bağımsız değişken olan “basınç(pressure)” ile monomoleküler bir model oluşturulmaya çalışılmıştır. Veriler 14 gözlemden oluşmuştur.

Monomoleküler büyüme modeli, önemli bir doğrusal olmayan regresyon modelidir. Büyüme modelleri, biyoloji, botanik, tarım gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Bu modeller büyüme süreçleriyle ilgilidirler. Bu süreçler, insanlar ve hayvanlarda görüldüğü gibi çeşitli organizmalarda ve bitkilerde de görülür. Ayrıca ekonomide ve sosyal bilimlerde büyüme, arzlar ve nüfus değişimi olarak ortaya çıkar.

Belirli bir t zamanında büyüme oranının doğrudan büyüme miktarı ile orantılı olduğuna inanılan bir büyüme durumu göz önüne alınsın. Büyümenin maksimum değeri,  $\alpha$  ile ve t anındaki değeri z ile gösterilsin.

$$\frac{dz}{dt} = k(\alpha - z)$$

ifadesi yazılabilir. Burada k bir orantı sabitidir. Bu diferansiyel denklemin çözümü ile;

$$z = \alpha(1 - \beta e^{-kt})$$

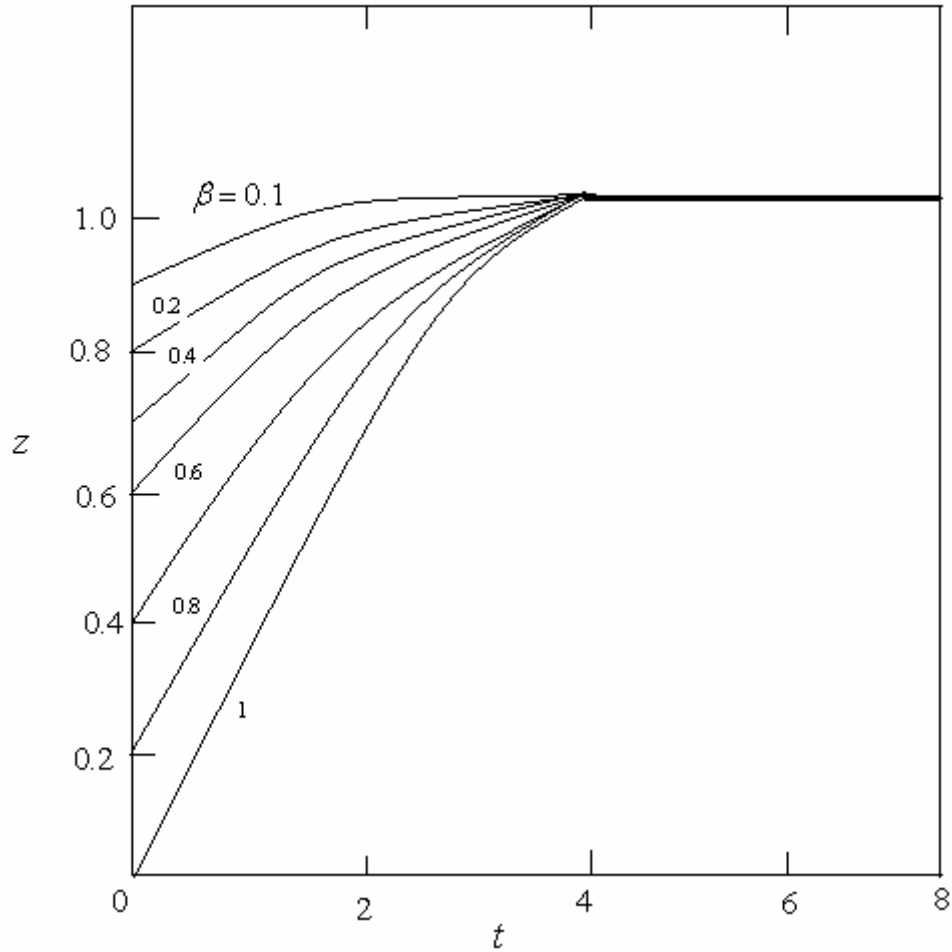
monomoleküler büyüme fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyon t = 0’da  $\alpha(1 - \beta)$  noktasından limit değeri  $\alpha$ ’ya kadar yükselir. Hiçbir büküm (herhangi t için  $d^2z/dt^2$ ’nin işaret değiştirdiği) noktası yoktur.

$\alpha$  bir ölçek faktörü olduğundan inceleme amacıyla  $\alpha = 1$  alınsın. Yine bu amaçla k ve t, bir birim olarak kt şeklinde birarada olduklarından k = 1 alınsın. Bu durumda değişen  $\beta$ ’lar için Şekil 6.1’deki gibi eğriler elde edilir. Değişik bir  $\alpha$  seçimi, eğrinin dikey skalasını değiştirecektir. Aynı şekilde değişik bir k’nın seçimi de grafiği yatay olarak uzatacak ya da büzecektir. t = 0’da, her eğri  $z = \alpha(1 - \beta)$  değerinden başlar ve  $\alpha = 1$  için bu  $(1 - \beta)$ ’dır.

Şekil 5.1'deki eğriler,  $z = \alpha(1 - \beta e^{-kt})$  teorik fonksiyona dayanan teorik eğrilerdir. Eğer  $t_1, t_2, \dots, t_n$  zamanlarında elde edilen gözlemlerin  $z_i, i = 1, 2, \dots, n$  olduğu varsayılırsa, model

$$z_i = \alpha(1 - \beta e^{-kt_i}) + \varepsilon_i$$

şeklinde oluşur.  $\varepsilon_i$  burada beklenen değeri sıfır ve varyansı sabit hata paylarını göstermektedir.



Şekil 5.1 Çeşitli  $\beta$ 'lar için  $z = 1 - \beta e^{-t}$  biçimindeki teorik eğriler(Draper ve Smith, 1998)

Araştırmaya ilk önce bağımlı ve bağımsız değişkenin dağılım grafiği çizilerek başlanmıştır. İnternet sayfasında önerilen tahmin modeli doğrusal olmayan üstel bir model(monomoleküler büyüme modeli) olduğu halde grafikte bu modelin doğrusal olabileceği görülmektedir. Dolayısıyla bu model iki farklı açıdan incelenecektir. İlk olarak bu veri setine doğrusal regresyon uygulanıp, kalıntı analizi sonuçları elde edilecek, daha sonra doğrusal olmayan

regresyon uygulanarak kalıntı analizi sonuçları elde edilecektir. En son olarak bu elde edilen sonuçlar karşılaştırılacaktır.

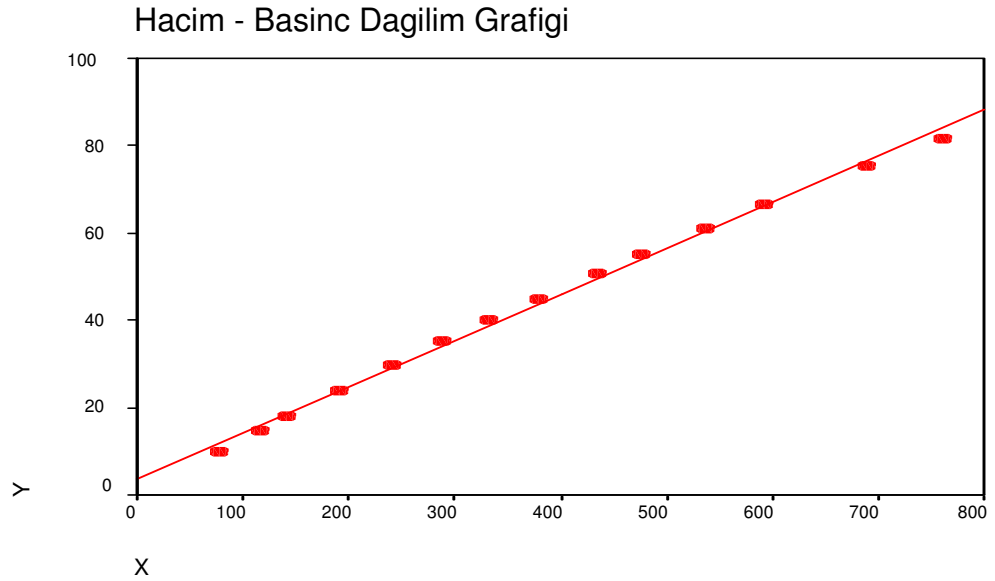
Bu uygulama sırasında SPSS 11,5 Linear Regression menüsü, Nonlinear Regression menüsü ile gerektiğinde Excel kullanılacaktır.

## 5.2 Verilere Doğrusal Regresyon Uygulaması

Doğrusal regresyon analizi için önerilen model;

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X$$

modelidir. Burada kolaylık sağlaması açısından  $\beta_0$  parametresi A ile  $\beta_1$  parametresi B ile ifade edilecektir. Veri seti aşağıda gösterilmiştir. Ayrıca Hacim – Basınç veri setinin dağılım grafiği görülmektedir(Şekil 5.2):



Şekil 5.2 Dağılım grafiği

Çizelge 5.1 Veri seti

<b>Basınç(X)</b>	<b>Hacim(Y)</b>
77,60	10,07
114,90	14,73
141,10	17,94
190,80	23,93
239,90	29,61
289,00	35,18
332,80	40,02
378,40	44,82
434,80	50,76
477,30	55,05
536,80	61,01
593,10	66,40
689,10	75,47
760,00	81,78

### 5.2.1 Parametrelerin Tahmini

Bu analiz sırasında SPSS 11,5'in sırasıyla Analyze, Regression, Linear menüleri kullanılmıştır. Regresyon analizi sonuçları aşağıda belirtilmiştir:

Çıktı1: Modelin Regresyon Analizi Sonuçları

**Model Summary**

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,999 <sup>a</sup>	,997	,997	1,20048

a. Predictors: (Constant), X

**ANOVA<sup>b</sup>**

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	6744,494	1	6744,494	4679,924	,000 <sup>a</sup>
	Residual	17,294	12	1,441		
	Total	6761,788	13			

a. Predictors: (Constant), X

b. Dependent Variable: Y

**Coefficients<sup>a</sup>**

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	95% Confidence Interval for B	
		B	Std. Error	Beta			Lower Bound	Upper Bound
1	(Constant)	3,765	,662		5,691	,000	2,324	5,206
	X	,105	,002	,999	68,410	,000	,102	,109

a. Dependent Variable: Y

- Hacim ile Basınç arasındaki doğrusal bağlantının denklemi;

$Hacim = 3,765 + 0,105 \times Basinç$  biçiminde belirlenmiştir.

$Y = 3,765 + 0,105X$  olarak yazılır.

Bu regresyon bağıntısına göre Hacim(Y)'in değişimi üzerinde Basınç(X)'in etkisi önemlidir ( $F(1,12) = 4679,924$  ;  $p \leq 0,005$ ).

- Katsayılar incelendiğinde:

- $\beta_0$  için :

$$H_0 : \beta_0 = 0$$

$$H_1 : \beta_0 \neq 0$$

%95' lik **güven aralıkları** incelendiğinde  $\beta_0 = 0$ 'ın bu aralıkların içinde olmadığı görülür. Dolayısıyla  $H_0$  Hipotezi REDdedilir.

- $\beta_1$  için :

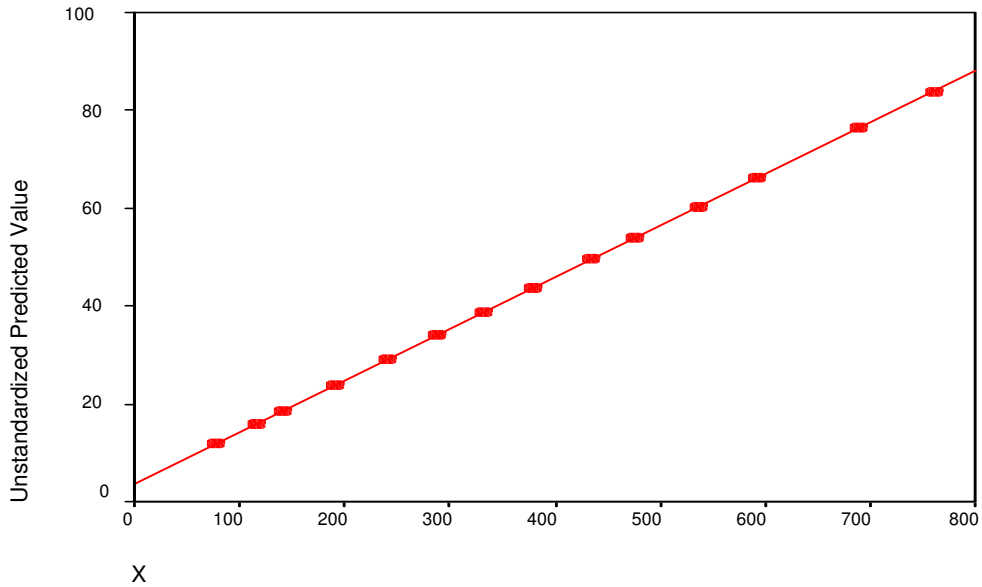
$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

%95' lik **güven aralıkları** incelendiğinde  $\beta_1 = 0$ 'ın bu aralıkların içinde olmadığı

görülür. Dolayısıyla  $H_0$  Hipotezi REDdedilir.

- P değerlerine bakılarak da hipotezler test edilebilir. Görüldüğü gibi p değerleri  $\alpha = 0,05$  düzeyinden az olduğu için hem  $\beta_0$  için hem de  $\beta_1$  için  $H_0$  hipotezleri Reddedilir.
- Katsayıların standart hataları parametre tahminlerinin yarısından az olmalı kuralı göz önüne alındığında:
  - $\beta_0 = 3,765$  için :  
Standart Hata = 0,662
  - $\beta_1 = 0,105$  için :  
Standart Hata = 0,002 dir. Görüldüğü gibi Standart Hatalar parametre katsayılarının yarısından azdır. Modelin geçerli olduğu söylenebilir.
- Basınç bir birim artarken, Hacim  $3,765 + 0,105 = 3,87$  birim artış gösterir. Hacmin değişiminin %99,9'unu basınç açıklamaktadır ( $R^2 = 0,999$ ).
- A ve B katsayıları anlamlıdır ( $t_A = 5,691$ ,  $p \leq 0,005$  ve  $t_B = 68,410$ ,  $p \leq 0,005$ ). Dolayısıyla iki değişken arasında doğrusal bir ilişki olduğu söylenebilir.
- Tahmin edilen modelin grafiği aşağıda gösterilmiştir:



Şekil 5.3 Tahmin edilen modelin grafiği

- Aşağıdaki Çizelgede tahmin edilen Y değerleri ile Kalıntılar verilmiştir:

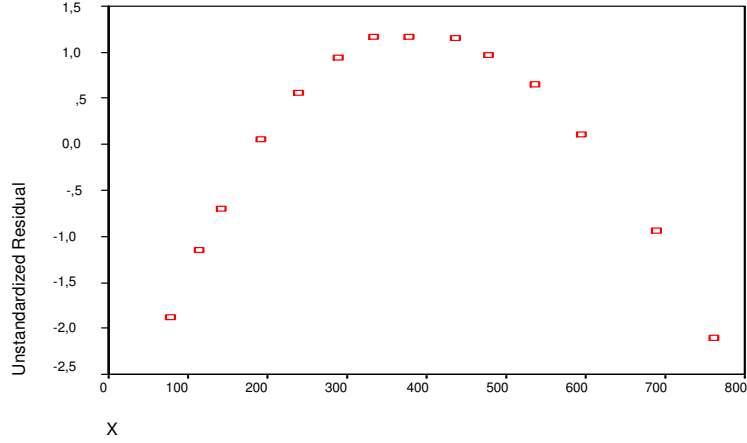
Çizelge 5.2 Analiz sonucu elde edilen tahmin ve kalıntı verileri

X	Y	$\hat{Y}$	Z
77,60	10,07	11,94579	- 1,87579
114,90	14,73	15,87806	- 1,14806
141,10	17,94	18,64014	- 0,70014
190,80	23,93	23,87965	0,05035
239,90	29,61	29,05592	0,55408
289,00	35,18	34,23218	0,94782
332,80	40,02	38,84970	1,17030
378,40	44,82	43,65698	1,16302
434,80	50,76	49,60283	1,15717
477,30	55,05	54,08330	0,96670
536,80	61,01	60,35596	0,65404
593,10	66,40	66,29127	0,10873
689,10	75,47	76,41187	- 0,94187
760,00	81,78	83,88635	- 2,10635

Burada Y = Hacim verileri, X = Basınç verileri,  $\hat{Y}$  = Tahmin edilen değerler, Z = Kalıntılardır.

- Kalıntı grafiği aşağıdaki gibi oluşmuştur:





Şekil 5.4 Doğrusal modelin kalıntı grafiği

Bu grafikten kalıntılar arasında bir ilişki olduğu anlaşılabilir. Bu ilişkiyi daha net ortaya çıkarabilmek için kalıntı analizi uygulanacaktır.

## 5.2.2 Modelin Kalıntı Analizi

### 5.2.2.1 Modelin Doğrusallığı

**F** değeri, regresyon modelinin verilere ne kadar uygun olduğunu göstermektedir. “Signif F” değeri de bulunan **F** değerinin anlamlı olup olmadığını göstermektedir. Eğer **F** değeri anlamlı değilse iki değişken arasındaki ilişki doğrusal bir ilişki olmaz ve regresyon doğrusu ile gösterilemez. Çalışmamızda bu değer 0,05 in altında olduğu için anlamlıdır yani iki değişken arasında doğrusal bir ilişki vardır ve doğrusal model uygundur.

**F** değerinin karekökü **t** değeridir. **T** değeri de uygulanan yöntemin anlamlılığı hakkında bir bilgi verir. Burada **t** değeri 68,410 dur. Bunun karekökü alındığında:

$$F = 4679,924$$

$$t = 68,410$$

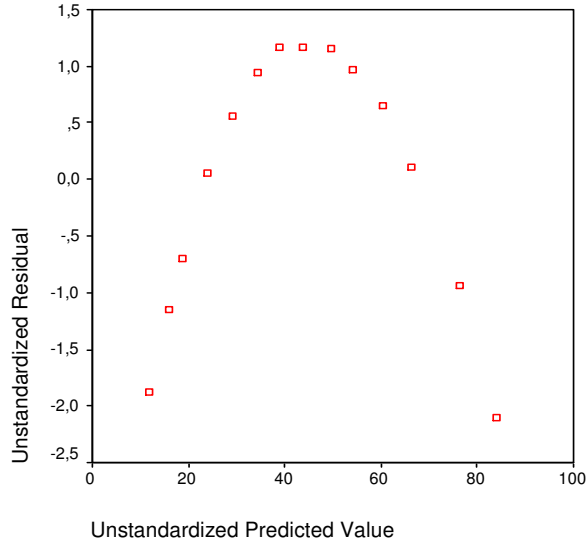
$$t^2 = 4679,9281$$

$$t^2 \cong F$$

Tek bir bağımsız değişken olduğu için ana kütle regresyon doğrusu şu şekilde ifade edilir:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$$

Doğrusal ilişkinin araştırılmasında, kalıntılar ile tahmin edilen değerler birlikte kullanılarak dağılım grafikleri elde edilebilir. Eğer dağılım grafiğinde noktalar bir eğriyi gösteriyorsa, doğrusal ilişki varsayımı sağlanmaz.



Şekil 5.5 Tahmin değerleri ile kalıntıların dağılım grafiği

Görüldüğü gibi grafikte belirli bir görünüm oluşmuştur, dolayısıyla ilişki doğrusal değildir.

### 5.2.2.2 Hata Terimlerinin Sabit Varyanslık Durumu

- Hata terimlerinin sabit varyanslı olup olmadığını anlamak için veri seti ikiye bölünmüştür. Her iki gruba regresyon analizi uygulanıp Anova Çıktıları elde edilmiştir. Bu çıktılarından sırasıyla  $MSE_1$  ve  $MSE_2$  elde edilerek, birbirlerine oranlanarak F testi uygulanmıştır. Sonuçlar aşağıdadır:

$H_0$  : iki grubun varyansları eşittir.

$H_a$  :iki grubun varyansları birbirlerinden farklıdır.

Çıktı2: İlk grubun ANOVA sonuçları:

#### ANOVA<sup>b</sup>

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	727,775	1	727,775	11871,879	,000 <sup>a</sup>
	Residual	,307	5	,061		
	Total	728,081	6			

a. Predictors: (Constant), X1

b. Dependent Variable: Y1

Çıktı 3: İkinci grubun ANOVA sonuçları

ANOVA<sup>b</sup>

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	1061,861	1	1061,861	7341,228	,000 <sup>a</sup>
	Residual	,723	5	,145		
	Total	1062,584	6			

a. Predictors: (Constant), X2

b. Dependent Variable: Y2

$$MSE_1 = 0,061$$

$$MSE_2 = 0,145$$

$$F = \frac{MSE_1}{MSE_2} = \frac{0,061}{0,145} = 0,420689$$

$$F_{(N_1, N_2; 1-\alpha)} = F_{(7,7; 0,95)} = 3,79$$

$$F_{hesap} < F_{tablo}$$

İki grubun varyanslarının eşitliğine dayanan  $H_0$  hipotezi kabul edilir.

### 5.2.2.3 Hata Terimlerinin Normal Dağılımı Durumu

Hataların normal dağılıp dağılmadığına bakmak için Jarque – Bera test istatistiği uygulanır.

Bu test istatistiği aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$J - B = \frac{(n - k)}{6} \left( s^2 + \frac{(k - 3)^2}{4} \right)$$

$H_0$ : Veriler normal dağılıyor.

$H_1$ : Veriler normal dağılmıyor.

Çizelge 5.3 Kalıntıların çarpıklık ve basıklık sonuçları

Statistics		
Unstandardized Residual		
N	Valid	14
	Missing	0
Skewness		-,685
Std. Error of Skewness		,597
Kurtosis		-,917
Std. Error of Kurtosis		1,154

$$JB = 14 \times \left[ \frac{(-0,685)^2}{6} + \frac{(-0,917 - 3)^2}{24} \right]$$

$$JB = 7,85516$$

$$\chi_{2,0,05}^2 = 5,9915$$

$$JB > \chi_2^2$$

Normal dağılımı ifade eden  $H_0$  hipotezi reddedilir. Kalıntıların dağılımı normal değildir.

#### 5.2.2.4 Sapan Değer Araştırması

Çizelge 5.4 Sapan değer araştırması

Casewise Diagnostics <sup>a</sup>				
Case Number	Std. Residual	Y	Predicted Value	Residual
1	-1,563	10,07	11,9458	-1,8758
2	-,956	14,73	15,8781	-1,1481
3	-,583	17,94	18,6401	-,7001
4	,042	23,93	23,8797	,0503
5	,462	29,61	29,0559	,5541
6	,790	35,18	34,2322	,9478
7	,975	40,02	38,8497	1,1703
8	,969	44,82	43,6570	1,1630
9	,964	50,76	49,6028	1,1572
10	,805	55,05	54,0833	,9667
11	,545	61,01	60,3560	,6540
12	,091	66,40	66,2913	,1087
13	-,785	75,47	76,4119	-,9419
14	-1,755	81,78	83,8863	-2,1063

a. Dependent Variable: Y

Görüldüğü gibi (-2, +2) standart sapma arasında bir kalıntı değeri yoktur. Yalnız 1. ve 14. değer bu sınıra yakındır. Daha iyi inceleme yapabilmek için kalıntı çeşitleri ve etkinlik ölçülerine bakılabilir.

### 5.2.2.5 Kalıntı Çeşitleri

Burada kalıntı çeşitlerinin tek tek hesaplamaları gösterilmeyecek sadece sonuçlar Çizelge halinde verilecektir. Çizelge 5.5'te ifade edilen sembollerin anlamları aşağıda verilmiştir:

$\hat{Y}$  : Tahmin edilen değerler

$e_i$  : Kalıntılar

$e_i^*$  : Standart Kalıntılar

$h_{ii}$  : Projeksiyon matrisinin köşegen elemanları(gözlem uzaklıkları)

$r_i$  : Studentized Kalıntılar

$t_i$  : Studentized Deleted Kalıntılar

$d_i$  : Deleted Kalıntılar

$m_i^2$  : Mahalanobis Mesafesi

Çizelge 5.5 Doğrusal modelin kalıntı çeşitleri

Gözlem No:	$\hat{Y}$	$e_i$	$e_i^*$	$m_i^2$	$r_i$	$t_i$	$h_{ii}$	$d_i$
1	11,94579	-1,87579	-1,56253	1,89982	<b>-1,76646</b>	<b>-1,96609</b>	0,14614	<b>-2,39738</b>
2	15,87806	-1,14806	-0,95633	1,45371	-1,05819	-1,06400	0,11182	-1,40565
3	18,64014	-0,70014	-0,58321	1,17600	-0,63706	-0,62052	0,09046	-0,83538
4	23,87965	0,05035	0,04194	0,73001	0,04490	0,04299	0,05615	0,05771
5	29,05592	0,55408	0,46155	0,39332	0,48697	0,47092	0,03026	0,61680
6	34,23218	0,94782	0,78953	0,15992	0,82482	0,81309	0,01230	1,03443

7	38,84970	1,17030	0,97486	0,03888	1,01329	1,01453	0,00299	1,26439
8	43,65698	1,16302	0,96879	0,00019	1,00537	1,00586	0,00001	1,25250
9	49,60283	1,15717	0,96392	0,07559	1,00345	1,00377	0,00581	1,25403
10	54,08330	0,96670	0,80526	0,22244	0,84346	0,83261	0,01711	1,06060
11	60,35596	0,65404	0,54481	0,55805	0,57892	0,56218	0,04293	0,73849
12	66,29127	0,10873	0,09057	1,01527	0,09821	0,09407	0,07810	0,12784
13	76,41187	-0,94187	-0,78457	2,10811	-0,89620	-0,88828	0,16216	-1,22893
14	83,88635	<b>-2,10635</b>	-1,75459	3,16871	<b>-2,12024</b>	<b>-2,56695</b>	0,24375	<b>-3,07575</b>

- Mahalanobis Uzaklıklarına bakıldığında 13. ve 14. gözlemlerin uzaklıklarının diğerlerinden daha büyük olduğu görülür.
- Kalıntılar incelenirken (-2; +2) aralığını aşan değerlere bakılır.
- $e_i^*$  kalıntılarının (-2, +2) aralığını aşan bir değeri bulunmamaktadır. Sadece 1. ve 14. gözlemler bu sınıra diğerlerinden daha yakındır.
- $r_i$  studentized kalıntılarında, (-2; +2) aralığı dışında kalan gözlemler 14. gözlemdir.

$t_{(n-p;\alpha)} = t_{(12;0,05)} = 2,179$  olarak bulunur. Verilere bakıldığında bu değeri aşan hiçbir gözlem bulunmadığı, yalnız 14.gözlemin bu değere yakın olduğu görülür.

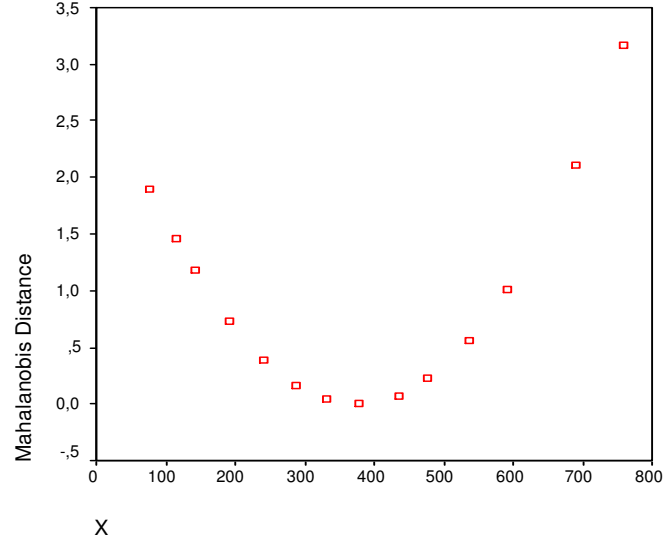
- $t_i$  studentized deleted kalıntılarda, (-2; +2) aralığı dışında kalan gözlemler 1. ve 14. gözlemlerdir.
- Kaldıraç(leverage) değerlerinde kural  $0 \leq h_{ii} \leq 1$  olmasıdır. Verilere bakıldığında bu sınırı aşan bir değer görülmemektedir.

$$h_{ii} > (2 \times 2)/14$$

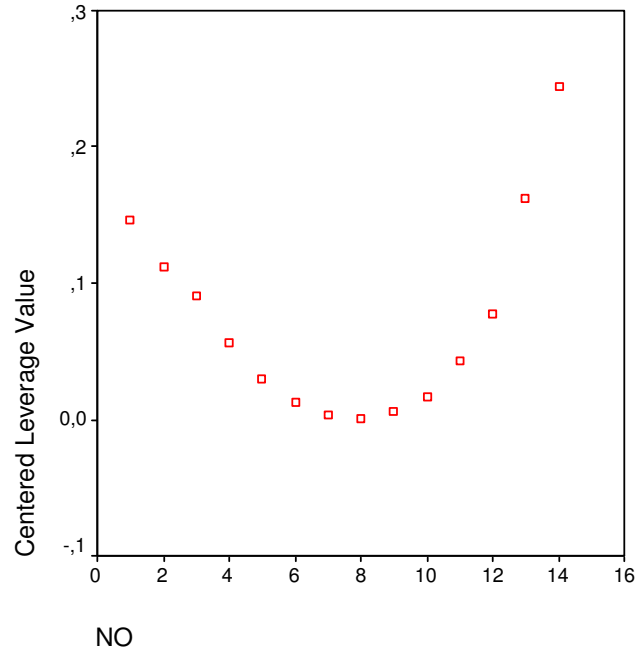
$$h_{ii} > 0,2857$$

Bu sınırdan büyük olan değerler aşırı değerler olarak adlandırılır. Verilere bakıldığında böyle bir aşırı değer bulunmamaktadır.

- Aşağıda bu kalıntılara ait grafikler görülmektedir:



Şekil 5.6 Doğrusal model kalıntıları için Mahalanobis uzaklığı



Şekil 5.7 Doğrusal model kalıntıları için kaldırma grafiği

Çizelge 5.6 Misra Verisi için Mahalanobis Mesafesi

Extreme Values			Case Number	Value
Mahalanobis Distance	Highest	1	14	3,16871
		2	13	2,10811
		3	1	1,89982
		4	2	1,45371
		5	3	1,17600
	Lowest	1	8	,00019
		2	7	,03888
		3	9	,07559
		4	6	,15992
		5	10	,22244

- Şekil 13.4'de en büyük ve en küçük Mahalanobis mesafesi değerleri verilmiştir. Bunlardan 14. gözlemin Mahalanobis mesafesi 3'den büyüktür.

#### 5.2.2.6 Etkinlik Ölçütleri

Çizelge 5.7 Doğrusal modelin kalıntılarının etkinlik ölçütleri

Gözlem No:	$D_i^2$	$DFFITs_{(i)}$
1	0,43384	-0,52160
2	0,12562	-0,25759
3	0,03920	-0,13524
4	0,00015	0,00736
5	0,01342	0,06272
6	0,03108	0,08661
7	0,04128	0,09410
8	0,03888	0,08948
9	0,04214	0,09687



10	0,03455	0,09390
11	0,02164	0,08445
12	0,00085	0,01912
13	0,12240	-0,28707
14	<b>1,03446</b>	-0,96940

- $D_i^2$  (Cook Değerleri) değerleri 1 ve 1'den büyük değer aldıklarında Etkili değer sayılırlar. Elde edilen değerlere bakıldığında 14. gözlemin 1'den büyük olduğu görülür. Dolayısıyla 14. gözlem etkili bir gözlemdir. Bunun araştırması F testi ile yapılabilir:

$$D_i > F_{(p+1, n-p-1; \alpha)}$$

$$F_{(3, 11; 0, 50)} = 0,845$$

$D_{14} > F$  olduğundan 14.gözlemin etkili gözlem olduğu söylenir.

- $|DFITS_i| > 2\sqrt{p+1/n}$

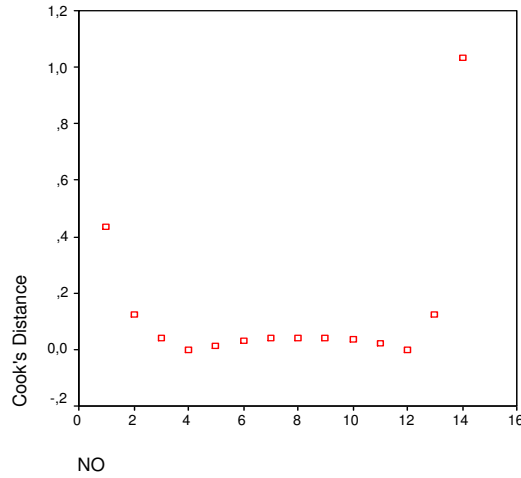
$$|DFITS_i| > 0,9258$$

Bu sonuçlara göre 14. gözlem etkili gözlemdir.

Çizelge 5.8 Misra verisi için Cook mesafesi

Case Summaries <sup>a</sup>		Cook's Distance
1		,43384
2		,12562
3		,03920
4		,00015
5		,01342
6		,03108
7		,04128
8		,03888
9		,04214
10		,03455
11		,02164
12		,00085
13		,12240
14		1,03446
Total	N	14

a. Limited to first 100 cases.



Şekil 5.8 Misra verisi için Cook mesafesi grafiği

14.gözlemin Cook Mesafesinin en uzak olduğu görülmektedir. 14. nokta etkili bir nokta olduğundan, veri setine dahil edildiğinde ve dahil edilmeden elde edilen regresyon katsayıları sırasıyla Çıktı 4 ve Çıktı5'te verilmiştir(14. gözlem çıkarıldığında elde edilen bağımlı ve bağımsız değişkenler sırasıyla Y1 ve X1 olarak adlandırılmıştır).

Çıktı 4: Misra verisinde 14. gözlem dahil iken elde edilen regresyon katsayısı

**Coefficients<sup>a</sup>**

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	3,765	,662		5,691	,000
	X	,105	,002	,999	68,410	,000

a. Dependent Variable: Y

Çıktı 5: Misra verisinde 14. gözlem dahil edilmediğinde elde edilen regresyon katsayısı

**Coefficients<sup>a</sup>**

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	3,253	,582		5,592	,000
	X1	,107	,001	,999	72,442	,000

a. Dependent Variable: Y1

Görüldüğü gibi 14. gözlem veri setinden çıkarıldığında katsayılar arasında önemli bir değişime rastlanmamıştır.  $B_0$  değerinde 0.512'lik bir değişim meydana gelmiştir.

### 5.3 Verilere Doğrusal Olmayan Regresyon Uygulaması

Bu uygulamada kullanılacak olan veri seti, 1978 yılında D. Misra tarafından yapılan “Dental research in monomolecular adsorbtion” adlı araştırma sonucu elde edilmiştir. Veriler [www.itl.nist.gov/div898/strd/nls/data/misra1a.shtml](http://www.itl.nist.gov/div898/strd/nls/data/misra1a.shtml) adresinden alınmıştır. Bu çalışmada monomoleküler büyüme modeli, bağımlı değişken olan “hacim(volume)” ve bağımsız değişken olan “basınç(pressure)” ile açıklanmaya çalışılmıştır. Veriler 14 gözlemde oluşmuştur.

Bu araştırma için kullanılması önerilen  $(\beta_0, \beta_1)$  gibi iki parametreden oluşan doğrusal olmayan regresyon modeli aşağıda verilmiştir:

$$y = f(x; \beta) + \varepsilon$$

$$y = \beta_1 * (1 - \exp(-\beta_2 * x)) + \varepsilon$$

Model için başlangıç değerleri (500;0,0001) olarak verilmiştir. İşlemlerde kolaylık sağlamak açısından birinci parametre için başlangıç değeri “A” ile ikinci parametre için başlangıç değeri “B” ile tanımlanmıştır ((A = 500; B = 0,0001)). İşlemler SPSS paket programı ve Excel

kullanılarak yapılmıştır. Yaklaşık olarak aynı sonuçlar elde edilmiştir.

İlk olarak verilere Analyze, Nonlinear Regression uygulanarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

#### Çıktı 6: İterasyon Sonuçları

All the derivatives will be calculated numerically.

Iteration	Residual SS	A	B
1	10780,19016	500,000000	,000100000
1.1	27301393,07	-3767,1006	,001114427
1.2	53,05866409	491,432294	,000238281
2	53,05866409	491,432294	,000238281
2.1	13145,30736	105,825735	,000446611
2.2	18,26061361	460,820436	,000262523
3	18,26061361	460,820436	,000262523
3.1	31,95484746	392,187703	,000306444
3.2	15,99237130	449,752670	,000271127
4	15,99237130	449,752670	,000271127
4.1	14,50375213	426,551112	,000286469
5	14,50375213	426,551112	,000286469
5.1	13,84256803	388,437949	,000315129
6	13,84256803	388,437949	,000315129
6.1	9,862245231	372,582153	,000332277
7	9,862245231	372,582153	,000332277
7.1	9,496934729	339,525781	,000365479
8	9,496934729	339,525781	,000365479
8.1	5,853128896	328,560740	,000382166
9	5,853128896	328,560740	,000382166
9.1	5,058350916	304,223695	,000414338
10	5,058350916	304,223695	,000414338
10.1	3,109286505	284,375665	,000447625
11	3,109286505	284,375665	,000447625
11.1	1,756918434	266,987846	,000481346
12	1,756918434	266,987846	,000481346
12.1	,9048346794	251,703344	,000515450

13	,9048346794	251,703344	,000515450
13.1	,5645253361	238,085980	,000550115
14	,5645253361	238,085980	,000550115
14.1	,1245513907	238,942173	,000550156
15	,1245513907	238,942173	,000550156
15.1	,1245513889	238,942129	,000550156
16	,1245513889	238,942129	,000550156

Run stopped after 34 model evaluations and 16 derivative evaluations. Iterations have been stopped because the magnitude of the largest correlation between the residuals and any derivative column is at most RCON = 1,000E-08

### Çıktı 7: Doğrusal Olmayan Regresyon Sonuçları

Nonlinear Regression Summary Statistics			Dependent Variable Y	
Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	
Regression	2	33059,50855	16529,75427	
Residual	12	,12455	,01038	
Uncorrected Total	14	33059,63310		
(Corrected Total)	13	6761,78789		
R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS =			,99998	
Asymptotic 95 %				
		Asymptotic	Confidence Interval	
Parameter	Estimate	Std. Error	Lower	Upper
A	238,94212918	2,707007851	233,04406574	244,84019262
B	,000550156	7,26687E-06	,000534323	,000565990

Doğrusal olmayan modellerde beklendiği gibi  $R^2 = 0,99998$  gibi yüksek bir değer bulunmuştur. Bu modelin iyi açıklandığını göstermektedir. Süreç 16 iterasyonda yakınsamıştır. Katsayılar arasındaki korelasyon değeri yüksek sayılabilir. Parametre tahminicileri %5 anlamlılık düzeyinde anlamlıdır. Uygun model aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$y = f(x; \beta) + \varepsilon$$

$$y = \beta_1 * (1 - \exp(-\beta_2 * x)) + \varepsilon$$

$$Y = 238,9(1 - \exp(-0,00055 \cdot X))$$

Diğer taraftan Excel ile yapılan araştırma sonucunda analiz 3 iterasyon sonucu sonuçlanmıştır. Elde edilen bulgular aşağıda gösterilmiştir.

Çizelge 5.9 Parametre tahminleri ve EKK ölçüleri

iterasyon	$g_0$	$g_1$	SSE
0	500	0.0001	
1	1857	0.0005	0.316
2	239	0.0005	0.125
3	239	0.0005	0.124

Son EKK Tahminleri			
$k$	$g_k$	$s\{g_k\}$	$MSE = \frac{0.124}{12} = 0.0104$
0	239	0.7455	
1	0.0005	0.000003	

- Bu çalışmada analiz için 3 farklı başlangıç değeri önerilmiştir. Bunlar sırasıyla, (500; 0,0001), (250; 0,0005), (238,9421; 0,00055)'tir. Uygulama için bu üç başlangıç değeri teker teker analize sokulmuştur. Ayrıntılı sonuçlar Ek 5'te gösterilmiştir. Aşağıdaki tabloda ise elde edilen sonuçlar özet olarak belirtilmiştir:

Çizelge 5.10 Başlangıç değerleri sonuçlarının karşılaştırılması

		1.başlangıç değeri (500; 0,0001)	2.başlangıç değeri (250; 0,0005)	3.başlangıç değeri (238,9421; 0,00055)
İterasyon Sayısı(yakınsama)		16	4	4
SSE		0,12455	0,12455	0,12455
SSR		33059,50	33059,50	33059,50
SSTO		33059,63	33059,63	33059,63
$R^2$		0,99998	0,99998	0,99998
Parametreler	$\beta_0$	238,9421	238,9421	238,9421
	$\beta_1$	0,0005501	0,0005501	0,0005501
$s(\beta_0)$		2,707007	2,707007	2,707007
$s(\beta_1)$		$7,2668 \times 10^{-6}$	$7,2668 \times 10^{-6}$	$7,2668 \times 10^{-6}$
$r$		-0,9988	-0,9988	-0,9988

Sonuç olarak, birinci başlangıç değeri kullanıldığında süreç 16 iterasyonda tamamlanmasına karşın, ikinci ve üçüncü başlangıç değerleri kullanıldığında süreç 4 iterasyon sonucu tamamlanmıştır. Bu üç başlangıç değeri analizi sadece iterasyon yönünden etkilemişlerdir. Yapılan analizler sonucunda, her üçünden de elde edilen  $R^2$  değerleri aynıdır. Parametreler anlamlıdır, sadece aralarında negatif yönlü ve kuvvetli bir ilişki olduğu saptanmıştır.

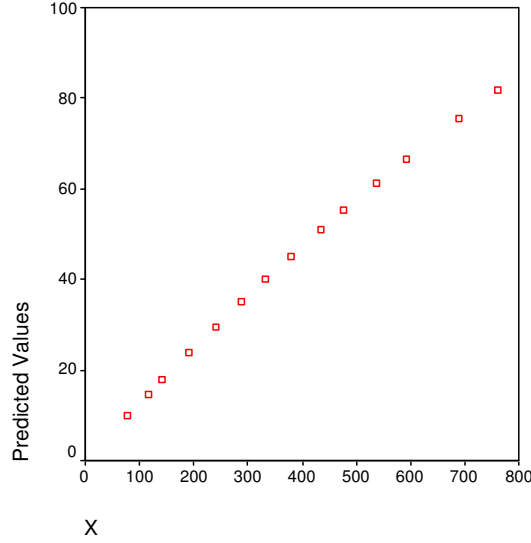
### 5.3.1 Kalıntı Analizi

Verilere önerilen model çerçevesinde doğrusal olmayan regresyon analizi uygulanmış ve aşağıdaki kalıntılar ve türev matrisi elde edilmiştir. Bu kalıntılar kullanılarak kalıntılı analizi yapılacaktır:

Çizelge 5.11 Doğrusal olmayan regresyon analizi sonucu elde edilen sonuçlar

$\hat{Y}$	Kalıntılar	dA	dB
9,99	0,08	0,04	17766,97
14,64	0,09	0,06	25772,69
17,85	0,09	0,07	31196,56
23,81	0,12	0,10	41047,17
29,54	0,07	0,12	50234,68
35,12	0,06	0,15	58903,33
39,98	0,04	0,17	66215,58
44,91	-0,09	0,19	73423,11
50,83	-0,07	0,21	81789,12
55,18	-0,13	0,23	87708,75
61,10	-0,09	0,26	95465,77
66,52	-0,12	0,28	102261,3
75,39	0,08	0,32	112701,2
81,65	0,13	0,34	119541,7

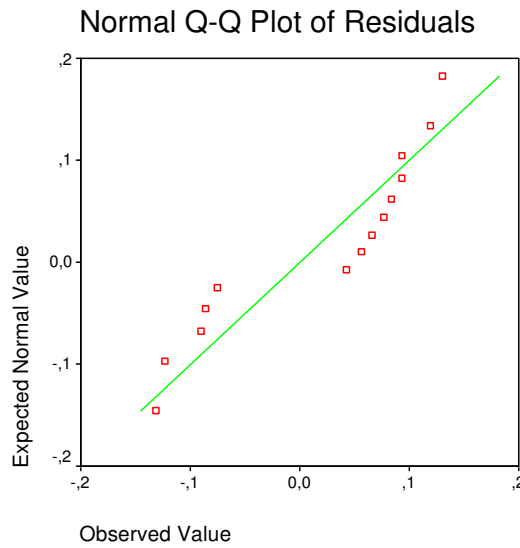




Şekil 5.9 Tahmin edilen Y değerlerine karşılık X değerleri grafiği

### 5.3.1.1 Normallik Araştırması:

Kalıntılar için Q – Q grafiği çizdirildiğinde normallikten sapmalar veri sayısı az olduğu için daha net görülebilir:



Şekil 5.10 Kalıntıların Q – Q grafiği

Grafikten de görülebileceği gibi, veri setinde aşırı değerler olduğu görülür. Normallik sınaması için Jarque – Bera istatistiği uygulandığında aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$JB = n \left[ \frac{S^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24} \right]$$

Burada “S” çarpıklığı(skewness), “K” ise basıklığı(kurtosis) ifade eder. Kalıntılar için bu değerler aşağıda gösterilmiştir:

Çıktı 8: Kalıntılarının istatistikleri

**Statistics**

Residuals		
N	Valid	14
	Missing	0
Skewness		-,557
Std. Error of Skewness		,597
Kurtosis		-1,532
Std. Error of Kurtosis		1,154

Bu değerler sonucu elde edilen test istatistiği sonucu aşağıdadır:

$$JB = 12,70501$$

% 5 anlam seviyesinde tablo değeri  $\chi^2_{2;0,05} = 5,99147$ ’dir. Dolayısıyla test istatistiği sonucu elde edilen değer tablo değerinden büyük olduğu için, kalıntılarının normal dağıldığını ifade eden  $H_0$  hipotezi reddedilir.

### 5.3.1.2 Değişen Varyans Araştırması

- Breusch – Pagan (BP) Testi:

Bu test için aşağıdaki yardımcı model kullanılmış ve hesaplamalar bu model üzerinden yapılmıştır:

$$p_i = \gamma_0 + \gamma_1 X_i \quad , \quad p_i = e_i^2 / \tilde{\sigma}^2 \quad , \quad \tilde{\sigma}^2 = \sum e_i^2 / n$$

Test istatistiği,

$$Q = \frac{SSR}{2} = \frac{0,618071}{2} = 0,309035$$

şeklinindedir. Tablo değeri,  $\chi^2_{1;0,05} = 3,841455$ ’dir. Bu durumda sabit varyansı ifade eden  $H_0$  hipotezi kabul edilir. Kalıntı terimleri sabit varyanslıdır.

- White (W) Testi:

Bu test istatistiği için aşağıdaki yardımcı model kullanılmıştır:

$$e_i^2 = \gamma_0 + \gamma_1 X$$

Bu yardımcı modelden elde edilen  $R^2$  belirlilik katsayısı White testinde kullanılmış ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

$$R^2 = 0,150148$$

$$nR^2 = 2,102072$$

$$\chi_{1;0,05}^1 = 3,841$$

W test istatistiğinden elde edilen değer % 5 anlamlılık seviyesindeki tablo değerinden küçük olduğu için, sabit varyansı ifade eden  $H_0$  hipotezi kabul edilir.

Sonuç olarak, sabit varyans araştırması için Breusch – Pagan ve White test istatistikleri uygulanmıştır. Her iki test sonucunda kalıntıların sabit varyanslı olduğu sonucu elde edilmiştir.

### 5.3.1.3 Kalıntı Çeşitleri ve Sapan Değer Araştırması:

Burada kalıntı çeşitlerinin tek tek hesaplamaları gösterilmeyecek sadece sonuçlar Çizelge 5.12'de verilmiştir. Çizelgede ifade edilen sembollerin anlamları aşağıda verilmiştir:

$\hat{Y}$  : Tahmin edilen değerler

$e_i$  : Kalıntılar

$e_i^*$  : Standart Kalıntılar

$h_{ii}$  : Projeksiyon matrisinin i. Gözlemi(kaldıraç değerleri)

$r_i$  : Studentized Kalıntılar

$t_i$  : Studentized Deleted Kalıntılar

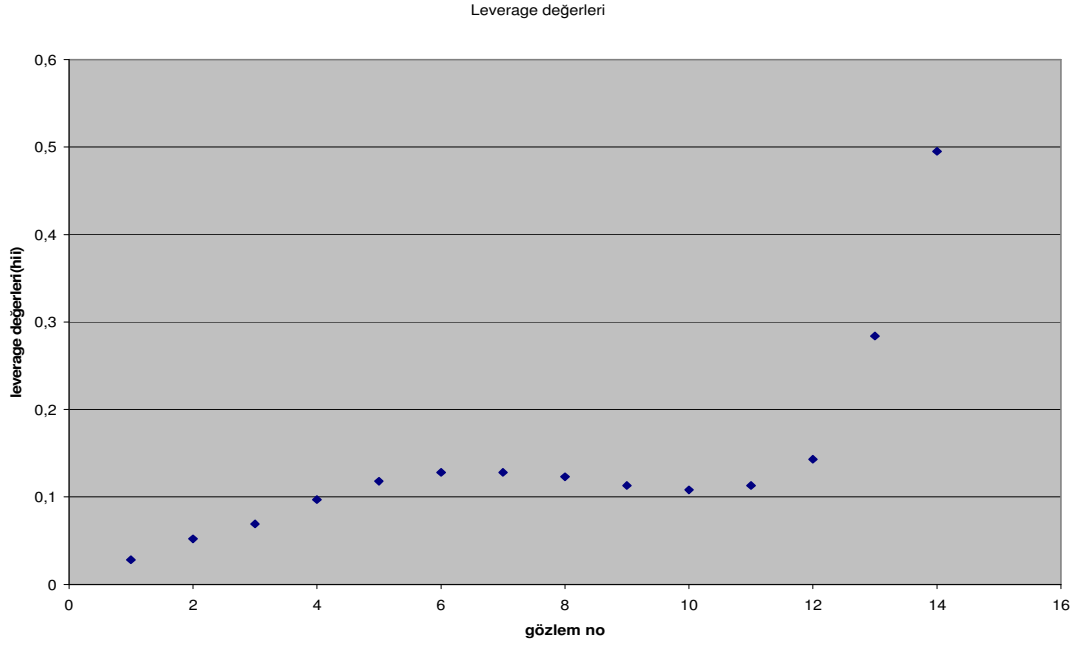
$d_i$  : Deleted Kalıntılar

$e_i$	$h_{ii}$	$e_i^*$	$r_i$	$t_i$	$d_i$
0,096	0,028	0,9424	0,9559	0,9834	0,0987
0,111	0,052	1,0919	1,1215	1,1830	0,1173
0,115	0,069	1,1311	1,1722	1,2591	0,1237
0,149	0,097	1,4640	1,5406	1,7061	0,1651
0,103	0,118	1,0083	1,0737	1,2173	0,1164
0,099	0,128	0,9714	1,0402	1,1929	0,1134
0,092	0,128	0,9064	0,9707	1,1132	0,1059
-0,031	0,123	-0,3035	-0,3241	-0,3695	-0,0352
-0,012	0,113	-0,1151	-0,1222	-0,1378	-0,0132
-0,063	0,108	-0,6235	-0,6602	-0,7401	-0,0712
-0,014	0,113	-0,1365	-0,1449	-0,1634	-0,0157
-0,041	0,143	-0,4031	-0,4354	-0,5080	-0,0479
0,170	0,284	1,6721	1,9760	<b>2,7598</b>	0,2378
0,232	0,495	<b>2,2754</b>	<b>3,2020</b>	<b>6,3406</b>	0,4588

- $h_{ii}$  kaldıraç(leverage) değerleri  $0 \leq h_{ii} \leq 1$  arasında olmalıdırlar. Şekil 5.11'e bakıldığında bu sınırı aşan hiçbir değer görülmektedir. 1'e yaklaştıkça ilgili gözlemin veri merkezine uzaklığı artar. Burada 1'e en yakın olan değer 14. gözlemin değeridir ve 0,495'tir. Dolayısıyla en uzak değer 14.gözlem değeridir.
- $\sum h_{ii} = p$  olmalıdır. Uygulama sonucu  $\sum h_{ii} = 1,999 \approx 2$  bulunmuştur. Parametre sayısı 2 olduğundan bu ifadenin gerçekleştiği gösterilmiştir.
- $2p/n$ 'den büyük  $h_{ii}$  değerlerine sahip gözlemler, büyük gözlem uzaklığına sahip noktalar(high leverage value) olarak adlandırılırlar.  $2p/n = 2 * 2/14 = 0,285714$  olarak bulunur. Çizelgeye bakıldığında bu değere yaklaşık olarak eşit ve bu değerden büyük olan gözlem 13. ve 14. gözlemlerdir. 13. gözlem değeri bu değere eşitken, 14.gözlemin değeri bu değerden büyüktür. Dolayısıyla 14. gözlem değeri "büyük

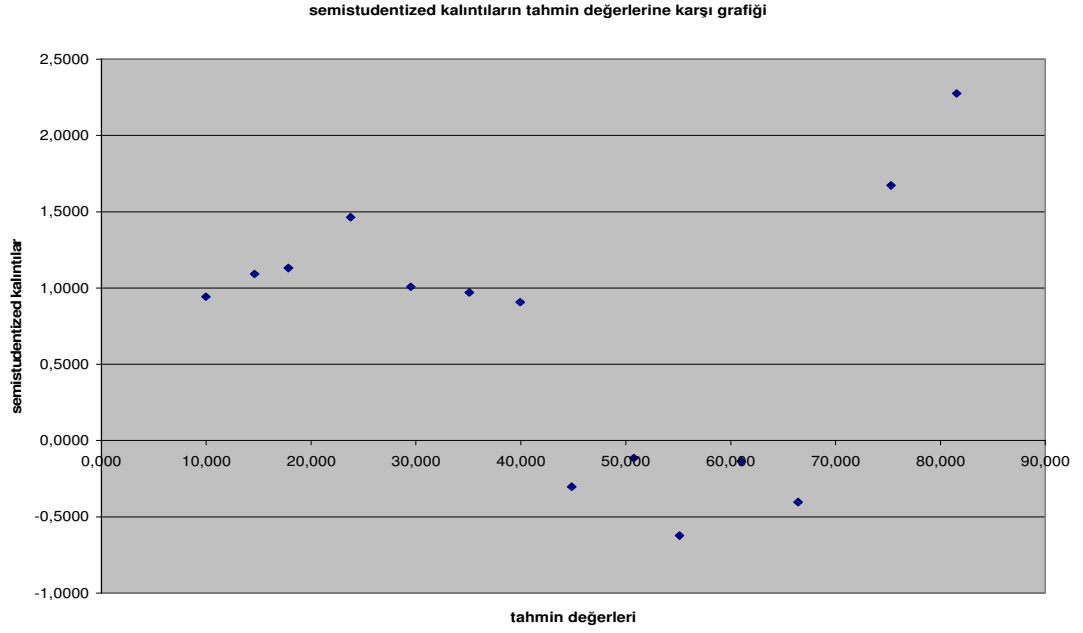
gözlem uzaklığına” sahip nokta olarak adlandırılır. Aşırı değerler oldukları halde etkin değerler olmayabilirler.

- $0,2 < h_{ii} < 0,5$  arasında olan  $h_{ii}$  değerlerine yumuşak kaldıraç noktaları denir. Çizelgeye bakıldığında bu sınırlar dışında kalan ve “yumuşak kaldıraç noktaları” olarak adlandırılan değerlerin 13. ve 14. gözlemlere ait olduğu görülür.
- Aşağıdaki grafikte kaldıraç noktaları gösterilmiştir:

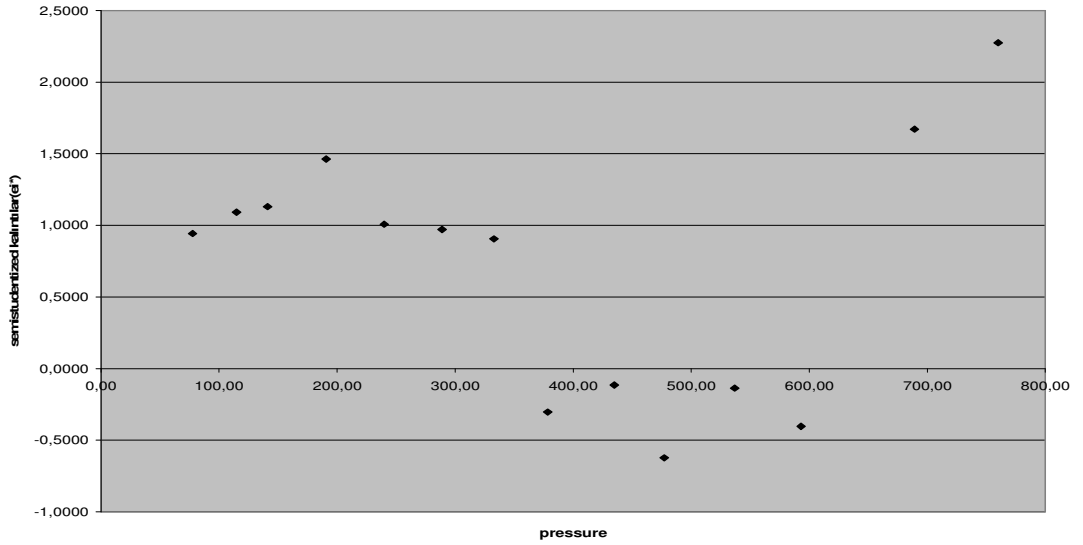


Şekil 5.11 Doğrusal olmayan modelin kalıntılarının kaldıraç değerleri

- $e_i^*$  semistudentized kalıntıların %95’inin  $[-2;+2]$  aralığında değiştiği kabul edilir. Şekile bakıldığında 14. gözlem değerinin bu aralığın dışında olduğu görülür. Aşağıdaki grafikte standart kalıntılar görülmektedir:

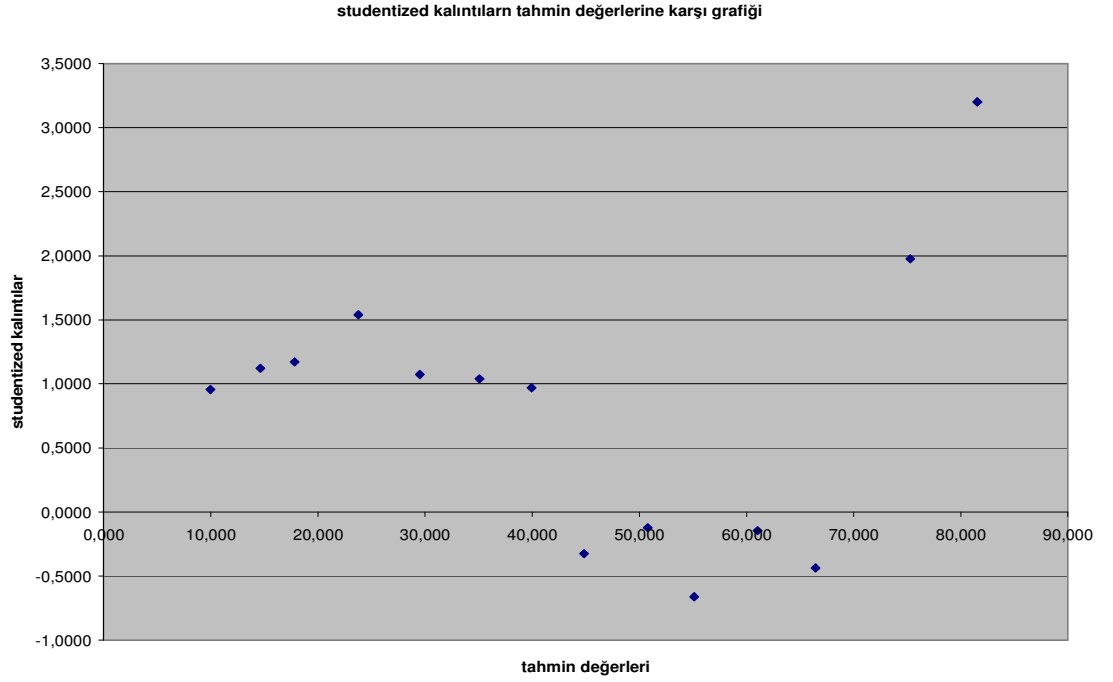


Şekil 5.12 Doğrusal olmayan modelin semistudentized kalıntı – tahmin değerleri grafiği



Şekil 5.13 Doğrusal olmayan modelin kalıntılarının semistudentized kalıntı – gözlem grafiği

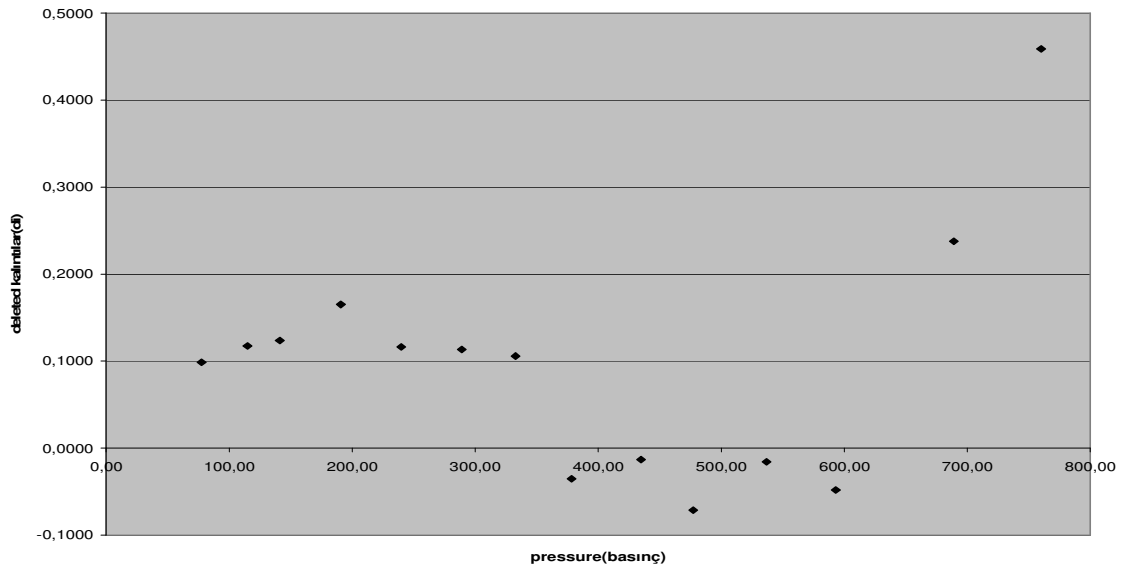
- $r_i$  studentized kalıntılar,  $[-2, +2]$  sınırları arasında ve sıfır etrafında bir dağılım gösterirler. Şekil 5.14'e bakıldığında 14. gözlem değerinin bu sınırları aştığı görülür, aşırı değer olarak nitelendirilebilir. Aşağıdaki grafikte studentized kalıntılarının grafiği görülmektedir:



Şekil 5.14 Doğrusal olmayan modelin studentized kalıntı – tahmin değerleri grafiği

İkinci adım ise  $(n-p)$  serbestlik dereceli “t” testi yapmaktır.  $t_{(n-p;\alpha)} = t_{(12;0,05)} = 2,179$  bulunmuştur. 14.kalıntı değeri bu değeri aştığından aşırı gözlem olarak nitelendirilebilir.

- $d_i$  deleted kalıntıların grafiği aşağıdaki gibidir:



Şekil 5.15 Doğrusal olmayan modelin deleted kalıntı – tahmin değerleri grafiği

- **Etkinlik Ölçütleri**

Etkinlik Ölçütleri Cook uzaklığı ve DFFITS kriterleri için incelenmiştir. Sonuçlar aşağıda gösterilmiştir.

Çizelge 5.13 Doğrusal olmayan modelin kalıntılarının etkinlik ölçütleri

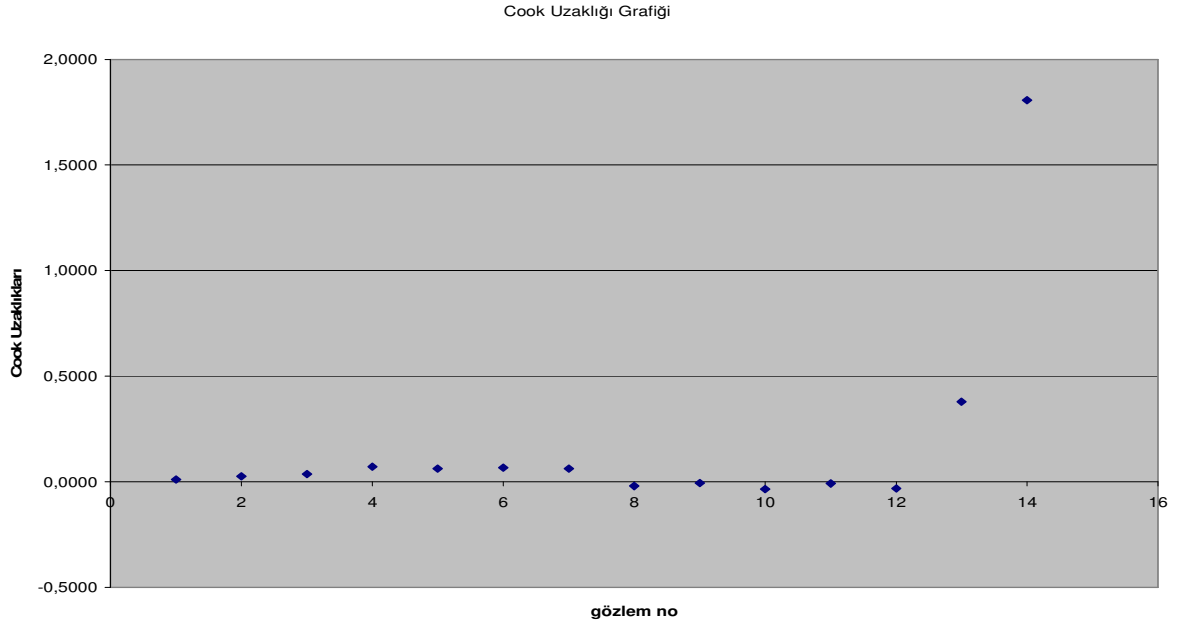
<b>ETKİNLİK ÖLÇÜTLERİ</b>	
<b>D<sub>i</sub></b>	<b>DFFITS</b>
0,0114	0,1669
0,0259	0,2771
0,0368	0,3428
0,0713	0,5592
0,0626	0,4453
0,0669	0,4571
0,0624	0,4265
-0,0199	-0,1384
-0,0068	-0,0492
-0,0346	-0,2575
-0,0080	-0,0583
-0,0321	-0,2075
0,3790	1,7381
1,8071	6,2775

- COOK Uzaklığı için, D<sub>i</sub> değerleri 1 ve 1'den büyük değerler aldıklarında “Etkili değer” sayılıyordu. Elde ettiğimiz sonuçlara bakıldığında 14. gözlem değerinin 1'den büyük olduğu görülür. Dolayısıyla 14. kalıntı değerinin yapılan diğer araştırmalar sonucu aşırı olduğu ve Cook uzaklığı incelendiğinde “etkili” olduğu görülmüştür. Bunun araştırması F testi ile yapılabilir:



$$D_i > F_{(p;n-p;\alpha)}$$

$$F_{(3;12;0,50)} = 3,89$$



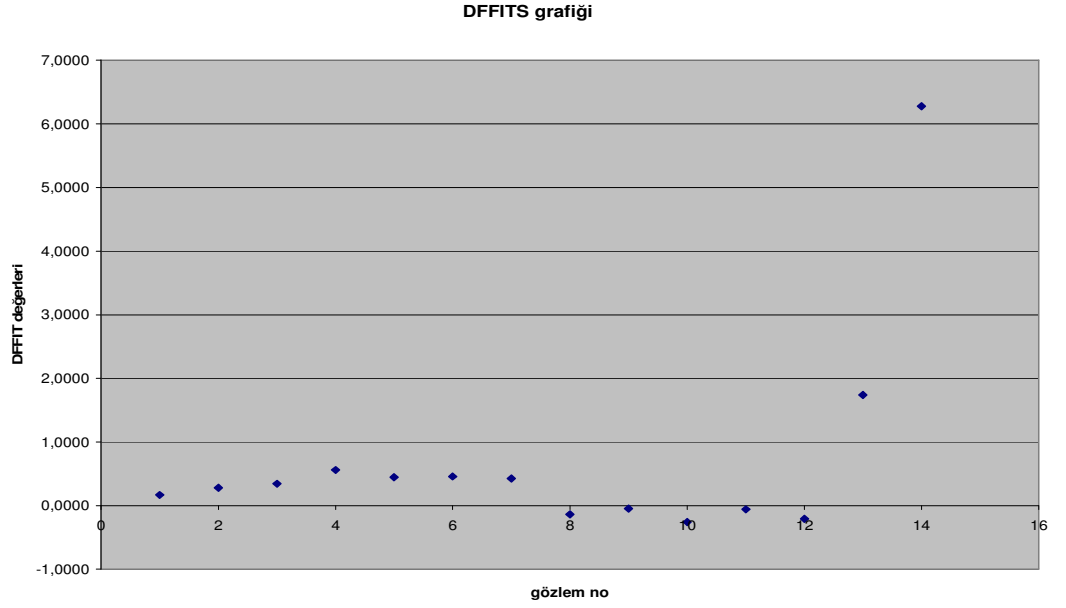
Şekil 5.16 Cook uzaklığı grafiği

- DFFITS araştırması aşağıdaki gibi yapılır. Aşağıda hesaplanan 0,7559 değerini aşan gözlemler aşırı gözlemlerdir. 13. ve 14. kalıntı değerleri etkili değerleridir.

$$|DFFITS| > 2\sqrt{p/n}$$

$$|DFFITS| > 2\sqrt{2/14}$$

$$|DFFITS| > 0,7559$$



Şekil 5.17 DFFITS grafiği

- Sonuç olarak, gerek kalıntı çeşitlerinin incelenmesinden gerekse etkinlik ölçülerinin incelenmesi sonucu 14. kalıntı değerinin aşırı ve etkili bir değer olduğu sonucuna varılmıştır.
- 14. gözlemin veriden çıkartılması durumunda modelin tahmini aşağıdaki gibidir:

## Çıktı 9: Doğrusal olmayan modelin analizi

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	26371,57348	13185,78674
Residual	11	,09122	8,292602E-03
Uncorrected Total	13	26371,66470	
(Corrected Total)	12	5170,54931	
R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS = ,99998			
Asymptotic 95 %			
		Asymptotic	Confidence Interval
Parameter	Estimate	Std. Error	Lower Upper
A	235,15145616	2,982572894	228,58685748 241,71605484
B	,000560122	8,18246E-06	,000542112 ,000578131
Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates			

	A	B
A	1,0000	-,9990
B	-,9990	1,0000

- Sonuçlar karşılaştırıldığında,  $R^2$ 'de değişme olmadığı görülmektedir. Parametre tahminçileri arasındaki korelasyonlara bakıldığında ufak bir azalma olduğu fark edilmektedir.

### 5.3.2 Eğrisellik Ölçüleri

Beklenti yüzeyinin ne kadar doğrusal olduğunu belirlemek için ve parametre doğrularının hepsinin aynı biçimde olup olmadığını anlamak için, beklenti fonksiyonunun ikinci türevleri kullanılır. Bu türevlerle, eğrisellik ölçüleri ve parametrelerin doğrusal olmayan durumlardaki etkileri elde edilir. Aşağıda önerilen model gösterilmiştir:

$$Y = f(x; \beta) + \varepsilon$$

$$Y = \beta_0(1 - \exp(-\beta_1 x)) + \varepsilon$$

$$Y = \beta_0(1 - e^{-\beta_1 x}) + \varepsilon$$

Bu model kullanılarak birinci mertebeden türevler elde edilmiştir. Bu türevlere “hız (velocity) vektörleri” denir ve  $\dot{V}$  ile gösterilir. Bunlar her parametreye göre beklenti fonksiyonundaki değişme oranını verir.

$$\{\dot{V}\}_{n1} = \frac{\partial Y}{\partial \beta_0} = 1 - e^{-\beta_1 x}$$

$$\{\dot{V}\}_{n2} = \frac{\partial Y}{\partial \beta_1} = \beta_0 \cdot x \cdot e^{-\beta_1 x}$$

İkinci mertebeden türevlere ise “ivme (acceleration) vektörleri” olarak adlandırılırlar  $\ddot{V}$  ile gösterilirler. Bunlar parametrelere göre hız vektörlerindeki değişim oranını verirler.

$$\{\ddot{V}\}_{n11} = 0$$

$$\{\ddot{V}\}_{n12} = x \cdot e^{-\beta_1 \cdot x}$$

$$\{\ddot{V}\}_{n21} = x \cdot e^{-\beta_1 \cdot x}$$

$$\{\ddot{V}\}_{n12} = \{\ddot{V}\}_{n21}$$

$$\{\ddot{V}\}_{n22} = -x^2 \cdot \beta_0 \cdot e^{-\beta_1 \cdot x}$$

Elde edilen sonuçlar aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir:

Çizelge 5.14 Hız ve ivme vektörleri

X	Hız Vektörleri		İvme Vektörleri		
	$\{\dot{V}\}_{n1}$	$\{\dot{V}\}_{n2}$	$\{\ddot{V}\}_{n11}$	$\{\ddot{V}\}_{n12}$	$\{\ddot{V}\}_{n22}$
77,60	0,0418	17742,56	0	77,00015	-2987605,991
114,90	0,0613	25737,19	0	113,5874	-6525593,521
141,10	0,0747	31153,53	0	139,1231	-9815131,821
190,80	0,0997	40990,39	0	187,194	-17858312,01
239,90	0,1237	50164,99	0	234,2133	-28093883,4
289,00	0,1470	58821,37	0	280,7674	-40570894,15
332,80	0,1673	66123,21	0	321,9067	-53565272,57
378,40	0,1880	73320,42	0	364,3489	-68934805,82
434,80	0,2128	81674,36	0	416,3	-90503620,09
477,30	0,2310	87585,38	0	455,0536	-108598542,7
536,80	0,2557	95331,03	0	508,7443	-136546977,3
593,10	0,2784	102116,51	0	558,9461	-165755461,4
689,10	0,3156	112540,71	0	643,2133	-221619143,1
760,00	0,3418	119370,87	0	704,3803	-267664520,5

- Projeksiyon matrisi aşağıdaki şekilde hesaplanır. Bu matris EK 4'te gösterilmiştir.

$$P_T = \dot{V}(\hat{\theta}) [\dot{V}'(\hat{\theta}) \dot{V}(\hat{\theta})]^{-1} \dot{V}'(\hat{\theta})$$

- İvme vektörleri, izdüşüm(projeksiyon) matrisi kullanılarak, teğet düzlemine dik ve normal olmak üzere iki bileşene ayrılır(bu işlemler Mathcad kullanılarak yapılmıştır):

$$P_T = P$$

Normal Bileşen:

$$\ddot{v}_{pq}^N(\hat{\theta}) = (I - P_T)\ddot{v}_{pq}(\hat{\theta})$$

$$\ddot{v}^N(\hat{\theta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0.224 & -1724621.311 \\ 0 & 0.157 & -1878940.227 \\ 0 & 0.275 & -2077329.902 \\ 0 & 0.128 & -1698980.931 \\ 0 & 0.061 & -1190142.719 \\ 0 & 0.158 & -756062.574 \\ 0 & 0.11 & -126977.84 \\ 0 & -0.185 & 854487.431 \\ 0 & -0.233 & 1535202.379 \\ 0 & -0.292 & 1942524.11 \\ 0 & -0.096 & 1839848.051 \\ 0 & -0.045 & 1517493.595 \\ 0 & -0.029 & -125151.586 \\ 0 & 0.282 & -2919955.825 \end{pmatrix}$$

Dik Bileşen:

$$\ddot{v}_{pq}^T(\hat{\theta}) = P_T\ddot{v}_{pq}(\hat{\theta})$$

$$\ddot{v}^T(\hat{\theta}) = \begin{pmatrix} 0 & 76.776 & -1262984.68 \\ 0 & 113.43 & -4646653.294 \\ 0 & 138.848 & -7737801.919 \\ 0 & 187.066 & -16159331.079 \\ 0 & 234.153 & -26903740.681 \\ 0 & 280.61 & -39814831.576 \\ 0 & 321.797 & -53438294.73 \\ 0 & 364.534 & -69789293.251 \\ 0 & 416.533 & -92038822.469 \\ 0 & 455.345 & -110541066.81 \\ 0 & 508.84 & -138386825.351 \\ 0 & 558.991 & -167272954.995 \\ 0 & 643.242 & -221493991.514 \\ 0 & 704.098 & -264744564.675 \end{pmatrix}$$

- $\ddot{v}_{pq}(\hat{\theta}) = \ddot{v}_{qp}(\hat{\theta})$  kuralı olduğundan  $p_a = p \times (p+1)/2$  tane farklı ivme vektörü vardır.

Uygulamada  $p_a = 3$ 'dür. Buradan yola çıkarak  $D = \begin{pmatrix} \dot{V}, \ddot{W} \end{pmatrix}$  matrisi oluşturulur:

$$D = \begin{pmatrix} 0.042 & 17742.56 & 0 & 77 & -2987605.991 \\ 0.061 & 25737.19 & 0 & 113.587 & -6525593.521 \\ 0.075 & 31153.53 & 0 & 139.123 & -9815131.821 \\ 0.1 & 40990.39 & 0 & 187.194 & -17858312.01 \\ 0.124 & 50164.99 & 0 & 234.213 & -28093883.4 \\ 0.147 & 58821.37 & 0 & 280.767 & -40570894.15 \\ 0.167 & 66123.21 & 0 & 321.907 & -53565272.57 \\ 0.188 & 73320.42 & 0 & 364.349 & -68934805.82 \\ 0.213 & 81674.36 & 0 & 416.3 & -90503620.09 \\ 0.231 & 87585.38 & 0 & 455.054 & -108598542.7 \\ 0.256 & 95331.03 & 0 & 508.744 & -136546977.3 \\ 0.278 & 102116.51 & 0 & 558.946 & -165755461.4 \\ 0.316 & 112540.71 & 0 & 643.213 & -221619143.1 \\ 0.342 & 119370.87 & 0 & 704.38 & -267664520.5 \end{pmatrix}$$

- D matrisine QR ayrıştırması uygulanmıştır(böylece  $\mathfrak{R}^N$  için ortonormal bir temel hazırlanır). İkinci mertebeden türevler kullanılarak, teğet ve normal bileşenlerin elde edildiği bu ayrıştırma, “doğrusal olmama” araştırması için uygun bir temel oluşturur. Aşağıda bu ayrıştırmadan elde edilen Q ve R matrisleri gösterilmiştir, Q matrisi

$N \times N(14 \times 14)$  boyutlu bir matristir, R matrisi ise  $N \times P(P+3)/2$  yani  $14 \times 5$  boyutuna sahip bir matristir.

$$Q = \begin{pmatrix} 0.055 & -0.158 & 0.326 & 0.037 & 0.93 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.081 & -0.212 & 0.228 & -0.251 & -0.111 & 0.906 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.098 & -0.243 & 0.4 & 0.06 & -0.19 & -0.173 & 0.838 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.131 & -0.282 & 0.186 & -0.274 & -0.11 & -0.214 & -0.236 & 0.825 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.163 & -0.301 & 0.088 & -0.289 & -0.08 & -0.197 & -0.187 & -0.36 & 0.763 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.193 & -0.301 & 0.229 & 0.215 & -0.152 & -0.104 & -0.291 & -0.245 & -0.335 & 0.695 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.22 & -0.284 & 0.159 & 0.313 & -0.13 & -0.055 & -0.247 & -0.166 & -0.226 & -0.64 & 0.422 & 0 & 0 & 0 \\ 0.247 & -0.249 & -0.269 & -0.264 & 0.048 & -0.08 & 0.04 & -0.154 & -0.298 & -0.189 & -0.478 & 0.59 & 0 & 0 \\ 0.28 & -0.187 & -0.339 & -0.144 & 0.076 & -0.014 & 0.099 & -0.045 & -0.141 & -0.031 & -0.098 & -0.602 & 0.583 & 0 \\ 0.304 & -0.127 & -0.424 & -0.172 & 0.116 & 0.017 & 0.172 & 0.016 & -0.065 & 0.128 & 0.35 & -0.174 & -0.648 & 0.211 \\ 0.336 & -0.025 & -0.139 & 0.439 & 0.007 & 0.122 & 0.016 & 0.153 & 0.209 & -0.013 & -0.285 & -0.092 & -0.223 & -0.672 \\ 0.366 & 0.093 & -0.066 & 0.475 & -0.002 & 0.137 & 0.01 & 0.185 & 0.271 & 0.033 & -0.164 & 0.15 & 0.144 & 0.655 \\ 0.415 & 0.335 & -0.042 & -0.147 & 0.053 & 0.018 & 0.095 & 0.048 & 0.049 & 0.184 & 0.533 & 0.402 & 0.357 & -0.262 \\ 0.449 & 0.543 & 0.411 & -0.262 & -0.068 & -0.098 & -0.108 & -0.131 & -0.149 & -0.137 & -0.264 & -0.257 & -0.205 & 0.069 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0.761 & 282717.279 & 0 & 1517.583 & -422083107.616 \\ 0 & -14001.474 & 0 & 41.551 & -138550219.099 \\ 0 & 0 & 0 & 0.688 & -5561114.498 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2423798.182 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Q ve R matrisleri kullanılarak aşağıdaki alt matrisler elde edilir:

$Q_1$ , Q matrisinin ilk P sütunundan oluşurken,  $Q'_1$ ,  $P'$  sütundan oluşur.

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0.055 & -0.158 \\ 0.081 & -0.212 \\ 0.098 & -0.243 \\ 0.131 & -0.282 \\ 0.163 & -0.301 \\ 0.193 & -0.301 \\ 0.22 & -0.284 \\ 0.247 & -0.249 \\ 0.28 & -0.187 \\ 0.304 & -0.127 \\ 0.336 & -0.025 \\ 0.366 & 0.093 \\ 0.415 & 0.335 \\ 0.449 & 0.543 \end{pmatrix}$$

$$Q'_1 = \begin{pmatrix} 0.326 \\ 0.228 \\ 0.4 \\ 0.186 \\ 0.088 \\ 0.229 \\ 0.159 \\ -0.269 \\ -0.339 \\ -0.424 \\ -0.139 \\ -0.066 \\ -0.042 \\ 0.411 \end{pmatrix}$$

- R matrisinin alt matrisleri:  $R_1$ ,  $P \times P$  boyutlu üst üçgen matrisi,  $(N - P) \times P$  boyutlu sıfır matrisi ve  $N \times P(P + 1)/2$  boyutlu A matrisinden oluşur.

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 283062.134 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



- $\ddot{A}$  matrisini elde etmek için, QR ayrıştırmasından elde edilen Q matrisinin alt matrisleri olan  $Q_1$  ve  $Q_1'$  birleştirilir, transpozesi alınarak, elde edilen matris  $\ddot{V}$  matrisi ile çarpılır:

$$(Q_1|Q_1') = \begin{pmatrix} 0.055 & -0.158 & 0.326 \\ 0.081 & -0.212 & 0.228 \\ 0.098 & -0.243 & 0.4 \\ 0.131 & -0.282 & 0.186 \\ 0.163 & -0.301 & 0.088 \\ 0.193 & -0.301 & 0.229 \\ 0.22 & -0.284 & 0.159 \\ 0.247 & -0.249 & -0.269 \\ 0.28 & -0.187 & -0.339 \\ 0.304 & -0.127 & -0.424 \\ 0.336 & -0.025 & -0.139 \\ 0.366 & 0.093 & -0.066 \\ 0.415 & 0.335 & -0.042 \\ 0.449 & 0.543 & 0.411 \end{pmatrix}$$

$\ddot{A} = [(Q_1|Q_1')^T] \cdot [\ddot{V}]$  işlemi gerçekleştirilerek  $(P+P') \times P \times P$  boyutlu  $\ddot{A}$  matrisi elde

edilir. Bu matrisin  $P$  yüzü teğet uzayında bulunurken,  $P'$  yüzü ise ivme uzayında yer alır. Bu ifadeler aşağıda matris şeklinde gösterilmiştir: (kare parantez çarpımları, B  $N_1 \times N_2$  boyutlu bir matris ve C  $N_2 \times N_3 \times N_4$  şeklinde dizi olmak üzere, aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\{A\}_{npq} = \sum_{i=1}^{N_2} \{B\}_{ni} \{C\}_{ipq}$$

Burada A  $N_1 \times N_3 \times N_4$  şeklinde bir dizidir,  $npq$  ifadesi, n.yüzü, p.satırı ve q.sütunu ifade eder)

$3 \times 2 \times 2$ 'lik  $\ddot{A}$  ivme dizisi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\ddot{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1517.583 \\ 1517.583 & -422083107.616 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 41.551 \\ 41.551 & -138550219.099 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.688 \\ 0.688 & -5561114.498 \end{bmatrix}$$

Simetriden dolayı  $\ddot{A}$  dizisi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\ddot{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1517.583 & -4220831107.616 \\ 0 & 41.551 & -138550219.099 \\ 0 & 0.688 & -5561114.498 \end{pmatrix}$$

Hangi ivme vektörünün teğet düzlemi dışında kaldığı, beklenti yüzeyinin düzlemden ne kadar saptığı, beklenti yüzeyinin düzlemsel olmamasını ölçen mesafeye “saf doğrusal olmama (intrinsic nonlinearity)” denir, bu ölçü parametrelendirmeden bağımsızdır. Sadece beklenti fonksiyonun nasıl tanımlandığına bağlıdır.

İvme vektörünün teğet düzlemindeki izdüşümleri, parametrelendirmeye dayanır. Teğet düzlemindeki parametre doğrularının aynı biçimde olup olmadığını ölçer. Bu aynı olup olmama durumuna “parametre etkili doğrusal olmama (parameter effects nonlinearity)” ya da kısaca “parametre etkileri (parameter effects)” denir.

$\ddot{A}$  dizisindeki elemanlar parametre etkileri ve saf doğrusal olmama durumu hakkında bilgi verirler. Dolayısıyla bu dizinin ilk  $P$  yüzü  $A^\theta$  ile gösterilir ve “parametre etkili ivme dizisi”,  $P'$  yüzü ise  $A^l$  ile gösterilir ve “saf ivme dizisi” olarak adlandırılır. Aşağıda bu değerler gösterilmiştir

$$A^\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1517.583 & -422083107.616 \\ 0 & 41.551 & -138550219.099 \end{pmatrix}$$

$$A^l = (0 \quad 0.688 \quad -5561114.498)$$

- İvmeler doğrusal olmama durumunun birer göstergesi oldukları halde, verilerin ve parametrelerin ölçeklendirilmesine dayandıkları için, bağımlı ölçülerdir. Bu bağımlılığı ortadan kaldırmak için ivmeler “Nispi Eğriselliklere (Relative Curvature)” dönüştürülür. Bu bağımlılığı ortadan kaldırmak için eğrisellikler  $s\sqrt{P}$  ile çarpılır:

$$C = R_{11}^{-T} \ddot{A} R_{11}^{-1} s \cdot \sqrt{P}$$

$P \times P \times P$  boyutlu parametre etkili nispi eğrisellik dizisi  $C^\theta$  ve  $P' \times P \times P$  boyutlu gerçek nispi eğrisellik dizisi  $C^l$ 'den oluşur.

Bu açıklamaları örneğe uyguladığımızda aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$s^2 = 0.1038$$

$$P = 2$$

Eğrisellik her yüz(face) için teker teker hesaplanır.  $\ddot{A}$  dizisi hesaplanacak 3 yüz aşağıda sırasıyla belirtilmiştir:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1517.583 \\ 1517.583 & -422083107.616 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 41.551 \\ 41.551 & -138550219.099 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0.688 \\ 0.688 & -5561114.498 \end{bmatrix}$$

- Daha sonra  $C$  eğrisellikleri teker teker bulunmuştur:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.021 \\ -0.021 & -1.139 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.000562 \\ -0.000562 & -0.124518 \end{bmatrix}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.004462 \end{bmatrix}$$

Bu matrisleri 3 boyutlu ivme dizisinde gösterecek olursak:

$$C = \left( \begin{bmatrix} 0 & -0.021 \\ -0.021 & -1.139 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.000562 \\ -0.000562 & -0.124518 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.004462 \end{bmatrix} \right)$$

İlk iki matris,  $2 \times 2 \times 2$  boyutlu “parametre etkili nispi eğrisellik dizisi(parameter effects relative curvature)” olan  $C^\theta$ 'yi oluşturur; üçüncü matris ise,  $1 \times 2 \times 2$  boyutlu “saf nispi eğrisellik dizisi(intrinsic relative curvature array)”  $C^l$ 'yi oluşturur.

Eğrisellikler küçük olduğundan dolayı, teğet düzleminin beklenti yüzeyinde iyi bir yaklaşım oluşturduğu ve parametre eğrilerinin teğet düzlemindeki izdüşümlerinin benzer nitelikte olduğu söylenebilir.

Eğrisellikler azda olsa düz, paralel ve eşit uzaklıktadırlar.

- Yuvarlak teğet düzleminin yarıçapı,

$$\sqrt{F(p, n - p; \alpha)} = \sqrt{F(2, 12; 0, 05)} = \sqrt{3, 89} = 1, 972308$$

olarak bulunur. Bölge çok büyük olmadığından, parametre eğriselliklerinin düzgün olduğu ve doğrusal yaklaşım bölgesinin, gerçek benzerlik(olasılık) bölgesi için iyi bir yaklaşım oluşturması beklenir.

- Bu model ve kullanılan veri seti için bütün nispi eğrisellikler küçüktür. Dolayısıyla tahmin süreci, doğrusal olmamanın etkilerinden kötü bir biçimde etkilenmemiştir.
- Eğrisellikler az olduğu için, doğrusal regresyondaki gibi yapılan kalıntı analizinin sonuçlarına güvenilebilir.
- Nispi Eğrisellik dizisi, saf eğrisellik ve parametre etkili eğrisellik dizisi olmak üzere iki kısımda incelenebilir. Saf eğrisellik;

$$C^l = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.004462 \end{bmatrix}$$

(-0.004462) oldukça küçük bir değer olduğundan, teğet düzleminin  $\hat{\theta}$  civarında beklenti yüzeyine iyi bir yaklaşımda bulunduğu söylenebilir. Parametre etkili eğrisellik ise;

$$C^\theta = \left( \begin{bmatrix} 0 & -0.021 \\ -0.021 & -1.139 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.000562 \\ -0.000562 & -0.124518 \end{bmatrix} \right)$$

Yukarıdaki diziye bakıldığında, parametre etkili eğriselliği belirten değerlerin az olduğu görülmüştür. Dolayısıyla model parametre etkili eğrisellikten etkilenmemiştir.

## 6. SONUÇ

Bu bölümde uygulama amacıyla seçilen veri kümesinin sonuçlarına değinilecektir. Veri kümesi bir bağımlı, bir bağımsız değişkene sahiptir. Bağımsız değişken basınç değerlerinden, bağımlı değişken ise hacim değerlerinden oluşmaktadır.

Araştırma için seçilen veri kümesi, hem doğrusal regresyon analizi, hem de doğrusal olmayan regresyon analizi yapılarak incelenmiştir. Buradaki amaç, doğrusal regresyon için kullanılan varsayımların, doğrusal olmayan regresyon kullanıldığındaki uygunluğunun araştırılmasıdır. Doğrusal regresyonda olduğu gibi, doğrusal olmayan regresyonda da parametre tahminleri, bu tahmincilerin buldukları güven aralıkları, hipotez testleri yapılır. Bu araştırmalarla model hakkında daha kesin bir sonuca varılır. Doğrusal olmayan regresyonda bu araştırmalar asimptotik özelliklere dayanır.

Doğrusal regresyon için basit doğrusal regresyon modeli kullanılmıştır. Bu model için parametreler anlamlı çıkmıştır.  $R^2$  ise 0,997 gibi yüksek bir değere sahiptir. Model, kalıntılar açısından da incelenmiştir. Kalıntı çeşitleri bulunmuştur. Elde edilen modele göre 14. gözlemin aşırı gözlem olduğu sonucuna varılmıştır. Bu gözlemin modelden çıkarılması sonucu elde edilen yeni modelin parametrelerinde, önemli bir değişikliğe rastlanmamıştır. Modele kalıntı analizi uygulanmıştır. Kalıntıların normal dağılmadığı görülmüştür. Ayrıca kalıntı grafikleri incelendiğinde kalıntıların modellenebilir bir görünüm sergiledikleri anlaşılmıştır.

Doğrusal olmayan regresyon modeli için ise, verilerin elde edildiği kaynakta önerilen monomoleküler büyüme modeli kullanılmıştır. Doğrusal olmayan regresyon modeli sonucu elde edilen sonuçlar, doğrusal yaklaşımın iyi olduğu durumlarda geçerlidir. Dolayısıyla model tahmin edildikten sonra, modelin büyük örneklem yaklaşımına olan uygunluğu, bazı eğrisellik ölçüleri ile araştırılmıştır.

Eğrisellik ölçüleri, doğrusal yaklaşımın, doğrusal olmayan modele uygunluğu konusunda bilgi vermektedir. Kısacası doğrusal olmama durumunun bir kriteri olmaktadır. Modeldeki eğrisellik araştırması, saf eğrisellik ve parametre etkili eğrisellik açısından incelenmiştir. Saf eğriselliğin yüksek olduğu modellerde, veri kümesi ve model uyumsuzluğu söz konusudur ve her hangi bir şey yapılamaz. Çünkü bu durum çözüm bölgesinin eğriselliğine dayanır. Geometrik bir ölçüdür. Yeniden parametrelendirme ile doğrusal olmama durumu giderilemez. Bu yüzeyin kendine ait bir özelliğidir.

Modelde parametre etkili eğrisellik yüksekse, bu durum yeniden parametrelendirme yapılarak giderilebilir. Parametrelerin modele en iyi, nasıl dahil edileceği çeşitli yöntemler araştırılarak bulunur.

Doğrusal olmayan modellerde tahmin uzayının karmaşıklığı ve veri sayısı arttıkça, eğrisellik ölçülerinin hesaplanmasında çeşitli zorluklar çıkması ve bu hesaplamaların yazılım gerektirmesinden dolayı, 14 gözlemden oluşan bir veri kümesi seçilmiştir. Dolayısıyla işlemler yazılım gerektirmeden, Mathcad kullanılarak yapılmıştır.

İlk önce verilerin elde edildiği kaynakta önerilen üç başlangıç değeri içinde model incelenmiştir. Aralarında iterasyon sayıları dışında farklılıklar görülmemiştir. Parametreler anlamlı çıkmıştır.  $R^2$ , doğrusal olmayan modellerde beklendiği gibi yüksek çıkmıştır(0,9999). Model kalıntıları açısından da incelenmiştir. Kalıntı çeşitleri bulunmuştur. Bunlar arasında doğrusal regresyonda olduğu gibi, 14.gözlemin aşırı değer olduğundan şüphelenilmiştir. Kalıntıların etkinlik ölçülerine bakıldığında 14. gözlemin etkin değer olduğu görülmüştür. 14.gözlem modelden dışlanmış, yeni bir model oluşturulmuştur. Bu modelin parametre değerlerinde ve  $R^2$ 'sinde bir değişme görülmemiştir.

Kalıntı analizi yapıldığında, doğrusal modele paralel olarak normal dağılmamıştır ve sabit varyanslı olduğu bulunmuştur.

Doğrusal olmayan regresyon analizinden elde edilen bütün bu sonuçlar, doğrusal yaklaşıma dayanmaktadır. Elde edilen sonuçların güvenilirliğini araştırmak için eğrisellik ölçüleri kullanılmıştır.

Bu veri seti ve model için hesaplanan bütün nispi eğrisellikler küçük çıkmıştır. Dolayısıyla tahmin süreci, doğrusal olmamanın etkilerinden kötü bir biçimde etkilenmemiştir. Kullanılan veri seti ve model için eğrisellik az olduğundan, doğrusal regresyondaki gibi yapılan kalıntı analizinin sonuçlarına güvenilebilir. Bu model için, saf eğrisellik az çıkmıştır. Dolayısıyla beklenti yüzeyine iyi bir yaklaşım yapılmıştır. Parametre etkili eğrisellik de az bulunmuştur.

Sonuç olarak, kullanılan 14 gözlemlik veri seti için, doğrusal olmayan monomoleküler büyüme modelinin uygun olduğu söylenebilir. Doğrusal olmayan regresyon analizi, oldukça kapsamlı ve gelişmeye açık bir konudur. Doğrusal olmayan regresyon analizi sonuçları asimptotik özelliklere dayanır. Dolayısıyla sonuçlar yaklaşık olarak ifade edilmelidir. Bu analizde tahmin süreci çok önemlidir. Veri ve parametre sayısı arttıkça hesaplamalarda zorluklar görülmektedir.

Çizelge 6.1 Karşılaştırma Sonuçları

Özellikler		Doğrusal Regresyon	Doğrusal Olmayan Regresyon
Parametreler ve Standart Hatalar	$\beta_0$	3,765 (0,662)	238,9421 (2,7070)
	$\beta_1$	0,105 (0,002)	0,00055 (0,0000072)
$R^2$		0,997	0,9999
$F$ (p)		4679,924 (0,000)	325732,47
Kalıntı Çeşitleri	$e_i$	14. kalıntı aşırı değerdir.	14. kalıntı aşırı değerdir.
	$e_i^*$	14. kalıntı aşırı değerdir.	14. kalıntı aşırı değerdir.
	$r_i$	14. kalıntı aşırı değerdir.	14. kalıntı aşırı değerdir.
	$t_i$	1 ve 14. kalıntı aşırı değerdir.	13 ve 14. kalıntı aşırı değerdir.
	$d_i$	1 ve 14. kalıntı aşırı değerdir.	14. kalıntı aşırı değerdir.
	$h_{ii}$	14. kalıntı aşırı değerdir.	14. kalıntı aşırı değerdir.
Etkinlik Ölçütleri	$D_i$	14. kalıntı aşırı değerdir.	14. kalıntı aşırı değerdir.
	DFFITs	14. kalıntı aşırı değerdir.	14. kalıntı aşırı değerdir.
<b>Kalıntıların Normalliği:</b>		Normal dağılmamaktadır.	Normal dağılmamaktadır.
<b>Kalıntıların Sabit Varyanslık Durumu:</b>		Sabit Varyanslıdır.	Sabit Varyanslıdır.
<b>Yapılan eğrisellik araştırmaları sonucunda, eğriselliklerin düşük olması nedeniyle, doğrusal olmayan regresyona uygulanan kalıntı analizleri sonuçlarına güvenilebileceği ortaya çıkmıştır.</b>			

**KAYNAKLAR**

- Atkinson, A. C., (1985), "Plots, Transformations and Regression", Clarendon Press, Oxford
- Bates, D. M. ve Watts D. G., (1988), "Nonlinear Regression Analysis and Its Applications", John Wiley & Sons, New York
- Draper, N. R. ve Smith, H., (1998), "Applied Regression Analysis", Wiley & Sons, New York
- Gujarati, D. N., Çevirenler: Şenesen, Ü. ve Şenesen, G. G., (2001), "Temel Ekonometri", Literatür Yayıncılık, İstanbul
- Güriş, S., Çağlayan, E.,(2000), "Ekonometri Temel Kavramlar", DER Yayınları, İstanbul
- Jennrich, R. I., (1995), "An Introduction to Computational Statistics – Regression Analysis", Prentice – Hall, New Jersey
- Jorgensen, B., (1993), "The Theory of Linear Models", Chapman & Hall, New York
- Kolman, B., Hill, D. R., Çevirenler: Akın, Ö., (2002), "Uygulamalı Lineer Cebir", Palme Yayıncılık, Ankara
- Neter, J., Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J. ve Wasserman, W., (1996), "Applied Linear Statistical Models", McGraw – Hill, Boston
- Seber, G. A. F. ve Wild, Alan, J. L., (2003), "Linear Regression Analysis", Wiley & Sons, New York
- Seber, G. A. F. ve Wild, C. J., (1989), "Nonlinear Regression", Wiley & Sons, New York
- Yüce, M., (2004), "Doğrusal Olmayan Regresyonda Değişen Varyans ve İlgili Uygulamalar – Yüksek Lisans Tezi, İstanbul

**INTERNET KAYNAKLARI**

- [1] [www.itl.nist.gov/div898/strd/nls/data/misra1a.shtml](http://www.itl.nist.gov/div898/strd/nls/data/misra1a.shtml)
- [2] [www.nlreg.com](http://www.nlreg.com)
- [3] [www.curvefit.com](http://www.curvefit.com)
- [4] [www.statsci.org/smyth/pubs/eoe\\_nr.pdf](http://www.statsci.org/smyth/pubs/eoe_nr.pdf)
- [5] [www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0104-66322000000100010](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0104-66322000000100010)
- [6] [www.currentseparations.com/issues/14-1/cs14-1b.pdf](http://www.currentseparations.com/issues/14-1/cs14-1b.pdf)
- [7] [www.ocgy.ubc.ca/~yzq/books/paper4\\_lorenz/3\\_mallick2004.pdf](http://www.ocgy.ubc.ca/~yzq/books/paper4_lorenz/3_mallick2004.pdf).
- [8] [www.statsci.org/smyth/pubs/eoe\\_nr.pdf](http://www.statsci.org/smyth/pubs/eoe_nr.pdf)
- [9] [www3.stat.sinica.edu.tw/statistica/j8n2/j8n210/j8n210.htm](http://www3.stat.sinica.edu.tw/statistica/j8n2/j8n210/j8n210.htm)
- [10] <http://citeseer.ist.psu.edu/286959.html>



**EKLER**

- Ek 1 Matrislerle ilgili Genel Bilgiler
- Ek 2 Projeksiyonlar
- Ek 3 Doğrusal Regresyonun Geometrik Gösterimi
- Ek 4 Uygulamada Kullanılan Projeksiyon Matrisi
- Ek 5 İterasyon Sonuçlarının Excel ile Elde Edilmesi
- Ek 6 Başlangıç Değerlerinin Sonuçları

## Ek 1 Matrislerle İlgili Genel Bilgiler

Matris, satırlar ve sütunlar biçiminde düzenlenmiş sayılar ya da elemanların dikdörtgen bir dizgesidir. herhangi bir **A** matrisini aşağıdaki gibi gösterilir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ ve } A = [a_{ij}] , i = 1, 2; j = 1, 2, 3$$

“i” satırları, “j” ise sütunları göstermektedir.

**Kare Matris:** Eğer bir matrisin satır ve sütun sayısı birbirine eşitse, bu matrise “kare matris” denir.

**Vektör:** Eğer bir matris sadece bir sütundan oluşuyorsa bu matrise “sütun vektör”, sadece bir satırdan oluşuyorsa “satır vektör” denir.

**Devrik Alma(Transpoze):** **A** matrisinin devriği(transpozesi) **A'** ile gösterilir ve **A** matrisinin satırları ile sütunlarının yer değiştirmesiyle elde edilir.

**Matrislerin Eşitliği:** Eğer **A** ve **B** gibi iki matrisin boyutları ve bütün elemanları birbirinin yerini tutuyorsa, **A** ve **B** matrislerine “eşit” denir. Kısaca eğer iki matris eşitse bu matrislerin elemanları da birbirine eşittir.

**Matris Toplaması ve Çıkarılması:** Matrislerde toplama ve çıkarma işlemi sadece matrislerin boyutları aynı ise yapılır. Genel olarak;

$$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{r \times c}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{r \times c} \quad i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, c$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{ij} + b_{ij} \end{bmatrix}_{r \times c} \quad \text{ve} \quad A - B = \begin{bmatrix} a_{ij} - b_{ij} \end{bmatrix}_{r \times c}$$

**Bir Matrisin Skaler ile Çarpımı:** Skaler herhangi bir sayı ya da bir sayıyı temsil eden herhangi bir sembol olabilir. Matrislerin skaler ile çarpımında, matrisin herbir elemanı o skaler ile çarpılır. Genel olarak, eğer  $A = [a_{ij}]$  ise ve **k** bir skaler ise;

$$kA = Ak = [ka_{ij}] \text{ olur.}$$

**Bir Matrisin Bir Matris ile Çarpımı:** **A** matrisinin boyutu  $r \times c$ , **B** matrisinin boyutu  $c \times s$  olsun. BU durumda **AB** çarpımı sonucu ortaya çıkacak yeni matrisin boyutu  $r \times s$  olur:

$$AB = \left[ \sum_{k=1}^c a_{ik} b_j \right] \quad i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s$$

**Simetrik Matris:** Eğer  $A = A'$  ise,  $A$  matrisine simetrik matris denir. Simetrik matris kare matristir.

**Köşegen(Diagonal) Matris:** Köşegen matris, köşegen elemanları hariç diğer bütün elemanları sıfır olan matristir. Örneğin;

$$\mathbf{A}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$$

**Birim Matris:** Köşegen üzerindeki bütün elemanları 1 olan köşegen matrise “birim matris” denir ve  $I$  ile gösterilir. Ayrıca  $I$  matrisi herhangi bir matrisle çarpıldığında ortaya yeni bir matris çıkarmaz, sonucu değiştirmez. Genel olarak şöyle yazılır:

$$AI = IA = A$$

**Skaler Matris:** Köşegen üzerindeki elemanlarının hepsi aynı olan köşegen matrise “skaler matris” denir.

#### Bütün Elemanları 1 olan Vektör ve Matrisler:

- Bütün elemanları 1 olan sütun vektör “ $\mathbf{1}$ ” ile gösterilir.
- Bütün elemanları 1 olan kare matris “ $\mathbf{J}$ ” ile gösterilir.

**Sıfır Vektör:** Bütün elemanları sıfır olan satır veya sütun vektörlere sıfır vektör denir ve “ $\mathbf{0}$ ” ile gösterilir.

#### Matrisler ile İlgili Değerler:

- **Doğrusal Bağımlılık:** Herbiri  $n \times 1$  boyutunda olan  $v_1, v_2, \dots, v_p$  vektörlerini, hepsi sıfır olmayan  $a_1, a_2, \dots, a_p$  skalerleri ile çarpıldığında;

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_p v_p = 0$$

ise  $v_1, v_2, \dots, v_p$  vektörlerinin doğrusal bağımlı olduğu söylenir.

Ayrıca  $a_1 = a_2 = \dots = a_p = 0$  iken  $\sum_{i=1}^p a_i v_i = 0$  ise vektörler kümesinin doğrusal

bağımsız olduğu söylenir.

- **Matrisin Rankı:** Matrislerde rank, verilen bir doğrusal denklem siseminin çözümü olup olmadığını araştırmakta kullanılır. Determinantı sıfır olan matrise “*tekil(singular) matris*” denir. Bir matrisin rankı; matrisin tekil olmayan en büyük alt matrisinin mertebesidir. Örneğin,  $n \times p$  boyutlu bir A matrisi olsun. Bu matristen belirli sayıda satır ya da sütunların çıkartılması ile elde edilen tüm olası alt kare matrislerin determinantlarını bulduğunda, determinantı sıfır olmayan matrisler arasında en yüksek mertebeli alt matrisin mertebesi A matrisinin rankını verir ve “*rank (A) ya da r(A)*” ile gösterilir.
- Rank kavramı ile ilgili bazı özellikler şunlardır:
  - Bir matrisin rankı, o matriste birbirinden bağımsız maksimum satır ya da sütun sayısını gösterir.
  - Bir matriste birbirinden bağımsız maksimum satır sayısı, birbirinden bağımsız maksimum sütun sayısına eşittir.
  - A matrisi  $n \times n$  boyutunda tekil olmayan bir matris ise, yani tersi bulunabiliyorsa, A matrisinin tam ( full) rankı olduğu söylenir ve  $r(A) = n$  olarak gösterilir.
  - Birim matriste satır ya da sütunlar birbirinde bağımsız olduğu için  $I_n$ ’in rankı  $r(I_n) = n$ ’dir.
  - Köşegen matrisin rankı, sıfır olmayan köşegen elemanlarının sayısına eşittir.
  - $r(A) = r(A')$
  - $r(A'A) = r(AA') = r(A)$
  - A ve B çarpılabilen ve tekil olmayan matrislerse, AB çarpımının rankı;  $r(A)$  ile  $r(B)$ ’den küçük olanınkine eşit ya da ondan küçüktür.
$$r(AB) \leq \min[r(A), r(B)]$$
  - $n \times p$  boyutlu bir matrisin rankı  $0 \leq r(A) \leq \min(n, p)$ ’dir.
  - Bir matrisin rankı, iki satır ya da sütunun yer değiştirmesi ile değişmez.
  - Bir matrisin rankı, bir satır ya da sütunun her elemanının sıfırdan başka bir sabitle çarpılması durumunda değişmez.

**Matrisin İzi(Trace):** Bir matrisin ana köşegen elemanlarının toplamına matrisin izi adı verilir. Matrisin izi  $tr(A)$  şeklinde sembolize edilir ve aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

**Özdeğerler ve Özvektörler:**  $p \times p$  boyutlu bir kare matrisin karakteristik köklerine özdeğer adı verilir. Özdeğer tanımı şu şekilde de yapılır:

$V$ ,  $n$  boyutlu bir  $F$  vektör uzayı ve  $f: V \rightarrow V$  bir lineer dönüşüm olsun. Bir  $c$  skaleri için,  $f(v) = cv$  eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir  $v \in V$  vektörü varsa  $c$  skalerine “özdeğer veya karakteristik değer” denir. Bu eşitliği sağlayan, sıfırdan farklı bir vektöre de  $c$ 'ye karşılık gelen bir “özvektör ya da karakteristik vektör” denir.

$A$  matrisi simetrik bir kare matris olmak üzere  $|A - \lambda I| = 0$  eşitliğinin çözümlerinden elde edilen  $\lambda$  değerlerine matrisin özdeğerleri denir.

$A$  simetrik kare matrisinin özdeğerleri belirlenmiş olmak koşulu ile her bir özdeğere karşılık gelen ve  $(A - \lambda I)t = 0$  eşitliğini sağlayan  $t$  vektörüne de  $A$  matrisinin özvektörü adı verilir.

$p \times p$  boyutlu simetrik kare matrisin,  $p$  tane özdeğeri ve  $p$  tane özvektörü vardır.

### Matrisin İzi, Özdeğerler ve Özvektörler ile ilgili Bazı Özellikler:

- $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(AC) = tr(CA)$
- Eğer  $A$ ,  $n \times n$  boyutlu ve  $\lambda_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) özdeğerlerine sahip bir matris ise, o zaman;

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{ve} \quad \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \text{ dir.}$$

- Eğer  $A$ ,  $n \times n$  boyutlu, simetrik bir matris ise, o zaman  $T = (t_1, t_2, \dots, t_n)$  şeklinde ortagonal(dik) bir matrisi oluşur:

$$T'AT = \Lambda$$

$\Lambda = köşegen(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  'dir. Burada  $\lambda_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) 'ler  $A$  matrisinin özdeğerleridir ve  $At_i = \lambda_i t_i$  şeklindedir.

- Eğer  $A$  simetrik bir matris ise:

$$\text{tr}(A^s) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^s \quad \text{olur.}$$

Eğer A matrisi simetrik bir matris ise fakat tekil değilse(nonsingular), o zaman  $A^{-1}$  matrisinin özdeğerleri  $\lambda_i^{-1}$  ( $i=1, \dots, n$ )'dir ve  $\text{tr}(A^{-1}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1}$ 'dir.

**Pozitif Yarı - Belirli Matrisler:** A simetrik bir matris ve

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \text{ olmak üzere } g(X) = X'AX \text{ ile tanımlı } g: R_1^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonksiyonuna n değişkenli reel}$$

bir kuadratik form ve  $A = [a_{ij}]$  matrisine de kuadratik formun matrisi denir.

A simetrik matrisinin pozitif yarı - belirli olabilmesi için,  $X'AX \geq 0$  (her X değeri için) olmalıdır.

Pozitif yarı - belirli matrislerin özdeğerleri negatif değildir(nonnegative).

Eğer  $T'AT = \Lambda$  ise,  $X = TY$ 'den  $X'AX = Y'T'ATY = \lambda_1 Y_1^2 + \dots + \lambda_n Y_n^2 \geq 0$  olur.

Eğer A matrisi pozitif yarı - belirli ise  $\text{tr}(A) \geq 0$ 'dır.

**Pozitif Belirli Matrisler:** Eğer tüm X değerleri için  $X \neq 0$  ise ve  $X'AX > 0$  ise A simetrik matrisi "pozitif belirli" olarak adlandırılır. Dikkat edileceği üzere pozitif belirli matris aynı zamanda pozitif yarı - belirli matristir.

A matrisi tekil olmadığında, pozitif belirli A matrisinin bütün özdeğerleri pozitiftir.

Bir simetrik matrisin pozitif belirli olması için gerek ve yeter koşul matrisin bütün özdeğerlerinin pozitif olmasıdır.

**Matrisin Tersi:** Bir kare matris olan A'nın  $A^{-1}$  ile gösterilen tersi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

**Ortogonal Vektörler:** a ve b gibi iki vektörün ortogonal olma koşulu ( $a \perp b$ ), aşağıdaki ifadeye bağlıdır:

$$a'b = b'a = 0$$

## Ek2 Projeksiyon Matrisi

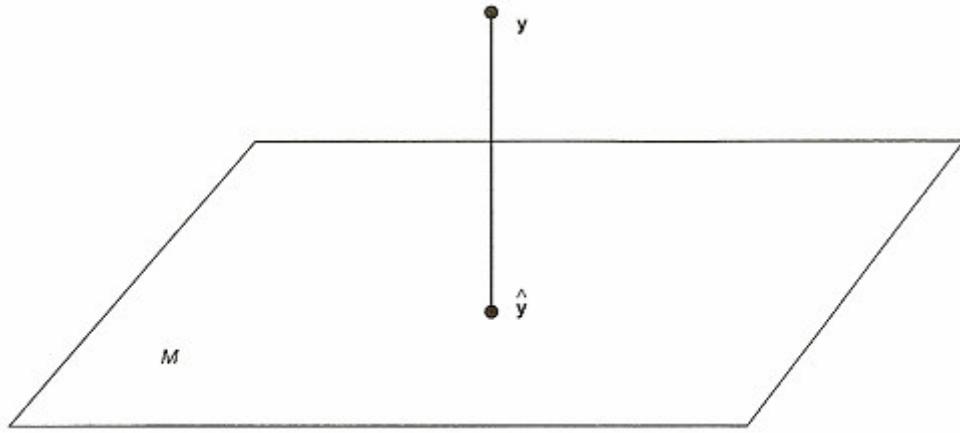
Projeksiyonlar, genel doğrusal modeller teorisinde önemli rol oynar. Projeksiyonlar ve bazı özellikleri aşağıda belirtilmiştir.

$V$ , herhangi bir sonlu boyutlu iç uzay olsun.  $(u, v)$  ise  $V$ 'deki iki vektör olsun.

$\|u\| = (u, u)^{1/2}$  denklemi  $u$ 'nun normunu ya da uzunluğunu ifade eder. Dolayısıyla  $\|u - v\|$ ,  $u$  ile  $v$  arasındaki uzaklığı verir. Genellikle  $V$ ,  $\mathfrak{R}^n$  olarak ifade edilir.

$M$ ,  $V$ 'nin altuzayı olsun.  $V$ 'de herhangi bir  $y$  verilmiş olsun. Eğer  $\hat{y}$   $M$ 'de  $y$ 'ye en yakın nokta ise, o zaman  $\hat{y}$ 'ya  $y$ 'nin  $M$  üzerindeki projeksiyonu denir. Grafik 6.1'de bu durum gösterilmiştir.

Eğer  $(u, v) = 0$  ise,  $u$ 'nun  $v$ 'ye dik olduğu söylenir ve  $u \perp v$  ile gösterilir. Ayrıca  $u$ 'nun  $M$  altuzayına da dik olduğu söylenir ve  $u \perp M$  yazılır. Bu özellikler aşağıdaki şekilde gösterilmiştir:



Şekil Ek 2.1  $y$ 'nin  $M$  üzerindeki projeksiyonu

**Teorem:**  $V$ 'nin  $M$  altuzayında, eğer  $y \in V$  ise,  $y$ 'nin projeksiyonunun  $\hat{y}$  olabilmesi için gerek ve yeter koşul :

$$\hat{y} \in M \text{ ve } y - \hat{y} \perp M$$

- **Projeksiyon Matrisi:**

Kalıntıların incelenmesinde işlemler açısından oldukça kolaylık sağlar.  $n \times n$ 'lik bir  $H$  matrisinin elemanları aşağıdaki şekilde gösterilebilir :

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix}$$

$$H = X(X'X)^{-1}X'$$

$$\hat{Y} = HY$$

$$e = (I - H)Y$$

Doğrusal regresyon için kalıntıların varyans-kovaryans matrisi, H matrisi kullanılarak yazılabilir:

$$\sigma^2 \{e\} = \sigma^2 (I - H)$$

$$\sigma^2 \{e_i\} = \sigma^2 (I - h_{ii})$$

$h_{ii}$  = projeksiyon matrisindeki i. köşegen elemanı

Hata varyansı  $\sigma^2$  nin tahmincisi olarak MSE kullanıldığında, varyanslar ve kovaryanslar aşağıdaki şekilde tahmin edilmeye çalışılır :

$$s^2 \{e_i\} = MSE(1 - h_{ii})$$

$$s \{e_i, e_j\} = -h_{ij}(MSE)$$

Hat matrisinin köşegen elemanı  $h_{ii}$  şu şekilde bulunabilir :

$$h_{ii} = X_i'(X'X)^{-1}X_i$$

$$X_i = \begin{bmatrix} 1 \\ X_{i,1} \\ \vdots \\ X_{i,p-1} \end{bmatrix}$$



### Ek3 Doğrusal Regresyonun Geometrisi

Çoklu doğrusal regresyonda bağımlı değişkeni etkileyen, birden çok bağımsız değişken vardır:

$$\begin{aligned} Y_n &= \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \dots + \beta_n x_{np} + Z_n \\ &= \beta(x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{np}) + Z_n \end{aligned}$$

Bu modelde  $Y_n$  bağımsız değişkeni ifade eder.  $\beta$  parametreleri,  $(x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{np})$  ise,  $n=1, 2, \dots, N$  ve  $p=1, 2, \dots, P$  olmak üzere bağımsız değişkenleri ifade eder.  $Z_n$  ise hata terimleridir. Dolayısıyla yukarıdaki model matris formuyla aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$Y = X\beta + Z$$

$X$  matrisi,  $(x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{np})$  elemanlarından oluşan  $N \times P$  boyutlu bağımsız değişkenler matrisidir. Aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1P} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2P} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & x_{N3} & \dots & x_{NP} \end{bmatrix}$$

$Z$ , hata terimlerini ifade eden vektördür.  $E[Z] = 0$  ifadesi  $E[Y] = X\beta$ 'ya eşittir. Doğrusal regresyon modelinde  $X\beta$  kısmına “beklenti fonksiyonu” denir.  $X$  matrisine türev matrisi denir ve türev matrisinin  $(n, p)$ . terimi, beklenti fonksiyonunun  $n$ . satırının  $p$ . parametreye bağlı türevi olarak ifade edilir. Doğrusal modeller için, parametrelere bağlı bütün türevler parametrelere bağımsızdır.  $Z$ , normal dağıldığından, varyansı aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\text{Var}[Z] = E[ZZ^T] = \sigma^2 I$$

Burada  $I$ ,  $N \times N$  boyutlu birim matristir.  $X$  türev matrisi ve verilen  $y$  gözlem verileriyle,  $\sigma^2$  ve  $P$  tane  $\beta$  parametresi hakkında bilgi edinilmeye çalışılır.

Kalıntı kareleri toplamı  $\beta$ 'ya göre minimize edildiğinde aşağıdaki ifade bulunur:

$$S(\beta) = \|y - X\beta\|^2 = \sum_{n=1}^N \left[ y_n - \left[ \sum_{p=1}^P x_{np} \beta_p \right] \right]^2$$

$\hat{\beta}$ , EKK tahmincisidir ve  $S(\beta)$ 'yı minimize eden  $\beta$  değeridir. Bu değer, aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

EKK tahmincileri kullanılırken aşağıdaki yaklaşımlardan yararlanır:

- Beklenti fonksiyonu doğrudur.
- Bağımlı değişken, beklenti fonksiyonu ve hata terimlerinin toplamından oluşur.
- Hata terimi, beklenti fonksiyonundan bağımsızdır.
- Her hata terimi normal dağılıma sahiptir.
- Her hata terimi sıfır ortalamaya sahiptir.
- Hata terimleri eşit varyanslıdır.
- Hata terimleri bağımsız dağılırlar.

Bu maddelerin doğruluğu kanıtlandıktan sonra, regresyon modeli ve parametreler hakkında daha fazla sonuç elde edilmeye çalışılır. EKK tahmincileri aşağıdaki özelliklere sahiptirler:

- $\hat{\beta}$ , EKK tahmincisi normal dağılıma sahiptir. Çünkü tahminci  $Y$ 'nin doğrusal bir fonksiyonudur. Dolayısıyla  $Z$ 'nin de doğrusal bir fonksiyonudur.  $Z$  normal dağılıma sahip olduğundan,  $\hat{\beta}$ 'da normal olarak dağılır.
- EKK tahmincisi yansızdır,  $E[\hat{\beta}] = \beta$ .
- EKK tahmincisinin kovaryans matrisi, hata terimlerinin varyansına ve  $X$  türev matrisine bağlıdır,  $Var[\hat{\beta}] = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$ .
- $\beta$  için  $1 - \alpha$ 'lık birleşik güven bölgesi(joint confidence region) bir elipsoiddir. Bu bölge aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$(\beta - \hat{\beta})^T X^T X (\beta - \hat{\beta}) \leq P s^2 F(P, N - P; \alpha)$$

Burada  $s^2 = S(\hat{\beta}) / (N - P)$ 'dir. Kalıntı Kareleri Ortalaması olarak adlandırılır.

- $\beta_p$  parametresi için  $1-\alpha$  'lık marjinal güven aralığı aşağıdaki gibidir:

$$\hat{\beta}_p \pm se(\hat{\beta}_p) t(N-P; \alpha/2)$$

Burada parametre tahmincisinin standart hatası,  $se(\hat{\beta}_p) = s \sqrt{\left\{ (X^T X)^{-1} \right\}_{pp}}$  ile bulunur.

$\left\{ (X^T X)^{-1} \right\}_{pp}$ ,  $(X^T X)^{-1}$  matrisinin p.köşegen terimini ifade eder.

- Beklenen  $x_0$  bağımsız değişkeni için  $1-\alpha$  'lık güven aralığı aşağıdaki gibi ifade edilir(bu ifade belirli bir noktadaki aralığı ifade eder):

$$x_0^T \hat{\beta} \pm s \sqrt{x_0^T (X^T X)^{-1} x_0} t(N-P; \alpha/2)$$

- Herhengi bir  $x$  değerindeki  $1-\alpha$  'lık güven bandı aşağıdaki gibi bulunur(bu ifade bütün  $x$  değerlerinin aralıkları tarafından oluşturulur):

$$x^T \hat{\beta} \pm s \sqrt{x^T (X^T X)^{-1} x} \sqrt{PF(P, N-P; \alpha)}$$

$S(\beta)$ ;  $y$  vektörü ile  $X\beta$  arasındaki uzaklığın karesidir. Bu ifade, doğrusal regresyonda Öklit geometrisinin kullanılmasını sağlar.  $S(\beta)$ 'yı hesaplamanın iki yöntemi vardır:

- $P$  boyutlu parametre vektörü  $\beta$  ve  $N \times P$  boyutlu  $X$  ütrev matrisi kullanılarak,  $N$  boyutlu “beklenen bağımlı değişken vektörü(expected response vector) elde edilir,  $\eta(\beta) = X\beta$ .

- $\eta(\beta)$  ile gözlenen bağımlı değişkenler olan  $y$  arasındaki uzaklığın karesi bulunur:

$$\|y - \eta(\beta)\|^2.$$

Beklenen bağımlı değişken vektörlerinden oluşan  $\eta(\beta)$ ,  $N$  boyutlu bağımlı değişken uzayında, “ $P$  boyutlu beklenti yüzeyini” oluştururlar. Bu yüzey, bağımsız değişken uzayının doğrusal bir alt uzayıdır. Doğrusal modellerden bahsedilirken, bu yüzey “beklenti düzlemi(expectation plane)” olarak adlandırılır.

**EKK'ların Elde Edilmesi:**

Beklenti yüzeyi doğrusal olduğundan, yapılması gereken yüzeyde  $y$ 'ye en yakın noktayı bulmaktır.  $y$ 'nin beklenti düzlemindeki izdüşümü alınarak  $\hat{\eta}$  noktası elde edilir. Bu izdüşümü ifade eden bir başka yaklaşım ise, izdüşüm gerçekleştirildikten sonra  $y - \hat{\eta}$  kalıntı vektörünün, beklenti düzlemine dik(ortogonal) ya da normal olduğunun incelenmesidir. Kalıntı vektörünün  $X$  matrisinin bütün sütunlarına dik olması gerekir. Dolayısıyla,  $X^T(y - X\hat{\beta}) = 0$  ifadesi elde edilir. Bu sayede EKK tahmincisinin elde edildiği normal denklem yazılır,  $X^T X \hat{\beta} = X^T y$ . Bu denklemden yararlanılarak EKK tahmincisi elde edilir:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

Tahmincilerin elde edilmesinin bir diğer yolu ise,  $X$  matrisinin, dik(ortogonal) ve kolay çevrilebilir iki matrise ayrıştırılmasıdır. QR ayrıştırması kullanıldığında;

$$X = QR$$

yazılır. Burada  $Q$ ,  $N \times N$  boyutlu bir matristir ve  $R$  ise  $N \times P$  boyutlu bir matristir.  $Q$ , ortogonal bir matristir ( $QQ^T = Q^T Q = I$ ).

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R_1$ ,  $R$  matrisinin üst üçgenidir ve  $P \times P$  boyutludur.

$$Q = [Q_1 | Q_2]$$

$Q_1$ ,  $Q$  matrisinin ilk  $P$  sütunudur.  $Q_2$  ise,  $Q$  matrisinin  $N - P$  sütunudur. Bu bilgiler kullanılarak  $X$  matrisi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$X = QR = Q_1 R_1$$

Geometrik olarak,  $Q$ , bağımlı değişken uzayında ortogonal bir temel oluşturur. Çünkü  $Q$ 'nun ilk  $P$  sütunu beklenti düzlemini kapsar. Eğer  $Q$  ile ifade edilen koordinat sisteminde çalışılırsa, beklenti düzlemindeki izdüşüm kolay elde edilir. Bağımsız değişken vektörünün aşağıdaki şekilde dönüştürüldüğü düşünülün:

$$w = Q^T y$$

Bu ifadenin bileşenleri  $w_1 = Q_1^T y$  ve  $w_2 = Q_2^T y$  şeklindedir.  $Q$  koordinatlarına göre  $w$ 'nin beklenti düzlemindeki izdüşümü

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

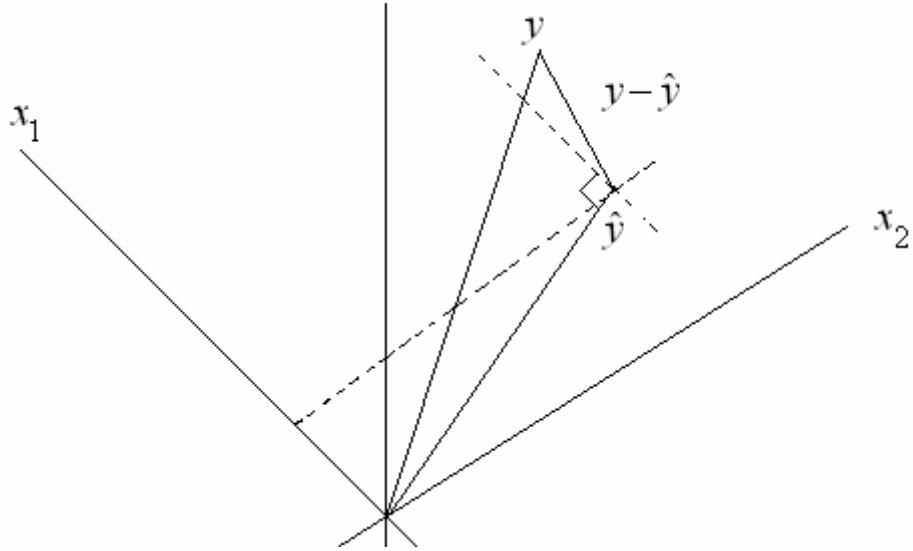
şeklindedir. Orjinal koordinatlardaki izdüşümü ise

$$\hat{\eta} = Q \begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 w_1$$

şeklinde bulunur. EKK tahmincilerinin elde edilmesi için  $\hat{\eta}$ 'ya bağlı  $\hat{\beta}$  değerinin bulunması gerekir:

$$\hat{\eta} = X \hat{\beta}$$

$R_1 \hat{\beta} = w_1$  şeklinde bulunur.



Şekil Ek 3.1 EKK tahmincisi

P=

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0.028	0.038	0.044	0.052	0.057	0.058	0.057	0.053	0.045	0.037	0.022	0.005	-0.03	-0.061
2	0.038	0.051	0.059	0.07	0.077	0.079	0.078	0.073	0.062	0.051	0.032	0.01	-0.038	-0.079
3	0.044	0.059	0.069	0.082	0.089	0.092	0.091	0.085	0.073	0.061	0.039	0.013	-0.041	-0.088
4	0.052	0.07	0.082	0.097	0.106	0.11	0.109	0.103	0.09	0.076	0.051	0.022	-0.04	-0.094
5	0.057	0.077	0.089	0.106	0.117	0.122	0.121	0.115	0.102	0.087	0.062	0.031	-0.034	-0.09
6	0.058	0.079	0.092	0.11	0.122	0.128	0.128	0.123	0.11	0.097	0.072	0.043	-0.021	-0.077
7	0.057	0.078	0.091	0.109	0.121	0.128	0.129	0.125	0.115	0.103	0.081	0.054	-0.004	-0.055
8	0.053	0.073	0.085	0.103	0.115	0.123	0.125	0.123	0.116	0.107	0.089	0.067	0.019	-0.024
9	0.045	0.062	0.073	0.09	0.102	0.11	0.115	0.116	0.113	0.109	0.099	0.085	0.053	0.024
10	0.037	0.051	0.061	0.076	0.087	0.097	0.103	0.107	0.109	0.108	0.105	0.099	0.083	0.067
11	0.022	0.032	0.039	0.051	0.062	0.072	0.081	0.089	0.099	0.105	0.113	0.121	0.131	0.137
12	0.005	0.01	0.013	0.022	0.031	0.043	0.054	0.067	0.085	0.099	0.121	0.142	0.183	0.215
13	-0.03	-0.038	-0.041	-0.04	-0.034	-0.021	-0.004	0.019	0.053	0.083	0.131	0.183	0.284	0.368
14	-0.061	-0.079	-0.088	-0.094	-0.09	-0.077	-0.055	-0.024	0.024	0.067	0.137	0.215	0.368	0.496

### **Ek 5 İterasyon Sonuçlarının Excel ile Elde Edilmesi**

Burada hesaplamalarda kolaylık sağlamak için bazı kısaltmalar kullanılmıştır. Bunlar aşağıda gösterilmiştir:

f01: 1.iterasyon sonucu tahmin edilen y değerleri

Z0: 1.iterasyon sonucu elde edilen kalıntı değerleri

V01: 1.iterasyonda birinci parametreye göre elde edilen kısmi türevler

V02: 1.iterasyonda ikinci parametreye göre elde edilen kısmi türevler

f02: 2.iterasyon sonucu tahmin edilen y değerleri

Z1: ikinci iterasyon sonucu elde edilen kalıntı değerleri

V11: 2. iterasyonda birinci parametreye göre elde edilen kısmi türevler

V12: 2.iterasyonda ikinci parametreye göre elde edilen kısmi türevler

F03: 3. iterasyon sonucu tahmin edilen y değerleri

Z2: 3. iterasyon sonucu elde edilen kalıntı değerleri

V21: 3. iterasyonda birinci parametreye göre elde edilen kısmi türevler

V22: 3. iterasyonda ikinci parametreye göre elde edilen kısmi türevler

F04: uygun EKK tahmincileri ile elde edilen y tahmin değerleri

Z3: uygun EKK tahmincileri ile elde edilen kalıntılar

V31: uygun EKK tahmincileri ile elde edilen, birinci parametreye göre türevler

V32: uygun EKK tahmincileri ile elde edilen, ikinci parametreye göre türevler

A: birinci parametre için başlangıç değeri(500)

B: ikinci parametre için başlangıç değeri(0,0001)

Orijinal Veriler		1.iterasyon				2.iterasyon			
x	y	f01	Z0	V01	V02	f02	Z1	V11	V12
77,60	10,070	3,86	6,21	-0,0078	38500,08	75,13	-65,06	0,0404	138308,9
114,90	14,730	5,71	9,02	-0,0116	56793,68	110,15	-95,42	0,0593	200765,88
141,10	17,940	7,01	10,93	-0,0142	69561,53	134,33	-116,39	0,0723	243132,56
190,80	23,930	9,45	14,48	-0,0193	93597,02	179,30	-155,37	0,0965	320192,25
239,90	29,610	11,85	17,76	-0,0243	117106,64	222,57	-192,96	0,1198	392209,11
289,00	35,180	14,24	20,94	-0,0293	140383,72	264,73	-229,55	0,1425	460299,22
332,80	40,020	16,37	23,65	-0,0338	160953,34	301,41	-261,39	0,1623	517851,58
378,40	44,820	18,57	26,25	-0,0386	182174,43	338,71	-293,89	0,1824	574694,18
434,80	50,760	21,27	29,49	-0,0444	208150,00	383,60	-332,84	0,2065	640830,91
477,30	55,050	23,30	31,75	-0,0489	227526,80	416,56	-361,51	0,2243	687741,63
536,80	61,010	26,13	34,88	-0,0551	254372,16	461,46	-400,45	0,2484	749373,52
593,10	66,400	28,79	37,61	-0,0611	279473,04	502,65	-436,25	0,2706	803535,57
689,10	75,470	33,29	42,18	-0,0713	321606,65	570,11	-494,64	0,3069	887110,48
760,00	81,780	36,59	45,19	-0,0790	352190,16	617,77	-535,99	0,3326	942164,92

3.iterasyon				son EKK tahminleri				(Z0*Z0)
f03	Z2	V21	V22	f04	Z3	V31	V32	
9,698	0,372	-0,042	17773,10	9,974	0,096	0,0418	17742,56	38,50
14,218	0,512	-0,063	25796,71	14,619	0,111	0,0613	25737,19	81,32
17,340	0,600	-0,078	31238,51	17,825	0,115	0,0747	31153,53	119,56
23,143	0,787	-0,107	41134,52	23,781	0,149	0,0997	40990,39	209,68
28,727	0,883	-0,137	50380,48	29,507	0,103	0,1237	50164,99	315,34
34,166	1,014	-0,167	59119,93	35,081	0,099	0,1470	58821,37	438,35
38,898	1,122	-0,195	66504,88	39,928	0,092	0,1673	66123,21	559,50
43,710	1,110	-0,224	73796,83	44,851	-0,031	0,1880	73320,42	689,25
49,500	1,260	-0,262	82278,40	50,772	-0,012	0,2128	81674,36	869,42
53,750	1,300	-0,291	88292,46	55,113	-0,063	0,2310	87585,38	1007,78
59,539	1,471	-0,332	96191,10	61,024	-0,014	0,2557	95331,03	1216,45
64,851	1,549	-0,373	103129,57	66,441	-0,041	0,2784	102116,51	1414,31
73,547	1,923	-0,445	113829,86	75,300	0,170	0,3156	112540,71	1778,76
79,689	2,091	-0,501	120873,71	81,548	0,232	0,3418	119370,87	2041,96
<b>SSE(0)=</b>								<b>10780,19</b>

<b>A= 500</b> <b>B= 0,0001</b>	<b>1.iterasyon için Başlangıç değerleri</b>
-----------------------------------	---

<b>1.iterasyon sonucu</b>
---------------------------

Regresyon İstatistikleri		ANOVA					
		df	SS	MS	F	Anlamlılık F	
Çoklu R	0,99999						
R Kare	0,99997						
Ayarlı R Kare	0,91663						
Standart Hata	0,16239						
		Regresyon	2	10779,87	5389,94	204402,98	0,00
		Fark	12	<b>0,316</b>	0,026		
		Toplam	14	10780,190			



	Katsayılar	Standart Hata	t Stat	P-değeri	Düşük %95	Yüksek %95
Kesişim						
V01	1357,46	39,31	34,54	0,00	1271,82	1443,10
V02	0,00043	0,00001	50,486	0,00	0,00041	0,00045

<b>A1= 1857</b> <b>B1= 0,0005</b>	<b>2.iterasyon için parametre değerleri</b>
--------------------------------------	---

**2.iterasyon sonucu**

Regresyon İstatistikleri		ANOVA					
		df	SS	MS	F	Anlamlılık F	
Çoklu R	0,99999996						
R Kare	0,99999991	Regresyon	2	1419736,56	709868,28	68292089	0,00
Ayarlı R Kare	0,9167	Fark	12	<b>0,125</b>	0,0104		
Standart Hata	0,1020	Toplam	14	1419736,688			
Gözlem	14						

	Katsayılar	Standart Hata	t Stat	P-değeri	Düşük %95	Yüksek %95
Kesişim						
V11	-1618,724	2,890	-560,102	0,000	-1625,020	-1612,427
V12	0,0000024	0,0000010	2,48801819	0,029	0,0000003	0,0000045

<b>A2= 239</b> <b>B2= 0,000534</b>	<b>3.iterasyon için parametre değerleri</b>
---------------------------------------	---

**3.iterasyon sonucu**

Regresyon İstatistikleri		ANOVA					
		df	SS	MS	F	Anlamlılık F	
Çoklu R	0,9971						
R Kare	0,9942	Regresyon	2	21,47	10,74	1035,25	0,00
Ayarlı R Kare	0,9104	Fark	12	<b>0,124</b>	0,0104		
Standart Hata	0,1018	Toplam	14	21,5948			
Gözlem	14						

	Katsayılar	Standart Hata	t Stat	P-değeri	Düşük %95	Yüksek %95
Kesişim						
V21	-0,12	0,75	-0,16	0,88	-1,74	1,51
V22	0,000016	0,000003	6,0290	0,0001	0,000010	0,000022

<b>A3= 238,62</b> <b>B3= 0,000550</b>
--

### Ek 6 Başlangıç Değerlerinin Sonuçları

#### 1. Başlangıç Değerleri Kullanıldığında Elde Edilen Sonuçlar:

Birinci iterasyon için önerilen başlangıç değerleri, birinci ve ikinci parametre için sırasıyla (500; 0,0001)'dir. Analiz sonuçları aşağıda gösterilmiştir:

The following new variables are being created:

Iteration	Residual SS	A	B
1	10780,19016	500,000000	,000100000
1.1	27301393,07	-3767,1006	,001114427
1.2	53,05866409	491,432294	,000238281
2	53,05866409	491,432294	,000238281
2.1	13145,30736	105,825735	,000446611
2.2	18,26061361	460,820436	,000262523
3	18,26061361	460,820436	,000262523
3.1	31,95484746	392,187703	,000306444
3.2	15,99237130	449,752670	,000271127
4	15,99237130	449,752670	,000271127
4.1	14,50375213	426,551112	,000286469
5	14,50375213	426,551112	,000286469
5.1	13,84256803	388,437949	,000315129
6	13,84256803	388,437949	,000315129
6.1	9,862245231	372,582153	,000332277
7	9,862245231	372,582153	,000332277
7.1	9,496934729	339,525781	,000365479
8	9,496934729	339,525781	,000365479
8.1	5,853128896	328,560740	,000382166
9	5,853128896	328,560740	,000382166
9.1	5,058350916	304,223695	,000414338
10	5,058350916	304,223695	,000414338
10.1	3,109286505	284,375665	,000447625
11	3,109286505	284,375665	,000447625
11.1	1,756918434	266,987846	,000481346
12	1,756918434	266,987846	,000481346
12.1	,9048346794	251,703344	,000515450

```

13      ,9048346794 251,703344 ,000515450
13.1    ,5645253361 238,085980 ,000550115
14      ,5645253361 238,085980 ,000550115
14.1    ,1245513907 238,942173 ,000550156
15      ,1245513907 238,942173 ,000550156
15.1    ,1245513889 238,942129 ,000550156
16      ,1245513889 238,942129 ,000550156

```

Run stopped after 34 model evaluations and 16 derivative evaluations. Iterations have been stopped because the magnitude of the largest correlation between the residuals and any derivative column is at most RCON = 1,000E-08

Nonlinear Regression Summary Statistics      Dependent Variable Y

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	33059,50855	16529,75427
Residual	12	,12455	,01038
Uncorrected Total	14	33059,63310	
(Corrected Total)	13	6761,78789	

R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS = ,99998

Asymptotic 95 %

Parameter	Estimate	Std. Error	Asymptotic Confidence Interval	
			Lower	Upper
A	238,94212918	2,707007851	233,04406574	244,84019262
B	,000550156	7,26687E-06	,000534323	,000565990

Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	A	B
A	1,0000	-,9988
B	-,9988	1,0000

### 1) 2. Başlangıç Değerleri Kullanıldığında Elde Edilen Sonuçlar:

İkinci iterasyon için önerilen başlangıç değerleri, birinci ve ikinci parametre için sırasıyla (250; 0,0005)'tir. Analiz sırasında bu değerler kullanılmıştır ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

The following new variables are being created:

Iteration	Residual SS	A	B
1	44,77127682	250,000000	,000500000
1.1	1,178131627	237,013032	,000551730

```

2      1,178131627  237,013032  ,000551730
2.1    ,1245657545  238,938858  ,000550152
3      ,1245657545  238,938858  ,000550152
3.1    ,1245513889  238,942135  ,000550156
4      ,1245513889  238,942135  ,000550156
4.1    ,1245513889  238,942131  ,000550156

```

Run stopped after 8 model evaluations and 4 derivative evaluations. Iterations have been stopped because the relative reduction between successive residual sums of squares is at most SSCON = 1,000E-08

Nonlinear Regression Summary Statistics      Dependent Variable Y

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	33059,50855	16529,75427
Residual	12	,12455	,01038
Uncorrected Total	14	33059,63310	
(Corrected Total)	13	6761,78789	

R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS = ,99998

Asymptotic 95 %

Parameter	Estimate	Std. Error	Asymptotic Confidence Interval	
			Lower	Upper
A	238,94213146	2,707007863	233,04406800	244,84019492
B	,000550156	7,26687E-06	,000534323	,000565990

Asymptotic Correlation Matrix of the Parameter Estimates

	A	B
A	1,0000	-,9988
B	-,9988	1,0000

## 2) 3. Başlangıç Değerleri Kullanıldığında Elde Edilen Sonuçlar:

Üçüncü başlangıç değerleri, A ve B parametreleri için sırasıyla (238,94; 0,00055) olarak önerilmiştir. Elde edilen sonuçlar aşağıda gösterilmiştir:

The following new variables are being created:

Iteration	Residual SS	A	B
1	207,8193746	238,940000	,000500000
1.1	,2534897268	237,013034	,000554125
2	,2534897268	237,013034	,000554125
2.1	,1246551258	238,927823	,000550159

```

3      ,1246551258  238,927823  ,000550159
3.1    ,1245513889  238,942126  ,000550156
4      ,1245513889  238,942126  ,000550156
4.1    ,1245513889  238,942129  ,000550156

```

Run stopped after 8 model evaluations and 4 derivative evaluations.  
Iterations have been stopped because the relative reduction between  
successive residual sums of squares is at most SSCON = 1,000E-08

Nonlinear Regression Summary Statistics      Dependent Variable Y

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	33059,50855	16529,75427
Residual	12	,12455	,01038
Uncorrected Total	14	33059,63310	
(Corrected Total)	13	6761,78789	

R squared = 1 - Residual SS / Corrected SS = ,99998

Asymptotic 95 %

Parameter	Estimate	Std. Error	Asymptotic 95 % Confidence Interval	
			Lower	Upper
A	238,94212949	2,707007571	233,04406666	244,84019232
B	,000550156	7,26687E-06	,000534323	,000565990

**ÖZGEÇMİŞ**

Doğum tarihi	30.01.1978	
Doğum yeri	Trabzon	
Lise	1989-1996	Özel Kalamış Lisesi
Lisans	1997-2002	Yıldız Üniversitesi Fen – Edebiyat Fak. İstatistik Bölümü
Yüksek Lisans	2003- ...	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı