YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Beton. Yapı Ele. Göç. Ola. Bel. İlg. Yön.

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ebrahim K. Vahidi

1988

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BETONARME YAPI ELEMANLARINDA GÖÇME OLASILIĞININ BELİRLENMESİYLE İLGİLİ YÖNTEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNŞ.MÜH.EBRAHİM KHALİLZADEH VAHİDİ

İSTANBUL - 1988

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BETONARME YAPI ELEMANLARINDA GÖÇME OLASILIĞININ BELİRLENMESİYLE İLGİLİ YÖNTEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNŞ.MÜH.EBRAHİM KHALİLZADEH VAHİDİ

İSTANBUL - 1988

Bu tez çalışmasının bütün aşamalarında yol gösteren ve hiç bir yardımı esirgemeyen sayın Hocam Prof.Altay Gündüz'e saygı ve şükranlarımı sunarım.

HESAPLARDA KULLANILAN NOTASYONLAR

P_F : Göçme olasılığı (Risk)

P_S : Kalıcılık olasılığı (Güvenilirlik)

$f_X(x)$: X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$F_X(x)$: X rastgele değişkeninin yığışımlı olasılık fonksiyonu

β : Güvenilirlik indeksi

$m_X, E(X)$: X rastgele değişkeninin ortalama değeri

σ_X : X rastgele değişkeninin standart sapması

$\Phi(\ )$: Standart normal dağılım fonksiyonu

α_i : Duyarlılık katsayısı

$\underline{x}^*$: Tasarım değerlerinin bileşkesi olan vektör

ÖZET

Yapısal tasarım, davranış veya durum fonksiyonları adı verilen hesap modellerine dayanılarak yapılır. Bu modellerin içerdiği parametreler genel olarak rastgele değişkendir. Dolayısiyle durum fonksiyonları da rastgele değişken olur. O halde bir durum fonksiyonuyla ilgili belirli bir olayın ortaya çıkması yada çıkmaması bir olasılık sorunudur. Bu nedenle yapısal sistemlerin tasarımında istenmeyen durumların ortaya çıkma olasılığı, risk, herzaman gizli bir şekilde mevcuttur. Özetle güvenilirlik, ancak riskin mertebesi belirlenerek sağlanabilir.

Bu çalışmada, davranış fonksiyonlarının içerdiği (mukavemet, yük, boyut vb.) rastgele değişkenlerine ilişkin pratikte mevcut istatistiksel bilgilerin elverdiği ölçüde, riskin ve dolayısiyle güvenilirliğin belirlenmesine çalışılmıştır.

SUMMARY

Structural design is based upon mathematical models that are called performance functions or state functions. The parameters of these models are generally random variables. Consequently the state functions are also random. In this case, to occur or not an event about state function is a probability problem. In the design of structural system, therefore, to occur of probability of an adverse event, risk, is always virtually unavoidable. Briefly, structural safety, can only be secured by determining the degree of risk.

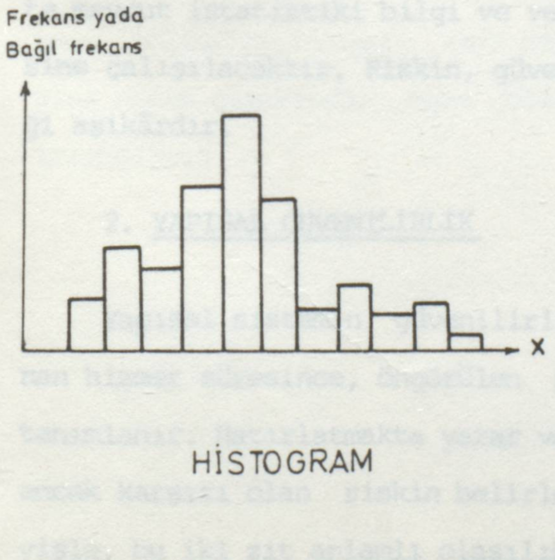
In this work, risk and consequently safety has been tried to determine by depending on available statistical informations which in practice, about random variables (strength, load, dimension etc.) which in performance functions.

1. GİRİŞ

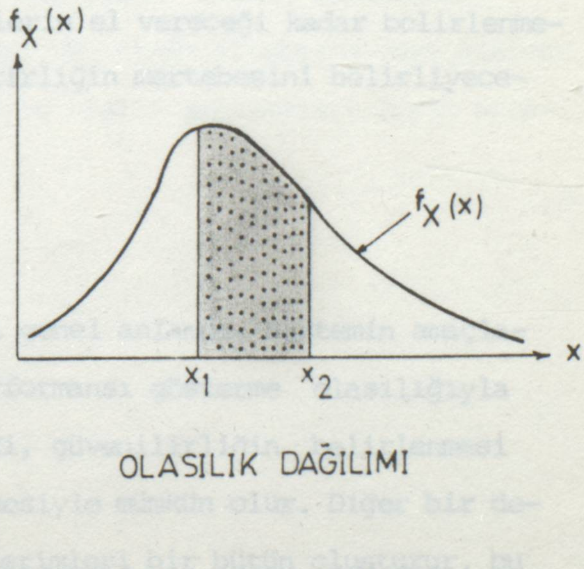
Yapısal sistemlerin tasarımı, limit durum denklemleri, algoritmalar vb. hesap modellerine dayanılarak yapılır. Tasarım modelleri, geniş çaplı deneysel ve teorik çalışmalar sonucu geliştirilen araştırma modellerinin mühendislik tecrübe ve düşüncesiyle basitleştirilmesi sonucu elde edilir. Araştırma modellerinin basitleştirilmesi, pratik amaçlarla, tasarım çözümlerinin matematiksel işlenebilirliğini sağlamak için yapılır. Örnekse, zamanla ve mekânla değişen yükler, eşdeğer üniform yüke dönüştürülür, üç boyutlu yapı sistemi iki boyutlu olarak idealleştirilir, parametreler birbirinden bağımsız olarak düşünülür, bazı parametreler ihmal edilir vb. Hesap modellerinin aktuel yapıların davranışını gerçekçi bir şekilde yansıtması ya da yansıtmaması, araştırma modellerinin yetkinliğine ve basitleştirmenin kapsam ve doğruluğuna bağlıdır. Araştırma modellerinin yetkinliği ise yapılar üzerinde denenmesiyle belirlenir. Ne varki yapılar üzerinde aynı şartlar altında denemeler pek mümkün olmuyor. Çünkü kimi deneyler yok edicidir, yapıyı tamamen veya kısmen hasara uğratabilir. Bu yüzden ancak yapılarla ilgili istenmeyen durumların ortaya çıkışı, bu durumlarla ilgili ihtimallerle ifade edilebilir.

Diğer taraftan araştırma modellerinin ve dolayısiyle hesap modellerinin içerdiği parametreler (yük, mukavemet. boyut vs.), rastgele değişken karakterde büyüklüklerdir. Bir rastgele değişkenin, olasılık dağılım fonksiyonu ve parametreleri (ortalama değer, standart sapma vb.) bilinse dahi, belirli olayların ortaya çıkması ya da çıkmaması hakkında kesin bir bilgi edinilemez, ancak bu olayların ortaya çıkma ya da çıkmama ihtimalinin ne mertebede olduğu tahmin edilebilir. Bir rastgele değişkenle ilgili amprik bilgiler değişkene ilişkin histogramdan temin edilir. Histogram deneylerden ya da gözlemlerden elde edilen ve rastgele değişkenin belirli değer aralıklarına ilişkin frekanslarını ya da bağıl frekanslarını gösteren diyagramdır (Şekil 1.1 a).

Rastgele değişkenle, X, ilgili teorik çözümlemeler, değişkenin bağıl frekans dağılımına uygun bir olasılık yoğunluğu dağılım eğrisi ve bu eğriyi tanımlayan olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f_X(x)$, kabul edilerek yapılabilir. Başka bir deyişle, rastgele değişken için teorik bir olasılık dağılım modeli oluşturulabilir (Şekil 1.1 b). Değişkenin belirli bir x değerini alma ihtimali söz konusu olmayıp, ancak x ile x + dx arasında değer alması mümkündür. Rastgele değişkenin herhangi x_1 ile x_2 arasında değer alma ihtimali ise olasılık yoğunluk fonksiyonun bu değerler arasında entegre edilmesiyle belirlenir.



Şekil 1.1 a



Şekil 1.1 b

Olasılık dağılımı modelleri de, çoğu zaman istatistiki verilerin yetersizliği yüzünden, hesap modelleri gibi yetkin değildir. Özetle, yapısal tasarım sorunları bir belirsizlik ortamı içerisinde çözülür. Belirsizlik, tasarım değişkenlerinin rastgele oluşu ve tasarımda kullanılan modellerin gerçeği tam yansıtmamasından kaynaklanır. Model belirsizlikleri, her ne kadar çeşitli yöntemlerle giderilebilirse de, tasarım değişkenlerinin yapısında varolan rastgelelikten doğan belirsizlik kalıcıdır, ortadan kaldırılamaz. Bu yüzden yapısal tasarımda istenmeyen durumun ortaya çıkma ihtimali her zaman gizli bir şekilde mevcuttur. O halde yapısal güvenilirliğin belirlenmesi ancak riskin hesaplanmasıyla mümkün olur. Örneğin riskin % 5 olduğu yerde güvenilirlik % 95 olur.

Bu çalışmada hesap modelinden doğan belirsizliğin tamamen giderildiği ve bu modelin yapısal sistemin davranışını tam olarak yansıttığı farz edilecek ve buna davranış veya durum fonksiyonu denilecektir. Bu durum fonksiyonun (ya da davranış fonksiyonunun) değişkenlerini teşkil eden ve rastgele karakterde olan tasarım değişkenlerinden dolayı oluşan belirsizlik, ve bu belirsizlikten doğan riskin; olasılık hesapları çerçevesinde ve bu değişkenlere ilişkin, pratikte mevcut istatistiki bilgi ve verilerin el vereceği kadar belirlenmesine çalışılacaktır. Riskin, güvenilirliğin mertebesini belirliyeceği aşikârdır.

2. YAPISAL GÜVENİLİRLİK

Yapısal sistemin güvenilirliği genel anlamda, sistemin amaçlanan hizmet süresince, öngörülen performansı gösterme olasılığıyla tanımlanır. Hatırlatmakta yarar varki, güvenilirliğin belirlenmesi ancak karşıtı olan riskin belirlenmesiyle mümkün olur. Diğer bir deyişle, bu iki zıt anlamlı olasılık terimleri bir bütün oluşturur, bu da bir (1) değerindeki bir alanla temsil edilebilir.

O halde, kalıcılık olasılığı (güvenilirlik) ve göçme olasılığı (risk) sırasıyla P_S ve P_F simgeleriyle ifade edilirse, $P_S + P_F = 1$ olur.

Şayet mukavemet, R, ve yük, S, fonksiyonlarının, olasılık dağılım fonksiyonları $F_R(r)$ ya $f_R(r)$ ve $F_S(s)$ ya $f_S(s)$ belli ise risk = $P(R \leqslant S)$ aşağıdaki bağıntıdan hesaplanabilir.

$$P_F = \int_0^{\infty} F_R(s)\, f_S(s)\, ds \qquad (2.1)$$

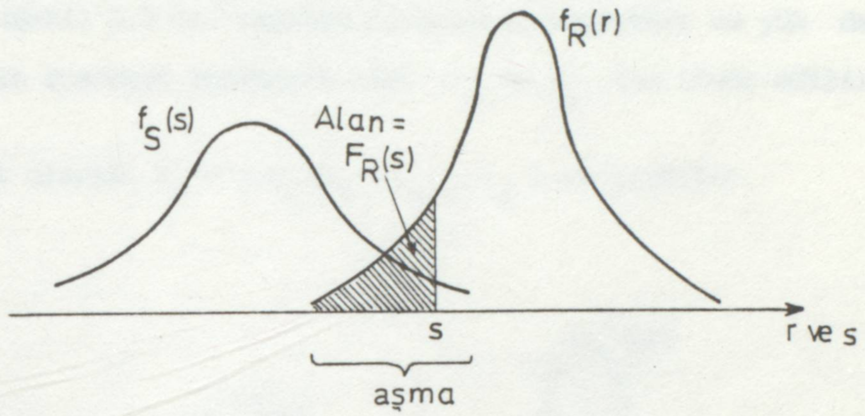
$F_R(s)$, mukavemetin yığışımlı olasılık fonksiyonu ya da $P\,[R \leqslant s]$

$f_S(s)$, yük etkisinin olasılık yoğunluk fonksiyonu ya da $P\,[s < S \leqslant s + ds]$

Güvenilirlik, P_S, ise dolayısiyle şöyle olur :

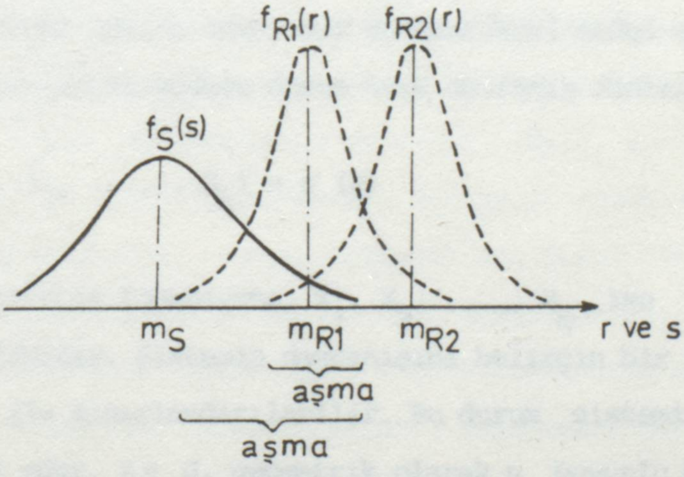
$$P_S = 1 - P_F$$

Şekil 2.1'de görüldüğü gibi $f_R(r)$ ve $f_S(s)$ eğrilerinin birbirini aşan bölümü riskin, P_F, belirlenmesi için bir ölçüt teşkil etmektedir, aşma bölümünün artması veya azalması P_F ninde artmasına veya azalmasına neden olmaktadır. Aşma bölümüyle ilgili değişmeleri şöyle sıralayabiliriz.



Şekil 2.1

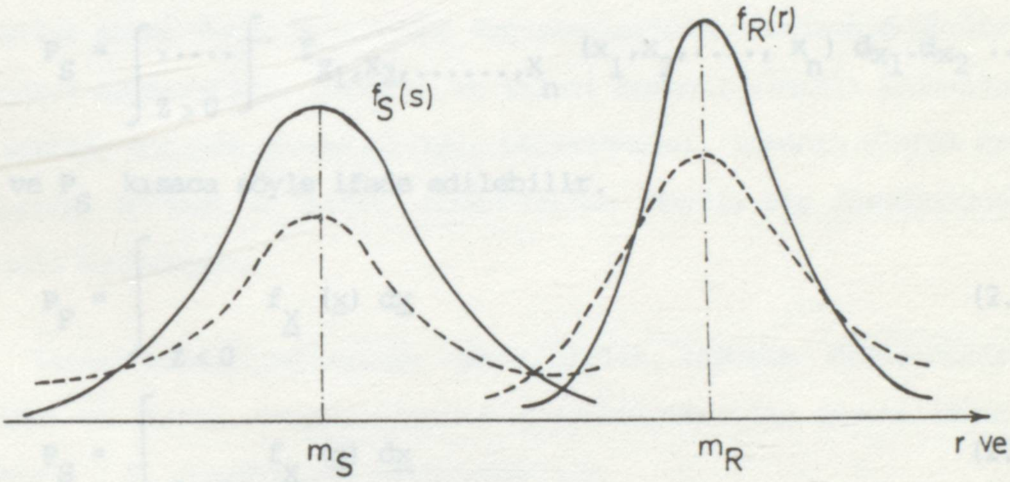
1) Aşma bölümü, $f_R(r)$ ve $f_S(s)$ eğrilerinin birbirine göre rölatif durumlarına bağlıdır. Şekil 2.2 a'da görüldüğü gibi aşma bölümü, eğrilerin birbirine yaklaşmasıyla artmakta ve birbirinden uzaklaşmasıyla azalmaktadır. Bu durum, mukavemet ve yük değişkenlerinin ortalama değerlerinin oranı, m_R/m_S, ile ifade edilebilir.



Şekil 2.2 a

2) Aşma bölümü, $f_R(r)$ ve $f_S(s)$ nın dağılma biçimine göre de değişir (Şekil 2.2 b). Dağılma biçimleri, mukavemet ve yük değişkenlerinin standart sapmaları olan σ_R ve σ_S ile ifade edilir.

Özet olarak; $P_F \approx g(m_R/m_S \; ; \sigma_R \; , \sigma_S)$ yazılabilir.



Şekil 2.2 b

Mukavemet ve yük fonksiyonları genelde bir çok değişkeni içermektedir. Bu nedenle yapısal sistemin davranışını yansıtan ve bu değişkenlerin tümünü ihtiva eden, bir matematiksel model geliştirilebilir. Geliştirilen bu modele durum veya davranış fonksiyonu denir.

$$Z = g(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) = g(\underline{X}) \tag{2.3}$$

Z, sistemin davranış fonksiyonu, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ise sistemin tasarım değişkenleridir. Sistemin davranışını belirgin bir hale getirmek için Z= 0 ile sınırlandırılabilir. Bu durum sistemin limit durumunu ifade eder. Z = 0, geometrik olarak n boyutlu bir yüzeydir. Bu yüzeye limit durum veya risk yüzeyi denir. Limit durumu yüzeyinin bir tarafı güvenli bölgeyi, $Z > 0$, diğer ikinci tarafı ise güvensiz bölgeyi, $Z<0$, gösterir. Bu yüzden eğer $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tasarım değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

, $f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, bilinirse, P_F ve P_S aşağıdaki bağıntılarla hesaplanabilir.

$$P_F = \int_{Z<0} \cdots \int f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\, dx_1 . dx_2 \ldots dx_n$$

$$P_S = \int_{Z>0} \cdots \int f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\, dx_1 . dx_2 \ldots . dx_n$$

P_F ve P_S kısaca şöyle ifade edilebilir.

$$P_F = \int_{Z<0} f_{\underline{X}}(\underline{x})\, d\underline{x} \tag{2.4}$$

$$P_S = \int_{Z>0} f_{\underline{X}}(\underline{x})\, d\underline{x} \tag{2.5}$$

Göçme ve kalıcılık olasılıklarının (2.1), (2.4) ve (2.5) bağıntılarıyla bulunması ideal çözümdür. Ne var ki, bu bağıntılarla hesap yapılabilmesi için durum fonksiyonu değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonlarını belirleyen istatistiki bilgilerin sağlanmış olması gerekir. Oysa pratikte, anılan değişkenlerle ilgili mevcut istatistiki bilgiler çoğu zaman, değişkenlerin ortalama değeri, m_X, ve standart sapmalarıyla, σ_X, sınırlı kalmaktadır. Ayrıca bu fonksiyonlar bilinse bile, çok sayıda değişkeni içeren karmaşık bir durum fonksiyonuna ilişkin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun hesaplanması, çözümü güç çok katlı integral hesabını gerektirir. Özetle bugün için anılan bağıntılarla yapısal tasarımda güvenilirliğin sağlanması pek mümkün değildir. Gelecekte yaygın olarak kullanılmaları ise, durum fonksiyonlarının içerdiği değişkenlerin olasılık dağılımının bilinmesi ve geniş kapsamlı bilgisayar programlarının hazırlanmasına bağlıdır.

3. İKİNCİ MOMENT YAKLAŞIMI

İkinci bölümde değindiğimiz gibi göçme (risk) ve kalıcılık (güvenilirlik) olasılıklarının tam ve kesin olarak belirlenmesi istatistiki bilgi ve verilerin yetersizliği ve ayrıca matematiksel çözüm zorluğu itibariyle bugün için hemen hemen olanaksızdır.

Pratik amaçlar için güvenilirliğin belirlenmesinde elimizdeki tüm bilgiler ancak durum fonksiyonu değişkenlerinin ortalama değerleri ve standart sapmalarıyla (birinci ve ikinci moment) sınırlı kalmaktadır. Bu şartlar altında güvenilirliğin belirlenmesi, zorunlu olarak değişkenlerin birinci ve ikinci momentlerine dayalı bir formülasyonla sınırlı kalmaktadır.

İkinci moment yaklaşımla güvenilirlik, tasarım değişkenlerinin birinci ve ikinci momentlerinin bir fonksiyonu olan güvenilirlik indeksi , β, yardımıyla belirlenebilir.

3.1. BİRİNCİ-MERTEBE YAKLAŞIM

Olasılık teorisine göre, bir $Z = g(X_1, X_2, \ldots, X_n) = g(\underline{X})$ durum fonksiyonunun ortalama değeri ve varyansı (birinci ve ikinci moment) sırasıyla aşağıdaki bağıntılarla hesaplanır.

$$m_Z = E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\underline{X})\, f_{\underline{X}}(\underline{x})\, d\underline{x}$$

$$\sigma_Z^2 = \mathrm{Var}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[g(\underline{X}) - E(Z) \right]^2 f_{\underline{X}}(\underline{x})\, d\underline{x}$$

Ne var ki pratikte veri yetersizliği ve matematiksel çözüm zorluğu sebebiyle bu bağıntıları kullanmak olanaksızdır. İşte, birinci-mertebe yaklaşımı, m_Z ve σ_Z nin yaklaşık olarak hesaplanmasını sağlar. Fakat esas konuya geçmeden önce rastgele değişkenlerle ilgili bazı bağıntıların hatırlatılması faydalı olacaktır.(Bütün bağıntılarda ortalama değer "E" veya "m" -standart sapma "σ" simgeleriyle gösterilmiştir).

Eğer $Y = c$ ise : (c= sabit değer)

$$E(Y) = c \tag{a}$$

$$\sigma_Y^2 = Var(Y) = 0 \tag{b}$$

Genel olarak eğer $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ ise: $a_i (i=1,....,n)$ = sabit sayılar

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) \tag{c}$$

Eğer $X_1, X_2, ..., X_n$ istatistiksel olarak bağımsız (*) rastgele değişkenler ise :

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_{X_i}^2 \tag{d}$$

Şimdi konuya geçelim: Birinci-mertebe yaklaşım; $Z = g(\underline{X})$ durum fonksiyonun, değişkenlerin ortalama değerleri olan $m_{X_1}, m_{X_2}, ..., m_{X_n}$ ye göre Taylor serisine açılması ve bu serideki lineer terimleri göz önünde tutup diğer terimleri ihmal edip ve buradan hareketle Z nin ortalama değer ve varyansının yaklaşık olarak bulunmasından ibarettir. Amaç, Z nin ortalama değer ve varyansından faydalanarak güvenilirlik ve risk olasılıklarının belirlenmesidir.

(*) Bu çalışmada rastgele değişkenler, istatistiksel olarak bağımsız kabul edilmiştir. Başka bir deyişle değişkenler arasındaki korelasyonlar ihmal edilmiştir.

Bu bölümde tek değişkenli durum fonksiyonunun ortalama değeri ve varyansı hesaplanacaktır. Durum fonksiyonunun genel hali (n değişkenli hali) 3.2.ve 3.3. bölümlerde ele alınacaktır.

$Y= g(X)$ durum (davranış) fonksiyonu olsun.

Y yi, X değişkenin ortalama değeri, m_X, e göre Taylor serisine açalım.

$$Y = g(m_X) + (X-m_X)\frac{dg}{dX} + \frac{1}{2}(X-m_X)^2 \frac{d^2g}{dX^2} + ...$$

(Türevler m_X e göre değerlendiriliyor).

Yalnız lineer terimleri göz önüne alırsak :

$$Y \approx g(m_X) + (X-m_X)\frac{dg}{dX}$$

$$E(Y) \approx E\left[g(m_X) + (X-m_X)\frac{dg}{dX}\right] = E\left[g(m_X)\right] + E\left[(X-m_X)\frac{dg}{dX}\right]$$

Yukarıdaki bağıntıda $E\left[g(m_X)\right] = g(m_X)$ olur. (Bağıntı a'ya göre)

Bağıntı (a) ve (c) den faydalanarak,

$$E\left[(X-m_X)\frac{dg}{dX}\right] = \frac{dg}{dX}E(X) - \frac{dg}{dX}E(m_X) = \frac{dg}{dX}m_X - \frac{dg}{dX}m_X = 0$$

olur. O halde;

$$E(Y) \approx g(m_X) \tag{3.1.1}$$

olur.

$$Var(Y) \approx Var\left[g(m_X)\right] + Var\left[(X-m_X)\frac{dg}{dX}\right]$$

Yukarıdaki bağıntıda $Var\left[g(m_X)\right] = 0$ olur. (Bağıntı b'ye göre)

Bağıntı (b) ve (d) den faydalanarak,

$$\mathrm{Var}\left[(X-m_X) \frac{dg}{dX} \right] = \left(\frac{dg}{dX} \right)^2 \mathrm{Var}(X) \qquad \text{olur.}$$

O halde;

$$\mathrm{Var}\,(Y) \simeq \left(\frac{dg}{dX} \right)^2 \mathrm{Var}\,(X) \qquad (3.1.2)$$

olur.

Durum fonksiyonu ,Y,nin ortalama değeri ve varyansı (3.1.1) ve (3.1.2) bağıntılarıyla yaklaşık olarak hesaplanabilir. 3.2. bölümde bu bağıntılardan faydalanarak güvenilirliğin nasıl belirleneceğini göreceğiz.

3.2. GÜVENİLİRLİK İNDEKSİNİN , β, DOĞRUDAN BELİRLENMESİ

Konuya geçmeden önce, olasılık dağılım modelleri olarak kullanacağımız normal ve standart normal dağılımlarını kısaca gözden geçirelim.

NORMAL DAĞILIM

Normal (Gauss) dağılımı sürekli olasılık dağılımının en önemli örneklerinden biridir. Normal dağılımın, olasılık yoğunluk fonksiyonu şöyle tanımlanır :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{\sigma} \right)^2 \right] \qquad -\infty < x < \infty$$

Bu fonksiyondaki m ve σ , dağılımın parametreleridir ve aynı zamanda sırasıyla, ortalama değer ve standart sapmadırlar.

Ortalama değeri m ve standart sapması σ olan normal dağılım kısaca $N(m, \sigma)$ ile gösterilir.

STANDART NORMAL DAĞILIM

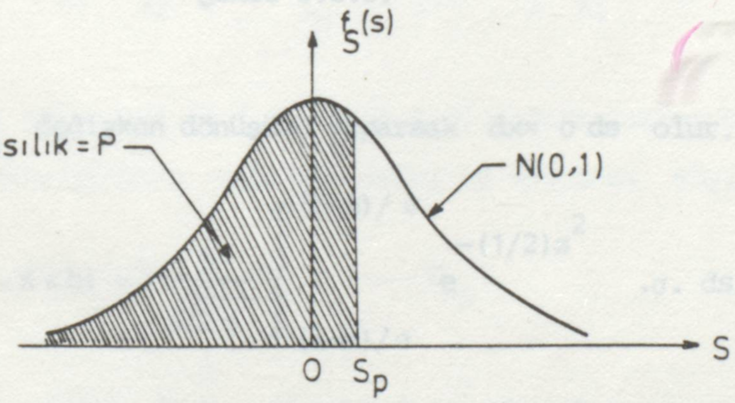
Yukarıdaki bağıntıda $s = (x-m)/\sigma$ değişken dönüşümü yaparsak ortalama değeri m= 0 ve standart sapması $\sigma = 1$ olan

$$f_S(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\frac{1}{2}) s^2} \qquad -\infty < s < \infty$$

Standart normal dağılım elde edilir ve kısaca N(0,1) ile gösterilir. Yığışımlı olasılık dağılım fonksiyonu yani $P(S \leqslant s)$, $\Phi(s)$ ile gösterilir.

$$\Phi(s) = F_S(s)$$

Şekil (3.2.1)'de gösterildiği gibi $\Phi(s_p) = p$ olur.



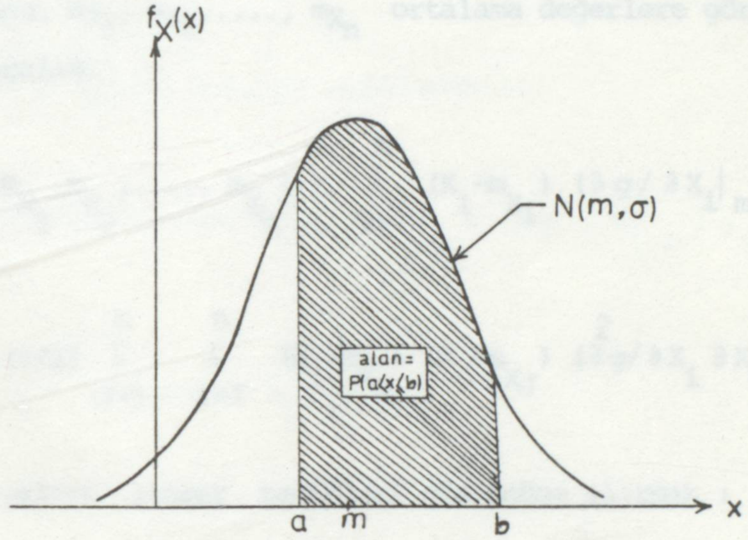
Şekil 3.2.1. Standart normal yoğunluk fonksiyonu

Simetriden dolayı $\Phi(-s) = 1 - \Phi(s)$ olur.

Bir normal dağılımlı X rastgele değişkenini göz önüne alalım. [N(m, σ)]

$$P(a < X \leqslant b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{\sigma} \right)^2 \right] dx$$

olasılığı Şekil (3.2.2)'de gösterilmiştir.



Şekil 3.2.2.

$s = \frac{x-m}{\sigma}$ değişken dönüşümü yaparsak $dx = \sigma\, ds$ olur.

$$P(a < X \leqslant b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{(a-m)/\sigma}^{(b-m)/\sigma} e^{-(1/2)s^2} .\sigma.\, ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(a-m)/\sigma}^{(b-m)/\sigma} e^{-(1/2)s^2}\, ds$$

Sonuç olarak olasılık, aşağıdaki bağıntıyla ifade edilir.

$$P(a < X \leqslant b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma} \right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma} \right) \qquad (3.2.1)$$

Benzer şekilde $P(X \leqslant c)$ de şöyle olur :

$$P(X \leqslant c) = \Phi\left(\frac{c-m}{\sigma}\right) \qquad (3.2.2)$$

Şimdi esas konumuza gelelim: $Z = g(X_1, X_2, \ldots, X_n) = g(\underline{X})$ durum fonksiyonunu, $m_{X_1}, m_{X_2}, \ldots, m_{X_n}$ ortalama değerlere göre Taylor serisine açalım.

$$Z = g(m_{X_1}, m_{X_2}, \ldots, m_{X_n}) + \sum_{i=1}^{n} (X_i - m_{X_i})(\partial g/\partial X_i|_m)$$

$$+ (1/2) \sum_{J=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m_{X_i})(X_J - m_{X_J})(\partial^2 g/\partial X_i \, \partial X_J|_m) + \ldots\ldots$$

Serideki yalnız lineer terimleri göz önüne alırsak :

$$Z \approx g(m_{X_1}, m_{X_2}, \ldots, m_{X_n}) + \sum_{i=1}^{n} (X_i - m_{X_i})(\partial g/\partial X_i|_m) \text{ olur.}$$

3.1. bölümdeki (3.1.1) ve (3.1.2) bağıntılarına benzer şekilde Z durum fonksiyonunun ortalama değer ve varyansı şöyle hesaplanır.

$$m_Z = E(Z) \approx g(m_{X_1}, m_{X_2}, \ldots, m_{X_n}) \qquad (3.2.3)$$

$$\sigma_Z^2 = \mathrm{Var}(Z) \approx \sum_{i=1}^{n} (\partial g/\partial X_i|_m)^2 \, \mathrm{Var}(X_i) \qquad (3.2.4)$$

Var(Z) yi veren (3.2.4) bağıntısını yorumlayalım. Bağıntı, durum fonksiyonun içerdiği her X_i değişkenin, Z nin dağılışına katkıda bulunduğunu, katkının, X_i nin varyansı ve $(\partial g/\partial X_i|_m)^2$ katsayısıyla orantılı olduğunu gösterir. Z deki değişkenlerin X_i deki değişmelerden duyarlanma derecesini belirten α_i katsayısına, duyarlılık katsayısı denir ve şöyle hesaplanır.

$$\alpha_i = \left[(\partial g/\partial X_i|_m)\, \sigma_{X_i}\right] \Big/ \left[\sum_{i=1}^{n} (\partial g/\partial X_i|_m)^2\, \sigma_{X_i}^2\right]^{1/2}$$

$$\alpha_i = \left[(\partial g/\partial X_i|_m)\, \sigma_{X_i}\right] / \sigma_Z \qquad (3.2.5)$$

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1$ olduğu kolayca ispatlanabilir.

(3.2.5) bağıntısına göre $\alpha_i\, \sigma_Z = (\partial g/\partial X_i|_m)\, \sigma_{X_i}$ bağıntısı yazılabilir.

$$(\alpha_i\, \sigma_Z)^2 = \left[(\partial g/\partial X_i|_m)\, \sigma_{X_i}\right]^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i\, \sigma_Z)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[(\partial g/\partial X_i|_m)\, \sigma_{X_i}\right]^2 = \sigma_Z^2$$

$\sigma_Z^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \sigma_Z^2$ bağıntısının her iki tarafını, σ_Z^2 ye bölersek;

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1$ elde edilir.

Merkezsel limit teoremine göre; bireysel X_i rastgele değişkenlerinin olasılık dağılımları normal olmasa bile, $Z = g(\underline{X})$ olasılık dağılımının normal dağılıma yaklaştığı kabul edilebilir. O halde sorun, olasılık dağılımı, ortalama değeri ve varyansı bilinen Z durum fonksiyonunun, $(Z \leqslant 0)$ ya da $(Z > 0)$ olma olasılığının hesaplanmasıdır. Başka bir deyişle, göçme olasılığının $[P_F = P(Z \leqslant 0)]$ ya da güvenilirliğin $(P_S = 1 - P_F)$ belirlenmesidir.

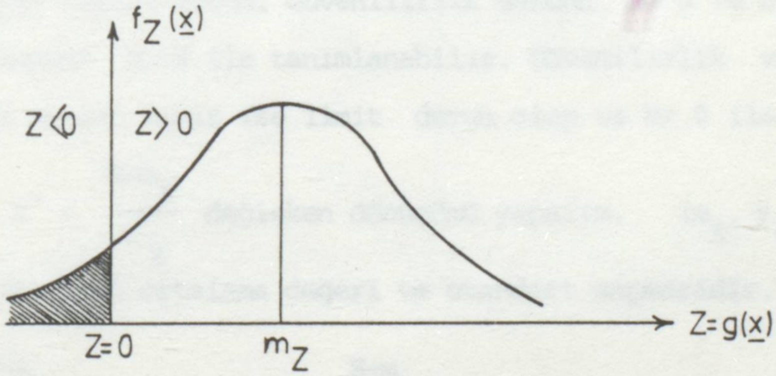
GÖÇME OLASILIĞI

Ortalama değeri m_Z ve standart sapması σ_Z olan normal dağılımlı $Z= g(X_1,X_2,\ldots, X_n) = g(\underline{X})$ durum fonksiyonunun olasılık dağılımı Şekil (3.2.3)'de gösterilmiştir. Limit duruma ulaşma, Z= 0 olasılığını [başka bir deyişle $P(Z \leqslant 0)$] şekildeki taralı alan belirler. Göçme olasılığı 3.2.2 bağıntısına göre aşağıdaki gibi hesaplanabilir (Şekil 3.2.4).

$$P_F = P(Z \leqslant 0) = \Phi\left(\frac{0-m_Z}{\sigma_Z}\right)$$

$$P_F = \Phi\left(-\frac{m_Z}{\sigma_Z}\right) = \Phi(-\beta) = 1-\Phi(\beta) \qquad (3.2.5)$$

Göçme olasılığı ,P_F, standart normal dağılımının, yığışımlı olasılıklarını ,$\Phi(s)$, veren tablolar kullanılarak belirlenebilir.



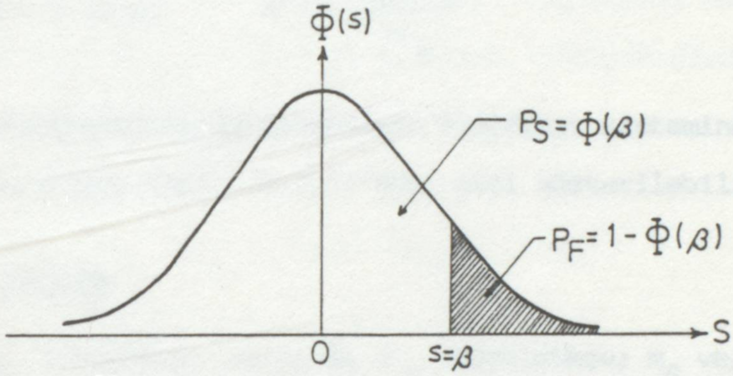
Şekil 3.2.3 Durum fonksiyonu olasılık dağılımı (Normal dağılım)

KALICILIK OLASILIĞI (GÜVENİLİRLİK)

Göçme olasılığı ,P_F, bilindiğine göre kalıcılık olasılığı ,P_S, şöyle hesaplanır (Şekil 3.2.4)

$$P_S = 1 - P_F = \Phi(\beta) \qquad (3.2.6)$$

Olasılık hesabında σ/m oranı varyasyon katsayısı ,V, olarak tanımlandığı için $\beta = m_Z/\sigma_Z = 1/V_Z$ olur ve β'ya güvenilirlik indeksi adı verilir.



Şekil 3.2.4 Standart normal dağılım N(0.1)

3.3. GÜVENİLİRLİK İNDEKSİNİN ,β, İTERASYONLA BELİRLENMESİ

M= R-S durum fonksiyonunu gözönüne alalım. R, mukavemet; S, yük ya da yük etkisi olsun. Güvenilirlik durumu $M > 0$ ve buna karşılık, risk durumu $M < 0$ ile tanımlanabilir. Güvenilirlik ve risk durumlarını ayıran sınır ise limit durum olup ve M= 0 ile tanımlanır.

Şimdi $X' = \dfrac{X-m_X}{\sigma_X}$ değişken dönüşümü yapalım. (m_X, σ_X, sırasıyla, X değişkeninin ortalama değeri ve standart sapmasıdır.)

$$R' = \frac{R-m_R}{\sigma_R} \quad , \qquad S' = \frac{S-m_S}{\sigma_S}$$

$$R = \sigma_R R' + m_R \quad , \qquad S = \sigma_S S' + m_S \quad \text{olur.}$$

Limit durum denklemi ,M= 0, dönüştürülmüş değişkenler cinsinden şöyle ifade edilir :

$$\sigma_R R' + m_R - \sigma_S s' - m_S = 0$$

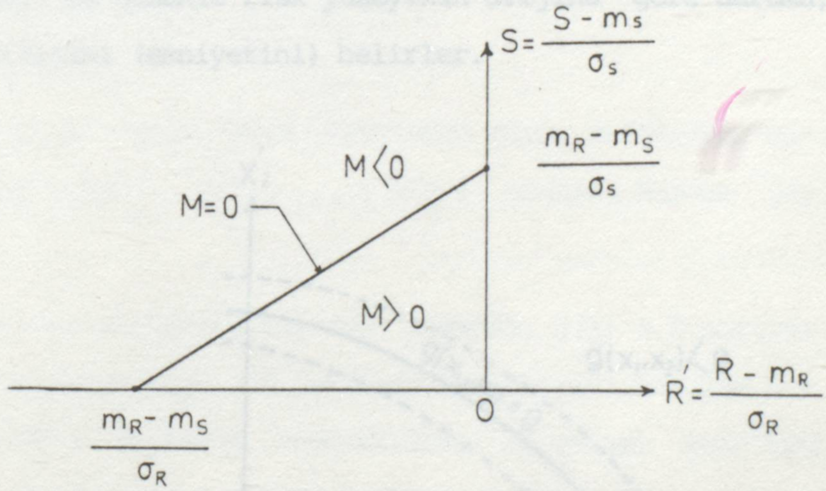
$$R' = 0 \text{ için ;} \qquad S' = \frac{m_R - m_S}{\sigma_S}$$

$$S' = 0 \text{ için;} \qquad R' = -\frac{m_R - m_S}{\sigma_R}$$

Dönüştürülmüş değişkenlerin koordinat sisteminde güvenilirlik ve risk durumları Şekil (3.3.1)'deki gibi gösterilebilir.

<u>İRDELEME</u>

m_R büyüdükçe ve/ya da σ_R küçüldükçe; m_S ve/ya da σ_S küçüldükçe M büyür $(M > 0)$.



Şekil 3.3.1

Şimdi konuyu durum fonksiyonun genel haliyle ele alalım.

$$g(\underline{X}) = g(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) \qquad (3.3.1)$$

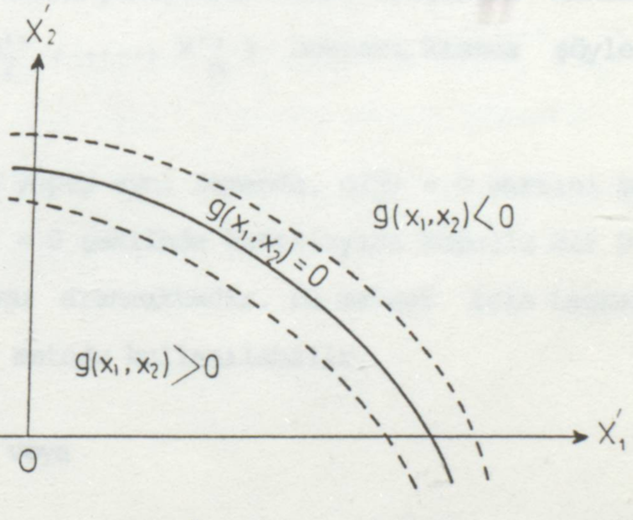
$[g(\underline{X}) > 0]$ = Güvenilirlik durumu, $[g(\underline{X}) < 0]$ = risk durumu ve $[g(\underline{X}) = 0]$ = Limit durumu olur. Dönüştürülmüş değişkenler seti ise şöyle olur :

$$X'_i = \frac{X_i - m_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad ; \quad i = 1,2, \ldots\ldots, n \qquad (3.3.2)$$

Şüphesiz, güvenilirlik ve risk durumları yine de dönüştürülmüş değişkenler sisteminde (uzayında), limit durum denkleminin sınır teşkil etmesiyle gösterilebilir. (İki değişkenli hali Şekil 3.3.2 de gösterilmiştir). Limit durum denklemi, dönüştürülmüş değişkenler $,X'_i,$ cinsinden şöyle ifade edilebilir.

$$g(\sigma_{X_1} X'_1 + m_{X_1}, \ldots\ldots\ldots, \sigma_{X_n} X'_n + m_{X_n}) = 0 \qquad (3.3.3)$$

Şekil (3.3.2)'de görüldüğü gibi limit durum yüzeyinin (risk yüzeyinin) $, g(\underline{X}) = 0,$ orijinden uzaklaşması veya orijine yaklaşması, güvenilirlik bölgesinin $, g(\underline{X}) > 0,$ artmasına veya azalmasına neden olmaktadır. Bu nedenle risk yüzeyinin orijine göre durumu, sistemin güvenilirliğini (emniyetini) belirler.



Şekil 3.3.2

Risk yüzeyinin durumu, $g(\underline{X})=0$ yüzeyinden, dönüştürülmüş değişkenler sisteminin orijinine olan minimum uzaklıkla da izah edilebilir. Gerçekten, Shinozuka (1983) risk yüzeyinde olup da orijine minimum uzaklıktaki noktanın "en olası risk noktası(+)" olduğunu göstermiştir. Bu bilgiler ışığında; anılan bu minimum uzaklık, güvenilirliğin belirlenmesi için bir yaklaşım olarak düşünülebilir.

Bu minimum uzaklığın saptanması, durum fonksiyonu lineer olduğu zaman (Şekil 3.3.1), her ne kadar kolay olsa dahi, durum fonksiyonun genel hali (nonlineer) için pek kolay iş olmasa gerek (Şekil 3.3.2).

Anılan minimum uzaklığın belirlenmesi için şöyle bir aşamalı yol izlenebilir. Risk yüzeyi $g(\underline{X}) = 0$, üzerindeki her hangi bir $\underline{X}' = (X'_1, X'_2, \ldots, X'_n)$ noktasından orijine olan uzaklık (dönüştürülmüş sistemde), D, şöyle hesaplanır:

$$D = \sqrt{X'^2_1 + X'^2_2 + \ldots\ldots + X'^2_n} = (\underline{X}'^t \, \underline{X}')^{1/2}$$

$$\underline{X}'^t = [\, X'_1 \;\; X'_2 \;\; \ldots\ldots \;\; X'_n \,]$$

Risk yüzeyinde (limit durum yüzeyinde) olup, orijinden minimum uzaklıktaki, $\underline{x}'^* = (x'^*_1, x'^*_2, \ldots\ldots, x'^*_n)$ noktası kısaca şöyle tanımlanabilir :

D fonksiyonunu minimum yapıp aynı zamanda, $g(\underline{X}) = 0$ şartını sağlayan noktadır. O zaman $g(\underline{X}) = 0$ şeklinde kısıtlayıcı koşullu bir D fonksiyonunun rölatif minimumu aranmaktadır. Bu maksat için Lagrange'ın çarpanlar (multiplier) metodu kullanılabilir.

$$L = D + \lambda \, g(\underline{X}) \quad \text{veya}$$

(+) En olası risk noktası: $g(\underline{X}) = 0$ limit durum denklemini en büyük olasılıkla sağlayan noktadır ($\underline{x}^*$). Limit duruma göre tasarım yapıldığı için bu nokta tasarım değişkenlerini temsil eder.

$$L = (\underline{X}'^{t}\,\underline{X}')^{1/2} + \lambda\, g\,(\underline{X})$$

λ = Lagrange çarpanı olup, $\underline{X} = X_1, X_2, \ldots., X_n$ den bağımsızdır.

L skaler ifadeyle şöyle olur :

$$L = \sqrt{X_1'^2 + X_2'^2 + \ldots\ldots + X_n'^2} + \lambda\, g(X_1, X_2, \ldots., X_n)$$

Bu denklemde, $X_i = \sigma_{X_i} X_i' + m_{X_i}$ dir.

L bağıntısının minimum olması için gerekli koşullar şöyledir :

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{X}'} = \frac{X_i'}{\sqrt{X_1'^2 + X_2'^2 + \ldots. + X_n'^2}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial X_i'} = 0 \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(X_1, X_2, \ldots.., X_n) = 0 \qquad \text{(II)}$$

Yukarıdaki denklem takımının çözümüyle $\underline{x}'^{*} = (x_1'^{*}, x_2'^{*}, \ldots., x_n'^{*})$, en olası risk noktası bir diğer deyişle tasarım değerleri, dönüştürülmüş sistemde belirlenebilir.

Gradyan $g(\underline{X})$, G ile gösterilirse,

$$G^t = \left[\frac{\partial g}{\partial X_1'}, \frac{\partial g}{\partial X_2'}, \ldots\ldots\ldots \frac{\partial g}{\partial X_n'}\right] \text{ olur.}$$

$$X_i = \sigma_{X_i} X_i' + m_{X_i}$$ bağıntısından faydalanarak,

$$\frac{\partial g}{\partial X_i'} = \frac{\partial g}{\partial X_i} \frac{dX_i}{dX_i'} = \sigma_{X_i} \frac{\partial g}{\partial X_i} \text{ olur.}$$

Denklem takımı (I), matrisyel ifadeyle şöyle gösterilebilir.

$$\frac{\underline{X}'}{(\underline{X}'^t\underline{X}')^{1/2}} + \lambda G = 0$$

Bu bağıntıdan $\underline{X}'$ü çekilip gerekli düzeltmeler yapılırsa, şöyle olur :

$$\underline{X}' = -\lambda D G \qquad \text{(III)}$$

$\underline{X}'$ nün bu değeri, D fonksiyonunda yerine koyulursa,

$$D = (\underline{X}'^t\underline{X}')^{1/2} = \left[(\lambda D G^t)(\lambda D G) \right]^{1/2} = \lambda D (G^t G)^{1/2}$$ olur.

Bu bağıntıdan λ şöyle olur.

$$\lambda = (G^t G)^{-1/2}$$

λ nın bu değeri denklem (III) de yerine koyulursa, şöyle olur :

$$\underline{X}' = \frac{-GD}{(G^t G)^{1/2}} \qquad \text{(IV)}$$

Denklem (IV) ün her iki tarafı G^t ile çarpılıp gerekli düzeltmeler yapılırsa,

$$D = \frac{-G^t \underline{X}'}{(G^t G)^{1/2}} \qquad \text{(V)}$$

elde edilir.

Denklem takımı (I) i çözerek, denklem (IV) te görüldüğü gibi $\underline{X}'$yü D bilinmeyeni cinsinden bulduk. O halde denklem (IV) ü denklem (II) yle çözersek, D bilinmiyenli tek bir denklem elde ederiz. Bu sonuç denklemin çözümüyle de minimum uzaklık , $D_{min} = \beta$, elde edilir. O halde $D_{min} = \beta$, bağıntı (V) e benzer şekilde şöyle hesaplanır :

$$\beta = \frac{-G^{*t} \underline{x}'^{*}}{(G^{*t} G^{*})^{1/2}} \qquad (3.3.4a)$$

Denklem (3.3.4a) da G^*, en olası risk noktası olan $(x_1'^*, x_2'^*, \ldots, x_n'^*)$ deki gradyen vektördür;

$$G^* = \left(\frac{\partial g}{\partial X_1'}, \frac{\partial g}{\partial X_2'}, \ldots\ldots, \frac{\partial g}{\partial X_n'}\right)_* .$$

Denklem (3.3.4a) nın skaler ifadesi şöyle olur :

$$\beta = \frac{-\sum_{i=1}^{n} x_i'^* \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_*}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_*^2}} \qquad (3.3.4b)$$

Denklem (3.3.4b) deki kısmi türevler , $(\partial g/\partial X_i')_*$, en olası risk noktası olan $(x_1'^*, x_2'^*, \ldots\ldots, x_n'^*)$de değerlendiriliyorlar. Yukarıda bulduğumuz $\beta = D_{min}$ değerini denklem (IV) te kullanarak risk yüzeyindeki en olası noktayı bulabiliriz.

$$\underline{x}'^* = \frac{-G^* \beta}{(G^{*t} G^*)^{1/2}} \qquad (3.3.5)$$

$\underline{x}'^*$ vektörünün bileşenlerinin skaler formu, denklem (3.3.5) den yararlanarak şöyle olur :

$$x_i'^* = -\alpha_i^* \beta \qquad i = 1,2,\ldots, n \qquad (3.3.6)$$

$$\alpha_i^* = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_*}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_*^2}} \qquad (3.3.7)$$

α_i^* ler, β nın $x_i'^*$ eksenleri boyunca doğrultu kosinüsleridir;

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{*2} = 1$$

BİRİNCİ-MERTEBE YAKLAŞIM

Yukarıdaki β yı veren bağıntı (3.3.4b), durum fonksiyonu $g(\underline{X})$ in birinci mertebe yaklaşım esasına dayanılarak da izah edilebilir. $\underline{x}^*$, risk yüzeyindeki bir nokta olsun ,$g(\underline{x}^*)= 0$, Durum fonksiyonunu bu $\underline{x}^*$ noktasında Taylor serisine açalım.

$$g(X_1, X_2, \ldots, X_n) = g(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) + \sum_{i=1}^{n} (X_i - x_i^*)\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)_*$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - x_i^*)(X_j - x_j^*)\left(\frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j}\right)_* + \ldots$$

Denklemdeki kısmi türevler $\underline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ noktasında değerlendirilir. Ayrıca bu nokta risk yüzeyinde bulunduğu için $g(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = 0$ olur. Bu nedenle,

$$g(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - x_i^*)\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)_*$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - x_i^*)(X_j - x_j^*)\left(\frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j}\right)_*$$

$+ \ldots\ldots$ olur.

Yukarıdaki serinin birinci mertebe terimlerini (lineer terimlerini) göz önüne alıp, diğer terimleri ihmal edersek $g(\underline{X})$ i birinci-mertebe yaklaşımla saptamış oluruz.

$$g(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) \approx \sum_{i=1}^{n} (X_i - x_i^*) \left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)_*$$

Bu bağıntıdaki,

$$X_i - x_i^* = (\sigma_{X_i} X_i' + m_{X_i}) - (\sigma_{X_i} x_i^* + m_{X_i}) = \sigma_{X_i} (X_i' - x_i^*)$$

$$\frac{\partial g}{\partial X_i} = \frac{\partial g}{\partial X_i'} \left(\frac{dX_i'}{dX_i}\right) = \frac{1}{\sigma_{X_i}} \frac{\partial g}{\partial X_i'} \quad \text{olur.}$$

O halde,

$$g(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) \approx \sum_{i=1}^{n} (X_i' - x_i'^*) \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_* \quad \text{olur.}$$

$g(\underline{X})$ in ortalama değeri ve varşansı (σ_g^2) sırasıyla şöyle hesaplanır(+):

$$m_g \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_* E(X_i') - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_* x_i'^*$$

(+) Genel olarak tasarım değişkenlerinin ve dolayısiyle durum fonksiyonun olasılık dağılımları normal kabul edilir.

X_i rastgele değişkenin olasılık dağılımı normal ise, $X_i' = \dfrac{X_i - m_{X_i}}{\sigma_{X_i}}$ nin olasılık dağılımı standart normal olur. Bu da demektir ki

$m_{X_i'} = E(X_i') = 0$ ve $\sigma_{X_i'} = 1$

$E(X_i')= 0$ olduğu için, m_g şöyle olur :

$$m_g \approx - \sum_{i=1}^{n} x_i'^{*} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)_*$$

$$\mathrm{Var}[\,g(\underline{X})\,] = \sigma_g^2 \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)_* \mathrm{Var}(X_i') - 0$$

$\mathrm{Var}(X_i') = 1$ olduğu için, σ_g^2 şöyle olur :

$$\sigma_g^2 \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)_*$$

Yukarıdaki m_g ve σ_g yi veren bağıntılardan yararlanarak m_g/σ_g oranı şöyle olur :

$$\frac{m_g}{\sigma_g} = \frac{-\sum_{i=1}^{n} x_i'^{*} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)_*}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)_*^2}} \tag{3.3.8}$$

Denklem (3.3.8) ve (3.3.4b) yi birbiriyle mukayese edersek ikisinin de aynı olduğunu görürüz. Bu sebeple m_g/σ_g oranı yine dönüştürülmüş değişkenler sisteminde, risk yüzeyinin, $\underline{x}'^{*}$ noktasındaki teğet düzleminden orijine olan uzaklıktır. Keza güvenilirlik indeksi şöyle olur :

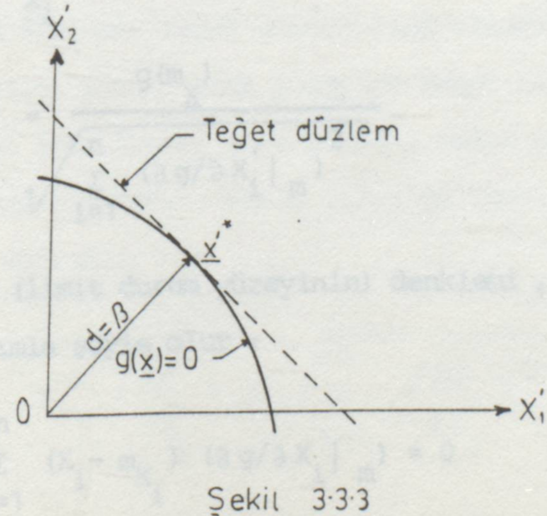
$$\beta = m_g / \sigma_g$$

Birinci-mertebe yaklaşımla elde edilen m_g ve σ_g nin, risk yüzeyinde, $g(\underline{X})= 0$, bulunan bir noktada değerlendirilmesine dikkat edilmelidir. Bölüm 3.2'de birinci-mertebe yaklaşımla bulduğumuz m_g ve σ_g yi durum fonksiyonu değişkenlerinin ortalama değerlerinde ,(m_{X_1}, m_{X_2},...., m_{X_n}), değerlendirmiştik. Bu bize her ne kadar kolay bir çözüm imkanı sağladıysa da, durum fonksiyonun ,$g(\underline{X})$, nonlineer olması halinde m_g/σ_g oranı, nonlineer risk yüzeyinden, dönüştürülmüş değişkenler sisteminin orijinine olan uzaklığı olmayabilir. Konuya açıklık kazandırmak için daha yakından inceliyelim :

Yukarıda bulduğumuz $g(\underline{X}) \approx \sum_{i=1}^{n} (X_i' - x_i'^{*})(\partial g/\partial X_i')_{*}$ ifadesini hatırlayalım. Risk yüzeyinin ,$g(\underline{X})= 0$, denklemi ise birinci-mertebe yaklaşımla $\sum_{i=1}^{n} (X_i' - x_i'^{*})(\partial g/\partial X_i')_{*} = 0$ olur. Bu da dönüştürülmüş değişkenler sisteminde aktuel risk yüzeyinin, ($x_1'^{*}$, $x_2'^{*}$,....,$x_n'^{*}$) noktasındaki teğet düzlemidir. Bu teğet düzleminin, orijine olan uzaklığı ,d, analitik geometriden faydalanarak şöyle hesaplanabilir (Şekil 3.3.3-iki değişken için):

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i'^{*} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_{*}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_{*}^{2}}}$$

Bu d uzaklığını daha önce, bağıntı (3.3.8) den m_g/σ_g olarak bulmuştuk.



Şekil 3.3.3

Bölüm 3.2'deki şu ifadeleri hatırlayalım :

$$g(\underline{X}) \approx g(m_{\underline{X}}) + \sum_{i=1}^{n} (X_i - m_{X_i})\,(\partial g/\partial X_i|_m)$$

$$\beta = \frac{m_g}{\sigma_g}$$

$$m_g \approx g(m_{\underline{X}})$$

$$\sigma_g \approx \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\partial g/\partial X_i|_m)^2\, \sigma^2_{X_i}}$$

Şimdi $X_i' = \dfrac{X_i - m_{X_i}}{\sigma_{X_i}}$ değişken dönüşümü yapalım.

$X_i = \sigma_{X_i} X_i' + m_{X_i}$ ve $\dfrac{\partial g}{\partial X_i} = \dfrac{1}{\sigma_{X_i}} \cdot \dfrac{\partial g}{X_i'}$ olur.

O halde, σ_g ve dolayısiyle β, dönüştürülmüş değişkenler cinsinden şöyle ifade edilir :

$$\sigma_g \approx \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma^2_{X_i}} (\partial g/\partial X_i'{}_m)^2\, \sigma^2_{X_i}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\partial g/\partial X_i'|_m)^2}$$

$$\beta = \frac{m_g}{\sigma_g} = \frac{g(m_{\underline{X}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\partial g/\partial X_i'|_m)^2}}$$

Risk yüzeyinin (limit durum yüzeyinin) denklemi , $g(\underline{X}) = 0$, ise birinci-mertebe yaklaşımla şöyle olur :

$$g(m_{\underline{X}}) + \sum_{i=1}^{n} (X_i - m_{X_i})\,(\partial g/\partial X_i|_m) = 0$$

Bu da bir düzlemdir ve dönüştürülmüş değişkenler sistemindeki denklemi ise şöyle olur :

$$g(m_{\underline{X}}) + \sum_{i=1}^{n} (\sigma_{X_i} X'_i + m_{X_i} - m_{X_i}) \frac{1}{\sigma_{X_i}} (\partial g/\partial X'_i|_m) = 0$$

$$g(m_{\underline{X}}) + \sum_{i=1}^{n} X'_i (\partial g/\partial X'_i|_m) = 0$$

Bu düzlemin, dönüştürülmüş değişkenler sisteminin orijinine olan uzaklığı,d, ise şöyle hesaplanır :

$$d = \frac{g(m_{\underline{X}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\partial g/\partial X'_i|_m)^2}}$$

Bu d uzaklığını yukarıda $\beta = m_g/\sigma_g$ olarak bulmuştuk. Demek ki yukarıda bulduğumuz m_g/σ_g değeri gerçek anlamda

$g(m_{\underline{X}}) + \sum_{i=1} X'_i (\partial g/\partial X'_i|_m) = 0$ düzleminin, orijine olan uzaklığı d'dir. Bu uzaklığın β olabilmesi için birinci şart olarak, bu düzlemin, dönüştürülmüş değişkenler sisteminde, aktuel risk yüzeyine teğet olması gerekir. Oysa, bunu ispatlayan herhangi bir delil yoktur. Diğer bir deyişle, bu düzlemin teğet düzlem olup olmadığı belli değildir. Kaldı ki bu düzlem, aktuel risk yüzeyine teğet olsa bile, d uzaklığının β olabilmesi için ikinci şart olarak, teğet noktasının en olası risk noktası olması gerekir. Bölüm 3.3.2'de (nonlineer durum) göreceğimiz gibi β nin doğrudan,

$$\beta = -\sum_{i=1}^{n} x'^{*}_i \left(\frac{\partial g}{\partial X'_i}\right)_* \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X'_i}\right)_*^2}$$

bağıntısından bile belirlenebilmesi, ancak en olası risk noktası olan $(x'^{*}_{1}, x'^{*}_{2}, \ldots\ldots, x'^{*}_{n})$ belirlendikten sonra mümkün olur.

Bu bilgiler sayesinde, durum fonksiyonunun, tasarım değişkenlerinin ortalama değerine göre Taylor serisine açılıp, β nın birinci- mertebe yaklaşımla belirlenmesinin bir belirsizlik ortamında gerçekleştiği görülmektedir. Bu nedenle, β nın bu metodla belirlenmesinden mümkün oldukça kaçınmak gerekir.

3.3.1. DAVRANIŞ FONKSİYONUNUN LİNEER OLMASI DURUMU

Durum fonksiyonun özel bir hali olan lineer durumu gözönüne alalım. Aslında çoğu zaman durum fonksiyonu lineer bir hal arz etmemekte, etse bile genel (nonlineer) durumun çözümü için öngörülen bütün esaslar lineer durum için de geçerlidir. Bizim bu bölümde esas gayemiz nonlineer durumun özel hali olan lineer durumun çözümünden faydalanarak genel durumu (nonlineer) izah etmek ve sonuç olarak genel bir çözüm yolu önermektir.

Lineer durum (davranış) fonksiyonu genel şekliyle şöyle ifade edilebilir :

$$g(\underline{X}) = a_o + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

a_o ve a_i ler sabit sayılardır. Bu fonksiyonun limit durum denklemi de şöyledir :

$$a_o + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i = 0 \qquad (3.3.1.1)$$

Limit durum denkleminin, dönüştürülmüş değişkenlerle ifadesi ise şöyledir :

$$a_o + \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sigma_{X_i} X_i' + m_{X_i}\right) = 0 \qquad (3.3.1.1a)$$

Denklem (3.3.1.1a), üç değişken için şöyle olur :

$$a_o + a_1 (\sigma_{X_1} X_1' + m_{X_1}) + a_2 (\sigma_{X_2} X_2' + m_{X_2}) + a_3 (\sigma_{X_3} X_3' + m_{X_3}) = 0$$

Bu da X_1', X_2', X_3' koordinat sisteminde (uzayında) bir düzlemdir (Şekil 3.3.1.1)

Risk düzleminden ,denklem (3.3.1.1a), dönüştürülmüş değişkenler ,$\underline{X}'$, sisteminin orijinine olan uzaklık ,β , analitik geometriden faydalanarak şöyle hesaplanabilir.

$$\beta = \frac{a_o + \sum_{i=1}^{n} a_i m_{X_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i \sigma_{X_i})^2}} \qquad (3.3.1.2)$$

Denklem (3.3.1.2) doğrudan, Bölüm 3.3'deki denklem (3.3.4b) veya (3.3.8) den de elde edilebilir.

$$\beta = \frac{m_g}{\sigma_g} = \frac{-\sum_{i=1}^{n} x_i'^{*} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_*}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_*^2}}$$

$X_i' = \dfrac{X_i - m_{X_i}}{\sigma_{X_i}}$ olduğu için, $X_i = \sigma_{X_i} X_i' + m_{X_i}$ olur.

$$\left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_* = \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \frac{dX_i}{dX_i'}\right) = (a_i \sigma_{X_i})_* = a_i \sigma_{X_i}$$

$$-\sum_{i=1}^{n} x_i'^{*} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_* = -\sum_{i=1}^{n} a_i \sigma_{X_i} x_i'^{*}$$

Bölüm 3.2'deki bağıntı (3.2.5) e göre göçme olasılığı şöyle hesaplanabilir :

$$P_F = P(a_o + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \leqslant 0) = \Phi\left(-\frac{m_g}{\sigma_g}\right) = \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta)$$

$$P_F = 1 - \Phi\left[\frac{a_o + \sum_{i=1}^{n} a_i m_{X_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i \sigma_{X_i})^2}}\right] \qquad (3.3.1.3)$$

Dolayısıyla kalıcılık olasılığı P_S de şöyle hesaplanır :

$$P_S = 1 - P_F = \Phi(\beta)$$

$$P_S = \Phi\left[\frac{a_o + \sum_{i=1}^{n} a_i m_{X_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i \sigma_{X_i})^2}}\right] \qquad (3.3.1.4)$$

$\beta = - \sum_{i=1}^{n} x_i'^{*} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_* \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_*^2}$ bağıntısının ikinci tarafı

$\underline{x}'^{*}$ noktasında değerlendirilmelidir. Bu demektir ki β yı bulmak için $\underline{x}'^{*}$ noktasının bilinmesi gerekir. Fakat görüldüğü gibi lineer durum için bu bağıntıdan yararlanarak, β yı $\underline{x}'^{*}$ noktasından bağımsız olarak bulduk. Bunun sebebi, dönüştürülmüş değişkenler sisteminde, limit durum (risk) yüzeyinin düzlem olmasıdır. Şekil 3.3.1.1'de görüldüğü gibi, orijinden limit durum yüzeyine olan uzaklık ,β, tektir ve hesaplanışı da $\underline{x}'^{*}$ noktasından bağımsızdır. Ne var ki durum fonksiyonu nonlineer olduğu takdirde (genel hal) durum değişir. Nonlineer durum bundan sonraki Bölüm 3.3.2'de ele alınacaktır.

3.3.2. DAVRANIŞ FONKSİYONUNUN LİNEER OLMAMASI DURUMU (NONLİNEER DURUM)

Bu bölümde durum fonksiyonun ,g($\underline{X}$), nonlineer olması halinde, güvenilirliğin veya riskin doğru bir yaklaşımla belirlenmesi genel hali irdelenecektir. Nonlineer durumda limit durum denklemi de, Bölüm 3.3 Şekil 3.3.2'de görüldüğü gibi nonlineer olup; lineer durumun aksine, risk yüzeyinden dönüştürülmüş değişkenler sisteminin orijinine olan uzaklık tek (ünik) değildir.

Bölüm 3.3'te dönüştürülmüş değişkenler sisteminin orijinine minimum uzaklıktaki $\underline{x}'^{*}$ noktasının (risk yüzeyinde) en olası risk noktası olduğunu görmüştük. Risk yüzeyinin bu $\underline{x}'^{*}$ noktasındaki teğet düzlemi, aktuel risk yüzeyine yaklaşım için kullanılıp, güvenilirlik indeksi ,ß, ve dolayısiyle risk ve güvenilirlik, Bölüm 3.3.1'deki lineer durum gibi belirlenebilir. Aktuel risk yüzeyinin orijine göre konveks veya konkav olması, bu yaklaşımın güvenli veya güvensiz bölgede kalmasına neden olur (Şekil 3.3.2.1- iki değişken için).

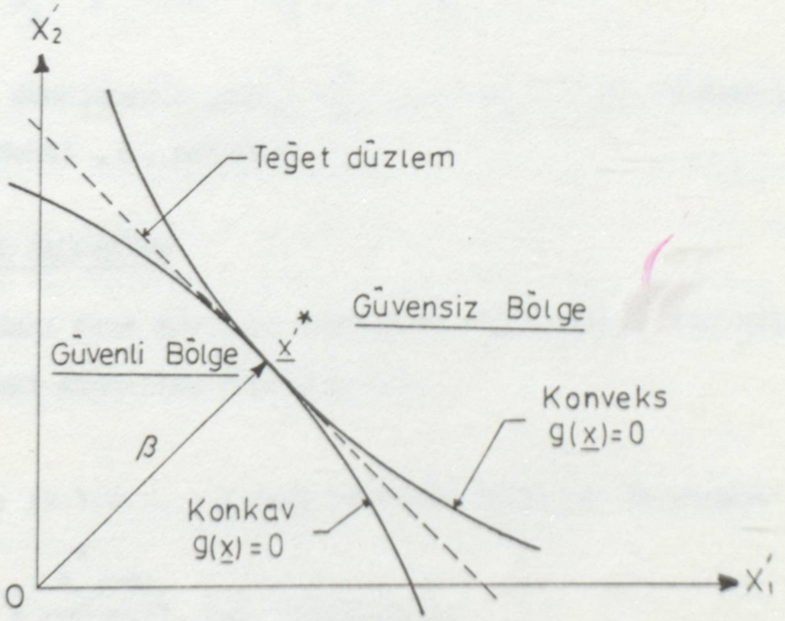
$\underline{x}'^{*} = (x_1'^{*}, x_2'^{*}, \ldots\ldots, x_n'^{*})$ noktasındaki ilgili teğet düzleminin denklemi şöyledir :

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i' - x_i'^{*}) \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_{*} = 0 \qquad (3.3.2.1)$$

Denklemdeki kısmi türevler $(x_1'^{*}, x_2'^{*}, \ldots\ldots, x_n'^{*})$ noktasında değerlendirilir.

Yukarıdaki denklem, davranış fonksiyonuna birinci-mertebe yaklaşımdan faydalanarak elde edilebilir (Bölüm 3.3-Birinci mertebe yaklaşım).

Sözünü ettiğimiz yaklaşım esasına göre, teğet düzleminden ,denklem 3.3.2.1, dönüştürülmüş değişkenler sisteminin orijinine olan uzaklık (minimum),güvenilirlik indeksini temsil eder. Bu da güvenilirliğin belirlenmesi için kullanılabilir. Fakat bu durumda (nonlineer) risk yüzeyindeki teğet noktası , $\underline{x}'^{*}$, bilinen bir nokta değildir. Bu yüzden de teğet düzlemi belirlenemiyor. Bu sebepten dolayı da güvenilirlik indeksinin, β , belirlenmesi lineer durumdaki (Bölüm 3.3.1) kadar kolay bir problem değildir. Gerçi bu durum, lineer yaklaşımı da kapsıyor. Risk yüzeyindeki teğet noktası, $\underline{x}'^{*}$, Bölüm 3.3'deki gibi, Lagrange'in çarpanlar metoduyla hesaplanabilir. Bölüm 3.3'deki ilgili sonuçlar şöyle özetlenebilir :



Şekil 3.3.2.1. Limit durum yüzeyinin $\underline{x}'^{*}$ noktasındaki teğet düzlemi.

En olası risk noktasını temsil eden $\underline{x}'^{*}$ vektörünün bileşenleri, denklem (3.3.6) dan şöyle olur :

$$x_i'^{*} = -\alpha_i^{*}\,\beta$$

Doğrultu kosinüsü olan α_i^* de denklem (3.3.7) den şöyle olur :

$$\alpha_i^* = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial X'_i}\right)_*}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X'_i}\right)_*^2}}$$

Denklemdeki kısmi türevler, $(x_1'^*, x_2'^*, \ldots\ldots, x_n'^*)$ noktasında değerlendirilir.

O halde,

$$x_i^* = \sigma_{X_i} x_i'^* + m_{X_i} = m_{X_i} - \alpha_i^* \sigma_{X_i} \beta \text{ olur.}$$

Limit durum denkleminin ,$g(x_1^*, x_2^*, \ldots\ldots, x_n^*) = 0$, çözümüyle de güvenilirlik indeksi , β , bulunur.

SAYISAL ALGORİTMA

Yukarıdaki özet sonuçlar gözönünde tutularak, β nın belirlenmesi için aşağıdaki algoritma önerilebilir.

1) x_i^* ; i= 1,2,....,n lere herhangi değerler verilerek

$$x_i'^* = \frac{x_i^* - m_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \text{ ler hesaplanır.}$$

2) $(\partial g/\partial X'_i)_*$ ve α_i ler, x_i^* değerleri kullanılarak belirlenir.

3) $x_i^* = m_{X_i} - \alpha_i \sigma_{X_i} \beta$ bağıntıları oluşturulur.

4) β cinsinden elde edilen x_i^* ler, $g(x_1^*, x_2^*, \ldots\ldots, x_n^*) = 0$ denkleminde yerlerine koyulup, β bulunur.

5) Bulunan β kullanılarak, $x_i^{\prime *} = -\alpha_i^* \beta$ tekrar hesaplanır.

6) 2 den 5 e kadar olan aşamalar, bulunan değerlerde yakınsaklık sağlanana kadar tekrar edilir.

4. SAYISAL UYGULAMALAR

Örnek 1

Bir çelik kirişin eğilme kapasitesiyle ilgili durum fonksiyonu şöyledir :

$$H = g(\underline{X}) = YZ - M$$

Durum fonksiyonunun içerdiği değişkenlere ilişkin ortalama değerler ve varyasyon katsayıları aşağıda verilmiştir. Bu değişkenlerin olasılık dağılımları normal ve bağımsız değişkenler olduğu kabul edilerek, göçme $P_F = P(H \leq 0)$ ve kalıcılık $P_S = P(H > 0)$ olasılıkları aranmaktadır.

X_i	Birim	m_{X_i}	V_{X_i}
Y= Çeliğin akma mukavemeti	MPa	280	0,125
Z= Kesit modülü (mukavemet momenti)	cm^3	820	0,05
M= Eğilme momenti	kNm	120	0,20

(ı) Doğrudan çözüm

$\sigma_Y = 280 \times 0,125 = 35$ MPa

$\sigma_Z = 820 \times 0,05 = 41$ cm^3

$\sigma_M = 120 \times 0,20 = 24$ kNm

$$Var(H) = \sigma_g^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\Big|_m \right)^2 Var(X_i)$$

$$E(H) = m_g = g(m_{\underline{X}})$$

X_i	$\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\Big|_m \right)^2 Var(X_i) \quad (kNm)^2$
Y	$(Z)^2\ Var(Y) = (820.10^{-6})^2\ (35.10^3)^2 = 823,69$
Z	$(Y)^2\ Var(Z) = (280.10^3)^2\ (41.10^{-6})^2 = 131,79$
M	$(-1)^2\ Var(M) = (-1)^2\ (24)^2 = 576$

$Var(H) = 1531,48$

$$\sigma_g = (1531,48)^{1/2} = 39,134 \quad kNm$$

$$m_g = 280.10^3 \times 820.10^{-6} - 120 = 109,6\ kNm$$

$$\beta = \frac{m_g}{\sigma_g} = \frac{109,6}{39,134} = 2,80$$

$$P_F = P(Z \leqslant 0) = 1 - \Phi(2,80) = 2,555.10^{-3}$$

$$P_S = P(Z > 0) = \Phi(2,80) = 0,997445$$

(ıı) <u>İterasyonla çözüm</u>

$$\frac{\partial g}{\partial X_i'} = \sigma_{X_i} \frac{\partial g}{\partial X_i'}$$

$$\frac{\partial g}{\partial Y'} = \sigma_Y . Z$$

$$\frac{\partial g}{\partial Z'} = \sigma_Z . Y$$

$$\frac{\partial g}{\partial M'} = -\sigma_M$$

I.İterasyon

$Y^* = \overline{Y} = 280$ MPa $\qquad (\frac{\partial g}{\partial Y'})_* = 35.10^3 x 820.10^{-6} = 28,7$

$Z^* = \overline{Z} = 820$ cm^3 $\qquad (\frac{\partial g}{\partial Z'})_* = 41.10^{-6} x\ 280.10^3 = 11,48$

$M^* = \overline{M} = 120$ kNm $\qquad (\frac{\partial g}{\partial M'})_* = -24$

$$\alpha^*_{X_i} = \frac{(\frac{\partial g}{\partial X'_i})_*}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial g}{\partial X'_i})^2_*}} \qquad X^*_i = m_{X_i} - \alpha^*_{X_i} \sigma_{X_i} \beta$$

$\alpha^*_Y = 0,733 \qquad Y^* = 280-25,655\ \beta$

$\alpha^*_Z = 0,293 \qquad Z^* = 820-12,013\ \beta$

$\alpha^*_M = -0,613 \qquad M^* = 120 + 14,712\ \beta$

$$H^* = g(\underline{x}^*) = 0$$

$$(280-25,655\ \beta)\ 10^3\ (820-12,013\ \beta)\ 10^{-6} - (120+17,712\ \beta) = 0$$

$$\underline{\beta = 2,87}$$

II.İterasyon

$Y^* = 206,37$ MPa $\qquad (\frac{\partial g}{\partial Y'})_* = 35.10^3 \times 785,52.10^{-6} = 27,49$

$Z^* = 785,52$ cm^3 $\qquad (\frac{\partial g}{\partial Z'})_* = 41.10^{-6} x206,37.10^3 = 8,46$

$M^* = 162,22$ kNm $\qquad (\frac{\partial g}{\partial M'})_* = -24$

$\alpha_Y^* = 0,734$ $\qquad\qquad Y^* = 280 - 25,69\,\beta$

$\alpha_Z^* = 0,226$ $\qquad\qquad Z^* = 820 - 9,266\,\beta$

$\alpha_M^* = -0,641$ $\qquad\qquad M^* = 120 + 15,384\,\beta$

$H^* = g(\underline{x}^*) = 0$

$$(280-25,69\,\beta)\,10^3\,(820-9,266\,\beta)\,10^{-6} - (120+15,384\,\beta) = 0$$

$$\underline{\beta = 2,86}$$

III.İterasyon

$Y^* = 206,53$ MPa $\qquad (\frac{\partial g}{\partial Y},)_* = 35.10^3 \times 793,50.10^{-6} = 27,77$

$Z^* = 793,50$ cm^3 $\qquad (\frac{\partial g}{\partial Z},)_* = 41.10^{-6} \times 206,53.10^3 = 8,47$

$M^* = 164$ kNm $\qquad (\frac{\partial g}{\partial M},)_* = -24$

$\alpha_Y^* = 0,737$ $\qquad Y^* = 280-25,795\,\beta$

$\alpha_Z^* = 0,225$ $\qquad Z^* = 820-9,225\,\beta$

$\alpha_M^* = 0,637$ $\qquad M^* = 120 + 15,288\,\beta$

$H^* = g(\underline{x}^*) = 0$

$$(280-25,795\,\beta)\,10^3\,(820-9,225\,\beta)\,10^{-6} - (120 + 15,288\,\beta) = 0$$

$$\underline{\beta = 2,86}$$

$P_F = P(H \leqslant 0) = 1 - \Phi(2,86) = 2,118.10^{-3}$

$P_S = P(H > 0) = \Phi(2,86) = 0,997882$

Örnek 2

Eksenel yük etkisinde kalan dikdörtgen kesitli ve simetrik donatılı aynı tip prefabrike kolonların oluşturduğu bir popülasyondan, rastgele örnekleme sonucu elde edilen ortalama değerler ve standart sapmalar aşağıda verilmiştir. Anılan kolonlar için durum fonksiyonu

$$Z= g(\underline{X}) = 0{,}85\, b h f_c + A_s f_y - N$$

olduğuna göre göçme $P_F = P(Z \leq 0)$ ve kalıcılık $P_S = P(Z > 0)$ olasılıkları aranmaktadır.

X_i	Birim	m_{X_i}	σ_{X_i}
b= kesit boyutu	mm	300	3
h= kesit boyutu	mm	500	5
f_c = betonun basınç mukavemeti	MPa	25	7,5
A_s = boyuna donatı alanı	mm^2	2200	100
f_y = çeliğin akma mukavemeti	MPa	250	25
N = eksenel yük	kN	1500	750

(ı) Doğrudan çözüm

X_i	$\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\Big\vert_m\right)^2 Var(X_i)$ $(kN)^2$
b	$(0{,}85.h f_c)^2\ Var(b) = (0{,}85x500x25)^2 x\ 3^2\ x\ 10^{-6} = 1016{,}02$
h	$(0{,}85\ b f_c)^2\ Var(h) = (0{,}85x300x25)^2 x\ 5^2\ x\ 10^{-6} = 1016{,}02$
f_c	$(0{,}85\ b h)^2\ Var(f_c) = (0{,}85x\ 300\ x\ 500)^2 x\ 7{,}5x10^{-6} = 914414{,}06$
A_s	$(f_y)^2\ Var(A_s) = (250)^2\ x\ 100^2\ x\ 10^{-6} = 625$
f_y	$(A_s)^2\ Var(f_y) = (2200)^2\ x\ 25^2\ x\ 10^{-6} = 3025$
N	$(-1)^2\ Var(N) = (-1)^2\ x\ 750^2 = 562500$

$$Var(Z) = \sigma_g^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \bigg|_m \right)^2 Var(X_i)$$

$$Var(Z) = \sigma_g^2 = 1482596{,}1 \quad (kN)^2$$

$$\sigma_Z = (1482596{,}1)^{1/2} = 1217{,}619 \ kN$$

$$E_Z = m_g = g(m_{\underline{X}})$$

$$m_g = (0{,}85x300x500x25+2200x250) \times 10^{-3} - 1500 = 2237{,}5 \ kN$$

$$\beta = \frac{m_g}{\sigma_g} = \frac{2237{,}5}{1217{,}619} = 1{,}84$$

$$P_F = P(Z \leqslant 0) = 1 - \Phi(1{,}84) = 3{,}2884 \ .10^{-2}$$

$$P_S = P(Z > 0) = \Phi(1{,}84) = 0{,}967116$$

(ıı) <u>İterasyonla çözüm</u>

$$\frac{\partial g}{\partial X_i'} = \sigma_{X_i} \frac{\partial g}{\partial X_i}$$

$$\frac{\partial g}{\partial b'} = \sigma_b (0{,}85 \ h f_c)$$

$$\frac{\partial g}{\partial h'} = \sigma_h (0{,}85 \ b f_c)$$

$$\frac{\partial g}{\partial f_c'} = \sigma_{f_c} (0{,}85 \ b h)$$

$$\frac{\partial g}{\partial A_s'} = \sigma_{A_s} (f_y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial f_y'} = \sigma_{f_y} (A_s)$$

$$\frac{\partial g}{\partial N'} = \sigma_N (-1) = -\sigma_N$$

I. İterasyon

$b^* = \overline{b} = 300$ mm $\qquad \left(\dfrac{\partial g}{\partial b'}\right)_* = 3x(0{,}85x500x25)x\,10^{-3} = 31{,}875$ kN

$h^* = \overline{h} = 500$ mm $\qquad \left(\dfrac{\partial g}{\partial h'}\right)_* = 5x(0{,}85x300x25)x\,10^{-3} = 31{,}875$ "

$f_c^* = \overline{f}_c = 25$ MPa $\qquad \left(\dfrac{\partial g}{\partial f_c'}\right)_* = 7{,}5x\ (0{,}85x300\,x\,500)\,x\,10^{-3} = 956{,}25$ "

$A_s^* = \overline{A}_s = 2200$ mm^2 $\qquad \left(\dfrac{\partial g}{\partial A_s'}\right)_* = 100\,x\,(250)\,x\,10^{-3} = 25$ "

$f_y^* = \overline{f}_y = 250$ MPa $\qquad \left(\dfrac{\partial g}{\partial f_y'}\right)_* = 25\,x\,(2200)\,x\,10^{-3} = 55$ "

$N^* = \overline{N} = 1500$ kN $\qquad \left(\dfrac{\partial g}{\partial N'}\right)_* = -750$

$$\alpha^*_{X_i} = \frac{\left(\dfrac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_*}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_*^2}} \qquad X_i^* = m_{X_i} - \alpha^*_{X_i}\,\sigma_{X_i}\cdot\beta$$

$\alpha^*_b = 0{,}026$ $\qquad b^* = 300 - 0{,}078\,\beta$

$\alpha^*_h = 0{,}026$ $\qquad h^* = 500 - 0{,}13\,\beta$

$\alpha^*_{f_c} = 0{,}785$ $\qquad f_c^* = 25 - 5{,}888\,\beta$

$\alpha^*_{A_s} = 0{,}021$ $\qquad A_s^* = 2200 - 2{,}1\,\beta$

$\alpha^*_{f_y} = 0{,}045$ $\qquad f_y^* = 250 - 1{,}125\,\beta$

$\alpha^*_N = -0{,}616$ $\qquad N^* = 1500 + 462\,\beta$

$$Z^* = g(\underline{x}^*) = 0$$

$$\left[\,0{,}85 \times (300-0{,}078\,\beta)\,(500-0{,}13\,\beta)\,(25-5{,}888\,\beta) + (2200-2{,}1\,\beta)\,(250-1{,}125\,\beta)\right] \times 10$$

$$-(1500 + 462\beta) = 0$$

$$\underline{\beta = 1{,}84}$$

<u>II.İterasyon</u>

$b^* = 299{,}86$ mm $\qquad \left(\dfrac{\partial g}{\partial b'}\right)_* = 3 \times (0{,}85 \times 499{,}76 \times 14{,}17) \times 10^{-3} = 18{,}058$

$h^* = 499{,}76$ mm $\qquad \left(\dfrac{\partial g}{\partial h'}\right)_* = 5 \times (0{,}85 \times 299{,}86 \times 14{,}17) \times 10^{-3} = 18{,}058$

$f_c^* = 14{,}17$ MPa $\qquad \left(\dfrac{\partial g}{\partial f_c'}\right)_* = 7{,}5 \times (0{,}85 \times 299{,}86 \times 499{,}76) \times 10^{-3} = 955{,}345$

$A_s^* = 2196{,}14$ mm^2 $\qquad \left(\dfrac{\partial g}{\partial A_s'}\right)_* = 100 \times (247{,}93) \times 10^{-3} = 24{,}793$

$f_y^* = 247{,}93$ MPa $\qquad \left(\dfrac{\partial g}{\partial f_y'}\right)_* = 25 \times (2196{,}14) \times 10^{-3} = 54{,}904$

$N = 2350{,}08$ kN $\qquad \left(\dfrac{\partial g}{\partial N'}\right)_* = -750$

$\alpha_b^* = 0{,}015 \qquad b^* = 300-0{,}045\,\beta$

$\alpha_h^* = 0{,}015 \qquad h^* = 500-0{,}075\,\beta$

$\alpha_{f_c}^* = 0{,}785 \qquad f_c^* = 25-5{,}888\,\beta$

$\alpha_{A_s}^* = 0{,}020 \qquad A_s^* = 2200-2\,\beta$

$\alpha_{f_y}^* = 0{,}045 \qquad f_y^* = 250-1{,}125\,\beta$

$\alpha_N^* = -0{,}617 \qquad N^* = 1500 + 462{,}75\,\beta$

$$Z^* = g(\underline{x}^*) = 0$$

$$[\,0,85\, x\,(300-0,045\,\beta)\,(500-0,075\,\beta)\,(25-5,888\,\beta) + (2200-2\,\beta)\,(250-1,125\,\beta)\,]\; x10^{-3}$$

$$-(1500+462,75\,\beta) = 0$$

$$\underline{\beta = 1,84}$$

$$P_F = P(Z \leqslant 0) = 1 - \Phi\,(1,84) = 3,2884.10^{-2}$$

$$P_S = P(Z > 0) = \Phi\,(1,84) = 0,967116$$

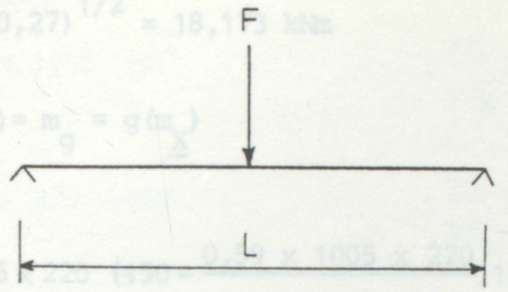
Örnek 3

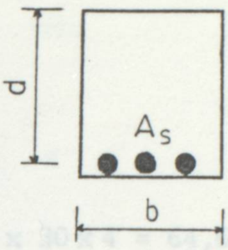
Şekilde yükleme biçimi ve geometrisi gösterilen kirişin eğilme momentiyle ilgili durum fonksiyonu şöyledir.

$$Z = g(\underline{X}) = A_s\, f_y\,(d - \frac{0,59\, A_s f_y}{b\, f_c}) - \frac{F\,L}{4}$$

Durum fonksiyonunun içerdiği değişkenlere ilişkin ortalama değerler ve standart sapmalar aşağıda verilmiştir. Bu değişkenlerin olasılık dağılımları normal ve bağımsız değişkenler olduğu kabul edilerek, göçme $P_F = P(Z \leqslant 0)$ ve kalıcılık $P_S = P(Z > 0)$ olasılıkları aranmaktadır.

X_i	Birim	m_{X_i}	σ_{X_i}
A_s = boyuna donatı alanı	mm^2	1005	50
f_y = çeliğin akma mukavemeti	MPa	220	22
d = kesit boyutu	mm	450	7
b = kesit boyutu	mm	300	0
f_c = betonun basınç mukavemeti	MPa	20	6
F = tekil yük	kN	30	15
L = kiriş açıklığı	m	4	0





(ı) Doğrudan çözüm

$$Var(Z) = \sigma_g^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X}\Big|_m \right)^2 Var(X_i)$$

X_i	$\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\Big|_m \right)^2 Var(X_i)$ $(kNm)^2$
A_s	$\left(f_y d - \frac{2 \times 0,59.A_s f_y^2}{b.f_c}\right)^2 Var(A_s) = \left(220x450 - \frac{2x0,59x1005x220^2}{300 \times 20}\right)^2 \times 50^2 \times 10^{-12} = 20$
f_y	$\left(A_s.d - \frac{2 \times 0,59.A_s^2.f_y}{b.f_c}\right)^2 Var(f_y) = \left(1005x450 - \frac{2x0,59x1005^2x220}{300x20}\right)^2 \times 22^2 \times 10^{-12} = 80,79$
d	$(A_s.f_y)^2 \ Var(d) = (1005x220)^2 \times 7^2 \times 10^{-12} = 2,40$
f_c	$\left(\frac{0,59.A_s^2.f_y^2}{b.f_c^2}\right)^2 Var(f_c) = \left(\frac{0,59x1005^2x220^2}{300x20^2}\right)^2 \times 6^2 \times 10^{-12} = 2,08$
F	$(-0,25.L)^2 \ Var(F) = (-0,25x4)^2 \times 15^2 = 225$

$$Var(Z) = 330,27 \ (kNm)^2$$

$$\sigma_g = (330,27)^{1/2} = 18,173 \text{ kNm}$$

$$E(Z) = m_g = g(m_{\underline{X}})$$

$$m_g = 1005 \times 220 \left(450 - \frac{0,59 \times 1005 \times 220}{300 \times 20}\right) 10^{-6} - 0,25 \times 30 \times 4 = 64,69 \text{ kNm}$$

$$\beta = \frac{m_g}{\sigma_g} = \frac{64,69}{18,173} = 3,56$$

$$P_F = P(Z \leqslant 0) = 1 - \Phi(3,56) = 1,85.10^{-4}$$

$$P_S = P(Z > 0) = \Phi(3,56) = 0,999815$$

(ıı) <u>İterasyonla çözüm</u>

$$\frac{\partial g}{\partial X_i'} = \sigma_{X_i} \frac{\partial g}{\partial X_i}$$

$$\frac{\partial g}{\partial A_s'} = \sigma_{A_s} \left(f_y d - \frac{2 \times 0,59.A_s.f_y^2}{b.f_c}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial f_y'} = \sigma_{f_y} \left(A_s.d - \frac{2 \times 0,59.A_s^2.f_y}{b.f_c}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial d'} = \sigma_b (A_s.f_y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial f_c'} = \sigma_{f_c} \left(\frac{0,59.A_s^2.f_y^2}{b.f_c^2}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial F'} = \sigma_F (-0,25\ L)$$

I.İterasyon

$A_s^* = \overline{A}_s = 1005 \ mm^2$ $\qquad (\frac{\partial g}{\partial A_s'})_* = 4,47 \ kNm$

$f_y^* = \overline{f}_y = 220 \ MPa$ $\qquad (\frac{\partial g}{\partial f_y'})_* = 8,99$ "

$d^* = \overline{d} = 450 \ mm$ $\qquad (\frac{\partial g}{\partial d'})_* = 1,55$ "

$f_c^* = \overline{f}_c = 20 \ MPa$ $\qquad (\frac{\partial g}{\partial f_c'})_* = 1,44$ "

$F^* = \overline{f} = 30 \ kN$ $\qquad (\frac{\partial g}{\partial F'})_* = -15$ "

$$\alpha_{X_i}^* = \frac{(\frac{\partial g}{\partial X_i'})_*}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial g}{\partial X_i'})_*^2}} \qquad X_i^* = m_{X_i} - \alpha_{X_i}^* \sigma_{X_i} \ . \beta$$

$\alpha_{A_s}^* = 0,246$ $\qquad A_s^* = 1005 - 12,30 \ \beta$

$\alpha_{f_y}^* = 0,495$ $\qquad f_y^* = 220 - 10,89 \ \beta$

$\alpha_d^* = 0,085$ $\qquad d^* = 450 - 0,595 \ \beta$

$\alpha_{f_c}^* = 0,079$ $\qquad f_c^* = 20 - 0,474 \ \beta$

$\alpha_F^* = -0,825$ $\qquad F^* = 30 + 12,375 \ \beta$

$$Z^* = g(\underline{x}^*) = 0$$

$$(1005-12,30\,\beta)\,(220-10,89\,\beta)\left[(450-0,595\,\beta) - \frac{0,59\,(1005-12,3\,\beta)\,(220-10,89\,\beta)}{300\,(20-0,474\,\beta)}\right].10$$

$$-0,25x4\,(30+12,375\,\beta) = 0$$

$$\underline{\beta = 3,60}$$

<u>II.İterasyon</u>

$A_s^* = 960,72 \text{ mm}^2$ $\qquad (\frac{\partial g}{\partial A_s'})_* = 3,71$ kNm

$f_y^* = 180,80$ MPa $\qquad (\frac{\partial g}{\partial f_y'})_* = 8,68$ "

$d^* = 447,86$ mm $\qquad (\frac{\partial g}{\partial d'})_* = 1,22$ "

$f_c^* = 18,29$ MPa $\qquad (\frac{\partial g}{\partial f_c'})_* = 1,06$ "

$F^* = 74,55$ kN $\qquad (\frac{\partial g}{\partial F'})_* = -15$ "

$\alpha_{A_s}^* = 0,208$ $\qquad A_s^* = 1005-10,40\ \beta$

$\alpha_{f_y}^* = 0,488$ $\qquad f_y^* = 220-10,736\ \beta$

$\alpha_d^* = 0,069$ $\qquad d^* = 450-0,483\ \beta$

$\alpha_{f_c}^* = 0,060$ $\qquad f_c^* = 20-0,36\ \beta$

$\alpha_F^* = -0,843$ $\qquad F^* = 30 + 12,645\ \beta$

$$Z^* = g(\underline{x}^*) = 0$$

$$(1005-10,40\ \beta)(220-10,736\beta)\left[(450-0,483\beta)-\frac{0,59(1005-10,40\ \beta)(220-10,736\beta)}{300(20-0,36\ \beta)}\right]10$$

$$-0,25 \times 4(30+12,645\beta) = 0$$

$$\underline{\beta = 3,59}$$

III.İterasyon

$A_s^* = 967,66 \ mm^2$ $\qquad \left(\frac{\partial g}{\partial A_s'}\right)_* = 3,73 \quad kNm$

$f_y^* = 181,46 \ MPa$ $\qquad \left(\frac{\partial g}{\partial f_y'}\right)_* = 8,76 \quad "$

$d^* = 448,27 \ mm$ $\qquad \left(\frac{\partial g}{\partial d'}\right)_* = 1,23 \quad "$

$f_c^* = 18,71 \ MPa$ $\qquad \left(\frac{\partial g}{\partial f_c'}\right)_* = 1,04 \quad "$

$F^* = 75,40 \ kN$ $\qquad \left(\frac{\partial g}{\partial F'}\right)_* = -15 \quad "$

$\alpha_{A_s}^* = 0,209$ $\qquad A_s^* = 1005-10,45\ \beta$

$\alpha_{f_y}^* = 0,491$ $\qquad f_y^* = 220-10,802\ \beta$

$\alpha_d^* = 0,069$ $\qquad d^* = 450-0,483\ \beta$

$\alpha_{f_c}^* = 0,058$ $\qquad f_c^* = 20-0,348\ \beta$

$\alpha_F^* = -0,841$ $\qquad F^* = 30 + 12,615\ \beta$

$$Z^* = g(\underline{x}^*) = 0$$

$$(1005-10,45\beta)(220-10,802\beta)\left[(450-0,483\beta) - \frac{0{,}59(1005-10,45\beta)(220-10,802\beta)}{300(20-0,348\beta)}\right] 10^{-}$$

$$-0,25 \times 4\ (30+12,615\ \beta) = 0$$

$$\underline{\beta = 3,59}$$

$$P_F = P(Z \leqslant 0) = 1 - \Phi(3,59) = 1,65.10^{-4}$$

$$P_S = P(Z > 0) = \Phi(3,59) = 0,999835$$

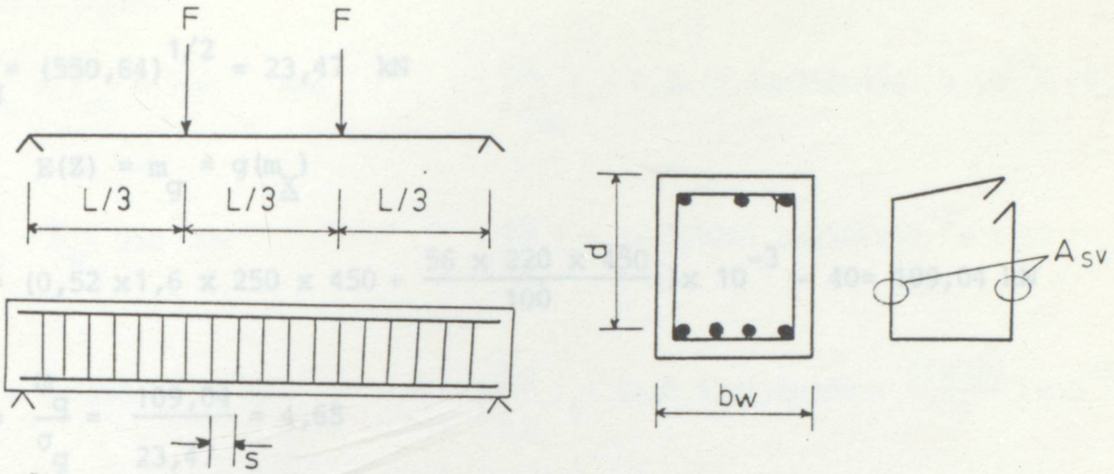
Örnek 4

Şekilde yükleme biçimi ve geometrisi gösterilen aynı tip prefabrike kirişlerin oluşturduğu bir popülasyondan rastgele örnekleme sonucu elde edilen ortalama değerler ve standart sapmalar aşağıda verilmiştir. Anılan kirişlerin kesme güvenilirliğiyle ilgili durum fonksiyonu şöyledir :

$$Z = g(\underline{X}) = V_r - V = 0,52\, f_{ct}\, b_w\, d + \frac{A_{sv}\, f_{yv}\, d}{s} - F$$

Durum fonksiyonu değişkenlerinin olasılık dağılımları normal ve bağımsız değişkenler olduğu kabul edilerek, kiriş popülasyonuna ilişkin kırılma olasılığı $P_F = P(Z \leqslant 0)$ ve güvenilirliği $P_S = P(Z > 0)$ aranmaktadır.

X_i	Birim	m_{X_i}	σ_{X_i}
f_{ct} = betonun eksenel çekme mukavemeti	MPa	1,6	0,2
b_w = kesit genişliği	mm	250	3
d = etkili derinlik	mm	450	3
A_{sv} = etriye enkesit alanı	mm^2	56	2
f_{yv} = etriye çeliğinin akma mukavemeti	MPa	220	10
s = etriye aralığı	mm	100	2
F = tekil yük	kN	40	20



(ı) Doğrudan çözüm

$$Var(Z) = \sigma_g^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\bigg|_m \right)^2 Var(X_i)$$

X_i	$\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\big|_m \right)^2 Var(X_i)$ $(kN)^2$
f_{ct}	$(0{,}52\, b_w d)^2\, Var(f_{ct}) = (0{,}52 x 250 x 450)^2 x (0{,}2)^2 x 10^{-6} = 136{,}89$
b_w	$(0{,}52\, f_{ct} d)^2\, Var(b_w) = (0{,}52 x 1{,}6 x 450)^2 x (3)^2 x 10^{-6} = 1{,}26$
d	$\left(0{,}52\, f_{ct} b_w + \frac{A_{sv} f_{yv}}{s}\right)^2 Var(d) = \left(0{,}52 x 1{,}6 x 250 + \frac{56 x 220}{100}\right)^2 x (3)^2 x 10^{-6} = 0{,}99$
A_{sv}	$\left(\frac{f_{yv} d}{s}\right)^2 Var(A_{sv}) = \left(\frac{220 x 450}{100}\right)^2 x (2)^2 x 10^{-6} = 3{,}92$
f_{yv}	$\left(\frac{A_{sv} d}{s}\right)^2 Var(f_{yv}) = \left(\frac{56 x 450}{100}\right)^2 x (10)^2 x 10^{-6} = 6{,}35$
s	$\left(-\frac{A_{sv} f_{yv} d}{s^2}\right)^2 Var(s) = \left(-\frac{56 x 220 x 450}{100^2}\right)^2 x (2)^2 x 10^{-6} = 1{,}23$
F	$(-1)^2\, Var(F) = (-1)^2 x (20)^2 = 400$

$$Var(Z) = \sigma_g^2 = 550{,}64 \quad (kN)^2$$

$$\sigma_g = (550,64)^{1/2} = 23,47 \text{ kN}$$

$$E(Z) = m_g = g(m_{\underline{X}})$$

$$m_g = (0,52 \times 1,6 \times 250 \times 450 + \frac{56 \times 220 \times 450}{100}) \times 10^{-3} - 40 = 109,04 \text{ kN}$$

$$\beta = \frac{m_g}{\sigma_g} = \frac{109,04}{23,47} = 4,65$$

$$P_F = P(Z \leqslant 0) = 1 - \Phi(4,65) = 2,0.10^{-6}$$

$$P_S = P(Z > 0) = \Phi(4,65) = 0,999998$$

(ıı) <u>İterasyonla çözüm</u>

$$\frac{\partial g}{\partial f_{ct}} = \sigma_{f_{ct}} (0,52x\ b_w x\ d)$$

$$\frac{\partial g}{\partial b_w} = \sigma_{b_w} (0,52x\ f_{ct} x\ d)$$

$$\frac{\partial g}{\partial d} = \sigma_d (0,52.f_{ct}.b_w + \frac{A_{sv}.f_{yv}}{s})$$

$$\frac{\partial g}{\partial A'_{sv}} = \sigma_{A_{sv}} (\frac{f_{yv} x d}{s})$$

$$\frac{\partial g}{\partial f_{yv}} = \sigma_{f_{yv}} (\frac{A_{sv}.d}{s})$$

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \sigma_s (-\frac{A_{sv}.f_{yv}.d}{s^2})$$

$$\frac{\partial g}{\partial F} = \sigma_F (-1) = -\sigma_F$$

I. İterasyon

$f^{*}_{ct} = \bar{f}_{ct} = 1,6$ MPa

$\left(\frac{\partial g}{\partial f'_{ct}}\right)_{*} = 0,2x(0,52x250x450) \times 10^{-3} = 11,7$ kN

$b^{*}_{w} = \bar{b}_{w} = 250$ mm

$\left(\frac{\partial g}{\partial b'_{w}}\right)_{*} = 3x(0,52x1,6x450)x10^{-3} = 1,12$ "

$d^{*} = \bar{d} = 450$ mm

$\left(\frac{\partial g}{\partial d'}\right)_{*} = 3x(0,52x1,6x250 + \frac{56x220}{100})\,x10^{-3} = 0,99$

$A^{*}_{sv} = \bar{A}_{sv} = 56$ mm^{2}

$\left(\frac{\partial g}{\partial A'_{sv}}\right)_{*} = 2 \times \left(\frac{220 \times 450}{100}\right) \times 10^{-3} = 1,98$ "

$f^{*}_{yv} = \bar{f}_{yv} = 220$ MPa

$\left(\frac{\partial g}{\partial f'_{yv}}\right)_{*} = 10 \times \left(\frac{56 \times 450}{100}\right) \times 10^{-3} = 2,52$ "

$s^{*} = \bar{s} = 100$ mm

$\left(\frac{\partial g}{\partial s'}\right)_{*} = 2 \times \left(-\frac{56 \times 220 \times 450}{100^{2}}\right) \times 10^{-3} = -1,11$ "

$F^{*} = \bar{F} = 40$ kN

$\left(\frac{\partial g}{\partial F'}\right)_{*} = -20$ "

$$\alpha^{*}_{X_i} = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial X'_i}\right)_{*}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial X'_i}\right)^{2}_{*}}}$$

$$X^{*}_{i} = m_{X_i} - \alpha^{*}_{X_i} \cdot \sigma_{X_i} \cdot \beta$$

$\alpha^{*}_{f_{ct}} = 0,499$

$f^{*}_{ct} = 1,6 - 0,10\ \beta$

$\alpha^{*}_{b_w} = 0,048$

$b^{*}_{w} = 250 - 0,144\ \beta$

$\alpha^{*}_{d} = 0,042$

$d^{*} = 450 - 0,126\ \beta$

$\alpha^{*}_{A_{sv}} = 0,084$

$A^{*}_{sv} = 56 - 0,168\ \beta$

$\alpha^*_{f_{yv}} = 0,107$ $\qquad$ $f^*_{yv} = 220 - 1,07\ \beta$

$\alpha^*_{s} = -0,047$ $\qquad$ $s^* = 100 + 0,094\ \beta$

$\alpha^*_{F} = -0,852$ $\qquad$ $F^* = 40 + 17,04\ \beta$

$$Z^* = g(\underline{x}^*) = 0$$

$$\Big[\,0,52(1,6 - 0,10\beta)(250 - 0,144\beta)(450 - 0,126\beta) + \frac{(56 - 0,168\beta)(220 - 1,07\beta)(450 - 0,126\beta)}{(100 + 0,094\beta)}\Big] \times 10^{-3} - (40 + 17,04\beta) = 0$$

$$\underline{\beta = 4,65}$$

<u>II.İterasyon</u>

$f^*_{ct} = 1,14$ MPa $\qquad$ $\left(\dfrac{\partial g}{\partial f'_{ct}}\right)_* = 0,2(0,52 \mathrm{x} 249,33 \mathrm{x} 449,41) 10^{-3} = 11,65$ kN

$b^*_w = 249,33$ mm $\qquad$ $\left(\dfrac{\partial g}{\partial b'_w}\right)_* = 3(0,52 \mathrm{x}\ 1,14 \mathrm{x} 449,41) \mathrm{x}\ 10^{-3} = 0,80$ "

$d^* = 449,41$ mm $\qquad$ $\left(\dfrac{\partial g}{\partial d'}\right)_* = 3\left(0,52 \mathrm{x} 1,14 \mathrm{x} 249,33 + \dfrac{55,22 \mathrm{x} 215,02}{100,42}\right) 10^{-3} = 0,8$

$A^*_{sv} = 55,22$ mm^2 $\qquad$ $\left(\dfrac{\partial g}{\partial A'_{sv}}\right)_* = 2 \mathrm{x} \left(\dfrac{215,02 \mathrm{x}\ 449,41}{100,44}\right) \mathrm{x}\ 10^{-3} = 1,92$ "

$f^*_{yv} = 215,02$ MPa $\qquad$ $\left(\dfrac{\partial g}{\partial f'_{yv}}\right)_* = 10 \mathrm{x} \left(\dfrac{55,22 \mathrm{x} 449,41}{100,44}\right) \mathrm{x}\ 10^{-3} = 2,47$

$s^* = 100,44$ mm $\qquad$ $\left(\dfrac{\partial g}{\partial s'}\right)_* = 2 \mathrm{x} \left(-\dfrac{55,22 \mathrm{x} 215,02 \mathrm{x} 449,41}{100,44^2}\right) \mathrm{x}\ 10^{-3} = -1,06$

$F^* = 119,24$ kN $\qquad$ $\left(\dfrac{\partial g}{\partial F'}\right)_* = -20$ kN

$\alpha^*_{f_{ct}} = 0{,}498$ $\quad f^*_{ct} = 1{,}6 - 0{,}10\ \beta$

$\alpha^*_{b_w} = 0{,}034$ $\quad b^*_w = 250 - 0{,}102\ \beta$

$\alpha^*_d = 0{,}034$ $\quad d^* = 450 - 0{,}102\ \beta$

$\alpha^*_{A_{sv}} = 0{,}082$ $\quad A^*_{sv} = 56 - 0{,}164\ \beta$

$\alpha^*_{f_{yv}} = 0{,}106$ $\quad f^*_{yv} = 220 - 1{,}06\ \beta$

$\alpha^*_s = -0{,}045$ $\quad s^* = 100 + 0{,}09\ \beta$

$\alpha^*_F = -0{,}854$ $\quad F^* = 40 + 17{,}08\ \beta$

$$Z^* = g(\underline{x}^*) = 0$$

$$\Big[0{,}52\ (1{,}6 - 0{,}10\,\beta)\ (250 - 0{,}102\,\beta)(450 - 0{,}102\,\beta) + \frac{(56 - 0{,}164\,\beta)(220 - 1{,}06\,\beta)(450 - 0{,}102\,\beta)}{(100 + 0{,}09\,\beta)} \Big] \times 10^{-3} - (40 + 17{,}08\,\beta) = 0$$

$$\underline{\beta = 4{,}65}$$

$$P_F = P(Z \leqslant 0) = 1 - \Phi(4{,}65) = 2{,}0.10^{-6}$$

$$P_S = P(Z > 0) = \Phi(4{,}65) = 0{,}999998$$

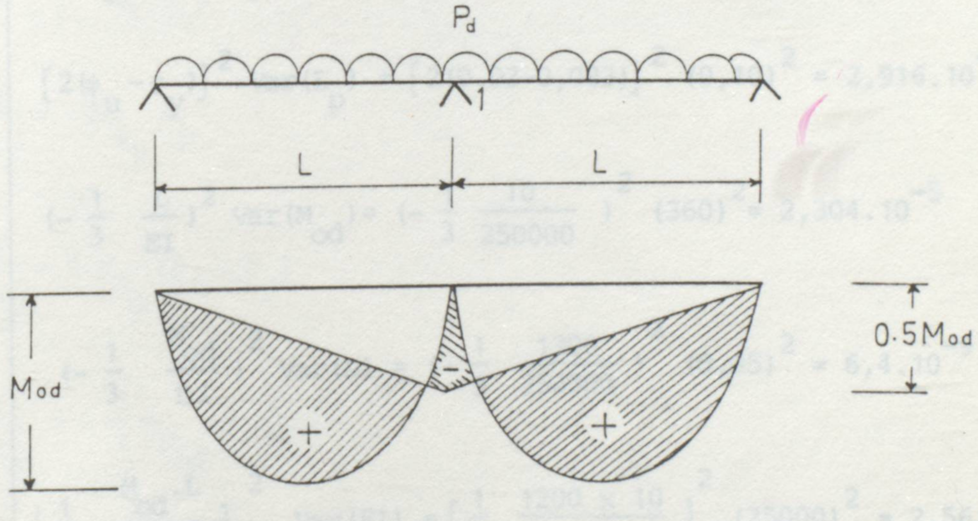
Örnek 5

Kabul edilen limit tasarım momentleri dağılımı şekilde gösterilen kirişte; dağılımın oluşabilmesiyle ilgili durum fonksiyonu şöyledir :

$$Z = g(\underline{X}) = \theta_a - \theta_1 = [\,(\phi_u - \phi_y)\ 2\ L_p] - [\frac{1}{3} \cdot \frac{M_{od}\ L}{E\ I}\,]$$

Durum fonksiyonunun içerdiği rastgele değişkenlere ilişkin ortalama değerler ve varyasyon katsayıları aşağıda verilmiştir. β güvenilirlik indeksi ve kabul edilen tasarım momentleri dağılımının gerçekleşmemesi $P_F = P(Z \leq 0)$,risk, ve gerçekleşmesi $P_S = P(Z > 0)$,güvenilirlik, olasılıkları aranmaktadır.

X_i	Birim	m_{X_i}	V_{X_i}
ϕ_i = son limit eğriliği	rad/m	0,03	0,05
ϕ_y = akma limiti eğriliği	rad/m	0,003	0,05
L_p = plastik mafsal boyu	m	0,50	0,20
M_{od} = tasarım momenti	kNm	1200	0,30
L = açıklık uzunluğu	m	10	0,005
EI = eğilme rijitliği	kNm^2	250000	0,10



(ı) Doğrudan çözüm

$\sigma_{X_i} = V_{X_i}\, m_{X_i}$

$\sigma_{\phi_u} = 0,05 \times 0,03 = 0,0015$ rad/m

$\sigma_{\phi_y} = 0,05 \times 0,003 = 0,00015$ rad/m

$\sigma_{L_p} = 0,20 \times 0,50 = 0,10 \quad m$

$\sigma_{M_{od}} = 0,30 \times 1200 = 360 \quad kNm$

$\sigma_{L} = 0,005 \times 10 = 0,05 \quad m$

$\sigma_{EI} = 0,10 \times 250000 = 25000 \quad kNm^2$

$$Var(Z) = \sigma_g^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\Big|_m \right)^2 Var(X_i)$$

X_i	$\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\Big|_m \right)^2 Var(X_i)$ $(rad)^2$
ϕ_u	$(2L_p)^2 \, Var(\phi_u) = (2x0,5)^2 \, (0,0015)^2 = 2,25.10^{-6}$
ϕ_y	$(-2L_p)^2 \, Var(\phi_y) = (-2x0,5)^2 \, (0,00015)^2 = 2,25.10^{-8}$
L_p	$[2(\phi_u - \phi_y)]^2 \, Var(L_p) = [2(0,03-0,003)]^2 \, (0,10)^2 = 2,916.10^{-5}$
M_{od}	$(-\frac{1}{3} \, \frac{L}{EI})^2 \, Var(M_{od}) = (-\frac{1}{3} \, \frac{10}{250000})^2 \, (360)^2 = 2,304.10^{-5}$
L	$(-\frac{1}{3} \, \frac{M_{od}}{EI})^2 \, Var(L) = (-\frac{1}{3} \, \frac{1200}{250000})^2 \, (0,05)^2 = 6,4.10^{-9}$
EI	$[\frac{1}{3} \, \frac{M_{od}.L}{(EI)^2}]^2 \, Var(EI) = [\frac{1}{3} \, \frac{1200 \times 10}{(250000)^2}]^2 \, (25000)^2 = 2,56.10^{-6}$

$$Var(Z) = \sigma_g^2 = 5,70389.10^{-5} \quad (rad)^2$$

$$\sigma_g = (5,70389.10^{-5})^{1/2} = 7,552.10^{-3} \quad rad$$

$$E(Z) = m_g = g(\underline{m_X})$$

$$m_g = [(0{,}03 - 0{,}003) \times 2 \times 0{,}5] - \left(\frac{1}{3}\ \frac{1200 \times 10}{250000}\right) = 0{,}011 \quad \text{rad}$$

$$\beta = \frac{m_g}{\sigma_g} = \frac{0{,}011}{7{,}552.10^{-3}} = 1{,}46$$

$$P_F = P(Z \leqslant 0) = 1 - \Phi\,(1{,}46) = 0{,}072145$$

$$P_S = P(Z > 0) = \Phi\,(1{,}46) = 0{,}927855$$

(ıı) <u>İterasyonla çözüm</u>

$$\frac{\partial g}{\partial X_i'} = \sigma_{X_i} \frac{\partial g}{\partial X_i}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \phi_u'} = 2\,\sigma_{\phi_u}\, L_p$$

$$\frac{\partial g}{\partial \phi_y'} = -2\sigma_{\phi_y}\, L_p$$

$$\frac{\partial g}{\partial L_p'} = 2\,\sigma_{L_p}\,(\phi_u - \phi_y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial M_{od}'} = -\frac{1}{3}\,\sigma_{M_{od}} \left(\frac{L}{EI}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial L'} = -\frac{1}{3}\,\sigma_L \left(\frac{M_{od}}{EI}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial EI'} = \frac{1}{3}\,\sigma_{EI} \left(\frac{M_{od}\,L}{EI^2}\right)$$

I. İterasyon

$\phi_u^* = \bar{\phi}_u = 0{,}03$ rad/m $\qquad (\frac{\partial g}{\partial \phi_u'})_* = 2x0{,}0015x0{,}5 = 1{,}5 \times 10^{-3}$ rad

$\phi_y^* = \bar{\phi}_y = 0{,}003$ rad/m $\qquad (\frac{\partial g}{\partial \phi_y'})_* = -2x0{,}00015 \times 0{,}5 = -1{,}5.10^{-4}$ "

$L_p^* = \bar{L}_p = 0{,}5$ m $\qquad (\frac{\partial g}{\partial L_p'})_* = 2x0{,}10(0{,}03-0{,}003) = 5{,}4.10^{-3}$ "

$M_{od}^* = \bar{M}_{od} = 1200$ kNm $\qquad (\frac{\partial g}{\partial M_{od}'})_* = -\frac{1}{3} \times 360 \left(\frac{10}{250000}\right) = -4{,}8.10^{-3}$ "

$L^* = \bar{L} = 10$ m $\qquad (\frac{\partial g}{\partial L'})_* = -\frac{1}{3} \times 0{,}05 \left(\frac{1200}{250\,000}\right) = -8.10^{-5}$ "

$EI^* = \overline{EI} = 250000$ kNm^2 $\qquad (\frac{\partial g}{\partial EI'})_* = \frac{1}{3} \times 25000 \left(\frac{1200 \times 10}{250\,000^2}\right) = 1{,}6 \times 10^{-3}$ rad

$$\alpha_{X_i}^* = \frac{(\frac{\partial g}{\partial X_i'})_*}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial g}{\partial X_i'})_*^2}} \qquad X_i^* = m_{X_i} - \alpha_{X_i}^* \sigma_{X_i} \cdot \beta$$

$\alpha_{\phi_u}^* = 0{,}1986 \qquad \phi_u^* = 0{,}03 - 2{,}979.10^{-4}\,\beta$

$\alpha_{\phi_y}^* = -0{,}0199 \qquad \phi_y^* = 0{,}003 + 2{,}985.10^{-6}\,\beta$

$\alpha_{L_p}^* = 0{,}715 \qquad L_p^* = 0{,}50 - 7{,}15.10^{-2}\,\beta$

$\alpha_{M_{od}}^* = -0{,}6356 \qquad M_{od}^* = 1200 + 228{,}82\,\beta$

$\alpha^*_L = -0,0106$ $\qquad$ $L^* = 10 + 5,3.10^{-4}\ \beta$

$\alpha^*_{EI} = 0,2119$ $\qquad$ $EI^* = 250000 - 5297,5\ \beta$

$Z^* = g(\underline{x}^*) = 0$

$$\left[(0,03 - 2,979.10^{-4}\ \beta) - (0,003 + 2,989.10^{-6}\ \beta)\right] \times 2 \times (0,50 - 7,15.10^{-2}\ \beta)$$

$$-\left[\frac{1}{3}\ \frac{(1200 + 228,82\ \beta)(10 + 5,3.10^{-4}\ \beta)}{(250000 - 5297,5\ \beta)}\right] = 0$$

$$\underline{\beta = 1,45}$$

II.İterasyon

$\phi^*_u = 0,0296$ rad/m $\qquad$ $\left(\frac{\partial g}{\partial \phi'_u}\right)_* = 1,19.10^{-3}$ rad

$\phi^*_y = 0,003$ rad/m $\qquad$ $\left(\frac{\partial g}{\partial \phi'_y}\right)_* = -1,19.10^{-4}$ "

$L^*_p = 0,3963$ m $\qquad$ $\left(\frac{\partial g}{\partial L'_p}\right)_* = 5,32.10^{-3}$ "

$M^*_{od} = 1531,79$ kNm $\qquad$ $\left(\frac{\partial g}{\partial M'_{od}}\right)_* = -4,95.10^{-3}$ "

$L^* = 10,0008$ m $\qquad$ $\left(\frac{\partial g}{\partial L'}\right)_* = -1,05.10^{-4}$ rad

$EI^* = 242318,63$ kNm^2 $\qquad$ $\left(\frac{\partial g}{\partial EI'}\right)_* = 2,17.10^{-3}$ "

$\alpha^*_{\phi_u} = 0,155$ $\qquad$ $\phi^*_u = 0,03 - 2,325.10^{-4}\ \beta$

$\alpha^*_{\phi_y} = -0,0155$ $\qquad$ $\phi^*_y = 0,003 + 2,325.10^{-6}\ \beta$

$\alpha^*_{L_p} = 0,6929$ $\quad L^*_p = 0,50 - 6,929.10^{-2}\ \beta$

$\alpha^*_{M_{od}} = -0,6447$ $\quad M^*_{od} = 1200 + 232,09\ \beta$

$\alpha^*_L = -0,0137$ $\quad L^* = 10 + 6,85.10^{-4}\ \beta$

$\alpha^*_{EI} = 0,2826$ $\quad EI^* = 250000 - 7065\ \beta$

$Z^* = g(\underline{x}^*) = 0$

$$[(0,03 - 2,325.10^{-4}\ \beta) - (0,003 + 2,325\ .\ 10^{-6}\ \beta)]\ x\ 2 x (0,50 - 6,929\ .\ 10^{-2}\beta)$$

$$-[\frac{1}{3}\ \frac{(1200 + 232,09\ \beta)\ (10 + 6,85.10^{-4}\ \beta)}{(250000-7065\ \beta)}] = 0$$

$$\underline{\beta\ = 1,44}$$

<u>III.İterasyon</u>

$\phi^*_u = 0,0297$ rad/m $\quad (\frac{\partial g}{\partial \phi'_u})_* = 1,20.10^{-3}$ rad

$\phi^*_y = 0,003$ rad/m $\quad (\frac{\partial g}{\partial \phi'_y})_* = -1,20.10^{-4}$ "

$L^*_p = 0,4002$ m $\quad (\frac{\partial g}{\partial L'_p})_* = 5,34.10^{-3}$ "

$M^*_{od} = 1534,21$ kNm $\quad (\frac{\partial g}{\partial M'_{od}})_* = -5,00.10^{-3}$ "

$L^* = 10,001$ m $\quad (\frac{\partial g}{\partial L'})_* = -1,07.10^{-4}$ "

$EI^* = 239826,4$ kNm^2 $\quad (\frac{\partial g}{\partial EI'})_* = 2,22.10^{-3}$ "

$\alpha^*_{\phi_u} = 0{,}155 \qquad \phi^*_u = 0{,}03 - 2{,}325.10^{-4}\,\beta$

$\alpha^*_{\phi_y} = -0{,}0155 \qquad \phi^*_y = 0{,}003 + 2{,}325.10^{-6}\,\beta$

$\alpha^*_{L_p} = 0{,}690 \qquad L^*_p = 0{,}5 - 6{,}9.10^{-2}\,\beta$

$\alpha^*_{M_{od}} = -0{,}646 \qquad M^*_{od} = 1200 + 232{,}56\,\beta$

$\alpha^*_{L} = -0{,}0138 \qquad L^* = 10 + 6{,}9.10^{-4}\,\beta$

$\alpha^*_{EI} = 0{,}2868 \qquad EI^* = 250000 - 7170\,\beta$

$Z^* = g(\underline{x}^*) = 0$

$$\left[(0{,}03 - 2{,}325.10^{-4}\,\beta) - (0{,}003 + 2{,}325.10^{-6}\,\beta)\right] \times 2 \times (0{,}5 - 6{,}9.10^{-2}\,\beta)$$

$$- \left[\frac{1}{3}\,\frac{(1200 + 232{,}56\,\beta)\,(10 + 6{,}9.10^{-4}\,\beta)}{(250000 - 7170\,\beta)}\right] = 0$$

$$\underline{\underline{\beta = 1{,}44}}$$

$P_F = P(Z \leq 0) = 1 - \Phi\,(1{,}44) = 0{,}074934$

$P_S = P(Z > 0) = \Phi\,(1{,}44) = 0{,}925066$

Örnek 6

Aynı tip kolonların oluşturduğu bir popülasyondan rastgele örnekleme sonucu elde edilen ortalama değerler ve standart sapmalar aşağıda verilmiştir. Anılan kolonların burkulma güvenilirliğiyle ilgili durum fonksiyonu şöyledir :

$$Z = g(\underline{X}) = N_k - N = \frac{\pi^2 . E_c . I_c}{2,5(1+R_m)(KL)^2} - N$$

Durum fonksiyonu değişkenlerinin olasılık dağılımları normal ve istatistiksel bağımsız değişkenler olduğu kabul edilerek, risk ,$P_F = P(Z \leqslant 0)$, ve güvenilirlik,$P_S = P(Z > 0)$, olasılıkları aranmaktadır.

Rastgele değişken	Ölçü Birimi	Ortalama değer	Standart sapma
E_c = betonun elastiklik modülü	kN/m^2	$28,50.10^6$	$2,85.10^6$
I_c = beton kesitin eylemsizlik momenti	m^4	$2,13.10^{-3}$	$0,10.10^{-3}$
R_m = sünme etkisinin hesaba katılmasını sağlayan katsayı	-	0,4	0,04
K = etkili boy katsayısı	-	1,17	0,01
L = kolon boyu	m	4,00	0,08
N = kolona etkiyen eksenel yük	kN	2000	600

(ı) Doğrudan çözüm

$$E(Z) = m_g = g(m_{\underline{X}})$$

$$m_g = \frac{\pi^2 \times 28,5.10^6 \times 2,13.10^{-3}}{2,5(1+0,4)(1,17\times 4)^2} - 2000 = 5815,638 \quad kN$$

$$Var(Z) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\Big|_m \right)^2 Var(X_i)$$

X_i	$\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\Big|_m\right)^2 Var(X_i)$ $\quad (kN)^2$
E_c	$\left[\frac{\pi^2 . I_c}{2,5(1+R_m)(KL)^2}\right]^2 Var(E_c) = \left[\frac{\pi^2 .2,13.10^{-3}}{2,5(1+0,4)(1,17x4)^2}\right]^2 (2,85.10^6)^2$ $= 610842,04$
I_c	$\left[\frac{\pi^2 .E_c}{2,5(1+R_m)(KL)^2}\right]^2 Var(I_c) = \left[\frac{\pi^2 .28,5.10^6}{2,5\,(1+0,4)(1,17x4)^2}\right]^2 (0,10.10^{-3})^2$ $= 134638,64$
R_m	$\left[-\frac{\pi^2 .E_c .I_c}{2,5(1+R_m)^2 (KL)^2}\right]^2 Var(R_m) = \left[-\frac{\pi^2 .28,5.10^6 x2,13.10^{-3}}{2,5(1+0,4)^2 (1,17x4)^2}\right]^2 (0,04)^2$ $= 49864,66$
K	$\left[-\frac{2\pi^2 .E_c . I_c}{2,5(1+R_m)K^3 L^2}\right]^2 Var(K) = \left[-\frac{2\pi^2 .28,5.10^6 x2,13.10^{-3}}{2,5(1+0,4)x1,17^3 x4^2}\right]^2 (0,01)^2$ $= 17849,14$
L	$\left[-\frac{2\pi^2 .E_c . I_c}{2,5(1+R_m)K^2 L^3}\right]^2 Var(L) = \left[-\frac{2\pi^2 .28,5.10^6 x2,13.10^{-3}}{2,5(1+0,4)x1,17^2 x4^3}\right]^2 (0,08)^2$ $= 97734,73$
N	$(-1)^2\ Var(N) = (-1)^2\ (600)^2 = 360\,000$

$$Var(Z) = \sigma_g^2 = 1270929,21\ (kN)^2$$

$$\sigma_g = (1270929,21)^{1/2} = 1127,355 \quad \text{kN}$$

$$\beta = \frac{m_g}{\sigma_g} = \frac{5815,638}{1127,355} = 5,16$$

$$P_F = P(Z \leqslant 0) = 1 - \Phi(5,16) = 0,127717.10^{-6}$$

$$P_S = P(Z > 0) = \Phi(5,16) = 0,999999872$$

(ıı) <u>İterasyonla çözüm</u>

$$\frac{\partial g}{\partial X_i'} = \sigma_{X_i} \frac{\partial g}{\partial X_i'}$$

$$\frac{\partial g}{\partial E_c'} = \sigma_{E_c} \left[\frac{\pi^2 . I_c}{2,5\,(1+R_m)\,(KL)^2} \right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial I_c'} = \sigma_{I_c} \left[\frac{\pi^2 . E_c}{2,5\,(1+R_m)\,(KL)^2} \right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial R_m'} = \sigma_{R_m} \left[- \frac{\pi^2 . E_c . I_c}{2,5\,(1+R_m)^2\,(KL)^2} \right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial K'} = \sigma_K \left[- \frac{2\pi^2 . E_c . I_c}{2,5\,(1+R_m)\,K^3 L^2} \right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial L'} = \sigma_L \left[- \frac{2\pi^2 . E_c . I_c}{2,5\,(1+R_m)\,K^2 L^3} \right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial N'} = -\sigma_N$$

I.İterasyon

$E_c^* = \overline{E}_c = 28{,}5.10^6 \quad kN/m^2 \qquad (\frac{\partial g}{\partial E_c'})_* = 781{,}56 \quad kN$

$I^* = \overline{I} = 2{,}13.10^{-3} \quad m^4 \qquad (\frac{\partial g}{\partial I_c'})_* = 366{,}93 \quad ''$

$R_m^* = \overline{R}_m = 0{,}4 \quad — \qquad (\frac{\partial g}{\partial R_m'})_* = -223{,}30 \quad ''$

$K^* = \overline{K} = 1{,}17 \quad — \qquad (\frac{\partial g}{\partial K'})_* = -133{,}60 \quad ''$

$L^* = \overline{L} = 4{,}00 \quad m \qquad (\frac{\partial g}{\partial L'})_* = -312{,}63 \quad ''$

$N^* = \overline{N} = 2000 \quad kN \qquad (\frac{\partial g}{\partial N'})_* = -600 \quad ''$

$$\alpha_{X_i}^* = \frac{(\frac{\partial g}{\partial X_i'})_*}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial g}{\partial X_i'})_*^2}} \qquad X_i^* = m_{X_i} - \alpha_{X_i}^* . \sigma_{X_i} . \beta$$

$\alpha_{E_c}^* = 0{,}693 \qquad E_c^* = 28{,}5.10^6 - 1{,}975.10^6\ \beta$

$\alpha_{I_c}^* = 0{,}325 \qquad I_c^* = 2{,}13.10^{-3} - 3{,}25.10^{-5}\ \beta$

$\alpha_{R_m}^* = -0{,}198 \qquad R_m^* = 0{,}4 + 7{,}92.10^{-3}\ \beta$

$\alpha_K^* = -0{,}119 \qquad K^* = 1{,}17 + 1{,}19.10^{-3}\ \beta$

$\alpha^*_L = -0,277$ $\qquad L^* = 4 + 2,216.10^{-2}\ \beta$

$\alpha^*_N = -0,532$ $\qquad N^* = 2000 + 319,2\ \beta$

$$Z^* = g(\underline{x}^*) = 0$$

$$\frac{\pi^2(28,5.10^{-6} - 1,975.10^{6}\ \beta)(2,13.10^{-3} - 3,25.10^{-5}\ \beta)}{2,5\left[1+(0,4+7,92.10^{-3}\ \beta)\right](1,17+1,19.10^{-3}\ \beta)^2(4+2,216\ .\ 10^{-2}\beta)^2}$$

$$-(2000 + 319,2\ \beta) = 0$$

$$\underline{\beta = 5,77}$$

<u>II.İterasyon</u>

$E^*_c = 17104250$	kN/m^2	$\left(\frac{\partial g}{\partial E'_c}\right)_* = 640,11$	kN
$I^*_c = 1,942.10^{-3}$	m^4	$\left(\frac{\partial g}{\partial I'_c}\right)_* = 197,82$	"
$R^*_m = 0,446$	-	$\left(\frac{\partial g}{\partial R'_m}\right)_* = -106,27$	"
$K^* = 1,177$	-	$\left(\frac{\partial g}{\partial K'}\right)_* = -65,28$	"
$L^* = 4,128$	m	$\left(\frac{\partial g}{\partial L'}\right)_* = -146,87$	"
$N^* = 3841,80$	kN	$\left(\frac{\partial g}{\partial N'}\right)_* = -600$	"

$\alpha^*_{E_c} = 0,696$ $\qquad E^*_c = 28,5.10^6 - 1,9836.10^6\ \beta$

$\alpha^*_{I_c} = 0,215$ $\qquad I^*_c = 2,13.10^{-3} - 2,15.10^{-5}\ \beta$

$\alpha^*_{R_m} = -0,116$ $\qquad R^*_m = 0,4 + 4,64.10^{-3}\ \beta$

$\alpha^*_K = -0,071$ $\qquad K^* = 1,17 + 7,1.10^{-4}\ \beta$

$\alpha^*_L = -0,160$ $\qquad L^* = 4 + 1,28.10^{-2}\ \beta$

$\alpha_N^* = -0,652$ $\qquad$ $N^* = 2000 + 391,2\,\beta$

$$Z^* = g(\underline{x}^*) = 0$$

$$\frac{\pi^2\,(28,5.10^6 - 1,9836.10^{-3}\,\beta)\,(2,13.10^{-3} - 2,15.10^{-5}\,\beta)}{2,5\left[1 + (0,4 + 4,64.10^{-3}\,\beta)\right](1,17 + 7,1.10^{-4}\,\beta)^2\,(4 + 1,28.10^{-2})^2}$$

$$-(2000 + 391,2\,\beta) = 0$$

$$\underline{\beta = 5,65}$$

III.İterasyon

$E_C^* = 17292660$ kN/m^2 $\qquad (\frac{\partial g}{\partial E_C'})_* = 693,95$

$I_C^* = 2,01.10^{-3}$ m^4 $\qquad (\frac{\partial g}{\partial I_C'})_* = 209,48$

$R_m^* = 0,426$ $-$ $\qquad (\frac{\partial g}{\partial R_m'})_* = -118,11$

$K^* = 1,174$ $-$ $\qquad (\frac{\partial g}{\partial K'})_* = -71,73$

$L^* = 4,072$ m $\qquad (\frac{\partial g}{\partial L'})_* = -165,45$

$N^* = 4210,3$ kN $\qquad (\frac{\partial g}{\partial N'})_* = -600$

$\alpha_{E_C}^* = 0,719$ $\qquad E_C^* = 28,5.10^6 - 2,0492.10^6\,\beta$

$\alpha_{I_C}^* = 0,217$ $\qquad I_C^* = 2,13.10^{-3} - 2,17.10^{-5}\,\beta$

$\alpha_{R_m}^* = -0,122$ $\qquad R_m^* = 0,4 + 4,88.10^{-3}\,\beta$

$\alpha_K^* = -0,074$ $\qquad K^* = 1,17 + 7,4.10^{-4}\,\beta$

$\alpha_L^* = -0,171$ $\qquad L^* = 4 + 1,368.10^{-2}\,\beta$

$\alpha_N^* = -0,6215$ $\qquad N^* = 2000 + 372,9\ \beta$

$Z^* = g(\underline{x}^*) = 0$

$$\frac{\pi^2 (28,5.10^6 - 2,0492.10^6 \beta)(2,13.10^{-3} - 2,17.10^{-5} \beta)}{2,5 \left[1 + (0,4 + 4,88.10^{-3} \beta)\right] (1,17 + 7,4.10^{-4} \beta)^2 \ (4 + 1,368.10^{-2} \beta)^2}$$

$$-(2000 + 372,9\ \beta) = 0$$

$$\underline{\beta = 5,64}$$

IV. İterasyon

$E_c^* = 16942512$	kN/m^2	$\left(\frac{\partial g}{\partial E_c'}\right)_* = 691,52$
$I_c^* = 2,01.10^{-3}$	m^4	$\left(\frac{\partial g}{\partial I_c'}\right)_* = 204,52$
$R_m^* = 0,4275$	-	$\left(\frac{\partial g}{\partial R_m'}\right)_* = -115,19$
$K^* = 1,174$	-	$\left(\frac{\partial g}{\partial K'}\right)_* = -70,03$
$L^* = 4,077$	m	$\left(\frac{\partial g}{\partial L'}\right)_* = -161,33$
$N^* = 4103,16$	kN	$\left(\frac{\partial g}{\partial N'}\right)_* = -600$

$\alpha_{E_c}^* = 0,719$ $\qquad E_c^* = 28,5.10^6 - 2049150\ \beta$

$\alpha_{I_c}^* = 0,213$ $\qquad I_c^* = 2,13.10^{-3} - 2,13.10^{-5}\ \beta$

$\alpha_{R_m}^* = -0,12$ $\qquad R_m^* = 0,4 + 4,8.10^{-3}\ \beta$

$\alpha_K^* = -0,073$ $\qquad K^* = 1,17 + 7,3.10^{-4}\ \beta$

$$\alpha_L^* = -0,168 \qquad L^* = 4 + 1,344.10^{-2}\,\beta$$

$$\alpha_N^* = -0,624 \qquad N^* = 2000 + 374,4\,\beta$$

$$Z^* = g(\underline{x}^*) = 0$$

$$\frac{\pi^2\,(28,5.10^{6} - 2049150\,\beta)\,(2,13.10^{-3} - 2,13.10^{-5}\,\beta)}{2,5\left[1+(0,4+4,8.10^{-3}\,\beta)\right](1,17+7,3.10^{-4}\,\beta)^2\,(4+1,344.10^{-2}\,\beta)^2} - (2000+374,4\,\beta) = 0$$

$$\underline{\beta = 5,64}$$

$$P_F = P(Z \leqslant 0) = 1 - \Phi(5,64) = 0,882671.10^{-8}$$

$$P_S = P(Z > 0) = \Phi(5,64) = 0,999999991$$

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Yapısal tasarım, davranış veya durum fonksiyonu adı verilen hesap modellerine dayanılarak yapılır. Davranış fonksiyonlarının, pratik amaçlarla, kolaylıkla kullanılmasını sağlamak için bir çok basitleştirme yapılır. Ayrıca durum fonksiyonlarının içerdiği parametreler (mukavemet, yük, boyut vb.) genellikle rastgele değişkenlerdir. Bu yüzden yapısal tasarımda ister istemez bir belirsizlik ve bu belirsizlikten doğan bir risk sözkonusu olur. Bu belirsizlik, hesap modellerindeki basitleştirme ve tasarım değişkenlerinin rastgele oluşundan kaynaklanmaktadır. Bu çalışmada sadece tasarım değişkenlerinin rastgele oluşundan doğan belirsizlik gözönüne alınarak, yapısal tasarımdaki risk ve dolayısiyle güvenilirlik, iki değişik yöntemle belirlenmiştir. Bu yüzden, belirlenen bu riskin ve güvenilirliğin bir anlam taşıyabilmesi yalnızca durum fonksiyonunun, yapının davranışını gerçekçi bir biçimde yansıtmasına bağlıdır.

β güvenilirlik indeksinin belirlenmesi, iki değişik yöntemle (doğrudan ve iterasyonla), 3.2.ve 3.3.bölümlerde ayrı ayrı incelenmiştir. Aynı şekilde bu iki yöntem, 3.3.bölümün son kısmında mukayese edilmiştir. Hatırlanacağı gibi, β nın doğrudan belirlenmesi, matematiksel işlem açısından kolay olmasına rağmen verdiği sonuç açısından pek güvenli değildir. Buna karşılık, β nın iterasyonla belirlenmesinde, matematiksel işlemlerin zor olmasına rağmen verdiği sonuç, gerçeğe daha yakındır.

Uygulama bölümündeki mevcut örneklerde, risk ve güvenilirlik, β nın doğrudan ve iterasyonla belirlenmesiyle ayrı ayrı bulunmuştur. Görüldüğü gibi, doğrudan çözümden elde edilen sonuçlar, iterasyonla çözümden elde edilen sonuçlara eşit olabileceği gibi zaman zaman farklı sonuçlar da vermiştir. İki değişik yöntemle elde edilen sonuçların birbirine eşit olması veya farklı olması, durum fonksiyonların yapısına ve içerdiği rastgele değişkenlerin varyasyon katsayısına ($V_X = \sigma_X/m_X$) bağlıdır. Dolayısiyle herhangi bir durum fonksiyonu için riskin ve güvenilirliğin belirlenmesinde, doğrudan çözümle elde edilen sonucun, iterasyonla bulunan sonuca ne derecede yakın olup olmadığının, önceden tahmin edilmesi pek mümkün değildir.

Sonuç olarak şöyle bir öneri yapılabilir. Çok değişkeni içeren ve nonlineerlik derecesi yüksek olan durum fonksiyonlarında, hele fonksiyona hakim değişkenin varyasyon katsayısı büyükse, gerçekçi bir sonuç elde etmek için, β nın iterasyonla belirlenip, riskin ve güvenilirliğin bulunması, uygun bir çözüm olacaktır.

Table of Standard Normal Probability $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\tfrac{1}{2}\xi^2\right)$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.0	0.500000	0.50	0.691463	1.00	0.841345
0.01	0.503989	0.51	0.694975	1.01	0.843752
0.02	0.507978	0.52	0.698468	1.02	0.846136
0.03	0.511966	0.53	0.701944	1.03	0.848495
0.04	0.515954	0.54	0.705401	1.04	0.850830
0.05	0.519939	0.55	0.708840	1.05	0.853141
0.06	0.523922	0.56	0.712260	1.06	0.855428
0.07	0.527904	0.57	0.715661	1.07	0.857690
0.08	0.531882	0.58	0.719043	1.06	0.859929
0.09	0.535857	0.59	0.722405	1.09	0.862143
0.10	0.539828	0.60	0.725747	1.10	0.864334
0.11	0.543796	0.61	0.729069	1.11	0.866500
0.12	0.547759	0.62	0.732371	1.12	0.868643
0.13	0.551717	0.63	0.735653	1.13	0.870762
0.14	0.555671	0.64	0.738914	1.14	0.872857
0.15	0.559618	0.65	0.742154	1.15	0.874928
0.16	0.563560	0.66	0.745374	1.16	0.876976
0.17	0.567494	0.67	0.748572	1.17	0.878999
0.18	0.571423	0.68	0.751748	1.18	0.881000
0.19	0.575345	0.69	0.754903	1.19	0.882977
0.20	0.579260	0.70	0.758036	1.20	0.884930
0.21	0.583166	0.71	0.761148	1.21	0.886860
0.22	0.587064	0.72	0.764238	1.22	0.888767
0.23	0.590954	0.73	0.767305	1.23	0.890651
0.24	0.594835	0.74	0.770350	1.24	0.892512
0.25	0.598706	0.75	0.773373	1.25	0.894350
0.26	0.602568	0.76	0.776373	1.26	0.896165
0.27	0.606420	0.77	0.779350	1.27	0.897958
0.28	0.610262	0.78	0.782305	1.28	0.899727
0.29	0.614092	0.79	0.785236	1.29	0.901475
0.30	0.617912	0.80	0.788145	1.30	0.903199
0.31	0.621720	0.81	0.791030	1.31	0.904902
0.32	0.625517	0.82	0.793892	1.32	0.906583
0.33	0.629301	0.83	0.796731	1.33	0.908241
0.34	0.633072	0.84	0.799546	1.34	0.909877
0.35	0.636831	0.85	0.802337	1.35	0.911492
0.36	0.640576	0.86	0.805105	1.36	0.913085
0.37	0.644309	0.87	0.807850	1.37	0.914656
0.38	0.648027	0.88	0.810570	1.38	0.916207
0.39	0.651732	0.89	0.813267	1.39	0.917735
0.40	0.655422	0.90	0.815940	1.40	0.919243
0.41	0.659097	0.91	0.818589	1.41	0.920730
0.42	0.662757	0.92	0.821214	1.42	0.922196
0.43	0.666402	0.93	0.823815	1.43	0.923641
0.44	0.670032	0.94	0.826391	1.44	0.925066
0.45	0.673645	0.95	0.828944	1.45	0.926471
0.46	0.677242	0.96	0.831473	1.46	0.927855
0.47	0.680823	0.97	0.833977	1.47	0.929219
0.48	0.684387	0.98	0.836457	1.48	0.930563
0.49	0.687933	0.99	0.838913	1.49	0.931888

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.50	0.933193	2.00	0.977250	2.50	0.993790
1.51	0.934478	2.01	0.977784	2.51	0.993963
1.52	0.935744	2.02	0.978308	2.52	0.994132
1.53	0.936992	2.03	0.978822	2.53	0.994297
1.54	0.938220	2.04	0.979325	2.54	0.994457
1.55	0.939429	2.05	0.979818	2.55	0.994614
1.56	0.940620	2.06	0.980301	2.56	0.994766
1.57	0.941792	2.07	0.980774	2.57	0.994915
1.58	0.942947	2.08	0.981237	2.58	0.995060
1.59	0.944083	2.09	0.981691	2.59	0.995201
1.60	0.945201	2.10	0.982136	2.60	0.995339
1.61	0.946301	2.11	0.982571	2.61	0.995473
1.62	0.947384	2.12	0.982997	2.62	0.995604
1.63	0.948449	2.13	0.983414	2.63	0.995731
1.64	0.949497	2.14	0.983823	2.64	0.995855
1.65	0.950529	2.15	0.984223	2.65	0.995975
1.66	0.951543	2.16	0.984614	2.66	0.996093
1.67	0.952540	2.17	0.984997	2.67	0.996207
1.68	0.953521	2.18	0.985371	2.68	0.996319
1.69	0.954486	2.19	0.985738	2.69	0.996427
1.70	0.955435	2.20	0.986097	2.70	0.996533
1.71	0.956367	2.21	0.986447	2.71	0.996636
1.72	0.957284	2.22	0.986791	2.72	0.996736
1.73	0.958185	2.23	0.987126	2.73	0.996833
1.74	0.959071	2.24	0.987455	2.74	0.996928
1.75	0.959941	2.25	0.987776	2.75	0.997020
1.76	0.960796	2.26	0.988089	2.76	0.997110
1.77	0.961636	2.27	0.988396	2.77	0.997197
1.78	0.962462	2.28	0.988696	2.78	0.997282
1.79	0.963273	2.29	0.988989	2.79	0.997365
1.80	0.964070	2.30	0.989276	2.80	0.997445
1.81	0.964852	2.31	0.989556	2.81	0.997523
1.82	0.965621	2.32	0.989830	2.82	0.997599
1.83	0.966375	2.33	0.990097	2.83	0.997673
1.84	0.967116	2.34	0.990358	2.84	0.997744
1.85	0.967843	2.35	0.990613	2.85	0.997814
1.86	0.968557	2.36	0.990863	2.86	0.997882
1.87	0.969258	2.37	0.991106	2.87	0.997948
1.88	0.969946	2.38	0.991344	2.88	0.998012
1.89	0.970621	2.39	0.991576	2.89	0.998074
1.90	0.971284	2.40	0.991802	2.90	0.998134
1.91	0.971933	2.41	0.992024	2.91	0.998193
1.92	0.972571	2.42	0.992240	2.92	0.998250
1.93	0.973197	2.43	0.992451	2.93	0.998305
1.94	0.973810	2.44	0.992656	2.94	0.998359
1.95	0.974412	2.45	0.992857	2.95	0.998411
1.96	0.975002	2.46	0.993053	2.96	0.998462
1.97	0.975581	2.47	0.993244	2.97	0.998511
1.98	0.976148	2.48	0.993431	2.98	0.998559
1.99	0.976705	2.49	0.993613	2.99	0.998605

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$1-\Phi(x)$
3.00	0.998650	3.50	0.999767	4.00	0.316712E-04
3.01	0.998694	3.51	0.999776	4.05	0.256088E-04
3.02	0.998736	3.52	0.999784	4.10	0.206575E-04
3.03	0.998777	3.53	0.999792	4.15	0.166238E-04
3.04	0.998817	3.54	0.999800	4.20	0.133458E-04
3.05	0.998856	3.55	0.999807	4.25	0.106885E-04
3.06	0.998893	3.56	0.999815	4.30	0.853906E-05
3.07	0.998930	3.57	0.999821	4.35	0.680688E-05
3.08	0.998965	3.58	0.999828	4.40	0.541254E-05
3.09	0.998999	3.59	0.999835	4.45	0.429351E-05
3.10	0.999032	3.60	0.999841	4.50	0.339767E-05
3.11	0.999065	3.61	0.999847	4.55	0.268230E-05
3.12	0.999096	3.62	0.999853	4.60	0.211245E-05
3.13	0.999126	3.63	0.999858	4.65	0.165968E-05
3.14	0.999155	3.64	0.999864	4.70	0.130081E-05
3.15	0.999184	3.65	0.999869	4.75	0.101708E-05
3.16	0.999211	3.66	0.999874	4.80	0.793328E-06
3.17	0.999238	3.67	0.999879	4.85	0.617307E-06
3.18	0.999264	3.68	0.999883	4.90	0.479183E-06
3.19	0.999289	3.69	0.999888	4.95	0.371067E-06
3.20	0.999313	3.70	0.999892	5.00	0.286652E-06
3.21	0.999336	3.71	0.999896	5.10	0.169827E-06
3.22	0.999359	3.72	0.999900	5.20	0.996443E-07
3.23	0.999381	3.73	0.999904	5.30	0.579013E-07
3.24	0.999402	3.74	0.999908	5.40	0.333204E-07
3.25	0.999423	3.75	0.999912	5.50	0.189896E-07
3.26	0.999443	3.76	0.999915	5.60	0.107176E-07
3.27	0.999462	3.77	0.999918	5.70	0.599037E-08
3.28	0.999481	3.78	0.999922	5.80	0.331575E-08
3.29	0.999499	3.79	0.999925	5.90	0.181751E-08
3.30	0.999516	3.80	0.999928	6.00	0.986588E-09
3.31	0.999533	3.81	0.999931	6.10	0.530343E-09
3.32	0.999550	3.82	0.999933	6.20	0.282316E-09
3.33	0.999566	3.83	0.999936	6.30	0.148823E-09
3.34	0.999581	3.84	0.999938	6.40	0.77688 E-10
3.35	0.999596	3.85	0.999941	6.50	0.40160 E-10
3.36	0.999610	3.86	0.999943	6.60	0.20558 E-10
3.37	0.999624	3.87	0.999946	6.70	0.10421 E-10
3.38	0.999637	3.88	0.999948	6.80	0.5231 E-11
3.39	0.999650	3.89	0.999950	6.90	0.260 E-11
3.40	0.999663	3.90	0.999952	7.00	0.128 E-11
3.41	0.999675	3.91	0.999954	7.10	0.624 E-12
3.42	0.999687	3.92	0.999956	7.20	0.301 E-12
3.43	0.999698	3.93	0.999958	7.30	0.144 E-12
3.44	0.999709	3.94	0.999959	7.40	0.68 E-13
3.45	0.999720	3.95	0.999961	7.50	0.32 E-13
3.46	0.999730	3.96	0.999963	7.60	0.15 E-13
3.47	0.999740	3.97	0.999964	7.70	0.70 E-14
3.48	0.999749	3.98	0.999966	7.80	0.30 E-14
3.49	0.999758	3.99	0.999967	7.90	0.15 E-14

KAYNAKLAR

1. GÜNDÜZ,A., "Assessment of model uncertainties in structural design", Yıldız Üniversitesi Dergisi, İstanbul, 1986/4, ss.65-77

2. GÜNDÜZ,A., "Yapısal göçme olasılığının belirlenmesiyle ilgili bir yaklaşım", Yıldız Üniversitesi Dergisi, İstanbul, 1983/3-4, ss.23-32

3. GÜNDÜZ,A., "Yapısal tasarımda kısmi güvenlik katsayılarının belirlenmesiyle ilgili bir yaklaşım" Yıldız Üniversitesi Dergisi, İstanbul, 1986/1, ss.29-39.

4. ANG,A. H-S., and TANG,W.H., Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Vol.I, Basic Principles, Wiley, New York, 1975, 409 pp.

5. ANG,A. H-S., and TANG,W.H., Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Vol. II, Decision, Risk and Reliability, Wiley, New York, 1984, 562 pp.

6. AŞKAR,A., Methods in Applied Algebra and Analysis, Boğaziçi Üniversitesi No.253, İstanbul, 1981, 490 s.

7. SPIEGEL, M.R., (Çeviri: H.Demiray ve M.Sümer), Çözümlü Matematik Problemleri, Çağlayan Kitabevi, İstanbul, 1975, 694 s.

ÖZGEÇMİŞ

1958 IRAN doğumluyum. İlk, Orta ve Lise öğrenimini Iran'da tamamladım. 1980 yılında Türkiye'ye geldim.

Lisans öğrenimine 1981-1982 öğretim yılında İstanbul Yıldız Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümünde başladım ve 1984-1985 öğretim yılında tamamladım.

1985-1986 öğretim yılının ikinci yarıyılında Yıldız Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü İnşaat Mühendisliği-Yapı programına girdim.