

Y. T. Ü. İnşaat Fakültesi

İnce Cidarlı Mutemadi Kirişlerde
Burulma Tesirinin İnc.

Ertan Gülek

Yüksek Lisans Tezi

150
74/
1

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ İNŞAAT FAKÜLTESİ

İNCE CİDARLI
MÜTEMADİ KİRİŞLERDE
BURULMA TESİRİNİN
İNCELENMESİ

(LİSANS ÜSTÜ BİTİRME TEZİ)

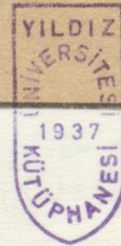
TEZİ YÖNETEN = Doç. A. Zafer ÖZTÜRK

TEZİ YAPAN = İnş.müh.Ertan GÜLEK

İSTANBUL 1985

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
GENEL KİTAPLIĞI

Kot : R 150
Alındığı Yer : Fen Bil. Ens. 74/1
Tarih : 8.12.1986
Fatura :
Fiati : 750 TL
Ayniyat No : 1/32
Kayıt No : 44627
UDC :
Ek :



YILDIZ ÜNİVERSİTESİ İNŞAAT FAKÜLTESİ

✓ Comp.



İNCE CİDARLI
MÜTEMADI KİRİŞLERDE
BURULMA TESİRİNİN
İNCELENMESİ

(LİSANS ÜSTÜ BİTİRME TEZİ)

TEZİ YÖNETEN = Doç. A. Zafer ÖZTÜRK

TEZİ YAPAN = İnş.müh.Ertan GÜLEK

İSTANBUL 1985

OZET

Bu çalışmada, ince cidarlı mütamadı kırıkların burulma tesiri altında geliş matrisleri ile çözümlenmiş ve incelenmiştir.

Birinci kısımda ince cidarlı açık ve kapalı kesitlerin çarpımalı burulma teorisine göre hesap esasları incelenmiştir. Açık ve kapalı kesit arasındaki fark, çubuk ortasında yüzeindeki kayma deformasyonlarına açık kesitlerde ihmal edilmesine karşılık kapalı kesitlerde ihmal edilmemesidir.

Çalışmalarım sırasında karşılaştığım sorunlarıma her zaman yardımcı olan değerli hocam Doç. A. Zafer ÖZTÜRK'e, problemlerin çözümünde bilgilerine başvurduğum Prof. İrdesel GÖĞÜŞ'e ve Prof. Dr. Hilmi DEREN'e burada sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

OZET

Sayfa No:

Bu çalışmada, ince cidarlı mütemadi kirişlerin burulma tesiri altında geçiş matrisleri ile çözüm şekli incelenmiştir.

Birinci kısımda ince cidarlı açık ve kapalı kesitlerin çarpılmalı burulma teorisine göre hesap esasları incelenmiştir. Açık ve kapalı kesit arasındaki fark, çubuk orta yüzeyindeki kayma deformasyonların açık kesitlerde ihmal edilmesine karşılık kapalı kesitlerde ihmal edilmemesidir.

Ayrıca birinci kısımda, geçiş matrisi metodu kısaca anlatılmış, başlangıç, geçiş, yük ve ara mesnet matrisleri bulunmuştur. Geçiş matrisleri metodu ile sayısal bir örnek yapılmıştır.

1.2	Çarpılma Büyüklükleri	12
1.3	Başlangıç Durum Vektörü (BM) Teskili	12
3.4	Geçiş Matrisinin (GM) Teskili	13
3.4.1	Açık Kesitlerde	13
3.4.2	Kapalı Kesitlerde	17
3.5	Yük Matrislerinin (YM) Teskili	19
3.5.1	Münferit Burulma Momenti Yükleme	19
3.5.2	Münferit Bimoment Yükleme	19
3.5.3	Yayıllı Burulma Momenti Yükleme	20
3.6	Ara Mesnetler	21
	Sayısal Örnek	23
	LİTERATÜR	28

İÇİNDEKİLER

Sayfa No:

- Semboller	2
- Giriş	4
I- ÇARPILMALI BURULMA	5
1 Ince Cidarlı Açık Kesitler	5
1.1 Enkesit Değerlerinin Hesabı	5
1.1.1 Açık Enkesitlerde w "Birim Çarpılma"	5
1.1.2 Simetri Ekseni Olmayan Enkesitler	6
2 Ince Cidarlı Kapalı Kesitler	11
2.1 Temel Kabuller	11
2.2 Kapalı Enkesitlerde w "Birim Çarpılma"	11
3 Ince Cidarlı Müttemadi Kirişlerin Geçiş Matrisleri Metodu ile Hesabı	12
3.1 Geçiş Matrisinin Tanımlanması	12
3.2 Çarpılma Büyüklükleri	12
3.3 Başlangıç Durum Vektörü (BM) Teşkili	12
3.4 Geçiş Matrisinin (GM) Teşkili	13
3.4.1 Açık Kesitlerde	13
3.4.2 Kapalı Kesitlerde	17
3.5 Yük Matrislerinin (YM) Teşkili	19
3.5.1 Münferit Burulma Momenti Yükleme	19
3.5.2 Münferit Bimoment Yükleme	19
3.5.3 Yayılı Burulma Momenti Yükleme	20
3.6 Ara Mesnetler	21
Sayısal Örnek	23
LİTERATÜR	28

SEMBOLLER

E	Elastisite modülü
ν	Poisson oranı
$G = E/2(1+\nu)$	Kayma modülü
x, y, z	Dik koordinatları
w	Burulmada çarpılma koordinatı
r_t	Kesit orta yüzeyine çizilen teğetin dönme merkezinden uzaklığı
l	Çubuk uzunluğu
t	Et kalınlığı
F	Kesit alanı
$\left. \begin{aligned} F_{xx} &= \int x^2 dF \\ F_{yy} &= \int y^2 dF \\ F_{xy} &= \int xy dF \end{aligned} \right\}$	Kesit atalet momentleri
$\left. \begin{aligned} F_{xw} &= \int xw dF \\ F_{yw} &= \int yw dF \end{aligned} \right\}$	Sektörel çarpım atalet momentleri
$F_{ww} = \int w^2 dF$	Çarpılma mukavemeti
$F_{hh} = \int r_t^2 dF$	Kayma merkezine göre merkezi atalet momenti
$\left. \begin{aligned} F_x &= \int x dF \\ F_y &= \int y dF \\ F_w &= \int w dF \end{aligned} \right\}$	Statik momentler
B	Bimoment
M_B	Toplam burulma momenti
φ	Çubuk dönmesi

bu tür çubuklar için ince cidarlı çubuklar iki türde sınıflandırılır.

İzafi çubuklar, statik özelliklerine (genişlik, yükseklik) göre sınıflandırılır ve kolayısıyla artık dolu gövdeli çubuklar olarak adlandırılır.

İzafi çubuklar, statik özelliklerine göre sınıflandırılır. Küçük olan prizmatik, büyük olan ise silindirik çubuklar olarak adlandırılır.

φ'

Izafi çubuk dönmesi

m_t

Eşit dağılımlı dış burulma momenti

M_t

Münferit dış burulma momenti

B_t

Münferit Bimoment

F_g

Kapılı kesitlerde gözlerin alanı

Bir çubukta, dış burulma momenti uygulanan bölgede, çubukta oluşan burulma (carpınma) momenti, çubukta oluşan burulma momenti ile çubukta oluşan burulma momenti arasında bir ilişki vardır. Bu ilişki, çubukta oluşan burulma momenti ile çubukta oluşan burulma momenti arasında bir ilişki vardır.

Çubukta oluşan burulma momenti, çubukta oluşan burulma momenti ile çubukta oluşan burulma momenti arasında bir ilişki vardır. Bu ilişki, çubukta oluşan burulma momenti ile çubukta oluşan burulma momenti arasında bir ilişki vardır.

Profilleme işlemi, çubukta oluşan burulma momenti ile çubukta oluşan burulma momenti arasında bir ilişki vardır. Bu ilişki, çubukta oluşan burulma momenti ile çubukta oluşan burulma momenti arasında bir ilişki vardır.

Bu ilişki, çubukta oluşan burulma momenti ile çubukta oluşan burulma momenti arasında bir ilişki vardır. Bu ilişki, çubukta oluşan burulma momenti ile çubukta oluşan burulma momenti arasında bir ilişki vardır.

GİRİŞ

Konstruktif elamanlar içersinde ince cidarlı çubuklar iki türlü tarif edilebilmektedir.

--Cidar kalınlıkları, karakteristik ölçülerine (genişlik,yükseklik) nazara küçük olan ve dolayısıyla artık dolu gövdeli çubuk olarak mütalaa edilemeyen çubuklar.

--Kesit ölçüleri, uzunluğuna nazaran küçük olan prizmatik, silindirik veya hafif eğimli translasyon kabuklar.

20. yüzyılın başlangıcına kadar,burulma hesabına, Barre de SAINT-VENANT tarafından geliştirilen ve 1855 de açıklanan teori esas teşkil etmiştir.Mühendislikte ki uygulama için bu teoriye R.BREDT ve A. FOPPL tarafından önemli ilaveler yapılmıştır.

Uniform burulma (St. VENANT burulması) halinde ' birim dönmesi kiriş boyunca sabittir.Üniform olmayan burulma (çarpılmalı burulma) halinde ise ' birim dönmesi kiriş boyunca değişkendir.İki ucu çarpılmaya karşı serbest bir kirişin uçlarına ters yönde M burulma momentleri uygulanırsa, bu kirişte üniform burulma hali bahis konusudur.

Deformasyondan önce düzlem olan enkesitler,kirişin burulma deformasyonu sonucu genellikle düzlem kalmaz.Enkesit noktaları, burulma sonucu enkesit düzlemine dik olmak üzere, farklı deplasmanlar yapar.Buna" enkesit çarpılması" denir. Enkesit çarpılmaları çubuk boyunca,üniform burulma halinde aynı olup,üniform olmayan burulma halinde farklıdır.

Profillerle teşkil edilen kirişler ile sabit enkesitli, kaynaklı ve perçinli dolu gövdeli kirişler, ince cidarlı çubuklar olarak ele alınabilir.

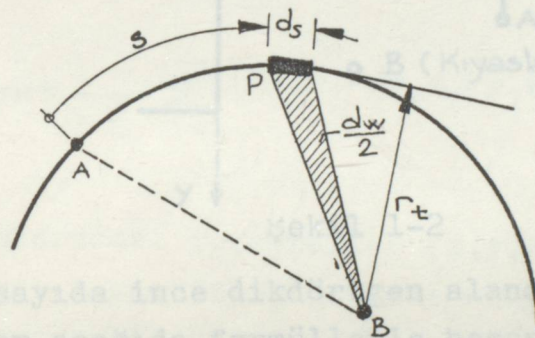
Geçiş Matrisleri Metodu,1956 yılında FALK tarafından geliştirilmiştir.Özellikle sürekli kirişlerin ve döğüm noktalarında ikiden fazla çubuk bulunmayan tüm sistemlerin çözümünde kolaylıkla uygulanabilir.Uygulanabilmesinin yanı sıra dinamik etkiler, burulma,kirişlerin elastik zemine oturması ve ikinci mertebe etkileri kolaylıkla gözönüne alınabilir.

1 - İNCE CİDARLI AÇIK KESİTLER

İnce cidarlı açık kesitli bir çubuğun deformasyonları üzerinde şu kabuller yapılmaktadır.

- Deformasyonlar sırasında kesit formu değişmiyor.
- Çubuk orta yüzeyindeki kayma deformasyonları ihmal ediliyor.
- Deformasyondan önce çubuk orta yüzeyine dik olan çizgisel bir elaman deformasyondan sonra da, doğrusal ve deforme olmuş orta yüzeye dik kalıyor.

1.1-ENKESİT DEĞERLERİNİN HESABI

1.1.1.- Açık Enkesitlerde w "Birim çarpılma"

Şekil 1-1

Enkesit ortalama çizgisinin üzerinde bir A başlangıç noktası ile dışında bir B kıyaslama noktası seçilir. Şekil (1-1) ortalama çizgi üzerinde bir P noktasının s eğrisel ordinatı, B ye göre saat hareketi yönünde (+) olarak alınır. P noktasında alınan ds elamanına karşın birim çarpılma diferansiyeli

$$dw = r_t ds \quad (1.1)$$

olarak tanımlanır. Burada r_t , B noktasından P dekiteğete indirilen dikmenin boyudur. Buna göre tabanı ds , tepe noktası B olan üçgenin alanı,

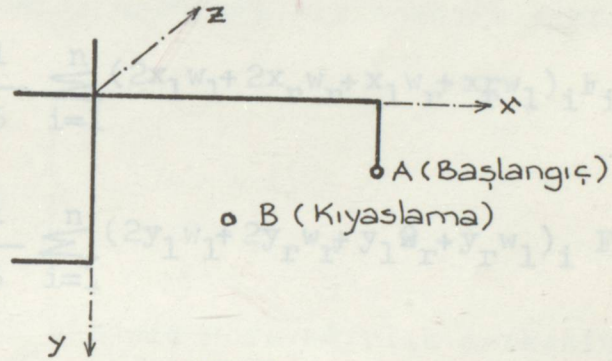
$$\frac{r_t ds}{2} = \frac{dw}{2} \quad (1.2.8)$$

dir. r noktasındaki birim çarpılma (veya P noktasındaki çarpılma ordinatı.)

$$w = \int_0^s r_t ds \quad (\text{cm}^2) \quad (1.3)$$

olarak tanımlanır. AP eğrisi ile BA ve BP ışınları arasında kalan alan $w/2$ ye eşit olur.

1.1.2- Simetri eksenini olmayan Enkesitler.



Şekil 1-2

n sayıda ince dikdörtgen alandan oluşan bir enkesitte bu değerler aşağıda formüllerle hesaplanır. Bu formüllerde l ve r endisleri ince dikdörtgen alanların uçlarını göstermektedir.

$$F = \sum_{i=1}^n F_i \quad (1.4)$$

$$F_y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_l + y_r)_i F_i \quad (1.5)$$

$$F_x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_l + x_r)_i F_i \quad (1.6)$$

$$F_w = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (w_l + w_r)_i F_i \quad (1.7)$$

$$F_{yy} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n (y_1^2 + y_r^2 + y_1 y_r)_i F_i \quad (1.8)$$

$$F_{xx} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n (x_1^2 + x_r^2 + x_1 x_r)_i F_i \quad (1.9)$$

$$F_{ww} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n (w_1^2 + w_r^2 + w_1 w_r)_i F_i \quad (1.10)$$

$$F_{xy} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (2x_1 y_1 + 2x_r y_r + x_1 y_r + x_r y_1)_i F_i \quad (1.11)$$

$$F_{xw} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (2x_1 w_1 + 2x_r w_r + x_1 w_r + x_r w_1)_i F_i \quad (1.12)$$

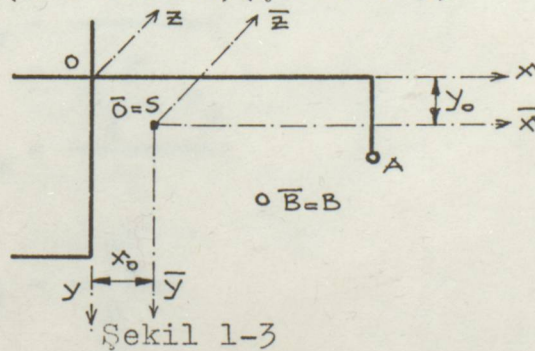
$$F_{yw} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (2y_1 w_1 + 2y_r w_r + y_1 w_r + y_r w_1)_i F_i \quad (1.13)$$

olur. Burada netleri

Yukarıdaki integraller (x,y,w) değerlerinin çarpımlarının enkesit alanı üzerinde entegralleridir. Enkesit koordinatlarının ortogonalleştirilmesi demek farklı değerlerin çarpımlarının alan üzerindeki entegrallerin sıfıra eşit olacağı bir koordinat sisteminin bulunması demektir. Bu ortogonalleştirme işlemi iki kademe yapılır.

İlk önce, şekil 1-2 de görüldüğü gibi x,y eksenleri, B kıyaslama ve A başlangıç noktaları keyfi olarak seçilip yukarıdaki formüllerden enkesit değerleri hesaplanır. (İlk sistem)

1. Kademe (ara sistem) (Şekil 1-3)



Şekil 1-3

$$\begin{aligned}\bar{O} &= s \text{ (Ağırlık merkezi)} \\ \bar{B} &= B \text{ (İlk kıyaslama noktası)} \\ \bar{A} &= (F_w \text{ O olmak üzere})\end{aligned}$$

ara sistem seçilir.

$$\left. \begin{aligned}x_{\bar{O}} &= \frac{F_x}{F} \\ y_{\bar{O}} &= \frac{F_y}{F} \\ w_{\bar{O}} &= \frac{F_w}{F}\end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

olmak üzere ara sistemde herhangi bir enkesit noktasının koordinatları

$$\left. \begin{aligned}\bar{x} &= x - x_0 \\ \bar{y} &= y - y_0 \\ \bar{w} &= w - w_0\end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

olur. Burada x_0, y_0 ilk sisteme göre ağırlık merkezinin koordinatları w_0 ilk sistemde A'nın çarpılma ordinatıdır. Ara sistemde:

$$F_{\bar{x}} = F_{\bar{y}} = F_{\bar{w}} = 0 \quad (1.16)$$

olur. İlk sistem enkesit değerlerine göre ara sistemdeki enkesit değerleri aşağıdaki formüllerle hesaplanır.

$$F_{\bar{x}\bar{y}} = F_{xy} - \frac{F_x \cdot F_y}{F} \quad (1.17)$$

$$F_{\bar{x}\bar{w}} = F_{xw} - \frac{F_x \cdot F_w}{F} \quad (1.18)$$

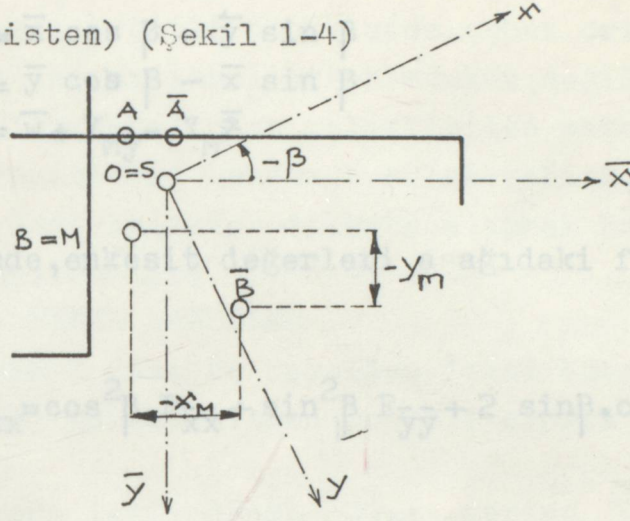
$$F_{\bar{y}\bar{w}} = F_{yw} - \frac{F_y \cdot F_w}{F} \quad (1.19)$$

$$F_{\bar{y}\bar{y}} = F_{yy} - \frac{F_y^2}{F} \quad (1.20)$$

$$F_{\bar{x}\bar{x}} = F_{xx} - \frac{F_x^2}{F} \quad (1.21)$$

$$F_{\bar{w}\bar{w}} = F_{ww} - \frac{F_w^2}{F} \quad (1.22)$$

2. Kademe (asal sistem) (Şekil 1-4)



Şekil 1-4

O=S (Ağırlık merkezi)

x,y (Asal eksenler)

B=M (Kayma merkezi)

A (F_w = 0 olmak üzere)

asal sistem seçilir. Bunun için, F_{x̄ȳ} = 0 şartından

$$\tan 2\beta = \frac{2F_{\bar{x}\bar{y}}}{F_{\bar{x}\bar{x}} - F_{\bar{y}\bar{y}}} + \frac{1}{2} \sqrt{(F_{\bar{y}\bar{y}} - F_{\bar{x}\bar{x}})^2 + 4F_{\bar{x}\bar{y}}^2} \quad (1.23)$$

F_{x̄w} = 0 , F_{ȳw} = 0 şartlarından

$$X_M = \frac{F_{\bar{y}\bar{w}} \cdot F_{\bar{x}\bar{x}} - F_{\bar{x}\bar{w}} \cdot F_{\bar{x}\bar{y}}}{F_{\bar{x}\bar{x}} \cdot F_{\bar{y}\bar{y}} - (F_{\bar{x}\bar{y}})^2} \quad (1.24)$$

$$Y_M = \frac{F_{\bar{y}\bar{w}} \cdot F_{\bar{x}\bar{y}} - F_{\bar{x}\bar{w}} \cdot F_{\bar{y}\bar{y}}}{F_{\bar{x}\bar{x}} \cdot F_{\bar{y}\bar{y}} - (F_{\bar{x}\bar{y}})^2} \quad (1.25)$$

olmak üzere, asal sistemde bir enkesit noktasının koordinatları.

$$x = \bar{x} \cos \beta + \bar{y} \sin \beta \quad (1.26)$$

$$y = \bar{y} \cos \beta - \bar{x} \sin \beta \quad (1.27)$$

$$w = \bar{w} + Y_M \bar{y} - X_M \bar{x} \quad (1.28)$$

Asal sistemde, enkesit değerleri aşağıdaki formüllerle hesaplanır.

$$F_{xx} = \cos^2 \beta \cdot F_{\bar{x}\bar{x}} + \sin^2 \beta \cdot F_{\bar{y}\bar{y}} + 2 \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot F_{\bar{x}\bar{y}} \quad (1.29)$$

veya

$$F_{xx} = \frac{1}{2} (F_{\bar{x}\bar{x}} + F_{\bar{y}\bar{y}}) - \frac{1}{2} \sqrt{(F_{\bar{y}\bar{y}} - F_{\bar{x}\bar{x}})^2 + 4F_{\bar{x}\bar{y}}^2} \quad (1.29)$$

$$F_{yy} = \cos^2 \beta \cdot F_{\bar{y}\bar{y}} + \sin^2 \beta \cdot F_{\bar{x}\bar{x}} - 2 \sin \beta \cos \beta \cdot F_{\bar{x}\bar{y}} \quad (1.30)$$

veya

$$F_{yy} = \frac{1}{2} (F_{\bar{x}\bar{x}} + F_{\bar{y}\bar{y}}) + \frac{1}{2} \sqrt{(F_{\bar{y}\bar{y}} - F_{\bar{x}\bar{x}})^2 + 4F_{\bar{x}\bar{y}}^2} \quad (1.30)$$

$$F_{ww} = F_{\bar{w}\bar{w}} + Y_M F_{\bar{x}\bar{w}} - X_M \cdot F_{\bar{y}\bar{w}} \quad (1.31)$$

F_{xx} ve F_{yy} kesitin en küçük ve en büyük atalet momentleri (asal atalet momentleri)dir. Üçüncü koordinat olan w , asal birim çarpılmadır.

2 - INCE CIDARLI KAPALI KESİTLERİN

GEÇİŞ MATRİSLERİ METODU İLE HESABI

Kapalı kesitli çubuklarda, çubuk orta yüzeyindeki kayma deformasyonlarını ihmal etmek mümkün değildir. Heilig tarafından geliştirilen metoda göre, ince cidarlı kapalı kesitlerin hesabı, burulma sabiti, J_b ve birim çarpılma w deki değişiklikler dikkate alınmak kaydıyla açık kesitler gibi yapılabilir.

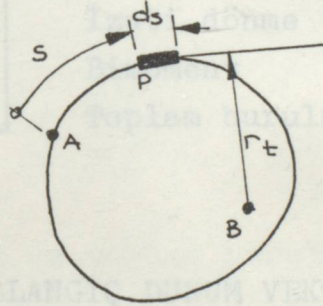
2.1 TEMEL KABULLER

Kısım 1 deki üç kabulden ikisi burada aynen geçerlidir. Yalnız b) kabulü, kısmen geçerli olarak kabul edilmiştir. Böylece tüm ara nokta ve uçlardaki çarpılma büyüklükleri bulunmuş.

Burada izafi dönme $\varphi'(z)$ yerine $\mathcal{V} = \mathcal{V}(z)$ gelmektedir. \mathcal{V} , z 'nin herhangi bir fonksiyonu olup sekonder kayma kuvvetlerinden gelen tesirleri de ihtiva etmektedir.

Burada ara-nılan çarpılma büyüklükleri, bir \mathcal{V}_t vektörü ile gösterilebilir.

2.2 KAPALI ENKESİTLERDE W "BİRİM ÇARPILMA"



Şekil 2-1

Enkesit ortalama çizgisi üzerinde bir A başlangıç noktası ile bir B kıyaslama noktası seçilir. Buna göre P noktasındaki birim çarpılma.

$$w = \int_0^s \left(r_t - \frac{\Psi}{t} \right) ds \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır. Burada Ψ ye "burulma sayısı" denir ve

$$\Psi = \frac{2F_g}{\oint \frac{ds}{t}}$$

formülü ile hesaplanır. F_g ortalama çizginin kapattığı alandır.

3 - INCE CIDARLI MÜTEMADI KIRIŞLERIN GEÇİŞ MATRİSLERİ METODU İLE HESABI

3.1 GEÇİŞ MATRİSİNİN TANIMLANMASI

Geçiş matrisinde bilinmeyen olarak üç kuvvetler ve ya yalnız üç deplasmanlar değilde üç kuvvetleri ile üç deplasmanlarından bir kısmının aynı anda bilinmeyen olarak alınır. Gerilme- deformasyon bağıntıları, denge denklemleri ve geometrik uygunluk şartları yardımıyla yapılan ara işlemlerden sonra son uçtaki bilinenler (sınır şartlarından) yardımıyla da başlangıç ucu bilinmeyenlerine bağlı denklem takımı kurulur. Burada bilinmeyenler tayin edilerek ara işlemlerde de yerlerine konulur, böylece tüm ara nokta ve uçlardaki çarpılma büyüklükleri bulunmuş olur.

3.2 ÇARPILMA BÜYÜKLÜKLERİ

Taşıyıcı sistemin herhangi bir i noktasında aranan çarpılma büyüklükleri, bir V_i vektörü ile gösterilebilir.

$$V_i = \begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ B \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{array}{l} \text{Çubuk dönmesi} \\ \text{İzati dönme (Çarpılma oranı)} \\ \text{Bimoment} \\ \text{Toplam burulma momenti} \end{array} \quad (3.2)$$

3.3.1 BAŞLANGIÇ DURUM VEKTÖRÜ (BM) TEŞKİLİ

$$BM = V'_a \cdot Z_a \quad (3.1)$$

V'_a : Bilinmeyenlere göre düzenlenen birim matris

Z_a : Bilinmeyenleri içeren, bilinmeyen kadar elemanlı matris

1 : Tesir var

0 : Tesir yok

$$V'_a = \begin{array}{cccc|c} \varphi & \varphi' & B & M_B & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & \varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \varphi' \\ 0 & 0 & 1 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & 1 & M_B \end{array} \quad (3.7)$$

Z_a bilinmeyen vektörü sınır şartlarından saptandığına göre, BM'nin V'_a den seçilebilmesi için çarpılma büyüklüklerinin sıralarının bilinmesi ve bu sıralamaya kesinlikle uyulması gereklidir. (3.8)

Sınır şartlarından sadece var olan etkiler, sütunlardaki yerlerinden alınarak satırlar aynı şekilde kalmak koşuluyla BM matrisi düzenlenir.

ve böylece 3.4 GEÇİŞ MATRİSİNİN (GM) TEŞKİLİ formunda

3.4.1 AÇIK KESİNLERDE:

Çubuk dönmesini temsil eden φ ile izafi dönmeyi gösteren φ' arasında,

$$\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (3.2)$$

bağıntısı mevcuttur.

Bimoment ve toplam burulma momenti ile φ arasında

$$B = -EF_{ww} \varphi'' \quad (3.3)$$

şeklini alır.

$$M_B = -EF_{ww} \varphi''' + GJ_b \varphi' \quad (3.4)$$

$EF_{ww} = EF_{ww}$ ve $B = -EF_{ww} \varphi''$ halinde bu diferansiyel denklemin münasebetlerin mevcudiyeti bilinmektedir. bağımsız GM geçiş

$$M_B = B' + GJ_b \varphi' \quad (3.5)$$

veya

$$B' = -GJ_b \varphi' + M_B \quad (3.6)$$

şekilde yazılabilir. Ayrıca mevcut yüklemekten dolayı, burulma momenti dengesinden

$$m_t + \frac{dM_B}{dz} = 0 \quad (3.7)$$

olur $V'(z)$ vektörünü yazarsak.

$$\left. \begin{aligned} \varphi' &= \varphi' \\ \varphi'' &= -\frac{1}{EF_{ww}} B \\ B' &= -GJ_b \varphi' + M_B \\ M_B' &= -m_t \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

ve böylece diferansiyel denklem sistemi, matris formunda

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ B \\ M_B \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{EF_{ww}} & 0 \\ 0 & -GJ_b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ B \\ M_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -M_t \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

diferansiyel denklemleri elde edilir.

$$V' = A \cdot V + P \quad (3.9)$$

şeklini alır.

$EF_{ww} = Sb$ ve $m_t = Sb$ halinde bu diferansiyel denklemin çözümüyle yüklemenden ve sınır şartlarından bağımsız GM geçiş matrisi elde edilir.

DIFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİNİN TEŞKİLİ

$$\varphi' = \varphi' \quad (3.10)$$

$$\varphi'' = - \frac{1}{EF_{ww}} B \quad (3.11)$$

$$\varphi''' = - \frac{1}{EF_{ww}} B' = - \frac{1}{EF_{ww}} \left[-GJ_b \varphi' + M_B \right] \quad (3.12)$$

$$EF_{ww} \varphi''' = GJ_b \varphi' - M_B \quad (3.13)$$

$$EF_{ww} \varphi^{IV} - GJ_b \varphi'' = M_B' \quad (3.14)$$

$$EF_{ww} \varphi^{IV} - GJ_b \varphi'' = m_t \quad (3.15)$$

$$k^2 = \frac{GJ_b}{EF_{ww}} \quad (3.16)$$

$$\varphi^{IV} - k^2 \varphi'' = \frac{m_t}{EF_{ww}} \quad (3.17)$$

diferansiyel deklemini elde edilir.

DIFERANSİYEL DEKLEMİN ÇÖZÜMÜ

Diferansiyel denklemin çözümü, homojen φ_h ve özel φ_p çözüm kısımlarından müteşekkildir.

Homojen çözüm:

$$\varphi^{IV} - k^2 \varphi'' = 0$$

$$r^4 - k^2 r^2 = 0$$

$$r^2(r^2 - k^2) = 0$$

$$r_{1,2} = 0, \quad r_3 = k, \quad r_4 = -k$$

kökleri bulunur.

$$\varphi_h = B_4 + B_3 z + B_2 e^{-kz} + B_1 e^{kz} \quad (3.20)$$

veya hiperbolik fonksiyonlarla

$$\varphi_h = A_1 + A_2 z + A_3 \operatorname{ch} kz + A_4 \operatorname{sh} kz \quad (3.19)$$

elde edilir. $A_1 - A_4$ sınır şartlarından elde edilecek katsayılar-
dır.

Bimoment, toplam burulma momenti, çubuk dönmesi ve iza-
fi dönme (çarpılma oranı) değerleri toplu halde yazılırsa,

$$\begin{aligned} \varphi &= A_1 + A_2 z + A_3 \operatorname{ch} kz + A_4 \operatorname{sh} kz \\ \varphi' &= A_2 + A_3 k \operatorname{sh} kz + A_4 k \operatorname{ch} kz \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$B = -A_3 GJ_b \operatorname{ch} kz - A_4 GJ_b \operatorname{sh} kz$$

$$M_B = A_2 GJ_b$$

bulunur. Buna göre geçiş matrisini $GM = \varnothing(z) \cdot \varnothing^{-1}(0)$ formülün-
den hesaplayabiliriz. Bunun için,

$$S(x) = \varnothing(z) \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

tarzında yazarsak $\varnothing(z)$,

$$\varnothing(z) = \begin{bmatrix} 1 & z & \operatorname{ch} kz & \operatorname{sh} kz \\ 0 & 1 & k \operatorname{sh} kz & k \operatorname{ch} kz \\ 0 & 0 & -GJ_b \operatorname{ch} kz & -GJ_b \operatorname{sh} kz \\ 0 & GJ_b & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

den ibarettir. Buradan $\varnothing(0)$ hesap edilirse

$$\varnothing(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & -GJ_b & 0 \\ 0 & GJ_b & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

bulunur.

Bunun tersi,

$$\phi_{(0)}^{-1} = \frac{Adj \phi(0)}{Det \phi(0)} \quad (3.24)$$

$$\phi_{(0)}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/GJ_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/GJ_b \\ 0 & 0 & -1/GJ_b & 0 \\ 0 & 1/k & 0 & -1/GJ_b k \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

ifadesi elde edilir. $GM = \phi(z) \cdot \phi_{(0)}^{-1}$ formülüne dayanarak geçiş matrisi GM bulunabilir. m_t 'nin sabit veya z 'ye göre lineer olması halinde diferansiyel denklem

$$GM = \begin{bmatrix} 1 & shkz/k & (1-chkz)/GJ_b & (z-shkz/k)/GJ_b \\ 0 & chkz & -kshkz/GJ_b & (1-chkz)/GJ_b \\ 0 & -GJ_b shkz/k & chkz & shkz/k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

elde edilir.

3.4.2 KAPALI KESİTLERDE

Açık kesitlerle paralellik kurmak ve homogenlik sağlamak üzere kesit tesirlerinin, φ nin fonksiyonları olarak ifade edilmesi daha elverişlidir. Bunun için önce V nin φ ye bağlı olarak tarif edilmelidir.

$$V = \varphi' + \frac{\rho}{k_1^2} \varphi'' + \frac{\rho}{GF_{hh}} \cdot \frac{m_t'}{k_1^2} \quad (3.27)$$

$$\rho = \frac{F_{hh}}{F_{hh} - J_b} \quad (3.28)$$

$$k_1^2 = \frac{GF_{hh}}{EF_{ww}} \quad (3.29)$$

V, φ ye bağılı olarak ifade edildiğine göre, bimo-
ment ve toplam burulma momenti denklemlerini φ ye bağılı olarak
yazalım.

$$B = - E F_{ww} \cdot \varphi'' - m_t / k_1^2 \quad (3.30)$$

$$M_B = - E F_{ww} \varphi'' + G J_b \varphi' - m_t' / k_1^2 \quad (3.31)$$

Kısım 3.4.1 deki benzer işlemler yapıldığında,

$$\rho E F_{ww} \varphi^{IV} - G J_b \varphi'' = m_t - m_t' / k_1^2 \quad (3.32)$$

ifadesi elde edilir.

Dış burulma momenti m_t 'nin sabit veya z 'ye göre
lineer olması halinde diferansiyel denklem

$$\rho E F_{ww} \varphi^{IV} - G J_b \varphi'' = m_t \quad (3.33)$$

halini alır.

Görülüyor ki bu denklem $\rho=1$ olması halinde açık
kesitlerde bulunan diferansiyel denkleme eşittir.

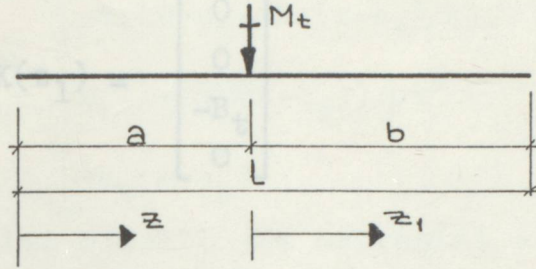
Bu diferansiyel denklemi çözersek,

$$GM = \begin{bmatrix} 1 & shkz/k & (1-chkz)/GJ_b & (z-shkz/k)/GJ_b \\ 0 & chkz & -kshkz/GJ_b & (1-chkz)/GJ_b \\ 0 & -GJ_b shkz/k & chkz & shkz/k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Geçiş matrisini elde ederiz. Görüldüğü gibi (3.34) de $\rho = 1$
konulması halinde (3.26) elde edilir.

3.5 YÜK MATRİSLERİNİN (YM) TEŞKİLİ

3.5.1 MÜNFERİT BURULMA MOMENTİ YÜKLEMESİ



$$K(z_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -M_t \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

olur.

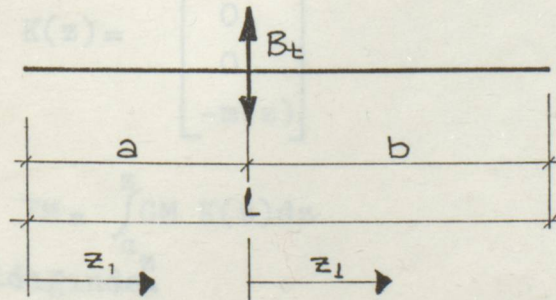
$$YM = GM \cdot K(z_1) \quad (3.36)$$

Bu işlem yapıldığında

$$YM = \begin{bmatrix} -M_t(z_1 - \text{sh}kz_1/\rho k)/GJ_b \\ -M_t(1 - \text{ch}kz_1)/GJ_b \\ -M_t \text{sh}kz_1/k\rho \\ -M_t \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

münferit burulma momenti yük matrisi elde edilir.

3.5.2 MÜNFERİT BIMOMENT YÜKLEMESİ



Bu münferit bimoment yüklemesi bir süreksizlik meydana getirir. Bu süreksizlik matrisi

$$K(z_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -B_t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

olur.

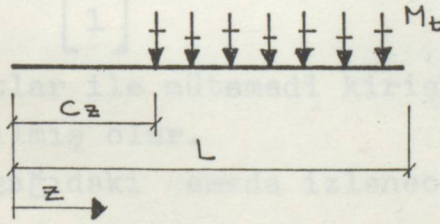
$$YM = GM K(z_1) \quad (3.39)$$

Bu işlemi yaptığımızda

$$YM = \begin{bmatrix} -B_t(1 - \text{chk}z_1)/GJ_b \\ B_t \int \text{kshk} z_1 / GJ_b \\ -B_t \cdot \text{chk}z_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

münferit bimoment yük matrisini elde ederiz.

3.5.3 YAYILI BURULMA MOMENTİ YÜKLEMESİ



Yayıllı burulma momentinden dolayı meydana gelen süreksizlik matrisi

$$K(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -m(z) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

olur.

$$YM = \int_{c_z}^z GM K(z) dz \quad (3.42)$$

işlemi yapıldığında.

$$YM = \begin{bmatrix} -m_t((z-c_z)^2/2 + (1-chk(z-c_z))/\rho k^2)/GJ_b \\ -m_t(z-c_z-shk(z-c_z))/k/GJ_b \\ m_t(1-chk(z-c_z))/\rho k^2 \\ -m_t(z-c_z) \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

yayıllı burulma momenti yük maträsini elde ederiz.

3.6.ARA MESNETLER

İki veya daha fazla çubuktan olusan sürekli kirişlerde ara mesnetlerin olması, karşımıza başlangıç bilinmeyenlerinden başka ek bilinmeyenler çıkar, çözümleri yapabilmemiz için bilinmeyen adedi kadar bilinene ihtiyaç vardır.

Ara mesnetlerde bilinen şart dönmenin ($\varphi=0$) sıfır olmasıdır. Bilinmeyen ise M_B toplam burulma momentidir. İşleme girecek bilinmeyen vektör,

$$MM = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olur. Bu şartlar ile mütemadi kirişlerin çözümünde bir süreklilik kazanılmış olur.

Aşağıdaki semada izlenecek yol ana hatları ile belirtilmiştir.

ÖRNEK:

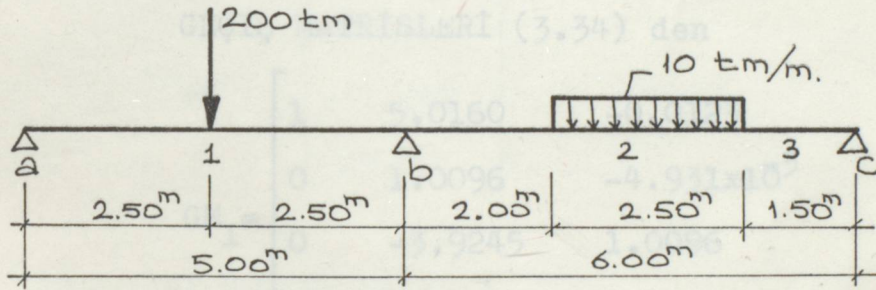
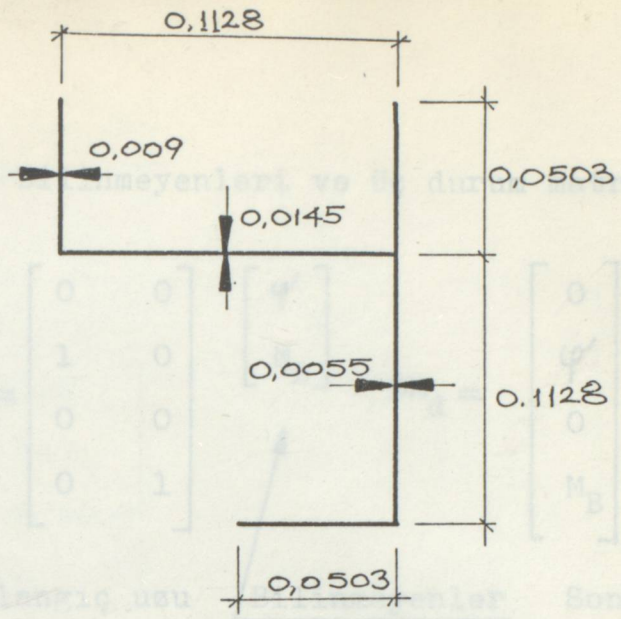
İŞLEM ŞEMASI

	BM	$\begin{bmatrix} \varphi' \\ M_B \end{bmatrix}$	MM_1	YM_1	YM_2	
			1. DENKLEM SATIRI			0
GM_1	$GM_1 * BM = SM_1$	MM_1	YM_1			φ'_b
						B_b
						M_{Bb}
GM_2	$GM_2 * SM_1 = SM_2$	$GM_2 * MM_1 = MM'_1$	$GM_2 * YM_1 = YM'_1$	YM_2		φ'_c
						B_c
						M_{Bc}
			2. DENKLEM SATIRI			0
GM_3			3. DENKLEM SATIRI			φ'_d
	$GM_3 * SM_2 = SM_3$	$GM_3 * MM'_1 = MM''_1$	$GM_3 * YM'_1 = YM''_1$	$GM_3 * YM_2 = YM'_2$		0
						M_{Bd}
	Katsayılar			sabitler		0

Denklemler takımını yukarıdaki gibi seçilip, bilinmeyenler saptandıktan sonra tekrar işlem şemasındaki yerlerine konurlarsa, tüm ara noktadaki değerler elde edilir.

İstenenler: a, b, c, d durum büyüklükleri

ÖRNEK:



Kesit, bir hal binasında kapı üst kirişine ait olup iki [dan müteşekkildir.

$$F = 0.3081 \times 10^{-2} \quad \text{m}^2$$

$$F_{xx} = 0.4054 \times 10^{-5} \quad \text{m}^4$$

$$F_{yy} = 0.9821 \times 10^{-5} \quad \text{m}^4$$

$$F_{ww} = 0.4844 \times 10^{-4} \quad \text{m}^6$$

$$J_b = 0.9780 \times 10^{-7} \quad \text{m}^4$$

$$k = 0.027734$$

$$M_t = 200 \quad \text{tm}$$

$$m_t = 10 \quad \text{tm/m}$$

İstenenler: a, b, c, d durum büyüklüğü

Başlangıç bilinmeyenleri ve üç durum matrisleri

$$\text{BM}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi' \\ M_B \end{bmatrix} \quad \text{BM}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi' \\ 0 \\ M_B \end{bmatrix}$$

Başlangıç uçu
Bilinmeyenler
Sonuçta

AÇIKLIKLARA AIT MATRİSLER
GEÇİŞ MATRİSLERİ (3.34) den

$$\text{GM}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 5.0160 & -0.0123 & -0.0205 \\ 0 & 1.0096 & -4.931 \times 10^3 & -0.0123 \\ 0 & -3.9245 & 1.0096 & 5.0160 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{GM}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4.5117 & -9.967 \times 10^3 & -0.0149 \\ 0 & 1.0078 & -4.435 \times 10^3 & -9.967 \times 10^3 \\ 0 & -3.5299 & 1.0078 & 4.5517 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{GM}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1.5004 & -1.106 \times 10^3 & -5.53 \times 10^4 \\ 0 & 1.0009 & -1.475 \times 10^3 & -1.106 \times 10^3 \\ 0 & -1.1739 & 1.0009 & 1.5004 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

YÜK VEKTORLERİ

1. AÇIKLIK :

$$YM_1 =$$

$$\begin{bmatrix} 0.5122 \\ 0.6147 \\ -500.4007 \\ -200 \end{bmatrix}$$

2. AÇIKLIK :

$$YM_2 =$$

$$\begin{bmatrix} 0.0160 \\ 0.0256 \\ -31.262 \\ -25.00 \end{bmatrix}$$

DENKLEMLER: ARA MESNET MATRİSİ

$$MM =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ÇÖZÜMLERİNDEN:

$$M_1 = 144.931 \quad \text{tm}$$

$$M_{Ba} = 80.8542 \quad \text{tm}$$

$$\varphi_a = 0.2283 \quad \text{al}$$

		φ'_a		M_{Ba}					
		0	0	0	0				
		1	0	0	0				
		0	0	0	0				
		0	1	0	1	M_1	YM_1		
1	5.0160	-0.0125	-0.0205	5.0160	-0.0205	0	0,5122		
0	1.0096	-4.9311 ⁻³	-0.0123	1,0096	-0,0123	0	0,6147		
0	-3.9245	1.0096	5.0160	-3.9245	5,0160	0	-500,40		
0	0	0	1	0	1	1	-200,00	YM_2	
1	4.5117	-9,97 ⁻³	-0.0149	9,6101	-0,1409	-0,0149	11,253	0,0160	
0	1.0078	-4,44 ⁻³	-9,98 ⁻³	1,0349	-0,0446	-9,97 ⁻³	4,832	0,0256	
0	-3.5299	1.0078	4,5117	-7,5189	9,6102	4,5517	-1408,81	-31,262	
0	0	0	1	0	1	1	-200,00	-25,00	
1	1.5004	-1,11 ⁻³	-5,53 ⁻³	11,1712	-0,2190	-0,0354	20,1805	0,1028	
0	1.0009	-1,48 ⁻³	-1,11 ⁻³	1,0469	-0,0560	-0,0178	7,1473	0,0994	
0	-1.1739	1.0009	1.5004	8,7405	11,1712	6,0679	-17,15,83	-68,830	
0	0	0	1	0	1	1	-200	-25,00	

0
φ'_B
B_b
M_{Bb}
φ'_c
φ'_c
B_c
M_{Bc}
0
φ'_d
0
M_{Bd}

DENKLEMLER:

$$5.0160\varphi'_a - 0.0205M_{Ba} + 0.5122 = 0$$

$$11.1712\varphi'_a - 0.2190 M_{Ba} - 0.0354 M_1 + 20.1805 + 0.1028 = 0$$

$$8.7405\varphi'_a + 11.1712 M_{Ba} + 6.0679 M_1 + 1715.83 - 68.830 = 0$$

ÇÖZÜMLERİNDEN:

$$M_1 = 144.931 \quad \text{tm}$$

$$M_{Ba} = 80.8542 \quad \text{tm}$$

$$\varphi'_a = 0.2283 \quad \text{m}^{-1}$$

ARA DEGERLERİN HESABI

a noktası:

$$\begin{aligned}\varphi_a &= 0 \\ \varphi'_a &= 0.2283 \text{ m}^{-1} \\ B_a &= 0 \\ M_{Ba} &= 80.8542 \text{ tm}\end{aligned}$$

b noktası:

$$\begin{aligned}\varphi_b &= 5.016\varphi'_a - 0.0205 M_{Ba} + 0.5122 = -1.583 \times 10^4 \\ \varphi'_b &= 1.0096\varphi'_a - 0.0123 M_{Ba} + 0.6147 = -0.1493 \\ B_b &= -3.9245\varphi'_a + 5.016 M_{Ba} - 500.4 = -95.7313 \\ M_{Bb} &= M_{Ba} + M_1 - 200 = 25.7852\end{aligned}$$

c noktası:

$$\begin{aligned}\varphi_c &= 9.6101\varphi'_a - 0.1409 M_{Ba} - 0.0149 M_1 + 11.253 + 0.0160 \\ &= -0.0888 \\ \varphi'_c &= 1.0349\varphi'_a - 0.0446 M_{Ba} - 9.967 \times 10^3 M_1 + 4.832 + 0.0256 \\ &= 0.0432 \\ B_c &= -7.5189\varphi'_a + 9.6102 M_{Ba} - 4.5517 M_1 - 1408.81 - 31.262 \\ &= -1324.45 \\ M_{Bc} &= M_{Ba} + M_1 - 200 - 25 = 0.7852\end{aligned}$$

d noktası:

$$\begin{aligned}\varphi_d &= 0 \\ \varphi'_d &= 1.0469\varphi'_a - 0.0560 M_{Ba} - 0.0178 M_1 + 7.1473 + 0.0994 \\ &= 0.3781 \\ B_d &= 0 \\ M_{Bd} &= M_{Ba} + M_1 - 200 - 25 = 0.7852\end{aligned}$$

YARARLANILAN KAYNAKLAR

- 1- Doç. A.Zafer OZTURK Ince Cidarlı Çubukların Çarpılmalı Burulmaya Göre Hesabı ve Stabilite Problemleri (Doçentlik tezi-1979)
- 2- Y.Müh. Celal ERDEM Sürekli Kirişlerin Geçiş Matrisleri ile Çözümü ve Ara Şartların Gözetilmesi (Lisansüstü Bitirme Tezi-1981)
- 3- Prof.İrdesel GOGUŞ Yapı Sist. Hes. Matris Metotları Lisansüstü Ders Notları (1980)
- 4- Prof. Dr. Hilmi DEREN Çelik Kirişleri Burulma Yüklerine Göre Hesabı
- 5- Prof. Mustafa INAN Elastomekanikte Başlangıç Metodu ve Taşıma Matrisi

