

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KONTROL SİSTEMLERİNİN TASARIMINDA
POLİNOMSAK DENKLEMLER YAKLAŞIMI**

Mansur DUZELBAYEV

**FBE Elektrik Mühendisliği Anabilim Dalı Kontrol ve Otomasyon Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Şeref Naci ENGİN

İSTANBUL, 2009

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	v
KISALTIMA LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ.....	vii
ÇİZELGE LİSTESİ	ix
ÖNSÖZ	x
ÖZET	xi
ABSTRACT.....	xii
1. GİRİŞ	1
2. AYRIK ZAMANLI KONTROL SİSTEMLERİ	3
2.1 Sinyallerin Sınıflandırılması	3
2.2 Ayrık Zamanlı Kontrol Sistemleri ve Sürekli Zamanlı Kontrol Sistemleri	6
2.3 Dijital ve Örneklenmiş-Verili Sistemlerin Tanımlaması	7
2.4 Örnekleme ve Sayısallaştırma (Digitization) Tekniklerinin Kontrol Alanında Önemi.....	10
2.5 Ayrık Zamanlı Kontrol Sistemlerinin Analizi ve Sentezinde Uygulanan Yöntemler.....	12
2.6 Ayrık Zamanlı Kontrol Sistemlerine Örnekler	14
2.7 Ayrık Zamanlı Sistemlerin Avantajları ve Dezavantajları.....	19
3. AYRIK ZAMANLI KONTROL SİSTEMİNİN DURUM UZAYINDA ANALİZİ	20
3.1 Klasik Kontrol Teorisiyle Tasarlama Yöntemlerinin Gözden Geçirilmesi	20
3.2 Giriş.....	20
3.3 Tanımlar	22
3.4 Ayrık Zamanlı Sistemlerin Durum Uzayı Gösterimi	26
3.4.1 Ayrık Zamanlı Durum Uzayı Denklemlerinin Kanonik Formları	26
3.4.2 Durum Uzayı Gösterimlerinin Benzersiz Olmaması	30
3.5 Ayrık Durum Uzayı Denklemlerinin Çözümü	32
3.5.1 Doğrusal Zamanla Değişmeyen Ayrık Zamanlı Durum Denkleminin Çözümü	32
3.5.2 Durum Geçiş Matrisi.....	33
3.5.3 Ayrık Zamanlı Durum Denkleminin Çözümünde z-Dönüşüm Yaklaşımı	34

3.5.4	$(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$ 'in Hesaplanması	35
3.6	Darbe Transfer Fonksiyonu	37
3.6.1	Darbe Transfer Fonksiyonu Matrisi	37
3.6.2	Benzerlik Dönüşümü.....	39
3.7	Sürekli Zamanlı Durum Uzayı Denklemine Ayırıştırılması.....	40
3.7.1	Sürekli Zamanlı Durum Denklemi Çözümünün Gözden Geçirilmesi	40
3.7.2	Sürekli Zamanlı Durum Uzayı Denklemine Ayırıştırılması	43
3.7.3	Sürekli Zamanlı Durum Denklemine MATLAB Programı ile Ayırıştırılması	45
3.7.4	Cayley-Hamilton Teoremi	45
3.8	Kontrol edilebilirlik ve gözlemlenebilirlik kavramları	46
3.8.1	Kontrol edilebilirlik.....	46
3.8.1.1	Doğrusal zamanla değişmeyen ayrık zamanlı kontrol sisteminin tam durum kontrol edilebilirliği	47
3.8.2	Gözlemlenebilirlik	48
3.8.2.1	Ayrık zamanlı sistemlerin tam gözlemlenebilirliği	50
3.9	Dualite prensibi.....	51
3.10	Durum uzayı analizinde uygulanan önemli dönüşümler	53
3.10.1	Durum uzayı denkleminin kanonik forma dönüşümü	53
4.	AYRIK ZAMANLI KONTROL SİSTEMİNİN DURUM UZAYINDA TASARIMI	57
4.1	Kutup yerleştirme.....	57
4.1.1	Kutupların isteğe bağlı yerleştirilmesi için gerek ve yeter şart	58
4.1.2	Ackermann formülü	67
4.1.3	En iyi K matrisinin seçilmesi üzerinde yorumlar	68
4.1.4	K durum geribesleme kazanç matrisini hesaplamının farklı yolları.....	68
4.1.5	Referans girişli kontrol sistemleri.....	69
4.2	Kapalı çevrim kutuplarının yerlerinin seçilmesi.....	71
4.2.1	Baskın kutupların belirlenmesi.....	71
4.2.2	Ölü vuruşlu kontrol	72
4.2.3	Prototip sistemler.....	79
4.2.4	Kısıtlamaların sağlanması	81
4.2.5	Örnekleme zamanının seçilmesi	82
4.3	Durum gözlemleyicilerin tasarımı	85
4.3.1	Durum gözlemesi için gerek ve yeter şart	86
4.3.2	Tam mertebeden durum gözlemleyicisi.....	90
4.3.2.1	Tam mertebeden durum gözlemleyicinin hata dinamikleri	93
4.3.3	Ackermann formülü	95
4.3.4	K_e gözlemleyici geribesleme kazanç matrisini hesaplamının farklı yolları	95
4.3.5	En iyi K_e matrisinin seçilmesi üzerinde yorumlar	97
4.3.6	En düşük mertebeden durum gözlemleyicisi	97
4.3.7	Gözlenmiş durum geribeslemeli kontrol sistemi	104
4.3.8	Referans girişli kontrol sistemi.....	107

5.	AYRIK ZAMANLI KONTROL SİSTEMİNİN TASARIMINDA POLİNOMSAK DENKLEMLER YAKLAŞIMI	109
5.1	Diophantine Denklemleri	109
5.2	Kontrol Sistemlerinin Tasarımında Polinomsal Denklemler Yaklaşımı.....	113
5.3	Model Eşlemeli Kontrol Sistemlerinin Tasarımı	117
5.3.1	Model Eşlemeli Kontrol Sistemi.....	119
5.3.2	Model Eşlemeli Kontrol Sisteminin Tasarımı Üzerinde Yorumlar	121
6.	UYGULAMALAR	122
7.	SONUÇLAR	198
	KAYNAKLAR	200
	EKLER	203
	ÖZGEÇMİŞ	210

SİMGE LİSTESİ

$\alpha(z)$	Denetleyicinin darbe transfer fonksiyonunun payda polinomu
$\beta(z)$	Denetleyicinin darbe transfer fonksiyonunun pay polinomu
$\phi(\mathbf{G})$	Hata dinamiğinin arzu edilen karakteristik polinomu
μ_i	Arzu edilen özdeğer
$\mathbf{x}(k)$	Durum vektörü
$\mathbf{x}_a(k)$	Durum vektörünün ölçülmüş kısmı
$\mathbf{x}_b(k)$	Durum vektörünün gözlenen (kestirilen) kısmı
$\mathbf{y}(k)$	Çıkış vektörü
$y(k)$	Kalıcı hal çıkışı
$\mathbf{u}(k)$	Kontrol vektörü
$A(z)$	n mertebeden tekil polinom
$B(z)$	m mertebeden polinom
$B_k(s)$	k mertebeden normalleştirilmiş Bessel polinomu
$D(z)$	Sistemin karakteristik denklemi
$H(z)$	Kutup atama probleminde çözülen sistemin arzu edilen karakteristik denklemin polinomu
$F(z)$	En düşük mertebeden gözlemleyicinin arzu edilen karakteristik denklemin polinomu
$G_D(z)$	Gözlemleyici regülatörün darbe transfer fonksiyonu
$G_p(z)$	Sistemin darbe transfer fonksiyonu
\mathbf{E}	$2n \times 2n$ mertebeden Sylvester matrisi
$E(z)$	Birim rampa girişini izleyen hata
\mathbf{I}	Birim matrisi
\mathbf{N}	$n \times n$ mertebeden nilpotent matrisi
K_0	Kazanç sabiti
\mathbf{K}	Durum geribesleme kazanç matrisi
\mathbf{K}_e	Gözlemleyici geribesleme kazanç matrisi
$R(z)$	Birim rampa girişi
T	Örnekleme zamanı
T_s	Yerleşme zamanı

KISALTMA LİSTESİ

ZOH Zero Order Hold (Sıfırıncı Mertebeden Tutucu)

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1a	Sürekli zamanlı sinyal 4
Şekil 2.1b	Sürekli zamanlı ayrıklaştırılmış sinyal 4
Şekil 2.1c	Örneklenmiş-verili sinyal 4
Şekil 2.1d	Dijital sinyal 4
Şekil 2.2	Temel örneklenmiş-verili geribeslemeli kontrol sistemi 8
Şekil 2.3	Örnekleyicinin giriş ve çıkış sinyallerinin dalga şekilleri 8
Şekil 2.4a	Türbin-jeneratör grubunun ayrık zamanlı kontrol sistemi 15
Şekil 2.4b	Dijital verileri elde etme alt sistemi 15
Şekil 2.4c	Analog çeviriciler dahil verileri elde etme alt sistemi 15
Şekil 2.5a	Tüm sistemin diyagramı 16
Şekil 2.5b	Ağırlık kontrolü alt sistemi 16
Şekil 2.6	Dijital servo sistemin blok diyagramı 17
Şekil 2.7	Borç ödeme modelinin kontrol sistemi 18
Şekil 3.1a	Durum uzayında gösterilmiş doğrusal zamanla değişmeyen ayrık zamanlı sistemin blok çizimi 25
Şekil 3.1b	Durum uzayında gösterilmiş doğrusal zamanla değişmeyen sürekli zamanlı sistemin blok çizimi 25
Şekil 4.1a	Açık çevrim kontrol sistemi 59
Şekil 4.1b	Kapalı çevrim kontrol sistemi ($u(k) = -Kx(k)$) 59
Şekil 4.2	Durum geribeslemeli kontrol sistemi 70
Şekil 4.3	$B_k(0)/B_k(s)$ transfer fonksiyonunun birim cevapları, $k = 1, \dots, 10$ 80
Şekil 4.4	Tek girişli tek, çıkışlı takip sistemi olarak gösterilen durum geribeslemeli regülatör. Regülatörün band genişliği, takip sisteminin band genişliği olacak şekilde tanımlanır 84
Şekil 4.5	Durum gözlemleyicinin şematik diyagramı 86
Şekil 4.6	Durum gözlemleyicili regülatör sistemi 87
Şekil 4.7	Durum geribeslemeli kontrol sistemi 91
Şekil 4.8	Gözlenmiş durum geribeslemeli kontrol sistemi 93
Şekil 4.9	En düşük mertebeden gözlemleyicili gözlenmiş durum geribeslemeli kontrol sistemi 100
Şekil 4.10	Geribeslenmiş durumun en düşük mertebeden gözlemceyinin uygulanması yoluyla elde edilen durum vektörünün ölçülmüş kısmını ve durum vektörünün gözlenen kısmını içerdği durum geribeslemeli kontrol çizimi 106
Şekil 4.11	Gözlenmiş durum geribeslemeli kontrol sisteminin blok çizimi 108
Şekil 5.1	Mimari-1 kontrol sisteminin blok çizimi 114
Şekil 5.2	Mimari-2 kontrol sisteminin blok çizimi 116
Şekil 5.3	Model eşlemeli kontrol sistemin blok çizimi 120
Şekil 6.1	Kutup atama yöntemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin blok çizimi 139
Şekil 6.2	Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin blok çizimi 141
Şekil 6.3	Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim basamak cevabı 147
Şekil 6.4	Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim rampa cevabı 147
Şekil 6.5	Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin nihai blok çizimi 148

Şekil 6.6	Mimari-2 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin blok çizimi.....	149
Şekil 6.7	Mimari-2 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin nihai blok çizimi.....	151
Şekil 6.8	Mimari-2 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim basamak cevabı	152
Şekil 6.9	Mimari-2 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim rampa cevabı	152
Şekil 6.10	Kutup atama yöntemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin blok çizimi.....	162
Şekil 6.11	Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin blok çizimi.....	164
Şekil 6.12	Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim basamak cevabı	169
Şekil 6.13	Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim rampa cevabı	169
Şekil 6.14	Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin nihai blok çizimi.....	170
Şekil 6.15	Mimari-2 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin blok çizimi.....	171
Şekil 6.16	Mimari-2 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin nihai blok çizimi.....	172
Şekil 6.17	Mimari-2 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim basamak cevabı	173
Şekil 6.18	Mimari-2 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim rampa cevabı	173
Şekil 6.19	Kutup atama yöntemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin blok çizimi.....	184
Şekil 6.20	Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin blok çizimi.....	185
Şekil 6.21	Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim basamak cevabı	190
Şekil 6.22	Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin nihai blok çizimi.....	190
Şekil 6.23a	Model eşlemeli kontrol sisteminin blok çizimi.....	195
Şekil 6.23b	Sistemin basitleştirilmiş blok çizimi	195
Şekil 6.23c	Sistemin basitleştirilmiş blok çizimi	195
Şekil 6.24	Model eşlemeli kontrol sisteminin birim basamak cevabı	196
Şekil 6.25	Model eşlemeli kontrol sisteminin birim rampa cevabı	196

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 4.1	1 Sn'lik yerleşme zamanına karşılık gelen normalleştirilmiş Bessel polinomlarının kökleri 80
Çizelge 4.2	En düşük mertebeden durum gözlemleyicisi için gözlemleyici denkleminin yazılmasında yapılması gereken değıştirmelerin listesi..... 101

ÖNSÖZ

Çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyerek bilgi ve tecrübeleri ile her zaman yönlendiren ve sınırsız sabır gösteren değerli tez danışmanım sayın Yrd. Doç. Dr. Şeref Naci Engin'e saygılarımı sunar, teşekkürü bir borç bilirim. Tarafıma verdikleri bursla Türkiye'de Yüksek Lisans yapmamı mümkün kılan Kazakistan ve Türkiye Cumhuriyetleri ilgili Kurumlarına teşekkürü borç bilirim. Aynı zamanda eğitime devam ederken Türkiye'de bulunduğum sürece her zaman yanımda olan, maddi ve manevi olarak destekleyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ek olarak çalışmalarım ile ilgili her türlü kaynakları bulmamda, karşılaştığım zorlukları çözmemde katkıda bulunan bütün arkadaşlarıma ayrı ayrı teşekkür ederim.

Haziran 2009

ÖZET

Bu tezin amacı tek girişli, tek çıkışlı ayrık zamanlı sistemlerinin tasarımı için polinomsal denklemler yaklaşımı olarak adlandırılan tasarım yöntemini sunmaktır. Bu yöntemin ayırt edici özelliği denetleyici sentezinin Diophantine denklemi olarak bilinen doğrusal polinomsal denklemler çözümüne indirgenmesidir. Diophantine denkleminin çözümü birbirine bağlı, oldukça anlaşılır ve matematiksel olarak kolay işlemlere dayanır. Bu çalışmada polinomsal denklemler yaklaşımı kontrol sistemlerinin tasarımında uygulanan diğer bir yöntemle beraber sunulmuştur. Bu yöntem, durum uzayı yaklaşımı aracılığıyla sunulan en düşük mertebeden gözlemleyicili kutup atama yöntemi olarak bilinir. Polinomsal denklemler yaklaşımı ile kutup atama yönteminin bir arada ele alınması, söz konusu iki yöntemin herbirinin diğerini tamamlayan yöntem olduğunu göstermeyi amaçlar.

Tez çalışması yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde polinomsal denklemler yaklaşımının tarihçesi anlatılmaktadır. İkinci bölümde ayrık zamanlı kontrol sistemlerinin üzerinden bilgi verilmektedir. Üçüncü bölümde durum uzayı kavramları sunulmaktadır. Tezin dördüncü bölümünde kutup atama yöntemi ile gözlemleyici tasarımından bahsedilmektedir. Beşinci bölümde polinomsal denklemler yaklaşımı sunulmuştur. Daha sonra polinomsal denklemler yaklaşımının uygulandığı model eşlemeli kontrol sistemleri incelenmiştir. Altıncı bölüm, uygulamaların ele alındığı bölümdür. Bu bölümde dört adet probleme yer verilmiştir. Bunların ilk ikisinde kutup atama yöntemiyle K geribesleme kazanç matrisinin bulunmasına, üçüncüsünde durum uzayı kavramına dayalı kestirilmiş durumların kullanıldığı kutup atama yöntemi ile polinomsal denklemler yaklaşımı uygulanarak üçüncü mertebeden kontrol sistemi tasarlanmaya ve dördüncü problemde polinomsal denklemler yaklaşımı ile model eşlemeli kontrol sistemi tasarlanmaya çalışılmıştır. Sonuç olarak iki yöntemi uygulayarak üçüncü problemde tasarlanan kontrol sistemlerinin aynı sonucu verdiği gösterilmiştir. Ancak polinomsal yaklaşım daha sade çözümler sunmuştur. Yedinci bölüm, elde edilen sonuçların değerlendirildiği bölümdür.

Anahtar kelimeler: Polinomsal denklemler, model eşlemeli kontrol, kutup atama tasarım yöntemi, gözlemleyici tasarımı.

ABSTRACT

The objective of writing this thesis work is to present a polynomial equation approach to design single input single output discrete time control systems. The distinguishing feature of this approach is a reduction of controller design task to a solution of polynomial equations known as Diophantine equations. The solution of Diophantine equation is based on operations which are interrelated with each other and which are believed to be simple, and computationally attractive. The polynomial equation approach is presented together with another method used to design control systems. This method known as pole placement design with minimum order observer by means of state-space approach. The thesis work aims to show that both design methods, to be more precise, pole placement design method and polynomial equation approach method are methods which complete each other.

This work consists of seven chapters. Chapter one gives a brief review on history of polynomial techniques. Chapter two gives an introductory material on discrete-time control systems. Chapter three presents the state space analysis. Chapter four treats the pole placement and observer design. Chapter five discusses the polynomial equation approach. Design of model matching control systems also presented here. The sixth chapter is a chapter where the application are presented. There are four problems discussed here. The first two problems are concerned with finding feedback gain matrix \mathbf{K} . The third problem aims to design third order control system using both methods, pole placement method and polynomial equation approach. The fourth problem shows how to design model matching control system using polynomial equation approach. Finally, it will be seen in the third problem that two control systems designed by means of these methods give the same results. However, the polynomial approach presents simpler solutions. Seventh chapter is the chapter where the conclusion and comments are given.

Keywords: Polynomials, model matching control, pole placement design method, observer design.

1. GİRİŞ

Polinomsal denklemler yaklaşımı olarak adlandırılan özel bir kontrol sistemi tasarım tekniği 1960'lar ile 1970'lerde geliştirilmiştir. Bu tekniğin ayırt edici özelliği denetleyici sentezinin spesifik tipteki (Diophantine) doğrusal polinomsal denklemler çözümüne indirgenmesidir. Polinomsal tasarım tekniklerinin kuramsal geçmişi ellili yılların sonlarına kadar uzanır. Bununla birlikte, bu yaklaşımın kontrol teorisi yönündeki ilk ilerlemeleri gerçekten önemli ilk sonuçların başarıldığı yetmişli yıllarda başlamıştır. En iyi bilinen sonuç elbette günümüzde Youla-Kucera ölçülebilirliği (parameterization) olarak adlandırılan belirli bir plantı kararlı hale getiren tüm denetleyicilerin ölçülebilirliğidir (parameterization). Seksenli yıllarda, polinomsal yöntemleri robust kontrol problemlerini çözmek amacıyla kullanılmıştı. Aynı zamanda ilgili yaklaşım sinyal işleme alanında da yaygın uygulanmıştır.

Kontrol sistemi tasarımında polinomsal denklemlerin uygulanması yönündeki ilk çabalar (Jury, 1958), (Tou, 1959), (Chang, 1961), (Strejc, 1967), (Peterka, 1972) ve özellikle (Volgin, 1962) ve (Aström, 1970)'ya kaydedilir. Polinomsal denklemler ilk olarak ölüvuruşlu kontrol probleminin çözülmesinde uygulanmıştı ve daha sonra ikinci dereceden optimizasyon probleminin çözülmesinde ortaya sunulmuştu. Tek değişkenli sistemler dahil en basit durumlarda dahi polinomsal denklemlerinin öneminin anlaşılması ve tamamen takdir edilmesi zaman almıştır. Polinomsal işlemlerin cebirsel temeli (Kuçera, 1973, 1974) tarafından açıklanmıştır ve ayrık zamanlı kontrol sistemlerinin analizi ve sentezine polinomsal denklem yaklaşımı tam olarak (Kuçera, 1979) tarafından geliştirilmiştir.

Bu yaklaşım (Hautus, 1975), Pernebo (1981), (Callier ve Desoer 1982), (Kucera, 1983a, 1986a, 1986b) tarafından ve özellikle de (Vidyasagar, 1985) tarafından sürekli zamanlı sistemleri kapsayacak şekilde genişletilmiştir.

Polinomsal denklemler yaklaşımı orijinalde stabilizasyon ve kutup atama gibi son derece basit kontrol problemlerinin çözülmesinde uygulanmış olmasına rağmen, kademeli şekilde genişletilmişti ve çok çeşitli problemlerin çözümünde faydalı olduğu bulunmuştu. Söz konusu problemler aşağıdaki gibi problemleri içermektedir. Ölüvuruşlu kontrol (Kucera 1980a; Kucera ve Sebek 1984), model eşlemeli kontrol sistemlerini tasarlama (Astrom 1980; Kucera 1981),

bozucuların bastırılması problemi (Kucera 1983b; Sternad 1987), minimum dağılım kontrolü (Astrom 1970; Peterka 1972), en kısa korelasyon kontrol stratejisi (Kucera 1977), LQG veya H_2 optimal kontrol (Kucera 1979, 1980b, 1986a; Hunt, Sebek ve Grumble 1987; Hunt 1989; Mosca Giarre ve Casavola 1990; Hunt ve Kucera 1992), H_∞ optimizasyon (Kwakernaak 1985, 1991; Grumble 1986). Bunların devamı olarak izleme problemlerinin bazıları da söylenebilir. Kendiliğinden ayarlanma ve önkestirim kontrolü problemleri de söz konusu yaklaşımla çözülen problemlerdendir (Astrom ve Wittenmark 1973; Clarke ve Gawthrop 1975; Peterka 1984; Grumble 1984; Sternad 1987; Hunt 1989). Ve en ilginç ise bu yöntemlerin kontrol mühendisliği ile ilişkili alanlarda, daha net söylemek gerekirse, sinyal işleme alanında yararlı olduğu görülmüştü.

Söz konusu tez çalışması polinomsal denklemler yaklaşımının tek girişli, tek çıkışlı sistemlerde kontrol sistemlerini tasarlama ile ilişkili problemleri çözebilen yöntem olarak sunulmasını amaçlar.

2. AYRIK ZAMANLI KONTROL SİSTEMLERİ

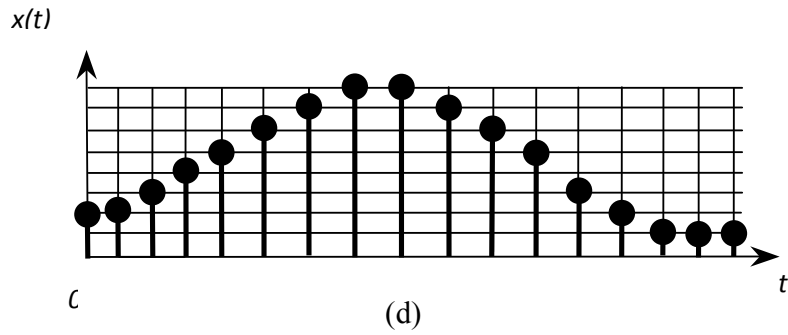
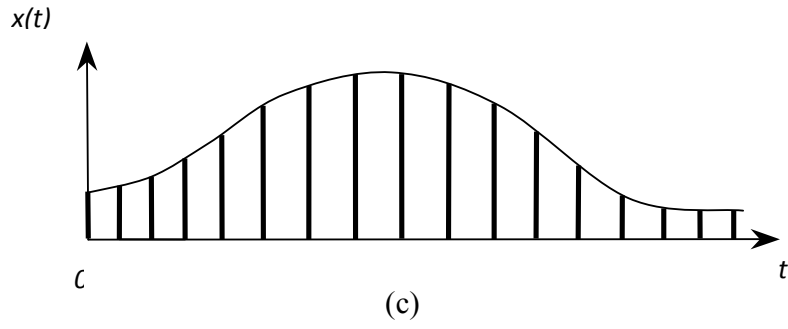
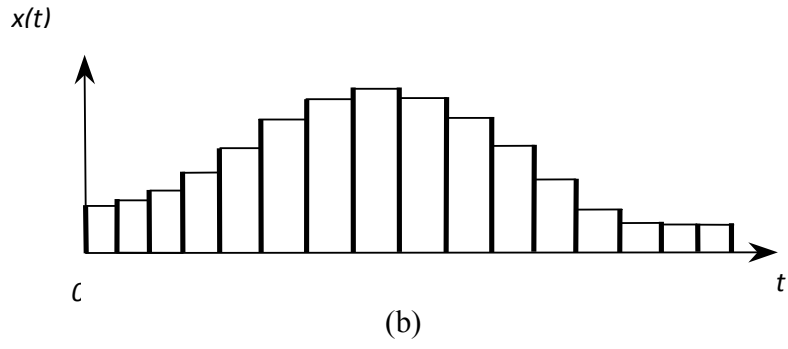
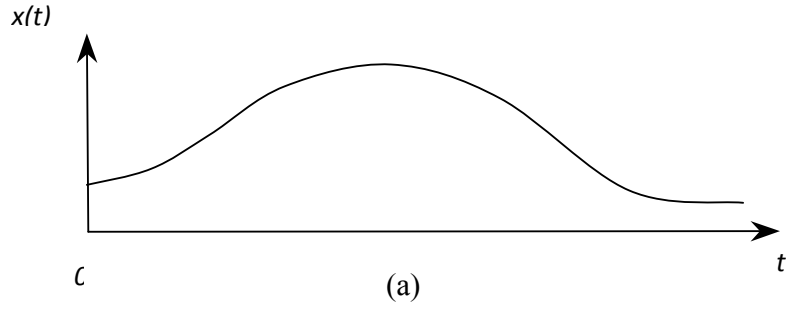
Son yıllarda, kontrol sistemlerinde dijital denetleyicilerin kullanımında hızlı bir artış yaşanmıştır. Dijital kontrol optimal performansın başarılmasında, örnek olarak maksimum verimlilik, maksimum kâr, minimum maliyet veya minimum enerji kullanımı amaçları için kullanılır.

Daha güncel olarak, bilgisayar kontrolünün uygulanması endüstriyel robotlarda “akıllı” hareketlerin gerçekleştirilmesini, otomobillerde yakıt ekonomisinin optimizasyonunu ve diğerlerinin yanı sıra mikrodalga fırınlar ve dikiş makineleri gibi ev araç ve gereçlerinin işletilmesinde iyileştirmelerin gerçekleşmesini mümkün kılmıştır. Kontrol programındaki karar verme yetisi ve esnekliği dijital kontrol sistemlerinin ana avantajıdır.

Dinamik sistemlerin analog kontrolünden ziyade dijital kontrolünün yapılması yönündeki güncel eğilim, temelde sürekli zamanlı sinyaller yerine dijital sinyallerle çalışma sonucu elde edilen avantajlara bağlıdır.

2.1 Sinyallerin Sınıflandırılması

Kontrol sistemi, arzu edilen işlevin gerçekleştirilmesi üzere aralarında belirli ilişkiler ve etkileşimlerin bulunduğu nesnelere ve donanımların karşılıklı bağlantısı olarak düşünülebilir. Kontrol sistemi iki temel kısımdan oluşmaktadır: kontrol edilen sistem ve denetleyici. Kontrol sisteminin denetlenecek olan kısmı *kontrol edilen sistem (süreç veya plant)* diye adlandırılır. Kontrol işlevini gerçekleştiren sistemin diğer kısmı ise *denetleyici* olarak adlandırılır (Santina, 1994). Kontrol edilen sistem ve denetleyici arasındaki veri iletişimi sinyaller aracılığıyla gerçekleşir (Polyakov, 2006). Kontrol sistemlerinin tanımında kullanılan sinyaller *sürekli zamanlı* veya *ayrık zamanlı* olarak sınıflandırılır (Santina, 1994). Sürekli zamanlı sinyal, her zaman değeri için tanımlanan bir sinyaldir. Zaman değeri, sürekli değerler aralığını veya sadece ayrık değerler almayı kabul edebilir. Şekil 2.1 (a)'da sürekli zamanlı sinyal gösterilmiştir ve Şekil 2.1 (b)'de sürekli zamanlı ayrıklaştırılmış sinyal gösterilmiştir. Bir değişkeni ayrık değerler kümesi ile temsil etme işlemi *ayrıklaştırma* olarak adlandırılır ve ortaya çıkan ayrık



Şekil 2.1 (a) Sürekli zamanlı sinyal, (b) sürekli zamanlı ayrıklaştırılmış sinyal, (c) örneklenmiş-verili sinyal, (d) dijital sinyal (Ogata, 1995)

değerler ayrıklaştırılmış değerler olarak adlandırılır. Ayrıklaştırılmış değişken sadece ayrık basamaklar kümesi tarafından değiştirilir (Ogata, 1995). Ayrık zamanlı sinyal zamanın ayrık anlarında tanımlanan bir sinyaldir (yani t bağımsız değişkeninin ayrıklaştırıldığı sinyaldir). Ayrık zamanlı sinyaller ve bunların işlenmeleri doğal olarak dijital hesaplamaaya oldukça uygundur ve kontrol sisteminin dijital kısımlarının tanımlanmasında kullanılır (Santina, 1994). Ayrık zamanlı sinyalde genliğin sürekli değerler aralığı olduğu varsayılabilirse, bu durumda sinyale *örneklenmiş-verili sinyal* adı verilir. Örneklenmiş-verili sinyal zamanın farklı anlarında bir analog sinyalin örneklenmesiyle üretilebilir. Bu bir genlik modülasyonlu darbe sinyaldir. Şekil 2.1 (c)'de örneklenmiş-verili sinyal gösterilmiştir.

Bir dijital sinyal ayrıklaştırılmış genliğe sahip ayrık zamanlı sinyaldir. Bu tür bir sinyal sayılar dizisi şeklinde, örnek olarak ikili sayılar şeklinde temsil edilebilir (tecrübede, sürekli sinyaller örneklenip daha sonra ayrıklaştırılarak dijital sinyaller elde edilmektedir; bu, sürekli sinyallerin sonlu ikili sözcükler olarak okunmalarına olanak tanıyan ayrıklaştırmadır). Şekil 2.1 (d), dijital sinyali göstermektedir. Açıktır ki, bu hem genlikçe hem de zamanca ayrıklaştırılmış sinyaldir. Dijital denetleyicilerin kullanılması sinyallerin hem genlik hem de zaman üzerinde ayrıklaştırılmalarını gerektirir.

“Ayrık zamanlı sinyal” tabiri “dijital sinyal” veya “örneklenmiş-verili sinyal” tabirlerinden daha geniş anlamlıdır. Gerçekte, bir ayrık zamanlı sinyal ya bir dijital sinyali ya da bir örneklenmiş-verili sinyali ifade eder. Pratik kullanımda, “ayrık zamanlı” veya “dijital” ifadeleri sıklıkla birbirlerinin yerine kullanılırlar. Bununla birlikte, “ayrık zaman” tabiri sıklıkla kuramsal çalışmada kullanılırken “dijital” ifadesi hayata geçirilen donanım veya yazılımlarla ilişkili olarak kullanılır.

Açık şekilde konuşmak gerekirse, ayrık zamanlı kontrol sistemleri, örneklenmiş-verili kontrol sistemleri ve dijital kontrol sistemleri gibi terminolojiler aynı veya oldukça benzer türdeki kontrol sistemlerini anlatırlar. Kesin olarak ifade etmek gerekirse, elbette bu sistemler arasında farklılıklar bulunmaktadır. Örneğin, örneklenmiş-verili kontrol sisteminde sistemde hem sürekli zamanlı hem de ayrık zamanlı sinyaller bulunur; ayrık zamanlı sinyaller genlik modülasyonlu darbe sinyalleridir. Dijital kontrol sistemleri hem sürekli zamanlı hem de ayrık zamanlı sinyalleri içerebilir; burada, ayrık zamanlı sinyaller sayısal kodlu formdadır. Hem örneklenmiş-verili kontrol sistemleri hem de dijital kontrol sistemleri ayrık zamanlı kontrol sistemleridir.

Dijital kontrol sistemleri ve örneklenmiş-verili kontrol sistemleri ile ilgili daha açıklayıcı tanımlar bölümün ileriki altbölümlerinde verilecektir.

Çağdaş sanayi kontrol sistemleri hem sürekli zamanlı sinyalleri, hem örneklenmiş-verili sinyalleri hem de dijital sinyalleri içerebilmektedir. Bunu dikkate alarak bu çalışmada “ayrık zamanlı sistemler” tabiri dijital sinyallerin (sayısal olarak kodlanmış veri sinyali) ya da örneklenmiş-verili sinyallerin (genlikli modülasyonlu darbe sinyali) uygulandığı tüm sistemlerin tanımlaması için kullanılacaktır.

2.2 Ayrık Zamanlı Kontrol Sistemleri ve Sürekli Zamanlı Kontrol Sistemleri

Kontrol sistemleri kullandığı işaretlere göre sürekli zamanlı ve ayrık zamanlı olarak ayrılmaktadır. Sürekli zamanlı kontrol sistemleri, kontrol sisteminin tümünde sürekli işaretlerin uygulandığı bir sistemdir (Sarıoğlu, 1998). Bu tür sistemde, kontrol sinyalleri sistem içerisinde kesintiye uğramaksızın sürekli akarlar (Tou, 1959). Ayrık zamanlı kontrol sistemleri, kullandıkları işaretler bakımından sürekli kontrol sistemlerinden farklılıklar gösterir. Ayrık zamanlı kontrol sistemleri, kontrol düzeninin bir kısmında ya da tümünde zamanda süreksiz işaretler ve darbe şeklinde olan örneklenmiş-verili yada dijital biçimde olan işaretlerin işlendiği sistemdir (Sarıoğlu, 1998). Ayrık zamanlı sistemin bir örneği olarak dijital bilgisayar düşünülebilir (Polyakov, 2006).

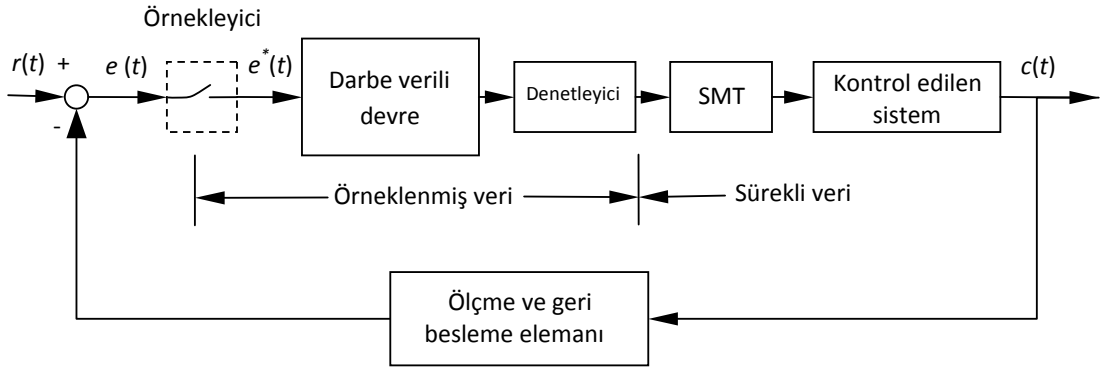
Sürekli zamanlı sistemler diferansiyel denklemlerle ayrık zamanlı sistemler ise fark denklemleriyle tanımlanmaktadır. Ayrık zamanlı sistemlerin fark denklemleriyle tanımlanması sistemin içerisinde bulunan sürekli zamanlı sinyalin ayrıklaştırılması gerçekleştirildikten sonra yapılabilmektedir (Ogata, 1995). Ayrık zamanlı sistemlerin sentezi ve analizinde kullanılan yöntemler Altbölüm 2.5’de sunulacaktır.

2.3 Dijital ve Örneklenmiş-Verili Sistemlerin Tanımlaması

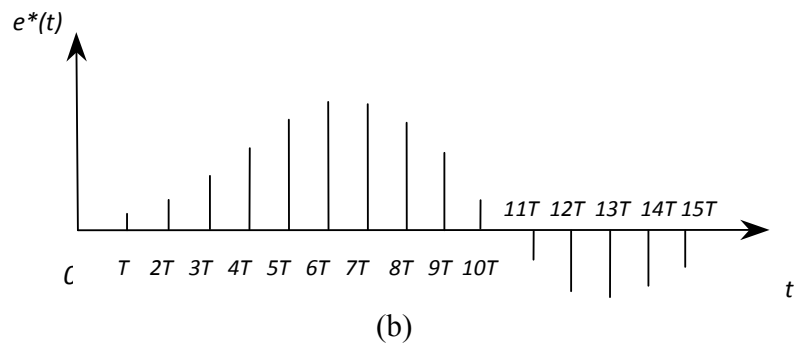
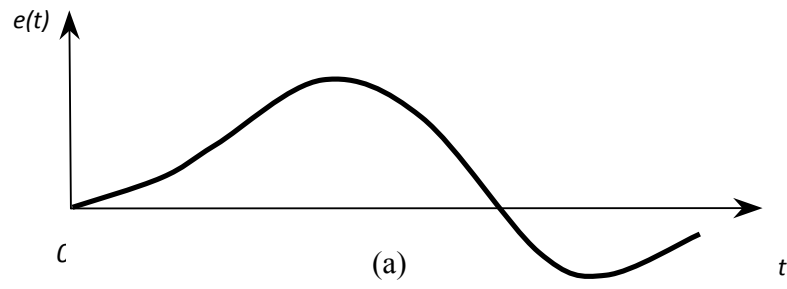
Örneklenmiş-verili kontrol sistemi, sistemin belirli bir bölümündeki kontrol sinyalinin sabit hızda ve *düzenli aralıklarla* (kesintili şekilde) sağlandığı bir sistemdir. Örneklenmiş-verili kontrol sisteminde bir veya daha fazla noktadaki veri sinyali, örneklerin alındığı sinyalin sürekli fonksiyonuna uygun olarak modüle edilmiş darbe dizisidir. Bu darbeler sürekli fonksiyonda yer alan tüm gerekli bilgiyi yeterli şekilde taşır. Bu tür kontrol sistemleri çeşitli şekillerde oluşturulur. Şekil 2.2, hatanın örneklendiği temel türdeki örneklenmiş-verili kontrol sistemini göstermektedir. Bu bir geri beslemeli ayrık zamanlı sistemdir. Uygulamada örnekleyici, ADC (analog-dijital dönüştürücü), SMT (tutucu devre) ise DAC (dijital-analog dönüştürücü) ile gerçekleştirilir.

Bilindiği gibi kontrol sistemlerinde en az bir geribesleme devresi vardır. Geribeslemenin uygulandığı sisteme *geribeslemeli* kontrol sistemi adı verilir. Sistemde, kontrol edilen büyüklük, kontrol edilen büyüklüğün izlediği bir referans büyüklük ve bu iki büyüklük arasındaki farktan oluşan bir hata büyüklüğü vardır. Çoğunlukla kontrol edilen büyüklüğe *çıkış* adı verilir (Sarioğlu, 1998). İşte kontrol sisteminde geribesleme devresi kullanılmasının temel amaçları geribesleme döngüsündeki hassas ve kesin ölçüm yapan bir cihaz aracılığıyla sistemin çıkış büyüklüğünün takibi veya gözetlenmesi ve kontrol sisteminin ileri yolunda meydana gelebilecek herhangi bir bozucu etkenden dolayı oluşabilen istenmeyen çıkışın azaltılmasıdır (Tou, 1959). Sistemde bir bozucu etken meydana gelip istenmeyen bir çıkışa neden olduğu durumda, gerekli düzeltmeleri yapmak için ileri yönde akacak olan bir uyarma sinyali üretilecektir. Böylece kontrol edilmekte olan büyüklük, hataya bağlı olarak sistem tarafından kontrol edilip değiştirilir.

Şekil 2.2'de gösterilen sistem, denetleyici ve kontrol edilen sistemin yanı sıra ölçme ve geribesleme elemanları, örnekleyici ve darbe verili devre (pulsed-data network) ya da dijital filtreyi içermektedir. $r(t)$, $c(t)$ ve $e(t)$ sırasıyla giriş sinyali, çıkış sinyali ve uyarma hatasına karşılık gelirken $e^*(t)$ örneklenmiş hata sinyalini belirtir. Belirli bir giriş değerinin $e^*(t)$ hata sinyali, zamanın sürekli fonksiyonu olan hata dedektöründen gelen bir sinyaldir. Daha sonra bu sinyal denetleyici ve kontrol edilmekte olan sistemi uyarmak amacıyla uygulanmadan önce düzenli zaman aralıklarında örnekleyici tarafından örneklendirilir. Hata uyarma sinyali ile örneklenmiş hata sinyali arasındaki ilişki Şekil 2.3'de ayrıca açıklanmaktadır.



Şekil 2.2 Temel örneklenmiş-verili geribeslemeli kontrol sistemi (Tou, 1959)



Şekil 2.3 Örnekleyicinin giriş ve çıkış sinyallerinin dalga şekilleri (Tou, 1959)

Sinyal, düzenli aralıklarla *örnekleyici* adı verilen bir cihazla ölçülmektedir. T zaman aralığı *örnekleme zamanı* olarak adlandırılır. Şekil 2.3 (b)'de gösterildiği gibi $e^*(t)$ örnekleyici çıkışı, genlikleri $0, T, 2T, 3T, \dots$ örnekleme anlarında $e(t)$ örnekleyici girişinin büyüklüğüyle belirlenen oldukça dar darbelerin dizisidir. Sürekli uyarma-hata sinyalinde yer alan bilgi daha sonra darbelerin genliği veya örneklerde taşınır. Temel bir örneklenmiş-verili kontrol sistemi çoğunlukla aşağıdakilerden meydana gelir:

1. kontrol edilen sistem;
2. hata algılama cihazı;
3. denetleyici ve ölçüm cihazı;
4. tutma cihazı;
5. örnekleyici.

Örneğin, radar takipli servomekanizma örneklenmiş-verili kontrol sisteminin bir örneğidir. Radarın tarama faaliyeti hem azimut hem de yükseklik bilgisini darbe verilere dönüştüren örnekleyicinin fonksiyonunu gerçekleştirir.

Örneklenmiş-verili kontrol sistemlerinde kontrol sinyali birbirlerine eşit uzaklıktaki aralıklarda örneklenir. Örnekleme anlarındaki sinyal değerleri bazen ayrıklaştırılır ve istenilen bilginin aktarılması ve işlenmesi için uygun bir dijital ekipmana adapte edilmek üzere darbe grupları şeklinde kodlanır. Bu tür bir örneklenmiş-verili kontrol sistemi *dijital kontrol sistemi* olarak adlandırılır. Dolayısıyla, dijital kontrol sistemi bu bölümün ilk kısmında verilen tanımlarda anlatıldığı gibi örneklenmiş-verili kontrol sisteminin bir türü olarak düşünülebilir. *Dijital kontrol sistemi*, sistemin bir veya daha fazla kesimindeki kontrol sisteminin dijital veri işleme ve karar verme ekipmanı için sayısal kodla (örneğin ikili kod) ifade edildiği bir kontrol sistemi olarak tanımlanmaktadır. Dijital sistemdeki sayısal olarak kodlanmış veri sinyali darbe-genlik modülasyonlu sinyallere veya örneklenmiş verilere geri kodlanırsa (decoding) dijital kontrol sistemi basit örneklenmiş verili kontrol sistemine indirgenebilmektedir ve dijital bilgisayarın işlemi eşdeğer darbe verili devrenin transfer fonksiyonuyla temsil edilir. Eşdeğer darbe verili devre veya dijital filtre bilgisayarın sayısal olarak kodlanmış veya dijital giriş verileri üzerinde

çalışmasıyla tamamen aynı şekilde sıralı örnekler üzerinde çalışır. Eşdeğer darbe verili devrenin çıkış örneklerinin gücü bilgisayarın dijital çıkışına karşılık gelir. Örneklenmiş-verili kontrol problemlerini çözme yöntemleri dijital kontrol sistemlerine doğrudan uygulanmaktadır. Temel bir dijital kontrol sisteminin ana bileşenleri aşağıda belirtilmektedir:

1. kontrol edilen sistem;
2. kontrol elemanları;
3. dijital-analog çevirici;
4. analog-dijital çevirici;
5. dijital veri işleme ekipmanı (denetleyici) veya bilgisayar.

Dijital bilgisayar veri işleme ve sistem kompenzasyonunda merkezi kontrol biriminin önemli rolünü oynar. Bazı durumlarda karar verme sürecinde kontrol sisteminin sinir merkezidir. Dijital-analog ve analog-dijital çeviriciler kontrol ve enstrümantasyon amacıyla dijital ve analog nicelikleri birbirlerine bağlamakta kullanılmaktadır. Dolayısıyla, bir dijital kontrol sisteminde üç temel işlem icra edilir; diğer bir deyişle, bilgisayarın girişindeki kodlama işlemi, dijital bilginin bilgisayarda programlanması veya verilerin işlenmesi ve bilgisayarın çıkışındaki 'decoding' (deşifre) işlemi. Sayısal olarak kontrol edilen imalat makinesinin kontrol sistemi dijital kontrol sisteminin bir örneğidir.

2.4 Örnekleme ve Sayısallaştırma (Digitization) Tekniklerinin Kontrol Alanında Önemi

Yirminci yüzyılın ikinci yarısından başlayarak dijital bilgisayarlar alanı öncelikle bilimsel hesaplamalarda kullanımlarının yüksek hassasiyet ve hesaplama hızının yanı sıra analog hesaplamaların sağlayamadığı esneklik ve çeşitliliği sağlaması nedeniyle gözle görülür bir büyümenin takip edildiği bir dönem yaşamıştır. Analog teknikler karşısındaki avantajları daha aleni hale geldikçe kontrol sistemi mühendislerinin bu dönemlerde kontrol sistemi tasarımına dijital teknikleri uygulamaları da son derece doğaldı. Bu dönem dijital tekniklerinin yaygın ve başarılı uygulandığı bir dönem olarak değerlendirilebilir.

Bugünkü kontrol sistemlerinde örneklemenin kullanılması ile basit, hassas ve verimli güç kontrolü araçları kolaylıkla yapılabilmektedir. Örnekleme, fazla güç amplifikasyonu olmaksızın hassas kontrol elemanları aracılığıyla devasa büyüklükteki bir gücün kontrolüne izin vermekte ve aynı zamanda hassas enstrümanlar üzerindeki yüklenme etkisini en aza indirmektedir. Bir kontrol sisteminde örneklenmiş-verili ve dijital bileşenlerin kullanılması sistemin önemli parçalarının zaman paylaşmasına olanak tanır. Bu, ayrık zamanlı kontrol sistemlerinin sağladığı oldukça önemli bir avantajdır. Zaman paylaşımı, ekipmanın kullanımında ekonominin sağlanmasıyla sonuçlanır ve böylece bir bileşen birkaç fonksiyona sahip olabilir. Sistemin çeşitli parçalarının koordinasyonunu da kolaylaştırır. Örneklenmiş-veri kolaylıkla kodlanabildiğinden dolayı ayrık zamanlı kontrol sistemlerindeki veri sinyalleri darbe kodlanmış biçimde alınıp aktarılır ve iyi bir veri aktarım ortamı yoluyla veri aktarımında neredeyse hata içermeyen kanallar sağlar. Bu nedenle darbe kodlu sinyallerin iletimindeki tek gürültü örnekleme hatasıdır. Benzer şekilde, bir kontrol sistemindeki dijital bilgisayar kontrol bilgisinin işlenmesine olanak tanır ve böylece, kontrol sisteminin performansını arttırmak için dijital bilgisayarın esnekliği ve evrenselliği yararlanılabilir. Ayrıca, dijital kontrol teknikleri, doğrusal olmayan programlama ve adaptif veya optimal kontrol yoluyla sistem kompenzasyonunu mümkün hale getirmektedir. Bu gerçekte dijital kontrolle başarılabilen önemli bir avantajdır. Diğer avantajlarının yanı sıra ayrık zamanlı sistemlerin dezavantajlarından ileriki altbölümde bahsedilecektir.

Dijital tekniklerin elde ettiği başarının anlatımı devam edilerek söz konusu tekniklerin endüstride özellikle üretim süreçlerinin otomasyonunda geniş uygulama alanı kazandığının da belirtilmesi gerekir. Ayrık sistemler bir işleme plantının (endüstri sisteminin) çalışmasını tamamen kontrol altına alacak kapasiteye sahiptir. Üretim süreci kontrolünde dijital bilgisayar ham maddeleri karıştırabilir, minimum malzeme maliyeti için gerekli malzeme kümesini seçebilir, malzeme bileşiminin hesaplanmasında analitik enstrümanları destekleyebilir, kontrol sistemi ve plantta meydana gelen arızanın tanısını koyabilir, ideal çalışma koşullarını belirleyebilir ve benzeri işlevleri yerine getirebilir. Bir işleme plantında dijital bilgisayar genellikle kendisini aritmetik hesaplamalar yapma, işlem enstrümanlarını okuma ve ara değişkenleri otomatik ve sürekli şekilde ayarlama uyarıları gönderen oldukça karmaşık bir komutlar kümesini takip eden bir işletmen olarak düşünülebilir. Bununla birlikte, tecrübede defalarca ispat edildiği gibi bu sistemler özellikle kontrol değişkenlerinin çok hızla değiştiği ve kontrol değişkenleri arasındaki ilişkilerin son derece karmaşık olduğu bazı işlemlerde insan operatörlerden daha hızlı ve daha

yüksek verimlilikte çalışabilir. Hesaplama ve mantık işlemleri vasıtasıyla dijital kontrol bilgisayarı önceki çalışma koşullarının önemi dahil mevcut durumu analiz edebilir, gerekli kontrol faaliyetlerini akıllı şekilde seçebilir ve işlem kontrolünü optimize edebilir. Dijital kontrollü bilgisayarların çalıştırdığı işlem sayesinde klasik kontrol teknikleriyle mümkün olanın çok üzerindeki otomasyon dereceleri başarılabilmektedir. Sonuç olarak, üreticiler işlemin verimliliği, kalite ve ürünlerin miktarında ve iş dünyasındaki rekabet konumlarında büyük ilerlemeler başarabilirler.

2.5 Ayırık Zamanlı Kontrol Sistemlerinin Analizi ve Sentezinde Uygulanan Yöntemler

Ayrık zamanlı kontrol sistemlerinin analizi ve sentezinde aşağıdaki yöntemler uygulanmaktadır

1. fark denklemleri yaklaşımı;
2. klasik frekans cevabı yaklaşımı;
3. dürtü cevabı yaklaşımı;
4. z-dönüşümü ve değiştirilmiş z-dönüşümü yaklaşımı;
5. bilineer dönüşüm yoluyla ω düzleminde sentez yaklaşımı;
6. kök-yer eğrisi yöntemi.

İlk yaklaşım ayırık zamanlı sistemleri klasik yöntemler ile tanımlayan fark denklemlerinin çözümünden ibarettir (Tou, 1959). Fark denklemleri, sayısal ve zamanda ayırık işaretleri ilişkilendiren bir denklemdir (Kuo, 1999). Diferansiyel denklemlerin sürekli sistemleri belirlediği gibi, fark denklemleri de, sayısal ve ayırık verili sistemleri tanımlar. Fark denklemleri, bilgisayarda daha kolay programlanıp çözülebildiği için, ayrıca diferansiyel denklemleri yaklaşık ifade etmede de kullanılır. İkinci yaklaşım klasik frekans tanım bölgesi analizi ve sentezi yönteminin ayırık zamanlı sistemlere uzantısıdır. Bu yöntemle ayırık sistemlerin Nyquist diagramı çizdirilir, Nyquist kararlılık kriteri uygulanır ve daha sonra klasik tasarlama yöntemleriyle devam edilebilir. Dürtü cevabı yaklaşımı sistem cevabının ağırlıklı (weighted) dürtü ve eşit aralıklarla gecikmiş dürtüler cevabının toplamı olarak verildiği ve sonuç cevabının değerlendirildiği bir yöntemdir. z-dönüşümü, doğrusal fark denklemler ve ayırık sistemlerin çözümünde işlevsel bir

yaklaşım olarak kullanılan bir yöntemdir (Kuo, 1999). 1950'li yıllarda durum uzayı yöntemlerinin gelişmesi öncesinde, bir dizi araştırmacı ayırık-zamanlı sistemler için, Laplace dönüşümünün sürekli zamanlı sistemler için üstlendiği rolü üstlenecek bir dönüşüm yöntemi arayışına girmiştir (Friedland, 1996). Belirsiz bir terminoloji ve simgelenim döneminin ardından z -dönüşümü ortaya çıkmıştır. Söz konusu dönüşüm, ayırık zamanlı alt sistemleri, diğer alt sistemlerin transfer fonksiyonlarıyla cebirsel yöntemlerle bir araya getirerek, genel sistemin transfer fonksiyonunu vermek suretiyle açıklanabilir. Genel sistemin transfer fonksiyonu daha sonra, sistemin keyfi bir girdiye cevabını hesaplamak için kullanılabilir ve sürekli zamanlı sistemler için geliştirilmiş benzer yöntemler kapalı çevrimli ayırık zamanlı sistemlerin özelliklerini (örneğin kararlılık, genlik ve faz payları) incelemek için kullanılabilir. z -dönüşümü ve daha sonra geliştirilmiş olan değiştirilmiş z -dönüşümü yöntemlerinin uygulamasında sistemin bileşenleri z 'nin fonksiyonu olduğu darbe transfer fonksiyonlarıyla tanımlanır. Sistemin kararlılığı Nyquist kararlılık kriteriyle ya da Shur-Cohn kriteriyle belirlenir. Daha sonra sistemin cevabı ters değiştirilmiş z -dönüşümü ile elde edilir (Tou, 1959). ω - dönüşümü, ayırık zamanlı kontrol sistemlerinin frekans tanım bölgesi tasarımında kullanılan bir yaklaşımdır (Kuo, 1999). Dijital denetleyicilerin sentezinde uygulanan basit yöntemlerden biri olarak bilinen bu yöntem bilinear dönüşüm yönteminin uygulamasına dayanmaktadır (Polyakov, 2006). Bu yaklaşım sistemin açık çevrim darbe transfer fonksiyonunun bilinear dönüşümü vasıtasıyla ω düzlemine haritalandırarak dönüştürülmesini gerektirir. ω düzleminde çalışılırken kontrol teorisinde çok kullanılan Bode yöntemi uygulanabilir (Tou, 1959). Altıncı yaklaşım klasik kontrol sistemleri için geliştirilmiş olan kök-yer eğrisi yönteminin ayırık zamanlı sistemlere direk olarak uygulandığı yöntemdir. Sistemin karakteristik denkleminin köklerinin z düzlemindeki yerleşimi ayırık zamanlı sistemin performansını belirlemektedir.

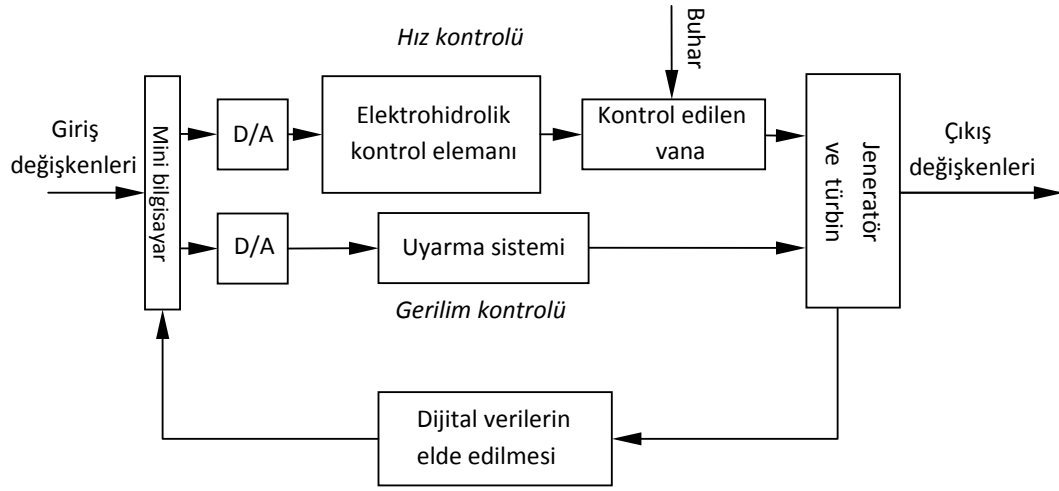
Tüm bu yöntemlerin uygulanması örnekleme anı olarak gerçekleştiği ve örnekleme darbelerinin sonsuz küçük yada sıfır genişlikli olduğu varsayımına dayanmaktadır. Böylece, ayırık zamanlı sistemlerin analizinde darbeler ideal bir darbe ya da eşit ağırlıklı dürtülerle temsil edilmektedir. Yalnız bu varsayım örnekleme sürekliliğinin kontrol edilen sistemin zaman sabitine nazaran çok küçük olduğu ya da sistemdeki örnekleycinin sıfırıncı mertebeden tutucunun hemen ardından yerleştirildiği durumlarda ancak geçerlidir. Bilindiği kadarıyla pratik ayırık zamanlı kontrol sistemlerinde örnekleme aniden gerçekleşmiyor ve darbeler sistemin zaman sabitiyle karşılaştırılabilir bir yoğunlukta olabilir. Eğer örnekleme ihmal edilebilir bir süreklilikte değilse

yukarıda anlatılan yöntemlerin doğruluğu kaybolmuş olabilir. Böyle durumlarda τ - dönüşümü yöntemi uygulanabilir. Bu yöntem sonlu örnekleme süreklilikli ayırık zamanlı kontrol sistemlerinin analizinde yaygın uygulanmaktadır.

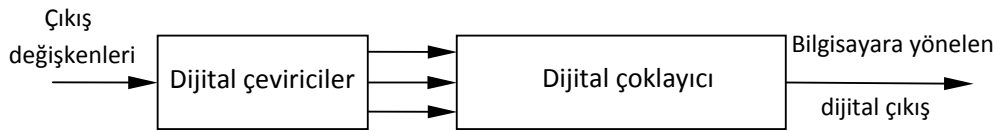
2.6 Ayırık Zamanlı Kontrol Sistemlerine Örnekler

Ayrık zamanlı sistemlerin ilk örneklerinden biri, sensörün, uçağın aletli iniş sistemi dahilinde bir gereç olarak kullanıldığı mekanik olarak taranmış bir radar sistemidir (Friedland, 1996). Radar anteni, genellikle sabit bir hızda olmak üzere görüş alanını tarar ve koordinasyonun (örneğin, menzil, azimut ve irtifa) sağlandığı uçağın yansıması tarama başına bir kez gerçekleşir. (Yansımanın alındığı sürelerin eş aralıklı olmadığı, bunun sebebinin uçağın radarın görüş alanı dahilinde hareket etmesi olduğu ve bundan dolayı örnekleme aralığının sabit olmadığını belirtmek gerekir. Uçak hızının yüksek olması durumunda, bu sabit olmama durumunun (yansımanın alındığı sürelerin eş aralıklı olmaması) açıklamasının yapılması gerekli olabilir). Bunun devamı olarak ileride diğer ayırık zamanlı uygulamalar ve bunların kullandığı temel bileşenler incelenecektir.

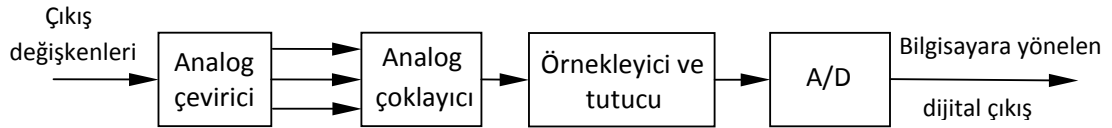
Büyük güçlü turbin jeneratör gruplarında uygulanan dijital kontrol sistemi (Kuo, 1980). Şekil 2.4 (a)'da türbin-jeneratör grubunun hızı ve gerilimini kontrol eden minibilgisayarlı kontrol sisteminin temel bileşenleri ve yapısal çizimi verilmiştir. Dijital-analog çeviriciler bilgisayar ve regülörler arasındaki ara yüzü oluşturmaktadır. Sistem, dijital verileri elde etme işlemi gerçekleştiren bir alt sistemi de içermektedir. Açısız hız, çıkış gerilimi, uyarma akımı, endüvi akımı, efektif güç, reaktif güç gibi parametrelerin ölçülmesi ve daha sonra bunların bilgisayara girilmesi bu alt sistemle gerçekleştirilir. Bu parametrelerin bazıları dijital çeviricilerle ölçülüp dijital çoklayıcı vasıtasıyla bilgisayara girilebilir (Şekil 2.4 (b)). Analog çeviricilerle ölçülmüş sinyaller her gelen sinyalin işlenmesi için belli bir zamanın harcandığı analog çoklayıcıya gelir. Çoklayıcıdan sonra çalıştırılan cihazlar zaman paylaşma düzeniyle kullanılır. Söz konusu verileri elde etme alt sistemi Şekil 2.4 (c)'de gösterilmiştir. Analog çoklayıcının çıkışı örnekleyicisinin girişine bağlanmıştır. Daha sonra analog çoklayıcıdan gelen sinyalin değeri tutucunun çıkışında kaydedilir. Sinyal değerinin kaydedilmesi analog-dijital çeviricinin bu sinyali sayısal koda dönüştürmeyi tamamlayana kadar devam eder.



(a)



(b)



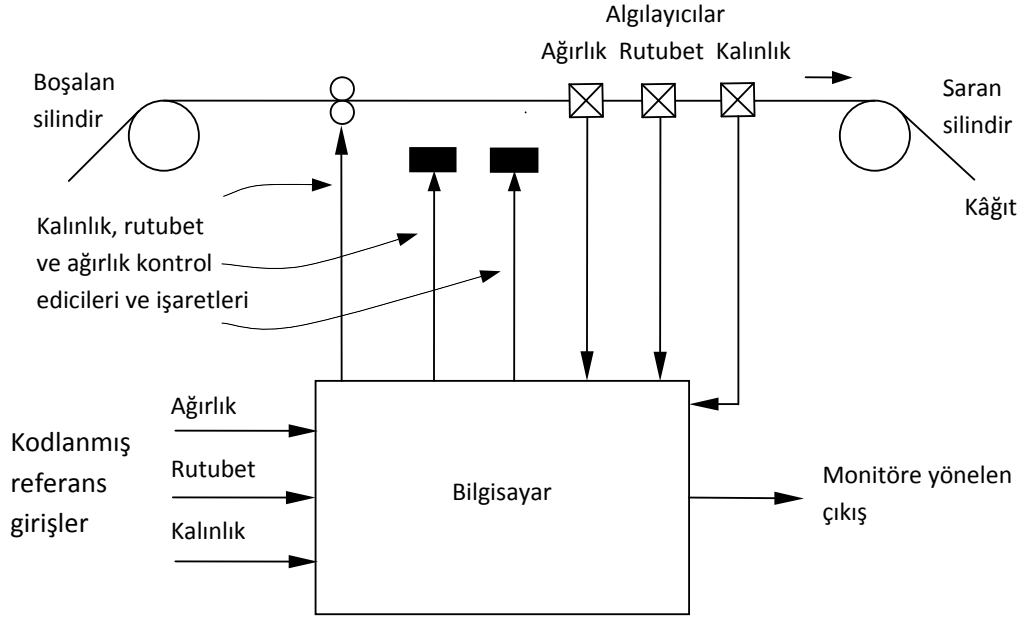
(c)

Şekil 2.4 (a) Türbin-jeneratör grubunun ayrık zamanlı kontrol sistemi, (b) dijital verileri elde etme alt sistemi, (c) analog çeviriciler dahil verileri elde etme alt sistemi (Kuo, 1980)

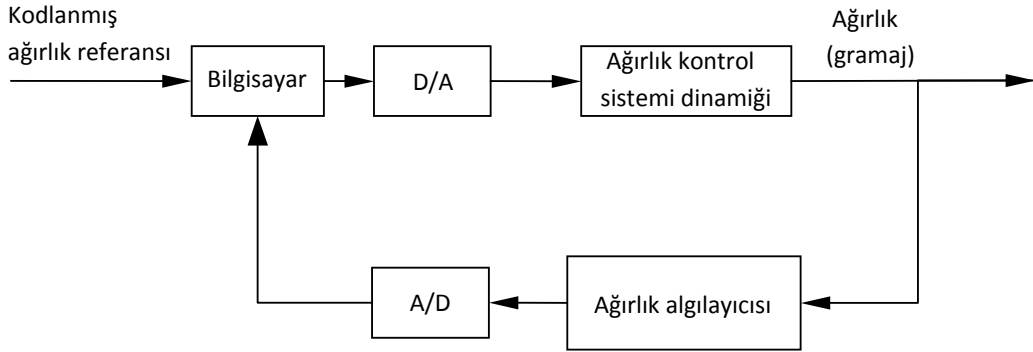
Kâğıt endüstrisinde kağıdın kalınlık, rutubet ve ağırlığını kontrol eden sistem (Sarıoğlu, 1998).

Kağıt endüstrisinde, kâğıdın parlak, homojen ve kaliteli olması için bilgisayarlı kontrol sistemi kullanılır. Bu da, ayrık zamanlı kontrol sistemlerinin uygulandığı önemli bir alandır. Kalınlık, rutubet ve ağırlığını kontrol etmek için önce bunları algılamak, ve darbe dizisi haline getirerek uygun genliklerle bilgisayara girmek gerekir. Bilgisayar, referans kağıt kalınlığı, ağırlığı ve

rutubetiyle gerçek değerleri karşılaştırır ve kontrol işaretlerini verir. Şekil 2.5 (a)'da tüm sistemin blok diyagramı, Şekil 2.5 (b)'de ise sistemin ağırlık kontrolü alt sistemi gösterilmiştir.



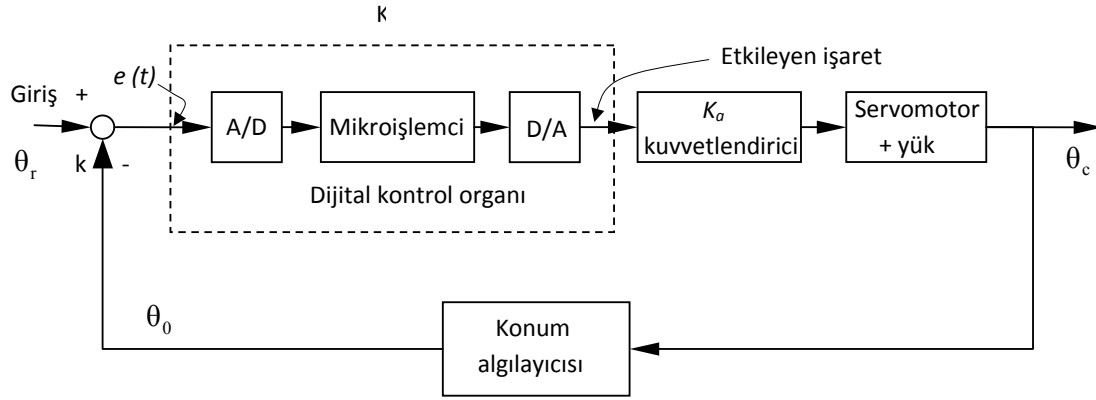
(a)



(b)

Şekil 2.5 (a) Tüm sistemin diyagramı, (b) ağırlık kontrolü alt sistemi (Sarıoğlu, 1998)

Dijital servo kontrol sistemi (Sarioğlu, 1998). Klasik kontrol sistemlerinde, konum kontrolü yapan kontrol sistemlerine *servo kontrol sistemi* denir. Bu sistemlerde bulunan bütün sinyaller sürekli olan sinyallerdir. Sekil 2.6'da dijital servo sistemin blok diyagramı verilmiştir.



Sekil 2.6 Dijital servo sistemin blok diyagramı (Sarioğlu, 1998)

Şekilde K ile gösterilen eleman bir karşılaştırma devresidir ve çoğunlukla fark alan bir işlemsel kuvvetlendiricidir (operational amplifier). $\theta_r(t) - \theta_o(t) = e(t)$ hata fonksyonu, sürekli bir sinyaldir. Bu sinyali, bilgisayarın ya da mikroişlemcinin kullanabileceği sinyale çevirmek için analog-dijital çeviriciler kullanılır. Dijital kontrol sisteminin diğer bir elemanı, kontrol ya da etkileyen sinyali üreten mikroişlemcidir. Bu eleman, örneğin, 16 bitlik bir elemandır (örneğin TI 9900 mikroişlemcisi olabilir). Mikroişlemci, istenilen kontrol işlemini yerine getirecek darbe dizisi üretir. Bu sinyali sürekli işaretle çalışan kuvvetlendirici ve servomotora uygulamadan önce, sürekli sinyale çevirmek gerekir. Bu amaçla dijital-analog çeviriciler kullanılır. Ayrık kontrol sistemlerinde görüldüğü gibi sürekli sinyal önce ayrık sinyale sonra tekrar analog sinyale çevrilmekte ve böylece kontrol sisteminin bir kısmı analog bir kısmı ayrık sinyali taşımaktadır.

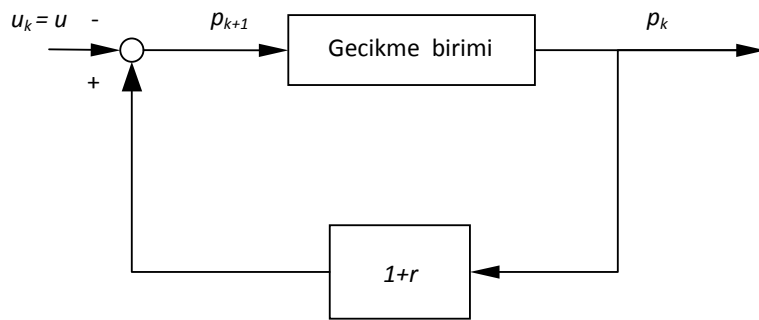
Ayrık zamanlı sistemin ortaya çıkabileceği bir başka durum da, belirli bir değişkenle ilişkili verilerin çevrimdışı bir laboratuvar analizine bağlı olduğu bir kimyasal süreçtir (Friedland, 1996). Bazı değişkenlerin fiziki örneklerinin çizilmesi ve harici aygıtlar kullanılarak analiz edilmesi gerekli olabilir. Bu analizin sonuçları daha sonra süreçteki değişiklikleri kontrol etmek için kullanılır. Her ne kadar bu örnekleme yöntemi arkaik gibi gözükse de, kaçınılmazdır. Bu, şarap analizini, şarap tüccarının tadarak gerçekleştirdiği bir şarap imalathanesi gibi düşünülebilir.

Borç ödeme probleminin ayrık modeli (Kuo, 1980). Yukarıda fiziksel özelliklere sahip olan sistemler ele alınmıştı. Hayatta ayrık modellerle ifade edilebilen birçok toplumsal ve ekonomik sistemler de mevcuttur. Bu bölümün ilk alt bölümlerinde tanımlandığı gibi sürekli zamanlı dinamik sistemler süreksiz t argümanının fonksyonu olan değişkenlere göre diferansiyel denklemlerle tanımlanır. Ayrık sistemlerin dinamiği ise ayrık denklemlerle tanımlanır. Sistemin ayrık modelinin değişkenleri kT ayrık zaman değişkenlerinin fonksyonudur. Buradaki işaretler, T – sabit, veya k ayrık değişkeninin fonksyonudur.

Borç ödeme problemini ele alalım. Bu problem aşağıdaki şekilde tanımlanabilir. Borç miktarının P_0 ' a eşit olduğu düşünölsün. Alınan borcun ödenmemiş kısmının süre başı faizi r olarak verilsin. Borç ve faizin ödenmesi N süre içerisinde eşit u ödemelerle gerçekleşmesi gerektiğini varsayalım. $P_k - k$ ' nıncı süreden sonra kalan ödenmesi gereken borcun miktarı olsun. O zaman problemin ayrık denklemi aşağıdaki şekilde yazılır:

$$P_{k+1} = (1 + r)P_k - u \quad (2.1)$$

P_{k+1} , $(k + 1)$ ' inci süre sonunda ödenecek olan borcun miktarıdır. Problemin sınır koşulu şudur: verilmiş olan P_0 değişkeni ve $P_N = 0$. (2.1) fark denklemi u ' ya göre tekrarlanan yöntem (recurrent method) veya z – dönüşümü ile çözülebilir. (2.1) denklemi, birinci dereceden fark denklemdir. Ele alınmış örneğin blok diyagramı şekil 2.7' de verilmiştir.



Şekil 2.7 Borç ödeme modelinin kontrol sistemi (Kuo, 1980)

2.7 Ayrık Zamanlı Sistemlerin Avantajları ve Dezavantajları

Ayrık zamanlı kontrol sistemlerinin sürekli zamanlı kontrol sistemleri üzerinde aşağıda belirtilen özelliklerde büyük üstünlükler sağladığı görülür (Sarıoğlu, 1998):

- ayrık zamanlı sistemler daha güvenilirdir;
- kontrol edilen çıkış büyüklüğü giriş büyüklüğünü daha büyük duyarlılıkla (daha küçük hata ile) izler;
- sistem parametre değişmelerine daha az duyarlıdır;
- dış ve iç bozucu etkilerden daha az etkilenir;
- mikroelektronik ve mikrobilgisayarlarda meydana gelen son teknolojik gelişmeler nedeni ile ayrık kontrol sistemlerindeki denetleyiciler daha hafif, küçük ve ucuzdur.

Bununla beraber dijital kontrol sistemlerinin bazı dezavantajları da mevcuttur (Friedland, 1996). Maliyet, bunlardan biridir. Bazı uygulamalarda, analog-dijital çevirici ve dijital-analog çeviricinin aralarında olduğu dijital kontrol donanımlarının kullanılması, performans gereksinimleriyle mazur gösterilemez. Buna karşılık söz konusu donanımların azalan maliyetleri, giderek daha fazla uygulamada kullanımlarını haklı çıkartmaktadır. Dijital kontrolün bir diğer dezavantajıysa plant değişkenlerinin ölçümüyle yeni kontrol sinyalinin çıkışı arasında yaşanan zaman gecikmesidir. Bu gecikme analog biçimden dijital biçime ve dijital biçimden analog biçime çevirme için gerekli zamanı ve bilgisayarın gerekli hesabı gerçekleştirme süresini içerir. Bu sürelerin toplamı, genel örnekleme sıklığının üst limiti, dolayısıyla sistemin kapalı çevrim bantgenişliğidir. Dijital işlemcilerin ve ilgili donanımın hızı artmaya devam ettikçe, bu kısıtlamaya tabi süreçlerin sayısı giderek azalacaktır.

3. AYRIK ZAMANLI KONTROL SİSTEMİNİN DURUM UZAYINDA ANALİZİ

3.1 Klasik Kontrol Teorisiyle Tasarlama Yöntemlerinin Gözden Geçirilmesi

Kök-yer eğrisi ve frekans cevabı yöntemleri gibi klasik yöntemler tek girişli-tek çıkışlı sistemlerle çalışılırken faydalı olmaktadır. Klasik yöntemler kavramsal olarak basittir ve sadece makul sayıda hesaplama gerektirir; ancak sadece tek giriş ve tek çıkışa sahip doğrusal zamanla değişmeyen sistemlere uygulanabilir. Bunlar sistemin giriş-çıkış ilişkisinden diğer bir deyişle transfer fonksiyonu veya darbe transfer fonksiyonuna dayanır. Basit durumlar haricinde doğrusal olmayan sistemlerde uygulanamazlar. Yine, klasik yöntemler büyük oranda zamanla değişen ve/veya doğrusal olmayan optimal ve adaptif kontrol sistemlerinin tasarımına uygulanmazlar.

3.2 Giriş

Bu tez çalışmasında gelişmiş kontrol yöntemlerinin uygulanmasına imkân tanıyan durum uzayında tasarım ve analiz üzerinde yoğunlaşılacaktır. Modern bir karmaşık sistem birçok giriş ve birçok çıkışa sahip olabilir ve bunlar birbirleriyle karmaşık şekilde ilişkili olabilirler. Bu tür bir sistemi analiz etmek için matematiksel ifadelerin karmaşıklığını azaltmanın yanı sıra analizde gerekli olan usandırıcı hesaplamaların büyük kısmında bilgisayarlardan faydalanmak zorunludur. Bu bakış açısıyla sistem analizine ilişkin durum uzayı yaklaşımı en uygundur.

Klasik kontrol teorisi giriş-çıkış ilişkisinden veya transfer fonksiyonundan köken alırken modern kontrol teorisi birinci mertebeden vektör-matris fark denklemi ya da diferansiyel denklemi içerisinde birleştirilebilecek sistem denklemlerinin n sayıda birinci mertebeden fark denklemler ya da diferansiyel denklemler cinsinden tanımlamasına dayanmaktadır. Vektör-matris gösteriminin kullanılması denklemlerden oluşan sistemlerin matematiksel sunumunu büyük oranda basitleştirmektedir. Durum değişkenlerinin sayısı, girişlerin sayısı veya çıkışların sayısındaki artış denklemlerin karmaşıklığını artırmaz. Gerçekte, karmaşık çok girişli-çok çıkışlı sistemlerin analizi birinci mertebeden skaler diferansiyel denklemler sistemlerinin analizi için gerekli olan prosedürlere göre sadece biraz daha karmaşık prosedürlerle gerçekleştirilebilmektedir. Kontrol sistemlerinin analizi ve sentezinde kullanılan durum uzayı yöntemleri bazı açılardan optimal olması gereken çok girişli-çok çıkışlı sistemlerle çalışılırken en uygun seçenekleri oluşturmaktadır. Durum uzayı konsepti kullanılarak yapılan sistem tasarımı

tasarlayıcının belirlenen performans endekslerini göz önüne alarak kontrol sistemleri tasarlamasına olanak tanır. Ayrıca, durum uzayındaki tasarım dürtü fonksiyonu, basamak fonksiyonu veya sinüsoid fonksiyonu gibi belirli bir giriş fonksiyonu yerine bir giriş sınıfı için gerçekleştirilebilmektedir. Yine, durum uzayı yöntemleri tasarımcının uyguladığı tasarıma başlangıç koşullarını dahil etmesine imkân tanır. Bu, klasik tasarım yöntemlerinde kullanımı mümkün olmayan oldukça elverişli ve faydalı bir özelliktir.

İlerleyen bölümlerde öncelikle durum, durum değişkeni, durum vektörü ve durum uzayı kavramları tanımlanmış ve daha sonra durum uzayı denklemleri sunulmuş olacaktır.

Durum. Bir dinamik sistemin durumu girişin $t \geq t_0$ bilgisiyle birlikte bu değişkenlerin $t = t_0$ 'daki bilgilerinin sistemin herhangi bir $t \geq t_0$ 'daki davranışını tamamen tanımlayacak en küçük değişkenler kümesidir (*durum değişkenleri* olarak adlandırılır). Durum konseptinin hiçbir şekilde fiziksel sistemlerle sınırlandırılmadığına dikkat edilmelidir. Durum kavramı biyolojik sistemlere, ekonomik sistemlere, sosyal sistemlere ve diğerlerine rahatlıkla uygulanabilir.

Durum değişkenleri. Bir dinamik sistemin durum değişkenleri ilgili dinamik sistemin durumunu belirleyen en küçük değişkenler kümesini oluşturan değişkenlerdir. Bir dinamik sistemin davranışını tamamen belirlemek için en azından x_1, x_2, \dots, x_n n değişkenine ihtiyaç duyuluyorsa (ve böylece $t \geq t_0$ için giriş verildikten ve $t = t_0$ 'daki başlangıç durumu tanımlandıktan sonra sistemin gelecekteki durumu tamamen belirlenmektedir), bu tür n adet değişken, *durum değişkeni* kümesini oluşturur.

Durum değişkenlerinin fiziksel olarak ölçülebilir veya gözlemlenebilir nicelikler olmalarının gerekmediğine dikkat edilmelidir. Fiziksel nicelikleri temsil etmeyen değişkenler ve ölçülebilir ya da gözlemlenebilir olmayan değişkenler de durum değişkeni olarak seçilebilir. Durum değişkenlerinin seçilmesindeki böyle bir serbestlik durum uzayı yöntemlerinin avantajıdır.

Durum vektörü. Belirli bir sistemin davranışını tamamen açıklamak için n sayıda durum değişkenine ihtiyaç duyuluyorsa bu durumda n durum değişkeni x vektörünün n bileşenleri olarak düşünülebilir. Bu tür bir vektör *durum vektörü* olarak adlandırılır. Dolayısıyla, $t = t_0$ 'daki

durum verilip $t \geq t_0$ zamanında $u(t)$ girişi tanımlandıktan sonra bir durum vektörü herhangi bir $t \geq t_0$ zamanında $x(t)$ sistem durumunu özgün olarak tanımlayan bir vektördür.

Durum uzayı. Koordinat eksenleri x_1 eksen, x_2 eksen, ... , x_n ekseninden oluşan n boyutlu uzaya *durum uzayı* adı verilir. Herhangi bir durum, durum uzayındaki bir nokta ile temsil edilebilir.

Durum uzayı denklemleri. Durum uzayı analizinde dinamik sistemlerin modellenmesinde yer alan üç tür değişkenle ilgilenilir: giriş değişkenleri, çıkış değişkenleri ve durum değişkenleri. İleride görüleceği üzere, durum değişkenlerinin sayısı aynı sistemin farklı durum uzayı gösterimlerinin her birisi için aynı olması hariç belirli bir sistemin durum uzayı gösterimi özgün değildir.

3.3 Tanımlar

Zamanla değişen (doğrusal ya da doğrusal olmayan) ayrık zamanlı sistemler için durum denklemi aşağıdaki biçimde verilebilir

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \quad (3.1)$$

çıkış denklemi ise

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \quad (3.2)$$

Doğrusal zamanla değişen ayrık zamanlı sistemlerin durum ve çıkış denklemleri aşağıdaki biçimde basitleştirilerek yazılabilir

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) \quad (3.4)$$

burada

$$\mathbf{x}(k) = n - \text{vektör} \quad (\text{durum vektörü})$$

$$\mathbf{y}(k) = m - \text{vektör} \quad (\text{çıkış vektörü})$$

$\mathbf{u}(k) = r$ – vektör (giriş vektörü)

$\mathbf{G}(k) = n \times n$ mertebeden matris (durum matrisi)

$\mathbf{H}(k) = n \times r$ mertebeden matris (giriş matrisi)

$\mathbf{C}(k) = m \times n$ mertebeden matris (çıkış matrisi)

$\mathbf{D}(k) = m \times r$ mertebeden matris (direk iletim matrisi)

$\mathbf{G}(k)$, $\mathbf{H}(k)$, $\mathbf{C}(k)$ ve $\mathbf{D}(k)$ matrislerinin argümanlarında k değişkeninin yer alması bu matrislerin zamanla değişen matrisler olduğunu ifade etmektedir. Eğer k değişkeni matrislerde açık bir şekilde gözüküyorsa o zaman bu matrislerin zamanla değişmeyen ya da sabit olduğu varsayılır. Böylece, eğer sistem zamanla değişmeyen bir sistem ise (3.3) ve (3.4) aşağıdaki biçimde basitleştirilerek yazılabilir

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (3.5)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (3.6)$$

Ayrık zamanlı sistemlerde olduğu gibi sürekli zamanlı (doğrusal ya da doğrusal olmayan) sistemler aşağıdaki durum ve çıkış denklemler ile tanımlanabilir:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (3.7)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (3.8)$$

Doğrusal zamanla değişen sürekli zamanlı sistemlerin durum ve çıkış denklemleri aşağıdaki biçimde basitleştirilerek yazılabilir

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (3.9)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (3.10)$$

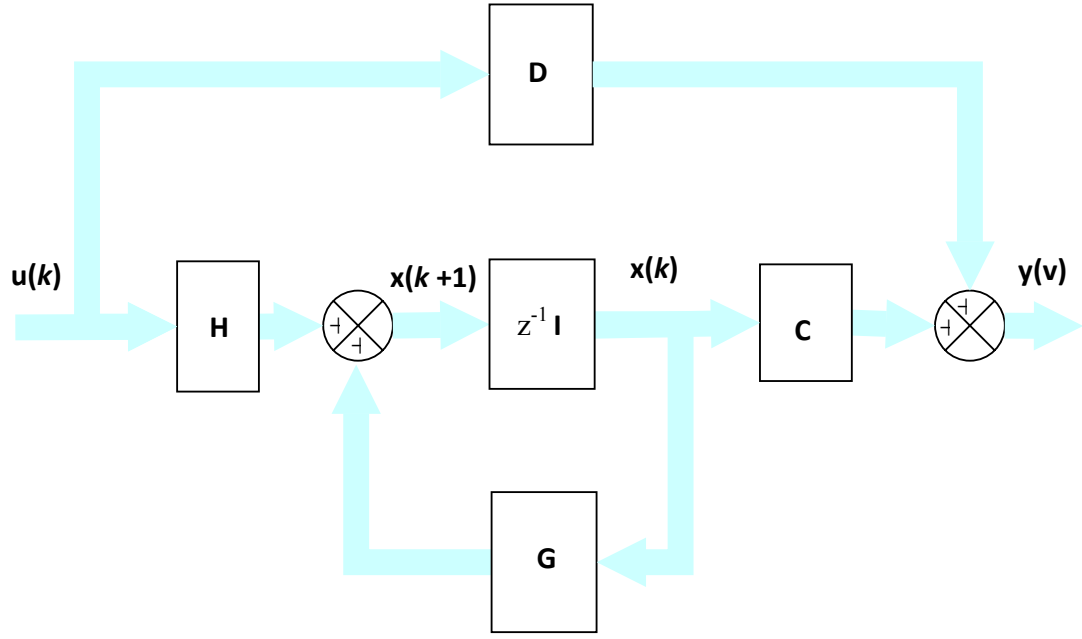
Eğer sistem zamanla değişmeyen bir sistem ise (3.9) ve (3.10) aşağıdaki biçimde basitleştirilerek yazılabilir

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3.11)$$

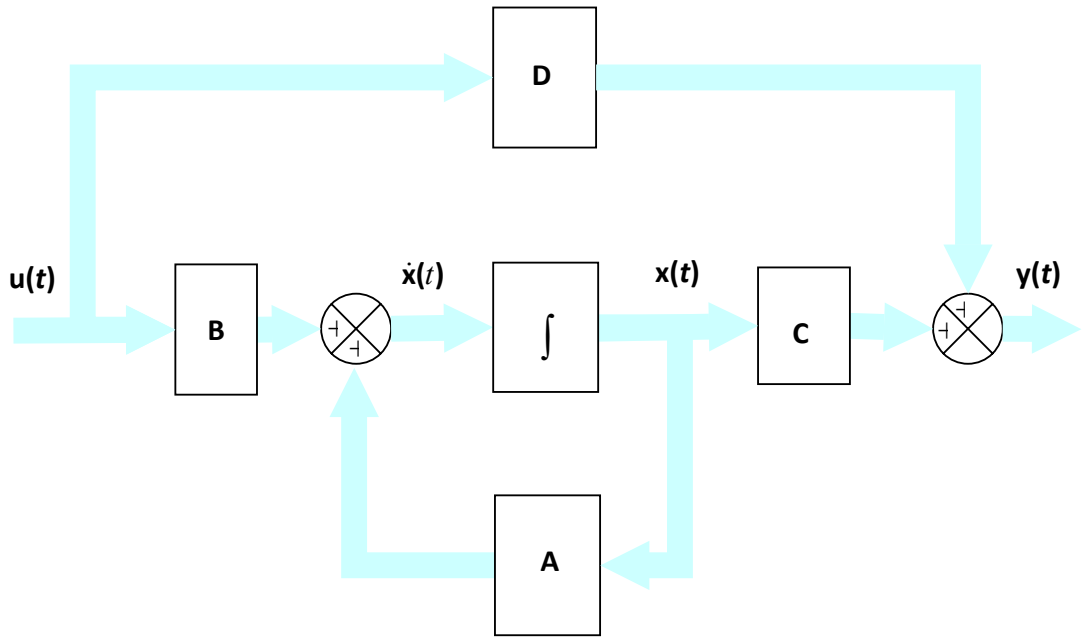
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (3.12)$$

(3.5) ve (3.6) ile tanımlanan ayrık zamanlı sistemin blok çizimi Şekil 3.1 (a)'da verilmiştir. (3.11) ve (3.12) ile tanımlanan sürekli zamanlı sistemin blok çizimi ise Şekil 3.1 (b)'de verilmiştir. Dikkat edilmelidir ki, ayrık zamanlı ve sürekli zamanlı sistemlerin durum uzayı gösterimi aynıdır.

Şuna dikkat edilmesi gerekir ki, $\mathbf{u}(k)$ [veya $\mathbf{u}(t)$] hem sistemin giriş vektörünü hem de kontrol vektörünü (plant girişini) göstermektedir. Dolayısıyla, $\mathbf{u}(k)$ [veya $\mathbf{u}(t)$] duruma göre ya giriş vektörü ya da kontrol vektörü olarak yorumlanmalıdır.



(a)



(b)

Şekil 3.1 (a) Durum uzayında gösterilmiş doğrusal zamanla değişmeyen ayrık zamanlı sistemin blok çizimi, (b) durum uzayında gösterilmiş doğrusal zamanla değişmeyen sürekli zamanlı sistemin blok çizimi (Ogata, 1995)

3.4 Ayrık Zamanlı Sistemlerin Durum Uzayı Gösterimi

3.4.1 Ayrık Zamanlı Durum Uzayı Denklemlerinin Kanonik Formları

Ayrık zamanlı sistemlerin durum uzayı gösteriminin elde edilmesi için birçok yöntem mevcuttur. Aşağıdaki denklemlerle tanımlanan ayrık zamanlı sistemi ele alalım

$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_n y(k-n) \\ = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n) \end{aligned} \quad (3.13)$$

burada $u(k)$ ve $y(k)$ sırasıyla k -ıncı örnekleme anındaki sistemin girişi ve çıkışıdır. Dikkat edilmelidir ki, a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ve b_j ($j = 1, 2, \dots, n$)'nin katsayılarının bazıları sıfır olabilir.

(3.13), darbe transfer fonksiyonu biçimi cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (3.14)$$

veya

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \quad (3.15)$$

(3.13), (3.14) veya (3.15) ile tanımlanan ayrık zamanlı sistemin durum uzayı gösterimini elde etmenin birçok yolu mevcuttur. Bu çalışmada aşağıdaki dört farklı durum uzayı gösterimi gösterilmiş olacaktır

1. kontroledilebilir kanonik formu;
2. gözlemlenebilir kanonik formu;
3. köşegen kanonik formu;
4. Jordan kanonik formu

Kontroledilebilir kanonik formu doğrudan programlama yöntemiyle elde edilebilir. Gözlemlenebilir kanonik formu döngülü programlama yöntemiyle elde edilebilir. Köşegen ve Jordan kanonik formları kısmi kesirlere ayırma yöntemiyle elde edilebilir.

Kontrol edilebilir kanonik formu

(3.13), (3.14) veya (3.15) ile verilen ayrık zamanlı sistemin durum uzayı gösterimi aşağıdaki denklemlerle verilen formda gösterilebilir

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.16)$$

$$y(k) = [b_n - a_n b_0 \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \quad \cdots \quad b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (3.17)$$

(3.16) ve (3.17) sırasıyla sistemin durum ve çıkış denklemleridir. (3.16) ve (3.17) ile verilen durum uzayı gösterimine genellikle *kontrol edilebilir kanonik formu* denir. Dikkat edilmelidir ki, durum değişkenlerinin sırası tersine ifade edilirse, yani aşağıdaki şekilde yeni durum değişkenleri tanımlanırsa

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

(3.16) ve (3.17) aşağıdaki denklemle ifade edilmiş olacaktır:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \\ \hat{x}_3(k+1) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_3(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.19)$$

$$y(k) = [b_1 - a_1 b_0 : b_2 - a_2 b_0 : \dots : b_n - a_n b_0] \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (3.20)$$

(3.19) ve (3.20) denklemleri de kontroledilebilir kanonik formdadır.

Gözlemlenebilir kanonik formu

(3.13), (3.14) veya (3.15) ile verilen ayrık zamanlı sistemin durum uzayı gösterimi aşağıdaki denklemlerle verilen formda gösterilebilir:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.21)$$

$$y(k) = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (3.22)$$

(3.21) ve (3.22) ile verilen durum uzayı gösterimine *gözlemlenebilir kanonik formu* denir. Dikkat edilmelidir ki, (3.21) ile verilmiş olan durum denkleminin $n \times n$ durum matrisi (3.16) ile verilmiş olan durum denkleminin matrisinin evriğidir (transpozesidir).

Dikkat edilmelidir ki, durum değişkenlerinin sırası tersine ifade edilirse, yani aşağıdaki şekilde yeni durum değişkenleri tanımlanırsa

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

(3.21) ve (3.22) aşağıdaki denklemle yazılmış olacaktır

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1}(k+1) \\ \hat{x}_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1}(k) \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ b_n - a_n b_0 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.24)$$

$$y(k) = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1}(k) \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (3.25)$$

(3.24) ve (3.25) de gözlemlenebilir kanonik formdadır.

Köşegen kanonik formu

Eğer (3.13), (3.14) veya (3.15) ile verilmiş olan darbe transfer fonksiyonunun kutuplarının tümü ayırık ise sistemin durum uzayı gösterimi aşağıdaki denklemlerle verilen formda gösterilebilir

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.26)$$

$$y(k) = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (3.27)$$

Burada p_i 'ler ve c_i 'ler, sistemin darbe transfer fonksiyonunun kısmi kesirlere açıldığında elde edilen kutuplar ve bunlara karşılık gelen rezidülerdir.

Jordan kanonik formu.

Eğer (3.13), (3.14) veya (3.15) ile verilmiş olan darbe transfer fonksiyonu $z = p_1$ 'de m adet katlı (tekrarlı) kutupları içeriyorsa ve diğer kutuplar katsız ise sistemin durum uzayı gösterimi aşağıdaki denklemlerle verilen formda gösterilebilir

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_m(k+1) \\ \hline x_{m+1}(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & | & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_1 & 1 & \cdots & 0 & | & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & | & p_{m+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & | & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_m(k) \\ \hline x_{m+1}(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \hline 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.28)$$

$$y(k) = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (3.29)$$

3.4.2 Durum Uzayı Gösterimlerinin Benzersiz Olmaması

Belirli bir darbe transfer fonksiyonlu sistemin durum uzayı gösterimi benzersiz değildir. Yukarıda, belirtilmiş bir darbe transfer fonksiyonlu sistemin farklı durum uzayı gösteriminin mevcut olduğu gösterilmişti. Durum denklemleri birbirleriyle benzerlik dönüşümüyle ilişkilidir. Aşağıdaki denklemlerle tanımlanan sistemi ele alalım

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \quad (3.30)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}u(k) \quad (3.31)$$

Yeni $\hat{\mathbf{x}}(k)$ durum vektörü aşağıdaki gibi tanımlansın

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}(k) \quad (3.32)$$

burada \mathbf{P} tekil olmayan bir matristir. Dikkat edilmelidir ki, $\mathbf{x}(k)$ ve $\hat{\mathbf{x}}(k)$ n -boyutlu vektörler olduğundan bu vektörler birbirleriyle tekil olmayan bir matrisle ilişkilidir.

Daha sonra (3.32), (3.30)'da yerine konulursa aşağıdaki denklem elde edilmiş olacaktır

$$\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}u(k) \quad (3.33)$$

(3.33)' nin her tarafının \mathbf{P}^{-1} ile çarpılması aşağıdaki denklemi vermiş olacaktır

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (3.34)$$

Aşağıdaki denklemler şöyle tanımlansın

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P} = \hat{\mathbf{G}}, \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}} \quad (3.35)$$

O zaman (3.34) aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{H}}\mathbf{u}(k) \quad (3.36)$$

Aynı şekilde (3.32)'in (3.31)'ye konulması şunu vermiş olacaktır

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (3.37)$$

Aşağıdaki denklemler şöyle tanımlansın

$$\mathbf{C}\mathbf{P} = \hat{\mathbf{C}}, \quad \mathbf{D} = \hat{\mathbf{D}} \quad (3.38)$$

O zaman (3.37) denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$\mathbf{y}(k) = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{u}(k) \quad (3.39)$$

Böylece, (3.30) ve (3.31) denklemleri ile verilmiş olan durum uzayı gösterimi

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

(3.36) ve (3.39) denklemleri ile verilen durum uzayı gösterimine eşit olduğu gösterilmiş olur,

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{H}}\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{u}(k)$$

$\mathbf{x}(k)$ ve $\hat{\mathbf{x}}(k)$ durum vektörleri birbirleriyle (3.32) ile ilişkilidir.

\mathbf{P} matrisi herhangi bir $n \times n$ mertebesinden tekil olmayan bir matris olabilir. Dolayısıyla herhangi bir verilen sistemin sonsuz çok sayıda durum uzayı gösterimi vardır.

3.5 Ayırık Durum Uzayı Denklemlerinin Çözümü

Bu bölümde aşağıdaki denklemlerle verilen doğrusal zamanla değişmeyen ayırık zamanlı durum denkleminin iki çözümü gösterilecektir.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (3.40)$$

Bunların birincisi tekrarlanan işlem (iterasyon), ikincisi ise z -dönüşümü yöntemi aracılığıyla sunulacaktır. Daha sonra $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$ ' nin hesaplanmasını sağlayacak olan bir yöntem gösterilecektir.

3.5.1 Doğrusal Zamanla Değişmeyen Ayırık Zamanlı Durum Denkleminin Çözümü

Genel olarak ayırık zamanlı denklemleri çözmek diferansiyel denklemlere nazaran daha kolaydır. Bunun da sebebi şudur. Ayırık zamanlı denklemler tekrarlanan işlem (iterasyon) aracılığıyla kolaylıkla çözülebilmektedir. Tekrarlanan işlem (iterasyon) oldukça basittir ve dijital hesaplamalar yoluyla çözülmeye uygundur.

Aşağıdaki durum ve çıkış denklemlerini ele alalım

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (3.41)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (3.42)$$

k pozitif ve tam sayılı olmak üzere (3.41)' nin çözümü direk olarak tekrarlanma yoluyla aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}\mathbf{u}(0)$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{G}\mathbf{x}(1) + \mathbf{H}\mathbf{u}(1) = \mathbf{G}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{u}(0) + \mathbf{H}\mathbf{u}(1)$$

$$\mathbf{x}(3) = \mathbf{G}\mathbf{x}(2) + \mathbf{H}\mathbf{u}(2) = \mathbf{G}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}^2\mathbf{H}\mathbf{u}(0) + \mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{u}(1) + \mathbf{H}\mathbf{u}(2)$$

⋮

Bu işleme devam edilerek, aşağıdaki denklem elde edilmiş olacaktır

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{G}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-j-1} \mathbf{H} \mathbf{u}(j), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.43)$$

(3.43)' dan $\mathbf{x}(k)$ ' nin iki kısımdan oluştuğu bellidir. Denklemin birinci kısmı $\mathbf{x}(0)$ başlangıç durumunun katkısını, diğer kısmı ise $\mathbf{u}(j)$ girişinin katkısını göstermekte, burada $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$. $\mathbf{y}(k)$ çıkışı kolayca aşağıdaki gibi elde edilir

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{G}^k \mathbf{x}(0) + \mathbf{C} \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-j-1} \mathbf{H} \mathbf{u}(j) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k) \quad (3.44)$$

3.5.2 Durum Geçiş Matrisi

Bir homojen durum denklemi aşağıdaki gibi verilmiş olsun

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G} \mathbf{x}(k) \quad (3.45)$$

Bu denklemin çözümü şöyle yazılabilir

$$\mathbf{x}(k) = \Psi(k) \mathbf{x}(0) \quad (3.46)$$

burada $\Psi(k)$,

$$\Psi(k+1) = \mathbf{G} \Psi(k), \quad \Psi(0) = \mathbf{I} \quad (3.47)$$

koşullarını sağlayan bir $n \times n$ benzersiz (unique) matristir.

Bellidir ki, $\Psi(k)$ aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\Psi(k) = \mathbf{G}^k \quad (3.48)$$

(3.48) denkleminde *durum geçiş matrisi* denir. Aynı zamanda bu denklem *temel* (fundamental) matris olarak ta adlandırılmaktadır. Durum geçiş matrisi, (3.45) ile tanımlanan sistemin serbest hareketleri ile ilgili tüm bilgiyi içermektedir.

(3.43) denklemini, $\Psi(k)$ durum geçiş matrisi cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$\mathbf{x}(k) = \Psi(k)\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Psi(k-j-1)\mathbf{H}\mathbf{u}(j) \quad (3.49)$$

$$= \Psi(k)\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Psi(j)\mathbf{H}\mathbf{u}(k-j-1) \quad (3.50)$$

(3.49) veya (3.50), (3.44)' in yerine konulursa aşağıdaki çıkış denklemi elde edilebilir

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\Psi(k)\mathbf{x}(0) + \mathbf{C} \sum_{j=0}^{k-1} \Psi(k-j-1)\mathbf{H}\mathbf{u}(j) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (3.51)$$

$$= \mathbf{C}\Psi(k)\mathbf{x}(0) + \mathbf{C} \sum_{j=0}^{k-1} \Psi(j)\mathbf{H}\mathbf{u}(k-j-1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (3.52)$$

3.5.3 Ayrık Zamanlı Durum Denkleminin Çözümünde z -Dönüşüm Yaklaşımı

İleride z -dönüşümü aracılığıyla ayrık zamanlı durum denkleminin çözümü gösterilecektir.

(3.41) ile tanımlanan ayrık zamanlı sistemi ele alalım

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (3.53)$$

(3.53) denkleminin her iki tarafının z -dönüşümü alınıp aşağıdaki denklem elde edilebilir

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{G}\mathbf{X}(z) + \mathbf{H}\mathbf{U}(z) \quad (3.54)$$

burada $\mathbf{X}(z) = Z[\mathbf{x}(k)]$ ve $\mathbf{U}(z) = Z[\mathbf{u}(k)]$. Daha sonra

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{G})\mathbf{X}(z) = z\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}\mathbf{U}(z) \quad (3.55)$$

Son denklemin her tarafı $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$ ile çarpılıp aşağıdaki denklem elde edilecektir

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H}\mathbf{U}(z) \quad (3.56)$$

(3.56) denkleminin her iki tarafın z -dönüşümünün alınması aşağıdaki denklemi verir

$$\mathbf{x}(k) = Z^{-1} \left[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} z \right] \mathbf{x}(0) + Z^{-1} \left[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H}\mathbf{U}(z) \right] \quad (3.57)$$

(3.43) denklemi ile (3.57) denklemi karşılaştırıldıktan sonra aşağıdaki denklem elde edilmiş olacaktır

$$\mathbf{G}^k = Z^{-1} \left[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} z \right] \quad (3.58)$$

ve

$$\sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-j-1} \mathbf{H}\mathbf{u}(j) = Z^{-1} \left[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H}\mathbf{U}(z) \right] \quad (3.59)$$

burada $k=1,2,3,\dots$

3.5.4 $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$ 'in Hesaplanması

(3.41) denklemi ile verilen durum denkleminin z -dönüşümü ile çözümü $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$ 'in hesaplanmasını gerektirir. $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$ 'nin hesaplanması basit durumların haricinde vakit gerektiren bir problemdir. $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$ 'nin hesaplanması için hem analitik hem de sayısal yöntemler mevcuttur. Bu bölümde sayısal yöntem sunulacaktır.

Sunulacak olan yöntem $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})$ 'nin ekinin açılmasına dayalı bir yöntemdir. $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})$ 'nin tersi $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})$ 'nin ekinin cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} = \frac{\text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})}{|z\mathbf{I} - \mathbf{G}|} \quad (3.60)$$

Dikkat edilmelidir ki $|z\mathbf{I} - \mathbf{G}|$ determinanı aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n \quad (3.61)$$

$\text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})$ aşağıdaki denklemlerle verilebilir

$$\text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{G}) = \mathbf{I}z^{n-1} + \mathbf{H}_1 z^{n-2} + \mathbf{H}_2 z^{n-3} + \dots + \mathbf{H}_{n-1} \quad (3.62)$$

burada

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \mathbf{G} + a_1 \mathbf{I} \\ \mathbf{H}_2 &= \mathbf{G}\mathbf{H}_1 + a_2 \mathbf{I} \\ &\vdots \\ \mathbf{H}_{n-1} &= \mathbf{G}\mathbf{H}_{n-2} + a_{n-1} \mathbf{I} \\ \mathbf{H}_n &= \mathbf{G}\mathbf{H}_{n-1} + a_n \mathbf{I} = 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

Dikkat edilmelidir ki a_1, a_2, \dots, a_n katsayıları (3.61) denkleminde gözükten katsayılarıdır. Bunların bulunması matrisin izinden de bulunabilir (Ogata, 1995)

$$\begin{aligned} a_1 &= -\text{tr}\mathbf{G} \\ a_2 &= -\frac{1}{2} \text{tr}\mathbf{G}\mathbf{H}_1 \\ a_3 &= -\frac{1}{3} \text{tr}\mathbf{G}\mathbf{H}_2 \\ &\vdots \\ a_n &= -\frac{1}{n} \text{tr}\mathbf{G}\mathbf{H}_{n-1} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Yüksek mertebeden verilen matrisler için ($n > 3$) $|z\mathbf{I} - \mathbf{G}|$ determinantının (3.61) ile verilen biçime genişlemesi vakit gerektiren bir hesaplama haline dönüşebilir. Bu durumlarda a_i ' lerin (3.64) denklemini kullanarak hesaplanması yararlı olduğu tecrübeye kanıtlanmıştır. Çünkü $a_1, \mathbf{H}_1, a_2, \mathbf{H}_2, \dots, a_{n-1}, \mathbf{H}_{n-1}$ ' ler ard arda kolayca hesaplanabilmektedir.

Böylece, $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$ bulunmasını sağlayan algoritma elde edilmiş oldu: (3.63) denklemi (3.62) denkleminin yerine konulup sonuçta oluşan denklem (3.60)'da yerine konularak $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$ nin hesaplanması mümkün olmaktadır.

3.6 Darbe Transfer Fonksiyonu

Tek girişli ve tek çıkışlı ayrık zamanlı sistemin modellenmesi darbe transfer fonksiyonu aracılığıyla yapılabilir. Darbe transfer fonksiyonu kavramının çok girişli ve çok çıkışlı ayrık zamanlı sistemlere uygulanması darbe transfer fonksiyonu matrisini verir. Bu bölümde durum uzayı gösterimi ile darbe transfer fonksiyonu matrisi gösteriminin arasındaki bağlantı incelenecektir.

3.6.1 Darbe Transfer Fonksiyonu Matrisi

r girişli ve m çıkışlı n . mertebeden doğrusal zamanla değişmeyen ayrık zamanlı sistemin durum uzayı gösterimi aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (3.65)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (3.66)$$

burada $\mathbf{x}(k)$

$\mathbf{x}(k) = n$ – vektör

$\mathbf{y}(k) = m$ – vektör

$\mathbf{u}(k) = r$ – vektör

$\mathbf{G} = n \times n$ mertebeden matris

$\mathbf{H} = n \times r$ mertebeden matris

$\mathbf{C} = m \times n$ mertebeden matris

$\mathbf{D} = m \times r$ mertebeden matris

(3.65) ile (3.66) denklemlerinin z -dönüşümün alınması aşağıdaki denklemi vermiş olacaktır

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{G}\mathbf{X}(z) + \mathbf{H}\mathbf{U}(z) \quad (3.67)$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\mathbf{U}(z) \quad (3.68)$$

Dikkat edilmelidir ki darbe transfer fonksiyonunun tanımı $\mathbf{x}(0)$ sıfır başlangıç durumunun olduğu varsayımını gerektirmektedir. Darbe transfer fonksiyonunu elde etmek için aşağıda $\mathbf{x}(0)$ başlangıç durumunun sıfır olduğu varsayılacaktır. Bunu dikkate alarak (3.67) ile (3.68) aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{G})\mathbf{X}(z) = \mathbf{H}\mathbf{U}(z) \quad (3.69)$$

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H}\mathbf{U}(z) \quad (3.70)$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\mathbf{U}(z) = [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(z) = \mathbf{F}(z)\mathbf{U}(z) \quad (3.71)$$

burada

$$\mathbf{F}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{D} \quad (3.72)$$

$\mathbf{F}(z)$, $m \times n$ bir matristir. Bu matrise *darbe transfer fonksiyonu matrisi* denir. $\mathbf{F}(z)$ matrisi verilmiş olan ayrık zamanlı sistemin giriş-çıkış dinamiğini tanımlamaktadır.

(3.60) denklemini dikkate alarak $\mathbf{F}(z)$ darbe transfer fonksiyonu matrisi aşağıdaki denklemlerle verilebilir

$$\mathbf{F}(z) = \frac{\mathbf{C} \operatorname{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})\mathbf{H}}{|z\mathbf{I} - \mathbf{G}|} + \mathbf{D} \quad (3.73)$$

Dikkat edilirse $|z\mathbf{I} - \mathbf{G}|$, sistemin karakteristik denklemini verir, yani

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = 0 \quad (3.74)$$

ya da (3-61) denklemini dikkate alınırsa

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0 \quad (3.75)$$

aynı ifadeyi verir. O halde darbe transfer fonksiyonunun kutupları sistemin özdeğerleridir.

3.6.2 Benzerlik Dönüşümü

Yukarıda (3.65) ve (3.66) ile tanımlanan sistemin darbe transfer fonksiyonu matrisinin (3.72) ile verilebildiği gösterilmişti. Bunun dışında Bölüm 3.4’de, verilmiş sistemin farklı durum uzayı gösterimlerinin mevcut olduğu ve bu gösterimlerin birbirleriyle benzerlik dönüşümüyle ilişkili olduğu söylenmişti. Şimdi \mathbf{P} benzerlik dönüşüm matrisini kullanılarak yeni $\hat{\mathbf{x}}(k)$ durum vektörü aşağıdaki gibi tanımlansın

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}(k) \quad (3.76)$$

burada \mathbf{P} tekil olmayan $n \times n$ mertebeden dönüşüm matrisidir. Bölüm 3.4.2’ de verilen adımlar izlenerek aşağıdaki denklemler elde edilmiş olacaktır

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{H}}\mathbf{u}(k) \quad (3.77)$$

$$\mathbf{y}(k) = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{u}(k) \quad (3.78)$$

$\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ ve $\hat{\mathbf{G}}, \hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}$ birbirleriyle aşağıdaki benzerlik denklemlerle ilişkilidir

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P} = \hat{\mathbf{G}}, \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}} \quad (3.79)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{P} = \hat{\mathbf{C}}, \quad \mathbf{D} = \hat{\mathbf{D}} \quad (3.80)$$

(3.77) ile (3.78) tanımlanan sistemin $\hat{\mathbf{F}}(z)$ darbe transfer fonksiyonu matrisi aşağıdaki şekilde verilir

$$\hat{\mathbf{F}}(z) = \hat{\mathbf{C}}(z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}})^{-1}\hat{\mathbf{H}} + \hat{\mathbf{D}}$$

Şimdi (3.79) ve (3.80) denklemleri yardımıyla $\hat{\mathbf{F}}(z)$ darbe transfer fonksiyonu matrisinin benzerlik dönüşümünden etkilenmediği, yani $\hat{\mathbf{F}}(z)$ ’in $\mathbf{F}(z)$ eşit olduğu gösterilmeye çalışılacaktır

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{F}}(z) &= \hat{\mathbf{C}}(z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}})^{-1} \hat{\mathbf{H}} + \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{C}\mathbf{P}(z\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{D} \\
&= \mathbf{C}\mathbf{P}(z\mathbf{P} - \mathbf{G}\mathbf{P})^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{D} = \mathbf{C}(z\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{G}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1})^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{D} \\
&= \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{D} = \mathbf{F}(z)
\end{aligned} \tag{3.81}$$

(3.81)'den görüldüğü gibi $\hat{\mathbf{F}}(z)$ darbe transfer fonksiyonu matrisi gerçekte benzerlik dönüşümünden etkilenmeyen bir matristir. Başka bir deyişle darbe transfer fonksiyonu matrisi sistemin farklı gösterimini elde etmek amacıyla seçilen $\mathbf{x}(k)$ özel durum vektöründen etkilenmez.

Şimdi $|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = 0$ karakteristik denkleminin de benzerlik dönüşümünden etkilenmediği gösterilmeye çalışılsın

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = |\mathbf{P}^{-1}||z\mathbf{I} - \mathbf{G}||\mathbf{P}| = |z\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P}| = |z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}}| \tag{3.82}$$

(3.82)'den görüldüğü gibi $|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = 0$ karakteristik denklemi gerçekte benzerlik dönüşümünden etkilenmeyen bir denklemdir. Sistem ne tür ya da ne formda durum uzayında temsil edilirse edilsin özdeğerleri değişmez.

3.7 Sürekli Zamanlı Durum Uzayı Denkleminin Ayrıklaştırılması

Sürekli zamanlı sistemlerin dijital kontrolü yapılırken sürekli zamanlı durum uzayı denkleminin ayrık zamanlı durum uzayı denklemine dönüştürülmesi gerekmektedir. Böyle dönüşüm sürekli zamanlı sistemde hayali örnekleyici ve hayali tutma cihazını uygulama yoluyla yapılabilir. Ayrıklaştırmanın ortaya getirdiği hatanın azaltılması problemi sistemin zaman sabitine nazaran yeterli derecede küçük örnekleme zamanını uygulama yoluyla çözülebilir.

3.7.1 Sürekli Zamanlı Durum Denklemi Çözümünün Gözden Geçirilmesi

İlk olarak e^{At} matris üstelini gözden geçirelim. Matris üsteli aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$e^{At} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} \tag{3.83}$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}$ sonsuz dizinin yakınsak olduğu dikkate alınarak, bu dizi aşağıdaki şekilde terimlere ayrılabilir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \frac{\mathbf{A}^3 t^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^k t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots \\ &= \mathbf{A} \left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots \right] = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}t} \\ &= \left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots \right] \mathbf{A} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.84)$$

matris üstelinin aşağıdaki özelliği vardır

$$e^{\mathbf{A}(t+s)} = e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{A}s} \quad (3.85)$$

Eğer $s = -t$, o zaman

$$e^{\mathbf{A}t} e^{-\mathbf{A}t} = e^{-\mathbf{A}t} e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}(t-t)} = \mathbf{I} \quad (3.86)$$

Böylece, $e^{\mathbf{A}t}$ 'nin tersi $e^{-\mathbf{A}t}$ 'dir. $e^{\mathbf{A}t}$ 'nin tersi her zaman bulunabilir olduğundan dolayı $e^{\mathbf{A}t}$ tekil değildir.

Dikkat edilmesi gerekir ki,

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{B}t}, \text{ eğer } \mathbf{AB} = \mathbf{BA} \quad (3.87)$$

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} \neq e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{B}t}, \text{ eğer } \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

Yukarıdaki denklemler ve tanımlar gözden geçirildikten sonra sürekli zamanlı durum denkleminin çözümü bulmaya çalışılabilir. Sistem aşağıdaki denklemlerle verilmiş olsun

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (3.88)$$

burada

\mathbf{x} = durum vektörü (n – vektör)

\mathbf{u} = giriş vektörü (r – vektör)

$\mathbf{A} = n \times n$ mertebeden sabit matris

$\mathbf{B} = n \times r$ mertebeden sabit matris

(3.88) denklemini aşağıdaki şekilde yazılıp

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3.89)$$

ve yeni denklem soldan ve sağdan $e^{-\mathbf{A}t}$ 'ya çarpıldıktan sonra aşağıdaki denklem elde edilmiş olacaktır

$$e^{-\mathbf{A}t}[\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)] = \frac{d}{dt}[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3.90)$$

(3.90) denklemin 0 ve t aralığında integrali alınırsa aşağıdaki denklem elde edilmiş olacaktır

$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (3.91)$$

son denklem $\mathbf{x}(t)$ cinsinden çözümlerse aşağıdaki denklem elde edilmiş olacaktır

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (3.92)$$

(3.92) denklemini (3.88) denkleminin çözümüdür.

Dikkat edilmelidir ki, eğer durumlar 0'dan değil $\mathbf{x}(t_0)$ 'dan başlıyorsa çözüm aşağıdaki gibi verilmiş olacaktır

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (3-92(a))$$

3.7.2 Sürekli Zamanlı Durum Uzayı Denklemine Ayrıklaştırılması

İleride sürekli zamanlı durum uzayı denklemini ayrıklaştırmanın yolu gösterilecektir. $\mathbf{u}(kT)$ giriş vektörünün $t = kT$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) eşit örnekleme anlarında değiştiği varsayalım.

Sürekli zamanlı durum ve çıkış denklemleri aşağıdaki gibi tanımlansın

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (3.93)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \quad (3.94)$$

Konunun daha açık bir şekilde anlatılması için k ve $k+1$ 'nin yerine kT ve $(k+1)T$ işaretleri kullanılacaktır. (3.93)'nin ayrık zamanlı durum ve çıkış denklemleri aşağıdaki şekilde yazılmış olacaktır

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}(T)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}(T)\mathbf{u}(kT) \quad (3.95)$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{Cx}(kT) + \mathbf{Du}(kT) \quad (3.96)$$

$\mathbf{u}(T)$ çıkışının örnekleme sıfırncı mertebeden tutucudan geçirildiği kabul edilsin

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}(k+1)T} \mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}(k+1)T} \int_0^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{Bu}(\tau) d\tau \quad (3.97)$$

$$\mathbf{x}(kT) = e^{\mathbf{A}kT} \mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}kT} \int_0^{kT} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{Bu}(\tau) d\tau \quad (3.98)$$

(3.98) eşitliği $e^{-\mathbf{A}t}$ ile çarpılıp ve elde edilen denklem (3.97)'den çıkarılırsa aşağıdaki denklem elde edilmiş olacaktır

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + e^{\mathbf{A}(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{Bu}(\tau) d\tau$$

$kT \leq t < (k+1)T$ aralığında $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT) = \mathbf{u}(\tau)$ 'dir.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}((k+1)T) &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + e^{\mathbf{A}T} \int_0^T e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{Bu}(kT) dt \\ &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + \int_0^T e^{\mathbf{A}\lambda} \mathbf{Bu}(kT) d\lambda \end{aligned} \quad (3.99)$$

burada $\lambda = T - t$

$$\mathbf{G}(T) = e^{\mathbf{A}T} \quad (3.100)$$

$$\mathbf{H}(T) = \left(\int_0^T e^{A\lambda} d\lambda \right) \mathbf{B} \quad (3.101)$$

daha sonra (3.99) denklemini aşağıdaki şekilde yazılmış olacaktır

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}(T)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}(T)\mathbf{u}(kT) \quad (3.102)$$

(3.102) denklemini, yukarıda verilmiş olan (3.95) denklemdir. Böylece (3.100) ve (3.101) arzu edilen $\mathbf{G}(T)$ ve $\mathbf{H}(T)$ matrislerini vermektedir. $\mathbf{G}(T)$ ve $\mathbf{H}(T)$ matrisleri T örnekleme zamanına bağlı olan matrislerdir. (3.94) denklemine bakılarak çıkış denklemi aşağıdaki gibi yazılır

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT) \quad (3.103)$$

Burada \mathbf{C} ve \mathbf{D} matrisleri T örnekleme zamanına bağlı olmayan sabit matrislerdir.

Eğer \mathbf{A} matrisi tekil değilse, (3.101) ile verilmiş olan $\mathbf{H}(T)$ basitleştirilerek aşağıdaki denklemler yazılabilir

$$\mathbf{H}(T) = \left(\int_0^T e^{A\lambda} d\lambda \right) \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{e}^{AT} - \mathbf{I})\mathbf{B} = (\mathbf{e}^{AT} - \mathbf{I})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (3.104)$$

Gösterilmiş olan açıklamaların sonuçlanması gerekirse, aşağıdaki yorumlar verilebilir

Yorumlar

1. Durum uzayı yaklaşımında $\mathbf{u}(kT)$ giriş vektörünün ard arda gelen iki örnek arasında değişmediği varsayılırsa sistemin ayrık zamanlı modeli sürekli zamanlı durum denklemini bir örnekleme zamanı içerisinde integral ederek kolayca elde edilebilir. (3.95) ile verilen ayrık zamanlı durum uzayı denklemine (3.93) ile verilen sürekli zamanlı durum denkleminin *ZOH eşdeğeri* denir;

2. $T \ll 1$ ise $\mathbf{G}(T) \div \mathbf{G}(0) = \mathbf{e}^{A0} = \mathbf{I}$. Başka bir deyişle eğer T örnekleme zamanı çok küçük ise $\mathbf{G}(T)$ birim matrisine yaklaşır.

3.7.3 Sürekli Zamanlı Durum Denklemine MATLAB Programı ile Ayrıklaştırılması

MATLAB programının

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (3.105)$$

olarak tanımlanan sürekli zamanlı durum denkleminin

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Gx}(k) + \mathbf{Hu}(k) \quad (3.106)$$

ile verilen ayrık zamanlı denkleme ayrıklaştırılmasını gerçekleştiren uygun komutu vardır. Bu komutun yardımıyla sürekli zamanlı durum uzayı denkleminin ayrıklaştırılması kolayca yapılabilmektedir. Bunun yapılması için sistemin sürekli zamanlı durum denkleminin yanı sıra T örnekleme zamanının belirlenip girilmesi gerekmektedir. MATLAB programının söz konusu komutu aşağıda verilmiştir

$$[\mathbf{G}, \mathbf{H}] = \text{c2d}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, T) \quad (3.107)$$

burada T , örnekleme zamanını ifade etmektedir.

İlerleyen bölümlerde hesaplamalar yapılırken sürekli zamanlı durum denkleminin ayrıklaştırılmasına ihtiyaç duyulduğunda söz konusu komuttan yararlanılacaktır.

3.7.4 Cayley-Hamilton Teoremi

Ayrık zamanlı sistemler teorisinde $\exp A$ ve $\ln A$ türdeki fonksiyonlar yaygın uygulanır. Burada ki A , belli bir matristir, dolayısıyla, $\exp A$ ve $\ln A$ gibi fonksiyonlar, matris fonksiyonlarıdır. Matris fonksiyonlarının örneği olarak matris eksponensiyeli ve matris logaritması düşünülebilir. Söz konusu fonksiyonların hesaplanması Cayley-Hamilton teoremi aracılığıyla yapılabilir.

$\Delta(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$, \mathbf{A} kare matrisinin karakteristik polinomu ise, $\Delta(\mathbf{A}) = 0$ ya da $\Delta(\mathbf{A})$ 'nın sıfıra eşit olduğu anlamına gelir. Bu ifadeyi daha açık söylemek gerekirse, \mathbf{A} matrisi kendi karakteristik denklemini gerçekler

$$\Delta(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_1\mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_n\mathbf{I} = 0 \quad (3.108)$$

3.8 Kontrol edilebilirlik ve gözlemlenebilirlik kavramları

Kontrol edilebilirlik, belirli bir başlangıç durumundaki bir sistemin istenen başka bir duruma geçirilmesinin mümkün olup olmadığıyla ilgilidir: kısıtlandırılmamış bir kontrol vektörü yoluyla sistemin herhangi bir başlangıç durumundan örnekleme zamanının sonlu sayısında herhangi bir diğer duruma aktarılması mümkün ise bu sistemin kontrol edilebilir olduğu söylenir. Dolayısıyla, kontrol edilebilirlik kavramı sistem durumunun bazı keyfi durumlara erişmesinden ziyade bir kontrol vektörünün bulunmasıyla ilgilidir.

Gözlemlenebilirlik, çıkış ve kontrol vektörlerinin örnekleme zamanının sonlu sayısındaki gözlemlerinden bir dinamik sistemin durumunu belirleme problemiyle ilişkilidir. $\mathbf{x}(0)$ durumunda bir sistemde sonlu sayıdaki örnekleme zamanlarında çıkış ve kontrol vektörlerinin gözleminden sistemin bu durumunu belirlemek mümkün oluyorsa sistemin gözlemlenebilir olduğundan bahsedilir.

Kontrol edilebilirlik ve gözlemlenebilirlik kavramları ilk kez R. E. Kalman tarafından ortaya konulmuştu (Kuo, 1999). Bunlar çok değişkenli sistemin optimal kontrolünde önemli kavramlardır. Örneğin, kontrol edilebilirlik ve gözlemlenebilirlik koşulları bir optimal kontrol probleminin tam çözümünün varlığını belirlemektedir.

3.8.1 Kontrol edilebilirlik

Bir sistemde sistemin her bir durum değişkeni, eğer kısıtlandırılmamış $\mathbf{u}(t)$ kontrol vektörü ile, sonlu bir zamanda belirli hedeflere ulaştırılabiliyor ise, *tam kontrol edilebilir* denir (Kuo, 1999). Sezgisel olarak, durum değişkenlerinden herhangi birinin, $\mathbf{u}(t)$ kontrol vektörüne bağımlı olmaması halinde, bu özel durum değişkeninin belirli bir kontrol gücü ile sonlu zamanda istenen bir duruma getirilemeyeceği açıktır. Bu nedenle böyle bir özel durum kontrol edilemez ve böyle bir kontrol edilemez durum bulunduğu sürece, tüm sistem de tam kontrol edilemez, ya da kısaca kontrol edilemez denir.

İlerleyen bölümlerde durum geribeslemesi ile sistem özdeğerlerinin istenilen yerlere yerleştirilebilmesi sorunu, bir sistemin kontrol edilebilirlik koşulu ile yakın ilişkili olduğu gösterilecektir. Dolayısıyla sistemin kontrol edilebilir olduğu koşulları belirlemek önemlidir.

3.8.1.1 Doğrusal Zamanla Değişmeyen Ayrık Zamanlı Kontrol Sisteminin Tam Durum Kontrol edilebilirliği

Aşağıdaki denklemle tanımlanan ayrık zamanlı kontrol sistemi ele alalım

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}u(kT) \quad (3.109)$$

burada

$\mathbf{x}(kT)$ = k - nıncı örnekleme anındaki durum vektörü (n -vektör)

$u(kT)$ = k - nıncı örnekleme anındaki kontrol sinyali

\mathbf{G} = $n \times n$ mertebeden matris

\mathbf{H} = $n \times 1$ mertebeden matris

T = örnekleme zamanı

$u(kT)$ ' nin $kT \leq t < (k+1)T$ aralığı için sabit olduğu varsayalım.

Eğer, $\mathbf{x}(kT)$ durum vektörünü \mathbf{x}_f arzu edilen durumuna n örnekleme zamanında iletecek parça parça sabit bir $u(kT)$ kontrol sinyali mevcut ise, (3.109) denklemi ile verilen ayrık zamanlı kontrol sistemine *tamamen kontrol edilebilir* denir.

Verilmiş olan tanıımı uygulayarak tam durum kontrol edilebilirlik koşulunu türetmeye çalışalım. (3.109) denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(nT) &= \mathbf{G}^n \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{G}^{n-j-1} \mathbf{H}u(jT) \\ &= \mathbf{G}^n \mathbf{x}(0) + \mathbf{G}^{n-1} \mathbf{H}u(0) + \mathbf{G}^{n-2} \mathbf{H}u(T) + \dots + \mathbf{H}u((n-1)T) \end{aligned} \quad (3.110)$$

denklemi olduğundan dolayı aşağıdaki denklemi elde etmiş oluruz

$$\mathbf{x}(nT) - \mathbf{G}^n \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G}\mathbf{H} & \dots & \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u((n-1)T) \\ u((n-2)T) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

\mathbf{H} , $n \times 1$ mertebeden bir matris olduğundan dolayı \mathbf{H} , \mathbf{GH} , ... , $\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}$ matrislerinin herbiri $n \times 1$ mertebeden bir matris veya sütun vektörü olduğu bulunabilir. Eğer aşağıdaki matrisin rankı n ise, veya

$$\text{rank}[\mathbf{H}:\mathbf{GH}:\dots:\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}] = n \quad (3.112)$$

o zaman \mathbf{H} , \mathbf{GH} , ... , $\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}$ n vektörleri n -boyutlu uzayı kapsayabilir.

$[\mathbf{H}:\mathbf{GH}:\dots:\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]$ matrisine genellikle *kontroledilebilirlik matrisi* denir. (Dikkat edilmelidir ki orijinden ulaşılabilen tüm durumlar kontroledilebilirlik matrisinin sütunlarıyla kapsanabilir). Böylece, eğer kontroledilebilirlik matrisinin rankı n ise, o zaman $\mathbf{x}(nT) = \mathbf{x}_f$ isteğe bağlı bir durum için (3.111) denklemini sağlayan $u(0)$, $u(T)$, ... , $u((n-1)T)$ kısıtlandırılmamış kontrol sinyaller dizisi vardır. (3.112) denklemi tam durum kontroledilebilirliğin yeter ve gerek koşuludur.

3.8.2 Gözlemlenebilirlik

Bu bölümde doğrusal zamanla değişmeyen ayrık zamanlı kontrol sistemlerinin gözlemlenebilirliği tartışılacaktır. Aşağıdaki denklemlerle tanımlanan zorlanmamış ayrık zamanlı kontrol sistemini ele alalım

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) \quad (3.113)$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) \quad (3.114)$$

$\mathbf{x}(kT)$ = k - nıncı örnekleme anındaki durum vektörü (n -vektör)

$\mathbf{y}(kT)$ = k - nıncı örnekleme anındaki çıkış vektörü (m -vektör)

\mathbf{G} = $n \times n$ mertebeden matris

\mathbf{C} = $m \times n$ mertebeden matris

T = örnekleme zamanı

Eğer sistemin her $\mathbf{y}(kT)$ kontrol vektörünün örnekleme zamanının sonlu sayısındaki gözlemlinden bir $\mathbf{x}(0)$ başlangıç durumu belirlenebiliyorsa sisteme *tam gözlemlenebilir* denir. Dolayısıyla, eğer bir durumun her geçişi nihayetinde çıkış vektörünün her elemanını etkileyebiliyorsa sistem tam gözlemlenebilirdir.

Gözlemlenebilirlik kavramı ölçülemeyen durum değişkenlerini yeniden yapılandırma (reconstructing) probleminin çözümünde faydalıdır. Kutup yerleştirme yöntemiyle tasarlanan durum geri beslemeli kontrol sistemlerinin ağırlıklı durum değişkenlerinin geri beslemesini gerektireceği ileride görülmüş olacaktır. Bununla birlikte, tecrübeye durum geri beslemeli kontrol sistemlerinde karşılaşılan güçlük durum değişkenlerinden bazılarının doğrudan ölçüm için erişilebilir olmamasıdır. Bu durumda, geri beslemeli kontrol sinyallerinin yapılandırılması (construct) amacıyla ölçülemeyen durum değişkenlerini kestirmek zorunlu hale gelmektedir. Gözlemlenebilirlik kavramının durum gözlemleyicilerinin tasarımında baskın rol oynadığı görülecektir.

Zorlanmamış sistemin ele alınmasının nedeni şudur. Eğer sistem aşağıdaki denklemlerle tanımlanıyorsa

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}\mathbf{u}(kT) \quad (3.115)$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT) \quad (3.116)$$

o zaman

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{G}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-j-1} \mathbf{H}\mathbf{u}(jT) \quad (3.117)$$

ve

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{G}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{G}^{k-j-1} \mathbf{H}\mathbf{u}(jT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT) \quad (3.118)$$

\mathbf{G} , \mathbf{H} , \mathbf{C} ile \mathbf{D} matrisleri ve $\mathbf{u}(kT)$ kontrol vektörü bilinen olduğundan dolayı (3.118) denkleminin sağındaki ikinci ve üçüncü terimler bilinen niceliklerdir. Bundan dolayı bunlar $\mathbf{y}(kT)$ çıkış vektörünün gözlemlenen değerinden çıkarılabilir. Bu nedenle tam gözlemlenebilirliğin gerek ve yeter şartının incelenmesi için (3.113) ve (3.114) denklemleriyle tanımlanan sistemin ele alınması yeterlidir.

$\mathbf{x}(0)$ başlangıç durumu bir kez kontrol vektörünün gözleminden belirlenebiliyorsa $\mathbf{x}(kT)$ durum vektörü de $u(0)$, $u(T)$, ... , $u((k-1)T)$ kontrol sinyallerinin bilinen olduğundan dolayı belirlenebiliyordur.

3.8.2.1 Ayrık Zamanlı Sistemlerin Tam Gözlemlenebilirliği

(3.113) ve (3.114) denklemleriyle tanımlanan sistemi ele alalım. Eğer sistemin belirli $\mathbf{y}(kT)$ çıkışının örnekleme zamanının sonlu sayısındaki gözleminden bir $\mathbf{x}(0)$ başlangıç durum vektörü belirlenebiliyorsa sisteme *tam gözlemlenebilir* denir. İleride (3.113) ve (3.114) denklemleriyle tanımlanan sistemin tam gözlemlenebilirlik şartı türetilmeye çalışılacaktır. (3.113) denkleminin çözümü

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{G}^k \mathbf{x}(0) \quad (3.119)$$

olduğundan dolayı sistemin giriş vektörü aşağıdaki şekilde elde edilecektir

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{G}^k \mathbf{x}(0) \quad (3.120)$$

Tam gözlemlenebilirlik kavramı $\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(T), \mathbf{y}(2T), \dots$, çıkış vektöründen $\mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0), \dots, \mathbf{x}_n(0)$ başlangıç durumlarının belirlenebileceği anlamına gelmektedir. n bilinmeyen belirlenmesi için $\mathbf{y}(kT)$ çıkış vektörünün sadece n değerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle $\mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0), \dots, \mathbf{x}_n(0)$ başlangıç durumların belirlenmesi için $\mathbf{y}(kT)$ çıkış vektörünün ilk n değeri ya da $\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(T), \mathbf{y}((n-1)T)$ kullanılabilir.

Aşağıda verilen tam gözlemlenebilir sistemin çıkış vektörleri için $\mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0), \dots, \mathbf{x}_n(0)$ başlangıç durumlarının belirlenebilmesi gerekiyor

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(0) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(0) \\ \mathbf{y}(T) &= \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{x}(0) \\ &\vdots \\ \mathbf{y}((n-1)T) &= \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{x}(0) \end{aligned} \quad (3.121)$$

$\mathbf{y}(kT)$ çıkış vektörünün m vektör olduğu dikkate alınarak yukarıda gösterilen n eş zamanlı denklemler, herbiri $\mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0), \dots, \mathbf{x}_n(0)$ başlangıç durumları içeren nm denklemleri sağlar. Bu nm denklemlerden yegane $\mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0), \dots, \mathbf{x}_n(0)$ çözümler kümesini elde etmemiz için bunların arasından n doğrusal bağımsız denklemleri tam olarak yazabilmemiz gerekiyor. Bu da aşağıdaki $nm \times n$ matris rankının n olmasını gerektirir.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CG} \\ \vdots \\ \mathbf{CG}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

Matris rankı ve bu matrisin eşlenik transpozésinin rankı aynı olduğu dikkate alınarak sistemin tam gözlemlenebilirlik şartı aşağıdaki şekilde belirlenebilir. (3.113) ve (3.114) denklemleriyle tanımlanan sistemin tam gözlemlenebilirliğin gerek ve yeter şartı aşağıdaki $n \times nm$ matrisinin rankının n olmasıdır.

$$\left[\mathbf{C}^* : \mathbf{G}^* \mathbf{C}^* : \dots : (\mathbf{G}^*)^{n-1} \mathbf{C}^* \right] \quad (3.123)$$

$\left[\mathbf{C}^* : \mathbf{G}^* \mathbf{C}^* : \dots : (\mathbf{G}^*)^{n-1} \mathbf{C}^* \right]$ matrisine *gözlemlenebilirlik matrisi* denir. Dikkat edilmelidir ki (3.123) denklemindeki yıldız işareti matrisin eşlenik transpozésini ifade eder.

3.9 Dualite Prensibi

Bu altbölümde kontroledilebilirlik ve gözlemlenebilirlik kavramlarının arasındaki mevcut ilişkinin üzerinden tartışılacaktır. S_1 sisteminin aşağıdaki denklemlerle tanımlandığı düşünölsün

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}\mathbf{u}(kT) \quad (3.124)$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) \quad (3.125)$$

burada

$\mathbf{x}(kT)$ = k ' nıncı örnekleme anındaki durum vektörü (n – vektör)

$\mathbf{u}(kT)$ = k ' nıncı örnekleme anındaki kontrol vektörü (r – vektör)

$\mathbf{y}(kT)$ = k ' nıncı örnekleme anındaki çıkış vektörü (m – vektör)

\mathbf{G} = $n \times n$ mertebeden matris

\mathbf{H} = $n \times r$ mertebeden matris

\mathbf{C} = $m \times n$ mertebeden matris

S_2 sistemi olarak adlandırılan S_1 sisteminin ikili karşılığı düşünölsün. S_2 sistemi aşğıdaki denklemlerle tanımlansın

$$\hat{\mathbf{x}}((k+1)T) = \mathbf{G}^* \hat{\mathbf{x}}(kT) + \mathbf{C}^* \hat{\mathbf{u}}(kT) \quad (3.126)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(kT) = \mathbf{H}^* \hat{\mathbf{x}}(kT) \quad (3.127)$$

burada

$\hat{\mathbf{x}}(kT)$ = k ' nıncı örnekleme anındaki durum vektörü (n – vektör)

$\hat{\mathbf{u}}(kT)$ = k ' nıncı örnekleme anındaki kontrol vektörü (m – vektör)

$\hat{\mathbf{y}}(kT)$ = k ' nıncı örnekleme anındaki çıkış vektörü (r – vektör)

\mathbf{G}^* = \mathbf{G} ' nin eşlenik transozesi

\mathbf{H}^* = \mathbf{H} ' nin eşlenik transozesi

\mathbf{C}^* = \mathbf{C} ' nin eşlenik transozesi

İleride Kalman'a göre *dualite prensibi* olarak adlandırılan kontroledilebilirlik ve gözlemlenebilirlik kavramlarının arasındaki benzerliği incelenecektir.

Dualite prensibi, ancak ve ancak (3.126) ve (3.127) denklemleri ile tanımlanan S_2 sisteminin tam gözlemlenebilir (durum kontroledilebilir) olduğunda (3.124) ve (3.125) denklemleri ile tanımlanan S_1 sisteminin tam durum kontroledilebilir (gözlemlenebilir) olduğunu ifade etmektedir. Bu prensibin doğruluğunu ispat etmek için S_1 ve S_2 sistemleri için sırasıyla tam durum kontroledilebilirlik ile tam gözlemlenebilirliğin gerek ve yeter şartlarını aşğıda yazalım

S_1 sistemi için:

1. Tam durum kontroledilebilirliğin gerek ve yeter şartı şudur

$$\text{rank}[\mathbf{H} : \mathbf{GH} : \dots : \mathbf{G}^{n-1} \mathbf{H}] = n \quad (3.128)$$

2. Tam gözlemlenebilirliğin gerek ve yeter şartı şudur

$$\text{rank}[\mathbf{C}^* : \mathbf{G}^* \mathbf{C}^* : \dots : (\mathbf{G}^*)^{n-1} \mathbf{C}^*] = n \quad (3.129)$$

S_2 sistemi için:

1. Tam durum kontroledilebilirliğin gerek ve yeter şartı şudur

$$\text{rank}\left[\mathbf{C}^* : \mathbf{G}^* \mathbf{C}^* : \dots : (\mathbf{G}^*)^{n-1} \mathbf{C}^*\right] = n \quad (3.130)$$

2. Tam gözlemlenebilirliğin gerek ve yeter şartı şudur

$$\text{rank}\left[\mathbf{H} : \mathbf{G}\mathbf{H} : \dots : \mathbf{G}^{n-1} \mathbf{H}\right] = n \quad (3.131)$$

Yukarıdaki koşullar karşılaştırılınca dualite prensibinin doğruluğunun kolayca görülebildiği anlaşılır.

Görüldüğü üzere tam durum kontroledilebilir olduğunda S_1 sistemi tam gözlemlenebilir S_2 sistemine karşılık gelirken tam gözlemlenebilir olduğunda S_1 sistemi tam durum kontroledilebilir S_2 sistemine karşılık gelir. Söz konusu dualite prensibi kullanılarak belirli bir sistemin gözlemlenebilirliği bu sistemin ikili sisteminin kontroledilebilirliği kontrol edilerek öğrenilebilir.

3.10 Durum Uzayı Analizde Uygulanan Önemli Dönüşümler

Bu bölümde herhangi bir kontroledilebilir sistemin kontroledilebilir kanonik forma dönüştürülebileceği gösterilecektir. Daha sonra bu dönüşümün nasıl hesaplanabildiği sunulacaktır. Elde edilen sonuçlar durum geribeslemeli gözlemleyicilerin tasarımında kullanılacaktır. Tasarlama prosedürü kontroledilebilir kanonik formda olan sistem için türetilen olacaktır.

3.10.1 Durum Uzayı Denkleminin Kanonik Forma Dönüşümü

Ayrık zamanlı durum ve çıkış denklemlerini ede alalım

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (3.132)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (3.133)$$

(3.132) ve (3.133) denklemleriyle verilen sistemin kontroledilebilir kanonik forma dönüştürülmesi aşağıdaki dönüşüm matrisi aracılığıyla yapılabilir

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}\mathbf{W} \quad (3.134)$$

burada

$$\mathbf{M} = [\mathbf{H} : \mathbf{G}\mathbf{H} : \dots : \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}] \quad (3.135)$$

ve

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.136)$$

\mathbf{W} matrisinde gösterilen a_i elemanları karakteristik denklemin katsayılarıdır

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (3.137)$$

Daha sonra

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} &= (\mathbf{M}\mathbf{W})^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{M}\mathbf{W}) = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{M}\mathbf{W} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.138)$$

ve

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

olduğu gösterilmeye çalışılacaktır.

Bunun için yeni $\hat{\mathbf{x}}(k)$ durum vektörü tanımlansın

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(k) \quad (3.140)$$

burada \mathbf{T} dönüşüm matrisi (3.134) denklemiyle verilmiştir.

Sonra (3.140) denkleminin (3.132) ve (3.133) denklemlerinin yerine konulup sonuçta oluşan denklemin \mathbf{T}^{-1} ile çarpılması aşağıdaki denklemi vermiş olacaktır

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}u(k) = \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{H}}u(k) \quad (3.141)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(k) + Du(k) = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{D}u(k) \quad (3.142)$$

burada

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}, \quad \hat{\mathbf{H}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T} \text{ ve } D = \hat{D}$$

veya

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1}(k+1) \\ \hat{x}_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1}(k) \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.143)$$

$$y(k) = [b_n - a_n b_0 \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \quad \cdots \quad b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} + \hat{D}u(k) \quad (3.144)$$

burada

b_k ' lar aşağıdaki darbe transfer fonksiyonunun payında gözükten katsayılardır

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H} + D &= \hat{\mathbf{C}}(z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}})^{-1}\hat{\mathbf{H}} + \hat{D} \\ &= \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_{n-1} z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} \end{aligned} \quad (3.145)$$

burada

$$D = \hat{D} = b_0.$$

(3.143) ve (3.144) denklemleriyle verilen sistem kontroledilebilir kanonik formdadır.

4. AYRIK ZAMANLI KONTROL SISTEMİNİN DURUM UZAYINDA TASARIMI

Bu bölümde kutup yerleştirme tasarımı yöntemi üzerinden tartışılacaktır. Daha sonra konunun devamı olarak durum gözlemleyici tasarımı sunulacaktır. Şuna dikkat edilmelidir ki, kontroledilebilirlik kavramı kutup yerleştirme probleminin çözümlerinin temelidir ve gözlemlenebilirlik kavramı durum gözlemleyicilerinin tasarlanmasında önemli bir rol taşır. Durum gözlemleyicilerle eşleştirilmiş kutup yerleştirmeye dayalı tasarım yöntemi kontrol mühendisliğinde kullanılabilen temel tasarım yöntemlerinden biridir. Sistem tam durum kontrol edilebilir özellikteyse, z -düzlemindeki arzu edilen kapalı çevrim kutupları (veya karakteristik denklemin kökleri) seçilebilecektir ve bu tür kapalı çevrim kutuplarını veren sistem tasarlanabilecektir. Kapalı çevrim kutuplarının z düzlemindeki arzu edilen yerlere yerleştirilmesiyle ilişkili tasarım yaklaşımına *kutup yerleştirme tasarım tekniği* adı verilir; diğer bir deyişle, kutup yerleştirme tasarım tekniğinde tüm durum değişkenleri, kapalı çevrim sisteminin tüm kutupları arzu edilen yerlere yerleştirilecek şekilde geri beslenir. Bununla birlikte, pratik kontrol sistemlerinde tüm durum değişkenlerinin ölçümü mümkün olmayabilir; bu durumda, tüm durum değişkenleri geri besleme için uygun olmayacaktır. Durum geribeslemesine dayalı bir tasarım uygulamak için ölçülemeyen durum değişkenlerini kestirmek zorunlu hale gelmektedir. Bu tür bir kestirim ilerleyen bölümde ayrıntılı şekilde tartışılacak olan durum gözlemleyicilerinin kullanılmasıyla gerçekleştirilebilir.

Kontrol sistemlerinin kutup yerleştirme tasarım prosedürü iki aşamaya ayrılabilir. Birinci aşamada, tüm durum değişkenlerinin geribesleme için uygun olduğu varsayılarak sistem tasarlanır. İkinci aşamada, tasarımı tamamlamak için geribesleme için gereken tüm durum değişkenlerini (veya sadece doğrudan ölçülebilir olmayanları) kestiren bir durum gözlemleyicisi tasarlanır.

4.1 Kutup Yerleştirme

Kutup yerleştirme veya kutup atama tekniği olarak adlandırılan bu tasarım yönteminde tüm durum değişkenlerinin ölçülebilir olduğu ve geri besleme için uygun olduğu varsayılır. Üzerinde durulan sistem tam durum kontroledilebilir bir sistem ise kapalı çevrimli sistemin kutuplarının uygun bir durum geribesleme kazanç matrisi üzerinden durum geribeslemesi vasıtasıyla arzu edilen herhangi bir yere yerleştirilebileceği mümkün olmaktadır.

Mevcut tasarım tekniği, hız, sönüm oranı veya bant genişliği gibi frekans tanım bölgesi kriterlerine dayalı olan arzu edilen kapalı çevrim kutuplarının belirlenmesiyle başlar. Bu kriterler göz önüne alınarak, arzu edilen kapalı çevrim kutuplarının $z = \mu_1, z = \mu_2, \dots, z = \mu_n$ 'de yerleştirileceğine karar verildiği varsayalım. Daha sonra, orijinal sistemin tam durum kontrol edilebilir olması koşuluyla, durum geribeslemesi için uygun bir kazanç matrisi seçilerek sistemi arzu edilen yerlerde kapalı çevrim kutuplarına sahip olmaya zorlamak mümkün olacaktır.

İleride, kontrol sinyalinin skaler olduğu düşünülüp kapalı çevrim kutuplarının z -düzleminde arzu edilen yerlere yerleştirilebilmesinin gerek ve yeter şartın sistemin tam durum kontrol edilebilir olması olduğu kanıtlanacaktır. Daha sonra, gerekli durum geribesleme kazanç matrisini belirleyecek birkaç yöntem tartışılacaktır.

4.1.1 Kutupların İsteğe Bağlı Yerleştirilmesi için Gerek ve Yeter Şart

Şekil 4.1 (a)'da gösterilen açık çevrim kontrol sistemini ele alalım. Sistemin durum denklemi aşağıdaki gibidir

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \quad (4.1)$$

$\mathbf{x}(k)$ = k -nıncı örnekleme anındaki durum vektörü (n -vektör)

$u(k)$ = k -nıncı örnekleme anındaki kontrol sinyali (skaler)

\mathbf{G} = $n \times n$ mertebeden matris

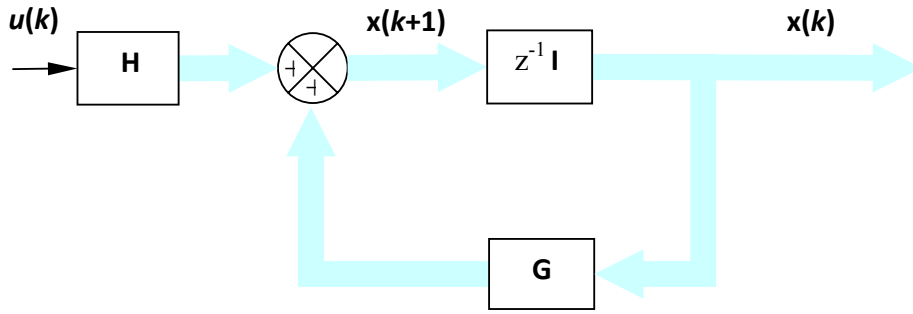
\mathbf{H} = $n \times 1$ mertebeden matris

$u(k)$ kontrol sinyalinin büyüklüğü kısıtlandırılmamış olduğu varsayalım. $u(k)$ kontrol sinyali $u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$ olarak seçildiyse, burada \mathbf{K} durum geribesleme kazanç matrisi, o zaman sistem Şekil 4.1 (b)'de gösterilen kapalı çevrim kontrol sistemi haline dönüşmektedir. Böyle durumda sistemin durum denklemi aşağıdaki gibi yazılmış olacaktır

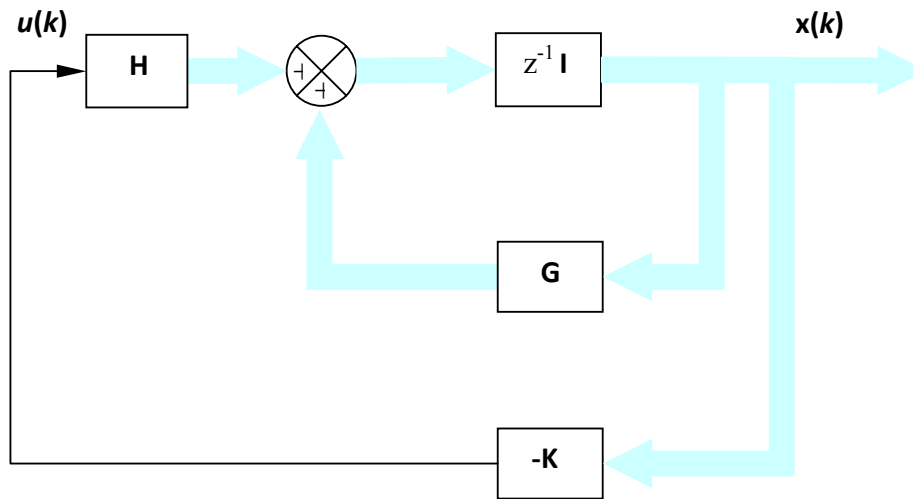
$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) \quad (4.2)$$

Şuna dikkat edilmelidir ki, \mathbf{K} matrisi, $\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}$ 'nin özdeğerleri $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ kapalı çevrim kutupları olacak şekilde seçilmiştir.

Yukarıda verilen tanımları dikkate alarak aşağıda kutupların isteğe bağlı yerleştirilmesi için gerek ve yeter şartın sistemin tam kontroledilebilir olması gerektiği gösterilecektir. İlk olarak gerek şart sağlanacaktır. Bu işlem sistemin kontroledilebilir olmadığı halde ortaya durum geribeslemesi ile kontroledilemeyen $\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}$ 'nin özdeğerleri çıkacağı kanıtlanmasıyla başlanacaktır.



(a)



(b)

Şekil 4.1 (a) Açık çevrim kontrol sistemi,
(b) kapalı çevrim kontrol sistemi ($u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$) (Ogata, 1995)

(4.1) denkleminin verilen sistemin tam kontroledilebilir olmadığı varsayalım. Bu durumda sistemin kontroledilebilirlik matrisinin rankı n 'dan küçüktür, ya da

$$\text{rank}[\mathbf{H}:\mathbf{GH}:\cdots:\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}] = q < n \quad (4.3)$$

Sistemin kontroledilebilir olmaması kontroledilebilirlik matrisinin q doğrusal bağımsız sütun vektörleri içerdiğini ifade etmektedir. Bu q doğrusal bağımsız sütun vektörler $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_q$, olarak tanımlansın. Bir de öyle bir $n-q$ ek $\mathbf{v}_{q+1}, \mathbf{v}_{q+2}, \dots, \mathbf{v}_n$ n -vektörler seçilsin ki, $\mathbf{P} = [\mathbf{f}_1:\mathbf{f}_2:\cdots:\mathbf{f}_q:\mathbf{v}_{q+1}:\mathbf{v}_{q+2}:\cdots:\mathbf{v}_n]$ matrisinin rankı n olsun. \mathbf{P} matrisi, dönüşüm matrisi olarak kullanılıp aşağıdaki eşitlikler şöyle tanımlansın

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P} = \hat{\mathbf{G}}, \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}} \quad (4.4)$$

daha sonra

$$\mathbf{G}\mathbf{P} = \mathbf{P}\hat{\mathbf{G}} \quad (4.5)$$

veya

$$[\mathbf{G}\mathbf{f}_1:\cdots:\mathbf{G}\mathbf{f}_q:\mathbf{G}\mathbf{v}_{q+1}:\cdots:\mathbf{G}\mathbf{v}_n] = [\mathbf{f}_1:\mathbf{f}_2:\cdots:\mathbf{f}_q:\mathbf{v}_{q+1}:\cdots:\mathbf{v}_n]\hat{\mathbf{G}} \quad (4.6)$$

ve

$$\mathbf{H} = \mathbf{P}\hat{\mathbf{H}} = [\mathbf{f}_1:\mathbf{f}_2:\cdots:\mathbf{f}_q:\mathbf{v}_{q+1}:\cdots:\mathbf{v}_n]\hat{\mathbf{H}} \quad (4.7)$$

(4.6) ve (4.7) matrisleri q doğrusal bağımsız $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_q$, sütun vektörlerini içermektedir. Dolayısıyla $\mathbf{G}\mathbf{f}_1, \mathbf{G}\mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{G}\mathbf{f}_q$ matrislerin söz konusu q vektörler cinsinden ifade edilmesi için Cayley-Hamilton teoremi kullanılabilir. Başka bir ifadeyle

$$\begin{aligned} \mathbf{G}\mathbf{f}_1 &= g_{11}\mathbf{f}_1 + g_{21}\mathbf{f}_2 + \cdots + g_{q1}\mathbf{f}_q \\ \mathbf{G}\mathbf{f}_2 &= g_{12}\mathbf{f}_1 + g_{22}\mathbf{f}_2 + \cdots + g_{q2}\mathbf{f}_q \\ &\vdots \\ \mathbf{G}\mathbf{f}_q &= g_{1q}\mathbf{f}_1 + g_{2q}\mathbf{f}_2 + \cdots + g_{qq}\mathbf{f}_q \end{aligned} \quad (4.8)$$

Bu nedenle (4.6) denklemini aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{G}\mathbf{f}_1 \cdots \mathbf{G}\mathbf{f}_q \mathbf{G}\mathbf{v}_{q+1} \cdots \mathbf{G}\mathbf{v}_n] \\
&= [\mathbf{f}_1 \cdots \mathbf{f}_q \mathbf{v}_{q+1} \cdots \mathbf{v}_n] \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{12} & \cdots & \mathcal{G}_{1q} & | & \mathcal{G}_{1q+1} & \mathcal{G}_{1q+2} & \cdots & \mathcal{G}_{1n} \\ \mathcal{G}_{21} & \mathcal{G}_{22} & \cdots & \mathcal{G}_{2q} & | & \mathcal{G}_{2q+1} & \mathcal{G}_{2q+2} & \cdots & \mathcal{G}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathcal{G}_{q1} & \mathcal{G}_{q2} & \cdots & \mathcal{G}_{qq} & | & \mathcal{G}_{qq+1} & \mathcal{G}_{qq+2} & \cdots & \mathcal{G}_{qn} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & | & \mathcal{G}_{q+1q+1} & \mathcal{G}_{q+1q+2} & \cdots & \mathcal{G}_{q+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & | & \mathcal{G}_{nq+1} & \mathcal{G}_{nq+2} & \cdots & \mathcal{G}_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.9)
\end{aligned}$$

(4.9) gösteriminin basitleştirilmesi için \mathbf{G}_{11} , \mathbf{G}_{12} , \mathbf{G}_{21} ve \mathbf{G}_{22} matrisleri aşağıdaki şekilde tanımlansın

$$\begin{bmatrix} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{12} & \cdots & \mathcal{G}_{1q} \\ \mathcal{G}_{21} & \mathcal{G}_{22} & \cdots & \mathcal{G}_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathcal{G}_{q1} & \mathcal{G}_{q2} & \cdots & \mathcal{G}_{qq} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{11} \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{1q+1} & \mathcal{G}_{1q+2} & \cdots & \mathcal{G}_{1n} \\ \mathcal{G}_{2q+1} & \mathcal{G}_{2q+2} & \cdots & \mathcal{G}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathcal{G}_{qq+1} & \mathcal{G}_{qq+2} & \cdots & \mathcal{G}_{qn} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{12} \quad (4.10)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{21} \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{q+1q+1} & \mathcal{G}_{q+1q+2} & \cdots & \mathcal{G}_{q+1n} \\ \mathcal{G}_{q+2q+1} & \mathcal{G}_{q+2q+2} & \cdots & \mathcal{G}_{q+2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathcal{G}_{nq+1} & \mathcal{G}_{nq+2} & \cdots & \mathcal{G}_{nn} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{22}$$

burada $\mathbf{G}_{21}(n-q) \times q$ mertebesinden bir sıfır matrisidir. Daha sonra (4.6) denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$[\mathbf{G}\mathbf{f}_1 \cdots \mathbf{G}\mathbf{f}_q \mathbf{G}\mathbf{v}_{q+1} \cdots \mathbf{G}\mathbf{v}_n] = [\mathbf{f}_1 \cdots \mathbf{f}_q \mathbf{v}_{q+1} \cdots \mathbf{v}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & | & \mathbf{G}_{12} \\ - & | & - \\ 0 & | & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

böylece

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & | & \mathbf{G}_{12} \\ - & | & - \\ 0 & | & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Daha sonra aynı işlem (4.7) denklemi için de uygulansın

$$\mathbf{H} = [\mathbf{f}_1 : \mathbf{f}_2 : \dots : \mathbf{f}_q : \mathbf{v}_{q+1} : \dots : \mathbf{v}_n] \hat{\mathbf{H}} \quad (4.13)$$

(4.3) denkleminde \mathbf{H} vektörü q doğrusal bağımsız $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_q$, sütun vektörleri cinsinden gösterilebilmektedir. Dolayısıyla

$$\mathbf{H} = h_{11}\mathbf{f}_1 + h_{21}\mathbf{f}_2 + \dots + h_{q1}\mathbf{f}_q \quad (4.14)$$

Bu nedenle, (4.13) denklemi aşağıdaki şekilde verilebilir

$$h_{11}\mathbf{f}_1 + h_{21}\mathbf{f}_2 + \dots + h_{q1}\mathbf{f}_q = [\mathbf{f}_1 : \mathbf{f}_2 : \dots : \mathbf{f}_q : \mathbf{v}_{q+1} : \mathbf{v}_{q+1} : \dots : \mathbf{v}_n] \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ \vdots \\ h_{q1} \\ - \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Böylece,

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} \\ - \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

burada

$$\mathbf{H}_{11} = \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ \vdots \\ h_{q1} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Şimdi (4.2) denklemiyle verilmiş olan kapalı çevrim sistemini ele alalım. Bellidir ki, sistemin karakteristik denklemi aşağıdaki gibidir

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{K} + \mathbf{H}\mathbf{K}|=0 \quad (4.17)$$

$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}\mathbf{P}$ olarak tanımlansın. $\hat{\mathbf{K}}$ matrisinin kısımlara ayrılması şunu vermiş olacaktır

$$\hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K}_{11} : \mathbf{K}_{12}] \quad (4.18)$$

burada \mathbf{K}_{11} , $1 \times n$ mertebeden matristir ve \mathbf{K}_{12} , $1 \times (n-q)$ mertebeden matristir. $1 \times n$ mertebeden \mathbf{K} matrisi aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$\mathbf{K} = \hat{\mathbf{K}}\mathbf{P}^{-1} = [\mathbf{K}_{11} : \mathbf{K}_{12}]\mathbf{P}^{-1} \quad (4.19)$$

Daha sonra sistemin karakteristik denklemi aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\begin{aligned} |z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| &= |\mathbf{P}^{-1}| |z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| |\mathbf{P}| \\ &= |z\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{K}\mathbf{P}| \\ &= |z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}} + \hat{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{K}}| \end{aligned} \quad (4.20)$$

(4.12), (4.15) ve (4.18) denklemlerinin (4.20) denkleminin yerine konulması aşağıdaki denklemi vermiş olacaktır

$$\begin{aligned} |z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}} + \hat{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{K}}| &= \left| z \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q & | & 0 \\ - & | & - \\ 0 & | & \mathbf{I}_{n-q} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & | & \mathbf{G}_{12} \\ - & | & - \\ 0 & | & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} \\ - \\ 0 \end{bmatrix} [\mathbf{K}_{11} : \mathbf{K}_{12}] \right| \\ &= \left| \begin{array}{cccc|cc} z\mathbf{I}_q & - & \mathbf{G}_{11} & + & \mathbf{H}_{11} & \mathbf{K}_{11} & | & -\mathbf{G}_{12} & + & \mathbf{H}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ - & - & - & - & - & - & | & - & - & - & - \\ & & & 0 & & & | & z\mathbf{I}_{n-q} & - & \mathbf{G}_{22} & \end{array} \right| \\ &= |z\mathbf{I}_q - \mathbf{G}_{11} + \mathbf{H}_{11}\mathbf{K}_{11}| |z\mathbf{I}_{n-q} - \mathbf{G}_{22}| \end{aligned} \quad (4.21)$$

(4.21) denklemi aşağıdaki şekilde yorumlanabilir. Denklemin son kısmına bakılırsa $\mathbf{K} = \hat{\mathbf{K}}\mathbf{P}^{-1}$ matrisinin \mathbf{G}_{22} 'nin $n-q$ özdeğerleri hariç, $\mathbf{G}_{11} - \mathbf{H}_{11}\mathbf{K}_{11}$ 'nin q özdeğerlerinin üzerinden etkili

olduğu görülebiliyor. Başka bir deyişle söylemek gerekirse, \mathbf{G}_{22} 'nin $n-q$ özdeğerleri hariç olmak üzere $\mathbf{G}_{11} - \mathbf{H}_{11}\mathbf{K}_{11}$ 'nin q özdeğerleri $\mathbf{K} = \hat{\mathbf{K}}\mathbf{P}^{-1}$ matrisinin kontroledebildiği özdeğerlerdir. $n-q$ özdeğerleri ise etkilenmeyen ya da kontroledilemeyen özdeğerlerdir. Bu da söz konusu $n-q$ özdeğerlerin \mathbf{K} matrisinden bağımsız olduğunu ifade etmektedir. Üzerinde durulan bölümün ilk kısmında anlatılanlar hatırlanırsa sistemin tam kontroledilebilir olmadığı halde geribeslemenin kontrol edemeyeceği $\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}$ matrisinin özvektörleri ortaya çıkacağı söylenmişti. Bunu dikkate alarak tam durum kontroledilebilirlik şartının tüm özdeğerlerin kontrol edilebilmesi için gerek şartın olduğu söylenebilir. Dolayısıyla, tam durum kontroledilebilirliğin $\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}$ matrisinin tüm özdeğerleri kontrol edebilmesi için gerek şartın olduğu ispat edilmiş oldu.

Şimdi yeter şart türetilmeye çalışılsın. Bunun için, sistemin tam kontroledilebilir olduğu durumda $\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}$ matrisinin özdeğerlerini istendiği gibi davranmasını, ya da başka bir ifadeyle kapalı çevrim kutuplarını arzu edilen yerlere yerleştirilmesini sağlayan \mathbf{K} matrisinin olacağını ispat etmeye çalışalım.

$\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}$ 'nin arzu edilen özdeğerleri $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ olsun. (4.1) denkleminin verilen sistemin karakteristik denklemi

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \dots + a_n \quad (4.22)$$

\mathbf{T} dönüşüm matrisi (3.134) denkleminde atfen aşağıdaki şekilde verilsin

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}\mathbf{W} \quad (4.23)$$

burada,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{H} : \mathbf{G}\mathbf{H} : \dots : \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}] \quad (4.24)$$

rankı n olan matristir

ve

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

(3.138) ve (3.139) denklemlerine atfen

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} = \hat{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

ve

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Daha sonra

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}\mathbf{T} = [\delta_n \quad \delta_{n-1} \quad \cdots \quad \delta_1] \quad (4.28)$$

o zaman

$$\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\delta_n \quad \delta_{n-1} \quad \cdots \quad \delta_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_n & \delta_{n-1} & \cdots & \delta_1 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$|\mathbf{z}\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}|$ karakteristik denklemi aşağıdaki şekilde yazılır

$$\begin{aligned}
|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}| &= |z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}} + \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{K}}| \\
&= z \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_n & \delta_{n-1} & \cdots & \delta_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} z & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \\ a_n + \delta_n & a_{n-1} + \delta_{n-1} & \cdots & z + a_1 + \delta_1 \end{vmatrix} \\
&= z^n + (a_1 + \delta_1)z^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} + \delta_{n-1})z + a_n + \delta_n = 0
\end{aligned} \tag{4.30}$$

arzu edilen özdeğerleri içeren karakteristik denklem aşağıdaki şekilde verilmiştir

$$\begin{aligned}
(z - \mu_1)(z - \mu_2)\cdots(z - \mu_n) \\
= z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = 0
\end{aligned} \tag{4.31}$$

(4.30) ve (4.31) denklemlerdeki z 'nin eşit mertebeden olan katsayıların eşitleyerek yazılması aşağıdakileri vermiş olacaktır

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= a_1 + \delta_1 \\
\alpha_2 &= a_2 + \delta_2 \\
&\vdots \\
\alpha_n &= a_n + \delta_n
\end{aligned} \tag{4.32}$$

(4.32) dikkate alınarak (4.28) denklemi \mathbf{K} cinsinden aşağıdaki şekilde yazılmış olacaktır

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &= \hat{\mathbf{K}}\mathbf{T}^{-1} \\
&= [\delta_n \quad \delta_{n-1} \quad \cdots \quad \delta_1]\mathbf{T}^{-1} \\
&= [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad \alpha_1 - a_1]\mathbf{T}^{-1}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

burada a_i ve α_i ' ler bilinen katsayılar ve \mathbf{T} bilinen matristir. Böylece, sistemin bilinen katsayıları ve matrisi cinsinden verilen gerekli \mathbf{K} kazanç matrisini belirlemiş olduk. \mathbf{K} matrisinin belirlenmesi kutupların isteğe bağlı yerleştirilebilmesi için yeter şartın sağlandığını başka bir ifadeyle söylemek gerekirse, (4.1) denklemi ile verilen sistemin tam kontroledilebilir olması durumunda kutupların isteğe bağlı yerleştirilmesi için gerekli \mathbf{K} durum geribesleme kazanç matrisinin belirlenmesi mümkün olduğunu göstermektedir. Böylece, kutupların isteğe bağlı yerleştirilebilmesi için gerek ve yeter şartın sistemin tam kontrol edilebilir olması gerektiğini ispatlamış olduk.

4.1.2 Ackermann Formülü

\mathbf{K} geribesleme kazanç matrisini hesaplamının farklı formülü vardır. Bu formüle *Ackermann formülü* denir. Ackermann formülü yararlı kuramsal bir araçtır (Vakkaro, 1995). Bu formülün türetimi (4-1) denklemi ile verilmiş sistemin tam durum kontroledilebilir olduğu varsayılarak yapılır. Daha sonra $u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$ durum geribeslemesi uygulanarak kapalı çevrim kutuplarının $z = \mu_1, z = \mu_2, \dots, z = \mu_n$ 'de yerleştirileceğine karar verildikten sonra Cayley-Hamilton teoreminden yararlanılarak birbirini izleyen hesaplama işlemlerinin ardından sonuç formül elde edilir. Bu formül aşağıdaki şekilde verilir

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] [\mathbf{H} : \mathbf{G}\mathbf{H} : \dots : \mathbf{G}^{n-1} \mathbf{H}]^{-1} \phi(\mathbf{G}) \quad (4.34)$$

burada

$$\phi(\mathbf{G}) = \mathbf{G}^n + \alpha_1 \mathbf{G}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{G} + \alpha_n \mathbf{I} \quad (4.35)$$

$\phi(\mathbf{G})$, hata dinamiğinin arzu edilen karakteristik polinomu

ve

$[\mathbf{H} : \mathbf{G}\mathbf{H} : \dots : \mathbf{G}^{n-1} \mathbf{H}]$, (3.112) denklemiyle verilmiş olan kontroledilebilirlik matrisidir.

4.1.3 En İyi \mathbf{K} Matrisinin Seçilmesi Üzerinde Yorumlar

\mathbf{K} durum geribesleme kazanç matrisi bozucu etkenlerin neden olduğu hatanın yeterli bir hızda sifıra indirileceği şekilde belirlenir. \mathbf{K} matrisinin belirli bir sisteme özgün olmayıp seçilmiş arzu edilen kapalı çevrim kutbuna bağlı olduğuna dikkat edilmelidir. Bilindiği üzere sistemin kapalı çevrim kutbu hata vektörü cevabının hızını belirler. Arzu edilen kapalı çevrim kutuplarının veya arzu edilen karakteristik denklemin seçimi hata vektörü cevabının hızı veya bozucu ve ölçüm gürültüleri duyarlılığından birinin ödün verilmesini gerektirir. Diğer bir ifadeyle, hata cevap hızı artırılırsa bozucu etkenler ve ölçüm gürültülerinin olumsuz etkileri de genellikle artar. Belirli bir sistemde \mathbf{K} durum geribesleme kazanç matrisinin belirlenmesinde birkaç farklı arzu edilen karakteristik denklemlere dayalı çeşitli \mathbf{K} matrislerinin incelenmesi ve en iyi genel sistem performansı veren matrisin seçilmesi makbuldür.

Arzu edilen karakteristik denklem bir kez seçildikten sonra tam durum kontroledilebilir olduğu varsayıldığı (4.1) denklemle tanımlanmış sistemin \mathbf{K} durum geribesleme kazanç matrisini belirlemenin birkaç farklı yöntemi mevcuttur. Bunların üç tanesi aşağıda sıralanıp verilmişti.

4.1.4 \mathbf{K} Durum Geribesleme Kazanç Matrisini Hesaplamanın Farklı Yolları

1. Yukarıda bahsedildiği gibi \mathbf{K} matrisi (4.33) denklemiyle hesaplanabilir

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \hat{\mathbf{K}} \mathbf{T}^{-1} \\ &= [\delta_n \quad \delta_{n-1} \quad \cdots \quad \delta_1] \mathbf{T}^{-1} \\ &= [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad \alpha_1 - a_1] \mathbf{T}^{-1}\end{aligned}\tag{4.36}$$

burada a_i 'ler verilen sistemin $|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$ karakteristik denkleminin katsayılarıdır ve α_i 'ler geri beslemeli kontrol sisteminin arzu edilen karakteristik denkleminin katsayılarıdır, yani

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}| = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = 0\tag{4.37}$$

\mathbf{T} matrisi aşağıdaki gibi verilmiştir

$$\mathbf{T} = \mathbf{MW}\tag{4.38}$$

burada \mathbf{M} ve \mathbf{W} sırasıyla (4.24) ve (4.25) denklemi ile verilmiştir.

2. Arzu edilen \mathbf{K} geribesleme kazanç matrisi Ackermann formülü ile verilebilir

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] [\mathbf{H} : \mathbf{G}\mathbf{H} : \dots : \mathbf{G}^{n-1} \mathbf{H}]^{-1} \phi(\mathbf{G}) \quad (4.39)$$

burada

$$\phi(\mathbf{G}) = \mathbf{G}^n + \alpha_1 \mathbf{G}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{G} + \alpha_n \mathbf{I} \quad (4.40)$$

3. Sistem düşük mertebeden verilmiş ise $\mathbf{K} = [k_1 : k_2 : \dots : k_n]$, $|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| = 0$ karakteristik denklemin yerine konulup sonuçta ortaya çıkacak olan z mertebeden olan katsayılar arzu edilen $z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = 0$ karakteristik denklemin eşit z mertebeden olan katsayılarla eşlenerek bulunabilir. Bu tür direk hesaplama düşük mertebeden verilmiş sistemler için yararlı olabilir.

4.1.5 Referans Girişli Kontrol Sistemleri

Bilindiği gibi, kendi düzeninde denetleyicileri içeren sistemler *regülatör sistemleri* ve *kontrol sistemleri* olmak üzere ikiye ayrılmaktadır (Ogata, 2002). Regülatör sistemleri, referans girişinin sıfır dahil olmak üzere sabit olduğu sistemdir. Kontrol sistemleri, referans girişinin zamanla değiştiği bir sistemdir. Şimdiye kadar regülatör sistemlerinin üzerinden tartışılmıştı. Regülatör sistemi, biraz önce söylendiği gibi referans girişinin sürekli olarak sabit olduğu ve harici bozucuların sıfırdan farklı durumları yarattığı bir sistem olarak düşünülebilir. Sistemin karakteristik denklemi sıfır olmayan durumların orijine yaklaştığı hızı belirlemektedir. Şimdi sistemin referans girişini ya da kumanda girişini içerdiği durumların üzerinden tartışılacaktır. Kontrol sisteminin çıkışı zamanla değişen girişi izlemelidir. Kumanda girişini izlerken sistem tatmin edici sistem performansını (kabuledilebilir tepe zamanı, üstaşım, yerleşme zamanı v.b.) göstermelidir.

Şekil 4.2'de gösterilen sistemi ele alalım. Plant, aşağıdaki şekilde verilen durum ve çıkış denklemleriyle tanımlanır

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \quad (4.41)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (4.42)$$

$u(k)$ kontrol sinyali aşağıdaki şekilde verilir

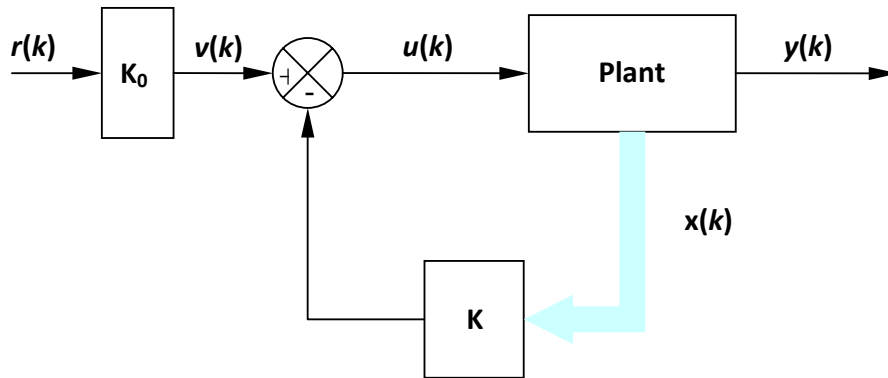
$$u(k) = K_0 r(k) - \mathbf{K} \mathbf{x}(k) \quad (4.43)$$

$u(k)$ 'nin durum denkleminde çıkarılması aşağıdaki denkleme vermiş olur

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}K_0 r(k) \quad (4.44)$$

Sistemin karakteristik denklemi $|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| = 0$ olarak yazılır.

Önceden belirtildiği gibi sistemin tam durum kontroledilebilir olduğu durumda arzu edilen kapalı çevrim kutuplarını veren \mathbf{K} geribesleme kazanç matrisinin belirlenmesi mümkün olabilmektedir.



Şekil 4.2 Durum geribeslemeli kontrol sistemi (Ogata, 1995)

Önemle dikkat edilmesi gerekir ki, durum geribeslemesi, sistemin karakteristik denklemini değiştirebilir. Bununla beraber karakteristik denklemin değişmesi bütün sistemin kalıcı hal kazancının değişmesine neden olur. Dolayısıyla, sistemde ayarlanabilen bir K_0 kazancının olması gereklidir. Söz konusu K_0 kazanç sabiti, sistemin girişine birim basamak girişi uygulandığında $y(k)$ kalıcı hal çıkışının birine eşit veya başka bir ifadeyle $y(\infty) = 1$ olacak şekilde ayarlanmalıdır.

4.2 Kapalı Çevrim Kutuplarının Yerlerinin Seçilmesi

Kapalı çevrim sisteminin kutuplarını arzu edilen yerlere yerleştirecek bir geribesleme kazanç matrisinin hesaplanmasında son bölümde türetilen formüller kullanılabilir. Kontrol sistemi tasarlandığında cevaplanması gereken soru “Kapalı çevrim kutuplarının yerlerinin neresi olması istenir” sorusudur. Bu soruyu cevaplandırmanın birkaç yolu bulunmaktadır.

1. performans kriterini optimize edecek kapalı çevrim kutuplarının seçilmesi;
2. ikinci mertebeden baskın kutupların klasik kontrol yöntemlerine dayalı s -düzlemindeki kutup yerleşimlerinin seçilmesi. ZOH kutup haritalandırma formülünü kullanarak bu kutupların z -düzleminde haritalandırılması;
3. kapalı çevrim kutuplarının z -düzleminin orijininde bulunacak şekilde seçilmesi (ölü vuruşlu kontrol);
4. Bessel filtresi gibi bilinen bir prototip basamak cevabına sahip önceden hesaplanmış kutup yerleşimleri kümesinin kullanılması. ZOH kutup haritalandırma formülü kullanılarak s -düzlemi kutuplarının z -düzleminde haritalandırılması.

İlk yaklaşım ikinci dereceden optimal kontrol yaklaşımına dayalı bir yöntemdir. Bu yaklaşım arzu edilen kapalı çevrim kutuplarını sistemin kabul edilebilir cevap ile gerekli kontrol enerjisi miktarını dengeleyecek şekilde belirlemektedir (Ogata, 1995). Yüksek hızlı cevap gerektirmesinin yüksek miktarda kontrol enerjisi gerektireceği anlamına geldiğine de dikkat edilmelidir. Yine, genel olarak cevap hızının artırılması yüksek maliyetli daha büyük ve ağır aktüatör gerektirmekte olduğu da unutulmamalıdır. Kalan üç yaklaşımın anlatılması aşağıda verilmiş olacaktır.

4.2.1 Baskın Kutupların Belirlenmesi

Kök yer eğrisi tasarımına dayalı klasik kontrol yöntemleri iki baskın kutupların yerleşiminin belirlenmesi için uygulanabilir (Vakkaro, 1995). Hesaplamalar kutup yerleşimlerinin ζ sönüm oranı ve ω_n doğal frekans parametrelerine dayanmaktadır. İkinci mertebeden sistemin paydasının katsayıları ζ ve ω_n parametrelerinin cinsinden aşağıdaki şekilde yazılır

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (4.45)$$

bu denklemin kökleri aşağıdaki şekilde hesaplanır

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (4.46)$$

Klasik tasarım prosedüründe yaşanan bir güçlük kontrol edilecek sistem ikinci mertebeden daha yüksek mertebede ise, “ekstra” kutupların baskın kutuplara çok yakın olabilmeleri tasarım formüllerinin sistem performansını doğru olarak önceden kestirebilmesine engel olmaktadır (çünkü bunlar sadece ikinci mertebeden sistemler için uygundur). Bununla birlikte, sol yarı düzlemde “yeterince uzak” kutupların baskın kutupların davranışını etkilemediği bilinmektedir. Baskın kutuplar $\sigma = -\zeta\omega_n$ gerçek kısmına sahip ise, sol yarı düzlemde gerçek kısımları 4σ ’dan büyük gerçek kısımlara sahip kutuplar ihmal edilebilecektir. Böylece, iki kutbun arzu edilen ζ ve ω_n ’e karşılık gelen yerlere yerleştirilmesi mümkün olur. Kalan kutuplar, gerçek kısımları $-4\zeta\omega_n$ ’den küçük olacak şekilde (yarı düzlemde daha solda olacak şekilde) yerleştirilir. Kontrol edilen sistem n mertebeden ise n kapalı çevrim kutup yerleşiminin belirlenmesi gerektiği unutulmamalıdır. s düzlemindeki arzu edilen kutup yerleşimleri bir kez belirtildikten sonra, bunlar ZOH kutup haritalandırma formülü kullanılarak z düzleminde haritalandırılmalıdır. ZOH kutup haritalandırma formülü aşağıdaki gibidir

$$z_i = e^{s_i T} \quad (4.47)$$

Şuna da önemle dikkat edilmesi gerekir ki, kapalı çevrim baskın kutuplarının sol yarı düzlemde uzağa yerleştirilmesi sistem cevabını oldukça hızlandırır, dolayısıyla sistemdeki sinyaller yüksek büyüklüklere ulaşır ve bunun sonucu olarak sistem doğrusal olmayan bir sistem haline gelebilir. Bu durumdan kaçınılmalıdır (Ogata, 1995).

4.2.2 Ölü Vuruşlu Kontrol

Kapalı çevrim kutupları s düzleminin sol yarısına doğru hareket ettikçe, sistemin kumanda girişlerine daha hızlı cevap verdiği bellidir (Vakkaro, 1995). s ’in eksi sonsuza gittiği (analog sistem için fiilen mümkün değildir) olağanüstü durumlarda, sistem “mümkün olduğu kadar hızlı” olacaktır. $s = -\infty$ ’daki bir kutup $z = e^{sT}$ ZOH kutup haritalandırma formülü altında $z = 0$ ’a haritalandırılır. Bu nedenle, z düzlemindeki kapalı çevrim kutup yerleşimlerine ilişkin bir ilginç

seçenek hepsinin orijine yerleştirilmesidir! Bu arzu edilen kutup yerleşimlerini belirleyen karakteristik polinom $p(z) = z^n$ 'dir. Kapalı çevrim kutuplarına ilişkin bu seçim *ölü vuruşlu cevap* olarak ifade edilir.

Tüm kapalı çevrim kutuplarının orijine yerleştirilmesi $\mathbf{G} - \mathbf{HK}$ 'nin özdeğerlerinin sıfır olacağı ve $\mathbf{G} - \mathbf{HK}$ 'in karakteristik denkleminin z^n olacağı anlamına gelmektedir.

Aşağıdaki denklemlerle tanımlanan sistemi ele alalım

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (4.48)$$

$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$ geribeslemesi uygulandığı zaman durum denklemleri aşağıdaki şekilde yazılmış olacaktır

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{HK})\mathbf{x}(k) \quad (4.49)$$

Dikkat edilmelidir ki, son denklemin çözümü şöyle verilmiştir

$$\mathbf{x}(k) = (\mathbf{G} - \mathbf{HK})^k \mathbf{x}(0) \quad (4.50)$$

Karakteristik denklem $p(z) = z^n$ olarak seçilirse, ya da arzu edilen kutupların tümü orijinde olacak şekilde belirlenirse $\mathbf{x}(k)$ durumunun sıfır olacağına varılabilir (bunun gösterimi altbölümün son kısmında verilecektir). Ya da matematik ifadeyle söylemek gerekirse

$$\mathbf{x}(k) = 0, \quad k \geq q \quad (4.51)$$

Burada q , sistem mertebesidir. (4.51) denklemleri, $\mathbf{x}(0)$ değeri göz önüne alınmaksızın ölü vuruşlu regülatörün durum değişkenlerini n örnekleme zamanında sıfıra ulaştıracağını söylemektedir. Kontrol edilebilirlik kavramının anlatıldığı bir önceki bölümde kontrol edilebilir bir sistemi n örnekleme zamanında arzu edilen duruma ulaştırabilecek bir girişin bulunmasının mümkün

olduğu söylenmişti. Ölü vuruşlu kontrol, $u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$ geribeslemesi uygulanarak söz konusu girişi hesaplayacak yöntemi sağlayabilir.

Örnekleme anları arasındaki davranışın salınımlı olmadığı varsayıldığında, bir ölü vuruşlu regülatörün yerleşim zamanı nT saniye olacaktır. T örnekleme zamanı çok küçük seçilirse, yerleşme zamanı da oldukça küçük olacaktır; bu durum kontrol sinyalinin son derece yüksek büyüklüğe sahip olacağı anlamına gelir. Aksi takdirde, hata cevabını kısa süre zarfında sıfıra getirmek mümkün olmayacaktır (Ogata, 1995).

Tecrübede küçük yerleşim zamanı başarılabılır değildir; çünkü bunun gerçekleştirilmesi biraz önce söylendiği gibi yüksek büyüklüğe sahip kontrol sinyalleri gerektirir. [Büyüklik yeterince artırıldığı halde, daima satürasyon fenomeni meydana gelecektir. Satürasyon kontrol sinyalinin büyüklüğünde meydana geldiği takdirde, cevap artık ölü vuruşlu olmayacaktır. Yerleşme zamanı n örnekleme sürelerinden daha fazla olacaktır (Ogata, 1995)]. Ölü vuruşlu regülatörün yerleşme zamanını artırmanın tek yolu T örnekleme zamanının artırılmasıdır. Bazı uygulamalarda, büyük bir örnekleme zamanına sahip olunması kabul edilebilir bir durumdur. Bununla birlikte, bir dijital regülatör bozucu etkenleri sadece örnekleme anlarında yanıtladığından dolayı, büyük örnekleme zamanı bozucuların zayıf bastırılması (kötü disturbance rejection) ile sonuçlanacaktır. Bu nedenle, ölü vuruşlu dijital kontrolü sadece aşağıdaki gereksinimleri karşılayan özel durumlarda kullanılmalıdır: kontrol edilen sistemin matematiksel modeli son derece hassas olmalıdır, plant üzerinde etkili herhangi bozucu etkenler bulunmamalıdır ve plant girişteki büyük süreksizliği işleyebilmelidir. Sistemi etkileyen bozucular meydana geldiği takdirde (örnekleme zamanının çok büyük olduğundan dolayı) regülatörün bunları yanıtlayabilmesi uzun sürebilir. Bu da ölü vuruşlu regülatörlerin bir dezavantajıdır. Ölü vuruşlu kontrol sistemlerinin gerçek tasarımında, tasarımcı kontrol sinyalinin büyüklüğü ile cevap hızı gereksinimi arasında olması gereken ödünleşimden haberdar olması gerekmektedir.

Şimdi arzu edilen özdeğerlerin tümü sıfır olarak seçildiğinde herhangi bir $\mathbf{x}(0)$ başlangıç durumunun orijine ulaştırılıp sistem cevabının bir ölü vuruşlu cevap olacağı gösterilmeye çalışılsın.

Ölü vuruşlu cevabın incelenmesinde aşağıda verilmiş olan *nilpotent matrisi* önemli matematiksel araç rolünü oynar (Ogata,1995)

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Örneğin, 4×4 mertebeden nilpotent matrisini ele alalım

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Şuna dikkat edilmelidir ki,

$$\mathbf{N}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

$$\mathbf{N}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Benzer biçimde $n \times n$ mertebeden bir \mathbf{N} nilpotent matrisi için

$$\mathbf{N}^n = 0 \quad (4.57)$$

Şimdi aşağıdaki şekilde verilen tam durum kontroledilebilir sistemini ele alalım

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \quad (4.58)$$

Orijine yerleştirilecek şekilde kutupların arzu edilen yerleşimi seçilsin. Ya da başka bir deyişle karakteristik denklemin özdeğerleri sıfır olacak şekilde aşağıdaki şekilde seçilsin

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 0 \quad (4.59)$$

Daha sonra herhangi bir $\mathbf{x}(0)$ başlangıç durumunun cevabı ölü vuruşlu cevap olacağı gösterilmeye çalışılacaktır. Arzu edilen özdeğerleri içeren karakteristik denklem aşağıdaki şekilde verilebilir

$$(z - \mu_1)(z - \mu_2)\dots(z - \mu_n) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = 0 \quad (4.60)$$

dolayısıyla

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \quad (4.61)$$

ve (4.33) denklem ile verilen \mathbf{K} matrisi aşağıdaki şekilde gösterilen matrise basitleştirilebilir

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [\alpha_n - a_n : \alpha_{n-1} - a_{n-1} : \dots : \alpha_1 - a_1] \mathbf{T}^{-1} \\ &= [-a_n \quad -a_{n-1} \quad \dots \quad -a_1] \mathbf{T}^{-1} \end{aligned} \quad (4.62)$$

(3.134) denkleminin verilmiş \mathbf{T} dönüşüm matrisi kullanılarak yeni $\hat{\mathbf{x}}(k)$ durum vektörü aşağıdaki şekilde tanımlansın

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(k) \quad (4.63)$$

Sonra (4.63) denkleminin (4.58) denkleminin yerine konulup sonuçta oluşan denklemin \mathbf{T}^{-1} ile çarpılması aşağıdaki denklemi vermiş olacaktır

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}u(k) = \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{H}}u(k) \quad (4.64)$$

burada

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} = \hat{\mathbf{G}}, \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}} \quad (4.65)$$

Eğer $u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(k)$ geribeslemesi uygulanırsa (4.64) denklemi aşağıdaki şekilde yazılmış olacaktır

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{H}}u(k) = \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{x}}(k) - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{K}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(k) = (\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{K}\mathbf{T})\hat{\mathbf{x}}(k) \quad (4.66)$$

(4.62) denklemi dikkate alınarak son denklem aşağıdaki şekilde yazılmış olacaktır:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{K}\mathbf{T} &= \hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}[-a_n : a_{n-1} : \dots : -a_1]\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}[-a_n : a_{n-1} : \dots : -a_1] \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Böylece, $\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{K}\mathbf{T}$ matrisinin nilpotent matris olduğu gösterilmiş oldu. Bu nedenle, $\mathbf{N}^n = 0$ olduğu dikkate alınarak $\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{K}\mathbf{T}$ nilpotent matrisi aşağıdaki şekilde yazılmış olacaktır

$$(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{K}\mathbf{T})^n = 0 \quad (4.67)$$

$\mathbf{x}(k)$ başlangıç durum cinsinden (4.65) denklemini hesaba alınarak son denklem aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})^n \mathbf{x}(0) = (\mathbf{T}\hat{\mathbf{G}}\mathbf{T}^{-1} - \mathbf{T}\hat{\mathbf{H}}\mathbf{K})^n \mathbf{x}(0) = \left[\mathbf{T}(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{K}\mathbf{T})\mathbf{T}^{-1} \right]^n \mathbf{x}(0) \\
&= \mathbf{T}(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{K}\mathbf{T})^n \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}(0) = 0
\end{aligned} \quad (4.68)$$

Böylece, arzu edilen özdeğerlerin tümü sıfır olarak seçildiğinde herhangi bir $\mathbf{x}(0)$ başlangıç durumunun orijine ulaştırılabilip sistem cevabının bir ölü vuruşlu cevap olacağı gösterilmiş oldu.

4.2.3 Prototip Sistemler

Kapalı çevrim kutuplarının yerleşimlerini seçmenin bir diğer yolu ise çeşitli prototip sistemlerinin basamak cevabının göz önünde bulundurulmasıdır. Bilindiği üzere, basamak cevabı, kontrol sistemi cevabının hızını ölçmek için kullanılabilir (Vakkaro, 1995). Bu tür ölçmeye *yerleşme zamanı* denir. Yerleşme zamanı T_s olarak ifade edilir.

Yerleşme zamanı küçük değere sahip olan kontrol sistemleri “hızlı” olarak adlandırılırken yerleşme zamanı büyük değere sahip olan sistemler “yavaş” olarak adlandırılır. Böylece, bant genişliği ve yerleşme zamanı kontrol sistemi cevabının hızının iki farklı ölçüleridir.

Yerleşme zamanı çoğu kez kontrol sistemi cevabının hızının şartnamesi olarak kullanılır. Arzu edilen yerleşme zamanının elde edilmesi için kapalı çevrim kontrol sisteminin kutupları uygun yerleşime sahip olmalıdır. Yerleşme zamanının küçük olması isteniyorsa kutuplar sol düzlemin uzağında bulunmalıdır. Yerleşme zamanının büyük olması istendiğinde kutuplar $j\omega$ eksenine daha yakın olmalıdır. Kapalı çevrim kutuplarının seçilmesinde prototip sistemlerinin basamak cevabının uygulanması biraz önce söz konusu olan kontrol sistemi cevabının hızıyla, daha doğrusu sistem cevabının yerleşme zamanıyla ilişkilidir.

$B_k(s)$ ' nin k mertebeden normalleştirilmiş Bessel polinomunun olduğunu varsayalım. Çizelge 4.1'de bu polinomların bazılarının kökleri listelenmektedir. Kutupları Bessel polinomunun kökleri olduğu tüm kutup sisteminin arzu edilen basamak cevabına sahip olduğu bilinmektedir. Bu tür bir sistemin transfer fonksiyonu $\frac{B_k(0)}{B_k(s)}$, dir. Bu sistemlerden bazılarının basamak cevapları Şekil

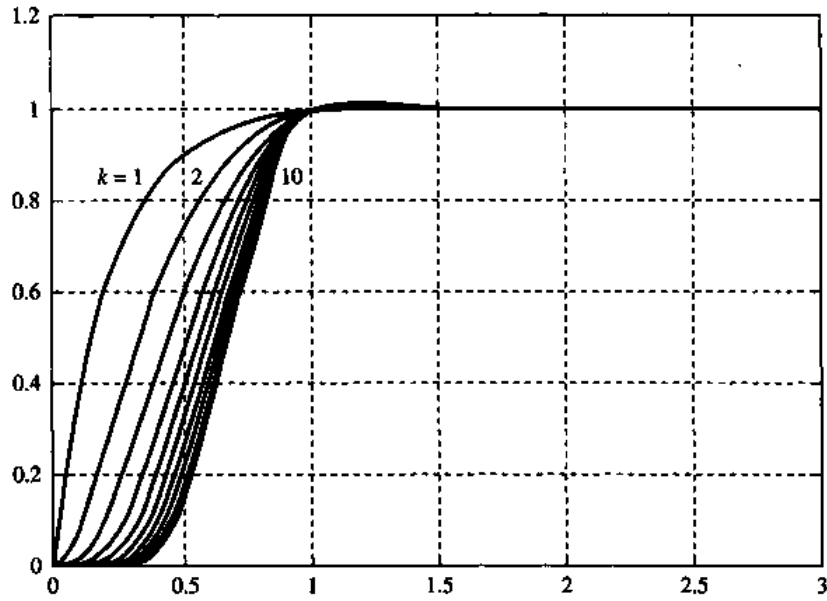
4.3'de gösterilmektedir. Dikkat edilmelidir ki, basamak cevaplarının tamamı 1 saniye yerleşme zamanına sahiptir. Farklı bir yerleşim zamanı arzu ediliyorsa Bessel polinomunun kökleri ölçeklendirilmelidir. T_s saniyelik bir yerleşme zamanı elde etmek için köklerin gerçekte ve sanal kısımları T_s ' ye bölünmelidir.

Özetlemek gerekirse, prototip Bessel sistemlerini kullanarak n mertebeden bir plant için kapalı çevrim kutup yerleşimlerinin seçilmesi işlemi aşağıdaki şekilde belirlenebilir. Kapalı çevrim sisteminin arzu edilen yerleşim zamanı performans özelliklerine göre ve sistem donanımının sınırları göz önünde bulundurularak belirlenir. İstenilen yerleşme zamanı T_s olarak adlandırılınsın. Arzu edilen s düzlemindeki kapalı çevrim kutupların yerleşimlerini elde etmek için Çizelge 4.1'deki n mertebeden polinomun kökleri T_s ' ye bölünmelidir. Daha sonra s düzlemindeki

kutupların yerleşimi bulunduktan sonra bu kutup yerleşimleri ZOH kutup haritalandırma formülü kullanılarak z düzleminde haritalandırılır.

Çizelge 4.1 1 Sn'lik yerleşme zamanına karşılık gelen normalleştirilmiş Bessel polinomlarının kökleri (Vakkaro, 1995)

k	$B_k(s)$ 'nin kutup yerleşimleri
1	-4.6200
2	$-4.0530 \pm j2.3400$
3	$-5.0093, -3.9668 \pm j3.7845$
4	$-4.0156 \pm j5.0723, -5.5281 \pm j1.6553$
5	$-6.4480, -4.1104 \pm j6.3142, -5.9268 \pm j3.0813$
6	$-4.2169 \pm j7.5300, -6.2613 \pm j4.4018, -7.1205 \pm j1.4540$
7	$-8.0271, -4.3361 \pm j8.7519, -6.5714 \pm j5.6786, -7.6824 \pm j2.8081$
8	$-4.4554 \pm j9.9715, -6.8554 \pm j6.9278, -8.1682 \pm j4.1057, -8.7693 \pm j1.3616$
9	$-9.6585, -4.5696 \pm j11.1838, -7.1145 \pm j8.1557, -8.5962 \pm j5.3655, -9.4013 \pm j2.6655$
10	$-4.6835 \pm j12.4022, -7.3609 \pm j9.3777, -8.9898 \pm j6.6057, -9.9657 \pm j3.9342, -10.4278 \pm j1.3071$



Şekil 4.3 $B_k(0)/B_k(s)$ transfer fonksiyonunun birim cevapları, $k = 1, \dots, 10$ (Vakkaro, 1995)

4.2.4 Kısıtlamaların Sağlanması

Kapalı çevrim kutup yerleşimi seçimiyle ilişkili olarak önceden değinilen yöntemlerden ikisi (baskın kutuplar ve prototip sistemler) daha sonra z düzlemine haritalandırılacak olan s düzlemindeki kutupları belirler. s düzlemindeki kutupların her belirlenişinde belirtilen kapalı çevrim kutuplara sahip bir analog regülatörün kısıtlamaları yerine getirip getirmediğinin kontrol edilmesi faydalıdır. Bir analog regülatör bu kısıtlamaları yerine getiremiyorsa, dijital regülatör için bu kutup yerleşimlerini z düzlemine haritalandırmak faydasız olacaktır. Bunun yerine, kısıtlamaları yerine getirmek için öncelikle s düzlemindeki kutup yerleşimleri düzenlenmelidir.

Kontrol edilecek plantın aşağıdaki durum uzayı denklemleriyle tanımlandığı varsayılınsın

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (4.69)$$

Bir analog regülatör sürekli zamanlı $u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ durum geribeslemesi kullanır. Kapalı çevrim sisteminin kutupları $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ matrisinin özdeğerleridir. Burada geçerli olan kısıtlama, dijital regülatörün çıkış aralığı ± 5 volt olan bir D/A çevirici kullanacağı varsayıldığında, giriş sinyali büyüklüğünün 5'i aşmamasıdır. Bu kısıtlama plant modelinin D/A çevirici ile gerçek plant girişi arasında kullanmak istenilen daha büyük bir yükselticiyi içerdiğini de varsaymaktadır. Analog regülatörle ilgili ikinci kısıtlama da bunun kabul edilebilir kararlılık marjinine sahip olmasıdır.

Prototip sistemlerini (Bessel polinomları) kullanan bir regülatör tasarımının bir faydalı özelliği muhtemel kapalı çevrim kutup yerleşimlerinin plant modelinin mertebesi göz önüne alınmaksızın tek sayıyla (T_s yerleşme zamanı) parametreleştiriyor (ölçülebilir) olmasıdır. Bu nedenle, belirli bir aralıktaki her T_s değeri için bir regülatör olmak üzere bir analog regülatörler ailesi tasarlanabilir ve bu sınırlamaların karşılanıp karşılanamadığı kontrol edilir. Kararlılık sınırlarını kontrol etmek için sürekli zamanlı sistemin Nyquist diyagramlarına bakılması gerekmektedir ($\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{K}$); burada \mathbf{K} ifadesi bazı T_s değerleri için Bessel polinomunun köklerine $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ özdeğerlerini yerleştiren bir geri besleme vektörüdür.

Sınırlamayı giriş sinyalinin büyüklüğüne göre kontrol etmek sanıldığı kadar kolay değildir. Bunun nedeni giriş sinyalinin $\mathbf{x}(0)$ değerine ve ayrıca plant üzerinde etkili olan bozucu etkenlere bağımlı olmasıdır. Konunun anlaşılmasında kolaylık sağlanması açısından, sadece başlangıç durumunun

etkisi hesaba alınır. “En kötü” başlangıç durum vektörü senaryosu alındığında (regülatörün işlemlerini beklediğimiz orijinden oldukça uzaktaki bir vektör olduğunu varsayalım), \mathbf{x}_{bd} başlangıç durumuna sahip ve belirli T_s yerleşme zamanlarına göre tasarlanmış bir analog regülatörü simule edilebilir. \mathbf{x}_{bd} seçiminin probleme bağımlı olduğuna dikkat edilmelidir; hiçbir genel sonuç verilemeyecektir. Simulasyon kontrol girişinin belirli bir \mathbf{x}_{bd} ’de 5 volt değerini aştığını gösterirse, daha büyük bir T_s değeri alınır, yeni geri besleme vektörü hesaplanır ve başka bir simulasyon çalıştırılır. Simulasyon kontrol girişinin 5’den küçük olduğunu gösteriyorsa, daha küçük bir T_s değeri alınabilir. Bu yolla, kontrol girişi \mathbf{x}_{bd} başlangıç durumu için 5’in altında olan bir analog regülatör bulunabilir.

Kabul edilebilir bir analog regülatör (başka bir deyişle T_s ’ in kabuledilebilir değeri) bir kez bulunduktan sonra aynı T_s değerine sahip olmak koşuluyla dijital regülatör tasarlanır. Takip eden bölümde söz konusu dijital regülatör için örnekleme zamanının nasıl seçilmesi gerektiği tartışılacaktır.

4.2.5 Örnekleme Zamanının Seçilmesi

Analog regülatörün kabul edilebilir kararlılık sınırlarına sahip olduğu ve plant giriş büyüklüğü üzerindeki sınırlamayı karşılayan bir \mathbf{K} geri besleme vektörünün bulunduğu varsayalım. Bessel polinomu kullanıldığında, \mathbf{K} vektörü bazı T_s zamanının tercihlerine karşılık gelir. Bir dijital regülatör için T örnekleme zamanının seçilmesi amacıyla öncelikle analog regülatörün bant genişliği bulunması gerekmektedir. Bunu yapabilmek için ilk önce band genişliği kavramının analog regülatör terimi açısından ne anlama geldiğini incelemek gerekir.

Bilindiği üzere Bode diyagramı iki çizimden oluşmaktadır. Bunların ilki sinüsoid transfer fonksiyonunun büyüklüğünün logaritmasının çizimidir, diğeri ise faz açısının çizimidir (Ogata, 2002). Bode diyagramı, kontrol sisteminin iyi izleme performansı sağlanabileceği frekans aralığını göstermektedir. Diyagramdaki bu frekansların en yükseğine kontrol sisteminin *bant genişliği* ismi verilir. Böylece band genişliği kavramının genel anlamını öğrenmiş olduk. Bant genişliği, sistemin sinüsoid girişini ne kadar iyi izleyeceğini göstermektedir (Ogata, 2002).

Bir regülatöre değinildiğinde bu regülatörün harici girişe sahip olmadığından, bant genişliği tanımının ne olması gerektiği belirsizdir. Bir regülatörün bant genişliği, regülatörün sıfırdan farklı başlangıç koşulları ve bozucu etkenlere cevaben ürettiği plant giriş sinyalinin frekans içeriği ölçütüdür. Bununla beraber, bant genişliği tanımının belirli başlangıç koşulları ya da bozucu etkenlere bağlı olmasından kaçınılmalıdır. Bu nedenle, aşağıda frekans aralığı ve örnekleme periyodu seçimi arasındaki nitel ilişkinin çıkarıldığı ve regülatörün band genişliği, takip sisteminin band genişliği olacak şekilde tanımlandığı durum uzayı regülatörü ele alınacaktır.

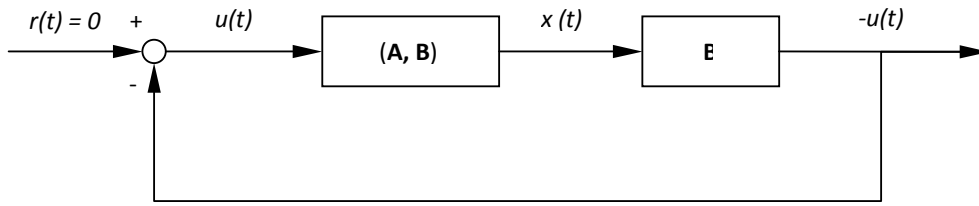
Bir regülatör Şekil 4.3’de verilen blok çizim ile gösterilebilir. Bu şekilde geribeslemeli tek girişli tek çıkışlı takip sistemi verilmişti. Regülatörün band genişliği, takip sisteminin bant genişliği olacak şekilde tanımlandığı varsayılır. Bu şekil, çıkış olarak $-u(t)$ sinyaline sahip olan bir takip sistemi biçimindedir. $r(t) = \sin(\omega t)$ sinyali farklı ω 'larda uygulanırsa, $u(t)$ plant girişinin takip edebileceği frekans aralığı görülebilir. Bir dijital regülatörde frekans aralığı ile örnekleme periyodu seçimi arasındaki nitel ilişki aşağıda belirtilen şekildedir: analog regülatör “yüksek” frekans içeriğine sahip plant girişleri üretebiliyorsa örnekleme periyodu “küçük” olmalıdır. Aksine, bir analog regülatör sadece “düşük” frekanslı sinyaller üretebiliyorsa örnekleme periyodu büyük olabilecektir.

Şekil 4.4’deki sistem $(\mathbf{A} - \mathbf{BK}, \mathbf{B}, \mathbf{K})$ durum uzayı gösterimiyle verilmiştir. Analog regülatörün bant genişliğini bulmak için Bode diyagramı kullanılır. Bant genişliği, Bode büyüklük diyagramının sıfır frekansında kendi değerinden 3 dB aşağıda olan frekans şeklinde tanımlanmaktadır. Diğer bir deyişle, $H(s)$ ’nin Şekil 4.4’de gösterilen kapalı çevrim sisteminin transfer fonksiyonu olduğu varsayılırsa,

$$H(s) = \mathbf{K}(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK}))^{-1} \mathbf{B} \quad (4.70)$$

bu durumda ω_B bant genişliği aşağıda gösterilen şekilde tanımlanmaktadır

$$|H(j\omega_B)|_{dB} = |H(0)|_{dB} - 3 \text{ dB} \quad (4.71)$$



Şekil 4.4 Tek girişli tek, çıkışlı takip sistemi olarak gösterilen durum geribeslemeli regülatör. Regülatörün band genişliği, takip sisteminin band genişliği olacak şekilde tanımlanır (Vakkaro, 1995)

Bir analog regülatörün band genişliği bir kez bulunduktan sonra dijital regülatör için T örnekleme zamanını bulmak amacıyla aşağıdaki kurallardan biri kullanılabilir. İlk olarak, T örnekleme zamanının aşağıdaki denklemde verilen ω_s örnekleme frekansına karşılık geldiğine dikkat etmeliyiz

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} \text{ rad/sec} \quad (4.72)$$

ω_s 'nin seçilmesi için aşağıdaki kurallar kullanılmaktadır:

1. Plant geniş bantlı rastgele bozucu etkenlerden etkileniyorsa, aşağıdaki aralık seçilir

$$20 \leq \frac{\omega_s}{\omega_b} \leq 40 \quad (4.73)$$

Geniş bantlı rastgele bozucular ile frekans içeriği kontrol sisteminin band genişliğini aşan rastgele bozucu etkenler ifade edilir.

2. Plant geniş bantlı rastgele bozuculardan etkili değil ise, aşağıdaki aralık seçilir

$$5 \leq \frac{\omega_s}{\omega_b} \leq 10 \quad (4.74)$$

Bu kurallar T örnekleme aralığının üst ve alt sınırlarına karşılık gelir. T 'nin alt sınırlarının verilmesinin nedeni sorulabilir. Diğer bir ifadeyle, küçük T değerinin yaratacağı sorunun ne olacağı merak edilebilir. Bunun cevabı donanımın yeterli olduğu müddetçe örnekleme hızının çok yüksek olmasının hiçbir sakıncasının bulunmadığıdır. Bununla birlikte, T verilen kuralların karşılık geldiği alt sınırların altında seçilirse kontrol sistemin performansında ya çok az iyileşme olacaktır ya da hiçbir iyileşme elde edilmeyecektir.

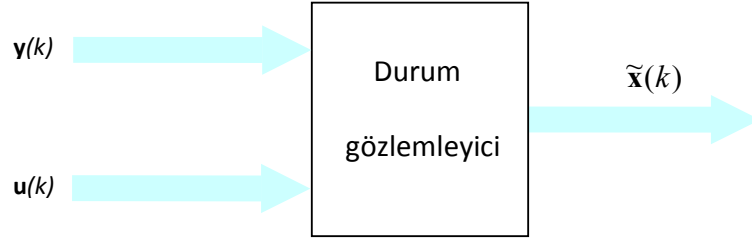
4.3 Durum Gözlemleyicilerin Tasarımı

Önceki altbölümde, arzu edilen kontrol vektörünü oluşturmak için tüm durum değişkenlerinin geri beslemesini kullanan bir kutup yerleştirme tasarım yöntemi tartışılmıştı. Bununla birlikte, tecrübeye durum değişkenlerinin tümünün doğrudan ölçüme uygun olmadığı durumların olduğu unutulmamalıdır. Birçok pratik durumda, belirli bir sistemin sadece birkaç durum değişkeni ölçülebilir ve geri kalanları ölçülebilir değildir. Örneğin, sadece çıkış değişkenleri ölçülebilir olabilir. Bu nedenle, böyle durumlarda doğrudan ölçülebilir olmayan durum değişkenlerinin kestirilmesi zorunludur. Bu kestirim işlemi yaygın şekilde *gözleme* olarak adlandırılır. Bir pratik sistemde, çıkış ve kontrol değişkenlerinden ölçülebilir olmayan durum değişkenlerinin gözlemlenmesi veya kestirilmesi zorunludur.

Durum kestirimcisi olarak da adlandırılan durum gözlemleyicisi bir kontrol sisteminde çıkış ve kontrol değişkenlerinin ölçümlerine dayalı durum değişkenlerinin kestirimini yapan bir alt sistemdir. Durum gözlemleyicilerin tasarımında, önceki bölümde ele alınan gözlemlenebilirlik kavramı önemli rol oynamaktadır. İleride görüleceği üzere, durum gözlemleyicisi, sadece ve sadece gözlemlenebilirlik şartın yerine getirildiği zaman tasarlanabilmektedir.

Aşağıdaki durum gözlemleyicilerle ilgili tartışmalarda, gözlemlenen durumu belirlemek için $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ işareti kullanılacaktır. Birçok durumda, arzu edilen kontrol vektörünü oluşturmak için durum geri beslemesinde $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ gözlemlenen durum vektörü kullanılır. Şekil 4.5, durum gözlemleyicinin şematik diyagramını göstermektedir. Durum gözlemleyicinin girişi olarak $\mathbf{y}(k)$ ile $\mathbf{u}(k)$ ve çıkışı olarak $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ kullanılacaktır.

İleride ilk olarak durum gözlemi için gerek ve yeter şartın üzerinden tartışılacaktır ve daha sonra tam mertebeden durum gözlemleyicisi işlenecektir. Tam mertebeden durum gözleme, bazı durum değişkenlerinin doğrudan ölçüme uygun olup olmadığı göz önüne alınmaksızın tüm n durum değişkenlerinin gözlemlendiği (kestirildiği) anlamına gelmektedir. Bazı zamanlarda sistemin tüm n durum değişkenlerinin gözlemlenmesi gereksiz olabilir. Böyle durumlarda (doğrudan ölçülebilir durum değişkenlerinin gözlemine ihtiyaç duyulmadığı durumlarda) sadece ölçülemeyen durum değişkenlerinin gözlemine ihtiyaç duyulur. Yalnız ölçülemeyen durum değişkenlerinin gözlemi *minimum mertebeden durum gözlemi* olarak adlandırılmaktadır. Bu tür gözleme altbölümün ilerleyen kısımlarında ele alınacaktır. Tüm ölçülemeyen durum değişkenlerine ilaveten ölçülebilir durum değişkenlerinden bazılarının (tamamının değil) gözlemi *indirgenmiş mertebeden durum gözlemi* olarak ifade edilmektedir.



Şekil 4.5 Durum gözlemleyicinin şematik diyagramı (Ogata, 1995)

4.3.1 Durum Gözlemesi için Gerek ve Yeter Şart

Şekil 4.6'da durum gözlemleyicili regülatör sistemi verilmişti. Şekil 4.6'den sistemin durum ve çıkış denklemleri aşağıdaki şekilde elde edilebilir

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (4.75)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (4.76)$$

burada

$\mathbf{x}(k)$ = durum vektörü (n -vektör)

$\mathbf{u}(k)$ = kontrol vektörü (r -vektör)

$\mathbf{y}(k)$ = çıkış vektörü (m -vektör)

$\mathbf{G} = n \times n$ mertebeden tekil olmayan matris

$\mathbf{H} = n \times r$ mertebeden matris

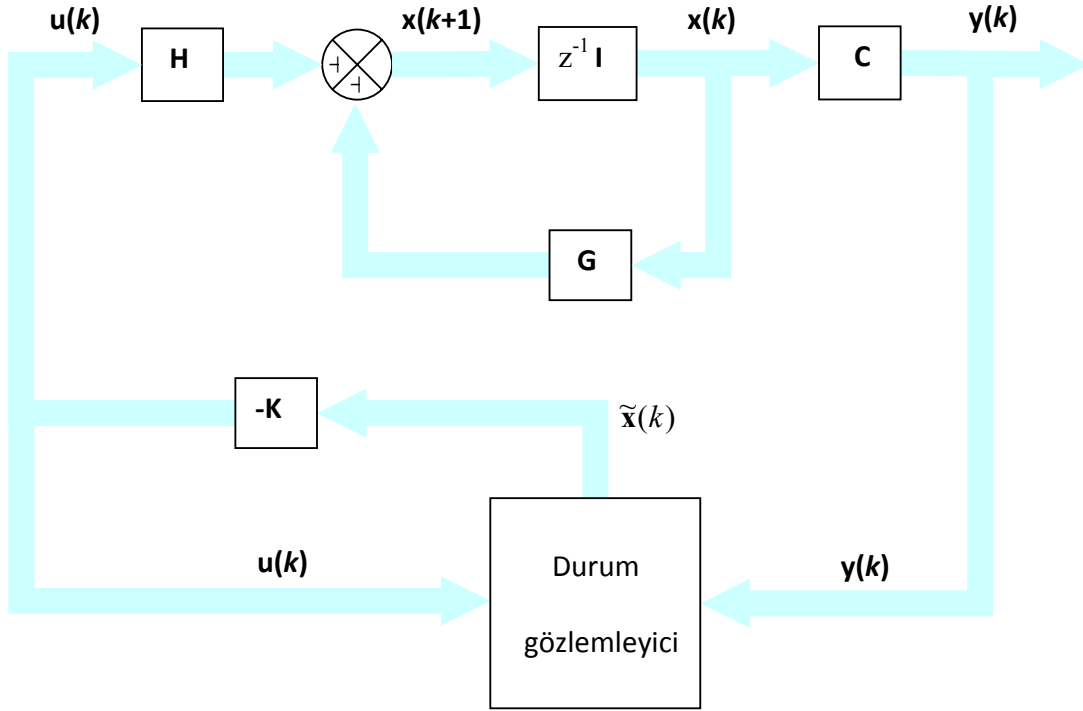
$\mathbf{C} = m \times n$ mertebeden matris

Durum değişkenlerin gözlemlenebilmesi (kestirilebilmesi) için $\mathbf{x}(k+1)$ 'lerin $\mathbf{y}(k), \mathbf{y}(k-1), \dots, \mathbf{y}(k-n+1)$ ve $\mathbf{u}(k), \mathbf{u}(k-1), \dots, \mathbf{u}(k-n+1)$ terimleri cinsinden elde edilebilmesi gerekir. (4.75) denkleminin aşağıdaki şekilde yazılabildiği bellidir

$$\mathbf{G}^{-1}\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (4.77)$$

veya

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (4.78)$$



Şekil 4.6 Durum gözlemleyicili regülatör sistemi (Ogata, 1995)

k , 1 örnek ötelendikten sonra (4.78) denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$\mathbf{x}(k-1) = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{x}(k) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) \quad (4.79)$$

(4.78)'in (4.79) denklemin yerine konulması aşağıdaki denklemi vermiş olacaktır

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k-1) &= \mathbf{G}^{-1}[\mathbf{G}^{-1}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k)] - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) \\ &= \mathbf{G}^{-2}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{G}^{-2}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) \end{aligned} \quad (4.80)$$

Aynı şekilde,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k-2) &= \mathbf{G}^{-1}\mathbf{x}(k-1) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-2) \\ &= \mathbf{G}^{-1}[\mathbf{G}^{-2}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{G}^{-2}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1)] - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-2) \\ &= \mathbf{G}^{-3}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{G}^{-3}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{G}^{-2}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-2) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k-n+1) &= \mathbf{G}^{-n} \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{G}^{-n} \mathbf{H} \mathbf{u}(k) - \mathbf{G}^{-n+1} \mathbf{H} \mathbf{u}(k-1) \\ &\quad - \dots - \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{u}(k-n+1) \end{aligned} \quad (4.82)$$

(4.78)'nin (4.76) denklemin yerine konulması aşağıdaki denklemi vermiş olacaktır

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k) = \mathbf{C} [\mathbf{G}^{-1} \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{u}(k)] \\ &= \mathbf{C} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{C} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (4.83)$$

Aynı şekilde, çıkış da elde edilebilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k-1) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k-1) = \mathbf{C} [\mathbf{G}^{-2} \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{G}^{-2} \mathbf{H} \mathbf{u}(k) - \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{u}(k-1)] \\ &= \mathbf{C} \mathbf{G}^{-2} \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{C} \mathbf{G}^{-2} \mathbf{H} \mathbf{u}(k) - \mathbf{C} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{u}(k-1) \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k-2) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k-2) \\ &= \mathbf{C} [\mathbf{G}^{-3} \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{G}^{-3} \mathbf{H} \mathbf{u}(k) - \mathbf{G}^{-2} \mathbf{H} \mathbf{u}(k-1) - \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{u}(k-2)] \\ &= \mathbf{C} \mathbf{G}^{-3} \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{C} \mathbf{G}^{-3} \mathbf{H} \mathbf{u}(k) - \mathbf{C} \mathbf{G}^{-2} \mathbf{H} \mathbf{u}(k-1) - \mathbf{C} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{u}(k-2) \end{aligned} \quad (4.85)$$

⋮

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k-n+1) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k-n+1) = \mathbf{C} \mathbf{G}^{-n} \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{C} \mathbf{G}^{-n} \mathbf{H} \mathbf{u}(k) \\ &\quad - \mathbf{C} \mathbf{G}^{-n+1} \mathbf{H} \mathbf{u}(k-1) - \dots - \mathbf{C} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{u}(k-n+1) \end{aligned} \quad (4.86)$$

önceki n denklemin matrisel gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k-n+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{G}^{-1} \\ \mathbf{C} \mathbf{G}^{-2} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{G}^{-n} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ &\quad - \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{C} \mathbf{G}^{-2} \mathbf{H} & \mathbf{C} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{G}^{-n} \mathbf{H} & \mathbf{C} \mathbf{G}^{-n+1} \mathbf{H} & \dots & \mathbf{C} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{u}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k-n+1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.87)$$

veya

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k-n+1) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2}\mathbf{H} & \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n}\mathbf{H} & \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n+1}\mathbf{H} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{u}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k-n+1) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Şuna dikkat edilmelidir ki, (4.88) denklemin sağ tarafı tamamen bilinen katsayıları içermektedir. Bu nedenle, $\mathbf{x}(k+1)$ sadece ve sadece

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n} \end{bmatrix} = n \tag{4.89}$$

olduğu durumda tanımlıdır.

\mathbf{G} matrisi tekil olmayan bir matris olduğundan (4.89) denkleminin sol tarafının her satırının \mathbf{G}^n ile çarpılması rank koşulunu etkilememektedir. Dolayısıyla (4.89) denklemi aşağıdaki denkleme eşittir

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = n \tag{4.90}$$

(4.90) denklemi aşağıdaki şekilde verilmiş olan

$$\text{rank} [\mathbf{C}^* \quad \mathbf{G}^*\mathbf{C}^* \quad \dots \quad (\mathbf{G}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*] = n \tag{4.91}$$

denkleme eşittir.

Açıktır ki, (4.91) denklemi (4.75) ve (4.76) denklemleriyle tanımlanan sistemin tam gözlemlenebilirlik şartıdır. Bu, (4.91) denklemi sağlandığı durumda (sistem tam gözlemlenebilir

olduğunda) $\mathbf{x}(k+1)$ 'lerin $\mathbf{y}(k)$, $\mathbf{y}(k-1)$, ..., $\mathbf{y}(k-n+1)$ ve $\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{u}(k-1)$, ..., $\mathbf{u}(k-n+1)$ terimleri cinsinden elde edilmesinin mümkün olduğunu ifade etmektedir. Böylece, durum gözlemlenimin gerek ve yeter şartının sistemin tam gözlemlenebilir olması gerektiği gösterilmiş olur.

$y(k)$ çıkışının skaler ve \mathbf{C} matrisinin $1 \times n$ mertebeden bir matris olduğu özel durumlarda $\mathbf{x}(k+1)$, (4.88) denkleminin her iki tarafının da (4.89) denkleminin tersiyle çarpılması yoluyla aşağıdaki şekilde bulunabilir

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k-n+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2}\mathbf{H} & \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n}\mathbf{H} & \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n+1}\mathbf{H} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{u}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k-n+1) \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

Yukarıda gösterilen çözümlemenin özetlenmesi gerekirse, $\mathbf{x}(k+1)$ durumu sistemin tam gözlemlenebilir olduğu durumlarda (4.88) denkleminde elde edilebileceği söylenebilir. Böylece, sistem tam gözlemlenebilir ise durum vektörü en fazla n örnekleme zamanı içerisinde belirlenebilir.

4.3.2 Tam Mertebeden Durum Gözlemleyicisi

Bu altbölümde tartışılacak olan gözlemleyicilerin mertebesi kontrol edilmekte olan plantın mertebesiyle aynıdır. Yukarıda söylendiği gibi, bu tür gözlemleyiciler tam mertebeden gözlemleyiciler olarak adlandırılmaktadır.

İleriki çözümler, $\mathbf{x}(k)$ gerçek durumunun doğrudan gözlemlenebilir olmadığı varsayımıyla sürdürülecektir. $\mathbf{x}(k)$ gerçek durumun gözlemlenebilmesi söz konusu ise $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ gözlemlenen (kestirilen) durumun $\mathbf{x}(k)$ gerçek durumuna mümkün oldukça yakın olması istenir.

Şuna dikkat edilmesi önemlidir ki, $\mathbf{x}(k)$ doğrudan ölçülemediğinden dolayı $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ gözlemlenen (kestirilen) durumun $\mathbf{x}(k)$ ile karşılaştırılması mümkün değildir. Bunun aksine, $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$ çıkışı ölçülebilir olduğundan dolayı $\mathbf{y}(k)$ çıkışının $\tilde{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k)$ gözlemlenen (kestirilen) çıkış ile karşılaştırılması mümkündür.

Şekil 4.7’de verilen durum geribeslemeli kontrol sistemini ele alalım. Sistem aşağıdaki denklemlerle tanımlanmaktadır

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (4.93)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (4.94)$$

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) \quad (4.95)$$

burada

$\mathbf{x}(k)$ = durum vektörü (n -vektör)

$\mathbf{u}(k)$ = kontrol vektörü (r -vektör)

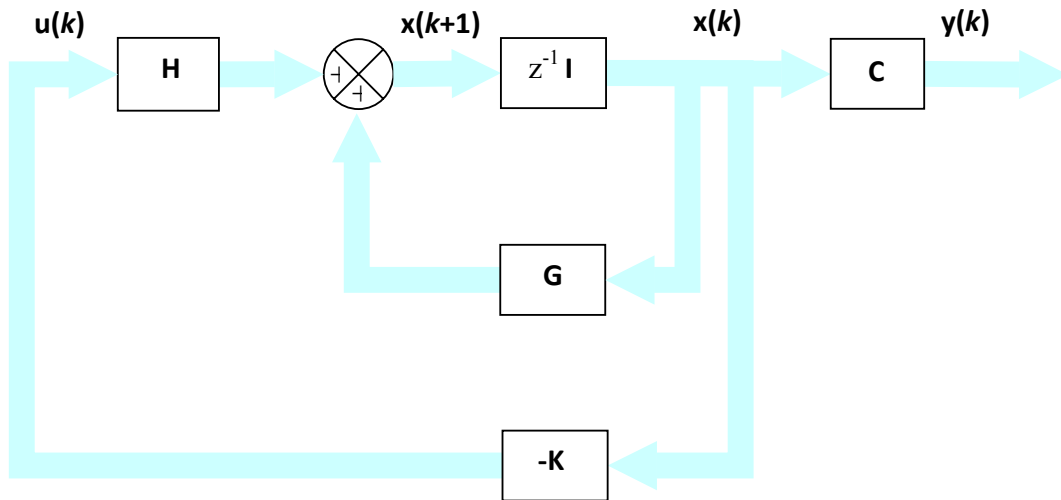
$\mathbf{y}(k)$ = çıkış vektörü (m -vektör)

\mathbf{G} = $n \times n$ mertebeden tekil olmayan matris

\mathbf{H} = $n \times r$ mertebeden matris

\mathbf{C} = $m \times n$ mertebeden matris

\mathbf{B} = durum geribeslemeli kazanç matrisi ($n \times r$ mertebeden matris)



Şekil 4.7 Durum geribeslemeli kontrol sistemi (Ogata, 1995)

Sistemin tam durum kontroledilebilir ve tam gözlemlenebilir olduğu varsayılınsın. $\mathbf{x}(k)$, doğrudan ölçülemeyen durum vektörüdür. Şekil 4.8, Şekil 4.7’de verilen sisteme eklenmiş durum gözlemleyicisini göstermektedir. $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ gözlemlenen (kestirilen) durumu, $\mathbf{u}(k)$ kontrol vektörünü oluşturmak amacıyla kullanılmaktadır, yada başka bir ifadeyle yazılmak gerekirse

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k) \quad (4.96)$$

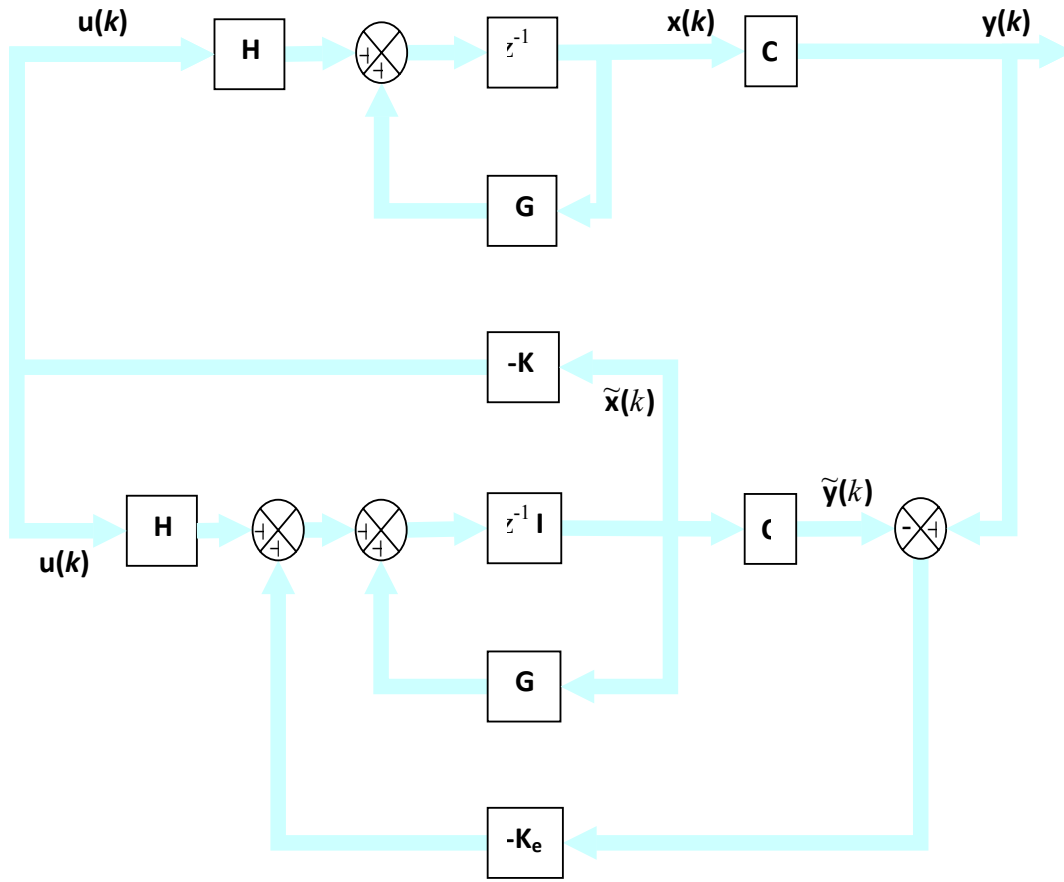
Şekil 4.8’de verilen sistemin denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e[\mathbf{y}(k) - \tilde{\mathbf{y}}(k)] \quad (4.97)$$

burada \mathbf{K}_e gözlemleyici geribesleme kazanç matrisi ($n \times m$ mertebeden bir matristir). Son denklem, $\tilde{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k)$ denklemi dikkate alınarak aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e\mathbf{y}(k) \quad (4.98)$$

$\tilde{\mathbf{x}}(k+1)$ ’nin kestirimi $\mathbf{y}(k)$ ’nin bir örnekleme aralığı ilerisinde olduğundan (4.98) denklemi ile verilen durum gözlemleyicisine *önkestirim gözlemleyicisi* adı verilir. $(\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})$ ’nin özdeğerleri genellikle *gözlemleyici kutupları* olarak adlandırılır.



Şekil 4.8 Gözlenmiş durum geribeslemeli kontrol sistemi (Ogata, 1995)

4.3.2.1 Tam Mertebeden Durum Gözlemleyicinin Hata Dinamikleri

Eğer $\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k)$ ve $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$ denklemleri dikkate alınırsa (4.98) denklemi aşağıdaki şekilde yeniden verilmiş olacaktır

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) - \mathbf{K}_e \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \\ &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (4.99)$$

Dikkat edilirse, (4.93) ve (4.99) denklemleri aynıdır. (4.99) denkleminin gerçek sistemin denklemiyle aynı olması ($\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k)$) durum gözlemleyici cevabının gerçek sistemin cevabıyla aynı olduğunu ifade etmektedir. Gözlemleyicinin hata denklemini elde etmek için (4.98) denklemi (4.93) denkleminde aşağıdaki şekilde çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) - \tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) - [(\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e\mathbf{y}(k)] \\
&= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}_e\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{K}_e\mathbf{C}\mathbf{x}(k) \\
&= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) - \mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{K}_e\mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{K}_e\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k) \\
&= (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})[\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)]
\end{aligned} \tag{4.100}$$

(4.100) denklemi okunaklı şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\mathbf{x}(k+1) - \tilde{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})[\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)] \tag{4.101}$$

$[\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)]$ farkı $\mathbf{e}(k)$ hatası olarak tanımlanırsa

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k) \tag{4.102}$$

daha sonra (4.101) denklemi (4.103) haline gelir

$$\mathbf{e}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{e}(k) \tag{4.103}$$

(4.103) denkleminde görüldüğü gibi hata sinyalinin dinamik davranışı $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ matrisinin özdeğerleriyle belirlenmektedir.

Yorumlar. (4.93) ve (4.94) denklemleriyle tanımlanan sistemin tam gözlemlenebilir olduğu varsayıldığından $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ matrisinin özdeğerlerinin isteğe bağlı yerleştirilebilmesi mümkündür.

İleride açıklanacağı üzere $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ ve $\mathbf{G}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{K}_e^*$ matrislerinin aynı özdeğerlere sahip olduğuna dikkat edilmelidir. Bölüm 3' de sunulmuş olan dualite prensibi gereğince (4.93) ve (4.94) denklemleriyle tanımlanan sistemin tam gözlemlenebilir şartı aşağıdaki denklemle verilmiş sistemin tam durum kontroledilebilirlik şartıyla tamamen aynıdır.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}^*\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}^*\mathbf{u}(k) \tag{4.104}$$

Alt bölüm 4.1'de, (4.104) denklemiyle verilen sistem için isteğe bağlı kutup yerleşiminin bu sistemin tam durum kontroledilebilir olduğu durumda, başka bir deyişle $[\mathbf{C}^* : \mathbf{G}^*\mathbf{C}^* : \dots : (\mathbf{G}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]$ matrisi rankının n olduğu durumda mümkün olduğu gösterilmişti. (4.104) denklemiyle

tanımlanan sistem için $\mathbf{G}^* - \mathbf{C}^* \mathbf{K}_e^*$ 'nin arzu edilen n özdeğerler kümesi seçilerek \mathbf{K} durum geribeslemeli kazanç matrisi belirlenebilmektedir. $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}$ ve $\mathbf{G}^* - \mathbf{C}^* \mathbf{K}_e^*$ 'nin özdeğerleri aynı olmak üzere, arzu edilen \mathbf{K}_e matrisi \mathbf{K} matrisi ile $\mathbf{K}_e = \mathbf{K}^*$ denklemiyle ilişkilidir.

4.3.3 Ackermann Formülü

Durum gözlemleyicisi tasarımında gözlemleyicinin arzu edilen kutupların belirlenmesinde \mathbf{K}_e gözlemleyici geribesleme kazanç matrisi kullanılır. Arzu edilen özdeğerler (veya arzu edilen karakteristik denklem) bir kez seçildikten sonra gözlemleyicinin \mathbf{K}_e matrisi kutup atama tasarımına benzer şekilde Ackerman formülü ile hesaplanabilir. Ackerman formülünün durum gözlemleyicilere uygun olarak türetimi (4.93) ve (4.94) denklemleri ile verilmiş sistemin tam gözlemlenebilir olduğu varsayılarak yapılır. Daha sonra $u(k) = -\hat{\mathbf{K}}_e^* \mathbf{x}(k)$ durum geribeslemesi uygulanarak birbirini izleyen hesaplama işlemlerinin ardından sonuç formül elde edilir. Bu formül aşağıdaki şekilde yazılır

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{G}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CG} \\ \vdots \\ \mathbf{CG}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

burada

$$\phi(\mathbf{G}) = \mathbf{G}^n + \alpha_1 \mathbf{G}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{G} + \alpha_n \mathbf{I} \quad (4.106)$$

4.3.4 \mathbf{K}_e Gözlemleyici Geribesleme Kazanç Matrisini Hesaplamanın Farklı Yolları

1. \mathbf{K}_e gözlemleyici geribeslemeli kazanç matrisi aşağıdaki denklemle verilebilir

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = (\mathbf{WN}^*)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

burada \mathbf{N} ve \mathbf{W} matrisleri aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}^* : \mathbf{G}^* \mathbf{C}^* : \dots : (\mathbf{G}^*)^{n-1} \mathbf{C}^*] \quad (4.108)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

α_i 'ler, arzu edilen karakteristik denklemin katsayılarıdır

$$z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0 \quad (4.110)$$

ve a_i 'ler verilen sistemin karakteristik denklemin katsayılarıdır

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0 \quad (4.111)$$

2. Arzu edilen \mathbf{K}_e geribesleme kazanç matrisi Ackermann formülü ile hesaplanabilir

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{G}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{G} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

burada

$$\phi(\mathbf{G}) = \mathbf{G}^n + \alpha_1 \mathbf{G}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{G} + \alpha_n \mathbf{I} \quad (4.113)$$

3. Sistem düşük mertebeden verilmiş ise $\mathbf{K}_e = [k_{e1} : k_{e2} : \dots : k_{en}]$ matrisinin katsayıları $|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e \mathbf{C}|$ karakteristik denklemi ve arzu edilen karakteristik denklemin z 'in eşit mertebeden olan katsayılarını eşitleyerek bulunabilir. Arzu edilen karakteristik denklem aşağıdaki şekilde verilmiştir

$$(z - \mu_1)(z - \mu_2) \dots (z - \mu_n) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = 0 \quad (4.114)$$

burada μ_i ' ler, $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}$ ' nin arzu edilen özdeğerleridir.

4.3.5 En İyi \mathbf{K}_e Matrisinin Seçilmesi Üzerinde Yorumlar

Şekil 4.8'ye bakılarak, \mathbf{K}_e gözlemleyici geri besleme matrisinden gelen geri besleme sinyalinin planttaki bilinmeyenleri hesaplamak üzere plant modelinin düzeltme sinyali olarak uygulandığına dikkat edilmelidir. Sistem belirgin bilinmeyenleri içeriyorsa, \mathbf{K}_e matrisinden gelen geri besleme sinyali göreceli şekilde büyük olacaktır. Bununla birlikte, çıkış sinyali büyük oranda bozucular ve ölçüm gürültüleriyle karışmış ise, $\mathbf{y}(k)$ çıkışı güvenilir olmayacaktır ve \mathbf{K}_e matrisinden gelen geribesleme sinyali göreceli şekilde küçük olacaktır. \mathbf{K}_e matrisinin belirlenmesinde (arzu edilen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ özdeğerlerine bağlıdır) $\mathbf{y}(k)$ çıkışına dahil olan bozucular ve gürültülerin etkileri dikkatle incelenmelidir.

\mathbf{K}_e gözlemleyici geribesleme kazanç matrisinin $\phi(z) = (z - \mu_1)(z - \mu_2) \dots (z - \mu_n) = 0$ arzu edilen karakteristik denkleme bağlı olduğu hatırlanmalıdır. $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ kümesinin seçiminin belirli bir sisteme özgün olmadığına dikkat edilmelidir. Bu nedenle, arzu edilen karakteristik denklem olarak birçok farklı karakteristik denklem seçilebilir. Her arzu edilen karakteristik denklemin, farklı \mathbf{K}_e matrisi bulunmaktadır.

Gözlemleyicinin tasarımında, çeşitli \mathbf{K}_e gözlemleyici geribesleme kazanç matrisinin birkaç farklı arzu edilen karakteristik denklemlere göre belirlenmesi tercih edilmelidir. Bu farklı \mathbf{K}_e matrislerinin herbirinde ortaya çıkan sistem performansını değerlendirmek için simülasyon testleri yapılmalıdır. Daha sonra, genel sistem performansı bakış açısıyla en iyi \mathbf{K}_e seçilmelidir. Birçok pratik olguda, en iyi \mathbf{K}_e matrisinin seçilmesi hızlı cevap ile bozucu ve gürültü duyarlılığı arasında bir seçim yapılmasına indirgenir.

4.3.6 En Düşük Mertebeden Durum Gözlemleyicisi

Şu ana kadar tartışılmış olan gözlemleyiciler tüm durum değişkenlerinin yeniden elde edilmesi için uygulanan gözlemleyicilerdir. Bu gözlemleyiciler, kontrol sisteminin mertebesiyle aynı mertebeden tasarlanırlar. Tecrübeye, durum değişkenlerinin bazıları hassas şekilde ölçülebilir. Bu tür doğru olarak ölçülebilen durum değişkenlerinin kestirilmesine gerek duyulmaz. n , durum vektörünün boyutu olmak üzere n 'den daha az sayıda durum değişkenini kestiren bir

gözlemleyiciye indirgenmiş mertebeden gözlemleyici adı verilir. İndirgenmiş mertebeden gözlemleyicinin mertebesi mümkün olan en düşük mertebeden ise bu gözlemleyici en düşük mertebeden gözlemleyici olarak adlandırılır.

$\mathbf{x}(k)$ durum vektörünün bir n vektörü olduğunu ve $\mathbf{y}(k)$ çıkış vektörünün ölçülebilir bir m vektörü olduğunu varsayalım. m çıkış değişkenleri, durum değişkenlerinin doğrusal kombinasyonu olduğundan m adet durum değişkeninin kestirilmesi gerekmez. Kestirilmesi gereken sadece $n - m$ adet durum değişkenidir. Böyle hallerde indirgenmiş mertebeden gözlemleyici bir $(n - m)$ mertebeden gözlemleyiciye dönüşür. Bu tür bir $(n - m)$ mertebeden gözlemleyici en düşük mertebeden bir gözlemleyicidir. Şekil 4.9'da en düşük mertebeden gözlemleyiciyi içeren sistemin blok çizimi gösterilmiştir.

Bununla birlikte, çıkış değişkenlerinin ölçümü gürültüleri içeriyorsa ve göreceli şekilde hatalı ise, bu durumda tam durum gözlemleyicisi kullanmanın daha iyi sistem performansı ile sonuçlanabileceğine dikkat edilmesi önemlidir.

En düşük mertebeden gözlemleyici tasarımı ilk olarak $\mathbf{x}(k)$ durum vektörünün aşağıdaki şekilde iki kısma ayrılmasıyla yapılabilir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k+1) \\ \mathbf{x}_b(k+1) \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

burada $\mathbf{x}_a(k)$, durum vektörünün doğrudan ölçülebilen kısmıdır (böylece, $\mathbf{x}_a(k)$ m vektördür) ve $\mathbf{x}_b(k)$, durum vektörünün ölçülemeyen kısmıdır (böylece, $\mathbf{x}_b(k)$ $n - m$ vektördür). O zaman ayrılmış durum denklemleri aşağıdaki şekilde yazılmış olacaktır

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k+1) \\ \mathbf{x}_b(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{aa} & \mathbf{G}_{ab} \\ \mathbf{G}_{ba} & \mathbf{G}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_a \\ \mathbf{H}_b \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \quad (4.116)$$

$$\mathbf{y}(k) = [\mathbf{1} : 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} \quad (4.117)$$

burada

$\mathbf{G}_{aa} = m \times m$ mertebeden matris

$\mathbf{G}_{ab} = m \times (n - m)$ mertebeden matris

$\mathbf{G}_{ba} = (n - m) \times m$ mertebeden matris

$\mathbf{G}_{bb} = (n - m) \times (n - m)$ mertebeden matris

$\mathbf{H}_a = m \times r$ mertebeden matris

$\mathbf{H}_b = (n - m) \times r$ mertebeden matris

(4.116) denklemini yeniden yazılarak durumun ölçülen kısmı aşağıdaki şekilde verilmiş olur

$$\mathbf{x}_a(k + 1) = \mathbf{G}_{aa}\mathbf{x}_a(k) + \mathbf{G}_{ab}\mathbf{x}_b(k) + \mathbf{H}_a\mathbf{u}(k) \quad (4.118)$$

veya

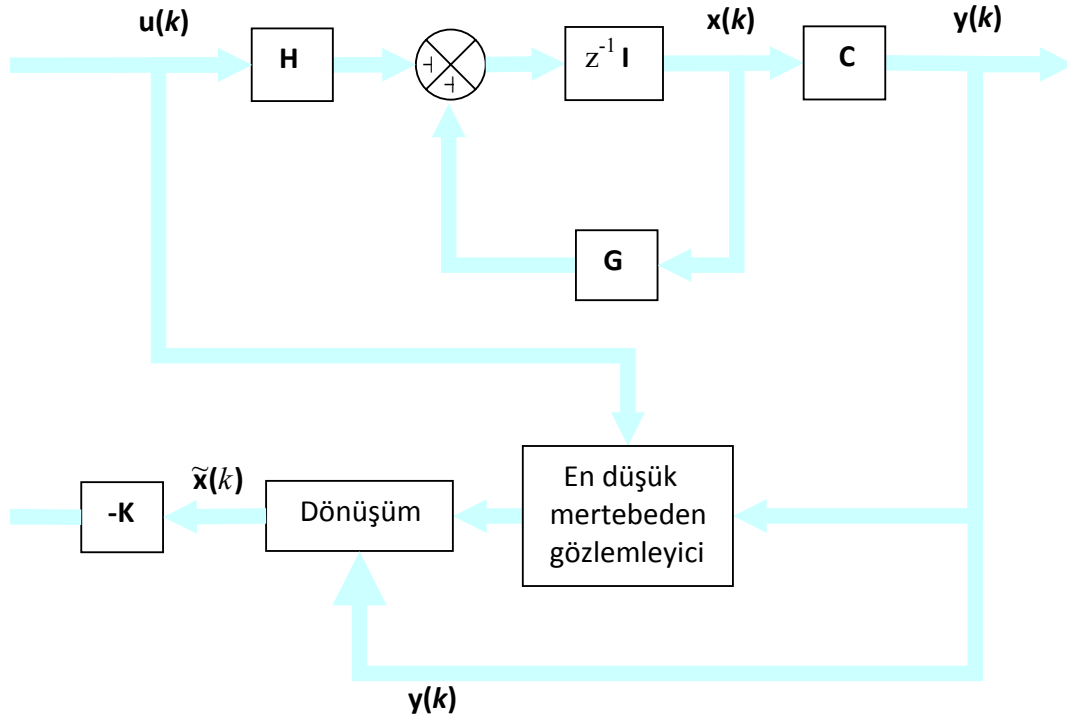
$$\mathbf{x}_a(k + 1) - \mathbf{G}_{aa}\mathbf{x}_a(k) - \mathbf{H}_a\mathbf{u}(k) = \mathbf{G}_{ab}\mathbf{x}_b(k) \quad (4.119)$$

Dikkat edilmelidir ki, (4.119) denkleminin sol tarafında yer alan terimler doğrudan ölçülebilen terimlerdir. Bu denklem çıkış denklemi olarak kullanılır. En düşük mertebeden gözlemleyicinin tasarımında (4.119) denkleminin sol tarafı bilinen değerleri içerdiği varsayılır. Gerçekte, (4.119) denkleminde durumun ölçülebilen ve ölçülemeyen değerleri birbirleriyle ilişkilidir.

(4.116) denkleminde durumun ölçülmemiş kısmı aşağıdaki şekilde verilmiş olur

$$\mathbf{x}_b(k + 1) = \mathbf{G}_{ba}\mathbf{x}_a(k) + \mathbf{G}_{bb}\mathbf{x}_b(k) + \mathbf{H}_b\mathbf{u}(k) \quad (4.120)$$

(4.120) denklemini durumun ölçülmemiş kısmının dinamiğini tanımlamaktadır. Şuna dikkat edilmelidir ki, $\mathbf{G}_{ba}\mathbf{x}_a(k)$ ve $\mathbf{H}_b\mathbf{u}(k)$ terimleri bilinen terimlerdir.



Şekil 4.9 En düşük mertebeden gözlemleyicili gözlenmiş durum geribeslemeli kontrol sistemi (Ogata, 1995)

En düşük mertebeden gözlemleyicinin tasarımı tam mertebeden gözlemleyici için geliştirilmiş tasarlama tekniği uygulanarak yapılabilir. Bu nedenle, tam mertebeden gözlemleyicinin durum denklemini en düşük mertebeden gözlemleyicinin durum denklemiyle karşılaştıralım. Tam mertebeden gözlemleyicinin durum denklemi ve çıkış denklemi aşağıdaki şekilde verilmişti

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (4.121)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (4.122)$$

ve en düşük mertebeden gözlemleyicinin “durum denklemi” ve “çıkış denklemi” aşağıdaki gibidir

$$\mathbf{x}_b(k+1) = \mathbf{G}_{bb}\mathbf{x}_b(k) + [\mathbf{G}_{ba}\mathbf{x}_a(k) + \mathbf{H}_b\mathbf{u}(k)] \quad (4.123)$$

$$\mathbf{x}_a(k+1) - \mathbf{G}_{aa}\mathbf{x}_a(k) - \mathbf{H}_a\mathbf{u}(k) = \mathbf{G}_{ab}\mathbf{x}_b(k) \quad (4.124)$$

En düşük mertebeden gözlemleyicinin tasarımı tam mertebeden gözlemleyicinin denkleminde Çizelge 4.2’de verilmiş değişikliklerin yapılması yoluyla gerçekleştirilebilir. Kolay bakış açısından bu denklem aşağıda yeni haliyle verilmiştir

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e \mathbf{C})\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e \mathbf{y}(k) \quad (4.125)$$

Çizelge 4.2’deki değişiklikler yapılarak (4.125) denklemi aşağıdaki şekilde yazılmış olacaktır

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_b(k+1) = & (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})\tilde{\mathbf{x}}_b(k) + \mathbf{G}_{ba} \mathbf{x}_a(k) + \mathbf{H}_b \mathbf{u}(k) \\ & + \mathbf{K}_e [\mathbf{x}_a(k+1) - \mathbf{G}_{aa} \mathbf{x}_a(k) - \mathbf{H}_a \mathbf{u}(k)] \end{aligned} \quad (4.126)$$

Çizelge 4.2 En düşük mertebeden durum gözlemleyicisi için gözlemleyici denkleminin yazılmasında yapılması gereken değişikliklerin listesi (Ogata, 1995)

Tam mertebeden durum gözlemleyici	En düşük mertebeden durum gözlemleyici
$\tilde{\mathbf{x}}(k)$	$\tilde{\mathbf{x}}_b(k)$
\mathbf{G}	\mathbf{G}_{bb}
$\mathbf{H}\mathbf{u}(k)$	$\mathbf{G}_{ba} \mathbf{x}_a(k) + \mathbf{H}_b \mathbf{u}(k)$
$\mathbf{y}(k)$	$\mathbf{x}_a(k+1) - \mathbf{G}_{aa} \mathbf{x}_a(k) - \mathbf{H}_a \mathbf{u}(k)$
\mathbf{C}	\mathbf{G}_{ab}
\mathbf{K}_e , $n \times m$ mertebeden matris	\mathbf{K}_e , $(n - m) \times m$ mertebeden matris

Dikkat edilmelidir ki, \mathbf{K}_e gözlemleyici geribesleme kazanç matrisi $(n - m) \times m$ mertebeden olan matristir. (4.126) denklemi en düşük mertebeden gözlemleyiciyi tanımlamaktadır. (4.117) denkleminde atfen

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{x}_a(k) \quad (4.127)$$

(4.127) denklemini (4.126) denkleminin yerine konulması aşağıdaki denklemi vermiş olacaktır

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_b(k+1) = & (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})\tilde{\mathbf{x}}_b(k) + \mathbf{K}_e \mathbf{y}(k+1) \\ & + (\mathbf{G}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{aa})\mathbf{y}(k) + (\mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{H}_a)\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (4.128)$$

Şuna dikkat edilmelidir ki, $\tilde{\mathbf{x}}_b(k+1)$ 'nin kestirilmesi için $\mathbf{y}(k+1)$ ölçülmüş değeri gereklidir. Fakat $\mathbf{y}(k+1)$ 'i kullanmak zahmetlidir. Dolayısıyla bunun yerine bazı değişikliklerin yapılması istenebilir. (4.98) denkleminde görüldüğü gibi tam mertebeden gözlemleyicinin uygulanması durumunda $\tilde{\mathbf{x}}(k+1)$ durumunun kestirimi $\mathbf{y}(k+1)$ durumunun ölçümüne ihtiyaç olmaksızın $\mathbf{y}(k)$ çıkışı ölçülerek yapılabilir. Bu nedenle (4.128) denklemini farklı şekilde aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_b(k+1) - \mathbf{K}_e \mathbf{y}(k+1) &= (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}) \tilde{\mathbf{x}}_b(k) + (\mathbf{G}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{aa}) \mathbf{y}(k) \\ &\quad + (\mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{H}_a) \mathbf{u}(k) \\ &= (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}) [\tilde{\mathbf{x}}_b(k) - \mathbf{K}_e \mathbf{y}(k)] + (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}) \mathbf{K}_e \mathbf{y}(k) \\ &\quad + (\mathbf{G}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{aa}) \mathbf{y}(k) + (\mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{H}_a) \mathbf{u}(k) \\ &= (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}) [\tilde{\mathbf{x}}_b(k) - \mathbf{K}_e \mathbf{y}(k)] + [(\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}) \mathbf{K}_e] \mathbf{y}(k) \\ &\quad + (\mathbf{G}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{aa}) \mathbf{y}(k) + (\mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{H}_a) \mathbf{u}(k)\end{aligned}\quad (4.129)$$

Bundan sonra (4.127) denklemini dikkate alınarak aşağıdaki tanımlar yapılsın

$$\mathbf{x}_b(k) - \mathbf{K}_e \mathbf{y}(k) = \mathbf{x}_b(k) - \mathbf{K}_e \mathbf{x}_z(k) = \boldsymbol{\eta}(k) \quad (4.130)$$

ve

$$\hat{\mathbf{x}}_b(k) - \mathbf{K}_e \mathbf{y}(k) = \hat{\mathbf{x}}_b(k) - \mathbf{K}_e \mathbf{x}_a(k) = \bar{\boldsymbol{\eta}}(k) \quad (4.131)$$

(4.130) ve (4.131) denklemleri dikkate alınarak (4.129) denklemini aşağıdaki şekilde yazılmış olur

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\eta}}(k+1) &= (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}) \tilde{\boldsymbol{\eta}}(k) + [(\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}) \mathbf{K}_e + \mathbf{G}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{aa}] \mathbf{y}(k) \\ &\quad + (\mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{H}_a) \mathbf{u}(k)\end{aligned}\quad (4.132)$$

(4.131) ve (4.132) denklemleri en düşük mertebeden gözlemleyicinin dinamiğini belirlemektedir. Şuna dikkat edilmelidir ki, $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = (k+1)$ 'i bulmamız için $\mathbf{y}(k+1)$ ölçülmüş değer kullanılması artık gerekmemektedir. Bundan sonra gözlemleyici hata denklemini elde edelim. İlk önce aşağıdaki denklemleri tanımlayalım

$$\mathbf{e}(k) = \boldsymbol{\eta}(k) - \tilde{\boldsymbol{\eta}}(k) = \mathbf{x}_b(k) - \tilde{\mathbf{x}}_b(k) \quad (4.133)$$

(4.126) denkleminin (4.120) denkleminde çıkarılması aşağıdaki denklemi vermiş olacaktır

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_b(k+1) - \bar{\mathbf{x}}_b(k+1) &= \mathbf{G}_{bb} [\mathbf{x}_b(k) - \bar{\mathbf{x}}_b(k)] + \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab} \bar{\mathbf{x}}_b(k) \\ &\quad - \mathbf{K}_e [\mathbf{x}_a(k+1) - \mathbf{G}_{aa} \mathbf{x}_a(k) - \mathbf{H}_a \mathbf{u}(k)] \end{aligned} \quad (4.134)$$

(4.119) denkleminin (4.134) denkleminde yerine konulması aşağıdaki denklemi verir

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_b(k+1) - \bar{\mathbf{x}}_b(k+1) &= \mathbf{G}_{bb} [\mathbf{x}_b(k) - \bar{\mathbf{x}}_b(k)] + \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab} \bar{\mathbf{x}}_b(k) - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab} \mathbf{x}_b(k) \\ &= (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}) [\mathbf{x}_b(k) - \bar{\mathbf{x}}_b(k)] \end{aligned} \quad (4.135)$$

Son denklem (4.133) denklemini dikkate alınarak aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$\mathbf{e}(k+1) = (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}) \mathbf{e}(k) \quad (4.136)$$

(4.136) denklemini dikkate alınarak en düşük mertebeden gözlemcinin karakteristik denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}_{bb} + \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}| = 0 \quad (4.137)$$

En düşük mertebeden gözlemleyicinin \mathbf{K}_e gözlemleyici geribesleme kazanç matrisinin belirlenmesi ilk önce arzu edilen kutupların yerleşimi seçilerek ((4.137) denkleminin verilen karakteristik denklemin kökleri arzu edilen yere yerleştirilerek) daha sonra tam mertebeden gözlemleyici için geliştirilmiş olan işlemler takip edilerek yapılabilmektedir.

$y(k)$ girişinin skaler olduğu durumlarda sistemin $x_a(k)$ çıkışı da skaler olacaktır. \mathbf{G}_{ab} matrisinin mertebesi $1 \times (n-1)$, ve \mathbf{G}_{bb} matrisinin mertebesi ise $(n-1) \times (n-1)$ olacaktır. Böyle durumlarda (4-105) denkleminin tanımlanan Ackermann formülünü daha anlaşılır kılmak üzere değiştirilip aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{G}) \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{ab} \\ \mathbf{G}_{ab} \mathbf{G}_{bb} \\ \vdots \\ \mathbf{G}_{ab} \mathbf{G}_{bb}^{n-3} \\ \mathbf{G}_{ab} \mathbf{G}_{bb}^{n-2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.138)$$

burada

$$\phi(\mathbf{G}_{bb}) = \mathbf{G}_{bb}^{n-1} + \alpha_1 \mathbf{G}_{bb}^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-2} \mathbf{G}_{bb} + \alpha_{n-1} \mathbf{I} \quad (4.139)$$

Yukarıda anlatılanların özetlenmesi gerekirse, \mathbf{K}_e gözlemleyici geribesleme kazanç matrisi $((n-m) \times m$ mertebeden matris) bir kez belirlendikten sonra en düşük mertebeden durum gözlemleyicinin (4.131) ve (4.132) denklemleriyle aşağıdaki şekilde tanımlanabildiği söylenebilir

$$\hat{\mathbf{x}}_b(k) - \mathbf{K}_e \mathbf{y}(k) = \hat{\mathbf{x}}_b(k) - \mathbf{K}_e \mathbf{x}_a(k) = \bar{\boldsymbol{\eta}}(k) \quad (4.140)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\eta}}(k+1) = & (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}) \tilde{\boldsymbol{\eta}}(k) + [(\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}) \mathbf{K}_e + \mathbf{G}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{aa}] \mathbf{y}(k) \\ & + (\mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{H}_a) \mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (4.141)$$

Eşit olarak en düşük mertebeden durum gözlemleyicisi $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(k)$ cinsinden daha ziyade (4-131) ve (4-132) denklemleriyle gösterildiği gibi $\mathbf{e}(k)$ cinsinden aşağıdaki şekilde tanımlanabilir

$$\tilde{\mathbf{x}}_b(k) = \mathbf{x}_b(k) - \mathbf{e}(k) \quad (4.142)$$

$$\mathbf{e}(k+1) = (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}) \mathbf{e}(k) \quad (4.143)$$

4.3.7 Gözlenmiş Durum Geribeslemeli Kontrol Sistemi

Aşağıdaki denklemlerle verilmiş olan tam durum kontroledilebilir ve tam gözlemlenebilir sistemi ele alalım

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (4.144)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (4.145)$$

burada

$\mathbf{x}(k)$ = durum vektörü (n -vektör)

$\mathbf{u}(k)$ = kontrol vektörü (r -vektör)

$\mathbf{y}(k)$ = çıkış vektörü (m -vektör)

\mathbf{G} , \mathbf{H} ve \mathbf{C} matrisleri aşağıdaki denklemlerle verilmiştir

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_{aa} & \mathbf{G}_{ab} \\ \hline \mathbf{G}_{ba} & \mathbf{G}_{bb} \end{array} \right], \quad \mathbf{H} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{H}_a \\ \hline \mathbf{H}_b \end{array} \right], \quad \mathbf{C} = [\mathbf{I}_m \ : \ 0] \quad (4.146)$$

Geribeslenmiş durumun en düşük mertebeden gözlemceyinin uygulanması yoluyla elde edilen durum vektörünün ölçülmüş kısmını ve durum vektörünün gözlenen (kestirilen) kısmını içerdği durum geribeslemeli kontrol çizimini ele alalım. Şekil 4.10, böyle bir sistemin blok çizimini göstermektedir. Bu sistemin $\mathbf{u}(k)$ kontrol vektörü aşağıdaki şekilde verilmiştir

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k) \quad (4.147)$$

burada $\tilde{\mathbf{x}}(k)$, $\mathbf{x}_a(k)$ ölçülebilen durum ve $\tilde{\mathbf{x}}_b(k)$ ölçülemeyen (kestirilen) durumu içermektedir:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}_a(k) \\ \hline \tilde{\mathbf{x}}_b(k) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}_a(k) \\ \hline \tilde{\eta}(k) + \mathbf{K}_e \mathbf{x}_a(k) \end{array} \right] \quad (4.148)$$

(4.147) denkleminin (4.144) denkleminde yerine konulması aşağıdaki denklemi vermiş olacaktır

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) - \mathbf{H}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k) = (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{K}[\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)] \quad (4.149)$$

Şuna dikkat edilmelidir ki,

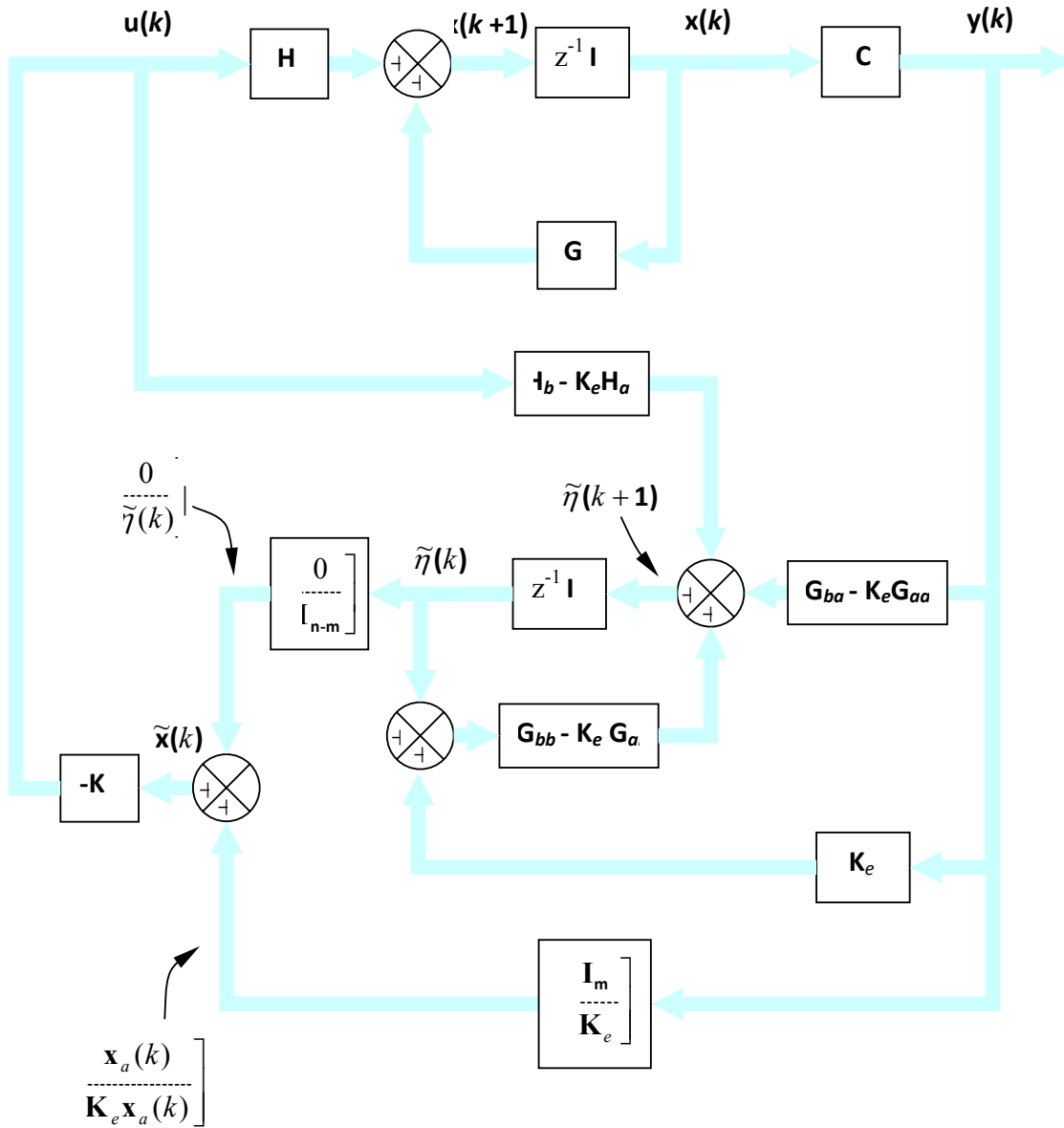
$$\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k) = \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}_a(k+1) \\ \hline \mathbf{x}_b(k+1) \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}_a(k) \\ \hline \tilde{\mathbf{x}}_b(k) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline \mathbf{x}_b(k) - \tilde{\mathbf{x}}_b(k) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline \mathbf{e}(k) \end{array} \right] \quad (4.150)$$

burada

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}_b(k) - \tilde{\mathbf{x}}_b(k) \quad (4.151)$$

(4.149) denkleminin farklı bir şekilde yazılması üzerine yeni $\mathbf{\Gamma}$ matrisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım

$$\mathbf{\Gamma} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{I}_{n-m} \end{array} \right] \quad (4.152)$$



Şekil 4.10 Geribeslenmiş durumun en düşük mertebeden gözlemceyinin uygulanması yoluyla elde edilen durum vektörünün ölçülmüş kısmını ve durum vektörünün gözlenen kısmını içerdiği durum geribeslemeli kontrol çizimi (Ogata, 1995)

Daha sonra (4.152) denklemleriyle verilmiş olan yeni matrisi kullanarak (4-149) denklemini aşağıdaki şekilde yazılmış olur

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{HK})\mathbf{x}(k) + \mathbf{HK}\Gamma e(k) \quad (4.153)$$

(4.153) ve (4.143) denklemleri, geribeslenmiş durumun en düşük mertebeden gözlemleyicinin kullanılması yoluyla elde edilen durum vektörünün $\mathbf{x}_a(k)$ ölçülmüş kısmını ve durum vektörünün $\mathbf{x}_b(k)$ gözlenen (kestirilen) kısmını içerdği durum geribeslemeli kontrol çizimini tanımlamaktadır. (4.153) ve (4.143) denklemlerinin birleştirilmesi aşağıdaki denklemi verecektir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{e}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{HK} & | & \mathbf{HK}\Gamma \\ \hline 0 & | & \mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix} \quad (4.154)$$

(4.152) denklemi, en düşük mertebeden gözlemleyici uygulanarak elde edilen gözlenmiş durum geribeslemeli sistemin dinamiğini tanımlamaktadır. Sistemin karakteristik denklemi aşağıda verilen denklemle tanımlanır

$$\begin{vmatrix} \mathbf{zI} - \mathbf{G} + \mathbf{HK} & | & -\mathbf{HK}\Gamma \\ \hline 0 & | & \mathbf{zI} - \mathbf{G}_{bb} + \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab} \end{vmatrix} \quad (4.155)$$

$$= |\mathbf{zI} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}| |\mathbf{zI} - \mathbf{G}_{bb} + \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}| = 0$$

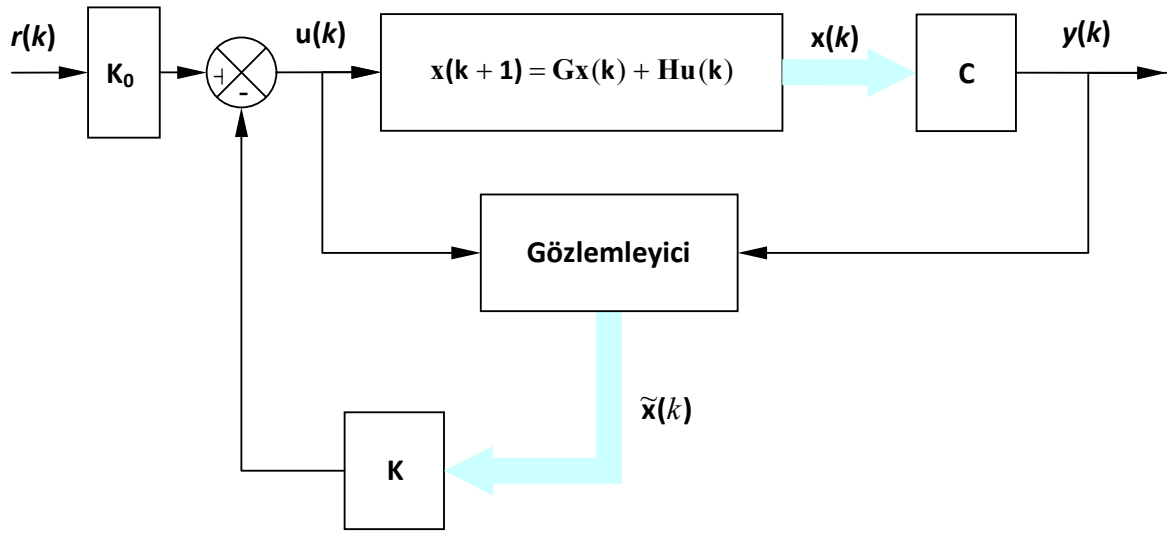
(4.153) denklemi, sistemin kutup atamaya bağlı olan kapalı çevrim kutuplarını ($(\mathbf{G} - \mathbf{HK})$ matrisinin özdeğerleri) ve en düşük mertebeden durum gözlemleyiciye bağlı olan kapalı çevrim kutuplarını ($(\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})$ matrisinin özdeğerleri) içerdığını ifade etmektedir.

4.3.8 Referans Girişli Kontrol Sistemi

Değişen referans girişlerini izleyecek bir kontrol sistemini tasarlamada gözlenmiş durum geribesleme yöntemi uygulanabilir.

Dikkat edilmesi gerekir ki, gözlenmiş durumun uygulandığı kutup atama yöntemi, kapalı çevrim sisteminin transfer fonksiyonu payının dinamiği üzerinden etkili değildir. Başka bir deyişle gözlenmiş durumun uygulandığı kutup atama yöntemi kapalı çevrim transfer fonksiyonunun payının dinamiğini kontrol edemez. Buna karşılık Bölüm 4’de polinomsal denklemler yaklaşımı tartışılırken söz konusu yaklaşımın darbe transfer fonksiyonunun payının dinamiği üzerinden etkili olduğu ya da darbe transfer fonksiyonunun payının dinamiğini kontrol edebildiği bir yaklaşım olduğu görülecektir. Bununla beraber, gözlenmiş durum geribeslemeli regülatör sisteminin Şekil 4.11’de gösterilen kontrol sistemine dönüştürülmesi mümkündür. Önceden

belirtildiği gibi kutup atama yöntemine dayalı gözlemleyici tasarlama probleminin kutup atama kısmı, n . mertebeden bir sistemin n . mertebeden arzu edilen karakteristik denklemini belirler, problemin durum gözlemleyici kısmı ise n ya da daha düşük mertebeden gözlemleyici hatasının karakteristik denklemini belirler. (4-153) denkleminin ifade ettiği gibi n . mertebeden karakteristik denklemin durum gözlemleyicisi hatasının karakteristik denklemiyle çarpımı bütün sistemin karakteristik denklemini verir.



Şekil 4.11 Gözlenmiş durum geribeslemeli kontrol sisteminin blok çizimi (Ogata, 1995)

Regülâtör sistemi kontrol sistemine dönüştürülürken bütün kontrol sisteminin kazancı, birim basamak girişi uygulandığında $y(k)$ kalıcı hal çıkışının bire eşit olacak şekilde belirlenebilmesi için sistemin giriş yolunda ayarlanabilen bir K_0 kazancının bulunması gerekmektedir. Bu yüzden K_0 sabiti gerektiği gibi ayarlanmadığı sürece sistemin iyi performans göstermesi söz konusu değildir.

5. AYRIK ZAMANLI KONTROL SİSTEMİNİN TASARIMINDA POLİNOMSALE DENKLEMLER YAKLAŞIMI

Bölüm 4’de, kutup atama yöntemini uygulama yoluyla durum geribeslemeli kontrol sisteminin tasarımı tartışılmıştı. Bazı durum değişkenlerinin doğrudan ölçülemediği durumlarda geribesleme amacıyla sistemin gözlenmiş durumlarının kullanılması önerilmişti. Bütün sistemin tasarımı durum uzayında gerçekleştirilmişti.

Kutup atama yöntemi, bu tür sistemin, daha doğrusu gözlemleyicili regülatör sistemlerinin tasarımında uygulanan tek yöntem değildir. Tecrübede, benzer sistemlerin tasarımı için farklı bir yaklaşımın mevcut olduğu bilinmektedir. Söz konusu yaklaşım *polinomsal denklemler yaklaşımı* olarak adlandırılmaktadır. Polinomsal denklemler yaklaşımı, kontrol sistemlerini en düşük mertebeden gözlemleyici kullanarak kutup atama tekniği ile tasarlama yaklaşımının alternatif bir yaklaşımı olarak bilinmektedir. Bu yaklaşımın ayırt edici özelliği denetleyici tasarımının Diophantine denklemi olarak bilinen özel (specific) tipteki doğrusal polinomsal denklemler çözümüne indirgenmesidir. Diophantine denkleminin çözümü, fiziksel olarak gerçekleştirilebilir kontrol sistemlerinin tasarımında sınırlı işlem sayısında matematiksel çözüm sağlayabilen bir yaklaşımdır.

İlerleyen bölümlerde polinomsal denklemler yaklaşımının özeti ve Diophantine denkleminin çözümü tartışılacaktır. Daha sonra kontrol sistemlerinin polinomsal denklemler tekniği ile tasarım yaklaşımı incelenecektir. Bölümün sonunda *model eşlemeli* (model matching) kontrol sisteminin tasarımı sunulacaktır.

5.1 Diophantine Denklemi

Bu bölümde Diophantine denklemi incelenecektir. Aşağıdaki darbe transfer fonksiyonuyla tanımlanan sistemi ele alalım

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (5.1)$$

burada

$$A(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad (5.2)$$

$$B(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n \quad (5.3)$$

olarak tanımlansın.

Darbe transfer fonksiyonunun tam durum kontroledilebilir ve tam gözlemlenebilir olduğu varsayılır. Başka bir deyişle, darbe transfer fonksiyonu kutup-sıfır sadeleşmesini içermeyen bir transfer fonksiyonu olsun. Bu nedenle, $A(z)$ ve $B(z)$, ortak bölenleri olmayan birer polinomdur.

$A(z)$ ve $B(z)$ polinomlarının kutup-sıfır sadeleşmesini içermediği durumlarda bu polinomlar *karşılıklı asal polinomlar* (coprime) olarak adlandırılır. En yüksek mertebeden terimin katsayısı bir olan polinoma *tekil polinom* adı verilir. Böylece, dikkat edilirse $A(z)$ polinomu bir tekil polinomdur.

Daha sonra $(2n-1)$. mertebeden bir sabit $D(z)$ polinomunu aşağıdaki gibi tanımlayalım

$$D(z) = d_0 z^{2n-1} + d_1 z^{2n-2} + \dots + d_{2n-2} z + d_{2n-1} \quad (5.4)$$

Bu durumda (5.5)'i sağlayacak bir $(n-1)$. mertebeden $\alpha(z)$ ve $\beta(z)$ polinomlar bulunabilir,

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = D(z) \quad (5.5)$$

burada

$$\alpha(z) = \alpha_0 z^{n-1} + \alpha_1 z^{n-2} + \dots + \alpha_{n-2} z + \alpha_{n-1} \quad (5.6)$$

$$\beta(z) = \beta_0 z^{n-1} + \beta_1 z^{n-2} + \dots + \beta_{n-2} z + \beta_{n-1} \quad (5.7)$$

(5.5) denklemi, *Diophantine denklemi* olarak adlandırılır. Diophantine denklemi, $\alpha(z)$ ve $\beta(z)$ polinomları için $2n \times 2n$ mertebeden \mathbf{E} Sylvester matrisi uygulanarak çözülebilmektedir (Ogata, 1995). Sylvester matrisi, $A(z)$ ve $B(z)$ karşılıklı asal polinomları katsayılarının cinsinden aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ \vdots & a_{n-1} & \cdots & 0 & \vdots & b_{n-1} & \cdots & 0 \\ a_1 & \vdots & & \vdots & b_1 & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 & \cdots & a_n & b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ 0 & 1 & \cdots & a_{n-1} & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & 0 & 0 & \cdots & b_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Şuna dikkat edilmelidir ki, (5.8) denklemini uygulayabilmenin şartı, $A(z)$ polinomunun tekil olmasıdır. $A(z)$ tekil olmadığı takdirde (5.8) denkleminin değiştirilip yeniden türetilmesi gerekebilir. Eğer $n = 4$ ise Sylvester matrisi aşağıdaki şekilde verilir:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a_4 & 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & 0 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & 0 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

\mathbf{E} Sylvester matrisinin, sadece ve sadece $A(z)$ ve $B(z)$ polinomların karşılıklı asal olduğu ya da ortak bölene sahip olmadığı durumda tekil olmayan bir matris olabildiğine dikkat edilmelidir. Bunu göstermek için yukarıda verilmiş olan 8×8 mertebeden \mathbf{E} matrisinin determinanı aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \begin{bmatrix} a_4 & 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & 0 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & 0 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix} \\
&= b_0^4 (\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_6)(\lambda_1 - \lambda_7)(\lambda_1 - \lambda_8) \\
&\quad \cdot (\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_6)(\lambda_2 - \lambda_7)(\lambda_2 - \lambda_8) \\
&\quad \cdot (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_3 - \lambda_7)(\lambda_3 - \lambda_8) \\
&\quad \cdot (\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_6)(\lambda_4 - \lambda_7)(\lambda_4 - \lambda_8)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

burada a_1, \dots, a_4 ve b_1, \dots, b_4 sırasıyla $A(z)$ ve $B(z)$ polinomlarının katsayılarıdır ve $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ ve $\lambda_5, \dots, \lambda_8$ sırasıyla $A(z)$ ve $B(z)$ polinomlarının karakteristik kökleridir.

$$A(z) = z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)(z - \lambda_3)(z - \lambda_4) \tag{5.11}$$

$$B(z) = b_0 z^4 + b_1 z^3 + b_2 z^2 + b_3 z + b_4 = b_0 (z - \lambda_5)(z - \lambda_6)(z - \lambda_7)(z - \lambda_8) \tag{5.12}$$

(5.10) denkleminde görüldüğü üzere, $|\mathbf{E}|$ determinanı, sadece ve sadece denklemin sağ tarafındaki tüm çarpanların sıfır olmadığı durumda sıfırdan farklı cevap vereceği bellidir. Başka bir deyişle, $|\mathbf{E}|$ determinanı, sadece ve sadece $A(z)$ ve $B(z)$ polinomları katsayılarının sadeleşmediği durumda sıfırdan farklı cevap vereceği bellidir.

Şimdi öyle bir \mathbf{D} ve \mathbf{M} iki vektörü tanımlayalım ki,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{2n-1} \\ d_{2n-2} \\ \vdots \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

ve

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-2} \\ \vdots \\ \alpha_0 \\ \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_0 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Daha sonra $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ ve $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ katsayıları aşağıdaki denklemden bulunabilirler

$$\mathbf{M} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{D} \quad (5.15)$$

(5.15) denklemi, Diophantine denkleminin çözümünü sağlayan vektördür.

5.2 Kontrol Sistemlerinin Tasarımında Polinomsal Denklemler Yaklaşımı

Bölüm 5'in başlangıç kısmında kontrol sisteminin polinomsal denklemler yaklaşımı ile tasarımında genel çözümün Diophantine denklemi olarak adlandırılan $\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = D(z)$ polinomsal denkleminin çözümüne indirgenmiş olduğu ve daha sonra, bu denklemin çözümü $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ ve $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ katsayılarını veren \mathbf{E} Sylvester matrisinin çözümüne dayalı olduğu söylenmişti. Şimdi yukarıdaki özetlenmiş olanları dikkate alarak kontrol sisteminin söz konusu yaklaşımı uygulama yoluyla nasıl tasarlandığını göstermeye çalışalım.

Sonraki kısımlarda polinomsal denklemler yaklaşımına dayalı kontrol sistemini tasarlama problemi detaylı sunulacaktır. Burada iki farklı mimarideki kontrol sistemi incelenecektir. Kontrol sisteminin tasarımı aşağıdaki denklemin çözümüne dayalıdır

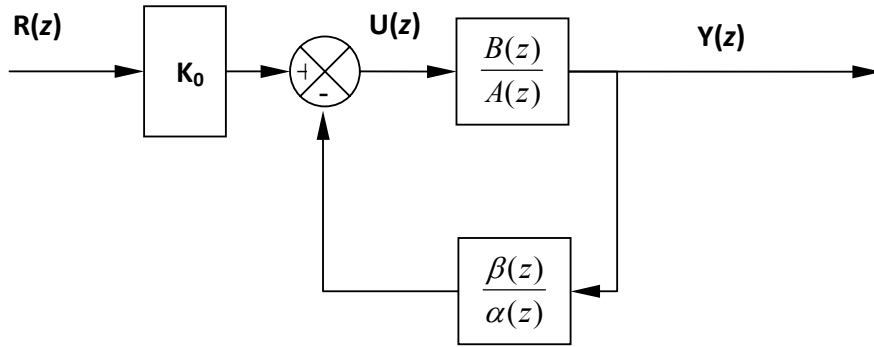
$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = H(z)F(z) = D(z) \quad (5.16)$$

burada

$A(z)$, n mertebeden bir tekil polinomdur, $B(z)$, m mertebeden bir polinomdur ($m \leq n$), ($A(z)$ ve $B(z)$ polinomlarının ortak bölenler içermediği varsayılır), $H(z)$, kutup atama probleminde çözülen sistemin arzu edilen karakteristik denklem polinomu ($H(z)$, n mertebeden polinomdur),

$F(z)$, en düşük mertebeden gözlemleyicinin arzu edilen karakteristik denklem polinomu ($F(z)$, $n-1$ mertebeden polinomdur). Sistem çıkışının, yalnız ölçülebilen durum değişkeni olduğu varsayılır. Dolayısıyla en düşük mertebeden gözlemleyicinin mertebesi $n-1$ 'dir.

Kontrol Sistemi Mimarisi - 1: Birinci tip mimarideki kontrol sisteminin blok çizimi çıkışın referans girişini takip ettiği bir yapıya sahiptir. Sistemin blok çizimi aşağıdaki gibi verilmiştir.



Şekil 5.1 Mimari-1 kontrol sisteminin blok çizimi (Ogata, 1995)

Bölüm 4'de söylendiği gibi, kontrol sistemi ayarlanabilen K_0 kazanç sabitine sahip olması gerekir. Kazanç sabiti, sistemin girişine birim basamak girişi uygulandığı zaman $y(k)$ kalıcı hal çıkışının bire eşit olacak şekilde ayarlanmalıdır. Sistemin $\frac{Y(z)}{R(z)}$ kapalı çevrim darbe transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilmiştir

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{R(z)} &= K_0 \frac{\frac{B(z)}{A(z)}}{1 + \frac{B(z)\beta(z)}{A(z)\alpha(z)}} = K_0 \frac{\frac{B(z)}{A(z)}}{\frac{A(z)\alpha(z) + B(z)\beta(z)}{A(z)\alpha(z)}} \\ &= K_0 \frac{\alpha(z)B(z)}{\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z)} \end{aligned} \quad (5.17)$$

(5.16) göz önüne alınarak

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = K_0 \frac{\alpha(z)B(z)}{H(z)F(z)} \quad (5.17(a))$$

Dikkat edilmelidir ki, verilmiş olan kontrol sisteminin mertebesi $\frac{Y(z)}{R(z)}$ darbe transfer fonksiyonunun payı ve paydasındaki polinomların birbirleriyle, daha doğrusu $\alpha(z)B(z)$ ile $H(z)F(z)$ polinomları sadeleşmedikçe $(2n-1)$ olacaktır. Şuna dikkat edilmesi gerekir ki, darbe transfer fonksiyonunun payının dinamiği $B(z)$ 'den $K_0\alpha(z)B(z)$ 'ye değişmiştir. (Buna aksi olarak, albölüm 4.3.5'de bahsedildiği gibi, gözlenmiş durumun uygulandığı kutup atama yöntemi, kapalı çevrim sisteminin transfer fonksiyonu payının dinamiği üzerinden etkili değildir ya da kapalı çevrim transfer fonksiyonunun payının dinamiğini kontrol edemez).

Yukarıda K_0 için verilen tanım dikkate alınarak kazanç sabiti son değer teoremi kullanılarak ve girişi birim basamak alarak, $R(z) = \frac{z}{z-1}$ aşağıdaki gibi bulunabilir

$$\begin{aligned} y_{ss} &= \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})Y(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} K_0 \frac{\alpha(z)B(z)}{H(z)F(z)} \frac{z}{z-1} \\ &= K_0 \frac{\alpha(1)B(1)}{H(1)F(1)} = 1 \end{aligned} \quad (5.18)$$

(5.18) denkleminde

$$K_0 = \frac{H(1)F(1)}{\alpha(1)B(1)} \quad (5.19)$$

olarak elde edilir.

Kontrol Sistemi Mimarisi - 2: Polinomsal denklemler yaklaşımıyla tasarlanabilen kontrol sistemin bir diğer mimarisi Şekil 5.2'de verilmiştir. Bu mimaride verilmiş kontrol sisteminin denklemi aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır

$$U(z) = - \left[\frac{\alpha(z)}{F(z)} U(z) - U(z) + \frac{\beta(z)}{F(z)} Y(z) \right] + K_0 R(z) \quad (5.20)$$

(5.20) denklemi aşağıda verilen denkleme basitleştirilerek yazılabilir

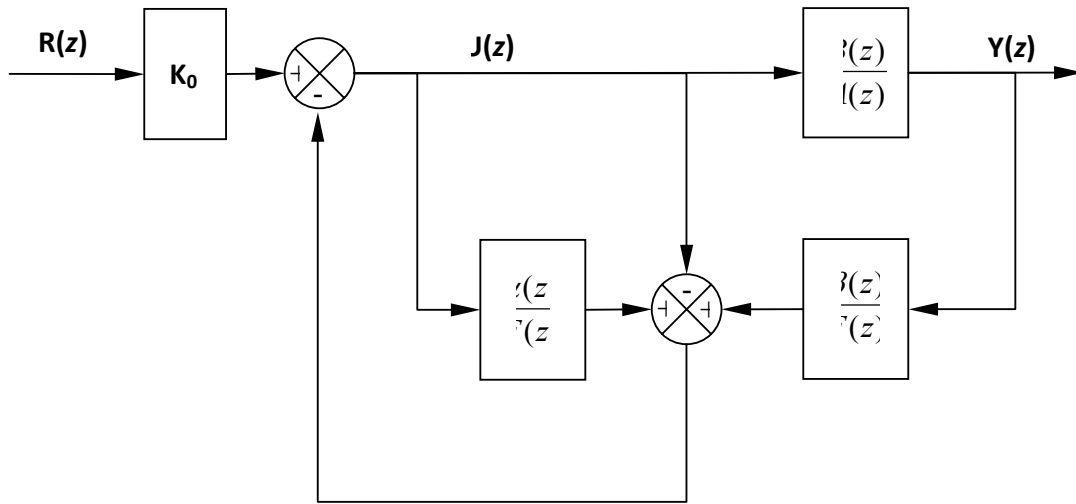
$$\frac{\alpha(z)}{F(z)}U(z) = -\frac{\beta(z)}{F(z)}Y(z) + K_0R(z) \quad (5.21)$$

Sistemin $\frac{Y(z)}{U(z)}$ darbe transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi verilir

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (5.22)$$

burada

$A(z)$, n mertebeden tekil polinom, $B(z)$, m mertebeden polinomdur ($m \leq n$)



Şekil 5.2 Mimari-2 kontrol sisteminin blok çizimi (Ogata, 1995)

$$U(z) = \frac{A(z)}{B(z)}Y(z) \quad (5.23)$$

olduğundan (5.23) denkleminin (5.21) denkleminde yerine konulması aşağıdaki denklemi verecektir

$$\left[\frac{\alpha(z)}{F(z)} \frac{A(z)}{B(z)} + \frac{\beta(z)}{F(z)} \right] Y(z) = K_0 R(z) \quad (5.24)$$

daha sonra

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0}{\frac{\alpha(z)}{F(z)} \frac{A(z)}{B(z)} + \frac{\beta(z)}{F(z)}} = \frac{K_0 F(z) B(z)}{\alpha(z) A(z) + \beta(z) B(z)} \quad (5.25)$$

$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = H(z)F(z)$ olduğundan, (5.25) denklemi aşağıdaki şekilde yazılmış olacaktır

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0 F(z) B(z)}{H(z) F(z)} = \frac{K_0 B(z)}{H(z)} \quad (5.26)$$

Şuna dikkat edilmelidir ki, sistemin transfer fonksiyonunun elde edilmesi (5.26) denkleminin payı ve paydasında $F(z)$ gözlemleyici polinomunun sadeleşmesiyle sonuçlandı. $F(z)$ polinomu sabit bir polinom olduğundan bunun sadeleşmesi genel sistemi etkilemez. $F(z)$ 'in sadeleşmesi kabuledilebilir bir işlemdir. Bununla beraber, kapalı çevrim sisteminin karakteristik polinomu $H(z)$ polinomu ile verilmiş oldu. $H(z)$, kutup atama problemi için çözülen sistemin arzu edilen karakteristik denkleminin polinomudur. $H_1(z)$, n mertebeden bir sabit polinomdur. Bu nedenle, Mimari-2'de tasarlanacak olan kontrol sisteminin mertebesi de n 'dir. Dikkat edilirse, Mimari-1'deki kontrol sistemi tartışılırken sistemin mertebesi, darbe transfer fonksiyonun payı ve paydasındaki polinomların birbirileriyle sadeleşmedikçe $(2n-1)$ olacağı söylenmişti. Şunu da söylemek gerekir ki, ilk tartışılan sisteme karşılık, Mimari-2'deki sistemin payının (5.22) denkleminde bakıldığına değişmediği farkedilebilir.

5.3 Model Eşlemeli Kontrol Sistemlerinin Tasarımı

Mimari-2 kontrol sistemi yapısının anlatıldığı bir önceki kısımda $F(z)$ gözlemleyici polinomu (5.26) denklemiyle verilen kapalı çevrim darbe transfer fonksiyonunun payı ile paydasının sadeleşmesi sonucu kısaltılmıştı. Tasarlanmış sistemin karakteristik denklemi n mertebeden bir $H(z)$ sabit polinomla verilmişti ($H(z)$, n mertebeden arzu edilen sabit polinom olduğu söylenmişti).

Plantın, yine aşağıdaki şekilde tanımlanan darbe transfer fonksiyonuyla verildiği varsayalım

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (5.27)$$

burada $A(z)$, n mertebeden bir tekil polinomdur, $B(z)$, m mertebeden bir polinomdur ($m \leq n$), ($A(z)$ ve $B(z)$ polinomların ortak bölenler içermediği varsayılır). $B(z)$ polinomunun sabit olduğu (sıfırların tamamı z - düzlemindeki birim dairenin içerisinde olduğu düşünülerek) durumda aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi $B(z)$ polinomunu içeren bir $H(z)$ polinomunun seçilmesi mümkün olabilmektedir

$$H(z) = B(z)H_1(z) \quad (5.28)$$

Daha sonra (5.28) denklemi dikkate alınarak (5.26) denklemi aşağıdaki gibi verilebilir

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0 B(z)}{H(z)} = \frac{K_0 B(z)}{B(z)H_1(z)} = \frac{K_0}{H_1(z)} \quad (5.29)$$

Dikkat edilirse, (5.29) denkleminin payı ve paydasının sadeleşerek $B(z)$ polinomunun kısaltılması paydadaki polinomun sıfırlarının çıkarıldığını ifade etmektedir. Bu da, plant sıfırlarının istendiği kadar çıkarılabilmesi mümkün olduğu anlamına gelmektedir.

Transfer fonksiyonun payında arzu edilen sıfırların ve paydasında arzu edilen kutupların olması istendiği varsayılınsın. Başka bir deyişle aşağıda gösterildiği ve daha önce (5.27)'de verildiği gibi sistemin “model sisteme” benzer bir tarzda arzu edilen kutuplar ve sıfırlara sahip olması istensin

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = G_{\text{model}} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} \quad (5.30)$$

Belirli koşulların sağlanması şartıyla polinomsal denklemler yaklaşımıyla benzer sistemin tasarlanması mümkün olabilmektedir. Sistemin darbe transfer fonksiyonunun model sisteminin darbe transfer fonksiyonunu tamamıyla eşlemesi söz konusu olduğundan bu tür sistemlere *model eşlemeli kontrol sistemleri* adı verilir.

Alt bölüm 5.2’de bahsedilen tasarlama yönteminde $H(z)$ polinomu n mertebeden arzu edilen polinom olarak seçilmiştir. ($H(z)$, n mertebeden sabit fakat benzersiz olmayan bir polinom olmasından ziyade sistem cevabının kabuledilebilir olması şartıyla keyfi seçilebilen bir

polinomdur). $H_1(z)$ polinomu, $n - m$ mertebeden bir sabit polinom olarak seçilsin. ($H_1(z)$, sistem cevabının kabuledilebilir olması şartıyla keyfi seçilebilen bir polinomdur. Buradaki “keyfi seçilebilen” ifadesinin tam anlamı $H_1(z)$ ’nin sabit polinom olmasıdır). $B(z)$ ile $H_1(z)$ polinomlarının çarpımı aşağıdaki gibi $H(z)$ olarak tanımlansın

$$H(z) = B(z)H_1(z) \quad (5.31)$$

5.3.1 Model Eşlemeli Kontrol Sistemi

İlk olarak, Şekil 5.3’de verilen blok çizimine göz atalım. $\frac{B(z)}{A(z)}$ plantının tam durum kontroledilebilir ve tam gözlemlenebilir olduğu, dolayısıyla $A(z)$ ve $B(z)$ polinomlarının ortak bölenler içermediği varsayalım. $\alpha(z)$ ve $\beta(z)$ polinomları aşağıdaki Dophantine denklemi çözülerek tanımlanır

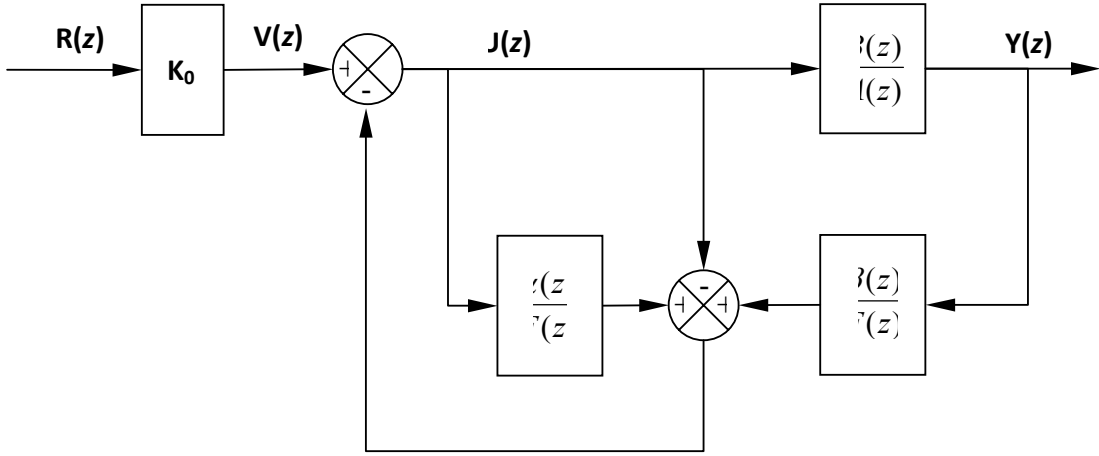
$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = F(z)B(z)H_1(z) \quad (5.32)$$

burada $F(z)$, $(n - 1)$ mertebeden sabit bir polinomdur. $\alpha(z)$ ve $\beta(z)$ ’ler, $(n - 1)$ mertebeden polinomlardır. Daha sonra Şekil 5.3’deki blok çiziminden sistemin denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$U(z) = - \left[\frac{\alpha(z)}{F(z)}U(z) - U(z) + \frac{\beta(z)}{F(z)}Y(z) \right] + V(z) \quad (5.33)$$

veya

$$\frac{\alpha(z)}{F(z)}U(z) + \frac{\beta(z)}{F(z)}Y(z) = V(z) \quad (5.34)$$



Şekil 5.3 Model eşlemeli kontrol sisteminin blok çizimi

$$U(z) = \frac{A(z)}{B(z)} Y(z) \quad (5.35)$$

olduğundan (5.35) denklemini (5.33) denkleminde yerine konulması aşağıdaki denklemi vermiş olacaktır

$$\frac{\alpha(z)}{F(z)} \frac{A(z)}{B(z)} Y(z) + \frac{\beta(z)}{F(z)} Y(z) = V(z) \quad (5.36)$$

veya

$$\frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{F(z)B(z)}{\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z)} = \frac{F(z)B(z)}{F(z)B(z)H_1(z)} = \frac{1}{H_1(z)} \quad (5.37)$$

Aynı zamanda

$$V(z) = G_{\text{model}} H_1(z) R(z) \quad (5.38)$$

Dolayısıyla

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{Y(z) V(z)}{V(z) R(z)} = \frac{G_{\text{model}} H_1(z)}{H_1(z)} = G_{\text{model}} \quad (5.39)$$

Son (5.38) ve (5.39) denklemlerine bakılırsa

$$\frac{V(z)}{R(z)} = G_{\text{model}} H_1(z) \text{ olarak belirlendiğinde } Y(z) \text{ ve } R(z) \text{ arasındaki darbe transfer fonksiyonunun}$$

G_{model} olacağı gösterilebilir. Dolayısıyla (5.30) denkleminde belirtildiği gibi belli bir sistemin darbe transfer fonksiyonunun model sisteminin darbe transfer fonksiyonunu tamamıyla eşlediği görülmüştür.

5.3.2 Model Eşlemeli Kontrol Sisteminin Tasarımı Üzerinde Yorumlar

Polinomsal denklemler yaklaşımını model eşlemeli kontrol sistemlerinin tasarımında uygularken aşağıdaki hususlar hatırd tutulmalıdır

1. $G_{\text{model}} H_1(z)$ darbe transfer fonksiyonunun fiziksel olarak gerçekleştirilebilir olması için $G_{\text{model}} H_1(z)$ 'nin payındaki polinomun derecesi $G_{\text{model}} H_1(z)$ 'in paydasındaki polinomun derecesine eşit ya da küçük olmalıdır. Aksi takdirde mevcut yaklaşım geçersiz olabilir.
2. Önceden belirtildiği gibi plantın darbe transfer fonksiyonunun payındaki $B(z)$ polinomu sabit olmalıdır. Aksi takdirde, $\frac{Y(z)}{V(z)}$ 'in payı ile paydasının sadeleşmesi $B(z)$ polinomunun kısaltılmasına yol açar. $B(z)$ 'in kısaltılması daha sonra kararsız cevapla sonuçlanır. Böylece, sistem kararsız bir sisteme dönüşür.

6. UYGULAMALAR

Şimdiye kadar kontrol sistemlerinin kutup atama ve polinomsal denklemler yaklaşımı ile tasarımı üzerinde tartışılmıştı. Konuyla ilgili olarak her iki yöntemle ilişkin teorik bilgi sunulmuştu. Söz konusu iki yöntemin pratikte nasıl uygulandığını anlamak için ileride dört adet örnek problem sunulacaktır. Daha sonra her problemin çözümü sağlanacaktır. Görüleceği üzere kontrol sistemlerinin adı geçen iki yöntemle başarılı olarak tasarlanabildiği gösterilmiş olacaktır.

Problem 1. Bir sürekli zamanlı sistemin durum uzayı gösterimi aşağıdaki şekilde verilmiştir (Ogata, 2002). T örnekleme zamanının 0.5sn olduğunu kabul ederek sürekli zamanlı sistemi ayrıklaştırınız. Daha sonra aşağıdaki dört adet şıkkı çözünüz. Sistemin tam durum kontroledilebilir ve tam gözlemlenebilir olduğundan emin olunuz.

Tüm şıklar çözüldükten sonra polinomsal denklemler yaklaşımıyla mimarisi Şekil 5.1’de gösterilen Mimari-1 kontrol sistemini tasarlayınız. Tasarlanacak sistemin birim basamak ve birim rampa cevaplarını elde ediniz. Kutup atama ve polinomsal denklemler yaklaşımıyla tasarlanacak olan sistemlerin aynı sonucu sağlayacağını gösteriniz.

Daha sonra benzer biçimde mimarisi Şekil 5.2’de gösterilen Mimari-2 kontrol sistemini tasarlayınız. Aynı şekilde sistemin birim basamak ve birim rampa cevaplarını elde ediniz. Elde edilen iki farklı mimarideki sistemin birim basamak ve birim rampa cevaplarını karşılaştırınız.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (6.1)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

- a. Kontrol sinyali $u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$ olarak verildiğinde kapalı çevrim sisteminin $\mathbf{x}(0)$ başlangıç durumuna ölüvuruş cevabı sağlayacak şekilde \mathbf{K} durum geribeslemeli kazanç matrisini belirleyiniz. Sistemin, $x(0)$ başlangıç durumuna göstereceği cevabını belirleyiniz. Başlangıç durumları aşağıdaki gibi verilmiştir

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

- b.** Sistemin $y(k)$ çıkışının yalnız ölçülebilir durum olduğunu varsayarak hata sinyalinin gözlemleyici hatasına ölüvuruşlu cevabı sağlayacak şekilde en düşük mertebeden durum gözlemleyicisini tasarlayınız.
- c.** Gözlenmiş durumun geribesleme için uygulandığını varsayarak sistemin aşağıdaki şekilde verilen $x(0)$ başlangıç durumu ve en düşük mertebeden gözlemleyici için $\hat{e}(k)$ gözlemleyici başlangıç hatasına sağlayacağı cevabını elde ediniz.

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{e}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

- d.** Gözlemleyici regülatörün $G_D(z)$ darbe transfer fonksiyonunu elde ediniz

Çözüm

$T = 0.5$ sn olduğunu kabul ederek sürekli zamanlı sistemi (3.107) MATLAB komutu ile ayrıklaştırılmış hale getirelim. Ayrıklaştırıldıktan sonra elde edilen ayrık zamanlı sistem aşağıdaki gibidir

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9837 & 0.4569 & 0.0373 \\ -0.0746 & 0.7972 & 0.0839 \\ -0.1677 & -0.4939 & -0.0415 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.0081 \\ 0.0373 \\ 0.0839 \end{bmatrix} u(k) \quad (6.5)$$

$$y(k) = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

\mathbf{K} geribesleme kazanç matrisini bulmak için ilk önce sistemin tam durum kontroledilebilir olup olmadığının öğrenilmesi gerekir. Bunun için (3.112) denkleminde yararlanarak sistemin kontroledilebilirlik matrisini elde edip daha sonra bunun rankını öğrenelim

$$\text{rank}[\mathbf{H}:\mathbf{GH}:\mathbf{G}^2\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} 0.0081 & 0.0282 & 0.0434 \\ 0.0373 & 0.0362 & 0.0248 \\ 0.0839 & -0.0233 & -0.0216 \end{bmatrix} = 3 \quad (6.7)$$

Görüldüğü gibi, matrisin rankı sistemin mertebesi ile aynıdır. Sistem tam durum kontroledilebilirdir. Dolayısıyla, sistemin arzu edilen kutuplarının yerleştirilmesi mümkündür. Daha sonra gözlemleyici tasarlama aşamasında \mathbf{K}_e gözlemleyici geribesleme kazanç matrisini belirlemek için sistemin tam gözlemlenebilir olup olmadığının öğrenilmesi gerekir. Eğer sistem gözlemlenebilir ise gözlemleyici kutuplarını yerleştirecek olan \mathbf{K}_e matrisin bulunması mümkündür. Bunun için (3.123) denkleminde yararlanarak sistemin gözlemlenebilirlik matrisini elde edip daha sonra bunun rankını öğrenelim

$$\text{rank}[\mathbf{C}^*:\mathbf{G}^*\mathbf{C}^*:(\mathbf{G}^*)^2\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.9837 & 0.4569 & 0.0373 \\ 0.9274 & 0.7952 & 0.0735 \end{bmatrix} = 3 \quad (6.8)$$

Görüldüğü gibi, matrisin rankı sistemin mertebesi ile aynıdır. Sistem tam gözlemlenebilirdir. Dolayısıyla gözlemleyicinin arzu edilen kutuplarının yerleştirilmesi mümkündür.

a. Sistemin ölüvuruşlu cevabı sağlaması gerektiğini, başka bir deyişle arzu edilen kutupların orijinde yerleşmesi gerektiğini dikkate alarak, \mathbf{K} matrisi (4.62) denklemiyle verilen formülle bulunabilir

$$\mathbf{K} = [\alpha_3 - a_3 : \alpha_2 - a_2 : \alpha_1 - a_1] \mathbf{T}^{-1} \quad (6.9)$$

burada α_1, α_2 ve α_3 katsayıları, durum geribeslemeli sistemin arzu edilen karakteristik denklemin katsayılarıdır. Sistemin arzu edilen karakteristik denklemi aşağıdaki şekilde yazılır

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| = z^3 + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z + \alpha_3 = 0 \quad (6.10)$$

Sistemin arzu edilen kutupları orijinde yerleşeceğinden α_1, α_2 ve α_3 katsayıları sıfır olacaktır:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \quad (6.11)$$

Bunu dikkate alarak sistemin arzu edilen karakteristik denklemi yeniden aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| = z^3 = 0 \quad (6.12)$$

Daha sonra (6.9) denkleminde yerine konur:

$$\mathbf{K} = [-a_3 \ : \ -a_2 \ : \ -a_1] \mathbf{T}^{-1} \quad (6.13)$$

(6.13) denklemindeki \mathbf{T} dönüşüm matrisi (3.134) denklemi ile bulunur

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}\mathbf{W} \quad (6.14)$$

burada

$\mathbf{M} = [\mathbf{H} : \mathbf{G}\mathbf{H} : \mathbf{G}^2\mathbf{H}]$, (6.7) denklemi ile bulunan kontroledilebilirlik matrisidir.

ve

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

\mathbf{W} matrisinin a_i elemanları karakteristik denklemden aşağıdaki gibi bulunur

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0 \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned}
|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| &= \begin{vmatrix} z - 0.9837 & -0.4569 & -0.0373 \\ 0.0746 & z - 0.7972 & -0.0839 \\ 0.1677 & 0.4939 & z + 0.0415 \end{vmatrix} \\
&= z^3 - 1.7394z^2 + 0.7919z - 0.0124 = 0
\end{aligned} \tag{6-17}$$

Böylece, karakteristik denklemin a_i katsayıları aşağıdaki gibi belirlenir

$$a_1 = -1.7394, a_2 = 0.7919, a_3 = -0.0124 \tag{6.18}$$

Daha sonra (6.15), aşağıdaki şekilde yazılmış olacaktır

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0.7919 & -1.7394 & 1 \\ -1.7394 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

(6.19) ve (6.7) denklemleri dikkate alınarak (6.14) denklemini aşağıdaki şekilde yazılmış olacaktır

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} = \mathbf{M}\mathbf{W} &= \begin{bmatrix} 0.0081 & 0.0282 & 0.0434 \\ 0.0373 & 0.0362 & 0.0248 \\ 0.0839 & -0.0233 & -0.0216 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.7919 & -1.7394 & 1 \\ -1.7394 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.0008 & 0.0140 & 0.0081 \\ -0.0086 & -0.0287 & 0.0373 \\ 0.0853 & -0.1692 & 0.0839 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Elde edilen \mathbf{T} matrisin (6.13) denkleminde yerine konulması, bulunması amaçlanan aşağıdaki \mathbf{K} matrisini vermiş olacaktır

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &= [0.0124 \quad -0.7919 \quad -1.7394] \cdot \begin{bmatrix} 0.0008 & 0.0140 & 0.0081 \\ -0.0086 & -0.0287 & 0.0373 \\ 0.0853 & -0.1692 & 0.0839 \end{bmatrix} \\
&= [41.53 \quad 31.20 \quad 2.82]
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Elde edilmiş olan \mathbf{K} matrisi ile sistemin denklemini aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) = (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0.9837 & 0.4569 & 0.0373 \\ -0.0746 & 0.7972 & 0.0839 \\ -0.1677 & -0.4939 & -0.0415 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0081 \\ 0.0373 \\ 0.0839 \end{bmatrix} \cdot [41.53 \ 31.20 \ 2.82] \right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0.9837 & 0.4569 & 0.0373 \\ -0.0746 & 0.7972 & 0.0839 \\ -0.1677 & -0.4939 & -0.0415 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.3382 & 0.2541 & 0.0230 \\ 1.5491 & 1.1638 & 0.1052 \\ 3.4831 & 2.6157 & 0.2365 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.22}$$

işlem sonucu durum değişkenleri çözülmüş olur:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6455 & 0.2028 & 0.0143 \\ -1.6237 & -0.366 & -0.0213 \\ -3.6508 & -3.1114 & -0.2785 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \tag{6.22 (a)}$$

Bu sistemin keyfi başlangıç durumuna nasıl cevap vereceğini anlamak için problemin başında verilmiş olan başlangıç durumunu sisteme uygulayalım. Daha sonra görüleceği üzere sistemin cevabı aşağıdaki şekilde değişmiş olacaktır. Yani, $\mathbf{x}(0)$ başlangıç durumunun gittikçe ölüvuruşlu cevabını sağlamış olduğu görülecektir

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6455 & 0.2028 & 0.0143 \\ -1.6237 & -0.366 & -0.0213 \\ -3.6508 & -3.1114 & -0.2785 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6455 \\ -1.6237 \\ -3.6508 \end{bmatrix} \tag{6.23}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \\ x_3(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6455 & 0.2028 & 0.0143 \\ -1.6237 & -0.366 & -0.0213 \\ -3.6508 & -3.1114 & -0.2785 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6455 \\ -1.6237 \\ -3.6508 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0350 \\ -0.3750 \\ 3.7091 \end{bmatrix} \tag{6.24}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \\ x_3(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6455 & 0.2028 & 0.0143 \\ -1.6237 & -0.366 & -0.0213 \\ -3.6508 & -3.1114 & -0.2785 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0350 \\ -0.3750 \\ 3.7091 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0003 \\ 0.0015 \\ 0.0076 \end{bmatrix} \tag{6.25}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(4) \\ x_2(4) \\ x_3(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6455 & 0.2028 & 0.0143 \\ -1.6237 & -0.366 & -0.0213 \\ -3.6508 & -3.1114 & -0.2785 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0003 \\ 0.0015 \\ 0.0076 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0002 \\ -0.0003 \\ -0.0059 \end{bmatrix} \tag{6.26}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(5) \\ x_2(5) \\ x_3(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6455 & 0.2028 & 0.0143 \\ -1.6237 & -0.366 & -0.0213 \\ -3.6508 & -3.1114 & -0.2785 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.0002 \\ -0.0003 \\ -0.0059 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0002 \\ 0.0016 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(6) \\ x_2(6) \\ x_3(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6455 & 0.2028 & 0.0143 \\ -1.6237 & -0.366 & -0.0213 \\ -3.6508 & -3.1114 & -0.2785 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0002 \\ 0.0016 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0001 \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(7) \\ x_2(7) \\ x_3(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6455 & 0.2028 & 0.0143 \\ -1.6237 & -0.366 & -0.0213 \\ -3.6508 & -3.1114 & -0.2785 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

veya $x(k) = \mathbf{0}$, $k = 7, 8, 9, \dots$,

Sistemin ölüvuruşlu cevabı sağladığı görülmektedir.

b. Şimdi $y(k)$ çıkışının yalnız ölçülebilen durumun olduğunu varsayarak en düşük mertebeden durum gözlemleyicisi tasarlayalım. Dikkat edilmelidir ki, $y(k)$, ölçülebilen tek durum değişkeni olduğundan gözetlenecek olan durum değişkenlerinin sayısı 2'dir. Bu nedenle, tasarlanacak olan en düşük mertebeden gözlemleyicinin mertebesi $n = 2$ 'dir. Önceden, en düşük mertebeden gözlemleyici tasarımının $\mathbf{x}(k)$ durum vektörünün ölçülebilir ve ölçülemeyen olmak üzere iki kısma ayrılmasıyla yapılabildiğini hatırlayıp (4.115) denklemini tekrar aşağıda yazalım

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k+1) \\ \mathbf{x}_b(k+1) \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

burada $\mathbf{x}_a(k)$, durum vektörünün doğrudan ölçülebilen kısmıdır (problemden verilen $y(k)$ çıkışıdır). Dolayısıyla, $\mathbf{x}_a(k)$, m ya da 1 vektördür. $\mathbf{x}_b(k)$, durum vektörünün ölçülemeyen kısmıdır, $\mathbf{x}_b(k)$, $n - m$ ya da 3-1 vektördür. O zaman ayrılmış durum denklemleri aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k+1) \\ \mathbf{x}_b(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{aa} & \mathbf{G}_{ab} \\ \mathbf{G}_{ba} & \mathbf{G}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_a \\ \mathbf{H}_b \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \quad (6.31)$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} : 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

burada

$\mathbf{G}_{aa} = 1 \times 1$ mertebeden matris

$\mathbf{G}_{ab} = 1 \times 2$ mertebeden matris

$\mathbf{G}_{ba} = 2 \times 1$ mertebeden matris

$\mathbf{G}_{bb} = 2 \times 2$ mertebeden matris

$\mathbf{H}_a = 1 \times 1$ mertebeden matris

$\mathbf{H}_b = 2 \times 1$ mertebeden matris

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k+1) \\ \mathbf{x}_b(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{aa} & \mathbf{G}_{ab} \\ \mathbf{G}_{ba} & \mathbf{G}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_a \\ \mathbf{H}_b \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \quad (6.33)$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} : 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

Şuna dikkat edilmelidir ki, problemde verilen \mathbf{C} çıkış matrisinin ($[1 \ 0 \ 0]$ matrisi) (4.117) denkleminde verilen çıkış matrisi ile aynı olması dönüşüm yapmaksızın gözlemleyici tasarlamaya başlanabildiğini ifade etmektedir.

(6.31) denkleminde uygun olarak sistemin ayrılmış durum denklemini aşağıdaki şekilde yazılır

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9837 & | & 0.4569 & 0.0373 \\ -0.0746 & | & 0.7972 & 0.0839 \\ -0.1677 & | & -0.4939 & -0.0415 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0081 \\ 0.0373 \\ 0.0839 \end{bmatrix} u(k) \quad (6.35)$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} : 0 \ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

Burada

$$G_{aa} = 0.9837, G_{ab} = [0.4569 \ 0.0373], G_{ba} = \begin{bmatrix} -0.0746 \\ -0.1677 \end{bmatrix}, G_{bb} = \begin{bmatrix} 0.7972 & 0.0839 \\ -0.4939 & -0.0415 \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

$$H_a = 0.0081, H_b = \begin{bmatrix} 0.0373 \\ 0.0839 \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

(4.137) denklemini dikkate alınarak

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab} &= \begin{bmatrix} 0.7972 & 0.0839 \\ -0.4939 & -0.0415 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{e_1} \\ k_{e_2} \end{bmatrix} \cdot [0.4569 \ 0.0373] \\ &= \begin{bmatrix} 0.7972 - 0.4569k_{e_1} & 0.0839 - 0.0373k_{e_1} \\ -0.4939 - 0.4569k_{e_2} & -0.0415 - 0.0373k_{e_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.39)$$

Daha sonra (4.137) denklemini mevcut probleme uygun olarak aşağıdaki şekilde yazılmış olacak

$$\begin{aligned} |z\mathbf{I} - \mathbf{G}_{bb} + \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}| &= \begin{vmatrix} z - 0.7972 + 0.4569k_{e_1} & -0.0839 + 0.0373k_{e_1} \\ 0.4939 + 0.4569k_{e_2} & z + 0.0415 + 0.0373k_{e_2} \end{vmatrix} \\ &= z^2 + (0.4569k_{e_1} + 0.0373k_{e_2} - 0.7557)z \\ &\quad + (0.0012k_{e_1} + 0.0013k_{e_2} + 0.0084) \end{aligned} \quad (6.40)$$

En düşük mertebeden gözlemleyicinin hata dinamiğinin arzu edilen karakteristik denklemini aşağıdaki şekilde yazılır

$$z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 = 0 \quad (6.41)$$

Ölüvuruşlu cevabın sağlanması istendiğinden gözlemleyicinin arzu edilen kutupları orijinde yerleşecek. Bu nedenle α_1 ve α_2 katsayıları sıfır olacaktır ya da

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad (6.42)$$

Dolayısıyla hata dinamiğinin arzu edilen karakteristik denklemini aşağıdaki şekilde yazılır

$$z^2 = 0 \quad (6.43)$$

Buradan

$$\begin{cases} 0.4569k_{e_1} + 0.0373k_{e_2} - 0.7557 = 0 \\ 0.0012k_{e_1} + 0.0013k_{e_2} + 0.0084 = 0 \end{cases} \quad (6.44)$$

(6.44) denklemini k_{e_1} ve k_{e_2} için çözümlerse aşağıdaki \mathbf{K}_e gözlemleyici geribeslemeli kazanç matrisi elde edilmiş olur

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 1.7422 \\ -1.0808 \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

c. En düşük mertebeden gözlemleyici uygulanarak gözlenmiş durum geribeslemeli sistemin dinamiği (4.154) denklemini ile tanımlanmaktadır

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{e}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{HK} & | & \mathbf{HK}\Gamma \\ \hline 0 & | & \mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

Gözlenmiş durumun geribesleme için uygulandığını dikkate alarak ($u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$) (6.46) denklemini $\mathbf{x}(k)$ durum vektörü ve $\hat{\mathbf{e}}(k)$ hata vektörü cinsinden aşağıdaki şekilde yazılır

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) - \mathbf{HK}\mathbf{x}(k) \\ &= (\mathbf{G} - \mathbf{HK})\mathbf{x}(k) + \mathbf{HK}[\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)] \\ &= (\mathbf{G} - \mathbf{HK})\mathbf{x}(k) + \mathbf{HK}\Gamma\hat{\mathbf{e}}(k) \end{aligned} \quad (6.47)$$

burada Γ , (4.152) denklemini ile tanımlanan matristir. (4.152) denklemini dikkate alınarak Γ matrisi problemimize uygun olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

Daha sonra (6.46) denklemindeki matrisin terimleri aşağıdaki şekilde bulunur

$$\begin{aligned} \mathbf{G} - \mathbf{HK} &= \begin{bmatrix} 0.9837 & 0.4569 & 0.0373 \\ -0.0746 & 0.7972 & 0.0839 \\ -0.1677 & -0.4939 & -0.0415 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0081 \\ 0.0373 \\ 0.0839 \end{bmatrix} \cdot [41.53 \ 31.20 \ 2.82] \\ &= \begin{bmatrix} 0.6455 & 0.2028 & 0.0143 \\ -1.6237 & -0.366 & -0.0213 \\ -3.6508 & -3.1114 & -0.2785 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.49)$$

$$\mathbf{HK}\Gamma = \begin{bmatrix} 0.0081 \\ 0.0373 \\ 0.0839 \end{bmatrix} \cdot [41.53 \ 31.20 \ 2.82] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2541 & 0.0230 \\ 1.1638 & 0.1052 \\ 2.6167 & 0.2365 \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

(6.45) denklemindeki k_{e_1} ve k_{e_2} katsayıları dikkate alınarak (6.39) denklemini aşağıdaki şekilde yazılır

$$\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab} = \begin{bmatrix} 0.0012 & 0.0189 \\ -0.0001 & -0.0012 \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

Elde edilen terimler dikkate alınarak (6.46) denkleminde verilen matris aşağıdaki şekilde yazılır

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ \hat{e}_1(k+1) \\ \hat{e}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6455 & 0.2028 & 0.0143 & 0.2541 & 0.0230 \\ -1.6237 & -0.3666 & -0.0213 & 1.1638 & 0.1052 \\ -3.6508 & -3.1107 & -0.2780 & 2.6167 & 0.2365 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0012 & 0.0189 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0001 & -0.0012 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \hat{e}_1(k) \\ \hat{e}_2(k) \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

Elde edilen sistemin verilmiş başlangıç duruma cevabı aşağıdaki şekilde elde edilebilir. İlk önce, (6.4) denklemini dikkate alarak başlangıç durumunu aşağıdaki gibi tanımlayalım

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ \hat{e}_1(0) \\ \hat{e}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

buna göre

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ \hat{e}_1(0) \\ \hat{e}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.54)$$

durum değişkenleri aşağıdaki gibi hesaplanır

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \\ \hat{e}_1(1) \\ \hat{e}_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6455 & 0.2028 & 0.0143 & 0.2541 & 0.0230 \\ -1.6237 & -0.3666 & -0.0213 & 1.1638 & 0.1052 \\ -3.6508 & -3.1107 & -0.2780 & 2.6167 & 0.2365 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0012 & 0.0189 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0001 & -0.0012 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6685 \\ -1.5185 \\ -3.4143 \\ 0.0189 \\ -0.0012 \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \\ x_3(2) \\ \hat{e}_1(2) \\ \hat{e}_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6455 & 0.2028 & 0.0143 & 0.2541 & 0.0230 \\ -1.6237 & -0.3666 & -0.0213 & 1.1638 & 0.1052 \\ -3.6508 & -3.1107 & -0.2780 & 2.6167 & 0.2365 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0012 & 0.0189 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0001 & -0.0012 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.6685 \\ -1.5185 \\ -3.4143 \\ 0.0189 \\ -0.0012 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0794 \\ -0.4341 \\ 3.2816 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \\ x_3(3) \\ \hat{e}_1(3) \\ \hat{e}_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6455 & 0.2028 & 0.0143 & 0.2541 & 0.0230 \\ -1.6237 & -0.3666 & -0.0213 & 1.1638 & 0.1052 \\ -3.6508 & -3.1107 & -0.2780 & 2.6167 & 0.2365 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0012 & 0.0189 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0001 & -0.0012 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.0794 \\ -0.4341 \\ 3.2816 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0102 \\ -0.0397 \\ 0.1482 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(4) \\ x_2(4) \\ x_3(4) \\ \hat{e}_1(4) \\ \hat{e}_2(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6455 & 0.2028 & 0.0143 & 0.2541 & 0.0230 \\ -1.6237 & -0.3666 & -0.0213 & 1.1638 & 0.1052 \\ -3.6508 & -3.1107 & -0.2780 & 2.6167 & 0.2365 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0012 & 0.0189 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0001 & -0.0012 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.0102 \\ -0.0397 \\ 0.1482 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0007 \\ -0.0052 \\ 0.0449 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(5) \\ x_2(5) \\ x_3(5) \\ \hat{e}_1(5) \\ \hat{e}_2(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6455 & 0.2028 & 0.0143 & 0.2541 & 0.0230 \\ -1.6237 & -0.3666 & -0.0213 & 1.1638 & 0.1052 \\ -3.6508 & -3.1107 & -0.2780 & 2.6167 & 0.2365 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0012 & 0.0189 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0001 & -0.0012 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.0007 \\ -0.0052 \\ 0.0449 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0002 \\ 0.0013 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(6) \\ x_2(6) \\ x_3(6) \\ \hat{e}_1(6) \\ \hat{e}_2(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6455 & 0.2028 & 0.0143 & 0.2541 & 0.0230 \\ -1.6237 & -0.3666 & -0.0213 & 1.1638 & 0.1052 \\ -3.6508 & -3.1107 & -0.2780 & 2.6167 & 0.2365 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0012 & 0.0189 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0001 & -0.0012 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0002 \\ 0.0013 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0001 \\ -0.0009 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(7) \\ x_2(7) \\ x_3(7) \\ \hat{e}_1(7) \\ \hat{e}_2(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6455 & 0.2028 & 0.0143 & 0.2541 & 0.0230 \\ -1.6237 & -0.3666 & -0.0213 & 1.1638 & 0.1052 \\ -3.6508 & -3.1107 & -0.2780 & 2.6167 & 0.2365 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0012 & 0.0189 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0001 & -0.0012 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0001 \\ -0.0009 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.61)$$

Açıktır ki, sistemin ölüvuruşlu cevap vermektedir. Elde edilen cevaplar, sistemin herhangi bir başlangıç koşuluna göstereceği cevabının yerleşme zamanı en fazla yedi örnekleme zamanına eşit olduğu düşünülebilir. Başka bir ifadeyle söylemek gerekirse, sistemin, hata vektörünün sıfıra inmesi için en fazla iki örnekleme zamanı ve durum vektörünün sıfıra inmesi için ek olarak beş örnekleme zamanına ihtiyaç duyduğu anlamına gelmektedir.

d. Gözlemleyici regülatörün $G_D(z)$ darbe transfer fonksiyonunu elde etmek için sırasıyla (6.35) (6.36) denklemleriyle tanımlanan sistemin durum denklemini ve çıkış denklemini ele alalım. Bölüm 4’de gözlemleyicilerin tasarımı üzerinden tartışılırken (4.131) ve (4.132) denklemleriyle tanımlanan en düşük mertebeden durum gözlemleyicilerin denklemlerinden bahsedilmişti. Problemimize uygun olarak söz konusu denklemleri çözerek hedeflediğimiz en düşük mertebeden gözlemleyicinin darbe transfer fonksiyonunu bulabiliriz. Bu nedenle ilgili denklemleri aşağıda yeniden yazalım

$$\hat{\mathbf{x}}_b(k) - \mathbf{K}_e \mathbf{y}(k) = \bar{\boldsymbol{\eta}}(k) \quad (6.62)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\eta}}(k+1) = & (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}) \tilde{\boldsymbol{\eta}}(k) + [(\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}) \mathbf{K}_e + \mathbf{G}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{aa}] \mathbf{y}(k) \\ & + (\mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{H}_a) \mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (6.63)$$

(6.62) ve (6.63) denklemlerini çözebilmek için önceden bu denklemleri oluşturan terimleri ayrı ayrı çözelim.

$$\begin{aligned} (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}) &= \begin{bmatrix} 0.7972 & 0.0839 \\ -0.4939 & -0.0415 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.7422 \\ -1.0808 \end{bmatrix} \cdot [0.4569 \ 0.0373] \\ &= \begin{bmatrix} 0.0012 & 0.0189 \\ -0.0001 & -0.0012 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.64)$$

$$\mathbf{G}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{aa} = \begin{bmatrix} -0.0746 \\ -0.1677 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.7422 \\ -1.0808 \end{bmatrix} \cdot 0.9837 = \begin{bmatrix} -1.7884 \\ 0.8955 \end{bmatrix} \quad (6.65)$$

$$\mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{H}_a = \begin{bmatrix} 0.0373 \\ 0.0839 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.7422 \\ -1.0808 \end{bmatrix} \cdot 0.0081 = \begin{bmatrix} 0.0232 \\ 0.0927 \end{bmatrix} \quad (6.66)$$

Daha sonra (6.63) denklemi aşağıdaki şekilde yazılmış olacak

$$\tilde{\eta}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.0012 & 0.0189 \\ -0.0001 & -0.0012 \end{bmatrix} \tilde{\eta}(k) + \begin{bmatrix} -1.7884 \\ 0.8955 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 0.0232 \\ 0.0927 \end{bmatrix} u(k) \quad (6.67)$$

(6.67) denkleminin z -dönüşümünün alınması aşağıdaki denklemi vermiş olacak

$$z \tilde{\eta}(z) = \begin{bmatrix} 0.0012 & 0.0189 \\ -0.0001 & -0.0012 \end{bmatrix} \tilde{\eta}(z) + \begin{bmatrix} -1.7884 \\ 0.8955 \end{bmatrix} Y(z) + \begin{bmatrix} 0.0232 \\ 0.0927 \end{bmatrix} U(z) \quad (6.68)$$

veya

$$\begin{bmatrix} z - 0.0012 & -0.0189 \\ 0.0001 & z + 0.0012 \end{bmatrix} \tilde{\eta}(z) = \begin{bmatrix} -1.7884 \\ 0.8955 \end{bmatrix} Y(z) + \begin{bmatrix} 0.0232 \\ 0.0927 \end{bmatrix} U(z) \quad (6.69)$$

(6.69) denklemin $\tilde{\eta}(z)$ için çözülmesi aşağıdaki denklemi vermiş olacak

$$\tilde{\eta}(z) = \begin{bmatrix} z - 0.0012 & -0.0189 \\ 0.0001 & z + 0.0012 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} -1.7884 \\ 0.8955 \end{bmatrix} Y(z) + \begin{bmatrix} 0.0232 \\ 0.0927 \end{bmatrix} U(z) \right) \quad (6.70)$$

\mathbf{A} matrisinin tersi (\mathbf{A}^{-1}) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{Ek\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$ formülü ile bulunabildiği dikkate alınarak (6.70)

denkleminde verilen $\begin{bmatrix} z-0.0012 & -0.0189 \\ 0.0001 & z+0.0012 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi aşağıdaki şekilde bulunabilir

$$Ek\mathbf{A} = \begin{bmatrix} z+0.0012 & 0.0189 \\ -0.0001 & z-0.0012 \end{bmatrix} \quad (6.71)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= (z-0.0012) \cdot (z+0.0012) + 0.00000189 \\ &= (z^2 + 0.0012z - 0.0012z - 0.00000144 + 0.00000189) = z^2 \end{aligned} \quad (6.72)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{z^2} \begin{bmatrix} z+0.0012 & 0.0189 \\ -0.0001 & z-0.0012 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z+0.0012}{z^2} & \frac{0.0189}{z^2} \\ -\frac{0.0001}{z^2} & \frac{z-0.0012}{z^2} \end{bmatrix} \quad (6.73)$$

(6.73)' de bulunan matrisinin (6.70) denkleminin yerine konulması aşağıdaki denklemi vermiş olacaktır

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(z) &= \begin{bmatrix} \frac{z+0.0012}{z^2} & \frac{0.0189}{z^2} \\ -\frac{0.0001}{z^2} & \frac{z-0.0012}{z^2} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} -1.7884 \\ 0.8955 \end{bmatrix} Y(z) + \begin{bmatrix} 0.0232 \\ 0.0927 \end{bmatrix} U(z) \right) \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1.7884z+0.0021}{z^2} + \frac{0.017}{z^2} \\ \frac{0.0001}{z^2} + \frac{0.8955z-0.001}{z^2} \end{bmatrix} Y(z) + \begin{bmatrix} \frac{0.0232}{z} + \frac{0.0017}{z^2} \\ \frac{0.0927z-0.0001}{z^2} \end{bmatrix} U(z) \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1.7884z-0.0149}{z^2} \\ \frac{0.8955z-0.0009}{z^2} \end{bmatrix} Y(z) + \begin{bmatrix} \frac{0.0232z+0.0017}{z^2} \\ \frac{0.0927z-0.0001}{z^2} \end{bmatrix} U(z) \end{aligned} \quad (6.74)$$

(6.62) denklemi aşağıdaki şekilde yazılmış olur

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_b(z) &= \mathbf{K}_e \mathbf{y}(z) + \bar{\eta}(z) \\
&= \begin{bmatrix} 1.7422 \\ -1.0808 \end{bmatrix} Y(z) + \begin{bmatrix} \frac{1.7884z - 0.0149}{z^2} \\ \frac{0.8955z - 0.0009}{z^2} \end{bmatrix} Y(z) + \begin{bmatrix} \frac{0.0232z + 0.0017}{z^2} \\ \frac{0.0927z - 0.0001}{z^2} \end{bmatrix} U(z) \\
&= \begin{bmatrix} 1.7422 - \frac{1.7884z - 0.0149}{z^2} \\ -1.0808 + \frac{0.8955z - 0.0009}{z^2} \end{bmatrix} Y(z) + \begin{bmatrix} \frac{0.0232z + 0.0017}{z^2} \\ \frac{0.0927z - 0.0001}{z^2} \end{bmatrix} U(z)
\end{aligned} \tag{6.75}$$

Kontrol sinyalinin $u(k) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k)$ olarak verildiğini ve Şık b'da $\mathbf{x}(k)$ durum vektörünün ölçülebilir ve ölçülemeyen olmak üzere iki kısma ayrıldığını hatırlayıp elde edilen değerleri $u(k) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k)$ 'nin yerine koyup denklemi aşağıdaki şekilde yazalım

$$\begin{aligned}
u(k) &= -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k) \\
&= -\begin{bmatrix} 41.53 & 31.20 & 2.82 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ \hat{\mathbf{x}}_b(k) \end{bmatrix} \\
&= -[41.53y(k) + [31.20 \ 2.82] \cdot \hat{\mathbf{x}}_b(k)] \\
&= -41.53y(k) - [31.20 \ 2.82] \cdot \hat{\mathbf{x}}_b(k)
\end{aligned} \tag{6.76}$$

(6.76) denkleminin z dönüşümünün alınması aşağıdaki denklemi vermiş olacak

$$U(z) = -41.53Y(z) - [31.20 \ 2.82] \cdot \hat{\mathbf{x}}_b(z) \tag{6.77}$$

(6.75) denklemini dikkate alınarak (6.77) denklemini aşağıdaki şekilde yazılmış olur

$$\begin{aligned}
U(z) &= -41.53Y(z) \\
&- [31.20 \ 2.82] \cdot \left(\left[\begin{array}{c} 1.7422 - \frac{1.7884z - 0.0149}{z^2} \\ -1.0808 + \frac{0.8955z - 0.0009}{z^2} \end{array} \right] Y(z) + \left[\begin{array}{c} \frac{0.0232z + 0.0017}{z^2} \\ \frac{0.0927z - 0.0001}{z^2} \end{array} \right] U(z) \right) \\
&= -[31.20 \ 2.82] \cdot \left[\begin{array}{c} 1.7422 - \frac{1.7884z - 0.0149}{z^2} \\ -1.0808 + \frac{0.8955z - 0.0009}{z^2} \end{array} \right] Y(z) \\
&- [31.20 \ 2.82] \cdot \left[\begin{array}{c} \frac{0.0232z + 0.0017}{z^2} \\ \frac{0.0927z - 0.0001}{z^2} \end{array} \right] U(z) \\
&= \left[-41.53 - \frac{51.3088z^2 - 53.3547z + 0.4623}{z^2} \right] Y(z) - \left[\frac{0.9852z + 0.0528}{z^2} \right] U(z) \tag{6.78}
\end{aligned}$$

veya (6.78) denklemini aşağıdaki şekilde değiştirilip yazılırsa

$$U(z) = \left[-41.53 - \frac{51.3088z^2 - 53.3547z + 0.4623}{z^2} \right] Y(z) - \left[\frac{0.9852z + 0.0528}{z^2} \right] U(z) \tag{6.79}$$

ya da

$$\left[1 + \frac{0.9852z + 0.0528}{z^2} \right] U(z) = \left[-\frac{92.8388z^2 - 53.3547z + 0.4623}{z^2} \right] Y(z) \tag{6.80}$$

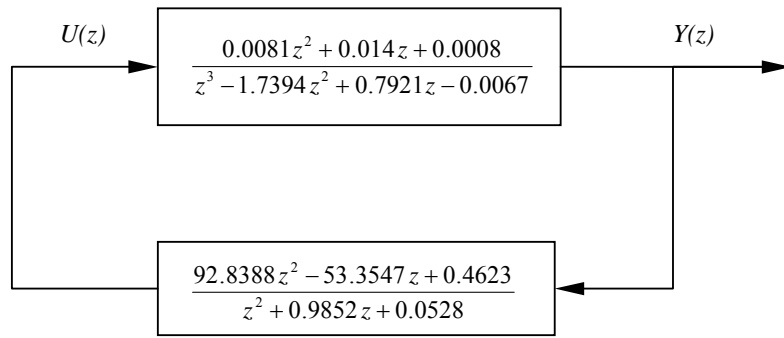
(6.80) denkleminde $G_D(z)$ gözlemleyici regülatörün darbe transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilir

$$G_D(z) = -\frac{U(z)}{Y(z)} = \frac{92.8388z^2 - 53.3547z + 0.4623}{z^2 + 0.9852z + 0.0528} \tag{6.81}$$

Sistemin $G_p(z)$ darbe transfer fonksiyonu (3.72) denkleminde yararlanılıp \mathbf{D} 'nin sıfıra eşit olduğunu dikkate alarak aşağıdaki şekilde bulunabilir

$$G_p(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H} = \frac{0.0081z^2 + 0.014z + 0.0008}{z^3 - 1.7394z^2 + 0.7921z - 0.0067} \quad (6.82)$$

$G_D(z)$ ve $G_p(z)$ darbe transfer fonksiyonlarının elde edilmesi sistemin tasarlanmış olduğu anlamına gelmektedir. Böylece, kutup atama yöntemi uygulanarak elde edilmesi amaçlanan en düşük mertebeden gözlemleyicili gözlenmiş durum geribeslemeli kontrol sistemi tasarlanmış oldu. Tasarlanmış sistemin blok çizimi aşağıda verilmektedir



Şekil 6.1 Kutup atama yöntemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin blok çizimi

Şimdi aynı sistemi polinomsal denklemler yaklaşımıyla tasarlayıp nihai sistemin kutup atama yöntemi ile tasarlanan sistemle aynı olduğunu göstermeye çalışalım.

(6.12) denkleminde atfen sistemin karakteristik denkleminin aşağıdaki şekilde tanımlandığı hatırlanır

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| = z^3 = 0 \quad (6.83)$$

bundan dolayı

$$H(z) = z^3 \quad (6.84)$$

Gözlemleyici hatasının karakteristik denklemi (6.40) denkleminde atfen aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}_{bb} + \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}| = z^2 \quad (6.85)$$

bundan dolayı

$$F(z) = z^2 \quad (6.86)$$

Daha sonra plantın $G_p(z)$ darbe transfer fonksiyonunu belirleyelim. Bunun için (6.82) denklemleriyle önceden tanımlanan darbe transfer fonksiyonu aşağıda yeniden yazalım

$$G_p(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H} = \frac{0.0081z^2 + 0.014z + 0.0008}{z^3 - 1.7394z^2 + 0.7921z - 0.0067} \quad (6.87)$$

Bölüm 5’de, darbe transfer fonksiyonunun $A(z)$ ve $B(z)$ polinomları cinsinden incelenebildiği gösterilmişti. (5.1) denkleminde uygun olarak (6.87) ile tanımlanan transfer fonksiyonu $A(z)$ ve $B(z)$ polinomları cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilir

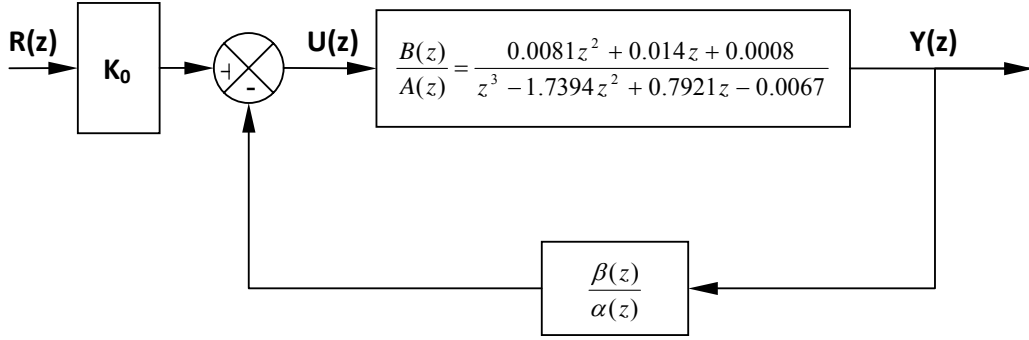
$$A(z) = z^3 - 1.7394z^2 + 0.7921z - 0.0067 \quad (6.88)$$

$$B(z) = 0.0081z^2 + 0.014z + 0.0008 \quad (6.89)$$

burada

$$\begin{aligned} a_1 &= -1.7394, a_2 = 0.7921, a_3 = -0.0067, \\ b_0 &= 0, b_1 = 0.0081, b_2 = 0.014, b_3 = 0.0008 \end{aligned} \quad (6.90)$$

Şekil 5.1’de verilen sistemin blok çizimine uygun olarak mevcut sistemin blok çizimi Şekil 6.2’de gösterilmiştir.



Şekil 6.2 Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin blok çizimi

Bütün sistemin (gözlenmiş durum geribeslemeli sistem) karakteristik polinomu (5.4) denklemi dikkate alınarak aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$D(z) = H(z)F(z) = z^3 \cdot z^2 = z^5 \quad (6.91)$$

(6.91) denkleminin katsayıları aşağıdaki gibidir

$$d_0 = 1, \quad d_2 = 0, \quad d_3 = 0, \quad d_4 = 0, \quad d_5 = 0 \quad (6.92)$$

Şekil 6.2'de gösterilen sistemin transfer fonksiyonu (5.17) denklemiyle verilir aşağıdaki şekilde yazılır

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = K_0 \frac{\alpha(z)\beta(z)}{\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z)} \quad (6.93)$$

(6.93) denkleminin sistemin karakteristik denklemi aşağıdaki şekilde yazılır

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = 0 \quad (6.94)$$

Bölüm 5'de, kontrol sisteminin tasarımı aşağıda verilmiş denklemin çözümüne dayalı olduğu söylenmiştir

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = H(z)F(z) = D(z) \quad (6.95)$$

Dolayısıyla (6.88) ile (6.89) denklemleriyle verilen polinomlar ve (6.91) ile verilen karakteristik polinom dikkate alınarak son denklem aşağıdaki şekilde yazılmış olur

$$\alpha(z)(z^3 - 1.7394z^2 + 0.7921z - 0.0067) + \beta(z)(0.0081z^2 + 0.014z + 0.0008) = z^5 \quad (6.96)$$

(6.96) denklemi, denetleyicinin darbe transfer fonksiyonunun çözümüdür. (6.96) denklemi $\alpha(z)$ ve $\beta(z)$ için (5.8) ile verilen $2n \times 2n$ mertebeden \mathbf{E} Sylvester matrisi ile çözülebilir. Mevcut sistemin $n = 3$ mertebeden olduğu düşünülerek \mathbf{E} matrisi 6×6 mertebeden matrise dönüşür. Bu matris aşağıdaki şekilde yazılır

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -0.0067 & 0 & 0 & 0.0008 & 0 & 0 \\ 0.7921 & -0.0067 & 0 & 0.0140 & 0.0008 & 0 \\ -1.7394 & 0.7921 & -0.0067 & 0.0081 & 0.0140 & 0.0008 \\ 1.0000 & -1.7394 & 0.7921 & 0 & 0.0081 & 0.0140 \\ 0 & 1.0000 & -1.7394 & 0 & 0 & 0.0081 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.97)$$

(6.97) ile verilen matrisin tersi MATLAB programının uygun komutuyla kolayca aşağıdaki şekilde hesaplanabilir. Bir matrisin tersini hesaplayan MATLAB programının komutu şöyle verilir

$$\text{inv}(\mathbf{E}) \quad (6.98)$$

Bu komutun (6.97) eşitliğine uygulanması aşağıdaki matrisi vermiş olacak

$$\mathbf{E}^{-1} = (1.0e+003) \cdot \begin{bmatrix} -0.0173 & 0.0010 & -0.0001 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0001 \\ -0.0103 & 0.0005 & 0.0001 & -0.0003 & 0.0004 & 0.0010 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0010 \\ 1.1050 & 0.0085 & -0.0004 & -0.0001 & 0.0002 & 0.0005 \\ -2.2796 & 0.0960 & 0.0592 & 0.0117 & -0.0260 & -0.0540 \\ 1.2738 & -0.0640 & -0.0152 & 0.0327 & 0.0685 & 0.0931 \end{bmatrix} \quad (6.99)$$

$\alpha(z)$ ve $\beta(z)$ katsayılarını bulmak için ilk önce aşağıdaki şekilde \mathbf{D} ve \mathbf{M} matrislerini belirleyelim

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_5 \\ d_4 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.100)$$

ve

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} \quad (6.101)$$

Daha sonra \mathbf{M} matrisi (5.15) denklemi kullanılarak aşağıdaki şekilde bulunur

$$\mathbf{M} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.0548 \\ 0.9850 \\ 1 \\ 0.4589 \\ -54.0294 \\ 93.1414 \end{bmatrix} \quad (6.102)$$

\mathbf{M} matrisi elde edildikten sonra $\alpha(z)$ ve $\beta(z)$ polinomları aşağıdaki şekilde belirlenebilir

$$\alpha(z) = \alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 = z^2 + 0.9850z + 0.0548 \quad (6.103)$$

$$\beta(z) = \beta_0 z^2 + \beta_1 z + \beta_2 = 93.1414z^2 - 54.0294z + 0.4589 \quad (6.104)$$

Böylece, tasarlanmış denetleyicinin darbe transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde belirlenmiş olur

$$\frac{\beta(z)}{\alpha(z)} = \frac{93.1414z^2 - 54.0294z + 0.4589}{z^2 + 0.9850z + 0.0548} \quad (6.105)$$

Dikkat edilirse (6.105) denklemi ile tanımlanan $\frac{\beta(z)}{\alpha(z)}$ denetleyicinin darbe transfer fonksiyonu

(6.81) denklemi ile tanımlanan $G_D(z)$ gözlemleyici regülatörün darbe transfer fonksiyonu ile aynı olduğu söylenebilir. İki transfer fonksiyonu karşılaştırma amacıyla aşağıdaki tekrar yazalım

$$G_D(z) = \frac{92.8388z^2 - 53.3547z + 0.4623}{z^2 + 0.9852z + 0.0528} \quad (6.106)$$

$$\frac{\beta(z)}{\alpha(z)} = \frac{93.1414z^2 - 54.0294z + 0.4589}{z^2 + 0.9850z + 0.0548} \quad (6.107)$$

Sonuç olarak iki yaklaşımla tasarlanmış sistemlerin aynı sonucu sağladığı gösterilmiş oldu.

Şekil 6.2’de gösterilen sistemin kapalı çevrim darbe transfer fonksiyonu (6.93) denkleminde verildiği gibi aşağıdaki şekilde yazılmış olur

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0 \frac{B(z)}{A(z)}}{1 + \frac{\beta(z)B(z)}{\alpha(z)A(z)}} = \frac{K_0 \frac{B(z)}{A(z)}}{\frac{\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z)}{\alpha(z)A(z)}} = \frac{K_0 \alpha(z)B(z)}{\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z)} \quad (6.108)$$

(6.95) denklemi dikkate alınarak son denklem aşağıdaki şekilde yazılmış olur

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{R(z)} &= \frac{K_0 \alpha(z)B(z)}{\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z)} = \frac{K_0 \alpha(z)B(z)}{H(z)F(z)} \\ &= \frac{K_0(z^2 + 0.9850z + 0.0548)(0.0081z^2 + 0.014z + 0.0008)}{z^5} \\ &= \frac{K_0(0.0081z^4 + 0.0220z^3 + 0.0150z^2 + 0.0016z + 0.000042)}{z^5} \end{aligned} \quad (6.109)$$

K_0 kazanç sabitini belirlemek amacıyla Bölüm 5.2’ de anlatıldığı gibi sistemin girişine birim basamak girişi uygulandığında $y(\infty)$ kalıcı hal çıkışının bire eşit olduğu kabul edilir, ya da başka bir ifadeyle

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{K_0(0.0081z^4 + 0.0220z^3 + 0.0150z^2 + 0.0016z + 0.000042)}{z^5} \frac{z}{z-1} \\ &= 0.0467K_0 = 1 \end{aligned} \quad (6.110)$$

Böylece, $K_0 = 21.4132$ eşit olup kapalı çevrim darbe transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılmış olur

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{R(z)} &= \frac{21.4132(0.0081z^4 + 0.0220z^3 + 0.0150z^2 + 0.0016z + 0.000042)}{z^5} \\ &= \frac{0.1734z^4 + 0.4710z^3 + 0.3211z^2 + 0.0342z + 0.0009}{z^5} \end{aligned} \quad (6.111)$$

Görüldüğü gibi, tasarlanmış sistem beşinci mertebeden bir sistemdir. Sistemin birim basamak cevabı Şekil 6.3'de verilmişti. Dikkat edilmesi gerekir ki, $y(k)$ çıkışı biri, üç örnekleme zamanı içerisinde buldu. Sistemin birim rampa cevabı Şekil 6.4'de verilmişti. Birim rampa girişini izleyen hata aşağıdaki şekilde hesaplanabilir

$$\begin{aligned} E(z) &= R(z) - Y(z) = \left[1 - \frac{Y(z)}{R(z)} \right] R(z) \\ &= \left[1 - \frac{0.1734z^4 + 0.4710z^3 + 0.3211z^2 + 0.0342z + 0.0009}{z^5} \right] R(z) \\ &= \left[\frac{z^5 - 0.1734z^4 - 0.4710z^3 - 0.3211z^2 - 0.0342z - 0.0009}{z^5} \right] R(z) \\ &= \frac{(z-1)(z^4 + 0.8266z^3 + 0.3556z^2 + 0.0345z + 0.0003)}{z^5} R(z) \end{aligned} \quad (6.112)$$

T örnekleme zamanının 0.5 eşit olduğu hatırlanıp $R(z)$ birim rampa girişi aşağıdaki denklemlerle verilir

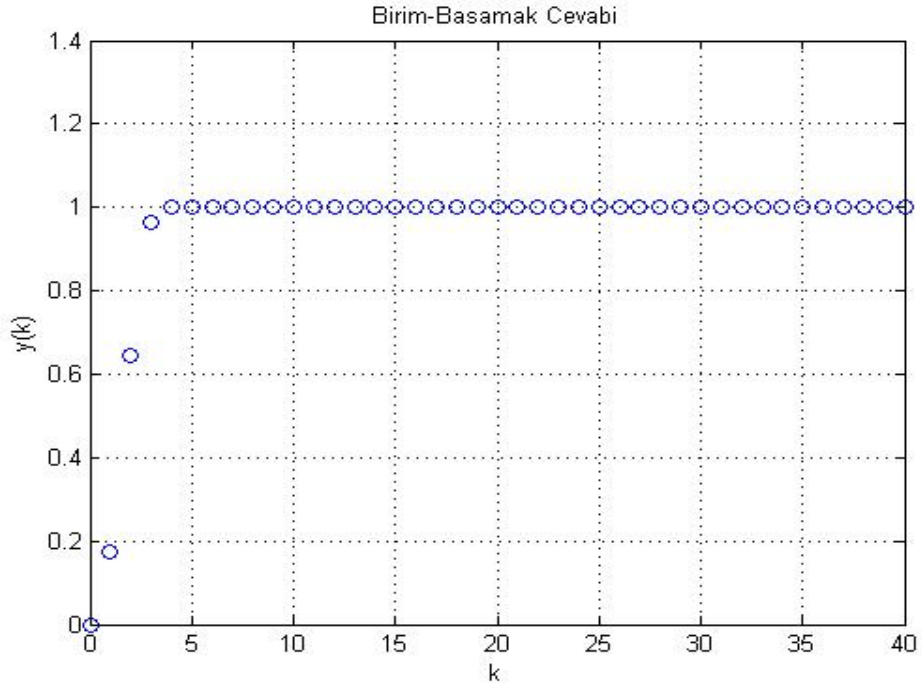
$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{0.5z}{(z-1)^2} \quad (6.113)$$

Daha sonra

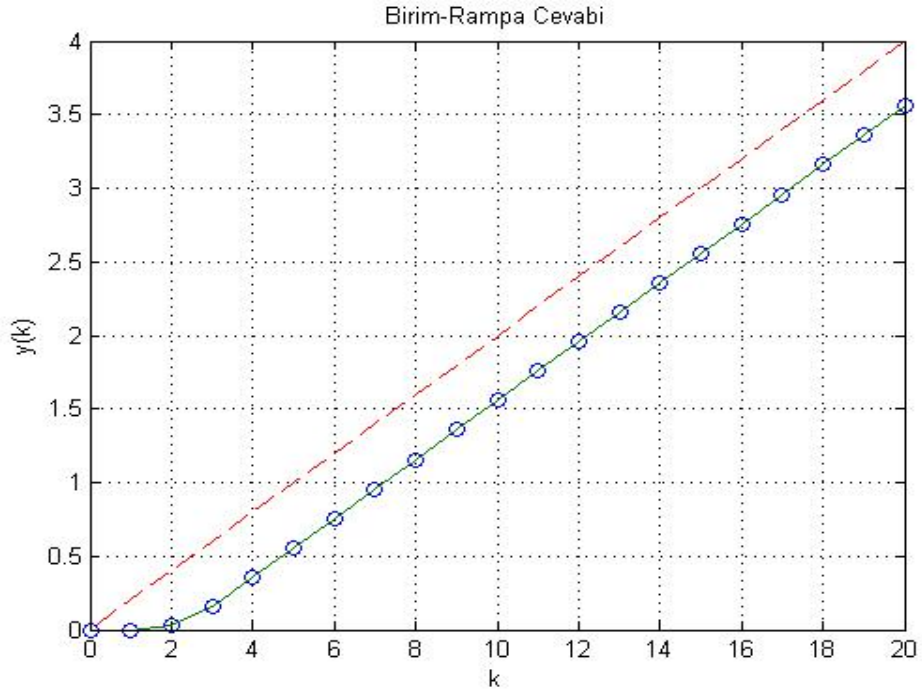
$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{(z-1)(z^4 + 0.8266z^3 + 0.3556z^2 + 0.0345z + 0.0003)}{z^5} \frac{0.5z}{(z-1)^2} \\ &= 1.1085 \end{aligned} \quad (6.114)$$

Böylece, Şekil 6.4'den görülebildiği gibi birim rampa girişini izleyen hata 1.1085 eşittir.

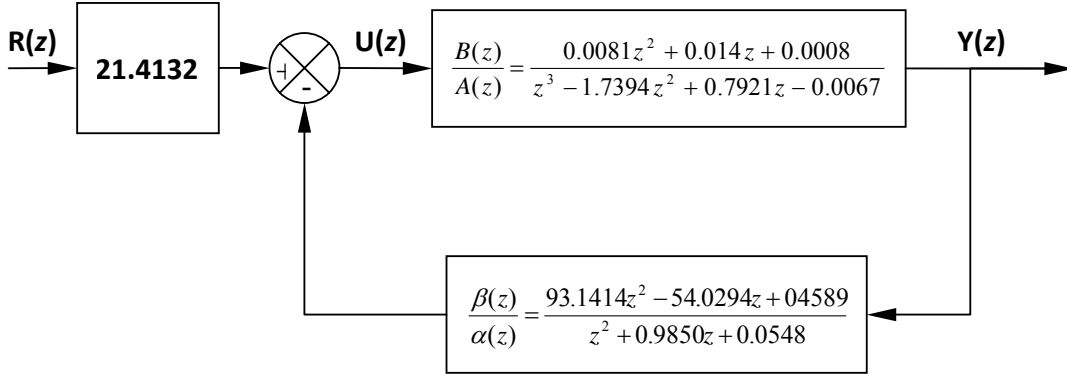
Şekil 6.5’de, elde edilen $G_D(z)$ gözlemleyici regülatörün darbe transfer fonksiyonunun, $\frac{\beta(z)}{\alpha(z)}$ denetleyicinin darbe transfer fonksiyonunun ve K_0 kazanç sabitinin gösterildiği sistemin nihai blok çizimi verilmiştir.



Şekil 6.3 Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim basamak cevabı



Şekil 6.4 Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim rampa cevabı



Şekil 6.5 Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin nihai blok çizimi

Şimdi aynı yaklaşımla düzeni şekil 5.2’de gösterilen 2 düzendeki kontrol sistemini tasarlayalım. Sistemin blok çizimi Şekil 6.6’da verilmişti. Önceki örnekte $H(z)$ ve $F(z)$ polinomları aşağıdaki şekilde belirlenmiştir

$$H(z) = z^3 \quad (6.115)$$

ve

$$F(z) = z^2 \quad (6.116)$$

Plantın darbe transfer fonksiyonu şöyle elde edilmiştir

$$G_p(z) = \frac{0.0081z^2 + 0.014z + 0.0008}{z^3 - 1.7394z^2 + 0.7921z - 0.0067} \quad (6.117)$$

Mevcut problemin Diophantine denklemi aşağıdaki gibi verilmiştir

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = H(z)F(z) = D(z) \quad (6.118)$$

veya

$$\alpha(z)(z^3 - 1.7394z^2 + 0.7921z - 0.0067) + \beta(z)(0.0081z^2 + 0.014z + 0.0008) = z^5 \quad (6.119)$$

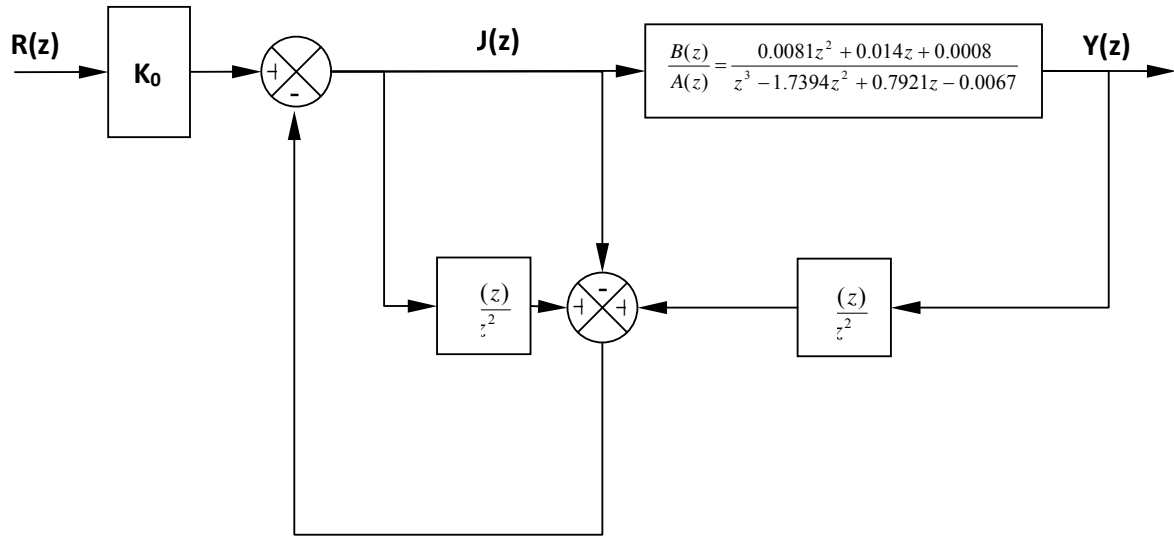
denklemi aşağıdaki şekilde çözülmüştü

$$\alpha(z) = \alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 = z^2 + 0.9850z + 0.0548 \quad (6.120)$$

$$\beta(z) = \beta_0 z^2 + \beta_1 z + \beta_2 = 93.1414z^2 - 54.0294z + 04589 \quad (6.121)$$

Dolayısıyla, (5.26) denklemine uygun olarak kapalı çevrim darbe transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılmış olur

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0 B(z)}{H(z)} = \frac{K_0(0.0081z^2 + 0.014z + 0.0008)}{z^3} \quad (6.122)$$



Şekil 6.6 Mimari-2 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin blok çizimi

K_0 kazanç sabitini belirlemek için sistemin girişine birim basamak girişi uygulandığında $y(\infty)$ kalıcı hal çıkışının bire eşit olduğu kabul edilir, ya da aşağıdaki ifadeyle

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{K_0(0.0081z^2 + 0.014z + 0.0008)}{z^5} \frac{z}{z-1} \\ &= 0.0221K_0 = 1 \end{aligned} \quad (6.123)$$

Böylece, $K_0 = 43.6681$ eşit olup kapalı çevrim darbe transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılmış olur

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{R(z)} &= \frac{43.6681(0.0081z^2 + 0.014z + 0.0008)}{z^3} \\ &= \frac{0.3536z^2 + 0.6112z + 0.0349}{z^3}\end{aligned}\quad (6.124)$$

Görüldüğü gibi, tasarlanmış sistem üçüncü mertebeden bir sistemdir. Sistemin birim basamak cevabı Şekil 6.8'de verilmiştir. Dikkat edilmesi gerekir ki, $y(k)$ çıkışı biri, iki örnekleme zamanı içerisinde buldu. Sistemin birim rampa cevabı Şekil 6.9'de verilmiştir. Birim rampa girişini izleyen hata aşağıdaki şekilde hesaplanabilir

$$\begin{aligned}E(z) &= R(z) - Y(z) = \left[1 - \frac{Y(z)}{R(z)}\right]R(z) \\ &= \left[1 - \frac{0.3536z^2 + 0.6112z + 0.0349}{z^3}\right]R(z) \\ &= \left[\frac{z^3 - 0.3536z^2 - 0.6112z - 0.0349}{z^3}\right]R(z) \\ &= \frac{(z-1)(z^2 + 0.6464z + 0.0352)}{z^3}R(z)\end{aligned}\quad (6.125)$$

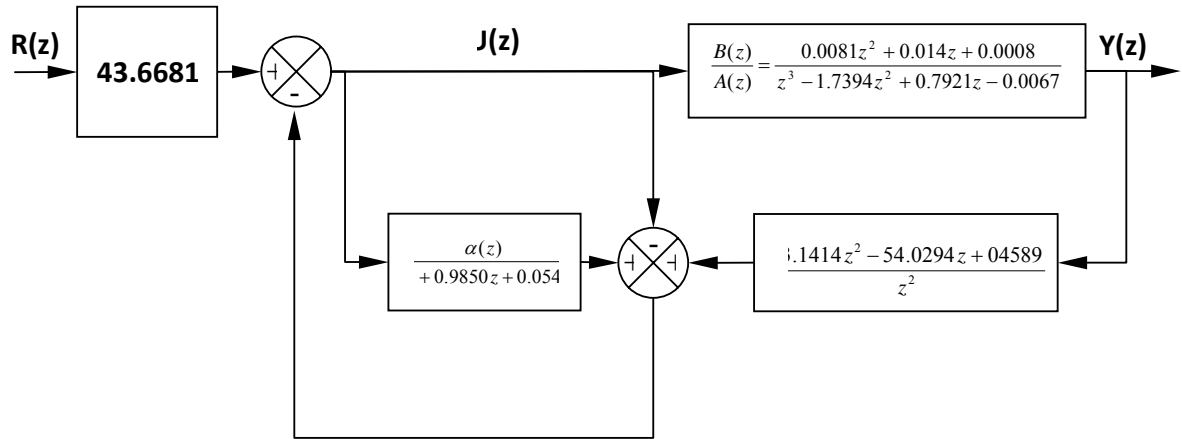
T örnekleme zamanının 0.5 eşit olduğu hatırlanıp $R(z)$ birim rampa girişi aşağıdaki denklemlerle verilir

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{0.5z}{(z-1)^2}\quad (6.126)$$

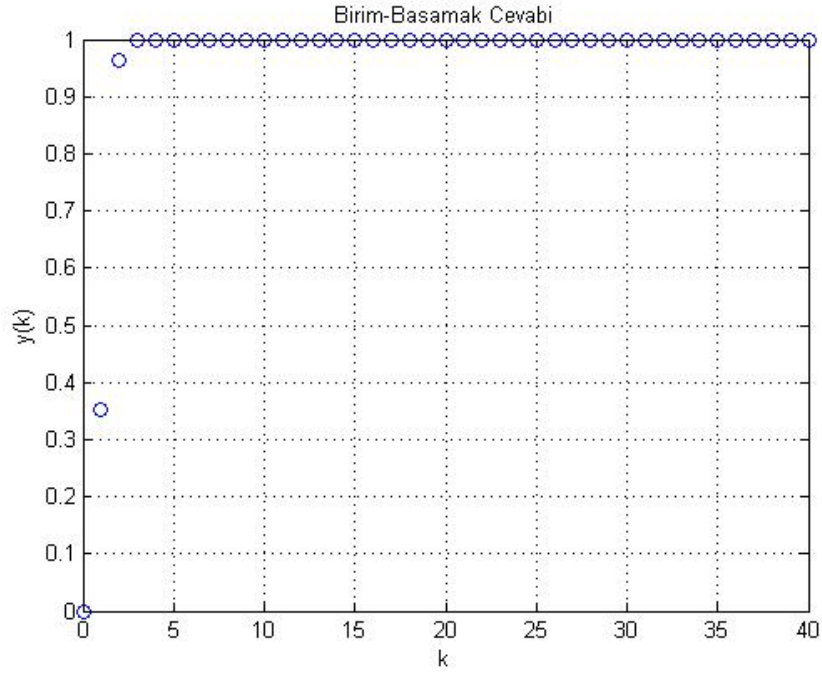
Daha sonra

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{(z-1)(z^2 + 0.6464z + 0.0352)}{z^3} \frac{0.5z}{(z-1)^2} \\ &= 0.8408\end{aligned}\quad (6.127)$$

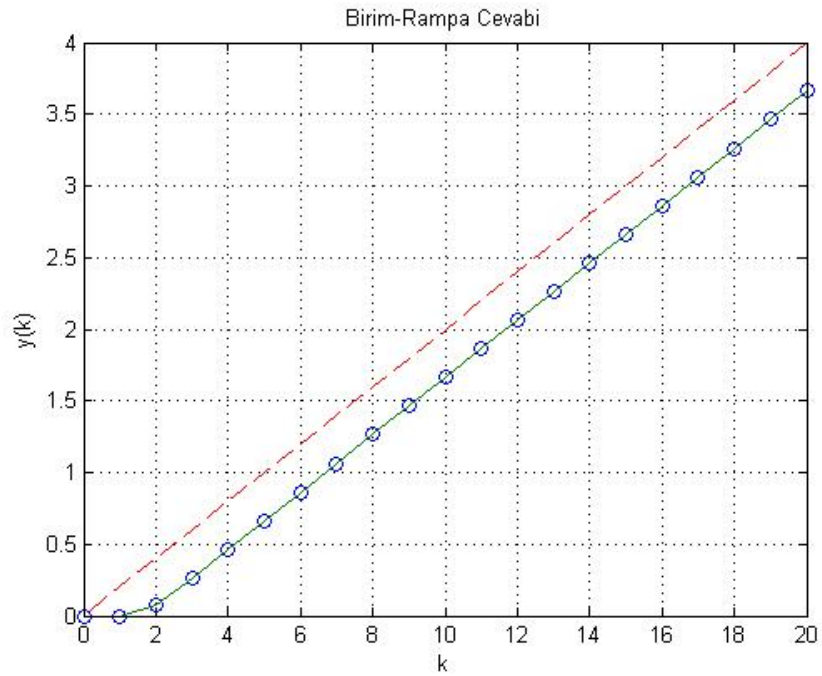
Böylece, Şekil 6.8'den görülebildiği gibi birim rampa girişini izleyen hata 0.8408 eşittir. Şekil 6.7, tasarlanmış sistemin nihai blok çizimini göstermektedir.



Şekil 6.7 Mimari-2 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin nihai blok çizimi



Şekil 6.8 Mimari-2 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim basamak cevabı



Şekil 6.9 Mimari-2 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim rampa cevabı

Polinomsal denklemler yaklaşımıyla tasarlanan iki farklı sistemi karşılaştırmış olursak, daha doğrusu bu sistemlerin rampa girişlerini izleyen hataları karşılaştırsak Mimari-2 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sisteme nazaran daha iyi performans gösterdiği görülmektedir. Söz konusu hata değerleri aşağıda verilmiştir

Mimari-1 Kontrol Sistemi

$$e(k) = 1.1085 \quad (6.128)$$

Mimari-2 Kontrol Sistemi

$$e(k) = 0.8408 \quad (6.129)$$

Problem 2. Bir sürekli zamanlı sistemin durum uzayı gösterimi aşağıdaki şekilde verilmiştir (Ogata, 2002). T örnekleme zamanının 0.5 sn olduğunu kabul ederek sürekli zamanlı sistemi ayrıklaştırın. Daha sonra aşağıdaki üç şıkkı çözün. Sistemin tam durum kontroledilebilir ve tam gözlemlenebilir olduğundan emin olunuz. Tüm hesaplamaları MATLAB programı yardımıyla yapınız.

Tüm şıklar çözüldükten sonra polinomsal denklemler yaklaşımıyla mimarisi Şekil 5.1’de gösterilen Mimari-1 kontrol sistemini tasarlayınız. Aynı tarzda mimarisi Şekil 5.2’de gösterilen Mimari-2 kontrol sistemini tasarlayınız. Daha sonra tasarlanacak olan farklı mimarideki sistemlerin birim basamak ve birim rampa cevaplarını elde ediniz. İki sistemi karşılaştırınız. Kutup atama yöntemi ve polinomsal denklemler yaklaşımı ile tasarlanacak olan sistemlerin aynı sonucu sağlayacağını gösteriniz.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -6 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (6.130)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (6.131)$$

- Kontrol sinyali $u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$ olarak verildiğinde kapalı çevrim sisteminin ölüvuruş cevabı sağlayacak şekilde \mathbf{K} durum geribeslemeli kazanç matrisini belirleyiniz.
- Sistemin $y(k)$ çıkışının yalnız ölçülebilen durum olduğunu varsayarak hata sinyalinin gözlemleyici hatasına ölüvuruş cevabı sağlayacak şekilde en düşük mertebeden durum gözlemleyicisini tasarlayınız.
- Gözlemleyici regülatörün $G_D(z)$ darbe transfer fonksiyonunu elde ediniz

Çözüm

$T = 0.5$ sn olduğunu kabul ederek sürekli zamanlı sistemi ayrıklaştırılmış hale getirelim. Ayrıklaştırıldıktan sonra elde edilen ayrık zamanlı sistem aşağıdaki gibidir

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9039 & 0.3723 & 0.1089 \\ -0.5446 & 0.2503 & 0.3723 \\ -1.8616 & -2.7785 & 0.2503 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.0192 \\ 0.1089 \\ 0.3723 \end{bmatrix} u(k) \quad (6.132)$$

$$y(k) = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \quad (6.133)$$

\mathbf{K} geribeslemeli kazanç matrisini bulmak için ilk önce sistemin tam durum kontroledilebilir olup olmadığı öğrenilmesi gerekir. Bunun için sistemin kontroledilebilirlik matrisini elde edip daha sonra bunun rankını öğrenelim

$$\text{rank}[\mathbf{H} : \mathbf{GH} : \mathbf{G}^2\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} 0.0192 & 0.0985 & 0.1202 \\ 0.1089 & 0.1554 & -0.1060 \\ 0.3723 & -0.2452 & -0.6765 \end{bmatrix} = 3 \quad (6.134)$$

Görüldüğü gibi, matrisin rankı sistemin mertebesi ile aynıdır. Sistem tam durum kontroledilebilirdir. Dolayısıyla, sistemin arzu edilen kutuplarının yerleştirilmesi mümkündür. Bundan sonra sistemin tam gözlemlenebilir olup olmadığı öğrenilmesi gerekir. Eğer sistem gözlemlenebilir ise \mathbf{K}_e matrisin belirlenmesi mümkündür. Bunun için sistemin gözlemlenebilirlik matrisini elde edip daha sonra bunun rankını öğrenelim

$$\text{rank}[\mathbf{C}^* : \mathbf{G}^* \mathbf{C}^* : (\mathbf{G}^*)^2 \mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.9039 & 0.3723 & 0.1089 \\ 0.4115 & 0.1271 & 0.2643 \end{bmatrix} = 3 \quad (6.135)$$

Görüldüğü gibi, matrisin rankı sistemin mertebesi ile aynıdır. Sistem tam gözlemlenebilirdir. Dolayısıyla gözlemleyicinin arzu edilen kutuplarının yerleştirilmesi mümkündür.

a. Sistemin arzu edilen karakteristik denklemi aşağıdaki şekilde yazılır

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| = z^3 + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z + \alpha_3 = 0 \quad (6.136)$$

Sistemin arzu edilen kutupları orijinde yerleşeceğinden α_1, α_2 ve α_3 katsayıları sıfır olacaktır:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \quad (6.137)$$

Bunu dikkate alarak sistemin arzu edilen karakteristik denklemi yeniden aşağıdaki şekilde yazılır

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| = z^3 = 0 \quad (6.138)$$

\mathbf{K} matrisi, MATLAB programının komutunun yardımıyla kolayca bulunabilir. İlk önce sistemin arzu edilen kutupları belirlenir. (6.137) dikkate alınarak kutuplar aşağıdaki gibi girilir

$$\mathbf{L} = [0 \ 0 \ 0] \quad (6.139)$$

daha sonra \mathbf{K} matrisi $\mathbf{K} = \text{acker}(\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{L})$ komutu uygulanarak bulunur

$$\mathbf{K} = \text{acker}(\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{L}) \quad (6.140)$$

Böylece, \mathbf{K} geribeslemeli kazanç matrisi aşağıdaki gibi elde edilmiş olur

$$\mathbf{K} = [4.0796 \ 2.1537 \ 2.9318] \quad (6.141)$$

b. Şimdi $y(k)$ çıkışının yalnız ölçülebilen durum olduğunu varsayarak en düşük mertebeden durum gözlemleyicisini tasarlayalım. $y(k)$, ölçülebilen tek durum değişkeni olduğundan gözetlenecek olan durum değişkenlerinin sayısı 2'dir. Bu nedenle, tasarlanacak olan en düşük mertebeden gözlemleyicinin mertebesi $n = 2$ 'dir.

Şuna dikkat edilmelidir ki, problemde verilen \mathbf{C} çıkış matrisinin ($[1 \ 0 \ 0]$ matrisi) (4.117) denkleminde verilen çıkış matrisi ile aynı olması dönüşüm yapmaksızın gözlemleyici tasarlamaya başlanabildiğini ifade etmektedir.

Sistemin ayrılmış durum denklemi aşağıdaki şekilde yazılır

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9039 & | & 0.3723 & 0.1089 \\ -0.5446 & | & 0.2503 & 0.3723 \\ -1.8616 & | & -2.7785 & 0.2503 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0192 \\ 0.1089 \\ 0.3723 \end{bmatrix} u(k) \quad (6.142)$$

$$y(k) = [1 \ : \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \quad (6.143)$$

burada

$$G_{aa} = 0.9039, \quad G_{ab} = [0.3723 \quad 0.1089], \quad G_{ba} = \begin{bmatrix} -0.5446 \\ -1.8616 \end{bmatrix}, \quad G_{bb} = \begin{bmatrix} 0.2503 & 0.3723 \\ -2.7785 & 0.2503 \end{bmatrix} \quad (6.144)$$

$$H_a = 0.0192, \quad H_b = \begin{bmatrix} 0.1089 \\ 0.3723 \end{bmatrix} \quad (6.145)$$

En düşük mertebeden gözlemleyicinin hata dinamiğinin arzu edilen karakteristik denklemi aşağıdaki gibidir

$$z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 = 0 \quad (6.146)$$

Ölümürüşlü cevabın sağlanması istendiğinden gözlemleyicinin arzu edilen kutupları orijinde yerleşecektir. Bu nedenle α_1 ve α_2 katsayıları sıfır olacaktır

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad (6.147)$$

Dolayısıyla hata dinamiğinin arzu edilen karakteristik denklemi aşağıdaki şekilde yazılır

$$z^2 = 0 \quad (6.148)$$

\mathbf{K}_e matrisi, MATLAB programının komutunun yardımıyla bulunabilir. İlk önce gözlemleyicinin arzu edilen kutupları belirlenir. (6.147) dikkate alınarak kutuplar aşağıdaki gibi girilir

$$\mathcal{J} = [0 \ 0] \quad (6.149)$$

daha sonra \mathbf{K}_e matrisi $\mathbf{K} = \text{acker}(\mathbf{G}_{bb}', \mathbf{G}_{ab}', \mathcal{J})'$ komutu uygulanarak bulunur

$$\mathbf{K} = \text{acker}(\mathbf{G}_{bb}', \mathbf{G}_{ab}', \mathcal{J})' \quad (6.150)$$

Böylece, \mathbf{K}_e geribeslemeli kazanç matrisi aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 2.0722 \\ -2.4875 \end{bmatrix} \quad (6.151)$$

c. Gözlemleyici regülatörün $G_D(z)$ darbe transfer fonksiyonunu elde etmek için sırasıyla (6.132) ve (6.133) denklemleriyle tanımlanan sistemin durum ve çıkış denklemlerini yeniden ele alalım. En düşük mertebeden gözlemleyicinin darbe transfer fonksiyonunu elde etmek amacıyla (4.131) ve (4.132) ile tanımlanan en düşük mertebeden durum gözlemleyicinin denklemlerini aşağıda tekrar yazalım.

$$\tilde{\mathbf{x}}_b(k) - \mathbf{K}_e \mathbf{y}(k) = \tilde{\boldsymbol{\eta}}(k) \quad (6.152)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}(k+1) = & (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}) \tilde{\boldsymbol{\eta}}(k) + [(\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}) \mathbf{K}_e + \mathbf{G}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{aa}] \mathbf{y}(k) \\ & + (\mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{H}_a) \mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (6.153)$$

(6.152) ve (6.153) denklemlerini oluşturan terimler aşağıdaki gibi hesaplanır

$$\begin{aligned} (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}) &= \begin{bmatrix} 0.2503 & 0.3723 \\ -2.7785 & 0.2503 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.0722 \\ -2.4875 \end{bmatrix} \cdot [0.3723 \quad 0.1089] \\ &= \begin{bmatrix} -0.5212 & 0.1466 \\ -1.8524 & 0.5212 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.154)$$

$$\mathbf{G}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{aa} = \begin{bmatrix} -0.5446 \\ -1.8616 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.0722 \\ -2.4875 \end{bmatrix} \cdot 0.9039 = \begin{bmatrix} -2.4177 \\ 0.3868 \end{bmatrix} \quad (6.155)$$

$$\mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{H}_a = \begin{bmatrix} 0.1089 \\ 0.3723 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.0722 \\ -2.4875 \end{bmatrix} \cdot 0.0192 = \begin{bmatrix} 0.0691 \\ 0.4201 \end{bmatrix} \quad (6.156)$$

Elde edilen terimler dikkate alınarak (6.153) denklemi aşağıdaki şekilde yazılmış olacak

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{n}}}_2(k+1) \\ \dot{\tilde{\mathbf{n}}}_3(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.5212 & 0.1466 \\ -1.8524 & 0.5212 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{n}}_2(k) \\ \tilde{\mathbf{n}}_3(k) \end{bmatrix} \\ &+ \left\{ \begin{bmatrix} -0.5212 & 0.1466 \\ -1.8524 & 0.5212 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2.0722 \\ -2.4875 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2.4177 \\ 0.3868 \end{bmatrix} \right\} \mathbf{y}(k) + \begin{bmatrix} 0.0691 \\ 0.4201 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (6.157)$$

veya

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{n}}}_2(k+1) \\ \dot{\tilde{\mathbf{n}}}_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5212 & 0.1466 \\ -1.8524 & 0.5212 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{n}}_2(k) \\ \tilde{\mathbf{n}}_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3.8624 \\ -4.7482 \end{bmatrix} \mathbf{y}(k) + \begin{bmatrix} 0.0691 \\ 0.4201 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \quad (6.158)$$

burada

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{n}}_2(k) \\ \tilde{\mathbf{n}}_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_2(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}_3(k) \end{bmatrix} - \mathbf{K}_e \mathbf{y}(k) \quad (6.159)$$

veya

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_2(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}_3(k) \end{bmatrix} = \mathbf{K}_e \mathbf{y}(k) + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{n}}_2(k) \\ \tilde{\mathbf{n}}_3(k) \end{bmatrix} \quad (6.160)$$

Kontrol sinyalinin $u(k) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k)$ olarak verildiğini ve $\mathbf{x}(k)$ durum vektörünün ölçülebilir ve ölçülemeyen olmak üzere iki kısma ayrıldığını hatırlayıp elde edilen değerleri $u(k) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k)$ 'nin yerine koyup denklemi aşağıdaki şekilde yazalım

$$\begin{aligned}
u(k) &= -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k) \\
&= -[4.0796 \quad 2.1537 \quad 2.9318] \cdot \begin{bmatrix} y(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}_2(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}_3(k) \end{bmatrix} \\
&= -\left(4.0796y(k) + [2.1537 \quad 2.9318] \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_2(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}_3(k) \end{bmatrix} \right) \\
&= -4.0796y(k) - [2.1537 \quad 2.9318] \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_2(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}_3(k) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.161}$$

Bundan sonra en düşük mertebeden gözlemleyici temelli regülatörün $G_D(z)$ darbe transfer fonksiyonunu elde etmemiz gerekir. Bunu MATLAB programı ortamında yapabilmek için ilk önce en düşük mertebeden gözlemleyiciyi veren (5.184) ve (5.185) denklemleri oluşturduğu terimleri aşağıdaki gibi tanımlayalım

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab} \tag{6.162}$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{G}}\mathbf{K}_e + \mathbf{G}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{aa} \tag{6.163}$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{H}_a \tag{6.164}$$

O zaman aşağıdaki üç denklem en düşük mertebeden gözlemleyiciyi şöyle tanımlamış olur

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}(k) = \hat{\mathbf{G}}\tilde{\boldsymbol{\eta}}(k) + \hat{\mathbf{H}}y(k) + \hat{\mathbf{F}}u(k) \tag{6.165}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}(k) = \tilde{\mathbf{x}}_b(k) - \mathbf{K}_e y(k) \tag{6.166}$$

$$u(k) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k) \tag{6.167}$$

(6.166) dikkate alınarak (6.167) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\begin{aligned}
u(k) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k) &= -\begin{bmatrix} K_a & \mathbf{K}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}_b(k) \end{bmatrix} \\
&= -K_a y(k) - \mathbf{K}_b \tilde{\mathbf{x}}_b(k) \\
&= -\mathbf{K}_b \tilde{\boldsymbol{\eta}}(k) - (K_a + \mathbf{K}_b \mathbf{K}_e) y(k)
\end{aligned} \tag{6.168}$$

(6.168)'nin (6.165) eşitliğinin yerine konulması aşağıdaki denklemi vermiş olur

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\eta}}(k) &= \hat{\mathbf{G}}\tilde{\eta}(k) + \hat{\mathbf{H}}y(k) + \hat{\mathbf{F}}[-\mathbf{K}_b\tilde{\eta}(k) - (K_a + \mathbf{K}_b\mathbf{K}_e)y(k)] \\ &= (\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{F}}\mathbf{K}_b)\tilde{\eta}(k) + [\hat{\mathbf{H}} - \hat{\mathbf{F}}(K_a + \mathbf{K}_b\mathbf{K}_e)]y(k)\end{aligned}\quad (6.169)$$

(6.169) denklemini oluşturan terimler aşağıdaki biçimde tanımlanırsa

$$\tilde{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{F}}\mathbf{K}_b \quad (6.170)$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}} - \hat{\mathbf{F}}(K_a + \mathbf{K}_b\mathbf{K}_e) \quad (6.171)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = -\mathbf{K}_b \quad (6.172)$$

$$\tilde{D} = -(K_a + \mathbf{K}_b\mathbf{K}_e) \quad (6.173)$$

(6.169) ve (6.168) aşağıdaki gibi yazılmış olur

$$\dot{\tilde{\eta}}(k) = \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\eta}(k) + \tilde{\mathbf{H}}y(k) \quad (6.174)$$

$$u(k) = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\eta}(k) + \tilde{D}y(k) \quad (6.175)$$

(6.174) ve (6.175) denklemleri en düşük mertebeden gözlemleyici temelli denetleyiciyi tanımlar. u , çıkış ve $-y$, giriş olarak düşünülürse $U(s)$ aşağıdaki gibi yazılmış olur

$$\begin{aligned}U(z) &= [\tilde{\mathbf{C}}(z\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{G}})^{-1}\tilde{\mathbf{H}} + \tilde{D}]Y(s) \\ &= -[\tilde{\mathbf{C}}(z\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{G}})^{-1}\tilde{\mathbf{H}} + \tilde{D}][-Y(s)]\end{aligned}\quad (6.176)$$

Gözlemleyicinin girişi $Y(s)$ 'den ziyade $-Y(s)$ olduğundan dolayı gözlemleyici denetleyicinin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmiş olur

$$\frac{U(z)}{-Y(z)} = -[\tilde{\mathbf{C}}(z\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{G}})^{-1}\tilde{\mathbf{H}} + \tilde{D}] \quad (6.177)$$

$G_D(z)$ darbe transfer fonksiyonu MATLAB ortamında aşağıdaki komutla kolayca bulunabilir

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{ss2tf}(\text{Gtilde}, \text{Htilde}, -\text{Ctilde}, -\text{Dtilde}) \quad (6.178)$$

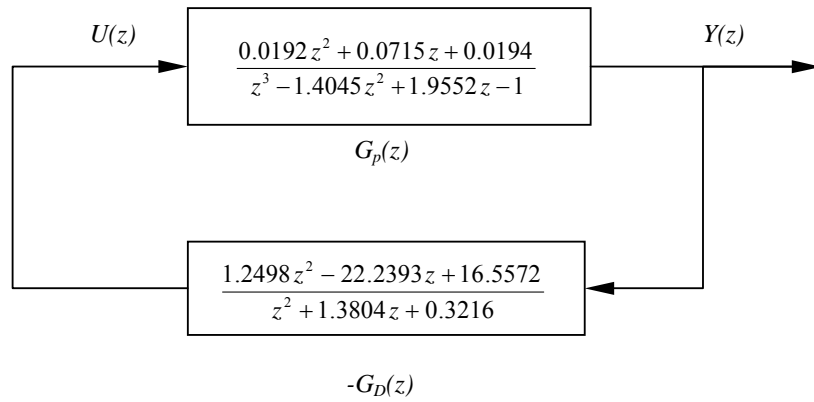
(6.178) ile verilen komutun uygulanması aşağıdaki darbe transfer fonksiyonunu vermiş olur. İlgili transfer fonksiyonunu hesaplayan MATLAB programı Ek 3’de verilmiştir.

$$G_D(z) = -\frac{U(z)}{Y(z)} = \frac{1.2498z^2 - 22.2393z + 16.5572}{z^2 + 1.3804z + 0.3216} \quad (6.179)$$

Sistemin $G_p(z)$ darbe transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde bulunabilir

$$G_p(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H} = \frac{0.0192z^2 + 0.0715z + 0.0194}{z^3 - 1.4045z^2 + 1.9552z - 1} \quad (6.180)$$

$G_D(z)$ ve $G_p(z)$ darbe transfer fonksiyonlarının elde edilmesi sistemin tasarlanmış olduğu anlamına gelmektedir. Böylece, kutup atama yöntemi uygulanarak elde edilmesi amaçlanan en düşük mertebeden gözlemleyicili gözlenmiş durum geribeslemeli kontrol sistemi tasarlanmış oldu. Tasarlanmış sistemin blok çizimi Şekil 6.10’da verilmektedir



Şekil 6.10 Kutup atama yöntemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin blok çizimi

Şimdi aynı sistemi polinomsal denklemler yaklaşımıyla tasarlayıp nihai sistemin kutup atama yöntemi ile tasarlanan sistemle aynı olduğunu göstermeye çalışalım.

(6.138) denkleminde atfen sistemin karakteristik denkleminin aşağıdaki şekilde tanımlandığı hatırlanır

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}| = z^3 = 0 \quad (6.181)$$

bundan dolayı

$$H(z) = z^3 \quad (6.182)$$

Gözlemleyici hatasının karakteristik denklemi (6.148) denklemine atfen aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır

$$\phi(z) = z^2 \quad (6.183)$$

bundan dolayı

$$F(z) = z^2 \quad (6.184)$$

Plantın $G_p(z)$ darbe transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi belirlenmiştir:

$$G_p(z) = \frac{0.0192z^2 + 0.0715z + 0.0194}{z^3 - 1.4045z^2 + 1.9552z - 1} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (6.185)$$

burada

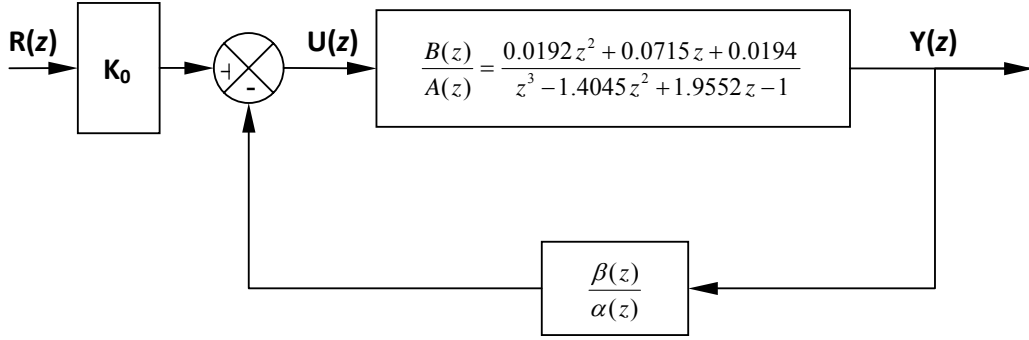
$$A(z) = z^3 - 1.4045z^2 + 1.9552z - 1 \quad (6.186)$$

$$B(z) = 0.0192z^2 + 0.0715z + 0.0194 \quad (6.187)$$

buradan

$$\begin{aligned} a_1 &= -1.4045, a_2 = 1.9552, a_3 = -1, \\ b_0 &= 0, b_1 = 0.0192, b_2 = 0.0715, b_3 = 0.0194 \end{aligned} \quad (6.188)$$

Mevcut problemin Mimari-1 kontrol sisteminin blok çizimi Şekil 6.11'de gösterilmiştir



Şekil 6.11 Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin blok çizimi

Bütün sistemin (gözlenmiş durum geribeslemeli sistem) karakteristik polinomu aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$D(z) = H(z)F(z) = z^3 \cdot z^2 = z^5 \quad (6.189)$$

buradan

$$d_0 = 1, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = 0, \quad d_3 = 0, \quad d_4 = 0, \quad d_5 = 0 \quad (6.190)$$

Mimari-1 kontrol sisteminin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = K_0 \frac{\alpha(z)\beta(z)}{\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z)} \quad (6.191)$$

Sistemin karakteristik denklemi aşağıdaki şekilde yazılır

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = 0 \quad (6.192)$$

Polinomsal denklemler yaklaşımında aşağıdaki denklemin çözülmesi hedeflenir

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = H(z)F(z) = D(z) \quad (6.193)$$

veya

$$\alpha(z)(z^3 - 1.4045z^2 + 1.9552z - 1) + \beta(z)(0.0192z^2 + 0.0715z + 0.0194) = z^5 \quad (6.194)$$

(6.194) denklemi, denetleyicinin darbe transfer fonksiyonunun çözümüdür. (6.193) denklemi $\alpha(z)$ ve $\beta(z)$ için $2n \times 2n$ mertebeden \mathbf{E} Sylvester matrisi ile çözülür. Mevcut sistemin $n = 3$ mertebeden olduğu düşünülerek \mathbf{E} matrisi 6×6 mertebeden bir matrise dönüşür. Bu matris aşağıdaki şekilde yazılır

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0.0194 & 0 & 0 \\ 1.9552 & -1 & 0 & 0.0715 & 0.0194 & 0 \\ -1.4045 & 1.9552 & -1 & 0.0192 & 0.0715 & 0.0194 \\ 1.0000 & -1.4045 & 1.9552 & 0 & 0.0192 & 0.0715 \\ 0 & 1.0000 & -1.4045 & 0 & 0 & 0.0192 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.195)$$

(6.195) ile verilen matrisin tersi aşağıdaki gibi hesaplanır

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.6333 & 0.1820 & -0.0380 & -0.0425 & 0.1966 & 0.3212 \\ -0.1801 & 0.0376 & 0.0421 & -0.1946 & 0.6821 & 1.3805 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 18.9040 & 9.3825 & -1.9576 & -2.1901 & 10.1340 & 16.5577 \\ -15.1353 & 0.5593 & 13.2100 & 2.3245 & -22.0041 & -22.2397 \\ 9.3825 & -1.9576 & -2.1901 & 10.1340 & 16.5577 & 1.2512 \end{bmatrix} \quad (6.196)$$

$\alpha(z)$ ve $\beta(z)$ katsayılarını bulmak için ilk önce aşağıdaki gibi \mathbf{D} ve \mathbf{M} matrisleri belirlenir

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_5 \\ d_4 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.197)$$

ve

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} \quad (6.198)$$

\mathbf{M} matrisi aşağıdaki şekilde bulunur

$$\mathbf{M} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.3212 \\ 1.3805 \\ 1 \\ 16.5577 \\ -22.2397 \\ 1.2512 \end{bmatrix} \quad (6.199)$$

Daha sonra $\alpha(z)$ ve $\beta(z)$ polinomları aşağıdaki şekilde belirlenir

$$\alpha(z) = \alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 = z^2 + 1.3805z + 0.3212 \quad (6.200)$$

$$\beta(z) = \beta_0 z^2 + \beta_1 z + \beta_2 = 1.2512z^2 - 22.2397z + 16.5577 \quad (6.201)$$

Böylece, tasarlanmış denetleyicinin darbe transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir

$$\frac{\beta(z)}{\alpha(z)} = \frac{1.2512z^2 - 22.2397z + 16.5577}{z^2 + 1.3805z + 0.3212} \quad (6.202)$$

Dikkat edilirse (6.202) denklemi ile tanımlanan $\frac{\beta(z)}{\alpha(z)}$ denetleyicinin darbe transfer fonksiyonu

(6.179) denklemi ile tanımlanan $G_D(z)$ gözlemleyici regülatörün darbe transfer fonksiyonu ile aynı olduğu görülmektedir. İki transfer fonksiyonu karşılaştırma amacıyla aşağıdaki tekrar yazalım

$$G_D(z) = \frac{1.2498z^2 - 22.2393z + 16.5572}{z^2 + 1.3804z + 0.3216} \quad (6.203)$$

$$\frac{\beta(z)}{\alpha(z)} = \frac{1.2512z^2 - 22.2397z + 16.5577}{z^2 + 1.3805z + 0.3212} \quad (6.204)$$

Sonuç olarak iki yaklaşımla tasarlanmış sistemlerin aynı sonucu verdiği gösterilmiş oldu.

Şekil 6.11'de gösterilen sistemin kapalı çevrim darbe transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılır

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0 \frac{B(z)}{A(z)}}{1 + \frac{\beta(z)B(z)}{\alpha(z)A(z)}} = \frac{K_0 \frac{B(z)}{A(z)}}{\frac{\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z)}{\alpha(z)A(z)}} = \frac{K_0 \alpha(z)B(z)}{\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z)} \quad (6.205)$$

(6.194) denklemini dikkate alınarak son denklem aşağıdaki şekilde yazılmış olur

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{R(z)} &= \frac{K_0 \alpha(z)B(z)}{\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z)} = \frac{K_0 \alpha(z)B(z)}{H(z)F(z)} \\ &= \frac{K_0(z^2 + 1.3805z + 0.3212)(0.0192z^2 + 0.0715z + 0.0194)}{z^5} \\ &= \frac{K_0(0.0192z^4 + 0.0980z^3 + 0.1243z^2 + 0.0497z + 0.0062)}{z^5} \end{aligned} \quad (6.206)$$

K_0 kazanç sabitini belirlemek için sistemin girişine birim basamak girişi uygulandığında $y(\infty)$ kalıcı hal çıkışının bire eşit olduğu kabul edilir ya da

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{K_0(0.0192z^4 + 0.0980z^3 + 0.1243z^2 + 0.0497z + 0.0062)}{z^5} \frac{z}{z-1} \\ &= 0.2974K_0 = 1 \end{aligned} \quad (6.207)$$

Böylece, $K_0 = 3.3624$ eşit olup kapalı çevrim darbe transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılır

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{R(z)} &= \frac{3.3624(0.0192z^4 + 0.0980z^3 + 0.1243z^2 + 0.0497z + 0.0062)}{z^5} \\ &= \frac{0.0646z^4 + 0.3295z^3 + 0.4179z^2 + 0.1673z + 0.0210}{z^5} \end{aligned} \quad (6.208)$$

Görüldüğü gibi, tasarlanmış sistem beşinci mertebeden bir sistemdir. Sistemin birim basamak cevabı Şekil 6.12'de verilmiştir. Dikkat edilmesi gerekir ki, $y(k)$ çıkışı biri, beş örnekleme zamanı içerisinde buldu. Sistemin birim rampa cevabı Şekil 6.13'de verilmiştir. Birim rampa girişini izleyen hata aşağıdaki şekilde hesaplanır

$$\begin{aligned} E(z) &= R(z) - Y(z) = \left[1 - \frac{Y(z)}{R(z)} \right] R(z) \\ &= \left[1 - \frac{0.0646z^4 + 0.3295z^3 + 0.4179z^2 + 0.1673z + 0.0210}{z^5} \right] R(z) \\ &= \left[\frac{z^5 - 0.0646z^4 - 0.3295z^3 - 0.4179z^2 - 0.1673z - 0.0210}{z^5} \right] R(z) \\ &= \frac{(z-1)(z^4 + 0.9354z^3 + 0.6059z^2 + 0.1880z + 0.0207)}{z^5} R(z) \end{aligned} \quad (6.209)$$

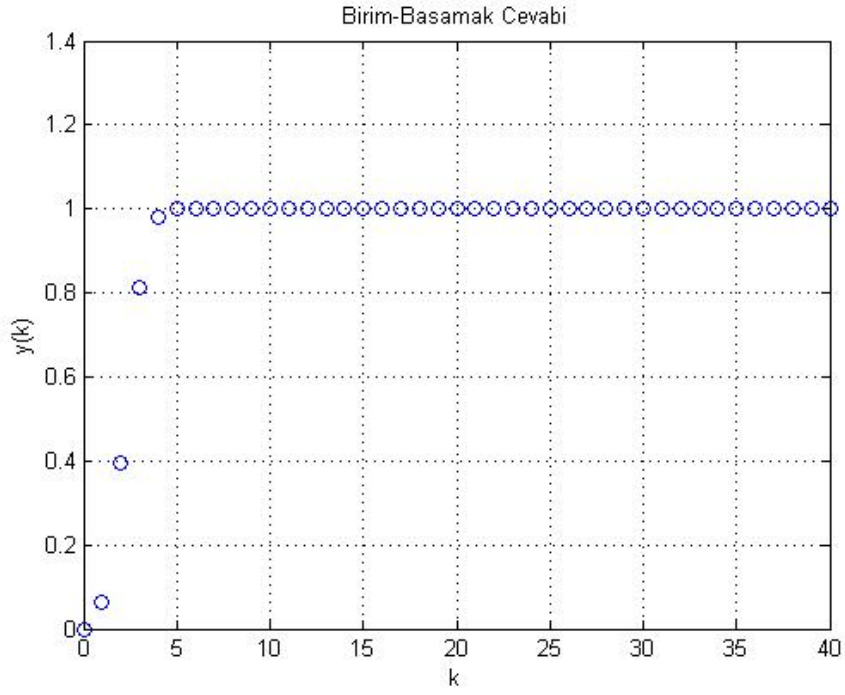
T örnekleme zamanının 0.5 sn olduğu hatırlanıp $R(z)$ birim rampa girişi aşağıdaki gibi verilir

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{0.5z}{(z-1)^2} \quad (6.210)$$

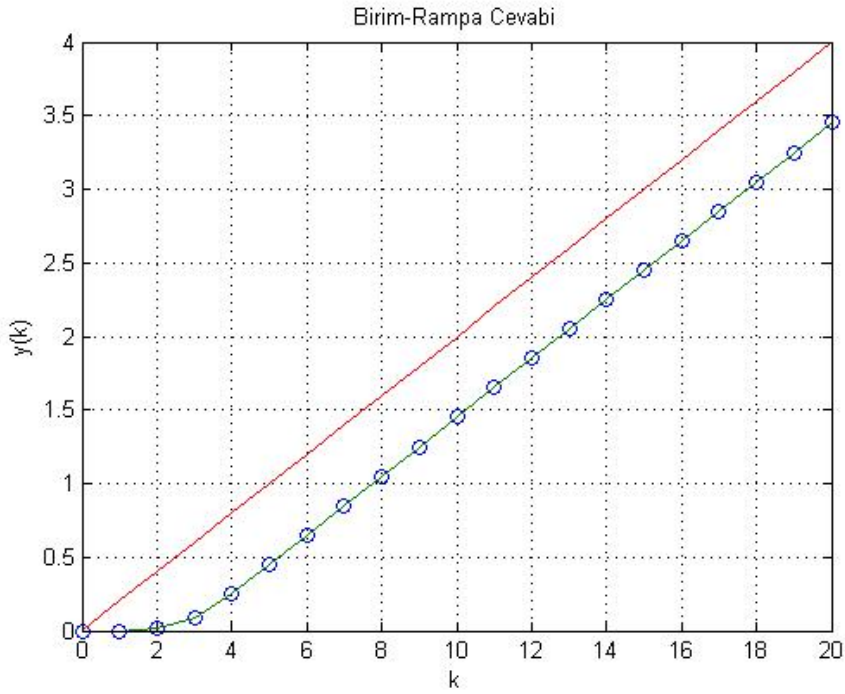
daha sonra

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{(z-1)(z^4 + 0.9354z^3 + 0.6059z^2 + 0.1880z + 0.0207)}{z^5} \frac{0.5z}{(z-1)^2} \\ &= 1.375 \end{aligned} \quad (6.211)$$

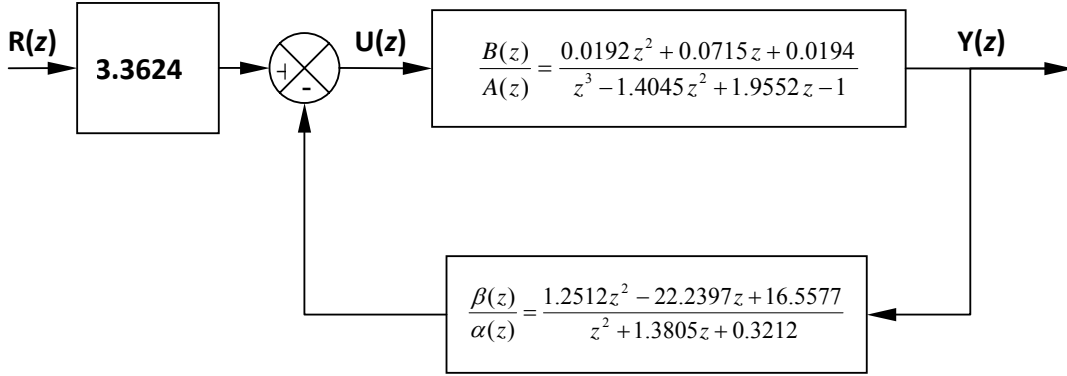
Böylece, birim rampa girişini izleyen hata 1.375'dir. Şekil 6.14'de, elde edilen $G_D(z)$ gözlemleyici regülâtörün darbe transfer fonksiyonunun, $\frac{\beta(z)}{\alpha(z)}$ denetleyicinin darbe transfer fonksiyonunun ve K_0 kazanç sabitinin gösterildiği sistemin nihai blok çizimi verilmiştir.



Şekil 6.12 Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim basamak cevabı



Şekil 6.13 Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim rampa cevabı



Şekil 6.14 Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin nihai blok çizimi

Şimdi aynı yaklaşımla mimarisi Şekil 5.2’de gösterilen Mimari-2 kontrol sistemini tasarlayalım. Sistemin blok çizimi Şekil 6.15’de verilmiştir. Önceki örnekte $H(z)$ ve $F(z)$ polinomları aşağıdaki şekilde belirlenmiştir

$$H(z) = z^3 \quad (6.212)$$

ve

$$F(z) = z^2 \quad (6.213)$$

Plantın darbe transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilmiştir

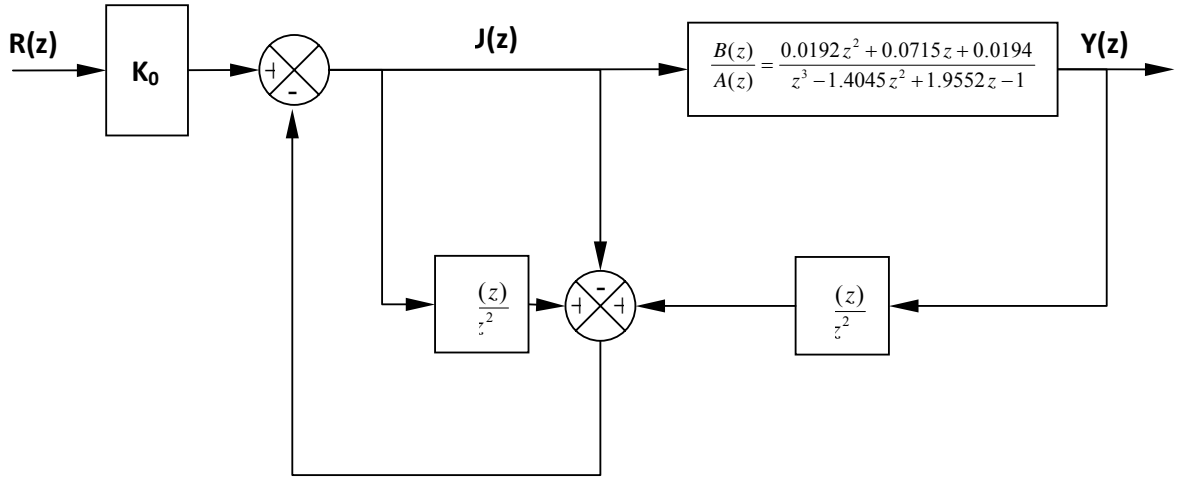
$$G_p(z) = \frac{0.0192z^2 + 0.0715z + 0.0194}{z^3 - 1.4045z^2 + 1.9552z - 1} \quad (6.214)$$

Mevcut problemin Diophantine denklemi aşağıdaki gibidir

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = H(z)F(z) = D(z) \quad (6.215)$$

veya

$$\alpha(z)(z^3 - 1.4045z^2 + 1.9552z - 1) + \beta(z)(0.0192z^2 + 0.0715z + 0.0194) = z^5 \quad (6.216)$$



Şekil 6.15 Mimari-2 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin blok çizimi

(6.216) denklemini aşağıdaki şekilde çözülmüştür

$$\alpha(z) = \alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 = z^2 + 1.3805z + 0.3212 \quad (6.217)$$

$$\beta(z) = \beta_0 z^2 + \beta_1 z + \beta_2 = 1.2512z^2 - 22.2397z + 16.5577 \quad (6.218)$$

(5.26)'ya uygun olarak kapalı çevrim darbe transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılır

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0 B(z)}{H(z)} = \frac{K_0 (0.0192z^2 + 0.0715z + 0.0194)}{z^3} \quad (6.219)$$

K_0 kazanç sabitini belirlemek için sistemin girişine birim basamak girişi uygulandığında $y(\infty)$ kalıcı hal çıkışının bire eşit olduğu kabul edilir, ya da

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{K_0 (0.0192z^2 + 0.0715z + 0.0194)}{z^3} \frac{z}{z-1} = 0.1101K_0 = 1 \quad (6.220)$$

$K_0 = 9.0826$ eşit olup kapalı çevrim darbe transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılmış olur

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{9.0826(0.0192z^2 + 0.0715z + 0.0194)}{z^3} = \frac{0.1744z^2 + 0.6494z + 0.1762}{z^3} \quad (6.221)$$

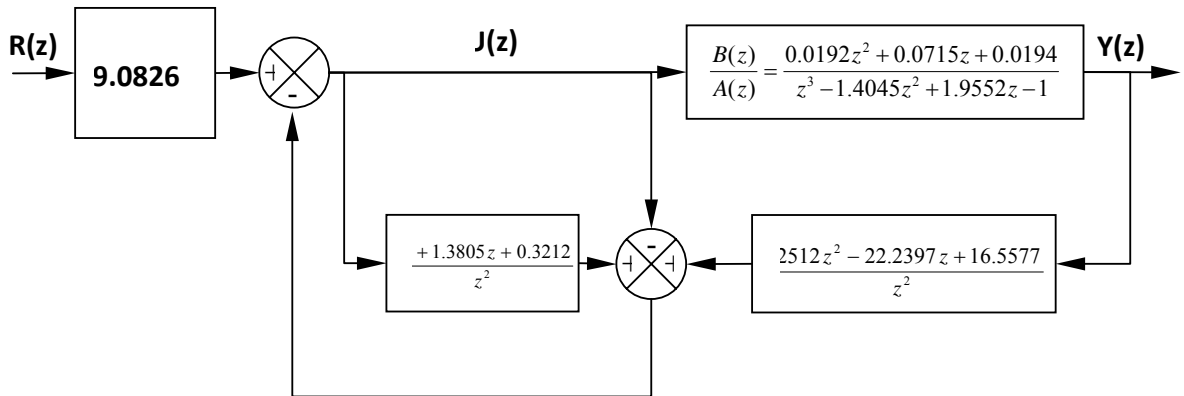
Tasarlanmış sistem üçüncü mertebeden bir sistemdir. Sistemin birim basamak cevabı Şekil 6.17'de verilmiştir. $y(k)$ çıkışı biri, üç örnekleme zamanı içerisinde buldu. Sistemin birim rampa cevabı Şekil 6.18'de verilmiştir. Birim rampa girişini izleyen hata aşağıdaki şekilde hesaplanır

$$\begin{aligned}
 E(z) &= R(z) - Y(z) = \left[1 - \frac{Y(z)}{R(z)} \right] R(z) \\
 &= \left[1 - \frac{0.1744z^2 + 0.6494z + 0.1762}{z^3} \right] R(z) \\
 &= \left[\frac{z^3 - 0.1744z^2 - 0.6494z - 0.1762}{z^3} \right] R(z) \\
 &= \frac{(z-1)(z^2 + 0.8256z + 0.1762)}{z^3} R(z)
 \end{aligned} \tag{6.222}$$

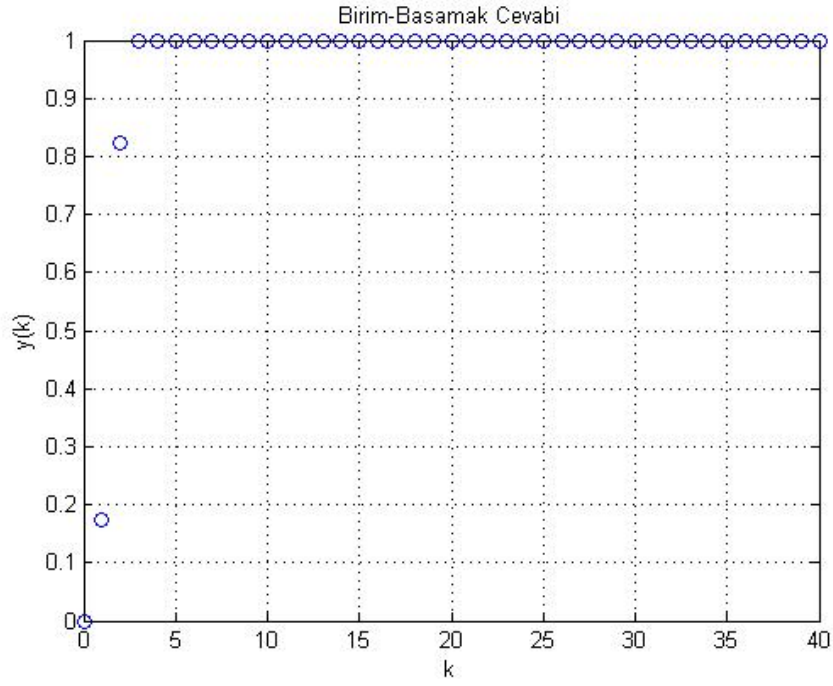
(6.210)'de verilmiş olan $R(z)$ birim rampa girişi dikkate alınarak birim rampa girişini izleyen hata aşağıdaki gibi elde edilmiş olur

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{(z-1)(z^2 + 0.8256z + 0.1762)}{z^3} \frac{0.5z}{(z-1)^2} = 1.0009 \tag{6.223}$$

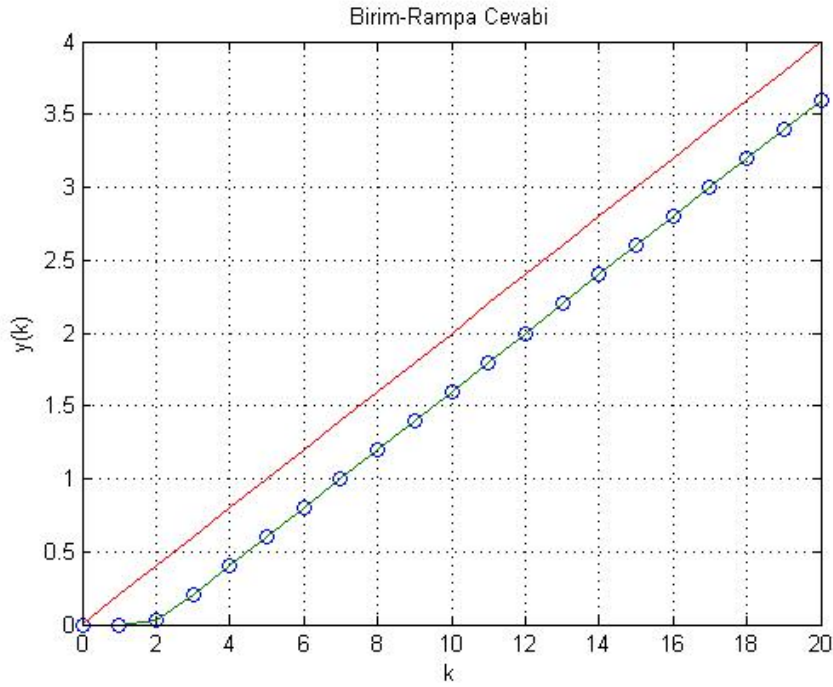
Birim rampa girişini izleyen hata 1.0009'dur. Şekil 6.16, tasarlanmış sistemin nihai blok çizimini vermektedir



Şekil 6.16 Mimari-2 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin nihai blok çizimi



Şekil 6.17 Mimari-2 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim basamak cevabı



Şekil 6.18 Mimari-2 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim rampa cevabı

Polinomsal denklemler yaklaşımla tasarlanan iki farklı sistemin rampa girişlerini izleyen hatalar karşılaştırılırsa Mimari-2 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sisteme nazaran daha iyi performans gösterdiği görülecektir. İlgili hata değerleri aşağıda verilmiştir

Mimari-1 kontrol sistemi

$$e(k) = 1.375 \quad (6.224)$$

Mimari-2 kontrol sistemi

$$e(k) = 1.0009 \quad (6.225)$$

Problem 3. Bir ayrık zamanlı sistemin durum uzayı gösterimi aşağıdaki şekilde verilmiştir (Ogata, 1995). Aşağıdaki 3 şıkkı çözerek kutup atama yöntemiyle en düşük mertebeden gözlemleyici temelli regülatör sistemini tasarlayınız. Sistemin tam durum kontroledilebilir ve tam gözlemlenebilir olduğundan emin olunuz.

Tüm şıkkılar çözüldükten sonra polinomsal denklemler yaklaşımıyla mimarisi Şekil 5.1’de gösterilen Mimari-1 kontrol sistemini tasarlayınız. Kutup atama yöntemi ve polinomsal denklemler yaklaşımı ile tasarlanacak olan sistemlerin aynı sonucu sağlayacağını gösteriniz.

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.25 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (6.226)$$

$$y(k) = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \quad (6.227)$$

- a. Kontrol sinyali $u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$ olarak verildiğinde kapalı çevrim sisteminin ölüvuruş cevabı sağlayacak şekilde \mathbf{K} durum geribeslemeli kazanç matrisini belirleyiniz.
- b. Sistemin $y(k)$ çıkışının yalnız ölçülebilen durum olduğunu varsayarak hata sinyalinin gözlemleyici hatasına ölüvuruş cevabı sağlayacak şekilde en düşük mertebeden durum gözlemleyicisini tasarlayınız.
- c. Gözlemleyici regülatörün $G_D(z)$ darbe transfer fonksiyonunu elde ediniz.

Çözüm

K geribeslemeli kazanç matrisini bulmak için ilk önce sistemin tam durum kontroledilebilir olup olmadığı öğrenilmesi gerekir. Bunun için sistemin kontroledilebilirlik matrisini elde edip daha sonra bunun rankını öğrenelim

$$\text{rank}[\mathbf{H}:\mathbf{GH}:\mathbf{G}^2\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} 1 & -0.25 & -0.125 \\ 0 & 1 & -0.25 \\ 1 & 0.5 & 1.25 \end{bmatrix} = 3 \quad (6.228)$$

Görüldüğü gibi, matrisin rankı sistemin mertebesi ile aynıdır. Sistem tam durum kontroledilebilirdir. Dolayısıyla, sistemin arzu edilen kutuplarının yerleştirilmesi mümkündür. Bundan sonra sistemin tam gözlemlenebilir olup olmadığı öğrenilmesi gerekir. Eğer sistem gözlemlenebilir ise \mathbf{K}_e matrisin belirlenmesi mümkündür. Bunun için sistemin gözlemlenebilirlik matrisini elde edip daha sonra bunun rankını öğrenelim

$$\text{rank}[\mathbf{C}^*:\mathbf{G}^*\mathbf{C}^*:(\mathbf{G}^*)^2\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 \end{bmatrix} = 3 \quad (6.229)$$

Görüldüğü gibi, matrisin rankı sistemin mertebesi ile aynıdır. Sistem tam gözlemlenebilirdir. Dolayısıyla gözlemleyicinin arzu edilen kutuplarının yerleştirilmesi mümkündür.

a. Sistemin arzu edilen karakteristik denklemi aşağıdaki şekilde yazılır

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}| = z^3 + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z + \alpha_3 = 0 \quad (6.230)$$

Sistemin arzu edilen kutupları orijinde yerleşeceğinden α_1, α_2 ve α_3 katsayıları sıfır olacaktır:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \quad (6.231)$$

Bunu dikkate alarak sistemin arzu edilen karakteristik denklemi yeniden aşağıdaki şekilde yazılır

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}| = z^3 = 0 \quad (6.232)$$

\mathbf{K} matrisini elde etmek için \mathbf{K} 'yı hesaplamanın farklı yöntemleri anlatıldığı Altbölüm 4.1.4'deki üçüncü yöntemi uygulayalım. İlk önce arzu edilen \mathbf{K} matrisinin katsayılarını aşağıdaki gibi tanımlayalım

$$\mathbf{K} = [k_1 : k_2 : k_3] \quad (6.233)$$

Daha sonra \mathbf{K} matrisi aşağıdaki gibi elde edilir

$$\begin{aligned} |z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}| &= \begin{vmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & -0.25 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \\ &= z^3 + (k_1 + k_3 - 0.5)z^2 + (k_2 - 0.75k_1)z + (k_3 - 0.75k_2 + 0.25) = 0 \end{aligned} \quad (6.234)$$

Elde edilen karakteristik denklemin, (ölüvuruşlu cevap için) verilen arzu edilen karakteristik denklemlerle eşitlenmesi aşağıdaki \mathbf{K} matrisini vermiş olacaktır

$$\mathbf{K} = [0.48 \quad 0.36 \quad 0.02] \quad (6.235)$$

b. Şimdi $y(k)$ çıkışının yalnız ölçülebilen durum olduğunu varsayarak en düşük mertebeden durum gözlemleyicisini tasarlayalım. $y(k)$, ölçülebilen tek durum değişkeni olduğundan gözetlenecek olan durum değişkenlerinin sayısı 2'dir. Bu nedenle, tasarlanacak olan en düşük mertebeden gözlemleyicinin mertebesi $n = 2$ 'dir.

Şuna dikkat edilmelidir ki, problemde verilen \mathbf{C} çıkış matrisi ($[0 \ 1 \ 0]$ matrisi) (4.117) denkleminde verilen çıkış matrisinden farklıdır. Dolayısıyla, bu formülden yararlanılamaz. Bu farklılığı ortadan kaldırmak için $\mathbf{x}(k)$ durum vektörünün, \mathbf{C} çıkış matrisi $[0 \ 1 \ 0]$ 'dan $[1 \ 0 \ 0]$ 'ya dönüşecek şekilde yeni $\xi(k)$ durum vektörüne dönüştürülmesi gerekir. Söz konusu dönüşümü gerçekleştirmek için aşağıda verilen \mathbf{P} matrisi kullanılacaktır

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.236)$$

Böylece, yeni $\xi(k)$ durum vektörü aşağıdaki gibi tanımlanmış olacaktır

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{P}\xi(k) \quad (6.237)$$

Daha sonra Altbölüm 3.4.2'de anlatıldığı gibi sistemin denklemi aşağıdaki şekilde yazılmış olacaktır

$$\xi(k+1) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P}\xi(k) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{H}u(k) = \hat{\mathbf{G}}\xi(k) + \hat{\mathbf{H}}u(k) \quad (6.238)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{P}\xi(k) = \hat{\mathbf{C}}\xi(k) \quad (6.239)$$

burada

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{G}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.25 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 \\ 1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{G}}_{aa} & \hat{\mathbf{G}}_{ab} \\ \hat{\mathbf{G}}_{ba} & \hat{\mathbf{G}}_{bb} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.240)$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.241)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.242)$$

Böylece, sistemin dönüştürülmüş ve daha sonra ayrılmış durum denklemi aşağıdaki şekilde yazılır

$$\begin{bmatrix} \xi_1(k+1) \\ \xi_2(k+1) \\ \xi_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & | & 0 & -0.25 \\ 1 & | & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (6.243)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & : & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \end{bmatrix} \quad (6.244)$$

burada

$$\hat{G}_{aa} = 0, \hat{G}_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \hat{G}_{ba} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \hat{G}_{bb} = \begin{bmatrix} 0 & -0.25 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (6.245)$$

$$\hat{H}_a = 0, \hat{H}_b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.246)$$

(4.137) denklemini dikkate alınarak

$$\begin{aligned} \hat{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \hat{G}_{ab} &= \begin{bmatrix} 0 & -0.25 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -k_{e1} & -0.25 \\ -k_{e2} & 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.247)$$

Daha sonra (4.137) denklemini mevcut probleme uygun olarak aşağıdaki şekilde yazılmış olacak

$$\begin{aligned} |z\mathbf{I} - \hat{G}_{bb} + \mathbf{K}_e \hat{G}_{ab}| &= \begin{vmatrix} z + k_e & 0.25 \\ k_{e2} & z - 0.5 \end{vmatrix} \\ &= z^2 + (k_{e1} - 0.5)z - (0.5k_{e1} + 0.25k_{e2}) \end{aligned} \quad (6.248)$$

En düşük mertebeden gözlemleyicinin hata dinamiğinin arzu edilen karakteristik denklemini aşağıdaki gibidir

$$z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 = 0 \quad (6.249)$$

Ölüvuruşlu cevabın sağlanması istendiğinden gözlemleyicinin arzu edilen kutupları orijinde yerleşecektir. Bu nedenle α_1 ve α_2 katsayıları sıfır olacaktır

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad (6.250)$$

Dolayısıyla hata dinamiğinin arzu edilen karakteristik denklemi aşağıdaki şekilde yazılır

$$z^2 = 0 \quad (6.251)$$

(6.250) dikkate alınarak \mathbf{K}_e matrisinin katsayıları aşağıdaki gibi elde edilecektir

$$k_{e1} = 0.5 \text{ ve } k_{e2} = -1 \quad (6.252)$$

veya

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (6.253)$$

c. Gözlemleyici regülatörün $G_D(z)$ darbe transfer fonksiyonunu elde etmek için sırasıyla (6.226) ve (6.227) denklemleriyle tanımlanan sistemin durum ve çıkış denklemlerini yeniden ele alınır. En düşük mertebeden gözlemleyicinin darbe transfer fonksiyonunu elde etmek amacıyla (4.131) ve (4.132) ile tanımlanan en düşük mertebeden durum gözlemleyicinin denklemlerini aşağıda tekrar yazalım

$$\tilde{\xi}_b(k) - \mathbf{K}_e \mathbf{y}(k) = \tilde{\eta}(k) \quad (6.254)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(k+1) = & (\hat{\mathbf{G}}_{bb} - \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{G}}_{ab}) \tilde{\eta}(k) + [(\hat{\mathbf{G}}_{bb} - \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{G}}_{ab}) \mathbf{K}_e + \hat{\mathbf{G}}_{ba} - \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{G}}_{aa}] \mathbf{y}(k) \\ & + (\hat{\mathbf{H}}_b - \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{H}}_a) \mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (6.255)$$

(6.254) ve (6.255) denklemlerini oluşturan terimler aşağıdaki gibi hesaplanır

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{G}}_{bb} - \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{G}}_{ab} &= \begin{bmatrix} 0 & -0.25 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.5 & -0.25 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (6.256)$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{ba} - \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{G}}_{aa} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\quad (6.257)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_b - \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{H}}_a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot 0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\quad (6.258)$$

Daha sonra (6.255) denklemi aşağıdaki şekilde yazılmış olacaktır

$$\tilde{\mathbf{\eta}}(k+1) = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.25 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{\eta}}(k) + \left\{ \begin{bmatrix} -0.5 & -0.25 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \mathbf{y}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)\quad (6.259)$$

veya

$$\tilde{\mathbf{\eta}}(k+1) = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.25 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{\eta}}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)\quad (6.260)$$

(6.260) denkleminin z -dönüşümünün alınması aşağıdaki denklemi vermiş olacaktır

$$z\tilde{\mathbf{\eta}}(z) = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.25 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{\eta}}(z) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} Y(z) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} U(z)\quad (6.261)$$

veya

$$\begin{bmatrix} z+0.5 & 0.25 \\ -1 & z-0.5 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{\eta}}(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} Y(z) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} U(z)\quad (6.262)$$

(6.262) denkleminin $\tilde{\mathbf{\eta}}(z)$ için çözülmesi aşağıdaki denklemi vermiş olacaktır

$$\tilde{\eta}(z) = \begin{bmatrix} z+0.5 & 0.25 \\ -1 & z-0.5 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} Y(z) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} U(z) \right) \quad (6.263)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(z) &= \begin{bmatrix} \frac{z-0.5}{z^2} & -\frac{0.25}{z^2} \\ \frac{1}{z^2} & \frac{z+0.5}{z^2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} Y(z) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} U(z) \right) \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{0.25}{z^2} \\ \frac{z+0.5}{z^2} \end{bmatrix} Y(z) + \begin{bmatrix} \frac{z-0.75}{z^2} \\ \frac{z+1.5}{z^2} \end{bmatrix} U(z) \end{aligned} \quad (6.264)$$

(6.264) dikkate alınarak (6.254) aşağıdaki şekilde yazılmış olur

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_b(z) &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} Y(z) + \tilde{\eta}(z) \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} Y(z) + \begin{bmatrix} -\frac{0.25}{z^2} \\ \frac{z+0.5}{z^2} \end{bmatrix} Y(z) + \begin{bmatrix} \frac{z-0.75}{z^2} \\ \frac{z+1.5}{z^2} \end{bmatrix} U(z) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{0.5z^2 - 0.25}{z^2} \\ -\frac{z^2 - z - 0.5}{z^2} \end{bmatrix} Y(z) + \begin{bmatrix} \frac{z-0.75}{z^2} \\ \frac{z+1.5}{z^2} \end{bmatrix} U(z) \end{aligned} \quad (6.265)$$

$u(k) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k)$ olduğundan kontrol sinyali aşağıdaki gibi verilir

$$u(k) = -\hat{\mathbf{K}}\tilde{\xi}(k) \quad (6.266)$$

burada

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}\mathbf{P} = [0.48 \quad 0.36 \quad 0.02] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0.36 \quad 0.48 \quad 0.02] \quad (6.267)$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned}
u(k) &= -\hat{\mathbf{K}}\tilde{\xi}(k) \\
&= -[0.36 \quad 0.48 \quad 0.02] \begin{bmatrix} y(k) \\ \tilde{\xi}(k) \end{bmatrix} \\
&= -[0.36y(k) + [0.48 \quad 0.02] \cdot \tilde{\xi}_b(k)] \\
&= -0.36y(k) - [0.48 \quad 0.02] \cdot \tilde{\xi}_b(k)
\end{aligned} \tag{6.268}$$

(6.268) denkleminin z -dönüşümünün alınması ve daha sonra bunun yerine (2.264)'nin konulması aşağıdaki denklemi vermiş olacaktır

$$\begin{aligned}
U(z) &= -0.36Y(z) - [0.48 \quad 0.02] \cdot \tilde{\xi}_b(z) \\
&= -0.36Y(z) - [0.48 \quad 0.02] \cdot \left(\begin{bmatrix} \frac{0.5z^2 - 0.25}{z^2} \\ -\frac{z^2 - z - 0.5}{z^2} \end{bmatrix} Y(z) + \begin{bmatrix} \frac{z - 0.75}{z^2} \\ \frac{z + 1.5}{z^2} \end{bmatrix} U(z) \right) \\
&= -0.36Y(z) - [0.48 \quad 0.02] \cdot \begin{bmatrix} \frac{0.5z^2 - 0.25}{z^2} \\ -\frac{z^2 - z - 0.5}{z^2} \end{bmatrix} Y(z) - [0.48 \quad 0.02] \cdot \begin{bmatrix} \frac{z - 0.75}{z^2} \\ \frac{z + 1.5}{z^2} \end{bmatrix} U(z) \\
&= \left[-0.36 - \frac{0.22z^2 + 0.02z - 0.11}{z^2} \right] Y(z) - \left[\frac{0.5z - 0.33}{z^2} \right] U(z)
\end{aligned} \tag{6.269}$$

veya

$$\left[1 + \frac{0.5z - 0.33}{z^2} \right] U(z) = \left[-0.36 - \frac{0.22z^2 + 0.02z - 0.11}{z^2} \right] Y(z) \tag{6.270}$$

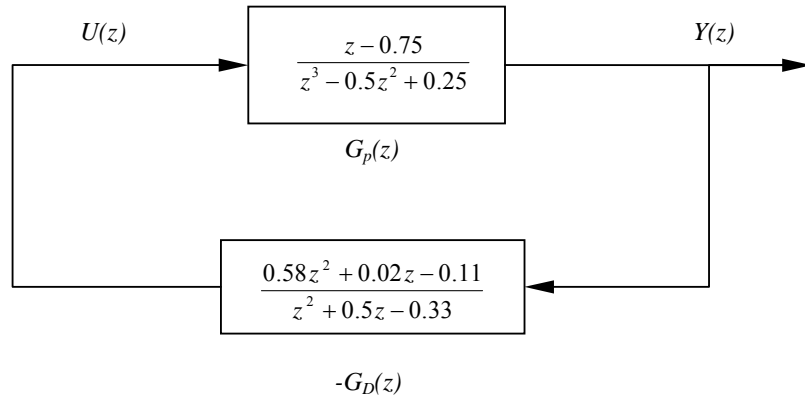
(6.270) denkleminde $G_D(z)$ gözlemleyici regülatörün darbe transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılmış olacak

$$G_D(z) = -\frac{U(z)}{Y(z)} = \frac{0.58z^2 + 0.02z - 0.11}{z^2 + 0.5z - 0.33} \tag{6.271}$$

Sistemin $G_p(z)$ darbe transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde bulunabilir

$$G_p(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H} = \hat{\mathbf{C}}(z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}})^{-1} \hat{\mathbf{H}} = \frac{z - 0.75}{z^3 - 0.5z^2 + 0.25} \quad (6.272)$$

$G_D(z)$ ve $G_p(z)$ darbe transfer fonksiyonlarının elde edilmesi sistemin tasarlanmış olduğu anlamına gelmektedir. Böylece, kutup atama yöntemi uygulanarak elde edilmesi amaçlanan en düşük mertebeden gözlemleyicili gözlenmiş durum geribeslemeli regülatör sistemi tasarlanmış oldu. Tasarlanmış sistemin blok çizimi Şekil 6.19'da verilmektedir



Şekil 6.19 Kutup atama yöntemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin blok çizimi

Şimdi aynı sistemi polinomsal denklemler yaklaşımıyla tasarlayıp nihai sistemin kutup atama yöntemi ile tasarlanan sistemle aynı olduğunu göstermeye çalışalım.

(6.232) denkleminde atfen sistemin karakteristik denkleminin aşağıdaki şekilde tanımlandığı hatırlanır

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| = z^3 = 0 \quad (6.273)$$

bundan dolayı

$$H(z) = z^3 \quad (6.274)$$

Gözlemleyici hatasının karakteristik denklemi (6.248) denkleminde atfen aşağıdaki gibidir

$$|z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}}_{bb} + \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{G}}_{ab}| = z^2 \quad (6.275)$$

bundan dolayı

$$F(z) = z^2 \quad (6.276)$$

Plantın $G_p(z)$ darbe transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi belirlenmiştir

$$G_p(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H} = \frac{z - 0.75}{z^3 - 0.5z^2 + 0.25} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (6.277)$$

burada

$$A(z) = z^3 - 0.5z^2 + 0.25 \quad (6.278)$$

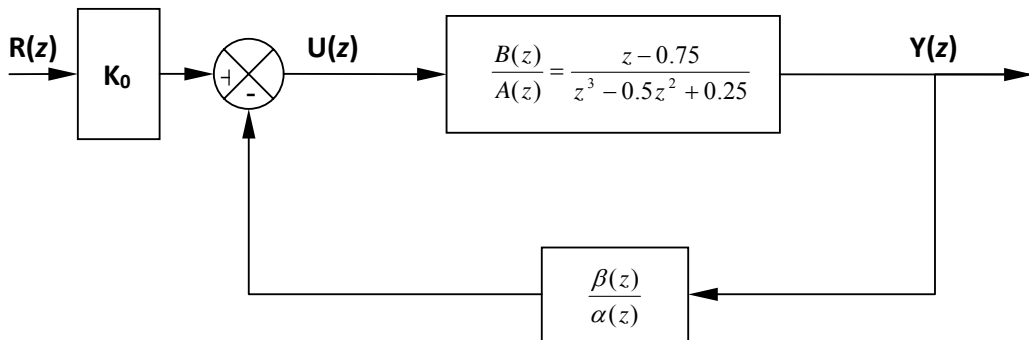
$$B(z) = z - 0.75 \quad (6.279)$$

buradan

$$a_1 = -0.5, a_2 = 0, a_3 = 0.25, \quad (6.280)$$

$$b_0 = 0, b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = -0.75$$

Mevcut problemin Mimari-1 kontrol sisteminin blok çizimi Şekil 6.20’de gösterilmiştir



Şekil 6.20 Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin blok çizimi

Bütün sistemin (gözlenmiş durum geribeslemeli sistem) karakteristik polinomu aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$D(z) = H(z)F(z) = z^3 \cdot z^2 = z^5 \quad (6.281)$$

buradan

$$d_0 = 1, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = 0, \quad d_3 = 0, \quad d_4 = 0, \quad d_5 = 0 \quad (6.282)$$

Mimari-1 kontrol sisteminin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = K_0 \frac{\alpha(z)\beta(z)}{\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z)} \quad (6.283)$$

Sistemin karakteristik denklemi aşağıdaki şekilde yazılır

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = 0 \quad (6.284)$$

Polinomsal denklemler yaklaşımında aşağıdaki denklemin çözülmesi hedeflenir

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = H(z)F(z) = D(z) \quad (6.285)$$

veya

$$\alpha(z)(z^3 - 0.5z^2 + 0.25) + \beta(z)(z - 0.75) = z^5 \quad (6.286)$$

(6.286) denklemi, denetleyicinin darbe transfer fonksiyonunun çözümüdür. (6.286) denklemi $\alpha(z)$ ve $\beta(z)$ için $2n \times 2n$ mertebeden \mathbf{E} Sylvester matrisi ile çözülür. Mevcut sistemin $n = 3$ mertebeden olduğu düşünülerek \mathbf{E} matrisi 6×6 mertebeden bir matrise dönüşür. Bu matris aşağıdaki şekilde yazılır

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & -0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 1 & -0.75 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.25 & 0 & 1 & -0.75 \\ 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.287)$$

(6.287) ile verilen matrisin tersi aşağıdaki gibi hesaplanır

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 2.56 & 1.92 & 1.44 & 1.08 & 0.06 & -0.33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.48 & 0.64 & 0.48 & 0.36 & 0.02 & -0.11 \\ -0.64 & -0.48 & 0.64 & 0.48 & 0.36 & 0.02 \\ -2.56 & -1.92 & -1.44 & 0.08 & 0.44 & 0.58 \end{bmatrix} \quad (6.288)$$

$\alpha(z)$ ve $\beta(z)$ katsayılarını bulmak için ilk önce aşağıdaki gibi \mathbf{D} ve \mathbf{M} matrisleri belirlenir

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_5 \\ d_4 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.289)$$

ve

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} \quad (6.290)$$

M matrisi aşağıdaki şekilde bulunur

$$\mathbf{M} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -0.33 \\ 0.5 \\ 1 \\ -0.11 \\ 0.02 \\ 0.58 \end{bmatrix} \quad (6.291)$$

Daha sonra $\alpha(z)$ ve $\beta(z)$ polinomları aşağıdaki şekilde belirlenir

$$\alpha(z) = \alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 = z^2 + 0.5z - 0.33 \quad (6.292)$$

$$\beta(z) = \beta_0 z^2 + \beta_1 z + \beta_2 = 0.58z^2 + 0.02z - 0.11 \quad (6.293)$$

Böylece, tasarlanmış denetleyicinin darbe transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir

$$\frac{\beta(z)}{\alpha(z)} = \frac{0.58z^2 + 0.02z - 0.11}{z^2 + 0.5z - 0.33} \quad (6.294)$$

Dikkat edilirse (6.294) denklemi ile tanımlanan $\frac{\beta(z)}{\alpha(z)}$ denetleyicinin darbe transfer fonksiyonu

(6.271) denklemi ile tanımlanan $G_D(z)$ gözlemleyici regülatörün darbe transfer fonksiyonu ile aynı olduğu görülmektedir. İki transfer fonksiyonu karşılaştırma amacıyla aşağıdaki tekrar yazalım

$$G_D(z) = -\frac{U(z)}{Y(z)} = \frac{0.58z^2 + 0.02z - 0.11}{z^2 + 0.5z - 0.33} \quad (6.295)$$

$$\frac{\beta(z)}{\alpha(z)} = \frac{0.58z^2 + 0.02z - 0.11}{z^2 + 0.5z - 0.33} \quad (6.296)$$

Sonuç olarak iki yaklaşımla tasarlanmış sistemlerin aynı sonucu verdiği gösterilmiş oldu.

Şekil 6.20'de gösterilen sistemin kapalı çevrim darbe transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılır

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0 \frac{B(z)}{A(z)}}{1 + \frac{\beta(z)B(z)}{\alpha(z)A(z)}} = \frac{K_0 \frac{B(z)}{A(z)}}{\frac{\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z)}{\alpha(z)A(z)}} = \frac{K_0 \alpha(z)B(z)}{\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z)} \quad (6.297)$$

(6.284) denklemini dikkate alınarak son denklem aşağıdaki şekilde yazılmış olur

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{R(z)} &= \frac{K_0 \alpha(z)B(z)}{\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z)} = \frac{K_0 \alpha(z)B(z)}{H(z)F(z)} \\ &= \frac{K_0 (z^2 + 0.5z - 0.33)(z - 0.75)}{z^5} \\ &= \frac{K_0 (z^3 - 0.25z^2 - 0.705z + 0.2475)}{z^5} \end{aligned} \quad (6.298)$$

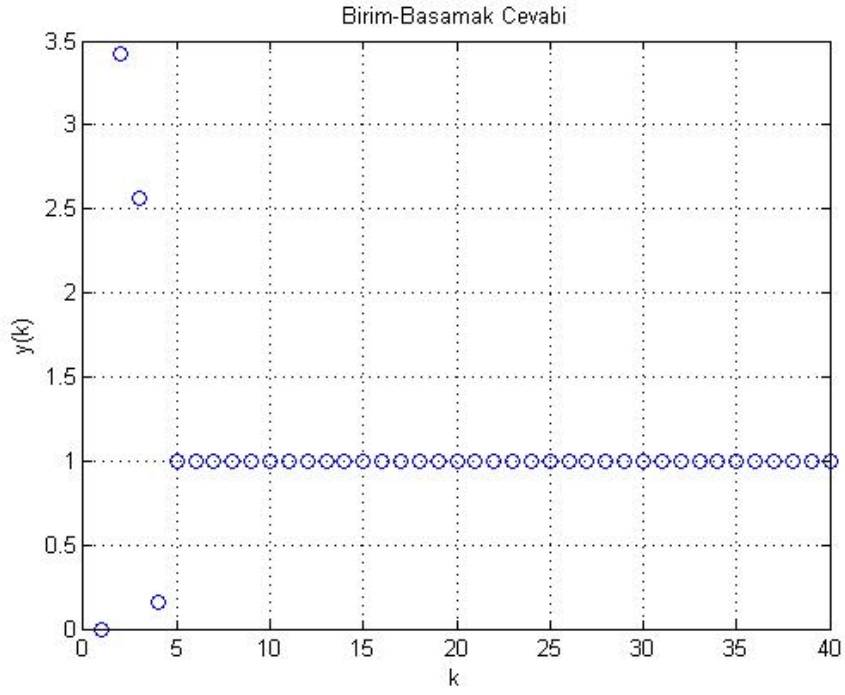
K_0 kazanç sabitini belirlemek için sistemin girişine birim basamak girişi uygulandığında $y(\infty)$ kalıcı hal çıkışının birine eşit olduğu kabul edilir ya da

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{K_0 (z^3 - 0.25z^2 - 0.705z + 0.2475)}{z^5} \frac{z}{z-1} = 0.2925K_0 = 1 \quad (6.299)$$

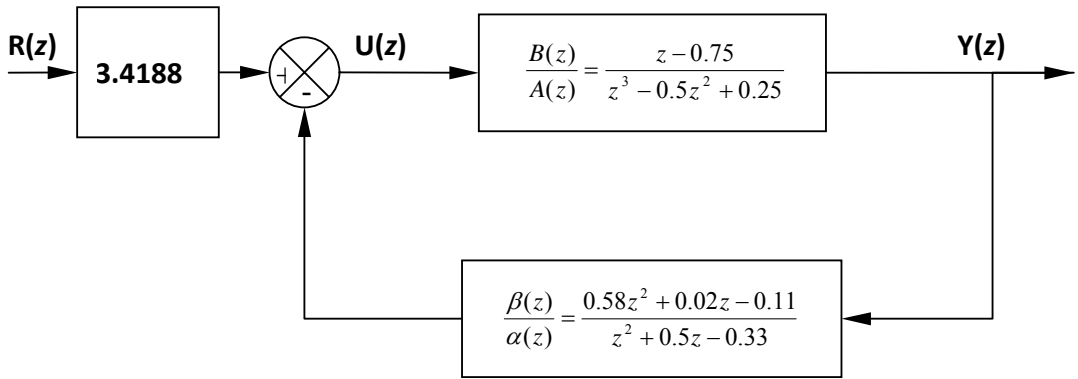
Böylece, $K_0 = 3.4188$ eşit olup kapalı çevrim darbe transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılır

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{R(z)} &= \frac{3.4188(z^3 - 0.25z^2 - 0.705z + 0.2475)}{z^5} \\ &= \frac{3.4188z^3 - 0.8547z^2 - 2.4103z + 0.8462}{z^5} \end{aligned} \quad (6.300)$$

Görüldüğü gibi, tasarlanmış sistem beşinci mertebeden bir sistemdir. Sistemin birim basamak cevabı Şekil 6.21'de verilmiştir. Dikkat edilmesi gerekir ki, $y(k)$ çıkışı biri, dört örnekleme zamanı içerisinde buldu. Şekil 6.22'de, elde edilen $G_D(z)$ gözlemleyici regülatörün darbe transfer fonksiyonunun, $\frac{\beta(z)}{\alpha(z)}$ denetleyicinin darbe transfer fonksiyonunun ve K_0 kazanç sabitinin gösterildiği sistemin nihai blok çizimi verilmiştir.



Şekil 6.21 Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim basamak cevabı



Şekil 6.22 Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin nihai blok çizimi

Problem 4. Aşağıdaki denklemlerle tanımlanan sistemi düşününüz (Ogata, 1995)

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.01873(z + 0.9356)}{(z - 1)(z - 0.8187)} \quad (6.301)$$

Polinomsal denklemler yaklaşımını kullanarak aşağıdaki denklemlerle verilen G_{model} model sistemiyle aynı şekilde davranacak olan kontrol sistemini tasarlayınız

$$G_{\text{model}} = \frac{0.32}{z^2 - 1.2z + 0.52} \quad (6.302)$$

T örnekleme zamanının 0.2sn olduğunu kabul ederek sistemin birim basamak ve birim rampa cevaplarını elde ediniz.

Çözüm

Mevcut sistemin darbe transfer fonksiyonunu aşağıda tekrar yazalım

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.01873(z + 0.9356)}{(z - 1)(z - 0.8187)} \quad (6.303)$$

Böylece, darbe transfer fonksiyonunun $A(z)$ ve $B(z)$ polinomları aşağıdaki şekilde yazılır

$$A(z) = (z - 1)(z - 0.8187) = z^2 - 1.8187z + 0.8187 \quad (6.304)$$

$$B(z) = 0.01873(z + 0.9356) = 0.01873z + 0.01752 \quad (6.305)$$

burada

$$\begin{aligned} a_1 &= -1.8187, a_2 = 0.8187, \\ b_0 &= 0, b_1 = 0.01873, b_2 = 0.01752, \end{aligned} \quad (6.306)$$

(6.304) ve (6.305) denklemlerine bakıldığında $A(z)$ ve $B(z)$ polinomlarının ortak bölenleri içermediği görülür. Dolayısıyla, $B(z)$ polinomunun sabit olduğu söylenebilir. Kontrol

sisteminin tasarımında $H(z)$, mevcut sistemin 2 mertebeden arzu edilen karakteristik denklemin polinomu, $H_1(z)$, aşağıdaki şekilde 1 $[(n-1)]$ mertebeden sabit polinom olarak seçilir

$$H_1(z) = z + 0.5 \quad (6.307)$$

Önceden belirtildiği gibi $H_1(z)$, sabit bir polinom olduğu sürece $H_1(z)$ keyfi olarak seçilebilmektedir.

Daha sonra aşağıdaki şekilde verilen denklemleri tanımlayalım

$$\begin{aligned} H(z) = B(z)H_1(z) &= (0.01873z + 0.01752)(z + 0.5) \\ &= 0.01873z^2 + 0.0269z + 0.0088 \end{aligned} \quad (6.308)$$

Daha sonra aşağıdaki şekilde $F(z)$ polinomunu tanımlayalım

$$F(z) = z \quad (6.309)$$

Önceden belirtildiği gibi $F(z)$, 1 mertebeden herhangi bir sabit polinom olarak seçilebilmektedir. Daha sonra $D(z)$ polinomunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım

$$\begin{aligned} D(z) = F(z)H(z) &= F(z)B(z)H_1(z) \\ &= z(0.01873z^2 + 0.0269z + 0.0088) \\ &= 0.01873z^3 + 0.0269z^2 + 0.0088z \end{aligned} \quad (6.310)$$

Son denklemin katsayıları aşağıdaki şekilde belirlenir

$$d_0 = 0.01873, d_1 = 0.0269, d_2 = 0.0088, d_3 = 0 \quad (6.311)$$

Bundan sonra aşağıdaki şekilde verilen Diophantine denkleminin çözümünü bulmamız lazım

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = F(z)B(z)H_1(z) \quad (6.312)$$

$A(z)$ ve $B(z)$ polinomları dikkate alınarak (6.312) denklemleri aşağıdaki şekilde yazılmış olur

$$\begin{aligned} \alpha(z)(z^2 - 1.8187z + 0.8187) + \beta(z)(0.01873z + 0.01752) \\ = 0.01873z^3 + 0.0269z^2 + 0.0088z \end{aligned} \quad (6.313)$$

(6.313) denklemini $\alpha(z)$ ve $\beta(z)$ için 4×4 mertebeden \mathbf{E} Sylvester matrisi ile çözülür. Bu matris aşağıdaki şekilde yazılır

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ 1 & a_1 & b_0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8187 & 0 & 0.01752 & 0 \\ -1.8187 & 0.8187 & 0.01873 & 0.01752 \\ 1 & -1.8187 & 0 & 0.01873 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.314)$$

(6.314) ile verilen matrisin tersi MATLAB programının komutuyla aşağıdaki şekilde hesaplanır

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2946 & -0.2755 & 0.2577 & 0.6943 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 43.3129 & 12.8755 & -12.0437 & -32.4450 \\ -15.7267 & 14.7107 & 39.6299 & 60.0312 \end{bmatrix} \quad (6.315)$$

Daha sonra $\alpha(z)$ ve $\beta(z)$ katsayılarının bulunması için ilk önce (6.311) dikkate alınarak aşağıdaki şekilde \mathbf{D} ve \mathbf{M} matrisleri belirlenir

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0088 \\ 0.0269 \\ 0.01873 \end{bmatrix} \quad (6.316)$$

ve

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} \quad (6.317)$$

Daha sonra \mathbf{M} matrisi (5.15) denklemleri kullanılarak aşağıdaki şekilde bulunur

$$\mathbf{M} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.0175 \\ 0.0187 \\ -0.8170 \\ 2.3180 \end{bmatrix} \quad (6.318)$$

\mathbf{M} matrisi elde edildikten sonra $\alpha(z)$ ve $\beta(z)$ polinomları aşağıdaki şekilde belirlenir

$$\alpha(z) = \alpha_0 z + \alpha_1 = 0.0187z + 0.0175 \quad (6.319)$$

$$\beta(z) = \beta_0 z + \beta_1 = 2.318z - 0.817 \quad (6.320)$$

Elde edilen $\alpha(z)$ ve $\beta(z)$ polinomları kullanılarak $\frac{Y(z)}{V(z)}$ aşağıdaki şekilde yazılmış olur

$$\frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{F(z)B(z)}{F(z)B(z)H_1(z)} = \frac{1}{H_1(z)} = \frac{1}{z + 0.5} \quad (6.321)$$

$$\frac{V(z)}{R(z)} = G_{\text{model}} H_1(z) = \frac{0.32(z + 0.5)}{(z^2 - 1.2z + 0.52)} \quad (6.322)$$

olduğundan

$\frac{Y(z)}{R(z)}$ darbe transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılmış olur

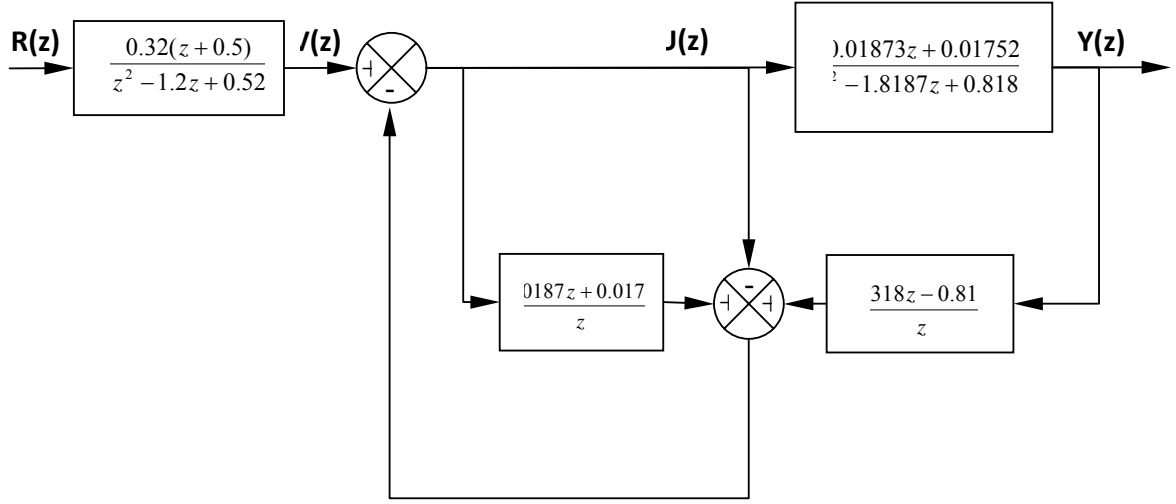
$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{1}{z + 0.5} \frac{0.32(z + 0.5)}{(z^2 - 1.2z + 0.52)} = \frac{0.32}{(z^2 - 1.2z + 0.52)} = G_{\text{model}} \quad (6.323)$$

(6.323) denkleminde bakılırsa verilmiş sistemin istendiği gibi “model sistemine” benzer bir

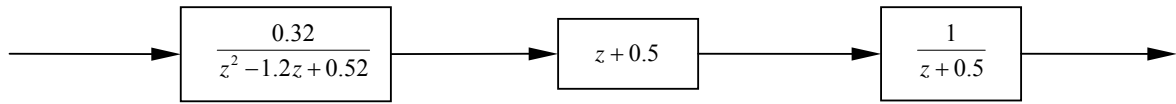
şekilde arzu edilen kutuplar ve sıfırlara sahip olması gerçekleşmiş oldu. Sistem, $\frac{V(z)}{R(z)} = G_{\text{model}}$

darbe transfer fonksiyonuna sahiptir.

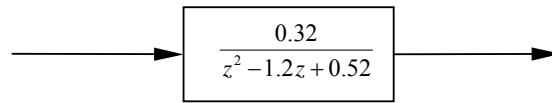
Tasarlanmış olan model eşlemeli kontrol sisteminin blok çizimi şekil 6.23'da gösterilmiştir. Sistemin birim basamak ve birim rampa cevapları sırasıyla Şekil 6.24 ve Şekil 6.25'de verilmiştir.



(a)

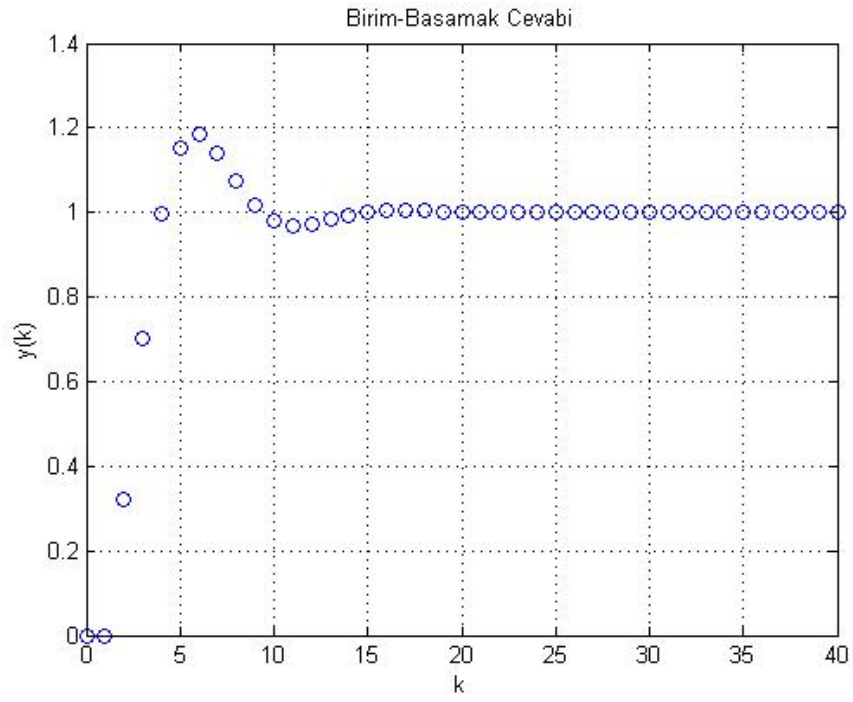


(b)

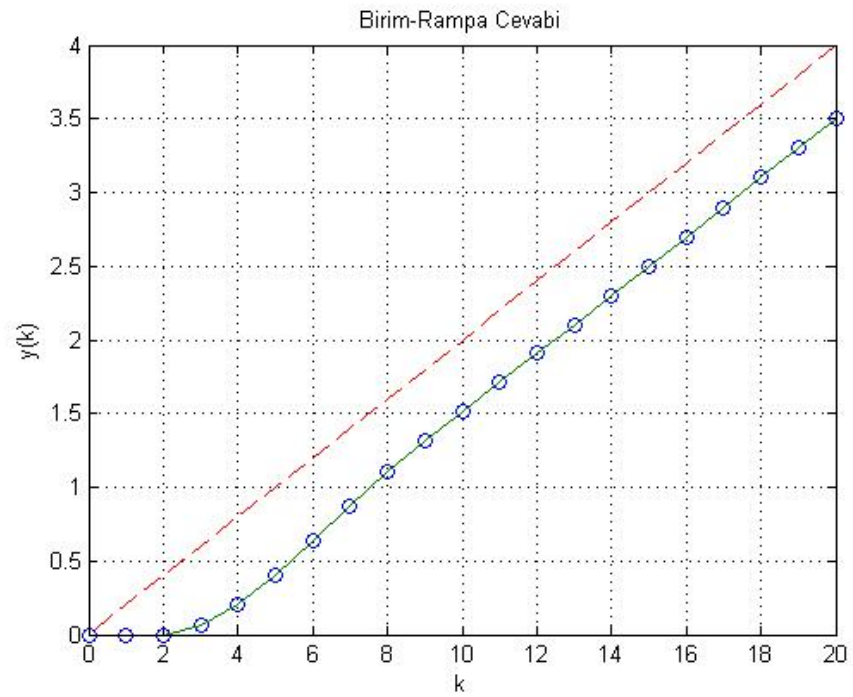


(c)

Şekil 6.23 (a) Model eşlemeli kontrol sisteminin blok çizimi,
(b) ve (c) sistemin basitleştirilmiş blok çizimleri



Şekil 6.24 Model eşlemeli kontrol sisteminin birim basamak cevabı



Şekil 6.25 Model eşlemeli kontrol sisteminin birim rampa cevabı

Birim rampa girişini izleyen hata aşağıdaki şekilde hesaplanabilir

$$\begin{aligned}
 E(z) &= R(z) - Y(z) = \left[1 - \frac{Y(z)}{R(z)} \right] R(z) \\
 &= \left[1 - \frac{0.32}{z^2 - 1.2z + 0.52} \right] R(z) \\
 &= \left[\frac{z^2 - 1.2z + 0.2}{z^2 - 1.2z + 0.52} \right] R(z) \\
 &= \frac{(z-1)(z-0.2)}{z^2 - 1.2z + 0.52} R(z)
 \end{aligned} \tag{6.324}$$

T örnekleme zamanının 0.2 eşit olduğu hatırlanıp $R(z)$ birim rampa girişi aşağıdaki denklemlerle verilir

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{0.2z}{(z-1)^2} \tag{6.325}$$

Daha sonra

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{(z-1)(z-0.2)}{z^2 - 1.2z + 0.52} \frac{0.2z}{(z-1)^2} \\
 &= 0.5
 \end{aligned} \tag{6.326}$$

Böylece, Şekil 6.25'den görülebildiği gibi birim rampa girişini izleyen hata 0.5 hata birimidir.

7. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında kontrol sistemlerinin tasarımında uygulanan iki farklı yöntem tartışılmıştır. Bunların ilki *kutup atama tasarım tekniği* olarak adlandırılır. Bu yöntem durum gözlemleyicilerle bütünleştirilip kutup yerleştirmeye ve atamaya dayalı tasarım tekniğidir. İlgili yöntem kapalı çevrim kutuplarının z düzlemindeki arzu edilen yerlere yerleştirilmesiyle ilişkili ve kontrol mühendisliğinde yaygın uygulanan tasarım yöntemi olarak bilinir. Kutup atama tasarım tekniğinde tüm durum değişkenleri, kapalı çevrim sisteminin tüm kutupları arzu edilen yerlere yerleştirilecek şekilde geri beslenir. Durum değişkenlerinin ölçümü mümkün olmadığı durumlarda söz konusu durum değişkenleri geri besleme için kullanılmayacaktır. Böyle durumlarda durum geribeslemeli tasarım uygulamak için ölçümü mümkün olmayan değişkenlerin kestirilmesi veya öngörülmesi gerekmektedir. Kutup atama yönteminin tasarım işlemi iki aşamadan oluşur. Birinci aşamada, tüm durum değişkenlerinin geribesleme için elde edilebilir olduğu varsayıp sistem tasarlanır. Son aşamada geribesleme için gereken tüm durum değişkenlerini veya sadece doğrudan ölçülebilir olmayan değişkenleri kestiren bir durum gözlemleyicisi tasarlanır. Şuna dikkat edilmelidir ki, kontroledilebilirlik kavramı kutup yerleştirme probleminin çözümlerinin varoluşunun temelidir, gözlemlenebilirlik ise ölçülemeyen durum değişkenlerinin hesaplanarak elde edilmesi için uygulanan önemli bir kavramdır.

Tezde esas olarak incelenen ikinci yöntem polinomsal denklemler yaklaşımı olarak adlandırılır. Bu yaklaşım uygulanarak kutup atama yöntemiyle tasarlanmış kontrol sisteminin eşdeğerini tasarlamak mümkün olabilmektedir. Polinomsal denklemler yaklaşımının çözümü $\alpha(z)$ ve $\beta(z)$ bilinmeyenlerinin yer aldığı Diophantine denklemi olarak isimlendirilen lineer polinomsal denkleminin çözümüne indirgenir. Diophantine denklemi, $\alpha(z)$ ve $\beta(z)$ bilinmeyenlerin yanı sıra sistemin darbe transfer fonksiyonunun $A(z)$ payda polinomu, $B(z)$ pay polinomu ve $D(z)$ sistemin karakteristik denkleminin bulunduğu bir özdeşliktir. Yöntem özetlenecek olursa, kontrol sistemini tasarlama problemi $\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = D(z)$ olarak verilmiş lineer polinomsal denklemin çözülmesine dayalı olduğu söylenebilir. Diophantine denkleminin çözümü birbirine bağlı, matematiksel olarak cazip ve oldukça kolay işlemlerin sonucunda elde edilebilmektedir. Söz konusu denklemin çözülmesi denetleyicinin darbe transfer fonksiyonunu veren $\alpha(z)$ ve $\beta(z)$ polinomlarının elde edilmesini sağlar. Diophantine denkleminin çözümünün var olması için

$A(z)$ ve $B(z)$ polinomları karşılıklı asal (coprime) olmalıdır, bir başka deyişle $A(z)$ ve $B(z)$ ortak bölenleri içermemelidir. Basitten karmaşığa giden dört temel örnek problemle alışılmış kutup atama ve gözlemleyici temelli kutup atama yöntemiyle ele alınan polinomsal denklemler yaklaşımı çözümleri elde edilmiş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bu yöntemlerle tamamen aynı sonuçlar elde edilmiştir. Ancak polinomsal denklemler yaklaşımının çok daha sade ve uygulaması kolay olduğu gösterilmiştir. Böylece polinomsal denklemlerle çözüm yaklaşımının, artık endüstride de uygulama alanı bulmaya başlayan kutup atama ve özellikle gözlemleyici temelli kutup atama yöntemlerinin dijital denetim uygulamalarını (dijital kontrol implementasyonunu) yaygınlaştırmaya yönelik önemli bir teknik olduğu ortaya konmuştur.

KAYNAKLAR

- Aström, K.J., (1970), Introduction to Stochastic Control Theory, Academic Press, New-York.
- Aström, K.J., (1980), “Robustness of a Design Method Based on Assignment of Poles and Zeros”, IEEE Trans. Automatic Control, AC-25:588-591.
- Aström, K.J. ve Wittenmark B., (1973), “On Self-Tuning Regulators”, Automatica, 9:185-199.
- Chang, S.S.L., (1961), Synthesis of Optimum Control Systems, McGraw-Hill, New York.
- Callier, F.M. ve Desoer, C.A., (1982), Multivariable Feedback Systems, Springer-Verlag, New York.
- Clarke, D.W. ve Gawthrop, P.J., (1975), “Self-Tuning Controller”, Proc. IEE, 122:929-934.
- Dorf, R.S. ve Bishop, R.H., (2008), Modern Control Systems, Upper Saddle River, New Jersey.
- Friedland, B., (1995), Advanced Control System Design, Prentice-Hall Int., New Jersey.
- Grimble, M.J., (1984), “Implicit and Explicit LQG Self-Tuning Controllers”, Automatica, 20:661-669.
- Grimble, M.J., (1986), “Optimal H_{∞} Robustness and the Relationship to LQ design Problems”, Int. J. Control, 43:351-372.
- Hautus, M.L.J., (1975), “The Formal Laplace Transform for Smooth Linear Systems”, Proc. Internat Symp. Mathematical Systems Theory, Udine, Italy 29-47.
- Hunt, K.J., Sebek, M. ve Grimble, M.J., (1987), “Optimal Multivariable LQG Control Using a Single Diophantine Equation”, Int. J. Control, 46:1445-1453.
- Hunt, K.J., (1989), Stochastic Optimal Control Theory with Application in Self-Tuning Control, Springer Verlag, Berlin.
- Hunt, K.J. ve Kucera, V., (1992), “The Standard H_2 Optimal Control Problem: a Polynomial Solution”, Int. J. Control, 56:245-251.
- Jury, E. I., (1958), Sampled-Data Control Systems. Wiley, New York.
- Kucera, V., (1973), “Algebraic Theory of Discrete Optimal Control for Single-Variable Systems”, Parts I-III, Kybernetika, 9:94-107, 206-221, 291-312.
- Kucera, V., (1974), “Algebraic Theory of Discrete Optimal Control for Multivariable Systems”, Kybernetika, Supplement to Vols. 10-12:1-240.
- Kucera, V., (1977), “Shortest Correlation Control Strategy”, IEEE Trans. Automatic Control, AC-22:463-465.
- Kucera, V., (1979), Discrete Linear Control: the Polynomial Equation Approach, Wiley, Chichester.
- Kucera, V., (1980a), “A Deadbeat Servo Problem”, Int. J. Control, 32:107-113.
- Kucera, V., (1980b), “Stochastic Multivariable Control: a Polynomial Equation Approach”, IEEE Trans. Automatic Control, AC-25:913-919.
- Kucera, V., (1981), “Exact Model Matching, Polynomial Equation Approach”, Int. J. Systems, Sci., 12:1477-1484.

- Kucera, V., (1983a), "Linear Quadratic Control: State Space vs. Polynomial Equations", *Kybernetika*, 19:185-195.
- Kucera, V., (1983b), "Disturbance Rejection: a Polynomial Approach", *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-28:508-511.
- Kucera, V. ve Sebek, M., (1984), "On Deadbeat Controllers", *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-29:719-722.
- Kucera, V., (1986a), "Stationary LQG Control of Singular Systems", *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-31:31-39.
- Kucera, V., (1986b), "Internal Properness and Stability in Linear Systems", *Kybernetika*, 22:1-18.
- Kuo. B.C., (1999), *Otomatik Kontrol Sistemleri (Çev., A. Bir)*, Literatür Yayıncılık, İstanbul.
- Kuo. B.C., (1980), *Digital Control Systems*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New Jersey.
- Kwakernaak, H., (1985), "Minimax Frequency Domain Performance and Robustness Optimization of Linear Feedback Systems", *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-30:994-1004.
- Kwakernaak, H., (1991), "The Polynomial Approach to H_∞ - Optimal Regulation. In Mosca, E. ve Pandolfi L. (Eds.), H_∞ Control Theory, Lecture Notes in Mathematics", 1496, Springer-Verlag, Berlin.
- Mosca, E., Giarre, L., ve Casavola, A., (1990), "On The Polynomial Equation for the MIMO LQ Stochastic Regulator", *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-35:320-322.
- Ogata, K., (2008), *MATLAB for Control Engineers*, Upper Saddle River, New Jersey.
- Ogata, K., (2002), *Modern Control Engineering*, Prentice-Hall, New Jersey.
- Ogata, K., (1995), *Discrete-Time Control Systems*, Prentice-Hall, New Jersey.
- Özdaş, N.M., Dinibütün, A. T., Kuzucu, A. (1998), *Otomatik Kontrol Temelleri*, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- Pernebo, L., (1981), "An Algebraic Theory for The Design of Controllers for Linear Multivariable Systems", *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-26:171-194.
- Peterka, V., (1972), "On Steady State Minimum Variance Control Strategy", *Kybernetika*, 8: 219-232.
- Peterka, V., (1984), "Predictor Based Self-Tuning Control", *Automatica*, 20:39-50.
- Polyakov, K. Yu., (2006), *The Fundamentals of the Theory of Digital Control Systems (Rusça)*, SPBGMTU, St. Petersburg,
- Santina, M.S., Stubberud, A.R. ve Hostetter, G.H., (1994), *Digital Control Systems Design*, Forth Worth.
- Sarioğlu, K.M., (1998), *Dijital Kontrol Sistemleri*, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- Sternad, M., (1987), *Optimal and Adaptive Feedforward Regulators*, Doctoral Thesis, Uppsala University, Sweden (yayımlanmamış).
- Strejc, V., (1967), *Synthese von Regelungssystemen mit Prozessrechner*, Akademie-Verlag, Berlin.

Tou. J.T., (1959), Digital and Sampled Data Control Systems, McGraw-Hill, New York.

Vakkaro, R.J., (1995), Digital Control. A State-Space Approach, McGraw-Hill, New York.

Vidyasagar, M., “Control System Synthesis: a Factorization Approach”, MIT Press, Cambridge, M.A.

Volgin, L.N., (1962), The Fundamentals of the Theory of Controllers (Rusça), Soviet Radio, Moscow.

EKLER

Şekil 6.5’de verilen Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim basamak cevabını hesaplayan MATLAB programı

```
%Polinomsal denklemler yaklasimi ile birinci duzendeki
%kontrol sistemine dayali olarak tasarlanmis
%sistemin birim basamak cevabi

num = [0 0.1734 0.4710 0.3211 0.0342 0.0009];
den = [1 0 0 0 0 0];
r = ones(1,41);
v = [0 40 0 1.4];
axis(v);
k = 0:40;
y = filter(num,den,r);
plot(k,y, 'o')
grid
title('Birim-Basamak Cevabi')
xlabel('k')
ylabel('y(k)')
```

Şekil 6.5’de verilen Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim rampa cevabını hesaplayan MATLAB programı

```
%Polinomsal denklemler yaklasimi ile birinci duzendeki
%kontrol sistemine dayali olarak tasarlanmis
%sistemin birim rampa cevabi

num = [0 0.1734 0.4710 0.3211 0.0342 0.0009];
den = [1 0 0 0 0 0];
v = [0 20 0 4.0];
axis(v);
k = 0:20; r=[0.2*k];
y = filter(num,den,r);
plot(k,y, 'o',k,y, '-',k,0.2*k, '--')
grid
title('Birim-Rampa Cevabi')
xlabel('k')
ylabel('y(k)')
```

Şekil 6.7’de verilen Mimari-2 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim basamak cevabını hesaplayan MATLAB programı

```
%Polinomsal denklemler yaklasimi ile ikinci duzendeki
%kontrol sistemine dayali olarak tasarlanmis
%sistemin birim basamak cevabi

num = [0 0.3536 0.6112 0.0349];
den = [1 0 0 0];
r = ones(1,41);
v = [0 40 0 1.0];
axis(v);
k = 0:40;
y = filter(num,den,r);
plot(k,y,'o')
grid
title('Birim-Basamak Cevabi')
xlabel('k')
ylabel('y(k)')
```

Şekil 6.7’de verilen Mimari-2 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim rampa cevabını hesaplayan MATLAB programı

```
%Polinomsal denklemler yaklasimi ile ikinci duzendeki
%kontrol sistemine dayali olarak tasarlanmis
%sistemin birim rampa cevabi

num = [0 0.3536 0.6112 0.0349];
den = [1 0 0 0];
v = [0 20 0 4.0];
axis(v);
k = 0:20; r=[0.2*k];
y = filter(num,den,r);
plot(k,y,'o',k,y,'-',k,0.2*k,'--')
grid
title('Birim-Rampa Cevabi')
xlabel('k')
ylabel('y(k)')
```


Şekil 6.14'de verilen Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim basamak cevabını hesaplayan MATLAB programı

```
%Polinomsal denklemler yaklasimi ile Mimari-1
%kontrol sistemine dayali olarak tasarlanmis
%sistemin birim basamak cevabi

num = [0    0.0646    0.3295    0.4179    0.1673    0.0210];
den = [1    0    0    0    0    0];
r = ones(1,41);
v = [0 40 0 4];
axis(v);
k = 0:40;
y = filter(num,den,r);
plot(k,y,'o')
grid
title('Birim-Basamak Cevabi')
xlabel('k')
ylabel('y(k)')
```

Şekil 6.14'de verilen Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim rampa cevabını hesaplayan MATLAB programı

```
%Polinomsal denklemler yaklasimi ile Mimari-1
%kontrol sistemine dayali olarak tasarlanmis
%sistemin birim rampa cevabi

num = [0    0.0646    0.3295    0.4179    0.1673    0.0210];
den = [1    0    0    0    0    0];
k = 0:20;
r = [0.2*k];
v = [0 20 0 4];
axis(v);
y = filter(num,den,r);
plot(k,y,'o',k,y,'-',k,0.2*k,'-')
grid
title('Birim-Rampa Cevabi')
xlabel('k')
ylabel('y(k)')
```

Şekil 6.16'de verilen Mimari-2 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim basamak cevabını hesaplayan MATLAB programı

```
%Polinomsal denklemler yaklasimi ile Mimari-2
%kontrol sistemine dayali olarak tasarlanmis
%sistemin birim basamak cevabi

num = [0    0.1744    0.6494    0.1762];
den = [1    0    0    0];
r = ones(1,41);
v = [0 40 0 4];
axis(v);
k = 0:40;
y = filter(num,den,r);
plot(k,y,'o')
grid
title('Birim-Basamak Cevabi')
xlabel('k')
ylabel('y(k)')
```

Şekil 6.16'de verilen Mimari-2 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim rampa cevabını hesaplayan MATLAB programı

```
%Polinomsal denklemler yaklasimi ile Mimari-2
%kontrol sistemine dayali olarak tasarlanmis
%sistemin birim rampa cevabi

num = [0    0.1744    0.6494    0.1762];
den = [1    0    0    0];
k = 0:20;
r = [0.2*k];
v = [0 20 0 4];
axis(v);
y = filter(num,den,r);
plot(k,y,'o',k,y,'-',k,0.2*k,'-')
grid
title('Birim-Rampa Cevabi')
xlabel('k')
ylabel('y(k)')
```

Şekil 6.22'de verilen Mimari-1 kontrol sistemine dayalı olarak tasarlanmış sistemin birim basamak cevabını hesaplayan MATLAB programı

```
%Polinomsal denklemler yaklasimi ile Mimari-1
%kontrol sistemine dayali olarak tasarlanmis
%sistemin birim basamak cevabi

num = [0 0 3.4188 -0.8547 -2.4103 0.8462];
den = [1 0 0 0 0 0];
r = ones(1,41);
v = [0 40 0 6];
axis(v);
k = 0:40;
y = filter(num,den,r);
plot(k,y,'o')
grid
title('Birim-Basamak Cevabi')
xlabel('k')
ylabel('y(k)')
```

Şekil 6.23'de verilen model eşlemeli kontrol sisteminin birim basamak cevabını hesaplayan MATLAB programı

```
%Model eslemeli kontrol sisteminin birim basamak cevabi

num = [0 0 0.32];
den = [1 -1.2 0.52];
r = ones(1,41);
v = [0 40 0 1.4];
axis(v);
k = 0:40;
y = filter(num,den,r);
plot(k,y,'o')
grid
title('Birim-Basamak Cevabi')
xlabel('k')
ylabel('y(k)')
```

Şekil 6.23'de verilen model eşlemeli kontrol sisteminin birim rampa cevabını hesaplayan MATLAB programı

```
%Model eslemeli kontrol sisteminin birim rampa cevabi

num = [0 0 0.32];
den = [1 -1.2 0.52];
v = [0 20 0 4.0];
axis(v);
k = 0:20;
r=[0.2*k];
y = filter(num,den,r);
plot(k,y,'o',k,y,'-',k,0.2*k,'--')
grid
title('Birim-Rampa Cevabi')
xlabel('k')
ylabel('y(k)')
```

(6.179)'de verilen $G_D(z)$ darbe transfer fonksiyonunu hesaplayan MATLAB programı

```
% En dusuk mertebeden gozlemleyici temelli
% regulatorun transfer fonksiyonunun belirlenmesi

G = [0.9039    0.3723    0.1089; -0.5446    0.2503    0.3723; -1.8616    -
2.7785    0.2503];
H = [0.0192; 0.1089; 0.3723];
C = [1 0 0];

Gaa = 0.9039; Gab = [0.3723    0.1089];
Gba = [-0.5446; -1.8616];
Gbb = [0.2503    0.3723; -2.7785    0.2503];
Ha = 0.0192; Hb = [0.1089; 0.3723];
Ka = 4.0796; Kb = [2.1537    2.9318];
Ke = [2.0722; -2.4875];

Gsapka = Gbb - Ke*Gab;
Hsapka = Gsapka*Ke + Gba - Ke*Gaa;
Fsapka = Hb - Ke*Ha;

Gtilde = Gsapka - Fsapka*Kb;
Htilde = Hsapka - Fsapka*(Ka + Kb*Ke);
Ctilde = -Kb;
Dtilde = -(Ka + Kb*Ke);
[num,den] = ss2tf(Gtilde, Htilde, -Ctilde, -Dtilde)
```

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	09.11.1982	
Doğum yeri	Almatı, Kazakistan Cumhuriyeti	
Lise	1989-2000	36 No'lu B.Adıhan Lisesi
Lisans	2000-2005	Kazak Milli Teknik Üniversitesi Otomasyon ve Kontrol Sistemleri Fak. Teknolojik Süreçler ve Üretimlerin Otomasyonu Mühendisliği Programı
Yüksek Lisans	2006-2009	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik Müh. Anabilim Dalı, Kontrol ve Otomasyon Programı