YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STABİLİTE PROBLEMLERİNİN MATRİS METODLARI VE BAZI YAKLAŞIK METODLARLA İNCELENMESİ

İnş.Müh. Mustafa İPEKGİL
F.B.E. İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında
hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. İrdesel Göğüş

İSTANBUL, 1994

Bu tez çalışmasının bütün aşamalarında yol gösteren ve hiçbir yardımı esirgemeyen sayın hocam Prof. İrdesel Göğüş'e saygı ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER :

ÖZET:

Y.T.Ü Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanan bu çalışmada bir özdeğer problemi olan stabilite hesabı çeşitli metodlarla incelenmiştir.

Bunun için birinci bölümde özdeğer problemlerinin tanıtımı yapılmış, dönüşümleri ve temel çözüm yöntemleri hakkında bilgi verilmiştir.Bu bölüm içerisinde Cholesky ve Von Mises yöntemleri tanıtılarak pratik bir Cholesky programı hazırlanmıştır.

İkinci bölümde elastik stabilite hakkında temel bilgiler verilmiş, kararlılık kavramı, kararlılık kriteri ve stabilite probleminin çeşitleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde stabilite problemlerinin çözüm yöntemlerinden diferansiyel metod, matris metodu ve Mc Minn ' in yaklaşık metodu incelenmiştir.Diferansiyel denklem metodunda farksız denge konumunda bulunan sistemin yakınında bulunan ikinci bir denge konumunun elastik eğrisinin diferansiyel denklemi aranmıştır.Matris metodunda önce yapılan varsayım ve kabuller bildirilmiş, elastik rijitlik matrisi ve geometrik rijitlik matrisi oluşturularak elastik stabilitenin temel matrisyel bağıntısı elde edilmiştir.Daha sonra bir genel özdeğer problemi olan bu bağıntı, birinci bölümdeki yöntemlerle özel özdeğer problemine dönüştürülmüş ve çözüm elde edilmiştir.

Bu kesin çözüm yöntemlerinin yanında, yaklaşık bir yöntem olan Mc Minn ' in metodu tanıtılmıştır.Bu metodda başlangıçta bir burkulma yük çarpanı seçilmiş, Livesley & Chandler tabloları kullanılarak sistem için bir rijitlik matrisi oluşturulmuş ve bu matristen hareketle elde edilen kriter değerlendirilerek sistemin o yük için stabil olup olmadığına karar verilmiştir. İşleme, burkulma kriterine ulaşılıncaya dek deneme-yanılma metoduyla devam edilerek kritik yük çarpanı elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde elastik stabilitenin sınırı ve inelastik stabilite konusunda temel bilgiler verilmiştir.Bu konuda yapılan teorik ve deneysel çalışmalar tanıtılarak amprik formüller ve tablolar verilmiştir.

Beşinci bölümde simetrik yüklü ortogonal bir çerçevenin stabilite hesabı, üçüncü bölümde tanıtılmış olan metodlardan matris metodu ile, Mc Minn ' in yaklaşık metodu ile ve T.S. 500 deki abaklar yardımıyla yapılarak sonuçlar karşılaştırılmıştır.

SUMMARY :

In this study which is prepared for Y.T.Ü. master thesis, the stability problem is examined by various methods.

In the first section, the definition of eigenvalue problem is done and transformations and basic solutions of this problem are given.In this part, Cholesky and Von Mises methods are studied and a computer programme for Cholesky is written.

In the second section, basic parts of elastic stability is explained, stability concept, stability criterion and types of stability problem are introduced.

In the third section, for the solution of stability problems, differential method, matrix method and Mc Minn's approximate method are examined.In the differential method, the differential equation of the elastic curve of an another balance position near to the system which is in the indifferent balance position is searched.In the matrix method, the assumptions are notified and the basic matrixial equation of elastic stability is established by generating and using elastic and geometric stiffness matrices.Then this equation which is a kind of general eigenvalue problem is converted to a special eigenvalue problem which can be solved by using the methods explained in the first section.

Beside these exact solution methods, Mc Minn's approximate method is also explained.In this method, firstly a buckling load factor is chosen and stiffness matrix is formed for system by using Livesley and Chandler tables.And stability of the system is determined by analysing the criterion obtained from stiffness matrix.Trial and error method is used until the buckling criterion is reached, in order to obtain the critical buckling load factor.

In the fourth section, some basic informations are given about the elastic stability's limit and inelastic stability.Theoretical and experimental studies on this topic are introduced and empirical formulas and tables are given.

In the last section, stability calculation of a symmetric loaded orthogonal frame is done by previously explained methods (matrix method and Mc Minn's approximate method) and by the method in T.S.500.Then results are compared with the solution of matrix method which is the exact solution.

1. ÖZDEĞER VE ÖZVEKTÖRLER ÜZERİNE GENEL AÇIKLAMA

1.1. PROBLEMİN TANITIMI VE KAVRAMLAR

Yapısal mühendisliğin birçok problemlerinde, büyük önem taşıyan ve bu problemlerin çekirdeği olan bir soru ortaya çıkar. Kare ve keyfi olan, reel veya karmaşık olabilen A ve B matrisleri ile

$$(A - \lambda B)X=0 \tag{1.1}$$

veya

$$AX=\lambda BX \tag{1.1'}$$

şeklinde ifade edilebilen ve genel özdeğer problemi olarak adlandırılan denklemin çözüm kümesi olarak λ parametresi ile X vektörleri aranmaktadır. Uygulamada çoğunlukla B matrisi birim matris olduğundan veya birim matrise dönüştürülebildiğinden (1.1) denkleminin özel bir hali olan

$$(A - \lambda I)X=0 \tag{1.2}$$

veya

$$AX=\lambda X \tag{1.2'}$$

denklemi elde edilir. Eşdeğer olan (1.2) ve (1.2') denklemleri özel özdeğer problemi olarak adlandırılır. Problemin ayrıntılı şekli homojen karakterli olarak

$$\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda).X_1 + a_{12}.X_2 + \quad \ldots \quad + a_{1n}.X_n = 0 \\ a_{21}.X_1 + (a_{22} - \lambda).X_2 + \quad \ldots \quad + a_{2n}.X_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}.X_1 + a_{n2}.X_2 + \quad \ldots \quad + (a_{nn} - \lambda).X_n = 0 \end{array} \tag{1.3}$$

şeklinde olup bu denklem sisteminin katsayılar matrisi olan

$$(A - \lambda I) = \begin{array}{cccc} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{array} \tag{1.4}$$

matrisine A matrisinin karakteristik matrisi denir. (1.2) denkleminin, yalnız karakteristik matrisin determinantının sıfıra eşit olması halinde sıfıra özdeş olmayan X çözümleri vardır.

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

Bu karakteristik determinant λ parametresine bağlıdır ve açılımı , λ ya göre n.inci dereceden bir polinomu ifade eder :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + a_{n-1}.\lambda^{n-1} + \dots + a_1.\lambda + a_o \quad (1.6)$$

A matrisinin bu karakteristik polinomu, n adet reel veya karmaşık $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ köklerine sahiptir.Bu λ kök değerlerine A matrisinin özdeğerleri , bulunan her bir λ özdeğerinin (1.3) denklem sisteminde yerine konması sonucunda hesaplanan X vektörlerine ise A matrisinin özvektörleri adı verilir.

1.2. ÖZDEĞERLERİN ÖZELLİKLERİ

n x n boyutlu kare ve keyfi A,B,C,... matrislerinin karakteristik polinom ve özdeğerlerinin özellikleri şöyle sıralanabilir :

Özellik 1. $(A-\lambda I)$ matrisinin yalnız ve yalnız singüler olması halinde λ , A nın bir özdeğeridir.

Özellik 2. A matrisinin özdeğerlerinin toplamı matrisin izine eşittir :

$$sp(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

Özellik 3. A matrisinin özdeğerlerinin çarpımı matrisin determinantına eşittir :

$$\det A = \lambda_1 * \lambda_2 \dots * \lambda_n$$

Özellik 4. A matrisinde detA=0 ise mutlaka bir $\lambda=0$ özdeğeri mevcutdur.

Özellik 5. A matrisinin derecesi r olduğuna göre

$\lambda_i=0$ sayısı : n - r dir.

Özellik 6. A ve A^T aynı karakteristik polinoma ve özdeğerlere sahiptir.

Özellik 7. A*B ve B*A aynı karakteristik polinoma ve özdeğerlere sahiptir.

Özellik 8. $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}.\lambda^{n-1} + \dots + a_1.\lambda + a_o$, A nın karakteristik polinomu ise

$$P(A) = A^n + a_{n-1}.A^{n-1} + \dots + a_1.A + a_o$$

olur . Yani her A matrisi kendi karakteristik denklemini sağlar.Bu özellik , Cayley-Hamilton Teoremi olarak adlandırılır.

1.3. ÖZVEKTÖRLERİN ÖZELLİKLERİ

Özellik 1. A matrisinin farklı $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ özdeğerlerine karşılık gelen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ özvektörleri birbirinden lineer bağımsızdır.

Özellik 2. A matrisinin n adet lineer bağımsız $X_1, X_2, \ldots, X_n$ özvektörlerinin birleşiminden oluşan n∗n boyutlu X matrisi için

$$D = X^{-1}.A.X$$

yazılabilir.D diagonal bir matristir ve ana diagonalinin üzerindeki elemanlar, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ şeklinde A matrisinin özdeğerleridir.Her reel A matrisi bu yöntemle diagonal hale getirilebilir.

Özellik 3. A matrisinin simetrik olması durumunda $X_1, X_2, \ldots, X_n$ özvektörleri karşılıklı ortagonaldir.

İspat : A matrisinin farklı λ_1, λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler X_1, X_2 olsun. $A.X_1 = \lambda_1.X_1 \quad , \quad A.X_2 = \lambda_2.X_2$

ifadeleri için özvektörler X_1 ve X_2 nin

$$X_2^T.X_1 = 0$$

ortagonallik durumunu araştıralım.İkinci eşitliğin transpozesini alırsak,

$$X_2^T.A^T = \lambda_2.\, X_2^T \quad \text{olur.}$$

A matrisi simetrik olduğundan $A = A^T$ dir.Bunu yerine koyarsak,

$$X_2^T.A = \lambda_2.\, X_2^T \quad \text{olur.}$$

her iki tarafı X_1 ile çarpalım

$$X_2^T.A.X_1 = \lambda_2.\, X_2^T.X_1$$

Buradan $(\lambda_1 - \lambda_2).X_2^T.X_1 = 0$ elde edilir.

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan $X_2^T.X_1 = 0$ olur.

ÖRNEK .Karakteristik denklemle özdeğerin ve özvektörün hesabı

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matrisini (1.2) nolu özel özdeğer problemine uygulayalım.

$$(A-\lambda.I).X = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right).\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Burada karakteristik matris

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

şeklindedir ve özdeğerlerin (1). özelliğinden , özdeğerlerin mevcut olabilmesi için bu karakteristik matrisin singüler olması gerekir.

$$P(\lambda) = \det(A-\lambda.I) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0$$

Bu durumda $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ olarak 3 tane özdeğer vardır.

$\lambda_1 = -1$ $\qquad$ $\lambda_2 = 2+\sqrt{2}$ $\qquad$ $\lambda_3 = 2-\sqrt{2}$

Kontrol :

özellik (2) ye göre

$$sp(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$3-1+1 = -1 + (2+\sqrt{2}) + (2-\sqrt{2})$$

$$3 = 3$$

özellik (3) e göre

$$\det(A) = \lambda_1 * \lambda_2 * \lambda_3$$

$$-2 = -1 \,.\, (2+\sqrt{2}) \,.\, (2-\sqrt{2})$$

$$-2 = -2$$

Özellik (4) e göre $\det A \neq 0$ olduğundan değeri sıfır olan bir özvektör yoktur.

Özdeğerler hesaplandıktan sonra herbiri (1.2) denkleminde yerine konarak, o özdeğere karşılık gelen özvektör bulunur.Burada $\underline{X}_1$, $\underline{X}_2$, $\underline{X}_3$ gibi 3 özvektör vardır.

$\lambda_1 = -1$ için

$$(A-\lambda I).X = \begin{bmatrix} 3-(-1) & 1 & 0 \\ 1 & -1-(-1) & 1 \\ 2 & 0 & 1-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$4.x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 + x_3 = 0$$
$$2.x_1 + 2.x_3 = 0$$

Özvektörlerin (1).özelliğine göre farklı özdeğerlere ait özvektörler birbirinden lineer bağımsız olduğundan $\underline{X}_1$ in bir değerini serbest seçebiliriz.Örneğin $x_3=\alpha$ diyelim.Buradan ,

$x_1 = -\alpha$, $x_2 = 4\alpha$, $x_3 = \alpha$ bulunur.

$$\underline{X}_1 = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diğer özvektörler de ($\underline{X}_2$ ve $\underline{X}_3$) benzer şekilde bulunur.

1.4. GENEL ÖZDEĞER PROBLEMLERİNİN ÖZEL ÖZDEĞER PROBLEMİNE DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

1.4.1. (B^{-1}) İLE ÇARPARAK DÖNÜŞÜM

$(A - \lambda B)X=0$ genel özdeğer problemini soldan (B^{-1}) ile çarparak özel özdeğer problemine dönüştürmek mümkündür.

$$(B^{-1}.A - \lambda.I).X = 0$$

Bu durumda özel özdeğer problemi için verilen kuralların hepsi genel özdeğer problemi için de geçerlidir.Ancak çözümde böyle bir dönüşümden kaçınılır.Çünkü nümerik olarak elverişsizdir.A ve B simetrikse böyle bir dönüşüm yapıldığında ($B^{-1}.A$) çarpımı simetrik olmayacağından hem simetri bozulmuş olur , hem de band yapısı bozulur.Bu durumda aşağıda gösterilen yöntemle dönüşüm yapılması daha uygundur.

1.4.2. CHOLESKY YÖNTEMİ İLE DÖNÜŞÜM

$(A - \lambda B)X=0$ genel özdeğer probleminde A matrisi simetrik ise

$$A=L.L^T \tag{1.7}$$

şeklinde üçgen L matrisi ve transpozesinin çarpımı olarak ifade edilebilir.

L matrisinin elemanları aşağıdaki şekilde elde edilir :

$$L_{ii} = \sqrt{(A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2)} \qquad L_{ij} = \frac{A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}.L_{jk}}{L_{jj}} \quad (i > j \text{ için}) \tag{1.8}$$

(1.7) dönüşümü sonucu genel özdeğer denklemi

$$L.L^T.X - \lambda.B.X = 0$$ haline gelir.

$L^T.X=Y$ dersek $X=(L^{-1})^T.Y$ olur.Bunlar yerine konursa ,

$$L.Y - \lambda.B.(L^{-1})^T.Y = 0$$ bulunur.

Soldan L^{-1} ile çarparsak ,

$$I.Y - \lambda.(L^{-1}).B.(L^{-1})^T.Y = 0 \tag{1.9}$$

olur.Burada (1.9) eşitliğinin her iki terimini λ ya bölersek ve

$$\tilde{A} = (L^{-1}).B.(L^{-1})^T \quad \text{ve} \quad \Lambda = 1 / \lambda$$ ile gösterilirse ,

$$(\tilde{A} - \Lambda.I).Y = 0 \tag{1.10}$$

şeklinde bir özel özdeğer problemine dönüşüm sağlanmış olur.Bu problemin özdeğer ve özvektörleri bulunduktan sonra

$$\lambda = 1 / \Lambda \quad \text{ve} \quad X=(L^{-1})^T.Y \tag{1.11}$$

şeklinde geri dönüşüm ile genel özdeğer probleminin özdeğer ve özvektörleri bulunur.

<u>ÖRNEK 2.</u> Cholesky üçgenlere ayırma metoduyla dönüşüm

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$L_{ii} = \sqrt{(A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2)} \qquad L_{ij} = \frac{A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}.L_{jk}}{L_{jj}} \qquad (i > j \text{ için})$$

$L_{11} = \sqrt{(3-0)} = 1.732$ $\qquad L_{21} = \frac{0-0}{1.732} = 0$ $\qquad L_{32} = 1.225$

$L_{22} = \sqrt{(6-0)} = 2.449$ $\qquad L_{31} = \frac{-1-0}{1.732}$ $\qquad L_{42} = 0.816$

$L_{33} = \sqrt{6 - \sum(-.577^2 + 1.225^2)} = 0.439$ $\qquad L_{41} = 0.577$ $\qquad L_{43} = 0.766$

$L_{44} = \sqrt{10 - \sum(.577^2 + .816^2 + .766^2)} = 2.9$

$$L = \begin{bmatrix} 1.732 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.449 & 0 & 0 \\ -.577 & 1.225 & .439 & 0 \\ .577 & .816 & .766 & 2.9 \end{bmatrix} \qquad L.L^T = A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

L matrisi elde edildikten sonra Konu 1.4.2. de belirtilen şekilde dönüşüm ve geri dönüşüm gerçekleştirilerek özdeğer ve özvektörler bulunur.

```
 REM  ******CHOLESKY PROGRAMME Written by Mustafa Ipekgil 1994*******
0 DIM A(20, 20), L(20, 20)
00 INPUT "BOYUT ?"; K
05 REM **********
10 C = 1
20 I = C: J = C
30 READ A(I, J): REM: PRINT I, J, A(I, J): INPUT H
40 IF J < K THEN J = J + 1: GOTO 130
50 IF C < K THEN C = C + 1: GOTO 120
60 FOR I = 1 TO K: FOR J = 1 TO K
70 IF I > J THEN A(I, J) = A(J, I)
80 NEXT J: NEXT I
85 REM **********
90 FOR I = 1 TO K: FOR J = 1 TO K
00 IF I = J THEN GOSUB 300
10 IF I > J THEN GOSUB 400
20 NEXT J: NEXT I
50 GOTO 500
95 REM ***********
00 FOR N = 1 TO J - 1
10 KT = KT + (L(I, N)) ^ 2
20 NEXT N
30 L(I, I) = (A(I, I) - KT) ^ .5
40 KT = 0: RETURN
95 REM ************
00 FOR N = 1 TO J - 1
10 CT = CT + (L(I, N) * L(J, N))
20 NEXT N
30 L(I, J) = (A(I, J) - CT) / L(J, J)
40 CT = 0: RETURN
00 FOR I = 1 TO K: FOR J = 1 TO K
10 IF NOT I < J THEN PRINT "L"; I; J; "="; L(I, J)
20 NEXT J: NEXT I
001 DATA 73244.1,0,-5.83,-73240,0,0,-4,0,-16,0,0,0,0,0,0,0,0,0
002 DATA 131899,-285.47,0,-71.37,-285.47,0,-73238,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
003 DATA 1676.16,0,285.47,761.25,16,0,42.6825,0,0,0,0,0,0,0,0,0
004 DATA 73246,0,-5.76,0,0,0,-4,0,-16,0,0,0,0,0,0
005 DATA 131899,285.47,0,0,0,0,-73238,0,0,0,0,0,0,0
006 DATA 1676.16,0,0,0,16,0,42.6825,0,0,0,0,0,0
007 DATA 73248,0,0,-73240,0,0,-4,0,-16,0,0,0
008 DATA 146547.4,-285.5,0,-71.37,-285.47,0,-73238,0,0,0,0
009 DATA 1693.24,0,285.47,761.25,16,0,42.6825,0,0,0
010 DATA 73248,0,0,0,0,0,-4,0,16
011 DATA 146547,285.47,0,0,0,0,-73238,0
012 DATA 1693.24,0,0,0,16,0,42.6825
013 DATA 73244,0,16,-73240,0,0
014 DATA 73309,-285.5,0,-71.37,-285.47
015 DATA 1607.9,0,285.47,761.25
016 DATA 73244,0,16
017 DATA 73309,285.47
018 DATA 1608
```

1.5 ÖZDEĞER PROBLEMLERİNDE λ_{MAX} HESABI İÇİN YAKLAŞIK METODLAR

Yukarıdaki metodlarla özdeğerlerin tümünün hesaplanması büyük boyutlu matrislerle çalışmayı gerektirir ve oldukça uğraştırıcıdır. Mühendislik problemlerinde de çoğu zaman özdeğerlerin en büyüğünün bilinmesi yeterli olmaktadır.

1.5.1.MATRİSİN KARESİNİ ALMA METODU

$(A - \lambda I)X=0$ problemi için

$$P=A^{m} \quad \text{ve} \quad Q=A^{m+1} \text{ ise}$$

λ_{max} , herhangi bir Q_{ij} elemanının P_{ij} elemanına bölünmesi suretiyle bulunabilir

$$\lambda_{max} \cong Q_{ij} / P_{ij}$$

ÖRNEK 3.

$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin en büyük özdeğerini 1.5.1. metodu ile bulalım.

$$A^2=\begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^4=\begin{bmatrix} 171 & 170 \\ 85 & 86 \end{bmatrix}$$

$$A^8=\begin{bmatrix} 43691 & 43690 \\ 21845 & 21846 \end{bmatrix} \qquad A^8.A=A^9=\begin{bmatrix} 174763 & 174762 \\ 87381 & 87382 \end{bmatrix}$$

174763 / 43691=3.999977 174762 / 43690=4.000046

87381 / 21845=4.00046 87382 / 21846=3.999908

Gerçek λ_{max} değeri tam 4 dür.

1.5.2. KUVVET İTERASYONU METODU

Matrisin karesini alma metoduna göre $A^{m+1} \cong \lambda.A^{m}$ olduğundan $A^{m+1}.y \cong \lambda.A^{m}.y$ yazabiliriz. Burada y keyfi bir kolon matristir.

ÖRNEK 4.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad y=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A.y=\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad A^2.y=A.A.y=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 21 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$A^3.y=\begin{bmatrix}85\\43\end{bmatrix}$ $\quad$ $A^4.y=\begin{bmatrix}341\\171\end{bmatrix}$

$\lambda_{max} \cong$ 341/85=4.0118 $\cong$ 171/43=3.9767

1.5.3. VON MİSES'İN İTERATİF METODU

Bu yöntem özellikle stabilite problemleri için uygundur. Genel bir özdeğer probleminin çözümü A ve B matrislerinin simetrisi ve band yapısı bozulmadan yapılabilmektedir. Sonuçta en büyük özdeğer ve ona karşılık gelen özvektör elde edilmektedir.

1.5.3.1. GENEL ÖZDEĞER PROBLEMLERİ İÇİN VON MİSES ÇÖZÜMÜ

$(A - \lambda B)X=0$ problemi için $\lambda_{max}>0$ ve X aranmaktadır.

I-) İterasyon başlangıcı : $\lambda_0>0$ $\quad X_0\neq 0$ dır.

II-) ν. iterasyon

$$B.X_{\nu+1}=A.X_\nu$$

III-) Yaklaşık özdeğerin hesabı (Rayleigh faktörü)

$$\lambda\nu=\frac{X\nu^T.A.X\nu}{X\nu^T.B.X\nu}=\frac{X\nu^T.B.X_{\nu+1}}{X\nu^T.B.X\nu}$$

IV-) İterasyon sonu

$$\left|(\lambda\nu-\lambda_{\nu+1})/\lambda_{\nu-1}\right| < \text{hata sınırı}$$

1.5.3.2. ÖZEL ÖZDEĞER PROBLEMLERİ İÇİN VON MİSES ÇÖZÜMÜ

$(A - \lambda I)X=0$ problemi için $\lambda_{max}>0$ ve X aranmaktadır.

I-) İterasyon başlangıcı : $\lambda_0>0$ $\quad X_0\neq 0$ dır.

II-) ν. iterasyon

$$X_{\nu+1}=A.X_\nu$$

III-) Yaklaşık özdeğerin hesabı

$$\lambda\nu=\frac{X\nu^T.A.X\nu}{X\nu^T.X\nu}=\frac{X\nu^T.X_{\nu+1}}{X\nu^T.X\nu}$$

IV-) İterasyon sonu

$$\left|(\lambda\nu-\lambda_{\nu+1})/\lambda_{\nu-1}\right| < \text{hata sınırı}$$

2. ELASTİK STABİLİTE HAKKINDA GENEL AÇIKLAMA

2.1.STABİLİTE PROBLEMİNİN GENEL KAVRAMLARI

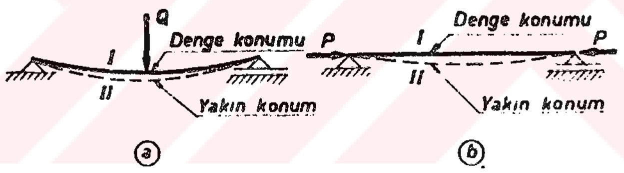
Şekil değiştiren cisim mekaniğinde dış etkiler altında dengede bulunan bir sistem için iki önemli soru bahis konusu olabilir:

İlk soru ,sistemde zorlanmalar tehlikeli sayılan sınıra ne derece yakındır şeklindedir. Bu sorunun cevabı sistemde iç kuvvet veya gerilme dağılışı ile ilgilidir.Eğer en büyük gerilme o cisim için izin verilen sınırı aşmış ise artık sistemde istenilen güvenlik kalmamış demektir.Bu problemlere kısaca gerilme problemi adını veriyoruz.

İkinci soru ise sistemin incelenen denge konumu acaba kararlı mıdır ,tarzındadır.Bu soru birinciden tamamen farklıdır.Eğer denge konumu kararlı değil ise sistem bu konumdan çok küçük ve bozucu etkilerle bir defa saptırılacak olursa ,tekrar ilk konuma geri dönmez ve bu konumdan çok hızlı bir şekilde uzaklaşarak göçebilir.Bu gibi problemlere kısaca stabilite problemi diyoruz.

Esas olarak her iki problemde de yapının emniyeti bahis konusudur ; fakat sistemin tehlikeli duruma girmesinde rol oynayan unsurlar farklıdır.Birinci halde tehlikenin doğuşu sadece fazla gerilmeden ileri geldiği halde ikincide buna denge konumunun kararsızlığı sebep olmaktadır.

Bu noktaları şu basit örnekler üzerinde de açıklayabiliriz :



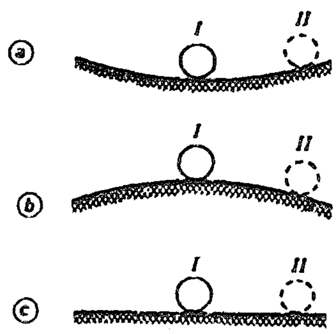
Şekil 2.1

Şekil 2.1.a da Q yükü ile eğilen bir kirişin durumunu ele alalım.Burada I ile gösterilen denge konumunun kararlığı hakkında bir endişe sözkonusu olmaz.Çünkü kiriş geçici etkilerle I konumundan saptırılarak II ye getirilecek olursa ,etki ortadan kalkınca sistem tekrar I haline geri döner,yani I konumu kararlıdır.O halde burada tek sorun ,kirişin eğilmeden doğan gerilmelerle kırılıp kırılmayacağıdır.

Şekil 2.1.b deki hale gelince ,eksenel P basınç kuvveti altında I ile gösterilen denge konumu daima kararlı değildir.Geçici sebeplerle çubuk I konumundan saptırılarak II durumuna getirilecek olursa ,bozucu etkiler ortadan kalksa bile çubuk her zaman ilk duruma geri dönmeyebilir.Örneğin P yükü çok büyük veya çubuk çok narin olursa I durumunun kararlılığının araştırılması gerekir.

2.2 KARARLILIK KAVRAMI

Şekil 2.2.deki bilyenin çeşitli denge konumlarının incelenmesiyle kararlılık konusunda basit bir fikir elde edilebilir.Şekil 2.a. da bilye içbükey bir kapta I konumunda dengededir. Bu konumun kararlılığı hakkında bir yargıya varmak için cismin çok yakın II konumuna getirilip kendi haline bırakıldığını düşünelim. II ,bir denge konumu olmadığı için cisme etkiyen kuvvetler ona I konumu civarında bir titreşim hareketi verirler. Titreşimin sönümlü olduğunu kabul edersek cisim tekrar I denge konumuna döner. İşte böyle bir durumda I denge konumuna kararlı (stabil) denir.



Şekil 2.2

Şekil 2.2.b durumunda ise sistem I denge konumuna çok yakın II gibi bir duruma getirilirse doğan hareket I civarında kalmaz ondan sürekli uzaklaşır.Bu takdirde I denge konumuna kararsız denir.

Şekil 2.2.c de ise I konumuna yakın alınan II konumunun kendisi bir denge konumu olduğu için cisim II den I konumuna tekrar dönmez.Bu durumda I denge konumu limit kararsız durumdur ve farksız denge durumu olarak nitelendirilir.

Bu basit örnekten görüldüğü üzere verilen bir denge konumunun kararlılığı hakkında hüküm verebilmek için ona mutlaka sonsuz küçük bir bozucu etki uygulanması gerekir.Geçici etkinin ortadan kalmasından sonra doğan hareketin karakteri kararlılık hakkında esas kriteri teşkil etmektedir.Sapmalar küçük kalarak hareket hep denge konumu civarında bulunuyorsa yani bir titreşim hareketi varsa o zaman kararlı bir denge konumu vardır denir.Kararlı denge halinde sistemin potansiyel enerjisi minimum değere kararsız denge halinde ise maksimum değere sahiptir.Farksız denge halinde ise herhangi bir yerdeğiştirme enerjiyi değiştirmez.

2.3. KARARLILIK KRİTERİ

Bir denge konumunun kararlılığının araştırılmasında belli başlı şu metodlarla yaklaşılabilir :

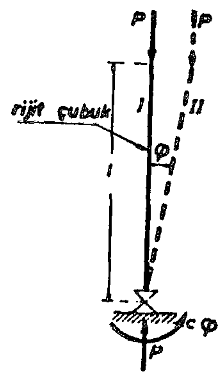
a)dinamik metod

b)enerji metodu

c)statik metod

Dinamik metodda bozulmuş konumun zamanla değişimi incelenirken enerji metodunda ise sistemin sahip olduğu toplam potansiyel enerjinin minimum oluşu konumun kararlılığı için kriterdir.Statik metodda ise incelenen denge konumunun çok yakınında daha başka denge konumlarının bulunup bulunmadığı araştırılır.

Bu metodları şekil 2.3 de verilen örnek üzerinde inceleyelim. ℓ uzunluğunda bir çubuk elastik bir mafsalla mesnetlenmiştir. c elastik mafsalın sabitidir. Sisteme I konumunda düşey P yükü etkimektedir ve I konumunun kararlı olabilmesi için hangi şartı gerçeklemesi gerektiği araştırılmaktadır.



Şekil 2.3

a) Dinamik metod :Konum yalnız φ açısıyla belirli olduğundan sistem bir serbestlik derecelidir. Sistemin $\varphi = 0$ konumu etrafındaki hareketlerini yani $\varphi(t)$ fonksiyonunu arayalım. Harekete katılan tek kitlenin çubuğun ucunda olduğunu ve değerinin P/g olduğunu kabul edelim.Buna göre hareket denklemi :

$$\frac{P}{g}.\ell^2.\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -c.\varphi + P.\ell.\sin\varphi \qquad \text{veya} \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{P\ell^2}(c.\varphi - P.\ell.\sin\varphi) = 0 \qquad (2.1)$$

olur.φ=0 civarında küçük sapmalı hareketler sözkonusu olacağından

$$\sin\varphi \cong \varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{P\ell^2}(c - P.\ell).\varphi = 0 \qquad (2.2)$$

elde olunur.Hareketin tipi ikinci terimin işaretine bağlıdır.Bu terim pozitif olursa denklem

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2.\varphi = 0 \quad , \quad \omega^2 = \frac{g}{P\ell^2}(c - P.\ell) > 0 \qquad (2.3)$$

şeklinde , φ=0 etrafında bir basit harmonik hareketi gösterir ve çözümü

$$\varphi = A.\sin\omega t + B.\cos\omega t$$

olur Burada A ve B başlangıç şartlarına yani sonsuz küçük bozucu etkilere bağlıdır. Örneğin t=0 için φ=0 ve $\dot\varphi$=a seçilecek olursa A=a/ω , B=0 olur.

$$\varphi(t) = a.\sin\omega t / \omega \qquad (2.4)$$

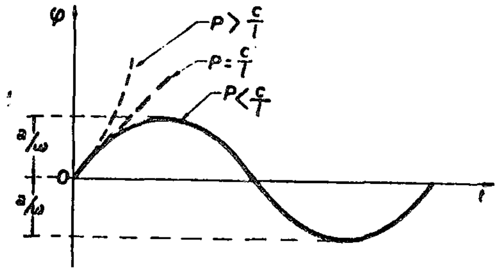
Burada a istenildiği kadar küçük seçilebilen başlangıçtaki açısal hızı gösterir. (2.4) denklemi grafik olarak şekil 2.4 de gösterilmiştir.Kararlılığın tarifine göre yani hareketin hep φ=0 etrafında kalabilmesi için (2.3) şartının sağlanması yeterlidir.

$$\omega^2 = \frac{g}{P\ell^2}(c - P.\ell) > 0 \quad \Rightarrow \quad (c - P.\ell) > 0 \quad \text{olmalıdır.}$$

O halde I konumu için kararlılık şartı

$$P < c/\ell \qquad (2.5)$$

olarak bulunur. Yük şiddeti c/ℓ ye ulaşır veya onu aşarsa ,hareket harmonik olmaktan çıkar ve denge konumu kararsız olur.Şekil 2.4 de her üç durumda da başlangıç hızı a aynı olduğu halde hareket tipleri farklıdır.Zaten kararlılığa ait (2.5) kriterinde başlangıç hızının rolü yoktur.



Şekil 2.4

b) Enerji metodu : Şekil 2.3 deki sistemin toplam potansiyel enerjisini hesap edelim.Sistemde iç kuvvetlerin potansiyel enerjisi yalnız elastik mesnetteki yayda olup

$$\Pi_i=\frac{1}{2}.c.\varphi^2 \tag{2.6}$$

değerindedir.Düşey P dış kuvveti için potansiyel ise

$$\Pi_d=P.\ell.\cos\varphi \tag{2.7}$$

değerini alır.Burada mesnet seviyesinde potansiyel sıfır kabul edilmiştir.Toplam potansiyel enerji ise

$$\Pi(\varphi)=\Pi_i+\Pi_d=\frac{1}{2}.c.\varphi^2+P.\ell.\cos\varphi \tag{2.8}$$

eder.Sistemlerin denge konumuna ait potansiyel enerjinin ekstramum olduğu mekaniğin genel bir prensibidir.Dirichlet ' ye göre ekstramum değer bir minimum ise o denge konumu kararlı olur.O halde (2.8) ifadesinin φ=0 da bir minimuma sahip olabilmesi için

$$\frac{d\Pi}{d\varphi}=0 \qquad \text{ve} \qquad \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2}>0 \tag{2.9}$$

şartları sağlanmalıdır.

$\varphi=0$ için $\quad \dfrac{d\Pi}{d\varphi}=c.\varphi - P.\ell.\sin\varphi$ eder , yani I konumu daima bir denge konumudur.Şimdi dengenin kararlılığını araştıralım.

$$\left(\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=0}=(c-P\,\ell.\cos\varphi)_{\varphi=0}>0 \qquad , \qquad c-P.\ell>0 \tag{2.10}$$

Bu ,(2.5)de bulunan kararlılık kriterinin aynısıdır.

c) Statik metod : Bu metodda ,incelenen I denge konumunun çok yakınında II gibi başka denge konumlarının bulunup bulunmadığı araştırılır.Yani söz konusu durumun bir farksız denge konumu olması için icap eden şartlar incelenir.Bu limit kararsız durum yardımıyla da kararlılık kriterine geçilir.

II konumu için denge şartı olarak

$$P.\ell.\sin\phi - c\phi=0 \tag{2.11}$$

$$P= c/\ell \;.\; \phi/\sin\phi \tag{2.12}$$

yazılabilir.Aranan II konumu I konumuna çok yakın olduğundan $\phi\rightarrow0$ alırsak ,

$$P=\frac{c}{\ell}\left(\frac{\phi}{\sin\phi}\right)_{\phi\rightarrow0}=\frac{c}{\ell}$$

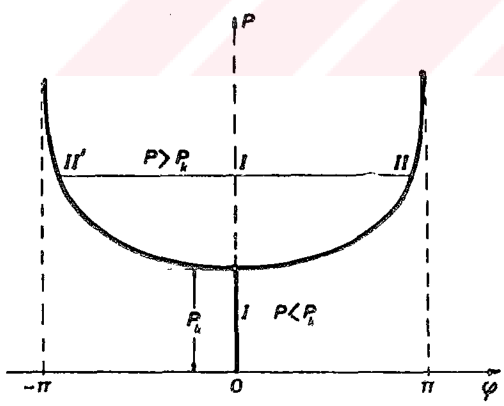
yazılabilir.O halde I konumunun farksız denge konumu olabilmesi için yükün

$$P_k=c/\ell \tag{2.13}$$

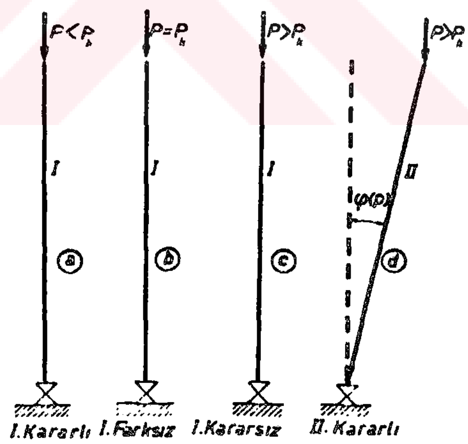
ile gösterilen kritik yük değerine ulaşması gerekir.

$$P< c/\ell =P_k \tag{2.14}$$

ise civarda başka denge konumu bulunmaz.Tek denge konumu I dir.O halde (2.14) şartı kararlılık kriteridir ve diğer metodlarla bulunan sonucun aynısıdır.Denge konumlarını tarif eden (2.12) fonksiyonu şekil 2.5 de (P,ϕ) eksenlerinde grafik olarak temsil edilmiştir.



Şekil 2.5



Şekil 2.6

$P < P_k$ halinde denge ancak $\phi=0$ için mümkün olduğundan eğri P ekseni üzerinde bulunur. $P=P_k$ olunca I denge konumu farksız olur.Bu noktada $P=P(\phi)$ eğrisi dallanmaya başlar. $P > P_k$ halinde üç konum mümkündür.Bir tanesi kararsız olan I konumu ,diğer ikisi de $\pm\phi$ ye karşılık gelen II ve II$'$ kararlı konumlarıdır.Yük-sapma eğrilerindeki bu çok değerlilik $P=P_k$ daki dallanmadan doğmuştur ve stabilitenin bu çeşidine dallanma tipi denir. Şekil 2.6 da ,anlatılan tüm bu denge konumları özetlenmiştir.

2.4.STABİLİTE PROBLEMLERİNİN ÇEŞİTLERİ

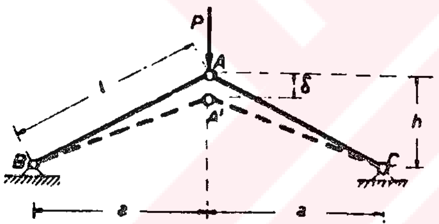
Stabilite problemleri kuvvet ile sapma arasındaki bağıntılarda mevcut olan çokdeğerlilik yönünden sınıflandırılabilir.

a) Dallanma tipi stabilite problemleri : Bu tipe şekil 2.3 deki basınç etkisindeki çubukta rastlamıştık.$P=P(\varphi)$ eğrisi $P=P_k$ noktasında dallanmakta ve aynı yüke üç ayrı denge konumu karşılık gelmekteydi.

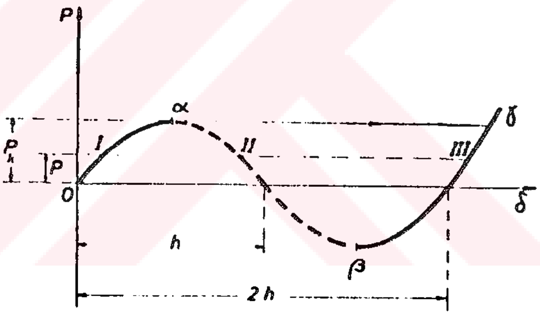
b)vurgu tipi stabilite problemi :Burada da çok değerlilik sözkonusudur ama nedeni yük-sapma eğrisindeki çok değerlilik değildir.Şekil 2.7 deki iki elastik çubuk birleşimi örneğinde $P=P(\delta)$ bağıntısını arayalım.Şekil değiştirmiş durum üzerindeki denge denklemleri yardımıyla bu bağıntı

$$P = 2EA\left(\frac{h-\delta}{\ell}\right)\left(\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 - 2h\delta + \delta^2}} - 1\right) \tag{2.15}$$

olarak elde edilir.Burada denge denklemleri şekil değiştirmiş hal üzerinden elde edildiği için P ile δ arasındaki bağıntı artık lineer değildir ve süperpozisyon geçmez.



Şekil 2.7

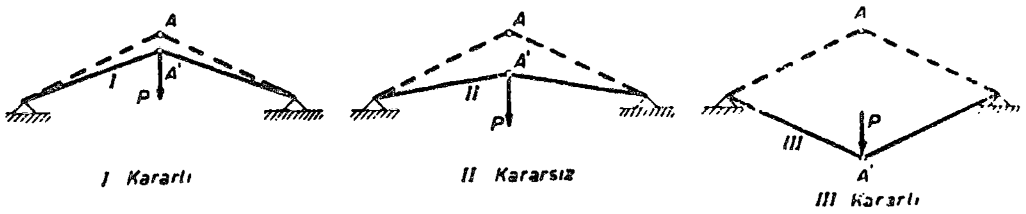


Şekil 2.8

(2.15) fonksiyonu (P,δ) düzleminde gösterilirse şekil 8. deki eğri elde olunur.Bu eğri δ eksenini $\delta=0$, $\delta=h$ ve $\delta=2h$ gibi üç noktada keser.Bunlardan ilki $P=0$, $\delta=0$ gibi sistemin gerilmesiz durumudur.İkinci noktada $P=0$ için $\delta=h$ etmektedir.Bu durumda iki basınç çubuğu da aynı doğru üzerinde bulunmakta ve iç kuvvetler yalnız kendi aralarında denge yapmaktadırlar.$\delta > h$ çökmeleri için $P<0$ olmakta , nihayet $\delta=2h$ da sistem yine bir gerilmesiz hale ulaşmaktadır.Bu durumdan itibaren yük arttıkça monoton bir şekilde çökmenin de artışı devam eder.

Eğrinin 0-α arasındaki konumları hep kararlı olduğu halde α-β arası tekrar kararlı denge konumlarına karşılık gelir.Durum α ya ulaştığında sistem ani bir şekilde vurgu yaparak γ konumuna geçtiğinden , α-β kararsız kolu üzerinde bir denge gerçeklemek mümkün değildir.$P_\alpha=P_k$ değerine kritik vurgu yükü ve bu tür stabilite problemlerine vurgu stabilitesi adı verilir.$P<P_k$ için şekil 2.8 den görüleceği üzere I, II, III gibi üç tane denge konumu sözkonusudur.Bunlardan I ve III kararlı olduğu halde II kararsızdır.

Şekil 2.9 da bu üç konum şematik olarak gösterilmiştir.



Şekil 2.9

2.5.BURKULMA

$P<P_k$ halinde kararlı olan I denge konumu , yük P_k sınırına erişince farksız olur ve II ilke gösterilen diğer bir formu da alabilir.Yük sabit kalarak çubuğun doğru formdan eğilmiş bir forma geçmesine burkulma denir.Mühendis için önemli olan nokta , çubuğun burkulmaması için gerekli tedbirleri öngörmektir.Eğer çubuk burkulacak olursa eğri formdan gelen ikincil zorlamalar o kadar büyük olur ki , bunların etkisinde çubuk derhal harap olur.

Bir elastik çubukta gerilme veya stabilite problemlerinden hangisinin ön planda bulunduğunu şu sayısal örnekle açıklayalım:1 cm. x 1 cm. kare kesitli bir çelik çubuk ele alalım.Boyu 100 cm. olan bu çubuğun uçları şekil 10. daki gibi mafsallı olsun..Buna ait stabilite sınırını gösteren kritik yük ,175 kg. gibi küçük bir değerdir.Basınç gerilmesi yönünden hiç önemi olmayan bu durumda stabilite olayının ön planda olduğu açıktır.Fakat çubuk boyu 50 cm. veya 25 cm. seçilecek olursa kritik yük 700 kg. , 2800 kg. gibi değerler almaya başlar.Bu da çubuk boyu kısaldıkça gerilme probleminin önem kazandığını gösterir.Özetle uzun ve narin bir çubukta stabilite ön planda gelen bir problem olduğu halde kısa ve ve bodur çubuklarda basınçtan ezilme ilk düşünülmesi gerekli tehlikedir.

3. STABİLİTE PROBLEMİNİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bir stabilite probleminin çözümü yani sistemin güvenlikle taşıyabileceği kritik yük P_k nın hesaplanması için çeşitli metodlar vardır.Bunlardan bazı temel metodlar şunlardır:

a)diferansiyel denklem metodu

b)matris determinant metodu

c)enerji metodu

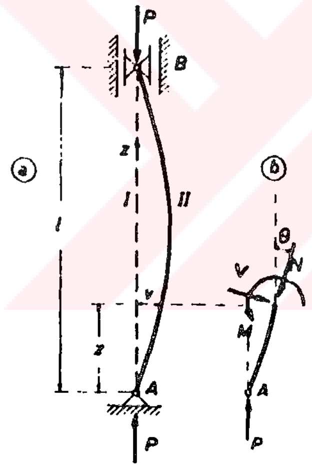
d)varyasyon metodu

e)yaklaşık metodlar

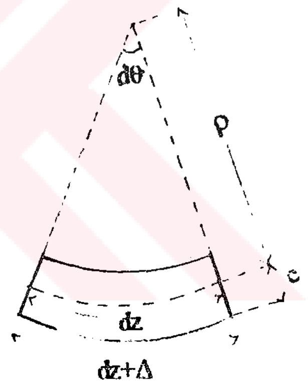
Bunlardan diferansiyel denklem metodu büyük sistemler için uygulanması imkansız hale gelecek kadar kullanışsızdır.Ancak stabilite teorisinin temelinin anlaşılabilmesi için çok önemli bir metoddur.

3.1 DİFERANSİYEL METOD

Şekil 3.1 deki sistemin I denge konumunun hangi şartlar altında kararlı olacağını incelemek istiyoruz. I konumunun çok yakınlarında II ile işaretli bir denge konumunun daha bulunduğunu ,diğer bir deyimle I konumunun farksız denge konumu olduğunu kabul edelim.



Şekil 3.1



Şekil 3.2

II denge formunu belirten v(z) elastik eğri fonksiyonunu arayalım.II formunda herhangi bir kesitteki iç kuvvetler , şekil 3.1.b den :

$$N = -P.\cos\theta \quad , \quad V = P.\sin\theta \quad , \quad M = P.v$$

II eğrisinin I e çok yakın olduğu düşünülürse

$\theta \cong \tan\theta = v'$, $\cos\theta = 1$ ve $\sin\theta = \theta$ alınabilir.Bu durumda kesit tesirleri :

$$N = -P \quad , \quad V = P.v' \quad , \quad M = P.v \tag{3.1}$$

II eğrisinin diferansiyel denklemini yazalım.Şekil 3.2 de II formundaki sistemden dz uzunluğunda bir eleman alınmıştır.dθ merkez açısının çok küçük olduğu dikkate alınırsa

$$d\theta = \frac{dz}{\rho} = \frac{dz + \Delta}{\rho + c} \tag{3.2}$$

yazılabilir.Buradan

$$\frac{c}{\rho} = \frac{\Delta}{dz} \tag{3.3}$$

bulunur. $\Delta /dz = \varepsilon = \sigma/E$ olduğundan

$$c/\rho = \sigma/E \tag{3.4}$$

yazılabilir.(3.4) denkleminde $\sigma = \frac{M}{I}.c$ yi yerine koyarsak

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{3.5}$$

elde edilir. dz elemanının formu bir çember yayı kabul edilirse

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2v}{dz^2}}{\pm\left[1 + (\frac{dv}{dz})^2\right]^{3/2}} \tag{3.6}$$

yazılabilir. Burada $(dv/dz)^2$, 1 in yanında ihmal edilebilir :

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{d^2v}{dz^2} \tag{3.7}$$

(3.7) ve (3.5) denklemlerini eşitlersek

$(d^2v/dz^2) = -M/EI = -P.v\ /EI$ veya

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{P}{EI}.v = 0 \tag{3.8}$$

şeklinde elastik eğrinin diferansiyel denklemi elde edilir.Bunun sınır şartları iki tanedir :

$$v(0)=0 \quad , \quad v(\ell)=0 \tag{3.9}$$

ve (3.8) diferansiyel denkleminin çözümü :

$$v(z)=A.\sin\lambda z+B.\cos\lambda z \tag{3.10}$$

burada $\lambda^2=P/EI$ (3.11)

(3.10) çözümünde $v(0)=0$ sınır şartı için $B=0$ bulunur.

$$v(z)=A.\sin\lambda z \tag{3.12}$$

$v(\ell)=0$ sınır şartı için $0=A.\sin\lambda\ell$ olur.Triviyal olmayan çözüm için $A\neq 0$ olması gerekir.O halde $\sin\lambda\ell=0$ ise

$$\lambda.\ell= n.\pi \tag{3.13}$$

bulunur.(3.11) ve (3.13) den yararlanarak

$$\lambda^2=n^2\pi^2/\ell^2 = P/EI \quad \text{veya} \quad P= n^2.\frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \tag{3.14}$$

şartı elde edilir.Başlangıçta I denge konumuna yakın başka denge konumlarının da bulunduğunu varsaymıştık.O halde P yükü P_k ile gösterilen kritik değerlere eşit olmalıdır.

$$P_k = n^2 \cdot \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \qquad n=1,2,3,\ldots \qquad (3.15)$$

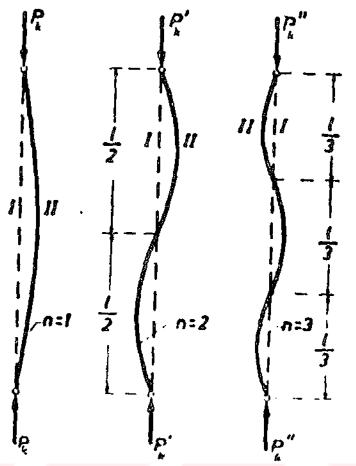
Çok sayıdaki bu özdeğerlere Euler kritik yükleri denir.Elastik çubuğun I ile işaretlenen doğru formu

$P<P_k$ için kararlı

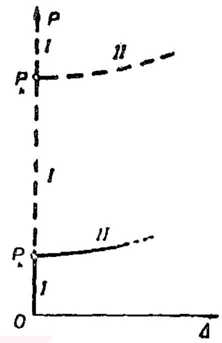
$P=P_k$ için farksız

$P>P_k$ için kararsız

olarak nitelendirilebilir.Şekil 3.3 de n=1, n=2 ve n=3 için II denge formu çizilmiştir. n>1 için olan kritik yüklere yüksek kritik yükler adı verilir. En küçük kritik yükün 4, 9, 16, ... katlarıdır. Hepsi ara dönüm noktaları içerirler ve kararsız denge konumlarıdır.



Şekil 3.3



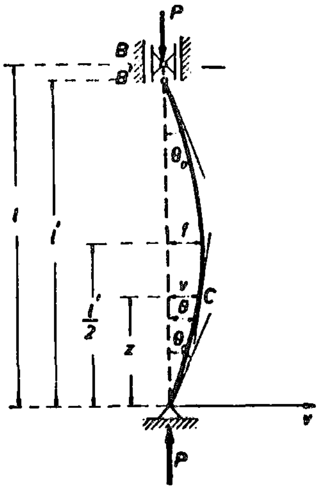
Şekil 3.4

Basınç etkisindeki elastik çubuğun kararlılık problemi dallanma tipindedir.Şekil 3.4 de n=1 ve n=2 halindeki kritik yüklere ait iki dallanma eğrisi gösterilmiştir.Eğriye ait apsis ekseni en büyük sapma olan olan A genliğini ifade eder.$P_k=\pi^2.EI/\ell^2$ ile gösterilen en küçük kritik yükte ilk dallanma olmakta ve II konumlarında A sıfırdan farklı değer almaktadır.$P>P_k$ yükleri için artık I formu kararsızdır.Bununla beraber $P=P_k'=4\pi^2.EI/\ell^2$ ve $P=P_k''=9\pi^2.EI/\ell^2$ vs. gibi yüksek kritik değerlerde tekrar dallanmalar vardır.Fakat bu dallanmaların hepsi başladığı noktalar gibi kararsız durumlara karşılık gelirler ve teknik için önemli değildirler.

3.1.1.ELASTİKA

Yukarıda iki ucu mafsallı elastik çubuğun I denge konumuna yakın olan II denge konumları incelenirken hesaplar lineer ve homojen diferansiyel denklemle yapıldı.Farksız denge konumunu belirten P_k kritik yükünü bu elemanter teori ile saptayabilmemize karşılık , A gibi bir sabit belirsiz kaldı.Bu sorun , eğriliği bulmak için yaklaşık olan d^2y/dx^2 ifadesini kullanmış olmamızdan ileri gelmektedir.Eğer $P\geq P_k$ yükleri için II denge formunu tam olarak bulmak istiyorsak , yukardaki elemanter teoriyi terketmek ve sapmaların sonlu olduğunu hesaba katarak daha kesin bir teori kurmak gerekir.$P\geq P_k$ yüklerine karşılık gelen bu sonlu sapmalı elastik eğriye elastika adı verilir.Şekil 3.5. de elastik eğrisi verilen basınç etkisindeki , iki ucu mafsallı elastik çubuğu inceleyelim.Buna ait diferansiyel denklem kurulurken sapmalar sonlu olduğu için moment - eğrilik bağıntısının (3.6) daki lineerleştirilmemiş ifadesi esas alınmalıdır.Yani ,

$$\frac{P.v}{E.I} = \frac{-v''}{(1+v'^2)^{3/2}}$$



Şekil 3.5

diferansiyel denklemi ile $v(0)=0$, $v(\ell')=0$ sınır şartları sözkonusu olacaktır. Problem bu haliyle nonlineer ve homojendir. Eğrinin herhangi bir noktasında teğetin eğim açısı θ ve eğri uzunluğu s ise

$$1/\rho = d\theta/ds = -P.v/EI \quad \text{veya} \quad d\theta/ds + P.v/EI = 0$$

yazılabilir. v yi yoketmek için tekrar türev alınır ve

$dv/ds = \sin\theta$ konursa

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{P}{EI}\sin\theta = 0 \tag{3.16}$$

denklemi bulunur . Bu denklemin sınır şartları

$s=0$ için $\theta=\theta_0$ ve $s=\ell/2$ için $\theta=0$ (3.17)

şeklindedir. Burada θ_0 , yalnız yüke bağlı bir parametredir ve başlangıçtaki teğetin açısını gösterir.(3.16) denklemi integre edilirse

$$s = \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{4P}{EI}\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}} \tag{3.18}$$

bulunur.Bu integral eliptik tiptendir ve normal forma sokularak tablo yardımıyla hesap edilir. $s=\ell/2$ için $\theta=0$ şartından yararlanarak θ_0 parametresine karşılık gelen P yükü elde edilir.θ_0 açısı sıfıra yaklaşacak olursa yük de P_k ile gösterilenkritik değere ulkaşır.Bu kesin teori de kritik yük için (3.15) de bulunan değeri aynen verir.Elastik eğrinin koordinatları ise $dz/ds=\cos\theta$, $dv/ds=\sin\theta$ bağıntılarından yararlanarak

$$z = \int_{\theta_0}^{\theta} \cos\theta.ds \qquad \text{ve} \qquad v = \int_{\theta_0}^{\theta} \sin\theta.ds \tag{3.19}$$

integralleriyle hesaplanır.:Özetlersek elastikanın belirlenmesinde şu sıra izlenir :

a) θ açısı belirlenir

b) (3.16) denklemi çözülür.

c) (3.17) denkleminde $s=\ell/2$ için $\theta=0$ şartından P elde edilir.

d) (3.18) den v ve z koordinatları hesaplanır.Bu arada ℓ' kiriş uzunluğu ve $v_{max}= f$ değeri de

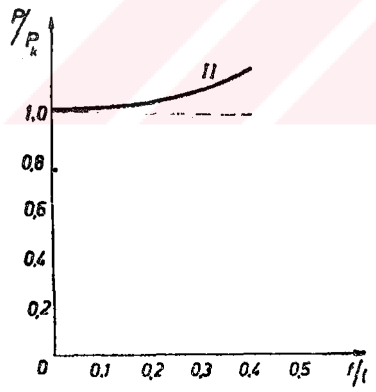
$$\ell' = \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \mathrm{Cos}\theta . ds \quad , \quad f = \int_{\theta_0}^{0} \mathrm{Sin}\theta . ds \tag{3.20}$$

şeklinde bulunur.Tablo 3.1 de, ana hatlarıyla açıklanan bu teoriden elde olunan bazı sonuçlar özetlenmiştir.

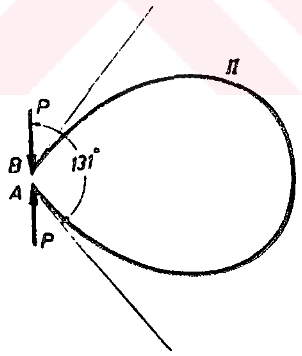
θ_0	0°	20°	40°	60°	80°	90°	100°	113°	120°	131°
P/P_k	1	1.015	1.064	1.152	1.294	1.393	1.518	1.734	1.885	2.193
f/ℓ	0	0.11	0.211	0.297	0.360	0.381	0.401	0.403	0.402	0.391
ℓ'/ℓ	1	0.97	0.881	0.741	0.559	0.457	0.349	0.203	0.123	0

Tablo 3.1

Tablonun incelenmesinden görülür ki yük değeri %1.5 gibi çok küçük bir miktarda aşılınca θ_0 açısı 20° ye , f sapması kolon uzunluğunun %11 ine ulaşmaktadır.Bu durum bize kritik değer civarının ne kadar tehlikeli bir bölge olduğunu , bu yükler altında sistemin derhal çökebileceğini gösterir.Şekil 3.6 da P/Pk - f /ℓ değişimi grafik olarak gösterilerek dallanma eğrisinin büyük sapmalar için kesin şekli elde edilmiştir.Tabloda θ_0=131° için ℓ'/ℓ=0 olmakta yani elastik çubuğun iki ucu birleşmektedir.Bu hal şekil 3.7 de çizilmiştir.



Şekil 3.6



Şekil 3.7

3.1.2.KESME KUVVETİNİN KRİTİK YÜKE ETKİSİ

Buraya kadar sürekli , eğriliğin eğilme momenti ile orantılı olduğu esasına dayanan (3.8) diferansiyel denklemini kullandık.Şimdi ise $T=P.v'$ ile ifade edilen kesme kuvvetinin etkisini hesap etmek istiyoruz.Bu durumda II elastik eğrisinin denklemi

$$\frac{d^2v}{dz^2}=\frac{d^2v_M}{dz^2}+\frac{d^2v_T}{dz^2}=-\frac{M}{EI}+\frac{k'}{GA}\frac{dT}{dz}=-\frac{Pv}{EI}+\frac{k'P}{GA}\frac{d^2v}{dz^2}$$

veya

$$\frac{d^2v}{dz^2}+\frac{P.v}{EI(1-\frac{k'P}{GA})}=0 \tag{3.21}$$

bulunur.Burada k' ,kesitin geometrisiyle ilgili geometrik bir çarpandır.Dikdörtgen kesitlerde 1,2 ,daire kesitlerde 1,11 değerini alır.Yukarıdaki denklem (3.9) sınır şartları altında integre edilirse en küçük P_k kritik yükü için

$$P_k=\frac{\pi^2EI}{\ell^2}(1-\frac{k'P_k}{GA}) \qquad \text{veya} \qquad P_k=\frac{\pi^2EI/\ell^2}{1+\frac{\pi^2EI}{\ell^2}\frac{k'}{GA}}=\frac{P_E}{1+\frac{P_E}{GA/k'}} \tag{3.22}$$

elde olunur.Burada $P_E=\pi^2EI/\ell^2$ ile , yalnız eğilme momenti dikkate alınarak bulunan kritik yük yani Euler yükü gösterilmiştir.(3.22) denkleminden açıkça görüldüğü üzere $Pk<P_E$ dir.Yani kesmenin hesaba katılması ,kritik yükü azaltıcı yönde bir etki yapmaktadır ve daha güvenli bir hesap tarzı vermektedir.Dolu kesitli sistemlerde kesmenin etkisi ihmal edilebilecek kadar küçüktür.Örnek olarak $\ell=35$ cm. ,A=1 cm.x 2 cm. ,$E=2.1*10^6$ kg/cm^2 , G=800000 kg/cm^2,k'=1.2 olan bir çubuğu ele alalım.

$P_E=\pi^2EI/\ell^2=(\pi^2*2.1*10^6*2.1^3/12)/35^2=2820$ kg

$$\frac{P_k}{P_E}=\frac{1}{1+\frac{k'P_E}{GA}}=\frac{1}{1+\frac{1.2*2820}{8*10^5*2}}=0.998$$

Bu örnekte kesmenin etkisi % 0.2 olmuştur.Çok parçalı kesitlerde ise kesmenin etkisi artmaya başlar.Öyle hallerde kesin hesap daha emin sonuçlar verdiği için etki ihmal edilemez.

3.1.3.KOLON HESAPLARI

Eksenel basınç etkisindeki kolonların stabilitesi ile ilgili problemleri ikiye ayırmak gereklidir : a)Kontrol problemi, b)Boyutlandırma problemi

Kontrol probleminde çubuğa ait ℓ_b burkulma uzunluğu, kesit boyutları ve eksenel P basınç kuvveti verilmiştir.Kolonun verilen yükü emniyetle taşıyıp taşıyamayacağı araştırılmaktadır.$\lambda=\ell_b/i_{min}$ olarak narinlik derecesi hesaplanır ; eğer $\lambda\geq\lambda_p$ ise Euler formülü uygulanarak σ_k bulunur.$\lambda<\lambda_p$ halinde seçilen $\sigma_k=f(\lambda)$ gibi bir burkulma yükü yardımıyla σ_k belirtilir ; elde edilen σ_k değeri kesit alanı ile çarpılarak $P_k=\sigma_k.A$ dan kritik yük hesaplanır.Son olarak kolonun kaldırabileceği P yükünün de

$$P\leq P_k/n \qquad n>1 \tag{3.23}$$

şartını gerçeklemesi gerekir.Burada n burkulmaya karşı güvenlik katsayısıdır.

Boyutlandırma problemine gelince burada ℓ_b burkulma uzunluğu ve kolonun kaldırması gerekli P yükü verilmiştir.İstenen kesit boyutlarıdır.Verilen P yükü, n güvenlik katsayısı ile çarpılarak $n.P=P_k$ kritik yükü bulunur.Sonra durum elastik bölgede kabul edilerek Euler formülünden

$$I_{gerekli}=n.P.\ell_b^{\,2}/\pi^2 E \tag{3.24}$$

den kesit için gerekli atalet momenti hesap edilir Bulunan değer kesidin en küçük atalet momentidir. Elastik olarak kabul edilen durumun sonuçta gerçeklenip gerçeklenmediğini kontrol etmek gerekir.Kesit bulunduktan sonra narinlik derecesi hesap edilir ve $\lambda\geq\lambda_p$ şartı araştırılır.Eğer $\lambda<\lambda_p$ çıkarsa kesidi tekrar aramak gereklidir.Bu gibi durumlarda çubuk için bir kesit tahmin edilir ve bunun yeterli olup olmadığı kontrol edilir.Seçilen kesit, yük için yeterli oluncaya kadar hesap tekrarlanır (yoklama ve arama yolu).Hesapları basitleştirmek için bu amaçla hazırlanmış tablolar da kullanılabilir.

3.1.4.BURKULMA ÇARPANI İLE HESAP

Burkulma hesaplarını basitleştirmek ve stabilite problemlerini bir gerilme problemi gibi ele alma arzusuyla bir hesap metodu geliştirilmiştir.Bu metodda, verilen P yükü ω ile çarpılır ve A kesit alanına bölünür.Elde edilen değerin o malzeme için kabul edilen çekme emniyet gerilmesine eşit olması

$$\sigma_{em}=P\omega/A \qquad (3.25)$$

gerekir.Burada P yükü

$$P= P_k/n= \sigma_k.A/n \qquad (3.26)$$

şartını sağlamalıdır.(3.25) ve (3.26) arasında P yokedilirse

$$\omega= n.\sigma_{em}/\sigma_k= \omega(\lambda) \qquad (3.27)$$

formülü bulunur.σ_k kritik gerilmesi narinlik derecesine bağlı olduğundan ω da ona bağlı olur.(3.27) den yararlanılarak bir (ω,λ) tablosu hazırlanırken şu noktalar önceden bilinmelidir : a)σ_{em} seçimi, b)n sayısının tesbiti, c)elastik olmayan bölgede σ_k formülünün belirtilmesi gibi.

Aşağıda örnek olarak verilen ω tablosu St.37 çeliği için hazırlanmıştır.Burada σ_f=2400 kg/cm^2, σ_p=1900 kg/cm^2,σ_{em}=1400 kg/cm^2,E=2,1x10^6 kg/cm^2 ve λ_p=105 olarak alınmış ve hesap edilmiştir.Emniyet katsayısı elastik bölge için n=2,4 sabit alınmış, yalnız narinliğin $20\leq\lambda\leq105$ arasındaki değerler için $1,71\leq n\leq2,4$ arasında doğrusal olarak değiştirilmiştir.$\lambda\leq20$ halinde de n=2400/1400=1,71 olarak yine sabit tutulmuştur.

λ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
ω	1	1	1	1.05	1.1	1.16	1.23	1.3	1.38	1.49	1.64	1.96	2.34	2.74	3.18	3.65

Tablo 3.2

ω sayılarına göre kesit kontrolü şu şekilde yapılacaktır : Çubuğun narinlik derecesine göre tablodan ω bulunacak, servis yükü bununla çarpılacak, elde edilen değer kesit alanına bölünecek ve

$$\omega.P/A \leq \sigma_{em}$$

şartının gerçeklenip gerçeklenmediğine bakılacaktır.Çekme çubuklarında ω=1 olduğu bilindiğine göre basınç altındaki kararsızlık tehlikesi $\omega\geq1$ için dikkate alınıyor demektir.

3.2.ELASTİK STABİLİTEDE MATRİS METODU

3.2.1. Varsayımlar

Probleme matrisyel yaklaşımı uygulayabilmek için şu varsayımları yapıyoruz :

I)-Büyük şekil değiştirmelerde malzeme ideal elastik kabul ediliyor.

II)-Yükün konservatif olduğu kabul ediliyor.Yani yük doğrultusu şekil değiştirme sonrası aynı kalıyor.(Bkz. Şekil 3.8)

Şekil 3.8

III)-Sistem kusursuzdur.Yani çubuk ekseni ideal doğrudur.

IV)-Yük ,orantılılık faktörü $\lambda > 0$ ile doğru orantılıdır.Her dış yük için

$R' = \lambda R$ bağıntısı geçerlidir.

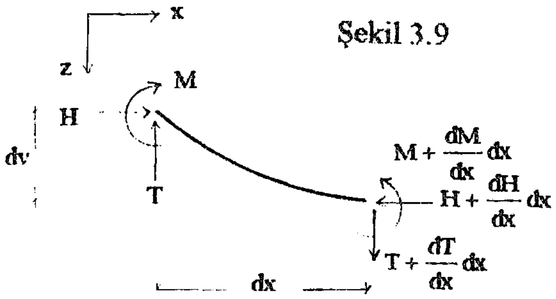
V)-Başlangıç durumu olan I konumunun ε civarında bütün iç kuvvetler λ ile doğru orantılıdır : $F' = \lambda F$

VI)-İnce cidarlı kesitlerde stabilite sınırı λ_k ya ulaşmadan önce buruşma başlayabilir.

VII)-Stabilite sınırına ulaşınca eğilme deformasyonlarının yanında kesit düzleminde dönme meydana gelebilir.Bu tür problemler eğilmeli burulma burkulması olarak isimlendirilir.Eğer ayrıca kesme kuvveti de varsa yanal burkulma problemi olarak nitelendirilir.

3.2.2. Temel Bağıntılar

Şekil 3.9 da gösterilen ,mesnet şartlarından bağımsız bir çubuğun II formuna ait dx elemanın dengesini inceleyelim.



Şekil 3.9

Şekil değiştirmiş durum üzerinde denge denklemlerini yazalım.

$$-T+T+\frac{dT}{dx}.dx=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dx}.dx=0$$

(3.28)

$$-H+H+\frac{dH}{dx}.dx=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dH}{dx}.dx=0$$

$$-M+M+\frac{dM}{dx}.dx \;-\; (T+\frac{dT}{dx}.dx).dx \;-\; (H+\frac{dH}{dx}.dx).dv=0 \qquad (3.29)$$

(3.28) den yararlanarak (3.29) ifadesini şu hale indirgeyebiliriz :

$$\frac{dM}{dx}.dx - T.dx - H.dv=0 \qquad \text{veya} \qquad \frac{dM}{dx} - T - H.\frac{dv}{dx}=0 \qquad (3.30)$$

Burada $M=-EI.\frac{d^2v}{dx^2}$ bağıntısı yerine konursa

$$T=(EI.v'')' - H.v'$$

buradan tekrar türev alınarak T kuvveti yok edilirse

$$EI.v^{IV} + H.v''=0 \qquad (3.31)$$

şeklinde aranan diferansiyel denklem elde edilmiş olur.

Bir çubukta bağımsız uç kuvvetlerini şekil 3.10. daki gibi seçersek

Şekil 3.10

ve küçük deformasyonlarda H ≈ N (normal kuvvet) alırsak (V).varsayım uyarınca

$$\lambda.F_1=N$$
$$\lambda.F_2=-M(0)=EI.v''(0)$$
$$\lambda.F_3=M(\ell)=-EI.v''(\ell)$$

yazılabilir.Buna göre (3.31) diferansiyel denklemi

$$EI.v^{IV}+\lambda.F_1.v''=0 \qquad (3.32)$$

şekline gelir.Burada

$$\kappa^2=\lambda.F_1/EI \qquad (3.33)$$

dönüşümü yapılırsa

$$v^{IV}+\kappa^2.v''=0 \qquad (3.34)$$

şeklinde çubuk burkulmasının diferansiyel denklemi elde edilir.Sabit katsayılı ,dördüncü mertebeden ,lineer ve homojen bu diferansiyel denklemin genel çözümü :

$$v = c_1 + c_2.x + c_3.\cos\kappa x + c_4.\sin\kappa x \tag{3.35}$$

c sabitlerinin bulunabilmesi için dört sınır şartının bilinmesi gereklidir.Bu sınır şartları (45) çözümü ile ifade edilirse

$$\begin{aligned} f_{11}.c_1 + f_{12}.c_2 + f_{13}.c_3 + f_{14}.c_4 &= 0 \\ f_{21}.c_1 + f_{22}.c_2 + f_{23}.c_3 + f_{24}.c_4 &= 0 \\ f_{31}.c_1 + f_{32}.c_2 + f_{33}.c_3 + f_{34}.c_4 &= 0 \\ f_{41}.c_1 + f_{42}.c_2 + f_{43}.c_3 + f_{44}.c_4 &= 0 \end{aligned} \tag{3.36}$$

şeklinde c_i sabitleri için dört tane lineer homojen denklem elde edilir.Bu denklem takımının $c_1=c_2=c_3=c_4=0$ triviyal çözümü I konumunu gösterir. Bundan başka bir konumun daha bulunması şartı ise katsayılar matrisinin determinantının sıfır olmasıdır.

$$\Delta(\kappa) = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.37}$$

Farksız dengenin mevcut olabilmesini ifade eden bu şarta burkulma şartı ve (3.37) determinantına da burkulma determinantı denir.$\Delta(\kappa)=0$ denkleminin en küçük kökü olan κ_1 bize teknik için önemli olan kritik yükü verir.Bu kritik yük (3.33) yardımıyla bulunur.

$$P_{kr} = \lambda.F_1 = \kappa_1^2.EI \tag{3.38}$$

3.2.3.BURKULMA DETERMİNANTI VE ELASTİK RİJİTLİK MATRİSİ $\underline{K}^e$ NİN OLUŞTURULMASI

Elastik sistemlerde deplasman metodunun temel bağıntısı

$$\underline{K}.\underline{r} = \underline{R}$$

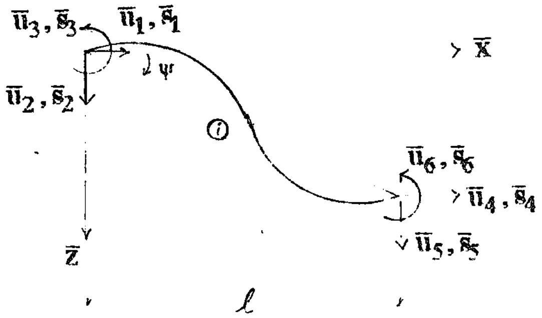
idi.Elastik stabilite problemlerinde deplasman metodunun bu bağıntısı ikinci bir denge konumu için yazılırsa ,(IV). varsayıma göre $\lambda R=R'$ olduğundan

$$\underline{K}(\lambda\underline{F}).\underline{r} = \lambda\underline{R} \tag{3.39}$$

bulunur.Burada (3.39) ifadesi için $0<\lambda<\lambda_k$ olmak üzere $\underline{r}$ lerin çözümü aranmaktadır. Ayrıca (3.39) ifadesinin bir çözümü olabilmesi için katsayılar matrisinin regüler olması yani determinantının sıfırdan farklı olması lazımdır.Bu kural bize kritik yük ($\lambda_k.\underline{R}$) nin bulunmasında Determinant Metodunun kullanılabileceğini gösterir.

Önce $\underline{R}' = \lambda\underline{R}$,$\lambda=\varepsilon$ gibi bir değerden başlanır,sonra λ ya gittikçe büyüyen değerler verilir ve her λ değeri için $\underline{K}(\lambda\underline{F})$rijitlik matrisinin determinantı hesaplanır.Determinantı sıfır yapan λ_k değeri ile $(\lambda_k.R)$ kritik yükü elde edilir.Böylece stabilite problemi bir rijitlik matrisi bulunması problemine dönüştürülmüş olur.

Şimdi sınır şartlarının en genel durumu için problemi inceleyelim.



$\psi = (\bar{u}_5 - \bar{u}_2)/\ell$

Şekil 3.11

Şekil 3.11 deki $\bar{u}_2$ ye paralel olarak kaydırılmış elemanda sınır şartları :

$$\begin{array}{llll} \bar{x} = 0 \text{ için} & v = 0 & \text{ve} & v' = -\bar{u}_3 \\ \bar{x} = \ell \text{ için} & v = \bar{u}_5 - \bar{u}_2 & \text{ve} & v' = -\bar{u}_6 \end{array} \tag{3.40}$$

Bu sınır şartlarını (3.35) denkleminde kullanalım.

$$\begin{aligned} v(0) &= c_1 + c_2.0 + c_3.\cos\kappa 0 + c_4.\sin\kappa 0 = c_1 + c_3 = 0 \\ v'(0) &= c_2 - c_3.\kappa.\sin\kappa 0 + c_4.\kappa.\cos\kappa 0 = c_2 - c_4.\kappa = -\bar{u}_3 \\ v(\ell) &= c_1 + c_2.\ell + c_3.\cos\kappa l + c_4.\sin\kappa\ell = \bar{u}_5 - \bar{u}_2 \\ v'(\ell) &= c_2 - c_3.\kappa.\sin\kappa\ell + c_4.\kappa.\cos\kappa\ell = -\bar{u}_6 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Bu denklem takımını matrisyel tarzda gösterelim

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \kappa \\ 1 & \ell & \cos\kappa\ell & \sin\kappa\ell \\ 0 & 1 & -\kappa\sin\kappa\ell & \kappa\cos\kappa\ell \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{u}_3 \\ \bar{u}_5 - \bar{u}_2 \\ -\bar{u}_6 \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

Buradan c_i sabitlerini belirleyelim

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{(\sin\kappa\ell - \kappa\ell\cos\kappa\ell)\bar{u}_3 + (\kappa\ell - \sin\kappa\ell)\bar{u}6 + \kappa(1-\cos\kappa\ell)(\bar{u}_5 - \bar{u}_2)}{2\kappa(1-\cos\kappa\ell) - \kappa^2\ell\sin\kappa\ell} \\ c_2 &= \frac{(\cos\kappa\ell - 1)\bar{u}_3 - (1-\cos\kappa\ell)\bar{u}_6 - \kappa\sin\kappa\ell(\bar{u}_5 - \bar{u}_2)}{2(1-\cos\kappa\ell) - \kappa\ell\sin\kappa\ell} \\ c_3 &= -c_1 \\ c_4 &= \frac{(\kappa\ell\sin\kappa\ell + \cos\kappa\ell - 1)\bar{u}_3 + (1-\cos\kappa\ell)\bar{u}6 + \kappa\sin\kappa\ell(\bar{u}_5 - \bar{u}_2)}{2\kappa(1-\cos\kappa\ell) - \kappa^2\ell\sin\kappa\ell} \end{aligned} \tag{3.43}$$

Böylece elastik eğrinin fonksiyonu belirlenmiş olur. $\underline{\overline{S}}$ çubuk uç kuvvetleri $\lambda.F_1$ e bağlı olarak v fonksiyonu ve türevleri yardımıyla hesaplanır.

$$\begin{aligned}
\overline{S}_1 &= -\lambda.F_1 \\
\overline{S}_2 &= -\lambda.F_1.\psi - \lambda(F_2+F_3)/\ell \\
\overline{S}_3 &= \lambda.F_2. = -M(0) = EI.v''(0) \\
\overline{S}_4 &= \lambda.F_1 \\
\overline{S}_5 &= \lambda.F_1.\psi + \lambda(F_2+F_3)/\ell \\
\overline{S}_6 &= \lambda.F_3 = M(\ell) = -EI.v''(\ell)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

veya $\underline{\overline{S}}^i = \underline{T}^i.\underline{F}^i$ şeklinde matrisyel tarzda gösterirsek

$$\begin{bmatrix} \overline{S}_1 \\ \overline{S}_2 \\ \overline{S}_3 \\ \overline{S}_4 \\ \overline{S}_5 \\ \overline{S}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ -\lambda.\psi & -\lambda/\ell & -\lambda/\ell \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ \lambda.\psi & \lambda/\ell & \lambda/\ell \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

Elastik eğrinin (3.35) denkleminin ikinci türevini yerine koyarsak

$$v''(x) = -\kappa^2.c_3.\cos\kappa x - \kappa^2.c_4.\sin\kappa x \tag{3.46}$$

ve (3.43) ifadelerinde şu dönüşümleri yaparsak

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{\sin\kappa\ell - \kappa\ell.\cos\kappa\ell}{2(1-\cos\kappa\ell) - \kappa\ell.\sin\kappa\ell}\kappa EI \\
\varphi_2 &= \frac{\kappa\ell - \sin\kappa\ell}{2(1-\cos\kappa\ell) - \kappa\ell.\sin\kappa\ell}\kappa EI
\end{aligned} \tag{3.47}$$

çubuk uç kuvvetlerini ,uç şekil değiştirmeleri cinsinden elde ederiz :

$$\begin{aligned}
\overline{S}_3 &= \varphi_1.\overline{u}_3 + \varphi_2.\overline{u}_6 + (\varphi_1 + \varphi_2)\psi \\
\overline{S}_6 &= \varphi_1.\overline{u}_3 + \varphi_2.\overline{u}_6 + (\varphi_1 + \varphi_2)\psi \\
\overline{S}_1 &= EA.(\overline{u}_1 - \overline{u}_4) \\
\overline{S}_4 &= EA.(-\overline{u}_1 + \overline{u}_4) \\
\overline{S}_2 &= -\lambda F_1(\overline{u}_5 - \overline{u}_2)/\ell - \overline{u}_3(\varphi_1 + \varphi_2)/\ell - \overline{u}_6(\varphi_1 + \varphi_2)/\ell - 2(\varphi_1 + \varphi_2)(\overline{u}_5 - \overline{u}_2)/\ell^2 \\
\overline{S}_5 &= \lambda F_1(\overline{u}_5 - \overline{u}_2)/\ell + \overline{u}_3(\varphi_1 + \varphi_2)/\ell + \overline{u}_6(\varphi_1 + \varphi_2)/\ell + 2(\varphi_1 + \varphi_2)(\overline{u}_5 - \overline{u}_2)/\ell^2
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Bu ifadelerde aşağıdaki kısaltmaları yaparsak

$$\overline{\varphi}_1=2/\ell^2.(\varphi_1+\varphi_2)+\lambda F_1/\ell$$

$$\overline{\varphi}_2=(\varphi_1+\varphi_2)/\ell \qquad (3.49)$$

çubuk uç kuvvetleri şu hale gelir :

$$\begin{aligned}
\overline{S}_1 &= EA.(\overline{u}_1-\overline{u}_4)\\
\overline{S}_2 &= \overline{\varphi}_1.\overline{u}_2-\overline{\varphi}_2.\overline{u}_3-\overline{\varphi}_1.\overline{u}_5-\overline{\varphi}_2.\overline{u}_6\\
\overline{S}_3 &= -\overline{\varphi}_2.\overline{u}_2+\varphi_1.\overline{u}_3+\overline{\varphi}_2.\overline{u}_5+\varphi_2\overline{u}_6\\
\overline{S}_4 &= EA.(-\overline{u}_1+\overline{u}_4)\\
\overline{S}_5 &= -\overline{\varphi}_1.\overline{u}_2+\overline{\varphi}_2.\overline{u}_3+\overline{\varphi}_1.\overline{u}_5+\overline{\varphi}_2.\overline{u}_6\\
\overline{S}_6 &= -\overline{\varphi}_2.\overline{u}_2+\varphi_1.\overline{u}_3+\overline{\varphi}_2.\overline{u}_5+\varphi_1\overline{u}_6
\end{aligned} \qquad (3.50)$$

(3.50) ifadelerini

$$\underline{\overline{S}}^i=\underline{\overline{k}}_F{}^i.\underline{\overline{u}}^i \qquad (3.51)$$

tarzında gösterirsek

$$\begin{bmatrix}\overline{S}_1\\\overline{S}_2\\\overline{S}_3\\\overline{S}_4\\\overline{S}_5\\\overline{S}_6\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}
EA./\ell & 0 & 0 & EA./\ell & 0 & 0\\
 & \overline{\varphi}_1 & -\overline{\varphi}_2 & 0 & -\overline{\varphi}_1 & -\overline{\varphi}_2\\
 & & \varphi_1 & 0 & \overline{\varphi}_2 & \varphi_2\\
\hline
 & & & EA./\ell & 0 & 0\\
 & \text{sim.} & & & -\overline{\varphi}_1 & -\overline{\varphi}_2\\
 & & & & & \varphi_1
\end{array}\right]\begin{bmatrix}\overline{u}_1\\\overline{u}_2\\\overline{u}_3\\\overline{u}_4\\\overline{u}_5\\\overline{u}_6\end{bmatrix} \qquad (3.52)$$

Böylece $\underline{\overline{u}}$ ile doğru orantılı değişen bir rijitlik bağıntısı elde edilmiş olur.Fakat burada rijitlik matrisi $\underline{\overline{k}}_F$,bilinmeyen λF_1 çubuk uç normal kuvvetlerine bağlıdır.

Burada $\underline{\overline{k}}_F{}^i$ matrisi yerel koordinatlarda oluşturulmuştur.Genel koordinatlara geçiş yapmak için (3.51) ifadesini soldan ,dönüşüm matrisi $\underline{\overline{L}}_D{}^i$ ile çarpalım.

$$\underline{\overline{L}}_D{}^i.\underline{\overline{S}}^i=\underline{S}^i=\underline{\overline{L}}_D{}^i.\underline{\overline{k}}_F{}^i.\underline{\overline{u}}^i \qquad (3.53)$$

Uç şekil değiştirmeleri için

$$\underline{\overline{u}}^i.(\underline{\overline{L}}_D{}^i)^T.\underline{u}^i$$

yazılırsa (3.53) ifadesi

$$\underline{S}^i=\underline{k}_F{}^i.\,\underline{u}^i \qquad (3.54)$$

haline gelir.Burada $\underline{k}_F{}^i$ rijitlik matrisi ,

$$\underline{k}_F{}^i=\underline{L}_D{}^i.\underline{\bar{k}}_F{}^i.(\underline{L}_D{}^i)^T \qquad (3.55)$$

şeklinde genel koordinatlarda elde edilir.

$$\underline{k}_F{}^i=\left[\begin{array}{ccc|ccc} c^2EA/\ell+s^2\overline{\varphi}_1 & sc(EA/\ell-\overline{\varphi}_1) & s.\overline{\varphi}_2 & -c^2EA/\ell-s^2\overline{\varphi}_1 & -sc(EA/\ell-\overline{\varphi}_1) & s\overline{\varphi}_2 \\ & s^2EA/\ell+c^2\overline{\varphi}_1 & -c\overline{\varphi}_2 & -sc(EA/\ell-\overline{\varphi}_1) & -s^2EA/\ell-c^2\overline{\varphi}_1 & -c\overline{\varphi}_2 \\ & & \varphi_1 & -s.\overline{\varphi}_2 & c\overline{\varphi}_2 & \varphi_2 \\ \hline & & & c^2EA/\ell+s^2\overline{\varphi}_1 & sc(EA/\ell-\overline{\varphi}_1) & -s.\overline{\varphi}_2 \\ & \text{sim.} & & & s^2EA/\ell+c^2\overline{\varphi}_1 & -c\overline{\varphi}_2 \\ & & & & & \overline{\varphi}_1 \end{array}\right]$$

(3.56)

burada $s=\sin\alpha=(z_r-z_\ell)/\ell \quad c=\cos\alpha=(x_r-x_\ell)/\ell$

(3.56) da bulduğumuz $\lambda F_1{}^i$ ye bağlı $\underline{k}_F{}^i(\lambda F_1{}^i)$ rijitlik matrisi yapı olarak $\underline{k}^i$ eleman rijitlik matrisine benzemektedir.Ama $\lambda F_1{}^i=0$ için $\underline{k}_F{}^i(\lambda F_1{}^i)$ matrisi oluşturulamaz.Çünkü $\overline{\varphi}_1$, $\overline{\varphi}_2$ parametreleri 0/0 gibi belirsiz değerler alır.Bu durumlar için l'Hospital kuralı uygulanırsa sınır değerler

$$\lim_{\lambda F_1\to 0}\overline{\varphi}_1=4EI/\ell$$
$$\lim_{\lambda F_1\to 0}\overline{\varphi}_2=2EI/\ell \qquad (3.57)$$

değerlerini alır.Böylece nonlineer olan eleman rijitlik matrisi $\underline{k}_F{}^i(\lambda F_1{}^i)$,lineer olan $\underline{k}^i$ eleman rijitlik matrisine eşit olur.Eleman rijitlik matrisleri $\underline{k}_F{}^i(\lambda F_1{}^i)$ lerden , direkt oluşturma yöntemiyle sistem rijitlik matrisi aşağıdaki şekilde teşkil edilebilir :

$$\underline{c}.\underline{k}_F.\underline{c}^T=\underline{K}(\lambda\underline{F}) \qquad (3.58)$$

ÖZET :

I)-Önce şekil değiştirmemiş sistemde lineer bir hesapla her elemandaki normal kuvvete karşılık gelen

$$\underline{F}_1{}^T=[\underline{F}_1{}^1.....\underline{F}_1{}^n]$$

vektörü tespit edilir.

II)-Bu bilinen normal kuvvetlerle her elemandaki κ^i değeri hesaplanır.

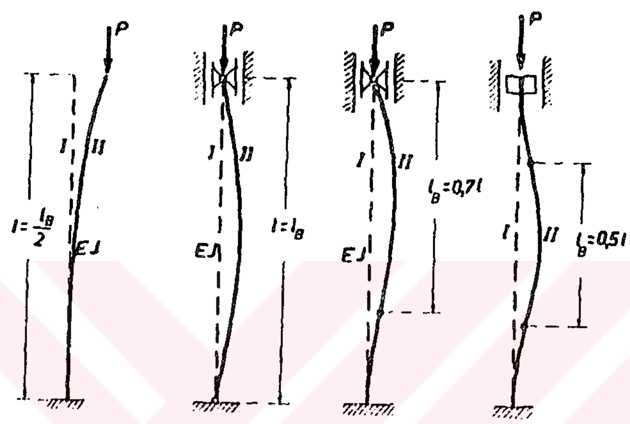
$$\kappa^T=\left[\sqrt{\frac{\lambda F_1{}^1}{EI}}\,........\sqrt{\frac{\lambda F_1{}^n}{EI}}\right]$$

III)-Her eleman için φ_1 , φ_2 ,$\overline{\varphi}_1$ ve $\overline{\varphi}_2$ parametreleri hesaplanarak ve normal kuvvetin işareti gözönünde tutularak $\underline{k}_F{}^i$ eleman rijitlik matrisi oluşturulur.

IV)-Direkt rijitlik metoduyla $\underline{K}(\lambda \underline{F}_1)$ sistem rijitlik matrisi elde edilir.

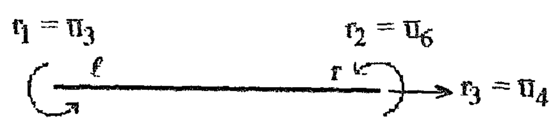
3.2.4. ÇEŞİTLİ MESNET ŞARTLARI İÇİN ÇÖZÜM

Determinant metodunun buraya kadar olan bölümlerinde mesnet şartlarından bağımsız bir eleman için çözüm bağıntılarını çıkardık.Şekil 3.12 de ,Euler halleri olarak adlandırılan dört farklı mesnetlenme biçimindeki , basınca maruz çubuklar gösterilmiştir. Şimdi 2. den başlamak üzere bu sistemleri inceleyelim :



Şekil 3.12

İlk önce düğüm noktası serbestlikleri tespit edilir(bkz. şekil 3.13). Çubuğun boyundaki değişme r_3 ,elastisite bağıntılarıyla hesap edilebilir ve tüm $\lambda<\lambda_k$ değerleri için $EA/\ell \,.\, r_3=\lambda.F_1$ yazılabilir.



Şekil 3.13

r_1 ve r_2 düğüm noktası dönmeleri olmak üzere moment denge denklemlerini yazalım.

2.Euler çubuğunun sınır şartları : $v''(0)=0$ ve $v''(\ell)=0$ olduğundan ,

$$\varphi_1.r_1 + \varphi_2.r_2 = 0 \qquad ((3.52) \text{ nin 3.satırından})$$
$$\varphi_2.r_1 + \varphi_1.r_2 = 0 \qquad ((3.52) \text{ nin 6.satırından})$$

Bu denklem sisteminin katsayılarından oluşan burkulma determinantı

$$\varphi_1^2 - \varphi_2^2=0$$

veya $(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1 + \varphi_2)=0$ olarak bulunur.

(3.47) yi yerine koymak suretiyle

$$2\sin\kappa\ell - \kappa\ell - \kappa\ell\cos\kappa\ell)(\kappa\ell - \kappa\ell\cos\kappa\ell)=0$$

denklemi elde edilir.İlk çarpanı sıfıra eşitlediğimizde

$$\kappa\ell = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$$

ikinci çarpanı sıfıra eşitlediğimizde

$$\kappa\ell = 2\pi, 4\pi, \ldots$$

bulunur. $\kappa\ell$ nin enküçük değeri olan π yi (3.33) nolu $\kappa^2=\lambda.F_1/EI$ bağıntısında kullanırsak kritik yük bulunur:

$$\lambda_k=\pi^2 EI / \ell^2 \qquad \text{(2.Euler çubuğu)} \qquad (3.59)$$

1.Euler çubuğu için hesapları tekrarlayalım.

Boş uçta kesme kuvveti ve moment değeri sıfır olduğundan

$$\overline{\varphi}_1.\underline{u}_5 + \overline{\varphi}_2.\underline{u}_6 = 0 \qquad \text{((3.52) nin 5.satırından)}$$

$$\overline{\varphi}_2.\underline{u}_5 + \overline{\varphi}_1.\underline{u}_6 = 0 \qquad \text{((3.52) nin 6.satırından)}$$

Buradan burkulma determinantı

$$\overline{\varphi}_1.\varphi_1 - \overline{\varphi}_2^2 = 0$$

veya $\kappa^5/\ell.\cos\kappa\ell = 0$ olarak bulunur.

Bunun kökleri

$$\kappa\ell = \pi/2, 3\pi/2, \ldots (2n+1)\pi/2$$

özdeğerlerini verir.En küçük köke göre bulunacak kritik yük (3.33) den

$$\lambda_k=(\pi/2)^2 EI / \ell^2 = \pi^2 EI / 4\ell^2 \qquad \text{(1.Euler çubuğu)} \qquad (3.60)$$

3. Euler çubuğu için kritik yükü bulalım :

Kayıcı mesnette moment sıfır olduğundan

$$\varphi_1.\underline{u}_6 = 0 \qquad \text{((3.52) nin 6.satırından)}$$

yazılabilir.Burada $\underline{u}_6 \neq 0$ olduğundan $\varphi_1 = 0$ olur.

$$\varphi_1 = \frac{\sin\kappa\ell - \kappa\ell.\cos\kappa\ell}{2(1-\cos\kappa\ell) - \kappa\ell.\sin\kappa\ell}\kappa EI = 0$$

$$\sin\kappa\ell - \kappa\ell.\cos\kappa\ell = 0$$

$$\tan\kappa\ell = \kappa\ell$$

eşitliği elde edilir.Bu denklemin sıfırdan farklı en küçük kökü $\kappa\ell=4.493$ bulunur

Buna göre kritik yük (3.33) den

$$\lambda_k=(4.493/\ell)^2 EI = 2.04.\pi^2 EI/\ell^2 \qquad \text{(3.Euler çubuğu)} \qquad (3.61)$$

4. Euler çubuğu için benzeri işlemlerle burkulma şartı olarak

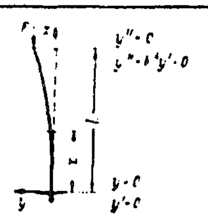
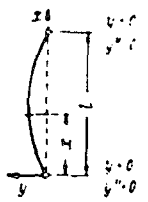
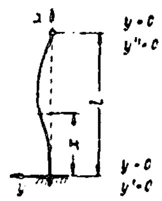
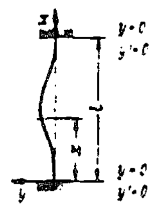
$$2\kappa(1-\cos\kappa\ell)-\kappa^2\ell.\sin\kappa\ell=0$$

elde edilir.Bu denklemin en küçük kökü $\kappa\ell=2\pi$ bulunur.(3.33)den

$$\lambda_k=4.\pi^2EI/\ell^2 \qquad \text{(4.Euler çubuğu)} \qquad (3.62)$$

Aşağıdaki tabloda , bulunan sonuçlar özetlenmiştir.

Tablo 3.3

Eulerfall	I	II	III	IV
				
Burkulma determinantı	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & \frac{1}{l} & 0 \\ -k^2\cos kl & -k^2\sin kl & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k^2}{l} & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -k^2 & 0 & 0 & 0 \\ \cos kl & \sin kl & 1 & 1 \\ -k^2\cos kl & -k^2\sin kl & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \cos kl & \sin kl & 1 & 1 \\ 0 & k & \frac{1}{l} & 0 \\ -k^2\cos kl & -k^2\sin kl & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & \frac{1}{l} & 0 \\ \cos kl & \sin kl & 1 & 1 \\ -k^2\sin kl & -k^2\cos kl & \frac{1}{l} & 0 \end{vmatrix}$
Burkulma denklemi	$\cos kl=0$	$\sin kl=0$	$\tan kl-kl=0$	$\sin\frac{kl}{2}\left(\tan\frac{kl}{2}-\frac{kl}{2}\right)=0$
En küçük kök $kl=l\sqrt{\frac{P}{EJ}}$	$\frac{\pi}{2}$	π	4,493	2π
$P_{kr}=$	$\frac{\pi^2EJ}{4l^2}=\frac{\pi^2EJ}{(2l)^2}$	$\frac{\pi^2EJ}{l^2}$	$\frac{4{,}493^2EJ}{l^2}\approx\frac{\pi^2EJ}{(0{,}7l)^2}$	$\frac{4\pi^2EJ}{l^2}=\frac{\pi^2EJ}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}$

Dört Euler haline ait (3.59),(3.60),(3.61),(3.62) formüllerinden görülüyor ki mesnetler deplasman yönünden ne kadar bağlı ise ona göre kritik yükün değeri de artmaktadır. 1.Euler çubuğunu esas alacak olursak 2. mesnet hali için bulunan yük bunun 4 katı ,3 de ise yaklaşık 8 katı ve 4 hali için de tam 16 katıdır.

Kritik yük formüllerinde geçen I atalet momenti kesitin en küçük atalet momenti olan I_{min} dur.Kesitin iki asal ekseninden en büyük atalet momentini veren eksen , daima çubuğun burkulma doğrultusunu gösterir.

3.2.5.BURKULMA UZUNLUĞU

Çeşitli mesnet şartları için bulunan kritik yük formüllerinin hepsini tek bir form altında toplamak olanaklıdır.Genel ifadeyle

$$P_k=\frac{\pi^2 EI}{\ell_b^{\,2}} \tag{3.63}$$

yazılabilir.Burada ℓ_b burkulma uzunluğunu gösterir.Çeşitli mesnet şartları için şu değerleri alır : 1)$\ell_b=2\ell$ 2)$\ell_b=\ell$ 3)$\ell_b=0.7\ell$ 4)$\ell_b=0.5\ell$
Mesnet durumuna göre bu uzunluk bazen kolonun uzunluğundan fazla , bazen eşit ve bazı halde de küçük olur.Burkulma uzunluğu kavramına geometrik bir anlam vermek de mümkündür.Bu uzunluk II denge konumuna ait elastik eğrinin iki M=0 dönüm noktası arasındaki mesafedir.

3.2.6.GEOMETRİK RİJİTLİK MATRİSİ $\underline{K}^g$ NİN OLUŞTURULMASI VE DETERMİNANT METODUYLA ÇÖZÜM

Bu bölümde lineerleştirilmiş bir burkulma yükü hesabından bahsedilecek , eleman düzleminde civar konumlar arasında bir lineer yaklaşım yapılacaktır.Geometrik rijitlik matrisi , (3.52) de verilen ,çubuğun nonlineer rijitlik matrisinden yararlanarak kurulacaktır.Bunun için Castigliano 'nun çözümü ve determinant metodunun çözümü birlikte kullanılacaktır.Bunun başlangıç eşitliği , (3.51) den hatırlarsak

$$\underline{\bar{S}}^i=\underline{\bar{k}}_F^{\,i}(\lambda F_1^{\,i}).\underline{\bar{u}}^i$$

şeklindeydi.Burada $\underline{k}_F^{\,i}$, F_1 in transandant bir fonksiyonudur.i elemanında $F_1^{\,i}$ belli bir λ değerine kadar belirlidir.O yüzden

$$\underline{\bar{S}}^i=\underline{\bar{k}}_F^{\,i}(\lambda).\underline{\bar{u}}^i \tag{3.64}$$

şeklinde yazabiliriz.Bu eşitliği başlangıç değer λ_o olmak üzere Taylor serisine açarsak

$$\underline{\bar{S}}=\underline{\bar{k}}_F(\lambda_o).\underline{\bar{u}}+(\lambda-\lambda_o)\frac{d}{d\lambda}\{\underline{\bar{k}}_F(\lambda_o)\}\underline{\bar{u}}+\text{kalan} \tag{3.65}$$

Lineer bir hesap yaptığımızdan 2 terimden sonrası terkediliyor.İlk parçası için sınır değer $\underline{\bar{k}}_e^{\,i}$ $\lambda_o\to 0$ iken belli olduğundan $\underline{\bar{k}}_e^{\,i}$ matrisini elemanın rijitlik matrisi $\underline{\bar{k}}^i_{r\,3x3}$ den yararlanarak da bulabiliriz.

$$\underline{\bar{k}}_e^{\,i}=\underline{T}^i.\underline{k}_r^{\,i}.(\underline{T}^i)^T$$

$$\underline{\bar{k}}_e^{\,i} = \underset{\lambda_0 \to 0}{\ell im}\ \underline{\bar{k}}_F(\lambda_0) = \begin{bmatrix} EA/\ell & 0 & 0 & -EA/\ell & 0 & 0 \\ & 12EI/\ell^3 & -6EI/\ell^2 & 0 & 12EI/\ell^3 & -6EI/\ell^2 \\ & & 4EI/\ell^2 & 0 & 6EI//\ell^3 & 2EI/\ell^2 \\ & & & EA/\ell & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & 12EI/\ell^3 & -6EI/\ell^2 \\ & & & & & 4EI/\ell^2 \end{bmatrix}$$

(3.66)

Genel koordinatlara dönüştürürsek $\underline{k}_e^{\,i}$, tablolarda verilmiş eleman rijitlik matrisi $\underline{k}^i$ ile eşdeğerdir. $\lambda_0 \to 0$ iken (3.65) in ikinci kısmını alırsak şu türev hesaplanmalıdır :

$$\frac{d}{d\lambda}\left\{\underline{\bar{k}}_F(\lambda_0)\right\}$$

Böylece geometrik rijitlik matrisinin elemanları

$$\underline{\bar{k}}_g^{\,i} = \lambda.\ \underset{\lambda_0 \to O}{\ell im}\ \frac{d}{d\lambda}\left\{\underline{\bar{k}}_F(\lambda_0)\right\} \qquad \text{şeklinde bulunur.}$$

$\underline{\bar{k}}_F^{\,i}(\lambda)$ nın sınır değerlerinin hesabı çok fazla işlem gerektirir.En azından şu sınır değerler hesaplanmalıdır :

$$\underset{\lambda_0 \to O}{\ell im}\ \frac{d\varphi_1(\lambda_0)}{d\lambda} \qquad \text{ve} \qquad \underset{\lambda_0 \to O}{\ell im}\ \frac{d\varphi_2(\lambda_0)}{d\lambda}$$

l'Hospital kuralı ile hesaplamak için Z_1 ve Z_2 fonksiyonlarının türevi ve müşterek N fonksiyonunun teşkil edilmesi gereklidir. Burada $x=\kappa\ell$ olmak üzere

$(-1/F_1.\ell).Z_1 = (\sin x - x.\cos x + x^2.\sin x)(2 - 2\cos x - x.\sin x) - x(\sin x - x.\cos x)^2$
$(-1/F_1.\ell).Z_2 = (2x - \sin x - x.\cos x)(2 - 2\cos x - x.\sin x) - (x^2 - x.\sin x)(\sin x - x.\cos x)$
$N = 2x(2 - 2\cos x - x.\sin x)^2$

Z_1 , Z_2 ve N fonksiyonlarının sıfır elde etmek için i. inci türevlerine kadar götürülür.Ancak i=9 da (0/0) olmayan belirli bir ifade elde edilir.

$(-1/F_1.\ell)(d^9Z_1/dx^9)=2(128x^2.\cos x^2+x^2\cos x-128x^2.\sin x^2+1280x.\cos x.\sin x+19x.\sin x-256\cos x^2-80\cos x+256\sin x^2)$

$(-1/F_1.\ell)(d^9Z_2/dx^9) = -x^3.\sin x + 24x^2.\cos x +168x.\sin x + 512\cos x^2 - 344\cos x -512\sin x^2$

$d^9N/dx^9 = 8(128x^3.cosx.sinx - 608x^2.cosx^2 - x^2.cosx + 608x^2.sinx^2 - 2816x.cosx.sinx - 16x.sinx + 576cosx^2 + 54cosx - 576sinx^2)$

x=0 için şu değerler bulunur :

$$\lim_{x\to 0} \frac{Z_1}{N} = \frac{2}{15} F_1.\ell \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{Z_2}{N} = -\frac{1}{30} F_1.\ell$$

Bu türevler hesaplandıktan sonra yerel koordinatlarda geometrik rijitlik matrisi elde edilir.

$$\bar{\underline{k}}_g^i = F_1 . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 6/5\ell & -1/10 & 0 & -6/5\ell & 1/10 \\ & & 2\ell/15 & 0 & 1/10 & -\ell/30 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 6/5\ell & 1/10 \\ & & & & & 2\ell/15 \end{bmatrix} \tag{3.67}$$

Bu matrisi (3.55) de yaptığımız şekilde genel koordinatlara çevirebiliriz.

$$\underline{k}_g^i = \frac{F_1}{30\ell} \begin{bmatrix} 36s^2 & -36sc & 3s\ell & -36s^2 & 36sc & 3s\ell \\ & 36c^2 & -3c\ell & 36sc & -36c^2 & -3c\ell \\ & & 4\ell^2 & -3s\ell & 3c\ell & -\ell^2 \\ & & & 36s^2 & -36sc & -3s\ell \\ & & & & 36c^2 & 3c\ell \\ & & & & & 4\ell^2 \end{bmatrix} \tag{3.68}$$

$c = \cos\alpha = (x_r - x_\ell) / \ell_i \qquad s = \sin\alpha = (z_r - z_\ell) / \ell_i$

Böylece çubuk elemanlarının nonlineer rijitlik matrisine lineer yaklaşım ve çubuk uç kuvvetleri belirlenmiş olur :

$$\underline{k}_T^i(\lambda) = \underline{k}_e^i + \lambda \underline{k}_g^i \tag{3.69}$$

$$\underline{S}^i(\lambda) = \underline{k}_e^i \underline{u}^i + \lambda \underline{k}_g^i \underline{u}^i \tag{3.70}$$

(3.69) ve (3.70) deki önemli rijitlik bağıntıları yardımıyla şimdi sistemin civar konumlardaki toplam rijitliği hesaplanabilir. $\lambda\underline{R}$ dış yükü için

$$(\underline{K}^e + \lambda \underline{K}^g).\underline{r} = \lambda \underline{R} \tag{3.71}$$

yazılabilir. $\underline{K}^e$, lineer toplam rijitlik matrisidir ve bu bildiğimiz $\underline{K}$ matrisinin aynısıdır. $\underline{K}^g$ geometrik rijitlik matrisidir ve (68) eleman rijitlik matrisi ile teşkil edilebilir.Bu matrislerin kurulması ,direkt yöntemle yapılır.

Virtüel iş prensibine göre aşağıdaki teorem yazılabilir:

Teorem: Bir sisteme verilen $\underline{\hat{r}} \neq 0$ virtüel yer değiştirmenin dış kuvvetlerle yaptığı virtüel iş sıfır olursa o sistem instabildir.

(3.70) i soldan $\underline{\hat{r}}$ ile çarpalım.

$$\underline{\hat{r}}^T(\underline{K}^e + \lambda \underline{K}^g).\underline{r} - \lambda \underline{\hat{r}}^T \underline{R} = 0 \qquad (3.72)$$

$\underline{\hat{r}} \neq 0$ olduğundan

$$(\underline{K}^e + \lambda \underline{K}^g).\underline{r} = \underline{0} \qquad (3.73)$$

şeklinde , elastik stabilitenin temel bağıntısı elde edilir.

(3.73) denkleminin formu , bir genel özdeğer problemi olarak tanımlanabilir. n x n boyutlu $\underline{K}^e$ ve $\underline{K}^g$ matrisleri için $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ gibi n tane özdeğer ve bu özdeğerlere karşılık gelen $r_1, r_2, \ldots, r_n$ özvektörleri elde edilir.

Teorem: (3.73) Temel bağıntısının en küçük pozitif özdeğeri $\lambda = \lambda_k$, bize sistemin kritik yükünü verir.

$$\underline{R}_k = \lambda.\underline{R} \qquad (3.74)$$

Genel bir özdeğer probleminin çözümü , lineer denklemin tekrar tekrar çözümlerinin birleşimi ile elde edilir.Özel özdeğer problemlerinin çözümü bu kadar çok işlem gerektirmez.Bu sebepten genel özdeğer problemlerini özel özdeğer problemlerine dönüştürerek çözmek uygun olur.Daha önceden Bölüm 1.4 de açıklanan bu dönüştürme işlemi aşağıda özetlenmiştir :

$$(\underline{K}^e + \lambda \underline{K}^g).\underline{r} = \underline{0} \qquad (3.75)$$

denkleminde pozitif , tanımlı olan $\underline{K}^e$ matrisini $\underline{L}$ ve $\underline{L}^T$ ye ayırabiliriz. $\underline{L}^T.\underline{r}$ çarpımını $\underline{\tilde{r}}$ ile ifade edersek $\underline{L}$ nin inversinin alınması ve soldan bu inversle çarpılması sonucunda özel özdeğer problemi elde edilir.

$$(\underline{\tilde{K}} - \Lambda I).\underline{\tilde{r}} = \underline{0} \qquad (3.76)$$

Burada

$$\underline{K}^e = \underline{L}.\underline{L}^T$$

$$\underline{\tilde{K}} = \underline{L}^{-1}.\underline{K}^g.(\underline{L}^{-1})^T \qquad (3.77)$$

$$\Lambda = -1/\lambda$$

Λ özdeğerleri ve $\underline{\tilde{r}}$ özvektörleri bulunduktan sonra aşağıdaki dönüşümlerle λ ve $\underline{r}$ hesaplanır.

$$\lambda = -1/\Lambda \quad , \quad \underline{r} = (\underline{L}^{-1})^T.\underline{\tilde{r}} \qquad (3.78)$$

3.3.MC MINN ' İN YAKLAŞIK STABİLİTE HESABI

Yöntemin avantajları :

-Oldukça küçük matrislerle çalışılması işlem kolaylığı sağlar.Örneğin iki açıklıklı, 10 katlı bir çerçeve için matris metodunda 90x90 boyutunda matrislerle işlem yapmak gerekli iken, Mc Minn'in metodunda 10x10 luk matrislerin kullanımı yeterlidir.

-Kesin hesaba oldukça yakın sonuç verir.Matris metodu referans alındığında hata %1 civarında kalmaktadır.

-Programlamaya, dolayısıyla farklı kesitler için defalarca çözüm yaparak boyut optimizasyonu sağlamaya elverişlidir.

Yöntemin dezavantajları :

-Simetrik yük sınırlaması vardır.

-Yüksek narinlik dereceleri için sonuç vermez.

-Tabloların kullanılabilmesi için birimler inch ve tona dönüştürülmelidir.

Rijit Çerçevelerin Stabilitesi

Stabilite kriteri şudur : Yapı yüklü iken ek yük veya rastlantısal bir yerdeğiştirme gibi herhangi bir bozucu etkiye pozitif bir dayanım göstermelidir.Bu stabilite yapının titreşimi ile bağlantılıdır.Çünkü bozucu etkinin uygulanması, yapının boyutlarına, malzemesine ve taşıdığı yüke bağlı titreşim peryodu ile denge durumu etrafında sallanmasına yolaçar.Yükleme sıfırdan başlayarak artırılırken, bozucu etkiye karşı dayanım düşer, titreşim peryodu yükselir.Kritik yüke ulaşıldığında yapı hiçbir dayanım gösteremez ve titreşim peryodu sonsuz olur.Kritik yükün üzerine çıkıldığında dayanım negatif olur.Yani yapı bozucu etkiden uzaklaşarak yeni bir konuma ulaşır.

Yöntemin temel rijitlik bağıntısı

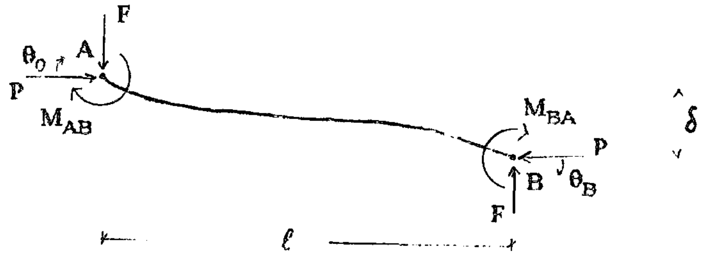
$$W_D = K_D . \Delta_D \tag{3.79}$$

şeklinde olup burada W_D dış yük vektörü, K_D rijitlik matrisi, Δ_D yerdeğiştirme vektörüdür.

Dayanım pozitif ise her W_D için belirli bir Δ_D değeri vardır.Kritik yük durumunda Δ_D nin elemanları sonsuz veya belirsiz olur.

3.3.1 YANAL DEPLASMAN YAPMAYAN SİSTEMLERDE McMINN METODU

Yanal deplasman yapmayan sistemlerde çerçevenin göçmesi, bir veya daha fazla düğüm noktasının dönmesi şeklindedir.



Şekil 3.14

$$M_{AB} = E.k.s\left[\theta_A + c.\theta_B - (1+c)\delta/\ell\right] \tag{3.80}$$

$$M_{BA} = E.k.s\left[c.\theta_A + \theta_B - (1+c)\delta/\ell\right] \tag{3.81}$$

Burada $k=I/\ell$ ve s rijitlik katsayısıdır.c, eksenel yük P ye bağlı carry-over katsayısıdır.Bunlar $\rho=P/P_E$ nin farklı değerleri için tablo haline getirilerek tablo 3.4 ve grafik gösterimi bölüm sonunda verilmiştir.Bu tablolar hakkında ayrıntılı bilgi Livesley ve Chandler'ın Stability Functions for Structural Frameworks, Manchester University yayınında bulunabilir.

$P=0$ iken $s=4$ ve $c=1/2$ olur

$P=P_E=\pi^2.E.I/\ell^2$ iken $s=2.4674$, $c=1$ olur.

$P=2.05.P_E$ iken $s=0$, $c=\infty$ olur.

Eğer çerçevedeki bir i düğüm noktası θ_i kadar döndürülürse, hareket üretmek için gerekli moment :

$$M_i' = \theta_i \sum E.s.k \tag{3.82}$$
$$= E.\theta_i \sum (s.k)_{ij}$$

j, i ye bağlı komşu düğüm noktasıdır.Eğer j ,θ_j kadar döndürülürse i deki moment :

$$M_i'' = E\theta_j (s.k.c)_{ij} \tag{3.83}$$

ve tüm düğüm noktaları döndüğünde i deki moment :

$$M_i = E\left[\theta_i \sum (s.k)_{ij} + \sum \theta_j (s.k.c)_{ij}\right] \tag{3.84}$$

Matrisyel gösterimle :

$$W_D = \{M_1\; M_2\; \ldots\; M_n\}$$
$$\Delta_D = \{\theta_1\; \theta_2\; \ldots\; \theta_n\} \quad (3.85)$$

$$W_D = E.K_D.\Delta_D \quad (3.86)$$

Burada K_D *nin elemanları* :

k_{ii}= i D.N. da birleşen elemanların s.k toplamı $= \sum(s.k)_{ij}$

(3.87)

k_{ij}=ij elemanı için s.k.c değeri $=(s.k.c)_{ij}$

Çerçeve kritik yükünü taşırken K_D singülerdir.Yani $\det K_D=0$ dır.Bu kritik yüke deneme yanılma yöntemiyle ulaşılabilir.Ancak birçok yük için K_D nin hesaplanması oldukça güçtür.Bu yüzden problemi bir çeşit bilinmeyen köklerin bulunması problemine dönüştürmek daha uygun olur.

$$K_D=B+D \quad (3.88)$$

yazabiliriz.Burada D, bir diagonal matristir ve elemanları :

$$d_{ii}=k_{ii}=\sum(s.k)_{ij} \quad (3.89)$$

şeklindedir.B matrisinin ise diagonaldeki elemanları sıfırdır.(3.88) eşitliğini D parantezine alalım :

$$K_D=D(B.D^{-1}+I) \quad (3.90)$$

Eğer $\det K_D=0$ ise $\det D=0$ veya $\det(B.D^{-1}+I)=0$ olur.Diğer yandan herhangi bir düğüm noktasında kritik yük $\sum(s.k)=0$ yapmaya yetmiyorsa D hiçbir zaman singüler olmaz.O halde

$$\det(B.D^{-1}+I)=0 \quad (3.91)$$

olmalıdır.Bu durumda $(B.D^{-1})$ in kökü $\lambda = -1$ dir.

Burada $C=(B.D^{-1})$ dönüşümü yaparsak C nin elemanları şöyle bulunur :

$C_{ii}=0$

$$C_{ij}=(s.k.c)_{ij} / \sum(s.k)_{ij} \quad (3.92)$$

$(B.D^{-1})$ in diagonal dışındaki elemanları , K_D nin her kolonunu esas diagonaldeki elemanlara bölmek suretiyle bulabiliriz.Diagonaldeki tüm elemanlar sıfırdır.

Yapıda yükleme yok iken tüm carry-over katsayıları aynı olur :c=1/2. Bu yüzden $(B.D^{-1})$ in tüm kolon toplamları=1/2 dir.Bu demektir ki $(B.D^{-1})$ in kökleri $\pm 1/2$ arasındadır.

Yapıya etkiyen yük artarken, K_D ve $(B.D^{-1})$ in elemanları ve $(B.D^{-1})$ in kökleri yavaşça değişir.Kritik yük durumundaki kök $\lambda = -1$ bu yüzden en büyük negatif köktür.

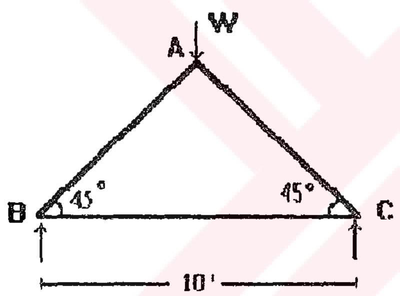
$$Q=B.D^{-1} - I \qquad (3.93)$$

dönüşümü yapılırsa K_D singüler iken Q nun kökü $\lambda= -2$ dir.Bu kökün değerini sınamak $detK_D$ işlemini yapmaktan daha kolaydır.Yapının taşıyabileceği yük sistemi hesaplanır ve W yük parametresi ile çarpılır.Problem, yapının stabil olmadığı durumlarda W nun hesaplanmasıdır.W keyfi seçilir ve her W için $\lambda= -2$ elde edilene dek $detK_D$ veya Q nun en büyük kökü hesaplanabilir.Aşağıdaki kontrollerle işi oldukça küçültebiliriz :

Özellik I-) Eğer K_D matrisine esas diagonali hakimse, singüler olamaz.Bu yüzden çerçeve stabildir.

Özellik II-) Eğer K_D nin esas diagonalinde bir eleman sıfır veya (-) ise çerçeve kararsız denge durumundadır yani labildir.Çünkü dış yükün o noktada sıfır veya negatif bir dayanımla karşılaştığını gösterir.

ÖRNEK 1.



Şekil 3.15

Şekildeki çerçevenin düğüm noktaları rijittir.Tüm elemanlar, 3" x 3" x (1/4)" lik çift köşebenttir.Bu kesit için $I=2.4\ in^4$ $E=13500\ ton/in^4$

BC elemanı için

$\ell=120$ "

$P_E=\pi^2EI/\ell^2=22,2066$ ton

$k=I/\ell=2,4/120=0,02\ in^3$

AB ve BC elemanları için

$\ell=84,84$ "

$P_E=44,4132$ ton

$k=0,028\ in^3$

İlk olarak W=0 sıfır yüklemesi için sistemi inceleyelim.

Tüm elemanlar için s=4 ve c=1/2 dir.

BC için s.k=0,08 s.k.c=0,04

AB ve AC için s.k=0,113 s.k.c=0,057

$$K_D = \begin{bmatrix} 0,226 & 0,057 & 0,057 \\ 0,057 & 0,193 & 0,040 \\ 0,057 & 0,040 & 0,193 \end{bmatrix}$$

$k_{ij}=(skc)_{ij}$

$k_{ii}=\Sigma(sk)_{ij}$ $\quad$ $k_{11}=0,113*2=0,226$ $\quad$ $k_{22}=k_{33}=0,113+0,08=0,193$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0,295 & 0,295 \\ 0,25 & 0 & 0,207 \\ 0,25 & 0,207 & 0 \end{bmatrix}$$

$C_{ij}=(skc)_{ij}/\Sigma(sk)_{ij}$ $\quad$ $C_{ii}=0$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0,295 & 0,295 \\ 0,25 & -1 & 0,207 \\ 0,25 & 0,207 & -1 \end{bmatrix} \qquad Q=B.D^{-1} - I = C - I$$

Bunun bilinmeyen kökleri $\lambda_1= -1,294$ $\quad X_1=\{1 \quad -0,4987 \quad -0,4987\}$

$\lambda_2= -1,207$ $\quad X_2=\{0 \quad 1 \quad 1\}$

$\lambda_3= -0,499$ $\quad X_3=\{1 \quad -0,8496 \quad -0,8496\}$

W=1 için

$P_{AB}=P_{AC}=0,707$ ton basınç

$P_{BC}=0,5$ ton çekme

$\rho_{AB}=\rho_{AC}=0,707/44,4132=0,015921$

$\rho_{BC}=-0,5/22,22066=0,022516$

Şimdi yük parametresi W için bir değer seçerek buna ait K_D ve Q matrislerini bulalım.

W=60

Eleman	k	ρ_{60}	s	c	s.k	s.k.c
AB	0,028	0,9553	2,5481	0,9570	0,071347	0,068279
AC	0,028	0,9553	2,5481	0,9570	0,071347	0,068279
BC	0,020	-1,3509	5,5341	0,3051	0,110682	0,033769

$$K_D = \begin{bmatrix} 0,142694 & 0,068279 & 0,068279 \\ 0,068279 & 0,182029 & 0,033769 \\ 0,068279 & 0,033769 & 0,182029 \end{bmatrix}$$

Matrisin esas diagonali baskın durumdadır.O halde I. özelliğe göre çerçeve bu yük için stabildir. Hesaplama, W iki katına çıkarılarak devam eder.

W=120

Eleman	k	ρ_{120}	s	c	s.k	s.k.c
AB	0,028	1,9105	0,4091	8,311	0,011455	0,095201
AC	0,028	1,9105	0,4091	8,311	0,011455	0,095201
BC	0,020	-2,7019	6,7481	0,226	0,134962	0,030501

$$K_D = \begin{bmatrix} 0,02291 & 0,095201 & 0,095201 \\ 0,095201 & 0,146417 & 0,030501 \\ 0,095201 & 0,030501 & 0,146417 \end{bmatrix}$$

$$Q_{120} = \begin{bmatrix} -1 & 0,650205 & 0,650205 \\ 4,155524 & -1 & 0,208316 \\ 4,155524 & 0,208316 & -1 \end{bmatrix}$$

Q nun en büyük kökü $\lambda_1 = |-3,222| > |-2|$ olduğundan yük kritik noktanın üzerindedir.W yük parametresini 60 ile 120 arasında seçip devam edelim.

W=90

Eleman	k	ρ_{90}	s	c	s.k	s.k.c
AB	0,028	1,4329	1,6065	1,749	0,044982	0,078673
AC	0,028	1,4329	1,6065	1,749	0,044982	0,078673
BC	0,020	-2,0264	6,1703	0,2585	0,123406	0,031900

$$K_D = \begin{bmatrix} 0,089964 & 0,078673 & 0,078673 \\ 0,078673 & 0,168388 & 0,0319 \\ 0,078673 & 0,0319 & 0,168388 \end{bmatrix}$$

$$Q_{90} = \begin{bmatrix} -1 & 0,361299 & 0,361299 \\ 0,874494 & -1 & 0,205097 \\ 0,874494 & 0,205097 & -1 \end{bmatrix}$$

Q_{90} matrisinin en büyük kökü $\lambda_1 = |-1,814| < |-2|$ olduğundan W=90 yüklemesi kritik yükten düşüktür.Öyleyse kritik yük 90 ile 120 arasındadır.

W=100

Eleman	k	ρ_{100}	s	c	s.k	s.k.c
AB	0,028	1,5921	1,243	2,3914	0,034804	0,08323
AC	0,028	1,5921	1,243	2,3914	0,034804	0,08323
BC	0,020	-2,2516	6,3687	0,2465	0,127374	0,031398

$$K_D = \begin{bmatrix} 0,069608 & 0,08323 & 0,08323 \\ 0,08323 & 0,162178 & 0,031398 \\ 0,08323 & 0,031398 & 0,162178 \end{bmatrix}$$

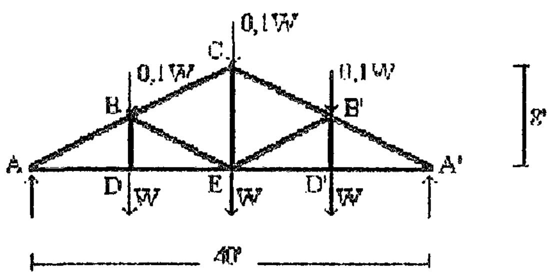
$$Q_{100} = \begin{bmatrix} -1 & 0,513202 & 0,513202 \\ 1,195696 & -1 & 0,193602 \\ 1,195696 & 0,193602 & -1 \end{bmatrix}$$

Q_{100} matrisinin en büyük kökü $\lambda_1 = -2,015 \cong -2$ dir.

$X_1 = \{1 \quad -0,989 \quad -0,989\}$

Aranılan göçme yükü W_c=100 ton olur.

ÖRNEK 2.



Şekil 3.16

Eleman	ℓ	I	E.k	P_F	P	ρ_1
AB & A'B'	129,24	5,2	543,2	41,43	4,443	0,1072
BC & B'C	129,24	5,2	543,2	41,43	2,962	0,0715
AD & A'D'	120	4,4	495	40,71	-4,125	-0,1013
DE & D'E	120	4,4	495	40,71	-4,125	-0,1013
BD & B'D'	48	0,7	196,9	40,49	-1	-0,0247
BE & B'E	129,24	1,96	204,7	15,63	1,481	0,0948
CE	96	0,96	135	13,88	-2,1	-0,1513

Yukarıdaki tabloda, şekil 3.16 daki kafes sistemin ön hesapları görülmektedir. Tablonun son kolonu, W=1 iken ρ değerleridir.Başlangıçta W=10 seçelim.Buna göre elde edilecek K_D matrisinde esas diagonal baskın olur.Yani çerçeve stabildir.Yük iki katına çıkarılıp işlemlere W=20 için devam edilir.Bulunan Q_{20} matrisinin en büyük kökü -2 den büyük olduğundan 10 ile 20 arasında değerler seçilir ve sonuçta kritik yük W_c=17,5 ton bulunur. Bu işlemler aşağıda gösterilmiştir.

W=10

Eleman	E.k	ρ_{10}	s	c	E.s.k	E.s.k.c
AB & A'B'	543,2	1,072	2,338	1,074	1270	1363,98
BC & B'C	543,2	0,715	2,956	0,777	1605,7	1247,63
AD & A'D'	495	-1,013	5,185	0,336	2566,58	862,37
DE & D'E	495	-1,013	5,185	0,336	2566,58	862,37
BD & B'D'	196,9	-0,247	4,31	0,446	848,64	378,49
BE & B'E	204,7	0,948	2,556	0,952	523,21	498,1
CE	135	-1,513	5,69	0,291	768,15	223,53

$$K_D = \begin{bmatrix} 3836{,}58 & 1363{,}98 & 0 & 862{,}37 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 4247{,}55 & 1247{,}63 & 378{,}49 & 498{,}10 & 0 & 0 & 0 \\ & & 3979{,}55 & 0 & 223{,}53 & 0 & 1247{,}63 & 0 \\ & & & 5981{,}8 & 862{,}37 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 6947{,}73 & 862{,}37 & 498{,}10 & 0 \\ & \text{sim} & & & & 5981{,}8 & 378{,}49 & 862{,}37 \\ & & & & & & 4247{,}55 & 1363{,}98 \\ & & & & & & & 3836{,}58 \end{bmatrix}$$

W=20

Eleman	E.k	ρ_{10}	s	c	E.s.k	E.s.k.c
AB & A'B'	543,2	2,144	-0,324	-11,97	-176	2106,72
BC & B'C	543,2	1,430	1,613	1,74	876,18	1524,553
AD & A'D'	495	-2,026	6,168	0,258	3053,16	787,72
DE & D'E	495	-2,026	6,168	0,258	3053,16	787,62
BD & B'D'	196,9	-0,494	4,620	0,403	909,68	366,6
BE & B'E	204,7	1,896	0,45	7,48	92,12	689,06
CE	135	-3,026	7	0,214	945	202,23

$$K_D = \begin{bmatrix} 2877,62 & 2106,72 & 0 & 787,72 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1701,98 & 1524,55 & 366,6 & 689,6 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2697,36 & 0 & 202,23 & 0 & 1524,55 & 0 \\ & & & 7016 & 787,72 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 7235,56 & 787,72 & 689,06 & 0 \\ & \text{sim} & & & & 7016 & 366,6 & 787,72 \\ & & & & & & 1701,98 & 2106,72 \\ & & & & & & & 2894,44 \end{bmatrix}$$

$$Q_{20} = \begin{bmatrix} -1 & 1,2378 & 0 & 0,1123 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,7322 & -1 & 0,5652 & 0,0523 & 0,0952 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8958 & -1 & 0 & 0,0279 & 0 & 0,8558 & 0 \\ 0,2738 & 0,2154 & 0 & -1 & 0,1089 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4049 & 0,075 & 0,1123 & -1 & 0,1123 & 0,4049 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1089 & -1 & 0,2154 & 0,2738 \\ 0 & 0 & 0,5652 & 0 & 0,0952 & 0,0523 & -1 & 0,7322 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1123 & 1,2378 & -1 \end{bmatrix}$$

λ_1= -2,4075

X_1={1 -1,331 -1,428 -0,067 0,585 -0,067 -1,131 1}

W=15 için de aynı işlemler yapılır.Q_{15} için bulunan kök

λ_1= -1,7865 < -2

X_1={1 -1,474 -1,616 -0,164 0,608 -0,164 -1,474 1}

|-1,7865| < |-2| olduğundan yük artırılmalıdır.

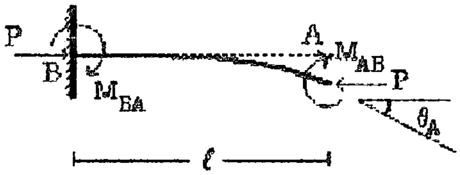
W=17,5 için

λ_1= -2,0004 $\cong$ -2

X_1={1 -1,338 -1,548 -0,118 0,607 -0,118 -1,338 1}

$\lambda_1 \cong -2$ olduğundan seçilen yük çarpanı, kritik yük değeri demektir. Yani W_c=17,5 olur.

3.3.2. YANAL DEPLASMAN YAPAN SİSTEMLERDE McMINN ÇÖZÜMÜ



Şekil 3.17

Eğer AB elemanının B ucu ankastre mesnetli ve A ucu eşzamanlı bir deplasman hareketi ile, sıfır kesme kuvveti verecek şekilde θ_A kadar dönerse şöyle yazabiliriz :

$$M_{AB} = n.E.k.\theta_A \tag{3.94}$$

$$M_{BA} = -o.E.k.\theta_A \tag{3.95}$$

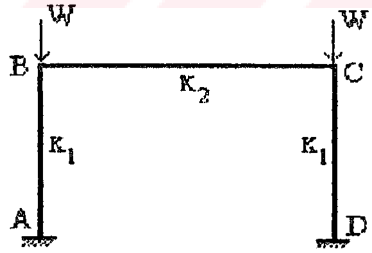
n ve o fonksiyonlarının Livesley-Chandler tablolarında $\rho=P/P_E$ ye bağlı değerleri mevcuttur.Bu n ve o fonksiyonları, tek açıklıklı ve eşit uzunluktaki kolonlara sahip sistemlere uygulanabilir.Ayakları farklı uzunlukta olan veya birden fazla açıklıklı çerçeveler Lightfoot yöntemiyle tek açıklıklı, eşit ayaklı bir eşdeğer sisteme dönüştürülmelidir.

ÖRNEK 3.

Şekil 3.18 deki basit çerçeveyi incelersek ; iki mümkün göçme modu vardır.İlki: iki düğüm noktası B ve C karşıt yönlerde dönerler.Yük ve sistem simetrikliğinden

$$\theta_C = -\theta_B$$

yazılabilir.Bu durumda yanal deplasman yoktur.Çünkü iki ayaktaki kesme kuvvetleri eşit ve ters yönlüdür.Bu yüzden 3.3.1 bölümündeki yöntemi kullanabiliriz.



Şekil 3.18

Eğer BC deki eksenel kuvveti ihmal edersek $S_{BC}=4$, $C_{BC}=0$ olur.Simetri sebebiyle yalnız bir dönme hesaplanacaktır.

$$M=E.\theta_B(4k_2+s.k_1)+\theta_C.s.k_2.c$$
$$=E.\theta_B(2k_2+s.k_1)$$

M=0 ve θ_B sonlu iken $(2k_2+s.k_1)=0$ yani $s=-2k_2/k_1$ yazarsak, eğer $k_1=k_2$ ise $s=-2$ olur.Tablolardan $\rho=2{,}552$ olur. olur.Burada P_E , AB için Euler yükü olmak üzere

$$W_c=2{,}552.P_E$$

bulunur.

İkinci olası göçme modu ise iki düğüm noktasının aynı yönde dönmesidir.İki kolon da aynı olduğundan kesme kuvvetleri eşit olacaktır.Toplam kesme kuvveti sıfır olacağından kolonlarda kesme kuvveti sıfır olur.Her iki kolon da aynı yanal deplasmana ve sıfır kesme kuvvetine sahip olduğundan

$$\theta_B = \theta_C$$

$$M = E.\theta_B(n.k_1+4k_2)+E.\theta_C.2k_2$$

$$= E.\theta_B(n.k_1+6k_2)$$

Kritik yük durumunda :

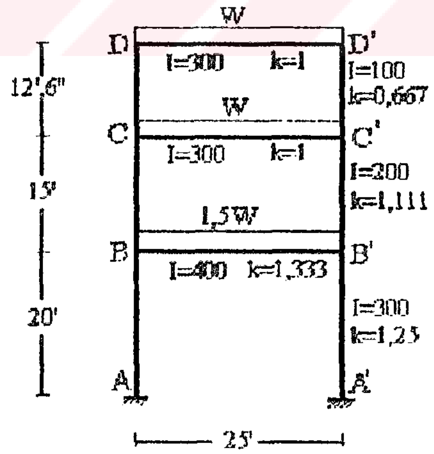
$$(n.k_1+6k_2)=0 \quad , \; n=-6.k_2/k_1$$

Eğer $k_1=k_2$ ise $n=-6$ olur.Bunun için $\rho=0,75$ olur.

$$W_c=0,75.P_E$$

Bu kritik yük, yanal deplasman yapmayan durum için hesap edilenden daha küçük olduğundan gerçek kritik yüktür.$W=2.552.P_E$ durumu, ancak B ve C noktalarının yanlardan desteklenmesiyle mümkün olabilir ve bu farklı bir problemdir.

ÖRNEK 4.



Şekil 3.19

Şekil 3.19 da görülen çerçeve yanal deplasman yapmayan durum için analiz edilmeyecektir.Çünkü sonuç 3. örnek ile aynı olacaktır.Yani bulunan W değeri yanal deplasmanlı durumda bulunandan daha büyük olacaktır.

Çerçeve yanal deplasman yaptığı zaman her bir kirişin iki ucunda dönmeler aynı olacaktır.Öyleyse yalnız bir ayağı (AB, BC ve CD elemanları) gözönüne almamız yeterlidir.

B ye uygulanan moment :

$$M_B = E.\theta_B[(nk)_{AB} + (nk)_{BC} + 4k_{BB'}] + E.\theta_B'.2k_{BB'} - E.\theta_B.2k_{BB'} - E.\theta_C.(o.k)_{BC}$$
$$= E.\theta_B[(nk)_{AB} + (nk)_{BC} + 6k_{BB'}] - E.\theta_C.(o.k)_{BC}$$

C ye uygulanan moment :

$$M_C = E.\theta_C[(nk)_{BC} + (nk)_{CD} + 4k_{CC'}] - E.\theta_B.(o.k)_{BC} - E.\theta_{BD}.(o.k)_{CC}$$

D ye uygulanan moment :

$$M_D = E.\theta_D[(nk)_{CD} + 4k_{DD'}] - E.\theta_C.(o.k)_{CD}$$

Bu denklemleri matris formunda toparlarsak

$$M = K_D.\theta$$

$$K_D = \begin{bmatrix} ((nk)_{AB} + (nk)_{BC} + 6k_{BB'}) & -(ok)_{BC} & 0 \\ & ((nk)_{BC} + (nk)_{CD} + 6k_{CC'}) & -(ok)_{CD} \\ \text{sim.} & & ((nk)_{CD} + 6k_{DD}) \end{bmatrix}$$

CD deki yük=W/2

BC deki yük=W

AB deki yük=7W/4

CD için Euler yükü =592,18 ton

BC için Euler yükü =822,47 ton

AB için Euler yükü =693,96 ton

W=1 için

ρ_{AB}=0,0025218 ρ_{BC}=0,0012158 ρ_{CD}=0,0008443

W=200

Eleman	k	ρ_{200}	n	o	nk	ok
AB	1,250	0,5044	-1,7335	2,8256	-2,1669	0,6505
BC	1,111	0,2432	0,0333	1,5497	0,0370	1,7217
CD	0,667	0,1689	0,3707	1,3434	0,2473	0,8960

$$K_D = \begin{bmatrix} 5,8701 & -1,7217 & 0 \\ & 6,2843 & -0,896 \\ \text{sim.} & & 6,2473 \end{bmatrix}$$

Matrisin esas diagonali baskındır.Öyleyse I. özelliğe göre, çerçeve stabildir.

W=300

Eleman	k	ρ_{200}	n	o	nk	ok
AB	1,250	0,7565	-6,3050	6,8719	-7,8813	8,5899
BC	1,111	0,3647	-0,6425	2,0032	-0,7138	2,2256
CD	0,667	0,2533	-0,0164	1,5813	-0,0109	1,0547

$$K_D = \begin{bmatrix} -0,5951 & -2,2256 & 0 \\ & 5,2753 & -1,0547 \\ \text{sim.} & & 5,9891 \end{bmatrix}$$

k_{11} negatifdir.Yani II. özelliğe göre W=300, kritik yükün üzerindedir.Çünkü B düğüm noktasına uygulanan dönme, bir negatif momente ihtiyaç gösterir.Bu da sistemin labil olması demektir.

W=250

Eleman	k	ρ_{250}	n	o	nk	ok
AB	1,250	0,6305	-3,3019	4,1382	-4,1274	5,1728
BC	1,111	0,3040	-0,2821	1,7551	-0,3134	1,9499
CD	0,667	0,2111	0,1848	1,4552	-0,1233	0,9706

$$K_D = \begin{bmatrix} 3,5592 & -1,9499 & 0 \\ & 5,8099 & -0,9706 \\ \text{sim.} & & 6,1233 \end{bmatrix}$$

Esas diagonal baskın olduğundan çerçeve stabildir.Kritik yük 250 ile 300 arasındadır

W=280

Eleman	k	ρ_{280}	n	o	nk	ok
AB	1,250	0,7061	-4,8144	5,4909	-6,0180	6,8636
BC	1,111	0,3404	-0,4918	1,8978	-0,5464	2,1085
CD	0,667	0,2364	0,0661	1,5290	0,0441	1,0198

$$K_D = \begin{bmatrix} 1,4356 & -2,1085 & 0 \\ & 5,4977 & 1,0198 \\ \text{sim.} & & 6,0441 \end{bmatrix}$$

$$Q_{280} = \begin{bmatrix} -1 & -0,3835 & 0 \\ -1,4687 & -1 & -0,1687 \\ 0 & 0,1855 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = -1,771$

$X_1 = \{1 \quad 2,0106 \quad 0,4838\}$

W=290

Eleman	k	ρ_{290}	n	o	nk	ok
AB	1,250	0,7313	-5,4922	6,1142	-6,8653	7,6428
BC	1,111	0,3526	-0,5664	1,9497	-0,6293	2,1661
CD	0,667	0,2448	0,0254	1,5547	0,0169	1,0370

$$K_D = \begin{bmatrix} 0,5054 & -2,1661 & 0 \\ & 5,3876 & -1,037 \\ \text{sim.} & & 6,0169 \end{bmatrix}$$

$$Q_{290} = \begin{bmatrix} -1 & -0,4021 & 0 \\ -4,2859 & -1 & -0,1723 \\ 0 & -0,1925 & -1 \end{bmatrix}$$

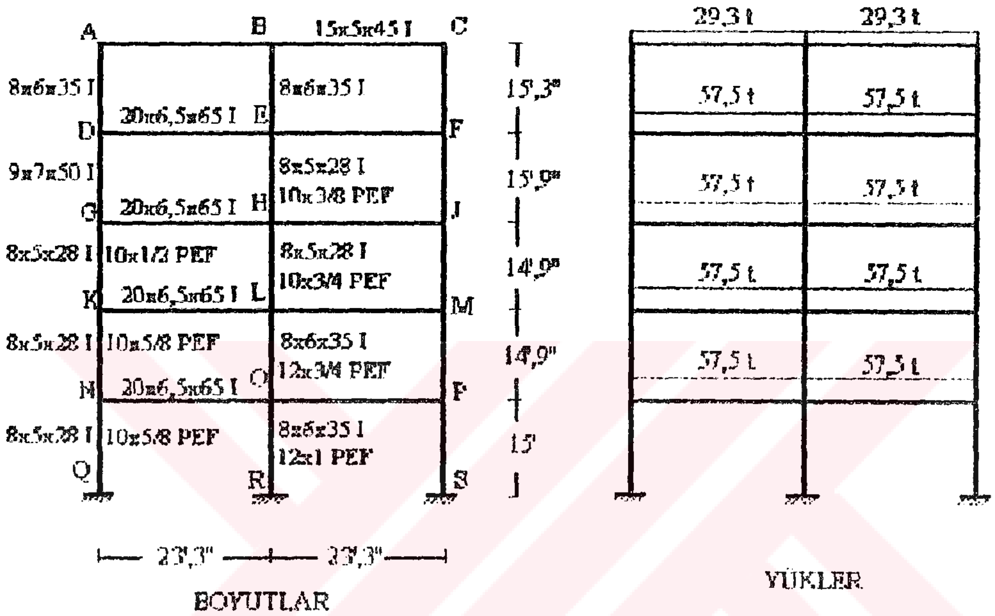
$\lambda_1 = -2,325$

$X_1 = \{1 \quad 3,296 \quad 0,4787\}$

Yapılan son iki hesapta görüyoruz ki kritik yük 280 ile 290 arasında yeralmaktadır. Wc=285 alırsak hesaplarla saptanan hata %2 den fazla olmaz.

ÖRNEK 5.

Şekil 3.20 de görülen çerçeve Bowles ve Merchant tarafından tartışılmıştır. Gösterilen yüklemeler, çerçeve için tasarlanmış işletme yükleridir.Bunlarla çarpılarak kritik yükü verecek W parametresi araştırılmaktadır. Mc Minn yöntemiyle çözülebilmesi için ilk olarak çerçeve, Lightfoot metoduyla tek açıklıklı çerçeveye indirgenir.(bkz. şekil 3.21)



Şekil 3.20

Lightfoot metoduna göre :

-Eşdeğer çerçevenin her bir katı için ρ değeri :

$$\rho = P/P_E = (P_1+P_2+P_3)/(P_{E1}+P_{E2}+P_{E3})$$

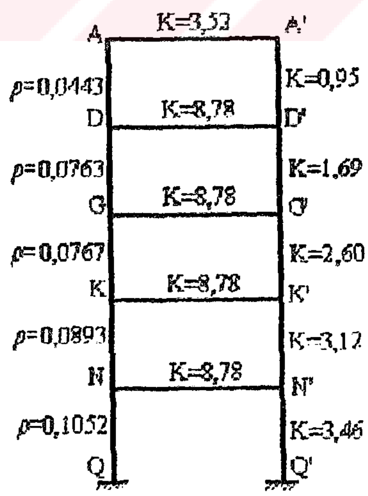
şeklinde bulunur.Burada P_n=n. kolondaki eksenel yük, P_{En}=n. kolonun Euler yüküdür.

-Kolon rijitliği, o kattaki kolonların rijitlik toplamlarının yarısı olarak alınır.

-Kiriş rijitliği, o kattaki kirişlerin rijitlikleri toplamına eşittir

Bu hesaplamalar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Eleman	P	I	ℓ	k	P_E	Eşdeğer ρ	Eşdeğer k
AD & CF	14,6	115	183	0,63	440	$\frac{14,6+29,3+14,6}{440+440+440}=0,0443$	0,945
DG & FJ	43,4	208	189	1,1	745	$\frac{43,4+86,8+43,4}{745+793+745}=0,076$	1,685
GK & JM	72,2	271	177	1,53	1110	$\frac{72,2+144,3+72,2}{1110+1550+1110}=0,0766$	2,600
KN &MP	100,9	322	177	1,82	1320	$\frac{100,9+201,8+100,9}{1320+1880+1320}=0,0893$	3,120
NQ,PS	129,6	322	180	1,79	1275	$\frac{129,6+259,8+129,6}{1275+2380+1275}=0,1053$	3,46
BE	29,3	115	183	0,63	440		
EH	86,8	221	189	1,17	793		
HL	144,3	378	177	2,14	1550		
LO	201,8	460	177	2,60	1880		
OR	259,8	602	180	3,34	2380		
AB & BC	-	492	279	1,76	-		3,520
Kirişler	-	1226	279	4,39	-		8,78



Tek açıklıklı eşdeğer sistem

Şekil 3.21

Tek açıklıklı eşdeğer sistemi elde ettikten sonra başlangıç olarak W=5 seçelim.

W=5

Eleman	k	ρ_5	n	o	n.k	o.k
AD	0,95	0,2215	0,1368	1,4849	0,1300	1,4107
DG	1,69	0,3815	-0,7519	2,0811	-1,2707	3,5171
GK	2,60	0,3835	-0,7653	2,0907	-1,9898	5,4358
KN	3,12	0,4465	-1,2258	2,4311	-3,8245	7,5850
NQ	3,46	0,5260	-1,9497	2,9989	-6,7460	10,376

$$K_D = \begin{bmatrix} 21,25 & -1,4107 & 0 & 0 & 0 \\ & 51,5393 & -3,5171 & 0 & 0 \\ & & 49,4195 & -5,4358 & 0 \\ & \text{sim.} & & 46,8657 & -7,585 \\ & & & & 42,1095 \end{bmatrix}$$

Esas diagonal baskın olduğundan yük artırılarak devam edilir.

W=8

Eleman	k	ρ_8	n	o	n.k	o.k
AD	0,95	0,3544	-0,5776	1,9575	-0,5487	1,85960
DG	1,69	0,6104	-2,9915	3,8696	-5,0556	6,53960
GK	2,60	0,6136	-3,0396	3,9111	-7,9030	10,1689
KN	3,12	0,7144	-5,0257	5,6843	-15,880	17,7350
NQ	3,46	0,8416	-10,861	11,235	-37,580	38,8814

$$K_D = \begin{bmatrix} 20,5713 & -1,8596 & 0 & 0 & 0 \\ & 47,0757 & -6,5396 & 0 & 0 \\ & & 39,7214 & 10,1689 & 0 \\ & \text{sim.} & & 28,8968 & -17,735 \\ & & & & -0,7803 \end{bmatrix}$$

k_{55} negatif olduğundan $W=8 > W_c$ demektir.

W=7

Eleman	k	ρ_7	n	o	n.k	o.k
AD	0,95	0,3101	-0,3159	1,7778	-0,30010	1,68890
DG	1,69	0,5341	-2,0352	3,0683	-3,43950	5,18540
GK	2,60	0,5369	-2,0653	3,0928	-5,36980	8,04130
KN	3,12	0,6251	-3,2163	4,0639	-10,0349	12,6749
NQ	3,46	0,7364	-5,6457	6,2566	-19,5341	21,6478

$$K_D = \begin{bmatrix} 20,8199 & -1,6889 & 0 & 0 & 0 \\ & 48,9404 & -5,1854 & 0 & 0 \\ & & 43,8707 & -8,0413 & 0 \\ & \text{sim.} & & 37,2753 & -12,6794 \\ & & & & 23,111 \end{bmatrix}$$

Esas diagonal baskındır.O halde kritik yük 7 ile 8 arasındadır.

W=7,5

Eleman	k	$\rho_{7.5}$	n	o	n.k	o.k
AD	0,95	0,3323	-0,4437	1,8646	-0,42150	1,77140
DG	1,69	0,5723	-2,4763	3,4324	-4,18490	5,80080
GK	2,60	0,5723	-2,5141	3,4641	-6,53670	9,00670
KN	3,12	0,6698	-4,0072	4,7611	-12,5025	14,8546
NQ	3,46	0,7890	-7,6217	8,1166	-26,3711	28,0834

$$K_D = \begin{bmatrix} 20,6985 & -1,7714 & 0 & 0 & 0 \\ & 48,0736 & -5,8008 & 0 & 0 \\ & & 41,9584 & -9,0067 & 0 \\ & \text{sim.} & & 33,6408 & -14,8546 \\ & & & & 13,8064 \end{bmatrix}$$

$$Q_{7,5} = \begin{bmatrix} -1 & -0,0368 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0856 & -1 & -0,1383 & 0 & 0 \\ & -0,1207 & -1 & -0,2677 & 0 \\ & & -0,2147 & -1 & -1,0759 \\ & & & -0,4416 & -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = -1,731$

$X_1 = \{0,0036 \quad 0,0719 \quad 0,378 \quad 1 \quad 0,6041\}$

$|-1,731| < |-2|$ olduğundan kritik yük 7,5 ile 8 arasındadır.

W=7,7

Eleman	k	$\rho_{7,7}$	n	o	n.k	o.k
AD	0,95	0,3411	-0,4961	1,9007	-0,47130	1,80570
DG	1,69	0,5875	-2,6719	3,5970	-4,51550	6,07890
GK	2,60	0,5906	-2,7129	3,6317	-7,05350	9,44240
KN	3,12	0,6876	-4,3814	5,0975	-13,6725	15,9042
NQ	3,46	0,8100	-8,7019	9,1498	-30,1086	31,6583

$$K_D = \begin{bmatrix} 20,6487 & -1,8057 & 0 & 0 & 0 \\ & 47,6932 & -6,0789 & 0 & 0 \\ & & 41,111 & -9,4424 & 0 \\ & \text{sim.} & & 31,9565 & -15,9042 \\ & & & & 8,9014 \end{bmatrix}$$

$$Q_{7,7} = \begin{bmatrix} -1 & -0,0379 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0874 & -1 & -0,1479 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1275 & -1 & -0,2955 & 0 \\ 0 & 0 & -0,2297 & -1 & -1,7867 \\ 0 & 0 & 0 & -0,4977 & -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = -1,979 \cong -2$

$X_1 = \{0,0018 \quad 0,0466 \quad 0,3079 \quad 1 \quad 0,5083\}$

$\lambda_1 \cong -2$ olduğundan Wc=7,7 bulduk.

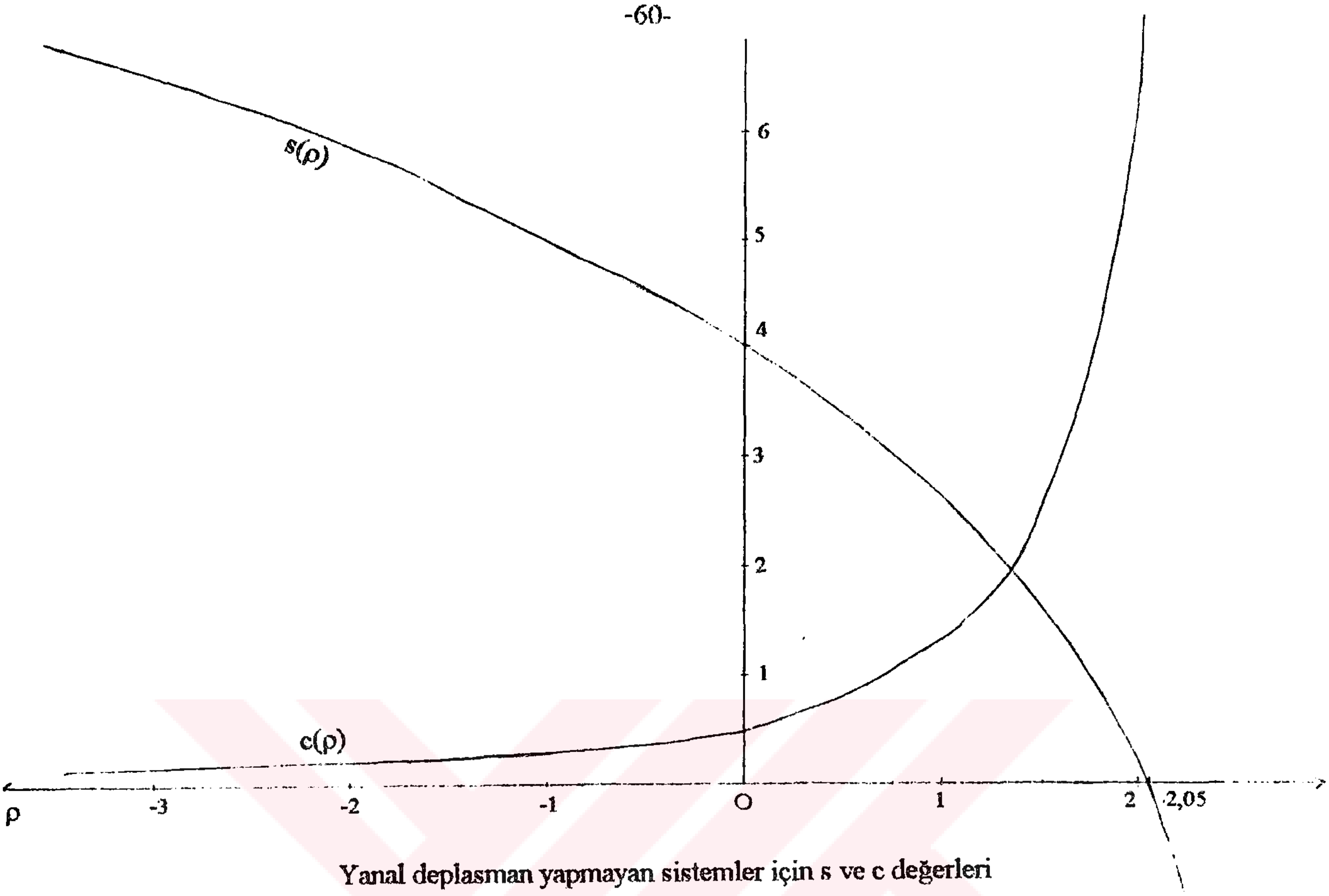
Tablo 3.4 Livesley & Chandler Tabloları

Yatay deplasman yapmayan sistemler için s(ρ) ve c(ρ) tablosu

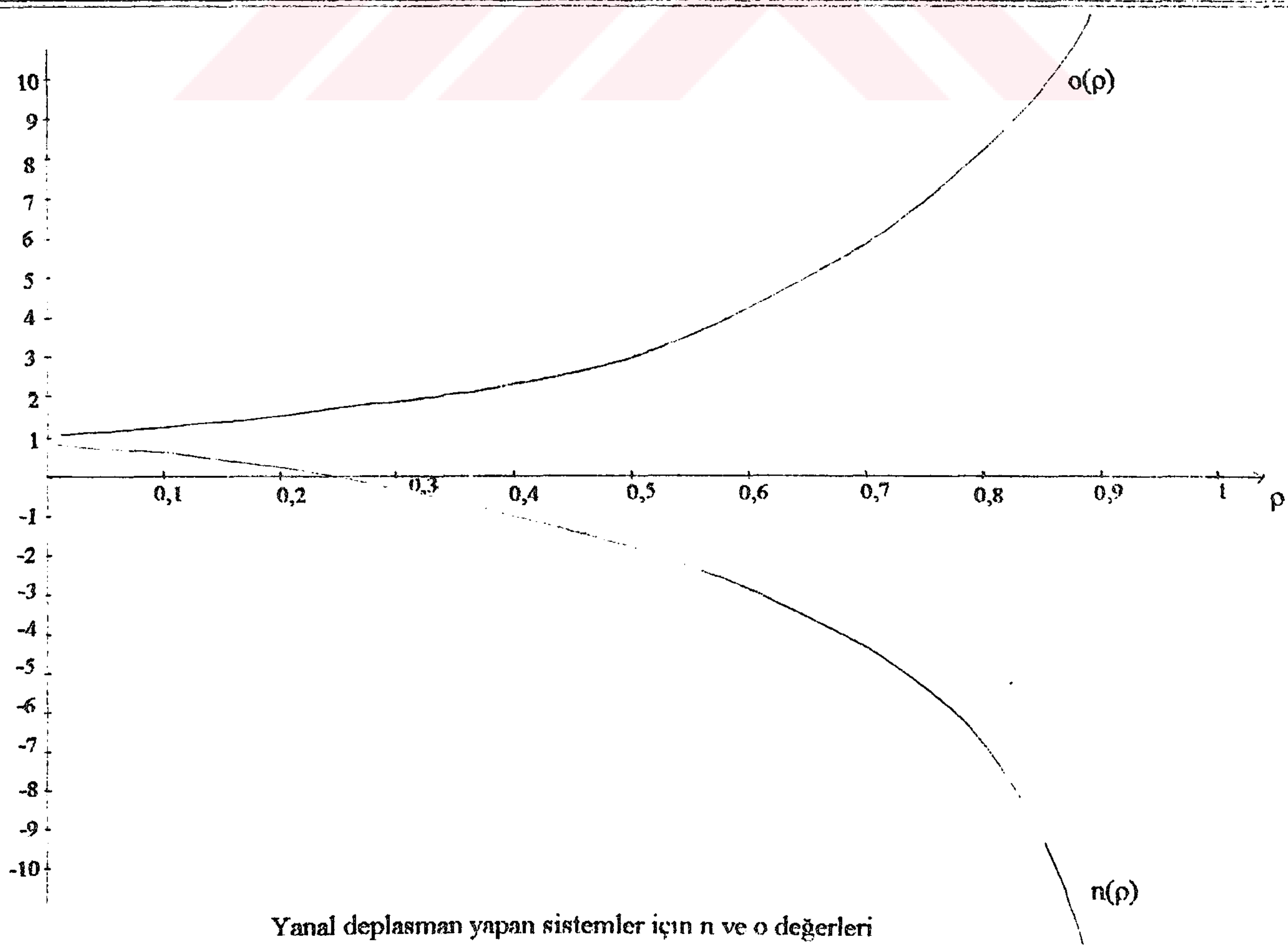
ρ	s	c
-3,026	7	0,214
-2,7019	6,7481	0,226
-2,2516	6,3687	0,2465
-2,0264	6,1703	0,2585
-1,773	5,939	0,274
-1,513	5,69	0,291
-1,3509	5,5341	0,3051
-1,013	5,185	0,336
-0,494	4,62	0,403
-0,371	4,46	0,428
-0,247	4,31	0,446
0	4	0,5
0,715	2,956	0,777
0,9553	2,548	0,957
1	2,4674	1
1,072	2,338	1,074
1,251	1,989	1,333
1,4329	1,6065	1,749
1,5921	1,243	2,3914
1,659	1,028	2,988
1,9105	0,4091	8,311
2,05	0	∞
2,144	-0,324	

Yatay deplasman yapan sistemler için n(ρ) ve o(ρ) tablosu

ρ	n	o
0,1689	0,3707	1,3434
0,211	0,1848	1,4552
0,2215	0,1368	1,4849
0,2432	0,0333	1,5497
0,2533	-0,0164	1,5813
0,304	-0,2812	1,7551
0,3404	-0,4918	1,8978
0,3647	-0,6425	2,0032
0,4465	-1,2258	2,4311
0,5044	-1,7335	2,8256
0,526	-1,9497	2,9989
0,5369	-2,0653	3,0928
0,5723	-2,4763	3,4324
0,5875	-2,6719	3,597
0,6305	-3,3019	4,1382
0,6698	-4,0072	4,7611
0,7061	-4,8144	5,4909
0,7565	-6,305	6,8719
0,789	-7,6217	8,1166
0,81	-8,7019	9,1498
0,8416	-10,8613	11,2347



Yanal deplasman yapmayan sistemler için s ve c değerleri

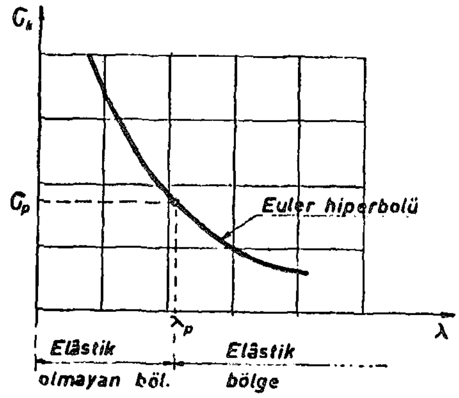


Yanal deplasman yapan sistemler için n ve o değerleri

4.ELASTİK STABİLİTENİN SINIRI VE İNELASTİK STABİLİTE

Cismin elastik olduğu ve Hooke kanununa uyduğu esasından hareket eden stabilite teorisi ve formüllerin hepsi sınırlıdır.Çünkü yapı malzemeleri bu söylenen özelliklere ancak belirli sınırlar arasında sahip olabilir.

Formüllerin uygulama alanını belirtmek için birçok halleri kapsayan (3.63) de verilen kritik yük formülünü ele alalım , $P_k=\pi^2 EI/\ell_b^2$: burada E ile Hooke kanununa uyduğu kabul edilen malzemenin sabit elastisite modülü gösterilmektedir. Hesapları kritik yük yerine gerilme cinsinden yapalım.A, çubuğun kesit alanı ise kritik gerilme



Şekil 4.1

$\sigma_k = P_k /A= (\pi^2 EI)/(\ell_b^2 A)$ şeklinde bulunur. $I/A = i^2$ kesitin atalet yarıçapı olduğuna göre yukarıdaki formül de $\sigma_k = \pi^2 E/(\ell_b / i)^2$ şekline girer. Tarif olarak

$$\lambda=\ell_b / i \tag{4.1}$$

oranına narinlik derecesi denirse σ_k kritik yük formülü

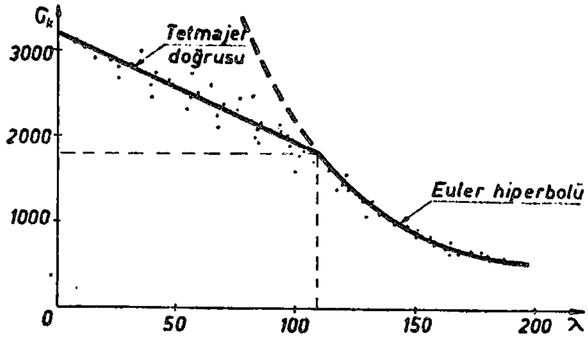
$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{4.2}$$

şeklini alır.Buna göre kritik gerilmenin narinlik derecesinin karesiyle ters orantılı olduğu anlaşılır.Şekil 4.1 de (σ_k , λ) bağıntısı çelik için grafik olarak çizilmiştir.Euler hiperbolü denen bu eğri küçük narinlik dereceleri için büyük ordinatlara sahiptir ve belirli bir λ_p narinlik derecesi için Hooke kanununun uygulama alanını sınırlayan σ_p orantılılık sınırına ulaşır.İşte bu narinlik derecesi Euler formülünü sınırlayan en küçük narinlik derecesidir ve şu şekilde bulunur :

$$\lambda_p=\sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} \tag{4.3}$$

Örneğin St. 37 için σ_p=1900 kg/cm^2 ,E=2.1x10^6 kg/cm^2 alınacak olursa λ_p=105 elde olunur.Aynı şekilde St 52 için σ_p=2850 kg/cm^2 alınmak suretiyle λ_p=85 bulunur.

Çubukta narinlik sınırı $\lambda<\lambda_p$ olursa (4.2) ile bulunacak σ_k değeri σ_p sınırını aşar ve öngörülen şartlar gerçeklenemediği için artık Euler formülü kullanılamaz. Bu bölgeye elastik olmayan bölge denir,($0<\lambda<\lambda_p$).Kısa çubuklar için bahis konusu olabilecek bu bölgede kritik yük veya gerilmenin hesabı , elastik bölgede olduğu gibi basit bir problem değildir.Buna şu faktörler sebep olmaktadır :



Şekil 4.2

a)Orantılılık sınırının üstünde gerilme ve şekil değiştirme bağıntısı her malzemede farklı bir karakter gösterir.

b)Cismin bu alanda göstereceği kalıcı=plastik şekil değiştirmeler dolayısıyla gerilme ve şekil değiştirme bağıntılarında birebir tekabül bulunmaz. Yani malzemenin geçmişi = strain history hesapta rol oynar.

c)Çubuk eğri forma geçince her lifteki durum birbirinden farklı olur; dolayısıyla çubuğun kesit şekli kritik yüklerin hesabına etki eder.

d)(σ,ε) bağıntısı yalnız bir liften diğerine değil, aynı lif üzerinde kalsak bile, eksen boyunca da farklı durumlar gösterir.

Bütün bu sayılan noktalardan ötürü elastik olmayan bölgede her malzeme ve kesit şekli için (4.2) dekine benzer tek bir formül vermeğe imkan yoktur.Bu konuda yapılmış deneysel çalışmalar ve teorik araştırmaları ele alalım.

İlk deneysel çalışmalar Tetmajer tarafından yapılmış ve çelik için varılan sonuçlar şekil 4.2 de şematik olarak gösterilmiştir.Şekilden anlaşıldığına göre, σ_k kritik gerilmeleri narinliğe bağlı olarak değişmekte ve $\lambda<\lambda_p$ bölgesinde Euler hiperbolünün çok altında değerler almaktadır.Tetmajer, deneyden elde ettiği sonuçlara dayanarak $\lambda<\lambda_p$ bölgesi için (σ_k,λ) bağıntısının doğrusal bir fonksiyonla ifade edilebileceğini kabul etmiştir.Tetmajer burkulma formülleri şu esas kabule dayanmaktadır : σ_k kritik gerilmesi elastik olmayan bölgede de yalnız λ narinlik derecesine bağlıdır.Gerilme boyutları kg/cm^2 olmak üzere birkaç önemli yapı malzemesi için Tetmajer formülleri :

Yapı çeliği için :

$$\sigma_k=3100 - 11.4\lambda \qquad \lambda<\lambda=105 \tag{4.4}$$

Ahşap için :

$$\sigma_k=293 - 1.94\lambda \qquad \lambda<\lambda=100 \tag{4.5}$$

Dökme demir için:

$$\sigma_k=7760 - 120\lambda + 0.53\lambda^2 \qquad \lambda<\lambda=80 \tag{4.6}$$

Benzer burkulma deneyleri birçok araştırıcılar tarafından tekrarlanmış ve oldukça yakın sonuçlar elde edilmiştir.Çeşitli araştırmacıların vardığı sonuçlar arasındaki farkı, burkulma deneylerinin zorluğu, çubuk mesnetlerindeki istenmeyen eksantrikliklerin varlığı ve mafsallardaki sürtünmelerle açıklamak mümkündür.Deneylerde kullanılan malzeme ve kesit şekillerindeki farklar da, sonuçların birbirleriyle karşılaştırılmasında, güçlükler çıkarmaktadır.

Deney ve kabullere dayanan burkulma formüllerinden biri de Rankine formülüdür. Bunun dayandığı esas şudur : Çubuk çok kısa ($\lambda \to 0$) olursa kritik yük olarak cismin basınçtaki mukavemeti, mesela çelik için akma yükü alınacaktır ; bu değere P_M diyelim.Eğer çubuk çok uzun ($\lambda \to \infty$) olursa kritik yük Euler formülünden bulunacaktır ; o da $P_E=(\pi^2E/\lambda^2).A$ dan ibarettir.Bu iki sınır arasındaki narinlik dereceleri için de

$$1/P_k = 1/P_M + 1/P_E$$

şeklinde bir ortalama alınmasını Rankine önermiştir.Buradan P_k kritik yükü çözülürse

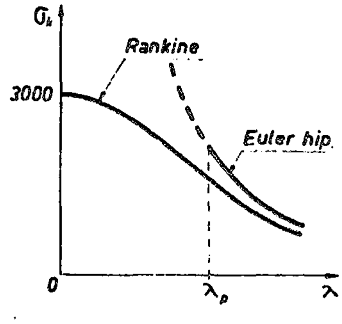
$$P_k=\frac{P_M}{1+P_M/P_E}=\frac{P_M}{1+P_M\,\lambda^2/\pi^2EA}$$ veya kritik gerilme için

$$\sigma_k=\frac{a}{1+b.\lambda^2} \qquad (4.7)$$

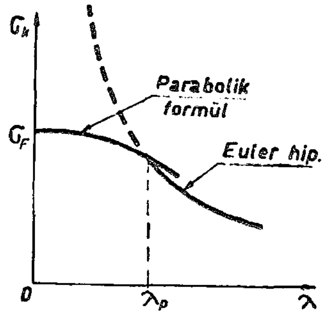
şeklinde bir formül bulunur.Burada a ve b yalnız malzeme ile ilgili sabitlerdir.Örneğin St.37 için Rankine formülü

$$\sigma_k=\frac{3000}{1+0.000077.\lambda^2} \qquad (4.8)$$

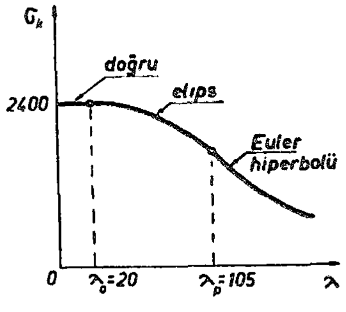
şeklindedir.Şekil 4.3.de Rankine formülü grafik olarak gösterilmiştir.



Şekil 4.3



Şekil 4.4



Şekil 4.5

Ampirik formüller arasında nisbeten basit bir ifadeye sahip olan parabolik formülü sayabiliriz.Bu formüle göre elastik olmayan bölgede kritik gerilme eğrisi çelik için bir parabolle gösterilmektedir :

$$\sigma_k=a - b\lambda^2 \qquad (4.9)$$

Burada a ve b malzemeye bağlı sabitlerdir.Bunlardan a sabiti malzemenin basınçtaki akma sınırı olarak alınabilir, çünkü $\lambda=0$ için $\sigma_k=a=\sigma_F$ olacaktır.b sabiti ise $\lambda=\lambda_p$ için $\sigma_k=\sigma_p$ şartından hesaplanmalıdır ; ancak bu takdirde Euler hiperbolü ile ordinat yönünden bir süreklilik sağlanabilir : $b=a/\lambda_p^2-\pi^2E/\lambda_p^4$ eder.Şekil 4.4 de parabolik formül ve Euler hiperbolü şematik olarak gösterilmiştir.Herşeye rağmen $\lambda=\lambda_p$ için iki eğrinin teğetlerinde bir süreksizlik olduğuna dikkat etmelidir.İki bölgenin birleşim noktasındaki bu teğet süreksizliğini ortadan kaldırmak için, elastik olmayan bölgede, (σ_k,λ) bağıntısını iki parçalı bir eğri kabul etmek gerekir.Şekil 4.5 de bu tip (σ_k,λ) eğrisi gösterilmiştir.Birinci parça $0\leq\lambda\leq\lambda_0$ arasında olup

$$\sigma_k=\sigma_F \qquad 0\leq\lambda\leq\lambda_0 \tag{4.10}$$

gibi apsis eksenine paralel bir doğrudan ibarettir ; burada σ_F ile çeliğin basınçtaki akma sınırı gösterilmiştir.λ_0 da, seçilen bir ara narinlik derecesidir.Eğrinin iknci parçası bir elipsten ibaret olup, $\lambda=\lambda_0$ noktasında yatay doğruya $\lambda=\lambda_p$ de de Euler hiperbolüne teğettir.Bu özelliklere sahip elipsin denklemi, $\lambda_0=20$, $\lambda_p=105$ ve $\sigma_p=1900$ kg/cm^2 alınmak şartıyla

$$\sigma_k=1778+7.178\sqrt{7515-(\lambda-20)^2} \qquad 20\leq\lambda\leq105 \tag{4.11}$$

den ibarettir.Benzer (σ_k,λ) eğrisi St. 52 için de düşünülebilir.

Engesser'in çubukların elastik olmayan burkulma problemi üzerindeki teorik araştırmaları sonucunda basit bir düşünceye dayanarak

$$\sigma_k=\frac{\pi^2E_t}{\lambda^2} \qquad \lambda\leq\lambda_p \tag{4.12}$$

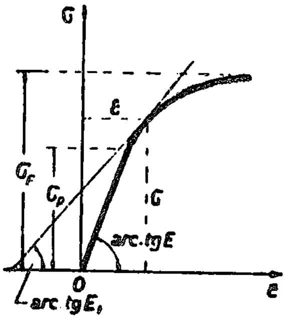
formülünü ileri sürmüştür.Engesser formülü ile (4.2) de verilen Euler formülünün tek farkı oradaki sabit elastisite modülü E yerine burada E_t ile gösterilen ve teğet modülü denen değişken bir büyüklüğün konmasıdır.Şekil 4.6. da malzemenin orantılılık sınırının üstünde tipik σ,ε diyagramı gösterilmiştir.$\sigma>\sigma_p$ için E_t modülünün tarifi

$$E_t=\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_{\sigma=\sigma_k} \tag{4.13}$$

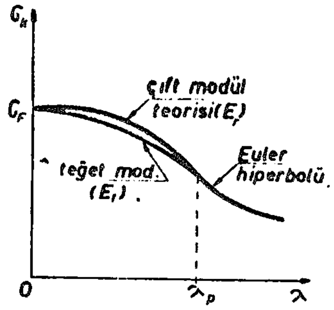
dan ibarettir.Genel olarak E_t modülü σ ya bağlı olduğu için önce bir $\sigma=\sigma_k$ seçilir.Buna karşılık gelen E_t bulunur ve (4.12) den

$$\lambda=\pi\sqrt{\frac{E_t}{\sigma_k}} \tag{4.14}$$

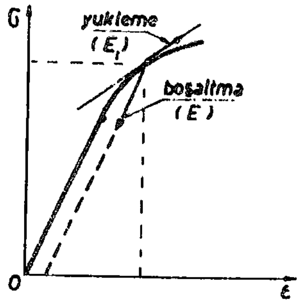
şeklinde narinlik hesaplanır.Bu tarzda elde olunan kritik gerilme eğrisi şekil 4.7 de gösterilmiştir.(σ,ε) diyagramında yatay eşiğe karşılık gelen akma sınırı için, $E_t=0$ olduğundan $\lambda=0$ dır.



Şekil 4.6



Şekil 4.7



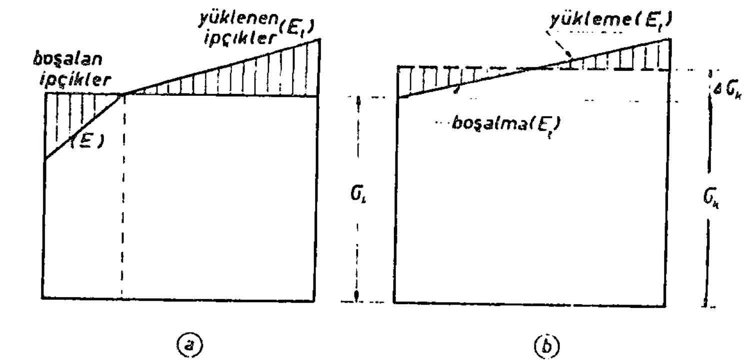
Şekil 4.8

Engesser teorisi bu haliyle yetersizdir.Çubuk farksız denge konumuna ulaşınca I ile gösterilen doğru denge konumu yanında, ona çok yakın II ile gösterilen eğri bir denge konumu bulunması gerekir.O halde çubuk I den II ye geçerken yani burkulurken bazı liflerdeki basınç gerilmesinin artması (yükleme), bazı liflerdekinin de azalması (boşaltma) gerekir.Çelik gibi plastik özelliğe sahip bir malzemede, elastik sınırın üzerinde yükleme ve boşaltma eğrileri aynı değildir (bkz.şekil 4.8).Bu duruma göre kritik gerilmeye (4.12)de olduğu gibi yalnız E_t modülünün değil E modülünün de etkimesi gerekir.Kısaca teori çift modüllü olmalıdır.

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E_r}{\lambda^2} \tag{4.15}$$

Burada E_r ile gösterilen modül E ve E_t modüllerine ve kesitin şekline bağlı olan indirgenmiş bir modüldür.

E_r nin hesabı şu esasa dayanır : Kolon eğri forma geçince kesitte gerilme dağılışı şekil 4.9.a daki gibi olur.Toplam kuvvet sabit kalmak şartıyla bazı liflerdeki gerilmeler artar ve bir kısmında da azalır.Şekildeki taralı diyagram eğilme momentine karşılık gelen dağılışı gösterir, fakat çekme ve basınç kısmındaki modüller eşit değildir.Böyle hallerde eğrilik - moment bağıntısını indirgenmiş bir modülle ifade etmek olanaklıdır.



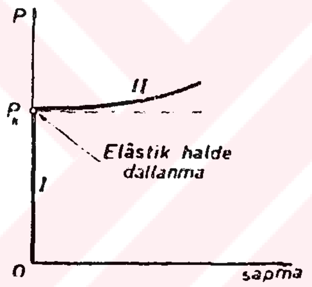
Şekil 4.9

Kesitin geometrisine bağlı E_r modülü dikdörtgen kesit için

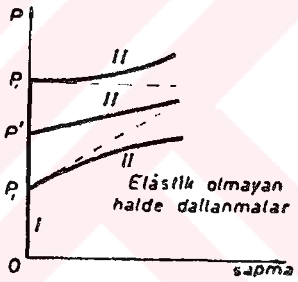
$$E_r = \frac{4E.E_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} \tag{4.16}$$

olarak bulunur.$E \geq E_t$ olduğundan daima $E_r \geq E_t$ eder ki bu da (4.15) ile hesaplanandan büyük edeceğini gösterir.Şekil 4.7 de çift modül teorisinden elde olunan (σ_k,λ) diyagramı da şematik olarak gösterilmiştir.

Elastik olmayan stabilite problemleri Shanley'in araştırmaları ile aydınlığa kavuşmuştur.Shanley'in esas fikri şöylece özetlenebilir : Eğer stabilite problemleri bir dallanma problemi olarak ele alınırsa elastik olanla olmayan arasında prensip yönünden çok önemli farklar vardır.Elastik halde yük ve yerdeğiştirme eğrisinde dallanma daima farksız denge konumlarında olmakta ve çubuk, yakın eğri formdaki dengeye geçerken P yükü sabit kalmaktadır.O halde dallanma eğrisinin $P=P_k$ da sapma eksenine paralel bir yatay teğeti bulunmaktadır (bkz. şekil 4.10). Elastik olmayan hale gelince Shanley göstermiştir ki dallanma P yükünün çeşitli değerlerinde mümkün olmaktadır (çok değerlilik).Ancak çeşitli yük seviyesindeki dallanmalarda yük sabit kalmamaktadır.Demek ki dallanma eğrisinin başlangıç teğetleri artık, elastik halde olduğu gibi, sapma eksenine paralel olmayacaktır (bkz.şekil 4.11).



Şekil 4.10



Şekil 4.11

Ayrıca Shanley ispat etmiştir ki teğeti yatay olmayan ilk dallanma ancak

$$P_t = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} A = \frac{\pi^2 E_t}{\ell_b^2} I \tag{4.17}$$

değerinde mümkündür.Bu da teğet modülüne göre hesaplanan kritik yükün aynısıdır.Bu arada önemli noktalardan biri de hangi yük seviyesinde, dallanma yük sabit kalarak meydana gelir sorusudur.Bunun cevabı olan yük

$$P_r = \frac{\pi^2 E_r}{\lambda^2} A = \frac{\pi^2 E_r}{\ell_b^2} I \tag{4.18}$$

değerinden ibarettir.Bu ise çift modülle bulunan kritik yükün aynısıdır.Bu duruma göre Engesser'in ilk verdiği ve teğet modülü esasına dayanan yük ile sonradan çift modülden hareket ederek hesapladığı yükün ikisi de ayrı iki tip dallanmaya karşılık gelen değerlerdir.Ayrıca $P_t < P' < P_r$ arasındaki her P' yükü için de bir dallanma olanaklıdır.Dallanmada yük arttığı takdirde, eğilme hesaplarının tek bir modül ile yapılabileceğini, şekil 31.b deki gerilme dağılışı açıkça göstermektedir.Shanley'in ana hatlarıyla açıklanan fikirlerini özetleyecek olursak, elastik olmayan durumlarda :

a)Dallanma çeşitli yük seviyeleri için mümkündür(sonsuz).

b)Yük artmak şartıyla, dallanmanın mümkün olduğu en küçük yük (4.17) de verilen P_t yüküdür.

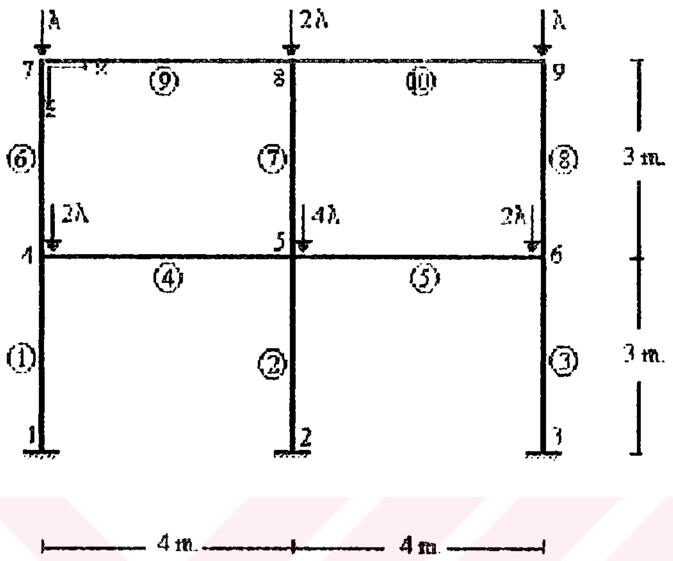
Shanley teorisinden anlaşıldığına göre teğet modülü ile hesaplanan

$$P_t = \frac{\pi^2 E_t}{\ell_b^{\,2}} I = (P')_{min} \tag{4.19}$$

yükü en küçük dallanma yüküdür ; onun için emniyet tarafında bulunan bir sınır değer sayılması gerekir.

5. SAYISAL UYGULAMALAR

Aşağıdaki stabilite problemi önce matris metoduyla sonra da Mc Minn'in metoduyla analiz edilerek kritik yük çarpanı hesaplanacak, sonuçlar karşılaştırılacaktır.



$E = 2{,}1.10^8$ kN/m²

Şekil 5.1

Kolonlar : IPB 300

I_y=25170 cm⁴

A=149 cm²

Kirişler : IPB 200

I_y=5700 cm⁴

A=78,1 cm²

5.1 MATRİS METODU İLE ÇÖZÜM

Eleman Tablosu

Eleman no	l ucu	r ucu	ℓ_i	Cosα	Sinα
1	1	4	3	0	-1
2	2	5	3	0	-1
3	3	6	3	0	-1
4	4	5	4	1	0
5	5	6	4	1	0
6	4	7	3	0	-1
7	5	8	3	0	-1
8	6	9	3	0	-1
9	7	8	4	1	0
10	8	9	4	1	0

Elastik Rijitlik Matrisi ($\underline{K}^e$) nin Direkt Rijitlik Matrisi Yöntemiyle Oluşturulması

$$
\underline{K}^e = \begin{bmatrix}
\underline{k}_{44}^1 + \underline{k}_{44}^4 + \underline{k}_{44}^6 & \underline{k}_{45}^6 & 0 & \underline{k}_{47}^6 & 0 & 0 \\
 & \underline{k}_{55}^2 + \underline{k}_{55}^4 + \underline{k}_{55}^7 + \underline{k}_{55}^5 & \underline{k}_{56}^5 & 0 & \underline{k}_{58}^7 & 0 \\
 & & \underline{k}_{66}^3 + \underline{k}_{66}^5 + \underline{k}_{66}^8 & 0 & 0 & \underline{k}_{69}^8 \\
 & & & \underline{k}_{77}^6 + \underline{k}_{77}^9 & \underline{k}_{78}^9 & 0 \\
 & \text{sim.} & & & \underline{k}_{88}^7 + \underline{k}_{88}^9 + \underline{k}_{88}^{10} & \underline{k}_{89}^{10} \\
 & & & & & \underline{k}_{99}^8 + \underline{k}_{99}^{10}
\end{bmatrix}
$$

1,2,3,6,7 ve 8 için Eleman Rijitlik Matrisi

$$
\underline{k}_e^i = \begin{bmatrix}
23492 & 0 & -35238 & -23492 & 0 & -35238 \\
 & 3066869 & 0 & 0 & -3066869 & 0 \\
 & & 70476 & 35238 & 0 & 35238 \\
 & \text{sim.} & & 23492 & 0 & 35238 \\
 & & & & 3066869 & 0 \\
 & & & & & 70476
\end{bmatrix}
$$

4,5,9 ve 10 için Eleman Rijitlik Matrisi

$$
\underline{k}_e^i = \begin{bmatrix}
410032,4 & 0 & 0 & -410032,4 & 0 & 0 \\
 & 2244,4 & -4489 & 0 & -2244,4 & 4489 \\
 & & 11970 & 0 & 4489 & 5985 \\
 & \text{sim.} & & 410032,4 & 0 & 0 \\
 & & & & 2244,4 & 4489 \\
 & & & & & 11970
\end{bmatrix}
$$

Geometrik Rijitlik Matrisi ($\underline{K}^g$) nin Direkt Rijitlik Matrisi Yöntemiyle Oluşturulması

$$\underline{K}_g = \begin{bmatrix} \underline{k}^1_{44} + \underline{k}^6_{44} & 0 & 0 & \underline{k}^6_{47} & 0 & 0 \\ & \underline{k}^2_{55} + \underline{k}^7_{55} & 0 & 0 & \underline{k}^7_{58} & 0 \\ & & \underline{k}^3_{66} + \underline{k}^8_{66} & 0 & 0 & \underline{k}^8_{69} \\ & & & \underline{k}^6_{77} & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & \underline{k}^7_{88} & 0 \\ & & & & & \underline{k}^8_{99} \end{bmatrix}_{18x18}$$

1,2,3,6,7 ve 8 için Eleman Geometrik Rijitlik Matrisi

$$\underline{k}^i_g = F_1 \cdot \begin{bmatrix} 6/15 & 0 & -1/10 & -6/15 & 0 & -1/10 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 6/15 & 1/10 & 0 & -1/10 \\ & & & 6/15 & 0 & 1/10 \\ & \text{sim.} & & & 0 & 0 \\ & & & & & 6/15 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{K}^{e})=\begin{bmatrix}
457016. & 0 & 0 & -410032 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -23492 & 0 & -35238 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2088264 & -4489 & 0 & -2244.4 & -4489 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1043010 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -4489 & 152922 & 0 & 4489 & 5985 & 0 & 0 & 0 & 35238 & 0 & 35238 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-410032 & 0 & 0 & 867049 & 0 & 0 & -410032 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -23492 & 0 & -35238 & 0 & 0 \\
0 & -2244.4 & 4489 & 0 & 2090508 & 0 & 0 & -2244.4 & -4489 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1043010 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -4489 & 5985 & 0 & 0 & 164892 & 0 & 4489 & 5985 & 0 & 0 & 0 & 35238 & 0 & 35238 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -410032 & 0 & 0 & 457016. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -23492 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2244.4 & 4489 & 0 & 2088264 & 4489 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1043010 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -4489 & 5985 & 0 & 4489 & 152922 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35238 & 0 \\
-23492 & 0 & 35238 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 433524. & 0 & 35238 & -410032 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1E+06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1045254. & -4489 & 0 & -2244.4 & -4489 & 0 & 0 \\
-35238 & 0 & 35238 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35238 & -4489 & 82446 & 0 & 4489 & 5985 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -23492 & 0 & 35238 & 0 & 0 & 0 & -410032 & 0 & 0 & 843557 & 0 & 35238 & -410032 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1E+06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2244.4 & 4489 & 0 & 1047499 & 0 & 0 & -2244.4 \\
0 & 0 & 0 & -35238 & 0 & 35238 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4489 & 5985 & 35238 & 0 & 94416 & 0 & 4489 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -23492 & 0 & 35238 & 0 & 0 & 0 & -410032 & 0 & 0 & 433524. & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1E+06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2244.4 & 4489 & 0 & 1045254. \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -35238 & 0 & 35238 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4489 & 5985 & 35239 & 4489
\end{bmatrix}$$

$$(\underline{K}^{g})=\begin{bmatrix}
1.6 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.2 & 0 & 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3.2 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0 & -0.2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 3.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & -0.2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 0 & -0.1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & -0.1 \\
-0.4 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.1 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -0.8 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.4
\end{bmatrix}$$

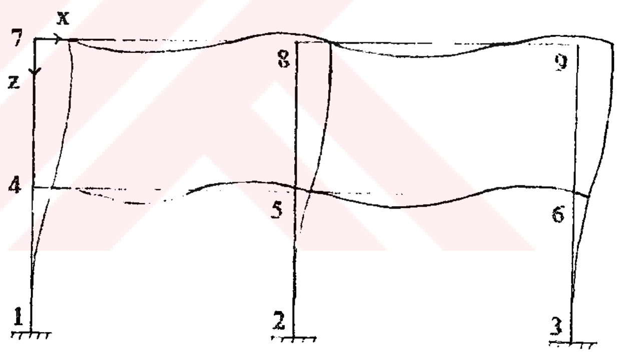
$$
(\underline{L})=\begin{bmatrix}
676.03 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1445.08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -3.1063 & 391.040 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-606.53 & 0 & 0 & 706.52 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1.5531 & 11.4673 & 0 & 1445.81 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -3.1063 & 15.2806 & 0 & -0.1245 & 405.769 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -590.355 & 0 & 0 & 346.705 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1.5523 & 11.0624 & 0 & 1445.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -3.1048 & 14.7488 & 0 & 2.99024 & 390.750 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-34.749 & 0 & 90.1135 & -29.832 & -0.7147 & -3.3937 & -49.936 & 0.0252 & 0.12222 & 648.692 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -721.76 & -5.7336 & 0 & -0.7298 & -5.3098 & 0 & 0.03987 & 0.19431 & 0.76787 & 724.049 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-52.124 & 0 & 90.1135 & -44.74796 & -0.7147 & -3.3937 & -74.904 & 0.02521 & 0.12222 & 31.1686 & -5.5449 & 250.960 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -33.2503 & 0 & 86.8424 & -55.658 & -0.6648 & -3.2727 & -637.45 & 1.31380 & 57.8335 & 649.701 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -721.40 & -0.2214 & 0 & -0.7732 & -5.7178 & -0.7948 & -3.8261 & 15.8468 & -2.1827 & 725.793 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -49.8755 & 0 & 86.8424 & -83.487 & -0.6648 & -3.2727 & -8.2655 & -5.5533 & -7.8833 & 25.5109 & 0.21051 & 276.755 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -67.758 & 0 & 90.1803 & -5.2329 & -0.0186 & -19.618 & -639.84 & -0.7913 & 38.8916 & 97.3168 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -721.78 & 5.5235 & 0.02701 & 0.03822 & 0.06731 & -0.6903 & -3.8211 & 14.6216 & -15.516 & 723.725 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -101.63 & 0 & 90.1803 & -7.8409 & -0.0159 & -29.406 & -13.328 & -4.8812 & -7.8080 & 116.862 & 8.14218 & 221.521
\end{bmatrix}
$$

$$
(\tilde{\underline{K}})=\begin{bmatrix}
3500.96 & 0 & 756.558 & 3005.49 & -6.0005 & -28.492 & 5030.94 & 0.21167 & 1.02615 & -304.34 & 6.09850 & 1941.08 & 117.214 & -48.294 & 2103.80 & 3806.36 & 38.9954 & 625.423 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
756.558 & 0 & 10463.5 & 649.487 & -82.990 & -394.06 & 1087.18 & 2.92760 & 14.1920 & -907.39 & 80.8432 & -4069.8 & -349.04 & 4.74921 & 459.604 & -2603.9 & -62.202 & 1291.96 \\
3005.49 & 0 & 649.487 & 8990.77 & -5.1513 & 1370.80 & 15049.8 & -10.499 & -51.701 & 866.909 & 14.2858 & 5891.26 & 149.208 & -132.27 & 4886.97 & 10787.6 & 121.341 & 2221.68 \\
-6.0005 & 0 & -82.990 & -5.1513 & 0.65822 & 3.12548 & -8.6228 & -0.0232 & -0.1125 & 7.19688 & -0.6411 & 32.2793 & 2.76840 & -0.0376 & -3.6452 & 20.6530 & 0.49335 & -10.247 \\
-28.492 & 0 & -394.06 & 1370.80 & 3.12548 & 19450.1 & 2294.60 & -148.89 & -732.97 & 379.951 & 139.322 & 1322.54 & -1323.5 & -28.599 & -6780.1 & -3428.5 & -80.989 & 3032.66 \\
5030.94 & 0 & 1087.18 & 15049.8 & -8.6228 & 2294.60 & 38502.7 & -17.575 & 1389.74 & 2475.50 & 22.4307 & 13706.3 & 2060.29 & -287.17 & 12186.4 & 25234.7 & 265.773 & 4929.77 \\
0.21167 & 0 & 2.92760 & -10.499 & -0.0232 & -148.89 & -17.575 & 1.13984 & 5.61116 & -2.9009 & -1.0672 & -10.090 & 10.1350 & 0.21890 & 51.9011 & 26.2695 & 0.62054 & -23.227 \\
1.02615 & 0 & 14.1920 & -51.701 & -0.1125 & -732.97 & 1389.74 & 5.61116 & 10506.6 & 97.4075 & -8.1863 & 372.004 & 301.197 & 75.2895 & 816.814 & -4404.0 & -184.86 & -2363.3 \\
-304.34 & 0 & -907.39 & 866.909 & 7.19688 & 379.951 & 2475.50 & -2.9009 & 97.4075 & 1052.10 & -5.5335 & 1666.35 & 789.336 & -24.852 & 602.786 & 6061.41 & 114.569 & -1879.1 \\
6.09850 & 0 & 80.8432 & 14.2858 & -0.6411 & 139.322 & 22.4307 & -1.0672 & -8.1863 & -5.5335 & 1.66938 & -24.363 & -13.385 & -0.1660 & -46.947 & -50.990 & -1.1579 & 35.0889 \\
1941.08 & 0 & -4069.8 & 5891.26 & 32.2793 & 1322.54 & 13706.3 & -10.090 & 372.004 & 1666.35 & -24.363 & 12989.1 & 645.781 & -244.55 & 4451.26 & 10945.2 & 129.890 & 1956.27 \\
117.214 & 0 & -349.04 & 149.208 & 2.76840 & -1323.5 & 2060.29 & 10.1350 & 301.197 & 789.336 & -13.385 & 645.781 & 2339.96 & -1.5371 & 1922.19 & 14351.5 & 278.806 & -6618.5 \\
-48.294 & 0 & 4.74921 & -132.27 & -0.0376 & -28.599 & -287.17 & 0.21890 & 75.2895 & -24.852 & -0.1660 & -244.55 & -1.5371 & 5.85405 & -90.195 & -204.63 & -2.8682 & -92.393 \\
2103.80 & 0 & 459.604 & 4886.97 & -3.6452 & -6780.1 & 12186.4 & 51.9011 & 816.814 & 602.786 & -46.947 & 4451.26 & 1922.19 & -90.195 & 16844.0 & 11040.4 & -57.145 & 352.793 \\
3806.36 & 0 & -2603.9 & 10787.6 & 20.6530 & -3428.5 & 25234.7 & 26.2695 & -4404.0 & 6061.41 & -50.990 & 10945.2 & 14351.5 & -204.63 & 11040.4 & 135867. & 2761.13 & -51805. \\
38.9954 & 0 & -62.202 & 121.341 & 0.49335 & -80.989 & 265.773 & 0.62054 & -184.86 & 114.569 & -1.1579 & 129.890 & 278.806 & -2.8682 & -57.145 & 2761.13 & 62.6174 & -1129.8 \\
625.423 & 0 & 1291.96 & 2221.68 & -10.247 & 3032.66 & 4929.77 & -23.227 & -2363.3 & -1879.1 & 35.0889 & 1956.27 & -6618.5 & -92.393 & 352.793 & -51805. & -1129.8 & 36398.2
\end{bmatrix}
$$

$\underline{K}^e$ ve $\underline{K}^g$ matrisleri oluşturulduktan sonra bir genel özdeğer problemi olan $(\underline{K}^e+\lambda.\underline{K}^g).\underline{r}=0$ matrisyel stabilite bağıntısı, Bölüm 1.4.2. deki Cholesky yöntemiyle $(\underline{\tilde{K}}^e-\Lambda\underline{I}).\underline{\bar{r}}=0$ özel özdeğer problemine dönüştürülür. Sonuç olarak λ özdeğerleri ve $\underline{r}$ özvektörleri bulunur. En küçük λ özdeğeri ve karşılık gelen $\underline{r}$ özvektörü şöyledir :

λ_1=5990,57 kN

$$\underline{r}_1=\begin{array}{l}\left[\begin{array}{c}0,5.10^{-2}\\-0,302.10^{-4}\\-0,217.10^{-2}\\0,502.10^{-2}\\0\\-0,202.10^{-2}\\0,5.10^{-2}\\0,302.10^{-4}\\-0,217.10^{-2}\\0,111.10^{-1}\\-0,425.10^{-4}\\-0,159.10^{-2}\\0,111.10^{-1}\\0\\-0,129.10^{-2}\\0,111.10^{-1}\\0,425.10^{-4}\\-0,159.10^{-2}\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}r_{4x}\\r_{4z}\\\theta_4\\r_{5x}\\r_{5z}\\\theta_5\\r_{6x}\\r_{6z}\\\theta_6\\r_{7x}\\r_{7z}\\\theta_7\\r_{8x}\\r_{8z}\\\theta_8\\r_{9x}\\r_{9z}\\\theta_9\end{array}$$

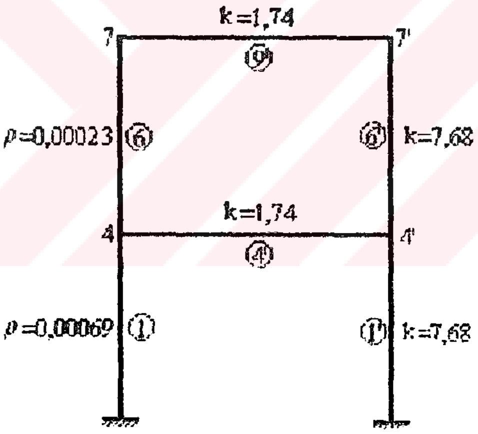


Şekil 5.2 Kalitatif burkulma diagramı

5.2.MC MINN'İN METODUYLA ÇÖZÜM

Çözüm için sistem önce Lightfoot yöntemiyle eşdeğer tek açıklıklı sisteme dönüştürülür.

Eleman	P	I	ℓ	k	P_E	Eşdeğer ρ	Eşdeğer k
1 & 3	3	604,712	118,11	5,12	5796,46	(1+2+1)/(5796,46)*3=	7,68
2	6	604,712	118,11	5,12	5796,46	0,00023	
6 & 8	1	604,712	118,11	5,12	5796,46	(3+6+3)/(5796,46*3)=	7,68
7	2	604,712	118,11	5,12	5796,46	0,00069	
Kirişler	-	136,940	157,48	0,87	735,720	-	1,74



Şekil 5.3

Şimdi, elde ettiğimiz bu eşdeğer tek açıklıklı sisteme Mc Minn metodunu uygulayabiliriz.Başlangıç olarak W=500 seçelim.

W=500

Eleman	k	ρ_{500}	n	o	n.k	o.k
6	7,68	0,115	0,499	1,200	3,832	9,216
1	7,68	0,345	-0,52	1,918	-3,994	14,73

$$K_D = \begin{bmatrix} (n.k)_6 + 6.k_{9'} & -(o.k)_6 \\ -(o.k)_6 & (n.k)_1 + (n.k)_6 + 6.k_{4'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14,272 & 9,216 \\ 9,216 & 10,278 \end{bmatrix}$$

Esas diagonal baskın olduğundan W=500 kritik yükten küçüktür.

W=700

Eleman	k	ρ_{700}	n	o	n.k	o.k
6	7,68	0,161	0,371	1,34	2,85	10,29
1	7,68	0,483	-1,549	2,68	-11,9	20,58

$$K_D = \begin{bmatrix} 13,29 & -10,29 \\ -10,29 & 1,39 \end{bmatrix} \qquad Q_{700} = \begin{bmatrix} -1 & -7,403 \\ -0,774 & -1 \end{bmatrix}$$

Q nun en büyük kökü λ_1= -3,39 dur.$|\lambda_1| > |-2|$ olduğundan kritik yük aşılmış demektir Kritik yük 500 ile 700 arasındadır.

W=600

Eleman	k	ρ_{600}	n	o	n.k	o.k
6	7,68	0,138	0,507	1,261	3,894	9,685
1	7,68	0,414	-0,994	2,261	-7,634	17,36

$$K_D = \begin{bmatrix} 14,33 & -9,685 \\ -9,685 & 6,7 \end{bmatrix} \qquad Q_{600} = \begin{bmatrix} -1 & -1,4455 \\ -6,67585 & -1 \end{bmatrix}$$

Q nun en büyük kökü λ_1= -1,988 dir.Kritik yüke oldukça yaklaşılmış durumda.

W=610

Eleman	k	ρ_{610}	n	o	n.k	o.k
6	7,68	0,1403	0,497	1,26745	3,8170	9,7340
1	7,68	0,4209	-1,043	2,29720	-8,0102	17,642

$$K_D = \begin{bmatrix} 14,257 & -9,734 \\ -9,734 & 6,2468 \end{bmatrix} \qquad Q_{610} = \begin{bmatrix} -1 & -1,5582 \\ -0,683 & -1 \end{bmatrix}$$

Q nun en büyük kökü λ_1= -2,03 olduğundan kritik yükün biraz üzerindedir.

W=603

Eleman	k	ρ_{603}	n	o	n.k	o.k
6	7,68	0,1387	0,504	1,260	3,871	9,677
1	7,68	0,4161	-1,010	2,272	-7,757	17,45

$$K_D = \begin{bmatrix} 14,311 & -9,677 \\ -9,677 & 6,554 \end{bmatrix} \qquad Q_{603} = \begin{bmatrix} -1 & -1,477 \\ -0,6762 & -1 \end{bmatrix}$$

λ_1= -1,9994 ≅ -2 X={ 1,477 1 }

Q nun en büyük kökü λ_1= -1,9994 ≅ -2 olduğundan kritik yük Wc=603 ton=6030 kN bulunmuş olur.Bu sonuç, matris metoduyla bulunan λ_k=5990,57 kN sonucundan sadece % 0,65 farklıdır.

5.3 SİSTEMİN YAKLAŞIK BURKULMA YÜKÜNÜN TS 500 ' DE BULUNAN ABAKLAR YARDIMIYLA HESABI

Bu kısımda sistemin TS 500 ' de verilen formül ve abaklardan yararlanarak burkulma yükü araştırılmıştır.Çerçeve yanal yük almadığı için burkulmadan önce şekil değiştirmeyen sistem olarak kabul edilmiştir.

Kolonlar tek tek ele alınmış, birleşimleri ve rijitlikleri ayrı ayrı incelenmiş olup, her kolon için ayrı burkulma yükü hesaplanmış ve bunların içinden en küçük olanı ele alınmıştır.

Kullanılan formüller ve notasyonlarının anlamı aşağıdaki gibidir.

$$N_k = \frac{\pi^2 (EI)}{(k\ell)^2}$$

N_k : Adı geçen kolona ait kritik burkulma yükü

EI : Kolonun alt ve üst birleşimleri gözönünde bulundurularak formülle bulunacak rijitliği.

k : Abaklardan α_a ve α_b sayıları yardımıyla bulunan katsayı. a ve b katsayıları kolonun alt ve üst uçlarını göstermektedir.

ℓ : Kolon boyu

$$\alpha = \frac{\Sigma \frac{I}{\ell}(\text{kolon})}{\Sigma \frac{I}{\ell}(\text{kiriş})}$$

Kirişlerde çatlamış kesit atalet momentleri temel alınmıştır.Çatlamış kesit atalet momenti, brüt kesit atalet momentinin %50 si olarak alınmıştır.

$$EI = \frac{E_c . I_c}{2.5}\left(\frac{1}{1+R_m}\right)$$

$E_c.I_c$: Bağıntıdaki brüt beton kesitinin eğilme rijitliği

R_m : Basınç elemanına etkiyen kalıcı eksenel yükün toplam eksenel yüke oranı

R_m katsayısının değişken olabileceği düşünülerek 0,25 ile 0,50 arasında 0,05 artımla bütün değerler için hesap yapılmıştır.

Önce bütün kolonlara ait α_a ve α_b katsayıları bulunup, bunların yardımıyla abaktan k katsayıları alınmıştır.Her kolona P yükünün ayrı katları olarak etkiyen normal kuvvetler biçiminde alınan yükler olduğu için P yükünün başındaki katsayı esas alınarak aşağıdaki programla hesap yapılmıştır.

Bu programda kullanılan başlıca notasyonlardan,

R : Adı geçen kolona ait brüt EI değeri

J : R_m değeri

P_k : Kritik P burkulma yükü

```
10 ' TS 500 BURKULMA HESABI
20'
30 PI=3.141592
40 INPUT "Kolon sayısı :" ; N
50 FOR I = 1 TO N
60 INPUT " Kolon adı :" ; ad
70 INPUT " K , L , P , R  :" ; K , L , P , R
80 D = K * L
90 FOR J = 0.25 TO 0.55  STEP 0.05
100 C = (R / 2.5)*(1 / (1 + J))
110 PK=(PI ^ 2* C / D ^ 2) / P
120 PRINT AD ,  J , PK
130 NEXT  J
140 NEXT  I
```

Programdan Çıkan Sonuçlar :

KOLON	NO	:	6	RM=	.25	KRITIK	YUK=	19511.93
KOLON	NO	:	6	RM=	.3	KRITIK	YUK=	18761.47
KOLON	NO	:	6	RM=	.35	KRITIK	YUK=	18066.6
KOLON	NO	:	6	RM=	.4	KRITIK	YUK=	17421.37
KOLON	NO	:	6	RM=	.45	KRITIK	YUK=	16820.63
KOLON	NO	:	6	RM=	.5000001	KRITIK	YUK=	16259.94
KOLON	NO	:	1	RM=	.25	KRITIK	YUK=	12986.44
KOLON	NO	:	1	RM=	.3	KRITIK	YUK=	12486.96
KOLON	NO	:	1	RM=	.35	KRITIK	YUK=	12024.48
KOLON	NO	:	1	RM=	.4	KRITIK	YUK=	11595.04
KOLON	NO	:	1	RM=	.45	KRITIK	YUK=	11195.21
KOLON	NO	:	1	RM=	.5000001	KRITIK	YUK=	10822.03
KOLON	NO	:	7	RM=	.25	KRITIK	YUK=	10276.2
KOLON	NO	:	7	RM=	.3	KRITIK	YUK=	9880.958
KOLON	NO	:	7	RM=	.35	KRITIK	YUK=	9514.996
KOLON	NO	:	7	RM=	.4	KRITIK	YUK=	9175.175
KOLON	NO	:	7	RM=	.45	KRITIK	YUK=	8858.789
KOLON	NO	:	7	RM=	.5000001	KRITIK	YUK=	8563.496
KOLON	NO	:	2	RM=	.25	KRITIK	YUK=	6685.602
KOLON	NO	:	2	RM=	.3	KRITIK	YUK=	6428.463
KOLON	NO	:	2	RM=	.35	KRITIK	YUK=	6190.372
KOLON	NO	:	2	RM=	.4	KRITIK	YUK=	5969.287
KOLON	NO	:	2	RM=	.45	KRITIK	YUK=	5763.45
KOLON	NO	:	2	RM=	.5000001	KRITIK	YUK=	5571.334

Bu sonuçlardan sonra R_m sayısının çeşitli değerlerine karşılık gelen kritik burkulma yüklerinin tümünün 2 nolu elemanda gerçekleştiği görülmektedir.

Sonuçları matris metodu ile bulunan 5990,57 kN değeri ile karşılaştıracak olursak, R_m=0,25 , R_m=0,30 ve R_m=0,35 için % 11 , % 7 ve % 3.2 kadar güvenliksiz tarafta kalmakta,

R_m=0,40 , R_m=0,45 ve R_m=0,50 için % 0,4 , % 4 ve % 7,5 kadar güvenlikli tarafta kalmaktadır.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER :

Bu tez çalışmasında, elastik stabilite hesabının farklı çözüm yöntemleri analiz edilerek, elde edilen sonuçların karşılaştırılması ve değerlendirilmesi için olanak sağlanmış oldu.

Kesin çözüm metodlarından diferansiyel metodun büyük sistemlere uygulanması işlemsel açıdan büyük güçlükler arzetmektedir.Elde edilen yüksek mertebeli diferansiyel denklemlerin çözüm zorluğu, pratik uygulamasını sınırlamaktadır.

Kesin çözüm metodlarından matris metodu ise programlanabilirliği ve tam sonuç vermesi ile en avantajlı metoddur.Ancak matrislerin mertebesinin, sistemin serbestlik derecesinin üç katı olarak gelişmesi ve bunun sonucunda büyük sistemlerde oldukça geniş matrislerle çalışma zorunluluğu, matrislerin ancak bilgisayar yoluyla çözümünü sınırlı tutmaktadır.

Yaklaşık çözüm metodları içerisinde yine matrisyel bir metod olan Mc Minn metodu bazı sınırlamalar içerisinde kesin çözüme oldukça yakın sonuçlar vermektedir.Hesaplamalarda hata oranı %1 den küçük olmaktadır.Ancak simetrik yük sınırlaması vardır ve yüksek narinlik dereceleri için çözüm elde edilememektedir.Bu dezavantajlarına rağmen oldukça pratik olması, programlamaya dolayısıyla defalarca çözüm ile kesit optimizasyonuna uygunluğu ve yaklaşıklığı yüksek çözümler vermesi ile geniş kullanım alanı bulabilecek bir metoddur.

Bu çalışmada, T.S. 500 deki abaklar yardımıyla çözüm de incelendi.Kalıcı eksenel yükün toplam eksenel yüke oranı azaldıkça ($0,25 \leq Rm < 0,35$) çözüm güvenliksiz bölgede kalmaktadır.Kalıcı eksenel yükün oranı artsa bile ($0,35 \leq Rm \leq 0,50$) , en fazla $Rm = 0,50$ için % 7,5 kadar bir güvenlik sağlamaktadır ki yeterli bir güvenlik olarak gözükmemektedir.

KAYNAKLAR :

-Barnett,S. , Storey,C. ,Matrix Methods in Stability Theory , Nelson ,1970

-Hestenes,M.R. ,Landesman,E.M. ,Linear Algebra for Mathematics, Science and Engineering , Prentice-Hall International, Inc. :207-281

-İnan,M. ,Cisimlerin Mukavemeti , 1969 ,Elastik Stabilite :483-553

-Lawo-Thierauf , Stabtragwerke , Matrizenmethoden der Statik und Dynamik , Teil 1: Statik :275-311 , 434-458

-Mc Minn,S.J. ,Matrices for Structural Analysis ,1966 ,Stabililty of Rigid Frames , Lecturer in Structural Engineering, University of Manchester Institute of Science and Technology, E.F.N. Spon Ltd. : 32-43 , 146-203

-T.S. 500 , 1984 :35-38

ÖZGEÇMİŞ:

19 Aralık 1971 tarihinde Malatya'da doğdum.İlk, orta ve lise eğitimini Çerkezköy'de tamamladıktan sonra 1988 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Mühendisliği bölümüne kayıt oldum.Lisans öğrenimini tamamladığım 1992 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Yapı Bölümünde yüksek lisans programına girdim.