YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Sonlu Farş İle küç Seh. İnce Plak Çöz.

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şanlı Şerifoğlu

1991

Bu tezin hazırlanmasında buyuk yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Doç.Dr. Turkan KöKSAL'a manevi yardımlarıyla her zaman bana destek veren CEM-SAN A.Ş elemanlarına, tezin hazırlanması sırasında bana destek olan Ins . Muh. Ali YILMAZ 'a tezin hazirlanip bilgisayarda yazilmasina yardimci olan Ins.muh. Atilla AYDOGDU 'ya İns.Muh. Bilgin Serifoglu 'na şekillerin çizilmesinde yardımcı olan inşaat teknisyeni Ahmet DOGAN 'a .ictenlikle teşekkur ederim

OZET

Bu tez çalışmasında yuzeysel taşıyıcı sistemlerden kuçuk sehimli ince plaklar incelenmiştir. Burada duzgun yayılı yuk altında sehimlere bağlı olarak plak diferansiyel denklemi çıkartılmıştır. Elde edilen plak diferansiyel denklemindeki diferansiyel terimler sonlu farklar şeklinde ifade edilmiştir. Iç kuvvetlerde sonlu farklarla ifade ettikten sonra çozume geçilmiştir.

Değişik mesnetleme durumları incelenmiş katsayılar çıkartılmıştır. Bu kitapta seriler yardımıyla plak çozumu yapılmış bu sayede kıyaslama olanağı sağlanmıştır. Ayrıca, Plak dilimleride fazla alınarak bir kıyaslama olanağıda burda sağlanmıştır.

ICINDEKILER

SEMBOLLER

a,b x ve y	Doğrultusundaki plak boyutları
D	Plak eğilme rijitliği
E	Elastisite Modulu
G	Kayma modulu
I	Atalet momenti
l, l_x, l_y	Açıklık boyları
d, h	Plak kalınlığı
m, n	Pozitif tamsayılar (1,2,3,....)
M_x, M_y	Birim boya gelen eğilme momenti
Q_x, Q_y,	Birim boya gelen kesme kuvveti
P_o	Birim boya gelen yuk
u,v,zu..x,y,z	Doğrultularındaki yer değiştirmeler
M_{xy}	Birim boya gelen burulma momenti
P_z	Tekil yuk
V_x, V_y	Kenar kuvvetleri (Fiktif kesme kuvvetleri)
W(x,y)	Sekil fonksiyonu
P_x, P_y, P_z,	Birim alana gelen yukun bileşenleri
λ	Sonlu farklar ağı genişliği
μ	Poisson oranı
W_h	Homojen çozum
W_p	Partikuler (ozel) çozum
γ, γ_{xy}	Kayma deformasyonu
τ, τ_{xy}	Kayma gerilmeleri
Δ	Laplace Operatoru
∇	Hamilton operatoru

TAŞIYICI SİSTEMLER

Taşıyıcı sistemleri biz üç gurupta toplayabiliriz.

1) Çubuk sistemler: (Doğrusal taşıyıcı sistemler): Kolonlar, kirişler, çerçeveler, kemerler, gergiler, kablolar ..v.b. bu guruba girerler.

2) Yuzeyler taşıyıcı sistemler: Kalınlıkları taşıyıcı yöndeki boyutları yanında çok küçük olan sistemlerdir. Bu tür taşıyıcıların kalınlıklarının orta noktalarını birleştiren yüzeye "orta yüzey" denir.

2a) Orta yüzey bir düzlem ise bir düzlemsel taşıyıcı söz konusu olur. Düzlemsel taşıyıcılarda dış yüklerin etki biçimine göre kendi içinde bölümlere ayrılırlar.

2a1) Dış yükler orta düzleme dik ise plak çalışması vardır. (Betonarme döşemeler)

2a2) Dış yükler orta düzlem içinde etkiyor ise levha çalışması söz konusudur.

2a3) Yüksek kirişlerde kendi düzlemleri içinde yüklerin etkisi altında hem stabilite problemi hemde eğilme momenti etkisi vardır fakat kiriş teorisinde yapılan bazı varsayımlar burada geçerli değildir.

2b) Orta yüzey düzlem değilse bu yüzeysel taşıyıcı kabuk adını alır. Kabuklarda kendi aralarında

2b1) Dönel kabuklar: Bir eğri parçasının bir eksen etrafında dönmesi koni, kubbe, ..v.b. gibi.

2b2) Silindirik kabuklar: Dönen eğri parçası eksene paralel ise silindirik yüzey elde edilir. Su depoları, silolar ..v.b. gibi.

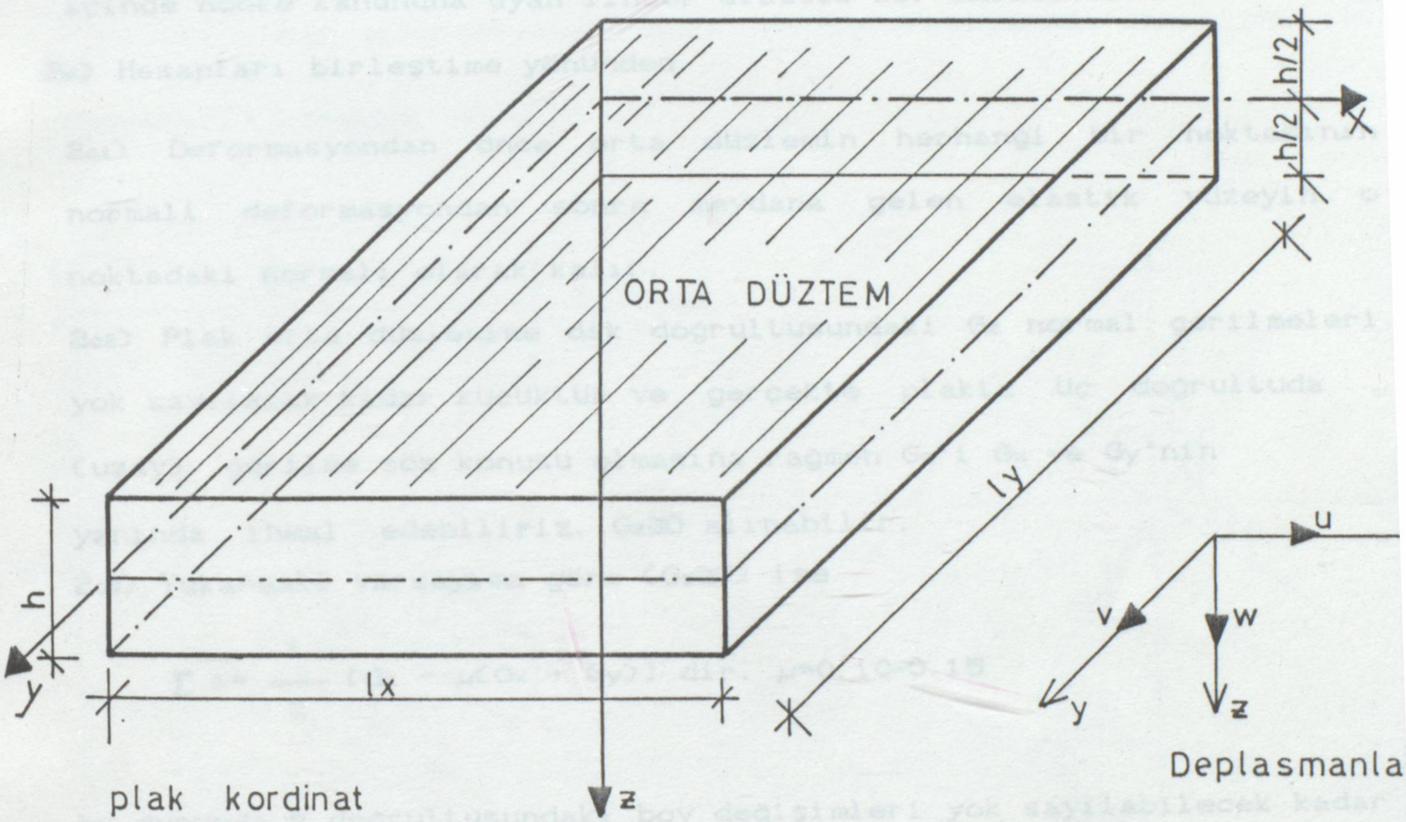
2b) Öteleme kabukları: Bir eğrinin diğer bir eğri üzerinde kaydırılması ile elde edilen kabuklardır.

3) Uzaysal taşıyıcı sistemler: Hiç bir boyutu diğer boyutlarına oranla küçük olmayan taşıyıcılardır. Blok beton inşaatları, barajlar ..v.b. gibi

Biz bu konumuzda yüzeysel taşıyıcı sistemlerin düzlemsel taşıyıcılar bölümüne giren plaklar'ı inceleyeceğiz.

≃ PLAK DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN ÇIKARILMASI ≃

1) Tanım: Kalınlığı taşıyıcı boyutları yanında çok daha küçük olan ve orta düzlemine dik olarak yüklenmiş düzlemsel taşıyıcı sistemlere plak diyoruz.



plak kordinat eksenleri

2) Kabuller:

2a) Plak geometrisi yönünden

2a1) Plak kalınlığı diğer boyutları yanında küçüktür.

2a2) Plak kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri bir düzlemdir.

2a3) Yükler orta düzleme diktir.

2a4) Sehimler plak kalınlığı yanında çok küçüktür.

2b) Malzeme yönünden

2b1) Malzeme her noktada aynı fiziksel özelliklere sahip (Homojen), her doğrultuda aynı davranışı gösterir. (İzotrop), belirli sınırlar içinde hooke kanununa uyan lineer elastik bir malzemedir.

2c) Hesapları birleştime yönünden.

2c1) Deformasyondan önce orta düzlemin herhangi bir noktasının normali deformasyondan sonra meydana gelen elastik yüzeyin o noktadaki normali olarak kalır.

2c2) Plak orta düzlemine dik doğrultusundaki G_z normal gerilmeleri yok sayılacak kadar küçüktür ve gerçekte plakta üç doğrultuda (uzay) gerilme söz konusu olmasina rağmen G_z'i G_x ve G_y'nin yanında ihmal edebiliriz. $G_z \cong 0$ alınabilir.

2c3) Yukardaki varsayıma göre ($G_z \cong 0$) ise

$$\sum z = \frac{1}{E} [G_z - \mu(G_x + G_y)] \text{ dir. } \mu = 0.10 \sim 0.15$$

bu durumda z doğrultusundaki boy değişimleri yok sayılabilecek kadar küçüktür ve deformasyon sonunda plak kalınlığının değişmediği kabul edilir ve sehim sadece x ve y'ye bağlıdır.

$W = W(x, y)$ dir.

2c4) Kesitin orta düzleminde deformasyon yoktur. Birim boy ve açı değişimleri $\cong 0$ dır.

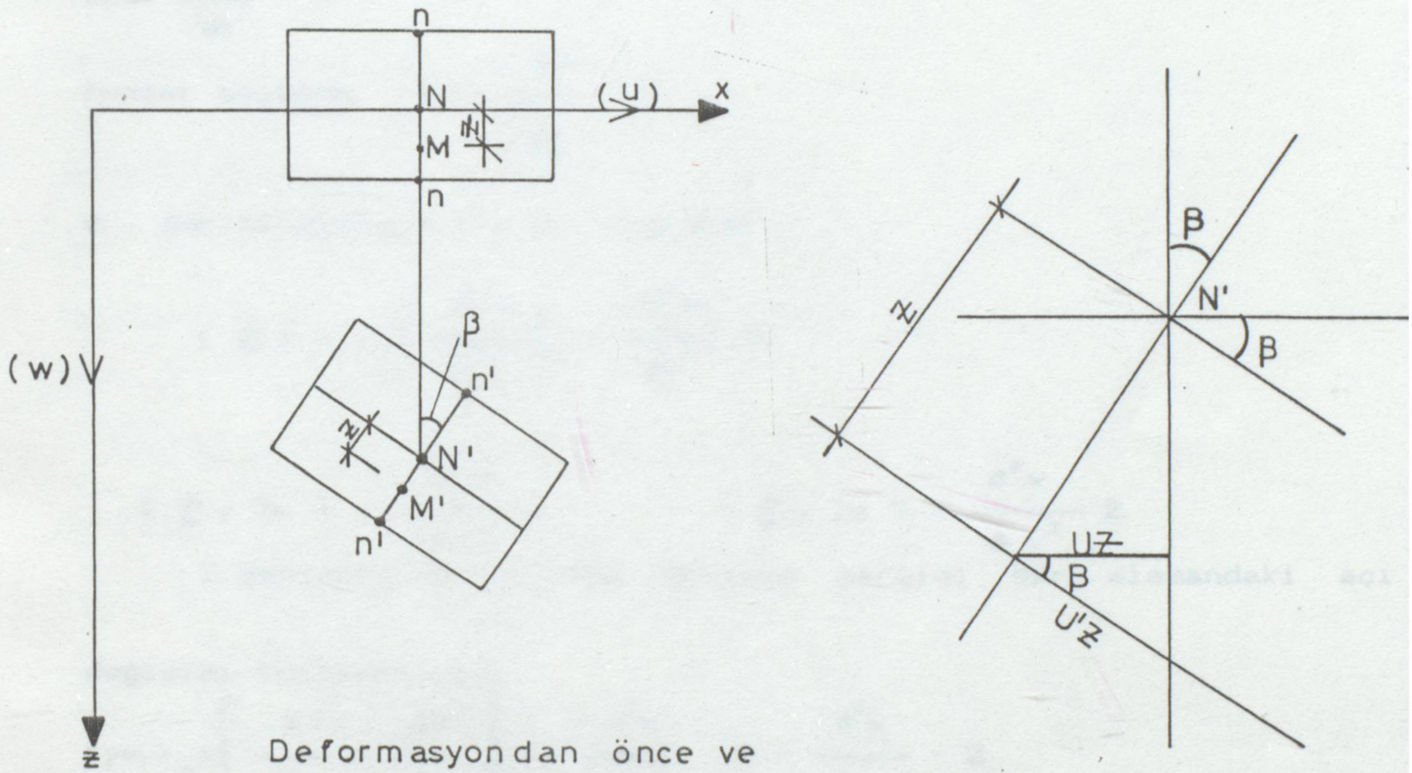
$$(\sum X)_{z=0} = 0 \quad (\sum Y)_{z=0} = 0 \quad (\gamma_{xy})_{z=0} = 0$$

$$(U)_{z=0} = 0 \quad (V)_{z=0} = 0 \quad (W)_{z=0} \neq 0$$

Plak problemlerinde ilk önce plağa etkiyen yükler ile bunun sonucu olan deformasyonlar arasındaki bağıntılar çıkartılır.

3) Diferansiyel geometri: Diferansiyel geometri yardımıyla deformasyon (şekil değiştirme) bileşenleri ile deplasman (yer değiştirme) bileşenleri arasında bağıntılar çıkartılacaktır.

Bir plağı deformasyondan önce ve deformasyondan sonra y=sabit düzlemiyle keselim.



Deformasyondan önce ve
Deformasyondan sonra plak
elemanının davranışı

Plağın X doğrultusundaki eğimi $\quad tg\,\beta \cong \beta \cong \dfrac{\partial w}{\partial x}$

şekilden $\quad tg\,\beta = \dfrac{U'z}{Z} \qquad U'z = Z\, tg\,\beta = Z \cdot \dfrac{\partial w}{\partial x}$

$U_z = U'Z \times \cos\beta \Rightarrow \beta$ çok küçük olduğundan

$$\cos\beta = 1 \Rightarrow \boxed{U_z = U'z}$$

U_z'u nun (+) yönüne ters olduğu için

$$U_z = -\frac{\partial w}{\partial z} \cdot Z$$

benzer şekilde $\quad V_z = -\dfrac{\partial w}{\partial y} \cdot Z$

z derinliginde birim boy degisimi

$$(\Sigma_x) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_z = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} Z$$

$$(\Sigma x)z = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} Z \qquad (\Sigma y)z = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} Z$$

Z derinliğinde ve orta düzleme paralel bir elemandaki açı değişimi (distorsiyon)

$$(\gamma xy)_z = \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right]_z = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot Z - \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \cdot Z$$

$$(\gamma xy)_z = -2\, Z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

4) Gerilmelerle deformasyon bilişenleri arasındaki bağıntılar.

$\sigma_z \cong 0$, $\Sigma Z \cong 0$ alındığına göre

$$\Sigma x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y) = \frac{\sigma_x - \mu \sigma_y}{E}$$

$$\Sigma y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x) = \frac{\sigma_y - \mu \sigma_x}{E}$$

$$(\gamma xy) = \frac{1}{G} \tau xy$$

$$G = \frac{E}{2.(1+\mu)} \text{ (Kayma modülü)}$$

bu bağıntılardan gerilmeleri çekersek

$$\sigma_x = \Sigma X \cdot E + \mu \cdot \sigma_y$$

$$\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x = \Sigma Y \cdot E \Rightarrow \sigma_y = \Sigma Y \cdot E + \mu \cdot \sigma_x$$

$$\sigma_y = \Sigma Y \cdot E + \mu(\Sigma Y \cdot E + \mu \cdot \sigma_y)$$

$$= \Sigma Y \cdot E + \mu \cdot \Sigma X \cdot E + \mu^2 \cdot \sigma_y$$

$$\sigma_y (1-\mu^2) = \Sigma Y \cdot E + \mu \cdot \Sigma x \cdot E$$

$$(\sigma_y)_z = \frac{E}{(1-\mu^2)} (\Sigma y + \mu \Sigma x)_z$$

aynı şekilde σ_x'i bulmaya çalışalım.

$$\sigma_x = \Sigma X \cdot E + \mu \cdot \Sigma Y + \mu^2 \sigma_x$$

$$\sigma_x (1-\mu^2) = \Sigma X \cdot E + \mu \cdot \Sigma Y \cdot E$$

$$(\sigma_x)_z = \frac{E}{1-\mu^2} (\Sigma x + \mu \Sigma Y)_z$$

$\gamma xy = \frac{1}{G} \tau xy$ denkleminden faydalanarak kayma gerilmesinde şekil değiştirme modülü cinsinden ifade edilebilir.

$$\gamma xy = \gamma yx = \frac{\tau xy}{G} = \frac{\tau yx}{G}$$

$$\tau xy = G \cdot \gamma xy \Rightarrow G = \frac{E}{2.(1+\mu)}$$

$$\tau xy = \frac{E}{2.(1+\mu)} \cdot \gamma xy$$

daha önceden hesaplamıştık.

$$(\sum x)z = -Z. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$(\sum Y)z = -Z. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$(\gamma xy)z = -2.\ Z. \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \text{ idi}$$

diferansiyel terimlerde gösterim kolaylığı yaparsak

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = w''xx \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = w''yy$$

$\frac{\partial w}{\partial x} = w'x$ $\quad \frac{\partial w}{\partial y} = w'y$ diyelim buna göre

$$(\sum X)z = -Z \cdot w''xx \qquad (\gamma xy)_z = -2\ Z \cdot w''xy$$

$$(\sum Y)z = -Z \cdot w''yy$$

σx, σy, τxy denklemlerinde bu eşitlikleri yazalım.

$$(\sigma x)z = \frac{E}{1-\mu^2} (\sum X + \mu \sum Y)_z$$

$$(\sigma_x)_z = \frac{E}{1-\mu^2}\,(-Z\cdot w''_{xx}-\mu\cdot Z\cdot w''_{yy})$$

$$(\sigma_x)_z = -\frac{E\;Z}{1-\mu^2}\,(w''_{xx}+\mu\cdot w''_{yy})$$

$$(\sigma_y)_z = -\frac{E}{1-\mu^2}\,(\Sigma\, y+\mu\Sigma\, x)_z$$

$$(\sigma_y)_z = -\frac{E}{1-\mu^2}\,(-Z\cdot w''_{yy}-\mu\cdot Z\cdot w''_{xx})$$

$$(\sigma_y)_z = -\frac{E\;Z}{1-\mu^2}\,(w''_{yy}+\mu\cdot w''_{xx})$$

$$\tau_{xy} = G\cdot(\gamma_{xy})_z$$

$$= \frac{E}{2(1+\mu)}\,(-2\;Z)\,w''_{xy}$$

$$(\tau_{xy})_z = -\frac{E\;Z}{(1+\mu)}\,w''_{xy}$$

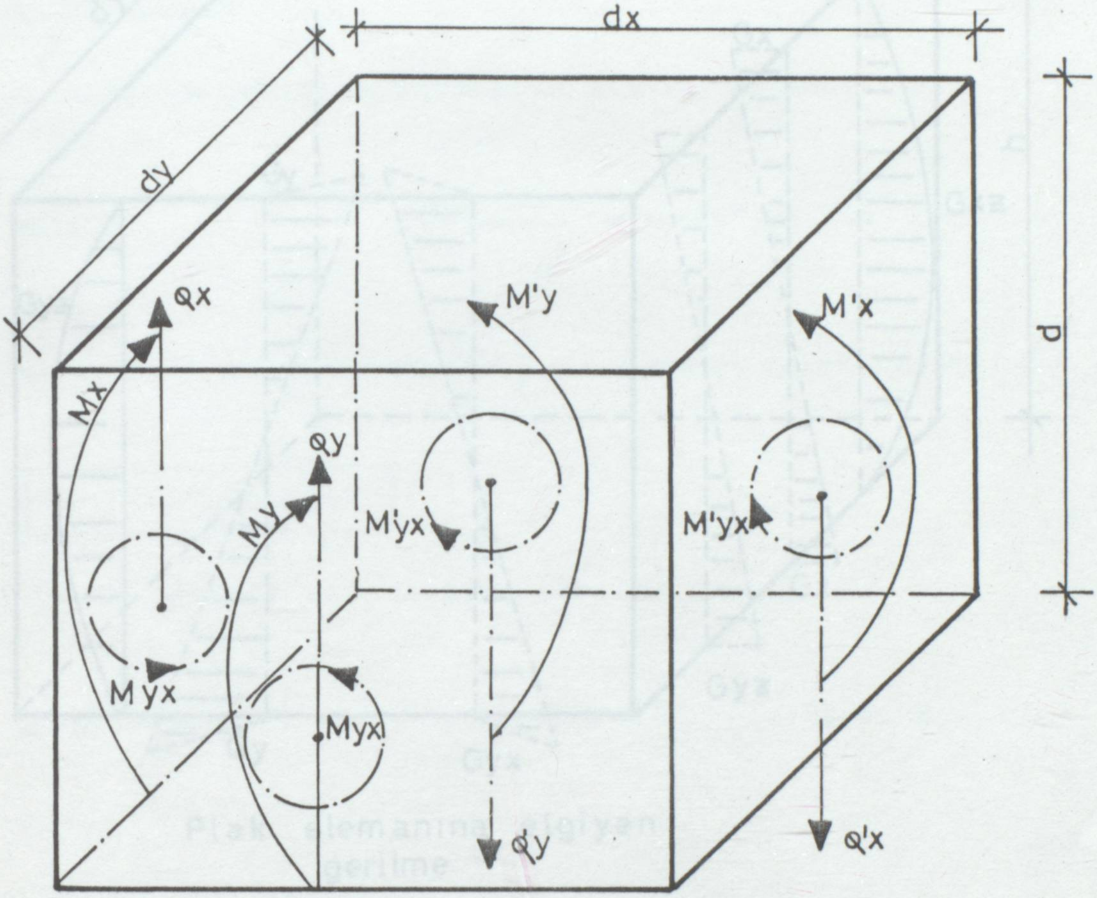
görüldüğü gibi gerilmeler Z'e lineer olarak bağlıdır. Demekki kesit yüksekliğince gerilmeler lineer olarak değişmektedir. O halde gerilmeleri kısaca şu şekilde ifade edebiliriz.

$\sigma_x = a\cdot Z$

$\sigma_y = b\cdot Z$

$\tau_{xy} = c\cdot Z$

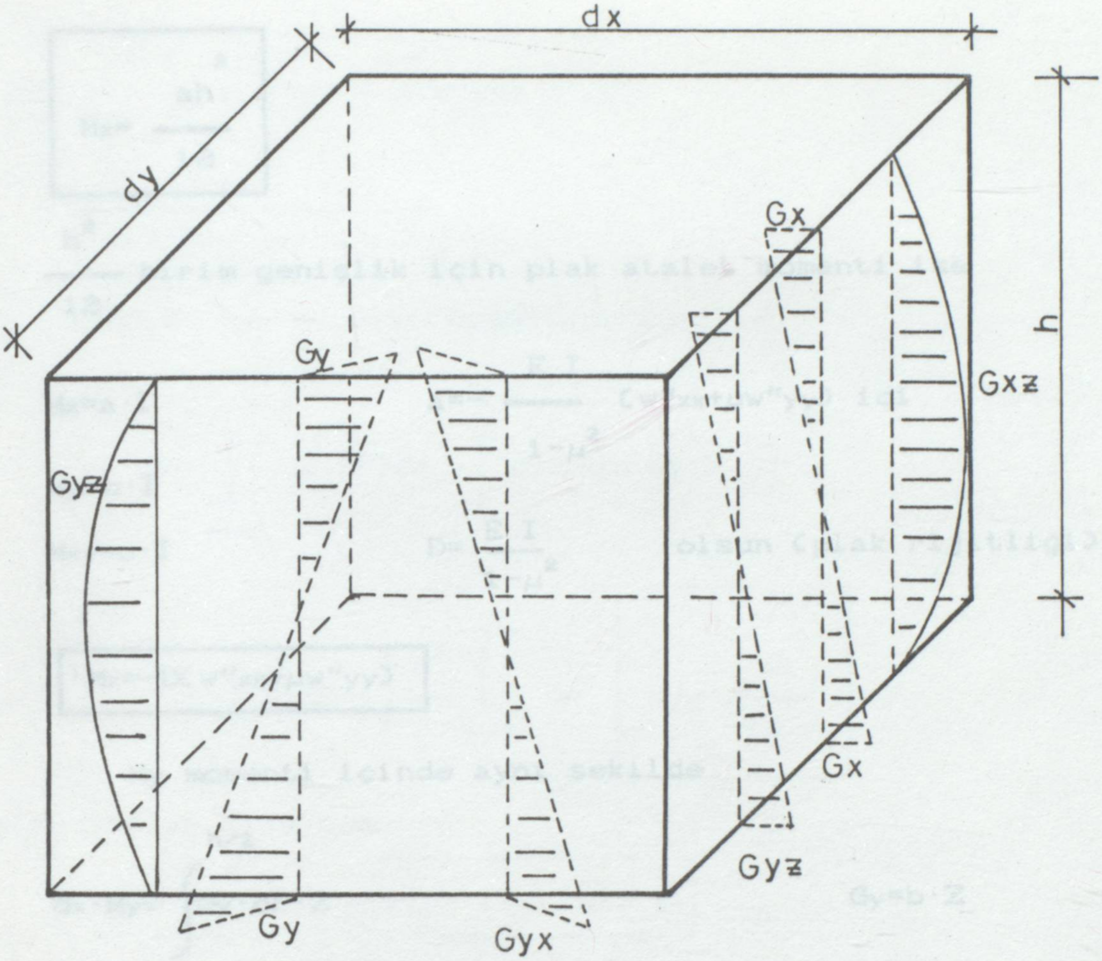
5) GERİLMELERİN BİLEŞKESİ OLARAK MOMENTLERİN BULUNMASI



Gerilmeden dolayı oluşan iç kuvvetler

Birim boyda etki eden momentleri M_x, M_y, M_{xy} ile gösterelim dy=1 için G_x gerilmelerinin tarafsız eksene göre momentine M_x diyoruz. dz yüksekliğindeki diferansiyel elemana etkiyen kuvvet $G_x dF$ dir. Bu kuvvetin tarafsız eksene göre momenti $G_x \cdot dF \cdot Z$ dir

dF=dZ·dy yazılır ve plak yüksekliği boyunca entegre edilirse



Plak elemanına etgiyen
gerilme

$$dy \cdot M_x = \int_{d/2}^{d/2} G_x \cdot dF \cdot Z = dy \cdot \int G_x \cdot Z \cdot dZ \quad \Rightarrow G_x = a \cdot Z \text{ idi}$$

$$M_x = dy \cdot \int_{-d/2}^{d/2} a \cdot Z^2 \cdot dZ = a \int_{-d/2}^{d/2} Z^2 \, dZ$$

$$= a. \left| \frac{Z^3}{3} \right|_{-d/2}^{d/2} \quad \Rightarrow d = h = \text{plak yüksekliği}$$

$$\boxed{M_x=\frac{ah^3}{12}}$$

$\frac{h^3}{12}$ birim genişlik için plak atalet momenti ise

$M_x=a\cdot I$ $\qquad a=-\frac{E\,I}{1-\mu^2}(w''_{xx}+\mu w''_{yy})$ idi

$M_y=b\cdot I$

$M_{xy}=c\cdot I$ $\qquad D=\frac{E\,I}{1-\mu^2}$ olsun (plak rijitliği)

$$\boxed{M_x=-D(w''_{xx}+\mu w''_{yy})}$$

My momenti içinde aynı şekilde

$$dx\cdot M_y=\int_{-h/2}^{h/2} G_y\cdot dF\cdot Z \qquad G_y=b\cdot Z$$

$$=\int_{-h/2}^{h/2} b\cdot Z\cdot dF\cdot Z=b\int_{-h/2}^{h/2} Z^2\,dz$$

$$=b\left|\frac{Z^3}{3}\right|_{-h/2}^{h/2}=\frac{bh^3}{12}$$

$$\boxed{M_y=\frac{bh^3}{12}}$$ ➡ b'yi yerine koyarsak

$$M_y = \frac{E\,I}{1-\mu^2}\,(W''_{yy} + \mu\, W''_{xx})$$

$$\boxed{M_y = -D(w''_{yy} + \mu w''_{xx})}$$

şimdide Mxy burulma momentini bulalım.

$$M_{xy} \cdot dx = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy} \cdot dF) Z = \int_{-h/2}^{h/2} c \cdot Z \cdot dx \cdot dz \cdot Z$$

$$= c\int Z^2\, dZ = c \left| \frac{Z^3}{3} \right|_{-h/2}^{h/2} \Rightarrow \boxed{M_{xy} = \frac{c h^3}{12}}$$

c'yi yerine koyarsak

$$M_{xy} = -\frac{E\,I}{1+\mu}\, w_{xy} \Rightarrow \boxed{M_{xy} = -(1-\mu) D \cdot w''_{xy}}$$

bu bağıntılar plağın herhangi bir noktasındaki momentleri o noktanın sehimini kısmi türevlerine bağlı olarak verir.

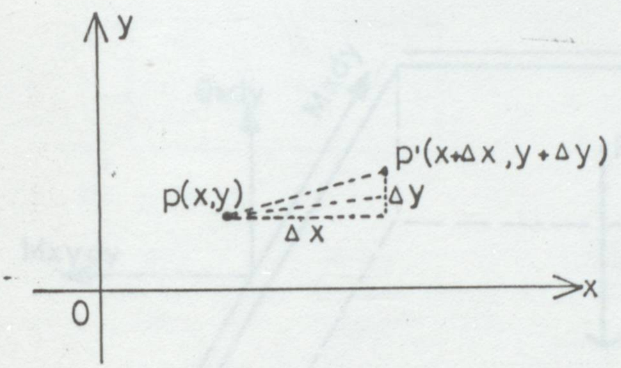
6) ≅DİFERANSİYEL ELAMANIN DENGESİ VE PLAK DİFERANSİYEL DENKLEMİ≅

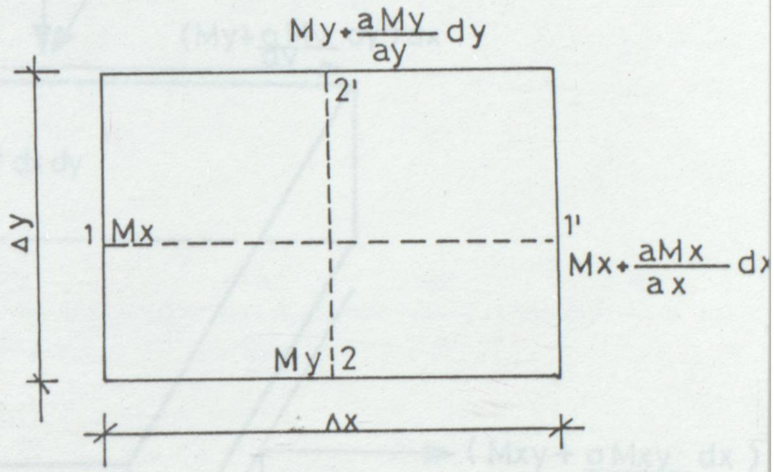
$\sum P_z=0, \quad \sum M_x=0, \quad \sum M_y=0$

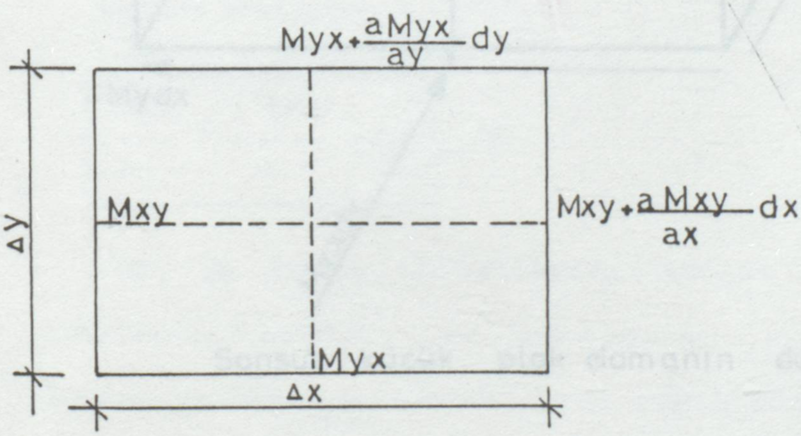
Diferansiyel bir elemanın serbest yüzeylerine etki eden kesit tesirleri.

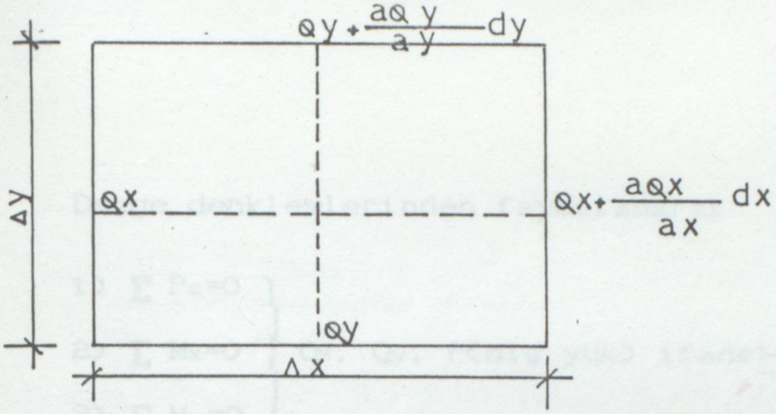
$(M_x, Q_x, M_{xy}), (M_y, Q_y, M_{yx})$ olacaktır.

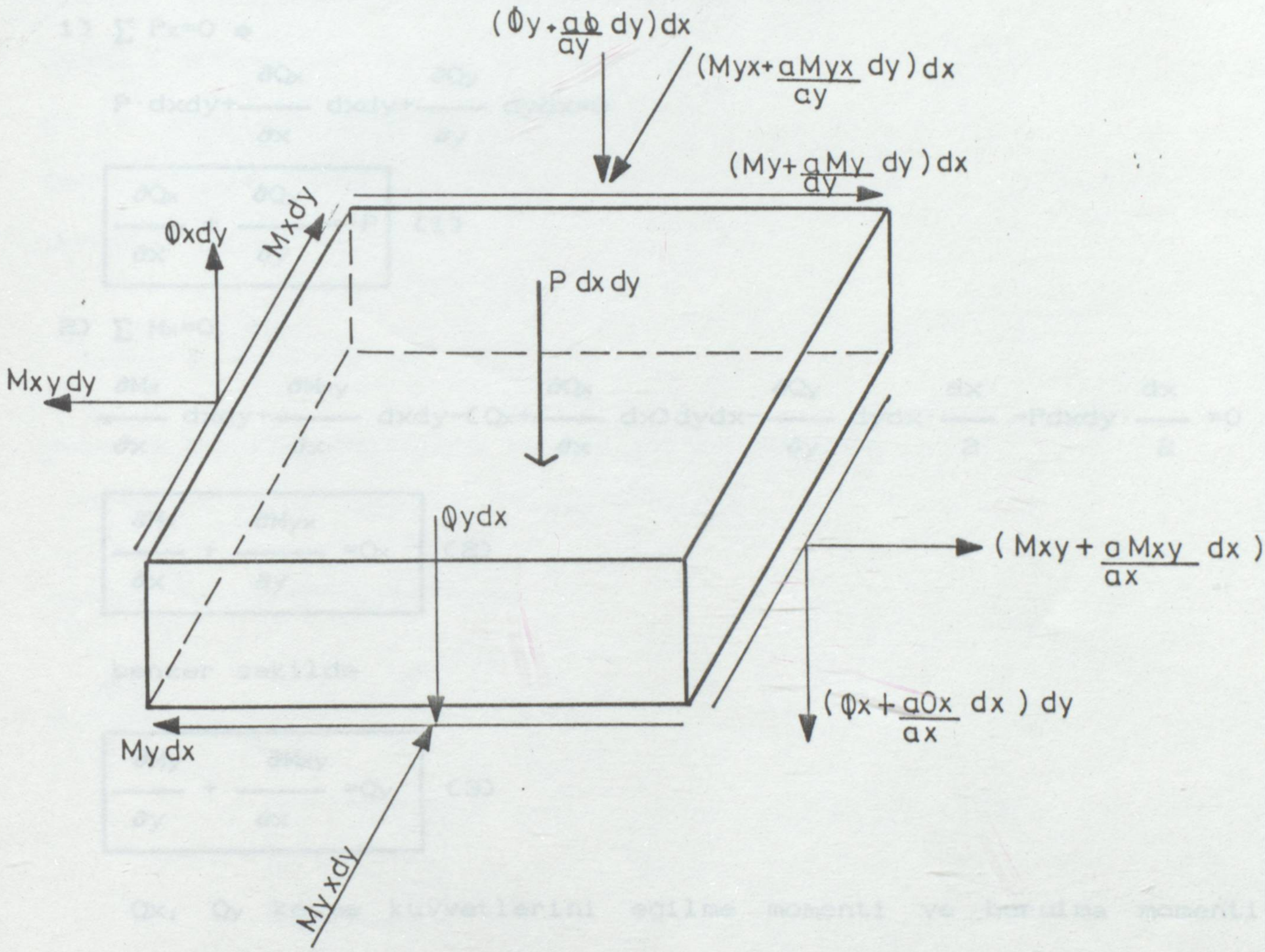
Plak diferansiyel elemanın bir noktasından ikinci bir noktaya ulaşıldığında burada iç kuvvetlerdeki değişimleri inceleyelim.











Sonsuz küçük plak elamanın denqesi

Denge denklemlerinden faydalanarak

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sum P_z=0 \\ 2)\ \sum M_x=0 \\ 3)\ \sum M_y=0 \end{array}\right\} Q_x,\ Q_y,\ P(\text{dış yük}) \text{ ifadeleri bulunmuş olur.}$$

1) $\sum P_z=0 \Rightarrow$

$$P\cdot dxdy+\frac{\partial Q_x}{\partial x}dxdy+\frac{\partial Q_y}{\partial y}dydx=0$$

$$\boxed{\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=-P} \quad (1)$$

2) $\sum M_x=0$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}dxdy+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}dxdy-\left(Q_x+\frac{\partial Q_x}{\partial x}dx\right)dydx-\frac{\partial Q_y}{\partial y}dydx\cdot\frac{dx}{2}-Pdxdy\cdot\frac{dx}{2}=0$$

$$\boxed{\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}=Q_x} \quad (2)$$

benzer şekilde

$$\boxed{\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}=Q_y} \quad (3)$$

Q_x, Q_y kesme kuvvetlerini eğilme momenti ve burulma momenti cinsinden bulduk (w) deplasmanı cinsinden ifade etmek için eğilme ve burulma momentlerini 1,2,3 denklemlerinde yerine koyalım.

Daha önceden bulmuştuk ki

$M_x=-D\ (\ w''_{xx}+\mu w''_{yy}\ )$

$M_y=-D\ (\ w''_{yy}+\mu w''_{xx}\ )$

$M_{xy}=-(1-\mu)D\cdot w''_{xy}$

2 denkleminden faydalanarak

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = Q_x \Rightarrow \text{den}$$

$$-D\,(w'''_{xxx} + \mu w'''_{yyx}) + -(1-\mu)\,D\cdot w'''_{xxy} = Q_x$$

$$Q_x = -D\,(w'''_{xxx} + \mu w'''_{yyx}) - (1-\mu)\,D\cdot w'''_{xyy}$$

$$Q_y = -D\,(w'''_{yyy} + \mu w'''_{xxy}) - (1-\mu)\,D\cdot w'''_{xxy}$$

bu iki denklemi çözersek

$$Q_x = -D(w'''_{xxx} + w'''_{yyx})$$

$$Q_y = -D(w'''_{yyy} + w'''_{xxy})$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -P \text{ idi}$$

yukarda bulunan değerleri burada yerine koyarsak

$$-P = -D(w''''_{xxxx} + w''''_{xxyy}) - D(w''''_{yyyy} + w''''_{xxyy})$$

$$\frac{P}{D} = w''''_{xxxx} + 2w''''_{xxyy} + w''''_{yyyy}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D}$$

$$\Delta\cdot\Delta w = \boxed{\Delta^2 w = \frac{P}{D}}$$

Gösterim kolaylığı açısından ;

Δ : Laplace operatörü $\Rightarrow \Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ olsun

∇ : Hamilton operatörü $\Rightarrow$ Laplace 'le ifade etmek istersek ;

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D}$$

$$\boxed{\Delta \; \Delta w = \Delta^2 w = P / D}$$

$$\Delta^2 w = \nabla w \;.\; (\text{ Hamilton })$$

$$\boxed{\nabla w = P / D}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Rightarrow \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$(\Delta w)'X = \partial''' xxx + \partial''' yyx \Rightarrow$$

$$Q_x = -D(\Delta w)'X$$

$$Q_x = -D \frac{\partial \Delta w}{\partial x}$$

$$Q_y = -D \frac{\partial \Delta w}{\partial y}$$

$$M_x = -D(w''_{xx} + \mu w''_{yy})$$

$$M_y = -D(w''_{yy} + \mu w''_{xx})$$

$$M_{xy} = -D(1-\mu) w''_{xy}$$

Böylece her noktadaki iç kuvvetler M_x, M_y, M_{xy} hesaplanmış olur.

— O — O — O —

≅SONLU FARKLAR METODU≅

1) Metodun esası:

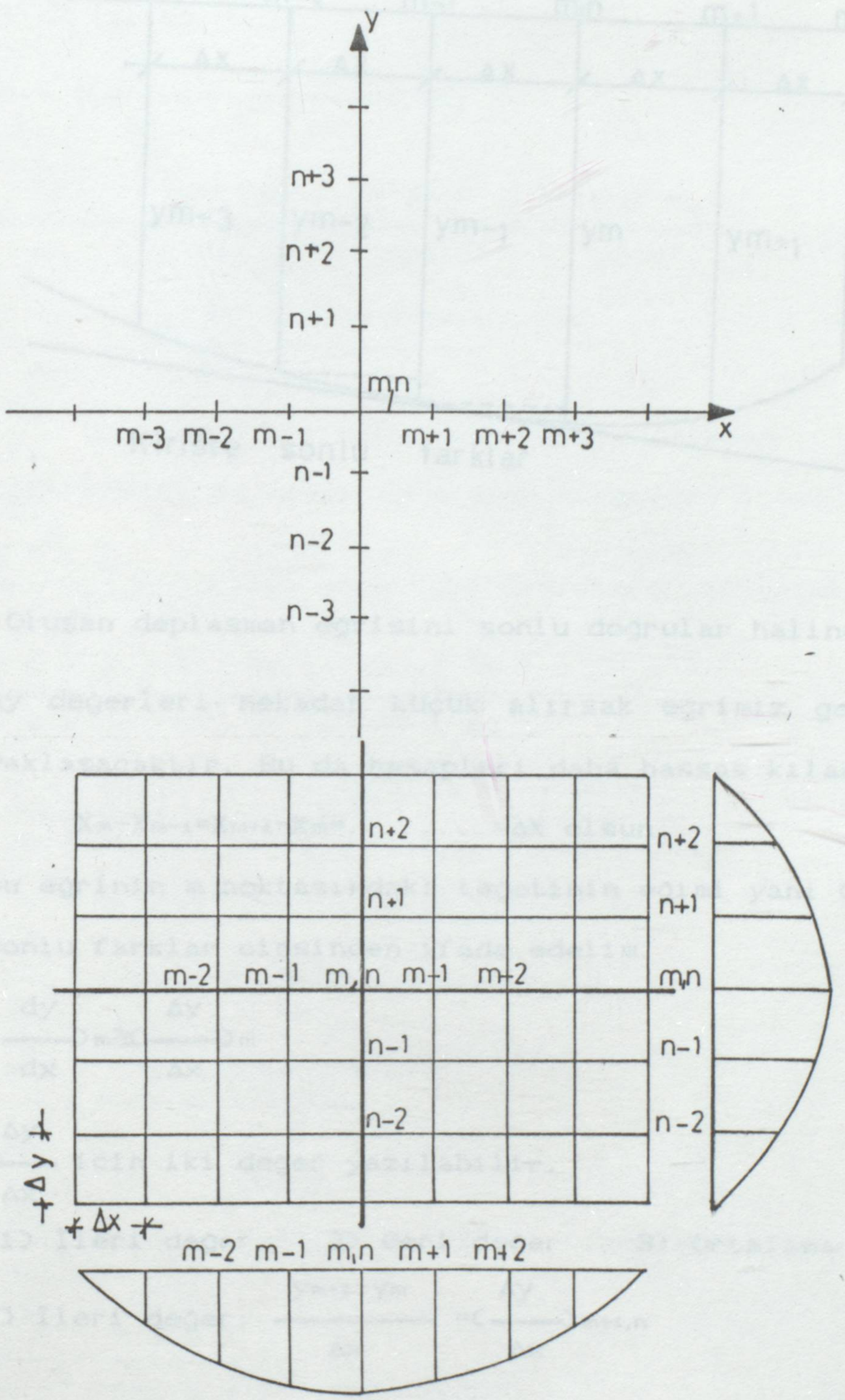
Bu metod analitik çözümü güç olan bir çok plak probleminde başvurulan uygulama alanı çok geniş yaklaşık bir nümerik metod'dur. Nümerik hesapta bütün metodların aslı sonsuz küçük yerine sonlu küçük miktarların kullanılmasıdır.

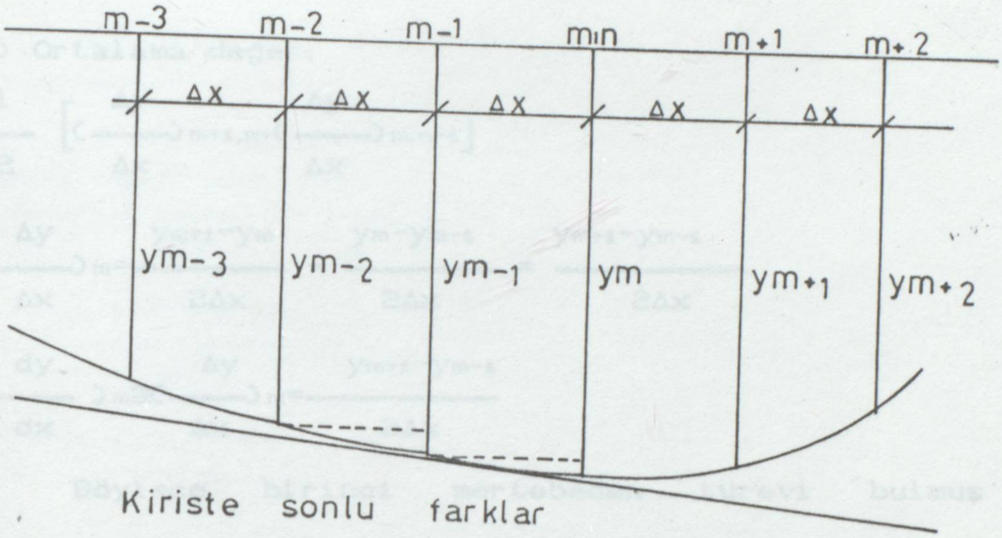
Analitik çözüm bilinmiyenleri sürekli bir fonksiyonunu verir. Bu bağımsız değişkenlerin fonksiyonlarında bilinmeyenin ifadesi yerine koyarak doğrudan orta yüzeyin istenen her noktasında bilinmeyenin her değerini tayin edebiliriz. Aksine nümerik hesapta ancak önceden tespit edilmiş olan bir düğüm noktaları şebekesinin bu düğüm noktaların isabet eden bilinmeyenlerin değerlerini bulmak için enterpolasyon yapmak gerekir. Bilindiği gibi çözümler analitik olarak diferansiyel denklemlerin integrasyonu ile sayısal olarak ise bir lineer cebrik sistemler takımının çözümü ile elde edilir.

Sonlu farklar metodunun özü plak diferansiyel denklemini sonlu farklardan oluşan bir yaklaşık cebirsel denkleme dönüştürmektir. Sınır değer problemlerinin çok defa kesin ve kapalı çözümleri bulunmamaktadır. Bu nedenle yaklaşık bir çözümle yetinilir. Hemen hemen her durum için kullanılan sonlu farklar sınır şartlarının gerçeklemesi kesin olduğu halde diferansiyel denklemin sağlanmasında yaklaşıklık vardır.

Zaten metodun esasıda türevler yerine sonlu farklar bağıntılarını kullanarak problemin diferansiyel denklemini bilinmeyen fonksiyonun ayrık noktalarındaki değerleriyle yaklaşık olarak ifade etmektedir. Problemi önce tek boyutlu olarak dikkate alalım. Yani y=f(x) eğrisini göz önüne alalım.

2) Kirişler için sonlu farklar metodu:





Kiriste sonlu farklar

Oluşan deplasman eğrisini sonlu doğrular haline getiriyoruz Δx, Δy değerleri nekadar küçük alırsak eğrimiz gerçek eğriye o kadar yaklaşacaktır. Bu da hesapları daha hassas kılacaktır.

$X_m - X_{m-1} = X_{m+1} - X_m = \ldots\ldots\ldots = \Delta X$ olsun

bu eğrinin m noktasındaki teğetinin eğimi yani $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_m$'i sonlu farklar cinsinden ifade edelim.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_m \cong \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_m$$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ icin iki değer yazılabilir.

1) Ileri değer   2) Geri değer   3) Ortalama değer

1) İleri değer: $\dfrac{y_{m+1} - y_m}{\Delta x} = \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{m+1,n}$

2) Geri değer: $\dfrac{y_m - y_{m-1}}{\Delta x} = \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{m,n-1}$

3) Ortalama değer:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{m+1,n} + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{m,n-1}\right]$$

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_m = \frac{y_{m+1} - y_m}{2\Delta x} + \frac{y_m - y_{m-1}}{2\Delta x} = \frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{2\Delta x}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_m \cong \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_m = \frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{2\Delta x}$$

Böylece birinci mertebeden türevi bulmuş olduk. Plak diferansiel denkleminin 4'üncü dereceden kısmi türevleri vardı.

$\left(\dfrac{\Delta^2 y}{\Delta\ x^2}\right)$ nin birim boyundaki değişimlerini inceleyelim.

$$\left(\frac{d\ y}{d\ x}\right)_m = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)_m \cong \frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_m$$

$$\frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_m = \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{m+1,n} - \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{m,n-1}\right]$$

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{\dfrac{y_{m+1} - y_m}{\Delta x} - \dfrac{y_m - y_{m-1}}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{y_{m+1} - 2y_m - y_{m-1}}{(\Delta x)^2}$$

$\dfrac{d^3 y}{d\ x^3}$ ü sonlu farklar cinsinden ifade etmek istersek

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta\ x^3} = \frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta\ x^2}\right)$$

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \phi(x)_m$$

$$\phi(x)_m = \frac{y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = \frac{\phi_{m+1} - \phi_{m-1}}{2\Delta x} = \frac{\Delta^3 w}{\Delta x^3}$$

$$\phi_{m+1} = \frac{y_{m+2} - 2y_{m+1} + y_m}{\Delta x^2}$$

$$\phi_{m-1} = \frac{y_m - 2y_{m-1} + y_{m-2}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = \frac{\dfrac{y_{m+2} - 2y_{m+1} + y_m}{(\Delta x)^2} - \dfrac{y_m - 2y_{m-1} + y_{m-2}}{(\Delta x)^2}}{2.\Delta x}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{1}{2.\Delta x^3}\left(y_{m+2} - 2y_{m+1} + 2y_m + 2y_{m-1} - y_{m-2}\right)$$

$\dfrac{d^4 y}{d x^4}$ 'ü sonlu farklar cinsinden ifade etmek istersek

$$\left(\frac{d^4 y}{d x^4}\right)_m \cong \left(\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}\right)_m$$

$$\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)_m = \frac{y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1}}{(\Delta x)^2} = \phi(x)_m$$

$$\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4} = \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\Delta \phi^2(x)}{\Delta x^2} = \frac{\phi_{m+1} - 2\phi_m + \phi_{m-1}}{(\Delta x)^2}$$

$$\phi_{m+1} = \frac{y_{m+2} - 2y_{m+1} + y_m}{(\Delta x)^2}$$

$$\phi_{m-1} = \frac{y_{m-2} - 2y_{m-1} + y_{m-2}}{(\Delta x)^2}$$

bu değerler $\dfrac{\Delta^2 \phi}{\Delta x^2} = \dfrac{\phi_{m+1} - 2\phi_m + \phi_{m-1}}{(\Delta x)^2}$

denkleminde yerine konulursa

$$\frac{\Delta^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{y_{m+2} - 2y_{m+1} + y_m - 2y_{m+1} + 4y_m - 2y_{m-1} + y_m - 2y_{m-1} + y_{m-2}}{(\Delta x)^4}$$

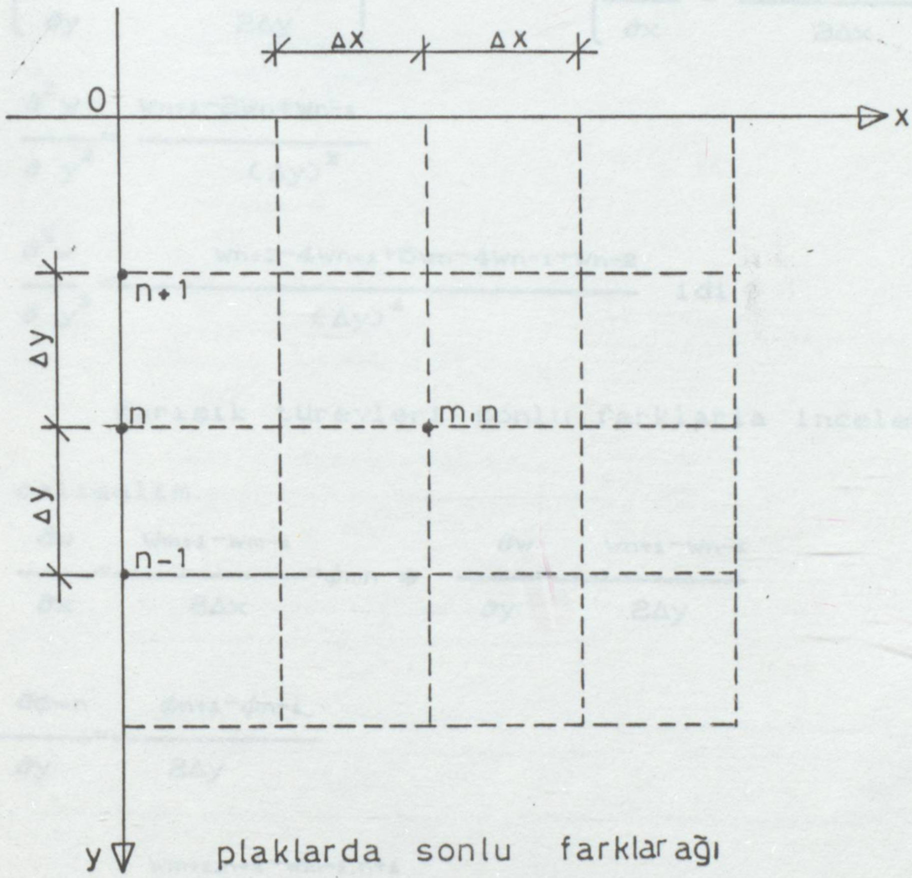
$$\frac{\Delta^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\Delta^4 y}{\partial x^4} = \frac{y_{m+2} - 4y_{m+1} + 6y_m - 4y_{m-1} + y_{m-2}}{(\Delta x)^4}$$

TÜREV	KATSAYILAR					ÇARPAN
y'		-1		+1		$\frac{1}{2\Delta x}$
y''		+1	-2	+1		$\frac{1}{(\Delta x)^2}$
y'''	-1	+2		-2	+1	$\frac{1}{2(\Delta x)^3}$
yıv	+1	-4	+6	-4	+1	$\frac{1}{(\Delta x)^4}$
NOKTA	m-2	m-1	m	m+1	m+2	

Kirişte türevlerin sonlu farklarla ifadesi için katsayılar şeması

3) ≅PLAKLAR İÇİN SONLU FARKLAR≅

Plak denkleminde $w=w(x,y)$, burada iki doğrultuda değişkenlik söz konusudur. Fakat kısmi türev alınırken diğer değişken sabit kabul edileceğinden tek bir değişkene göre türevlerde bulunan ifadeler geçerli olur.



plaklarda sonlu farklar ağı

Plağımızi şekilde görüldüğü gibi bir ağ biçiminde Δx, Δy genişliğinde dilimlere ayıralım. Ağın kesim noktalarındaki sehimleri sonlu farklar olarak gösterdiğimizi kabul edelim. (m,n) noktasıda bizim merkez noktamız olsun.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{w_{m+2} - 4w_{m+1} + 6w_m - 4w_{m-1} + w_{m-2}}{(\Delta x)^4} \quad \text{idi}$$

$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$ ü aynı yöntemle bulmaya çalışalım.

$$\left[\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{2\Delta y}\right] \qquad \left[\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_{m+1} - w_{m-1}}{2\Delta x} \; \text{idi}\right]$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1}}{(\Delta y)^2}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = \frac{w_{n+2} - 4w_{n+1} + 6w_n - 4w_{n-1} + w_{n-2}}{(\Delta y)^4} \quad \text{idi}$$

Karışık türevleri sonlu farklarla incelersek $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ yi bulmaya çalışalım.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_{m+1} - w_{m-1}}{2\Delta x} = \phi_{mn} \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{2\Delta y}$$

$$\frac{\partial \phi_{mn}}{\partial y} = \frac{\phi_{n+1} - \phi_{n-1}}{2\Delta y}$$

$$\phi_{m,n+1} = \frac{w_{m+1,n+1} - w_{m-1,n+1}}{2\Delta x}$$

$$\phi_{m,n-1} = \frac{w_{m+1,n-1} - w_{m-1,n-1}}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial \phi_{mn}}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\phi_{m,n+1} - \phi_{m,n-1}}{2\Delta y}$$

$$\frac{\partial \phi mn}{\partial y} = \frac{\dfrac{w_{m+1,n+1} - w_{m-1,n+1}}{2\Delta x} - \dfrac{w_{m+1,n+1} - w_{m-1,n+1}}{2\Delta x}}{2\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{(w_{m+1,n+1} - w_{m-1,n+1}) - (w_{m+1,n-1} - w_{m-1,n-1})}{4\Delta x\Delta y}$$

$\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$ ifadesini bulalım

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_{m+1} - 2w_m + w_{m-1}}{(\Delta x)^2} = \phi mn$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial \phi mn}{\partial y} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \phi mn}{\partial y} \quad \frac{\phi_{m,n+1} - \phi_{m,n-1}}{2\Delta y}$$

$$\phi_{m,n+1} = \frac{w_{m+1,n+1} - 2w_{m,n+1} + w_{m-1,n+1}}{\Delta x^2}$$

$$\phi_{m,n-1} = \frac{w_{m+1,n-1} - 2w_{m,n-1} + w_{m-1,n-1}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial \phi mn}{\partial y} = \frac{\dfrac{w_{m+1,n+1} - 2w_{m,n+1} + w_{m-1,n+1}}{\Delta x^2} - \dfrac{w_{m+1,n-1} - 2w_{m,n-1} + w_{m-1,n-1}}{\Delta x^2}}{2\Delta y}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = \frac{(w_{m+1,n+1} - 2w_{m,n+1} + w_{m-1,n+1}) - (w_{m+1,n-1} - 2w_{m,n-1} + w_{m-1,n-1})}{2\Delta x^2 \Delta y}$$

$\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$ ifadesini bulursak

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \phi mn$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{mn}}{\partial y^2} = \frac{\phi_{m,n+1} - 2\phi_{m,n} + \phi_{m,n-1}}{\Delta y^2}$$

$$\phi_{m,n+1} = \frac{w_{m+1,n+1} - 2w_{m,n+1} + w_{m-1,n+1}}{\Delta x^2}$$

$$\phi_{m,n} = \frac{w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n}}{\Delta x^2}$$

$$\phi_{m,n-1} = \frac{w_{m+1,n-1} - 2w_{m,n-1} + w_{m-1,n-1}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_m}{\partial y^2} = \frac{w_{m+1,n+1} - 2w_{m,n+1} + w_{m-1,n+1} - 2w_{m+1,n}}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{4w_{mn} - 2w_{m-1,n} + w_{m+1,n-1} - 2w_{m,n-1} + w_{m-1,n-1}}{\Delta x^2 \; \Delta y^2}$$

$\dfrac{\partial^3 w}{\partial \; y^3}$ ifadesini bulmaya çalışalım.

$$\frac{\partial^2 \; w}{\partial y^2} = \phi_{mn}$$

$$\frac{\partial \phi_{mn}}{\partial x} = \frac{\phi_{m+1,n} - \phi_{m-1,n}}{2\Delta x}$$

$$\phi_{m+1,n} = \frac{w_{m+1,n+1} - 2w_{m+1,n} + w_{m+1,n-1}}{\Delta y^2}$$

$$\phi_{m-1,n} = \frac{w_{m-1,n+1} - 2w_{m-1,n} + w_{m-1,n-1}}{\Delta y^2} \qquad \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial \phi_{mn}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\dfrac{w_{m+1,n+1}-2w_{m+1,n}+w_{m+1,n-1}}{\Delta y^2} - \dfrac{w_{m-1,n+1}-2w_{m-1,n}+w_{m-1,n-1}}{\Delta y^2}}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} = \frac{w_{m+1,n+1}-2w_{m+1,n}+w_{m+1,n-1}-w_{m-1,n+1}+2w_{m-1,n}-w_{m-1,n-1}}{2\Delta x \Delta y^2}$$

Plak diferansiyel denklemini sonlu farklar cinsinden yazalım.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \Rightarrow \frac{\Delta^4 w}{\Delta x^4} + 2\frac{\Delta^4 w}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{\Delta^4 w}{\Delta y^4} = \frac{P}{D}$$

daha önce bulunan değerler bu denklemde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{w_{m+2,n}-4w_{m+1,n}+6w_{m,n}-4w_{m-1,n}+w_{m-2,n}}{(\Delta x)^4}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{w_{m,n+2}-4w_{m,n+1}+6w_{m,n}-4w_{m,n-1}+w_{m,n-2}}{(\Delta y)^4}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{w_{m+1,n+1}-w_{m,n+1}+w_{m-1,n+1}-2w_{m+1,n}}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{4w_{mn}-2w_{m-1,n}+w_{m+1,n-1}-2w_{m,n-1}+w_{m-1,n-1}}{\Delta x^2 \Delta y^2}$$

olduğuna göre $\frac{P}{D}$ ifadesi

$$\frac{P}{D} = \frac{w_{m+2,n}-4w_{m+1,n}+6w_{m,n}-4w_{m-1,n}+w_{m-2,n}}{(\Delta x)^4} +$$

$$+\frac{2w_{m+1,n+1}-4w_{m,m+1}+2w_{m-1,n+1}-4w_{m+1,n}+8w_{m,n}-4w_{m-1,n}+2w_{m+1,n-1}}{\Delta x^2 \Delta y^2} +$$

$$+\frac{w_{m,n+2}-w_{m,n+1}+6w_{m,n}-4w_{m,n-1}+w_{m,n-2}}{(\Delta y)^4}$$

denklemin her iki tarafını $(\Delta x)^2 . (\Delta y)^2$ ile çarparsak ve

$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\alpha$ diyelim diktörtgen elemanlar için plak denkleminin sonlu farklarla ifadesi

$$\frac{P.(\Delta x^2 \Delta y^2)}{D} = \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{\Delta x^4}\,\frac{w_{m+2,n}-4w_{m+1,n}+6w_{m,n}-4w_{m-1,n}+w_{m-2,n}}{1} +$$

$$\frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{2w_{m+1,n+1}-4w_{m,n+1}+2w_{m-1,n+1}-4w_{m+1,n}+8w_{m,n}-4w_{m-1,n}+2w_{m+1,n-1}}{1}$$

$$+\frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{\Delta x^2 \Delta y^2}\,\frac{-4w_{m,n-1}+2w_{m-1,n-1}}{1} +$$

$$+\frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{\Delta y^4}\,\frac{w_{m,n+2}-4w_{m,n+1}+6w_{m,n}-4w_{m,n-1}+w_{m,n-2}}{1}$$

$w_{m+2,n}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$

$w_{m+1,n}\left(-4\frac{1}{\alpha^2}-4\right)$

$w_{m,n}\left(6\frac{1}{\alpha^2}+8+6\alpha\right)$

$w_{m-1,n}\left(-\frac{4}{\alpha^2}-4\right)$

$w_{m-2,n}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$

$w_{m+1,n+1}(2)$

$w_{m,n+1}(-4-4\alpha^2)$

$w_{m-1,n+1}(2)$

$w_{m+1,n-1}(2)$

$w_{m,n+2}(\alpha^2)$

$w_{m,n-1}(-4\alpha^2-4)$

$w_{m,n-2}(\alpha^2)$

$w_{m-1,n-1}(2)$

$$\frac{P}{D}.\alpha.(\Delta y) = w_{m,n}\left(6\frac{1}{\alpha^2}+8+6\alpha^2\right)$$

$$-\left(\frac{4}{\alpha^2}+4\right)(w_{m+1,n}+w_{m-1,n})+\frac{1}{\alpha^2}(w_{m+2,n}+w_{m-2,n})$$

$$+\alpha^2(w_{m,n+2}+w_{m,n-2})-(4+4\alpha^2)(w_{m,n+1}+w_{m,n-1})$$

$$+2(w_{m-1,n-1}+w_{m+1,n+1}+w_{m-1,n+1}+w_{m+1,n-1})$$

olarak bulunur.

Eğer $\Delta x=\Delta y$ olarak alınırsa $\alpha=1$ olur.

Kare elemanlar için plak denklemi

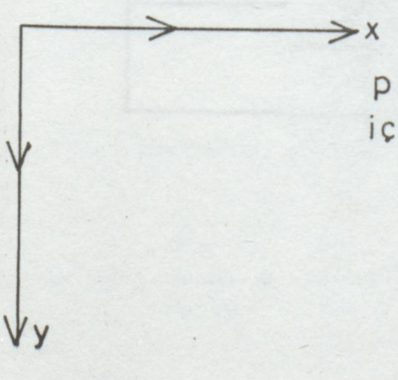
$$\frac{P}{D}(\Delta y)^4=w_{mn}(20)-8(w_{m+1,n}+w_{m-1,n})+(w_{m+2,n}+w_{m-2,n})+(w_{m,n+2}+w_{m,n-2})$$

$$-8(w_{m,n+1}+w_{m,n-1})+2(w_{m-1,n-1}+w_{m+1,n+1}+w_{m-1,n+1}+w_{m+1,n-1})$$

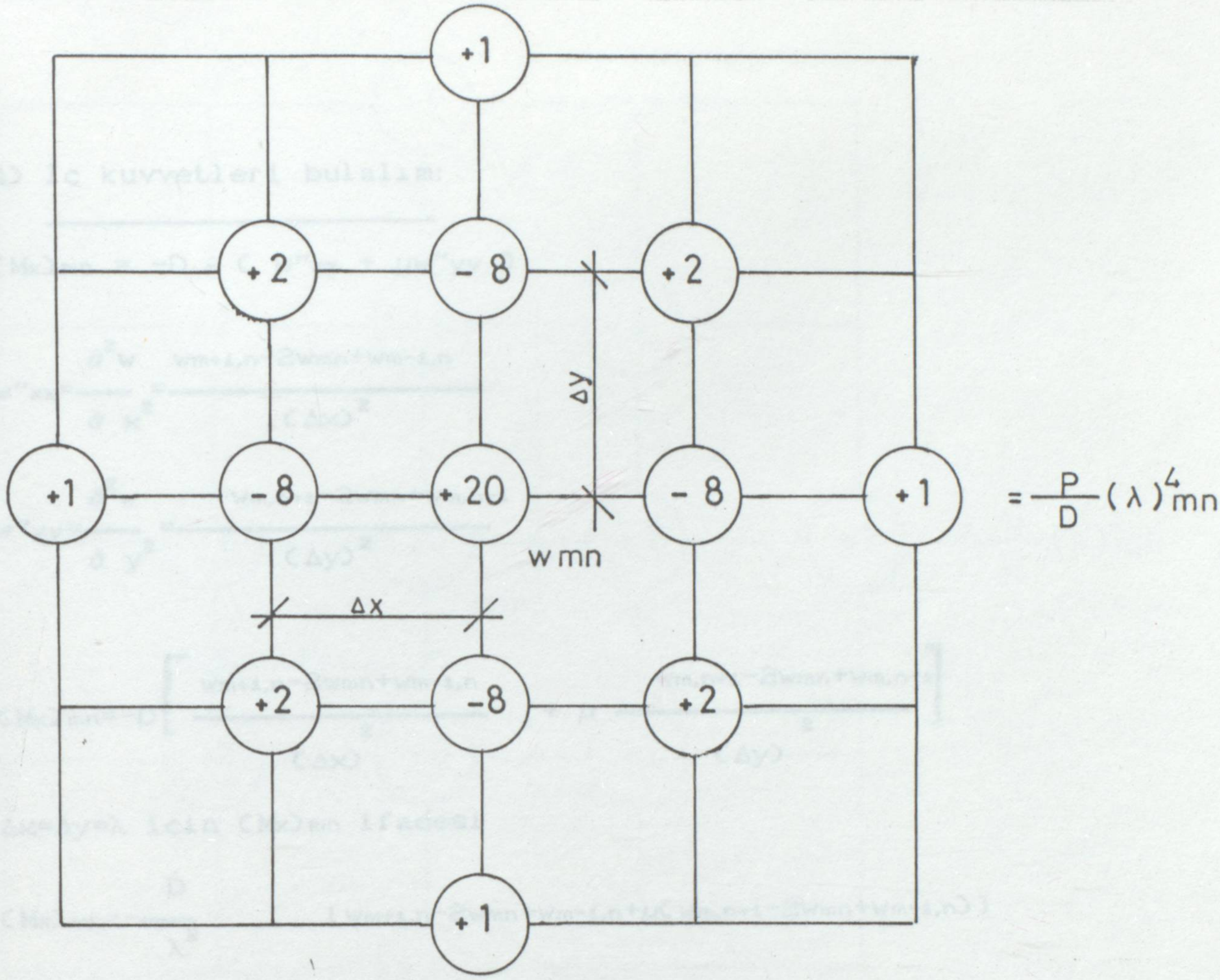
$$\frac{P}{D}(\Delta y)^4=20w_{mn}-8(w_{m+1,n}+w_{m-1,n}+w_{m,n+1}+w_{m,n-1})$$

$$+2(w_{m-1,n-1}+w_{m+1,n+1}+w_{m-1,n+1}+w_{m+1,n-1})+(w_{m+2,n}+w_{m-2,n}+w_{mn+2}+w_{m,n-2})$$

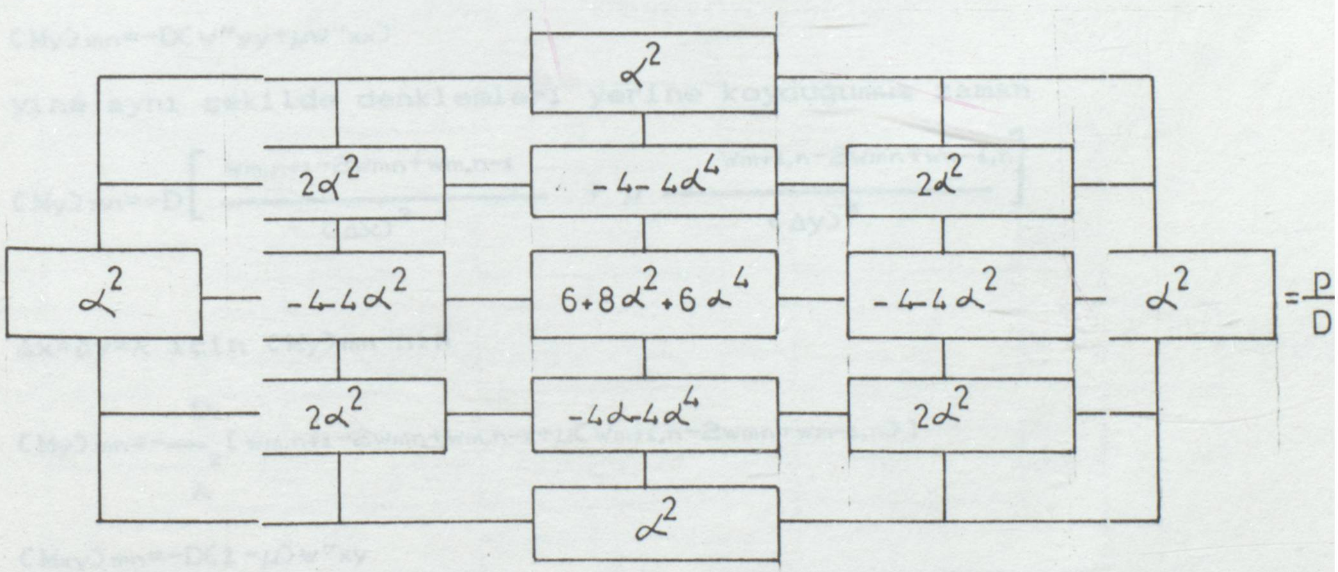
olur.



plaklada sonlu faklar ağı
için katsayılar şeması



$\Delta x = \Delta y = \lambda$ için katsayılar şeması



$\Delta x \neq \Delta y$ katsayılar şeması

4) İç kuvvetleri bulalım:

$$(M_x)_{mn} = -D - (w''_{xx} + \mu w''_{yy})$$

$$w''_{xx}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{w_{m+1,n}-2w_{mn}+w_{m-1,n}}{(\Delta x)^2}$$

$$w''_{yy}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{w_{m,n+1}-2w_{mn}+w_{m,n-1}}{(\Delta y)^2}$$

$$(M_x)_{mn}=-D\left[\frac{w_{m+1,n}-2w_{mn}+w_{m-1,n}}{(\Delta x)^2}+\mu\frac{w_{m,n+1}-2w_{mn}+w_{m,n-1}}{(\Delta y)^2}\right]$$

$\Delta x=\Delta y=\lambda$ için $(M_x)_{mn}$ ifadesi

$$(M_x)_{mn}=-\frac{D}{\lambda^2}[w_{m+1,n}-2w_{mn}+w_{m-1,n}+\mu(w_{m,n+1}-2w_{mn}+w_{m-1,n})]$$

Şimdide $(M_y)_{mn}$ ifadesini bulalım.

$$(M_y)_{mn}=-D(w''_{yy}+\mu w''_{xx})$$

yine aynı şekilde denklemleri yerine koyduğumuz zaman

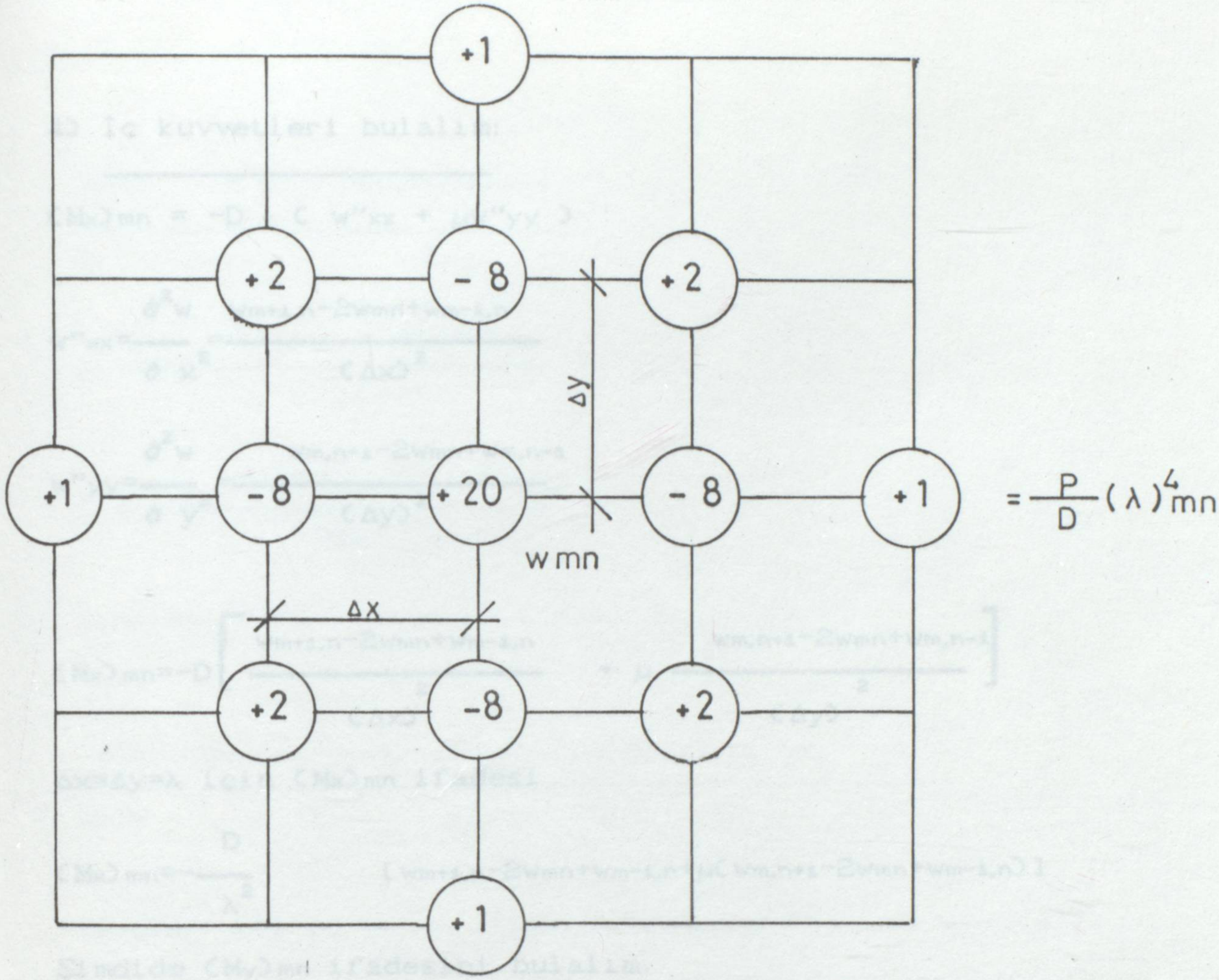
$$(M_y)_{mn}=-D\left[\frac{w_{m,n+1}-2w_{mn}+w_{m,n-1}}{(\Delta x)^2}+\mu\frac{w_{m+1,n}-2w_{mn}+w_{m-1,n}}{(\Delta y)^2}\right]$$

$\Delta x=\Delta y=\lambda$ için $(M_y)_{mn}$ nin

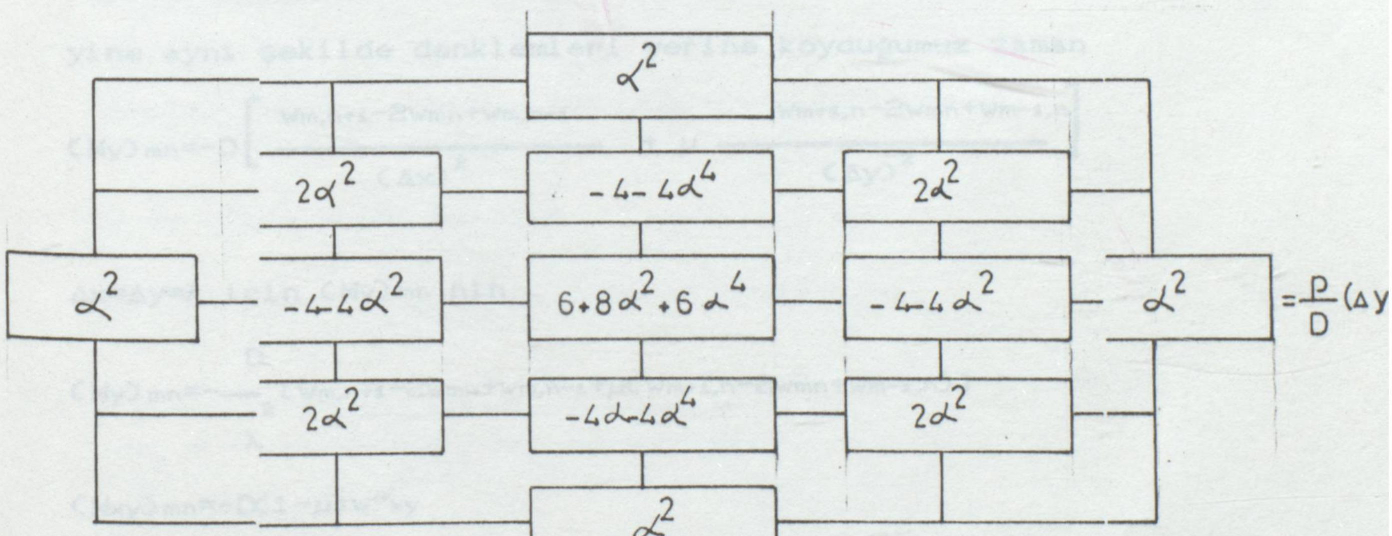
$$(M_y)_{mn}=-\frac{D}{\lambda^2}[w_{m,n+1}-2w_{mn}+w_{m,n-1}+\mu(w_{m+1,n}-2w_{mn}+w_{m-1,n})]$$

$$(M_{xy})_{mn}=-D(1-\mu)w''_{xy}$$

$$w''_{xy}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{w_{m+1,n}-w_{m-1,n}}{2\Delta x}=\phi_{mn}$$



$\Delta x = \Delta y = \lambda$ için katsayılar şeması



$\Delta x \neq \Delta y$ katsayılar şeması

4) İç kuvvetleri bulalım:

$$(M_x)_{mn} = -D - (w''_{xx} + \mu w''_{yy})$$

$$w''_{xx}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{w_{m+1,n}-2w_{mn}+w_{m-1,n}}{(\Delta x)^2}$$

$$w''_{yy}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{w_{m,n+1}-2w_{mn}+w_{m,n-1}}{(\Delta y)^2}$$

$$(M_x)_{mn}=-D\left[\frac{w_{m+1,n}-2w_{mn}+w_{m-1,n}}{(\Delta x)^2}+\mu\frac{w_{m,n+1}-2w_{mn}+w_{m,n-1}}{(\Delta y)^2}\right]$$

$\Delta x=\Delta y=\lambda$ için $(M_x)_{mn}$ ifadesi

$$(M_x)_{mn}=-\frac{D}{\lambda^2}\left[w_{m+1,n}-2w_{mn}+w_{m-1,n}+\mu(w_{m,n+1}-2w_{mn}+w_{m-1,n})\right]$$

Şimdide $(M_y)_{mn}$ ifadesini bulalım.

$$(M_y)_{mn}=-D(w''_{yy}+\mu w''_{xx})$$

yine aynı şekilde denklemleri yerine koyduğumuz zaman

$$(M_y)_{mn}=-D\left[\frac{w_{m,n+1}-2w_{mn}+w_{m,n-1}}{(\Delta x)^2}+\mu\frac{w_{m+1,n}-2w_{mn}+w_{m-1,n}}{(\Delta y)^2}\right]$$

$\Delta x=\Delta y=\lambda$ için $(M_y)_{mn}$ nin

$$(M_y)_{mn}=-\frac{D}{\lambda^2}\left[w_{m,n+1}-2w_{mn}+w_{m,n-1}+\mu(w_{m+1,n}-2w_{mn}+w_{m-1,n})\right]$$

$$(M_{xy})_{mn}=-D(1-\mu)w''_{xy}$$

$$w''_{xy}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Rightarrow\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{w_{m+1,n}-w_{m-1,n}}{2\Delta x}=\phi_{mn}$$

$$\frac{\partial \phi_{mn}}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\phi_{m,n+1} - \phi_{m,n-1}}{2\Delta y}$$

$$\phi_{m,n+1} = \frac{w_{m+1,n+1} - w_{m-1,n+1}}{2\Delta x}$$

$$\phi_{m,n-1} = \frac{w_{m+1,n-1} - w_{m-1,n-1}}{2\Delta x}$$

denklemlerini yerine koyarsak

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{(w_{m+1,n+1} - w_{m-1,n+1}) - (w_{m+1,n-1} - w_{m-1,n-1})}{4\Delta x \Delta y}$$

$$(M_{xy})_{mn} = -D(1-\mu) \cdot \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \cdot [(w_{m+1,n+1} - w_{m-1,n+1}) - (w_{m+1,n-1} - w_{m-1,n-1})]$$

$\Delta x = \Delta y \Rightarrow (M_{xy})_{mn}$

$$(M_{xy})_{mn} = -\frac{P(1-\mu)}{4\lambda^2} [(w_{m+1,n+1} - w_{m-1,n+1}) - (w_{m+1,n-1} - w_{m-1,n-1})]$$

ϑ_x, ϑ_y ifadelerini bulalım

$\vartheta_x = -D(w'''_{xxx} + w'''_{yyx})$ daha önceden bulmuştukki

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \frac{w_{m+2,n} - 2w_{m+1,n} + 2w_{m-1,n} + w_{m-2,n}}{2\Delta x^3}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y} = \frac{w_{m,n+1} - 2w_{mn} + w_{m,n-1}}{\Delta y} = \phi_{mn}$$

$$\frac{\partial \phi mn}{\partial x}=\frac{\phi m+1,n-\phi m-1,n}{2\Delta x}$$

$$\phi m+1,n=\frac{Wm+1,n+1-2Wm+1,n+Wm+1,n-1}{(\Delta y)^2}$$

$$\phi m-1,n=\frac{Wm-1,n+1-2Wm-1,n+Wm-1,n-1}{(\Delta y)^2}$$

değerleri $\frac{\partial \phi mn}{\partial x}=\frac{\partial^3 w}{\partial y^2\ \partial x}$ de yerine koyulursa

$$\frac{\partial \phi mn}{\partial x}=\frac{\phi m+1,n-\phi m-1,n}{2\Delta x} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x}=\frac{\frac{Wm+1,n+1-2Wm+1,n+Wm+1,n-1}{\Delta y^2}-\frac{Wm-1,n+1-2Wm-1,n+Wm-1,n-1}{\Delta y^2}}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x}=\frac{Wm+1,n+1-2Wm+1,n+Wm+1,n-1-Wm-1,n+1+2Wm-1,n+Wm-1,n-1)}{2\Delta x(\Delta y)^2}$$

$$\theta x=-D\left[\frac{Wm+2,n-2Wm+1,n+2Wm-1,n+Wm-2,n}{2(\Delta x)^3}+\right.$$

$$\left.+\frac{Wm+1,n+1-2Wm+1,n+Wm+1,n-1-Wm-1,n+1+2Wm-1,n+Wm-1,n-1)}{2\Delta x(\Delta y)^2}\right]$$

$\Delta x=\Delta y=\lambda$ kabul edilirse

$$(\theta x)mn=-\frac{D}{2\lambda^3}(Wm+2,n-4Wm+1,n+4Wm-1,n+Wm-2,n+$$

$$+Wm+1,n+1+Wm+1,n-1-Wm-1,n+1-Wm-1,n-1)$$

$(\theta y)mn=-D(w''' yyy+w''' xxy)$ ifadesini bulalım

$$w'''_{yyy}=\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}=\frac{w_{m,n+2}-2w_{m,n+1}+2w_{m,n-1}-w_{m,n-2}}{2(\Delta y)^3}$$

$$w'''_{xxy}=\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{w_{m+1,n}-2w_{mn}+w_{m-1,n}}{(\Delta x)^2}=\phi_{mn}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial\phi_{mn}}{\partial y}=\frac{\phi_{m,n+1}-\phi_{m,n-1}}{2\Delta y}$$

$$\phi_{m,n+1}=\frac{w_{m+1,n+1}-2w_{m,n+1}+w_{m-1,n+1}}{\Delta x^2}$$

$$\phi_{m,n-1}=\frac{w_{m+1,n-1}-2w_{m,n-1}+w_{m-1,n-1}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial\phi_{mn}}{\partial y}=\frac{w_{m+1,n+1}-2w_{m,n+1}+w_{m-1,n+1}-w_{m+1,n-1}+2w_{m,n-1}+w_{m-1,n-1}}{2\Delta y(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial\phi_{mn}}{\partial y}=\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}$$

$\Delta x=\Delta y=\lambda$ ise

$$Q_y=-\frac{D}{2\lambda^3}(w_{m,n+2}-2w_{m,n+1}+2w_{m,n-1}-w_{m,n-2}+$$
$$+w_{m+1,n+1}-2w_{m,n+1}+w_{m-1,n+1}-w_{m+1,n-1}+2w_{m,n-1}+w_{m-1,n-1})$$

$$(Q_y)_{mn}=-\frac{D}{2\lambda^3}(w_{m,n+2}-4w_{m,n+1}+4w_{m,n-1}-w_{m,n-2}+$$
$$+w_{m+1,n+1}+w_{m-1,n+1}-w_{m+1,n-1}+w_{m-1,n-1})$$

$$(V_x)_{mn}=-D(w'''_{xxx}+(2-\mu)w'''_{yyx})$$

$$w'''_{xxx}=\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=\frac{w_{m+2,n}-2w_{m+1,n}+2w_{m-1,n}+w_{m-2,n}}{2(\Delta x)^3}$$

$$w'''_{yyx}=\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{w_{m,n+1}-2w_{mn}+w_{m,n-1}}{(\Delta y)^2} = \phi_{mn}$$

$\dfrac{\partial \phi_{mn}}{\partial X}=\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x}$ olduğundan $\dfrac{\partial \phi_{mn}}{\partial x}=\dfrac{\phi_{m+1,n}-\phi_{m-1,n}}{2\Delta x}$

$$\phi_{m+1,n}=\frac{w_{m+1,n+1}-2w_{m+1,n}+w_{m+1,n-1}}{\Delta y^2}$$

$$\phi_{m-1,n}=\frac{w_{m-1,n+1}-2w_{m-1,n}+w_{m-1,n-1}}{\Delta y^2}$$

$$\frac{\partial \phi_{mn}}{\partial x}=\frac{(w_{m+1,n+1}-2w_{m+1,n}+w_{m+1,n-1})-(w_{m-1,n+1}-2w_{m-1,n}+w_{m-1,n-1})}{2\Delta x(\Delta y)^2}$$

$\Delta x=\Delta y=\lambda$ ise

$$\frac{\partial \phi_{mn}}{\partial x}=\frac{1}{2\lambda^3}[(w_{m+1,n+1}-2w_{m+1,n}+w_{m+1,n-1})-(w_{m-1,n+1}-2w_{m-1,n}+w_{m-1,n-1})]$$

$$(V_x)=\frac{D}{2\lambda^3}[(w_{m+2,n}-2w_{m+1,n}+2w_{m-1,n}+w_{m-2,n})+(2-\mu)$$

$$(w_{m+1,n+1}-2w_{m+1,n}+w_{m+1,n-1})-(w_{m-1,n+1}-2w_{m-1,n}+w_{m-1,n-1})]$$

$$V_y=-D(w'''_{yyy}+(2-\mu)w'''_{xxy})$$

$$w'''_{yyy}=\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}=\frac{w_{m,n+2}-2w_{m,n+1}+2w_{m,n-1}+w_{m,n-2}}{2(\Delta y)^3}$$

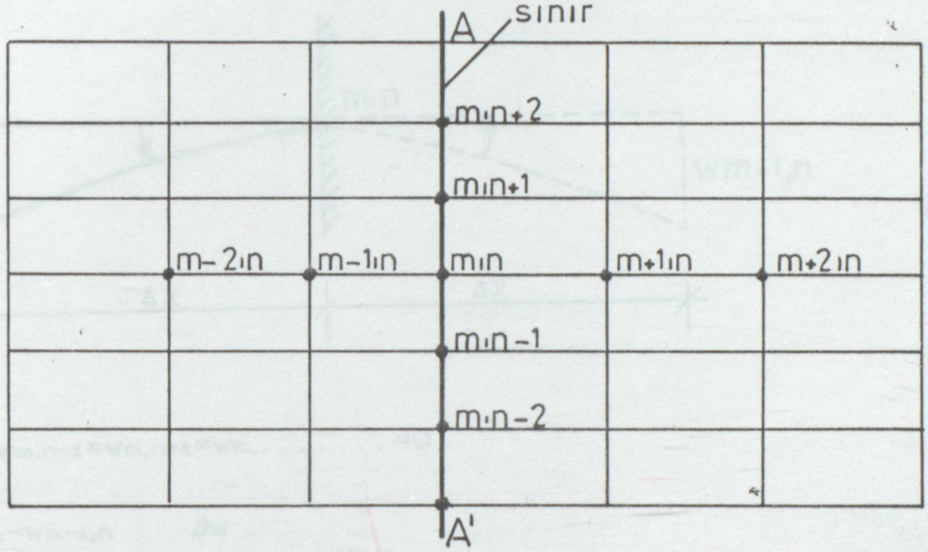
$$w'''_{yyx}=\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_{m+1,n}-2w_{mn}+w_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} = \phi_{mn}$$

$$w'''_{xxy}=\frac{\partial \phi_{mn}}{\partial y}=\frac{\phi_{m,n+1}-\phi_{m,n-1}}{2\Delta y}$$

5) ≅SINIR ŞARTLARI≅

Plak çözümünün tam olması için diferansiyel denklemin çözümü yetmez sınır şartlarında sağlanması gerekmektedir.

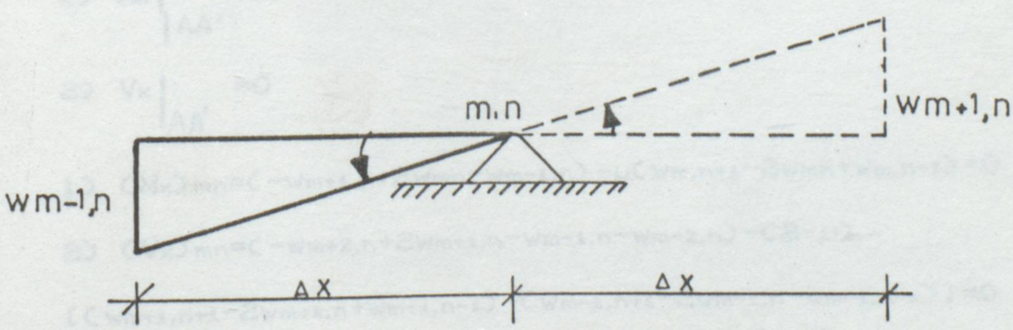
Elimizdeki sonlu farklar denklemini plak'ın her düğüm noktasına uygulayarak çözüm denklem takımını elde ediyoruz. Bunun için merke noktası sınır üzerinde taşınır ve plağın fiktif olarak devam ettiği varsayılır.



A-A' sınır'ını a) Basit kenar b) Ankastre kenar c) Boşta kenar

olarak tek tek inceleyeceğiz.

a) A-A' Basit mesnetlenmiş kenar ise



1) $W|_{AA'} = 0$

2) $\Delta W|_{AA'} = 0$

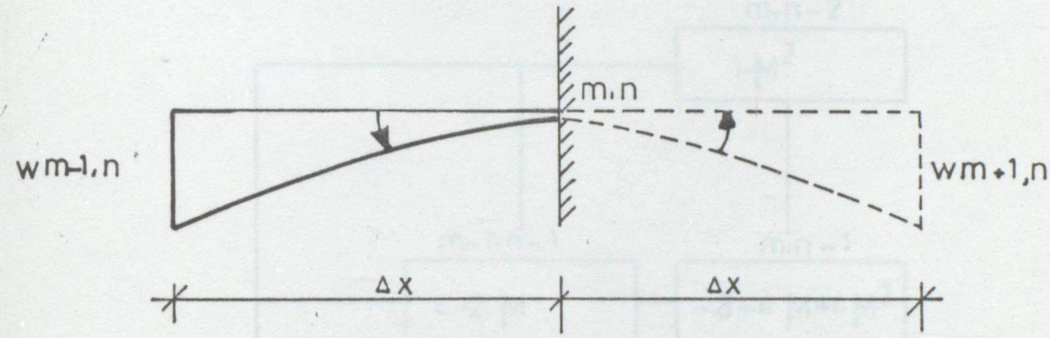
1) $w_{m,n}=w_{m,n+1}=w_{m,n-1}=.......=0$

2) $\Delta w_{m,n}=\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

$$\Delta w_{m,n}=\frac{w_{m+1,n}-2w_{m,n}+w_{m-1,n}}{\Delta x^2}+\frac{w_{m+1,n}-2w_{m,n}+w_{m-1,n}}{\Delta y^2}=0$$

$w_{m+1,n}+w_{m-1,n}=0 \Rightarrow \boxed{w_{m+1,n}=-w_{m-1,n}}$

b) A-A' Ankastre mesnet ise:



1) $W\big|_{AA'}=0$

2) $\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big|_{AA'}=0$

(eğim)

1) $w_{m,n}=w_{m,n-1}=w_{m,n+1}=w_{m,}......=0$

2) $\dfrac{w_{m+1,n}-w_{m-1,n}}{2\Delta x}=\dfrac{\partial w}{\partial x}=0 \Rightarrow$

$w_{m+1,n}-w_{m-1,n}=0 \Rightarrow \boxed{w_{m+1,n}=w_{m-1,n}}$

c) A-A' Boşta kenar ise

1) $M_x\Big|_{AA'}=0$

2) $V_x\Big|_{AA'}=0$

1) $(M_x)_{mn}=(-w_{m+1,n}+2w_{mn}-w_{m-1,n})-\mu(w_{m,n+1}-2w_{mn}+w_{m,n-1})=0$

2) $(V_x)_{mn}=(-w_{m+2,n}+2w_{m+1,n}-w_{m-1,n}-w_{m-2,n})-(2-\mu)$

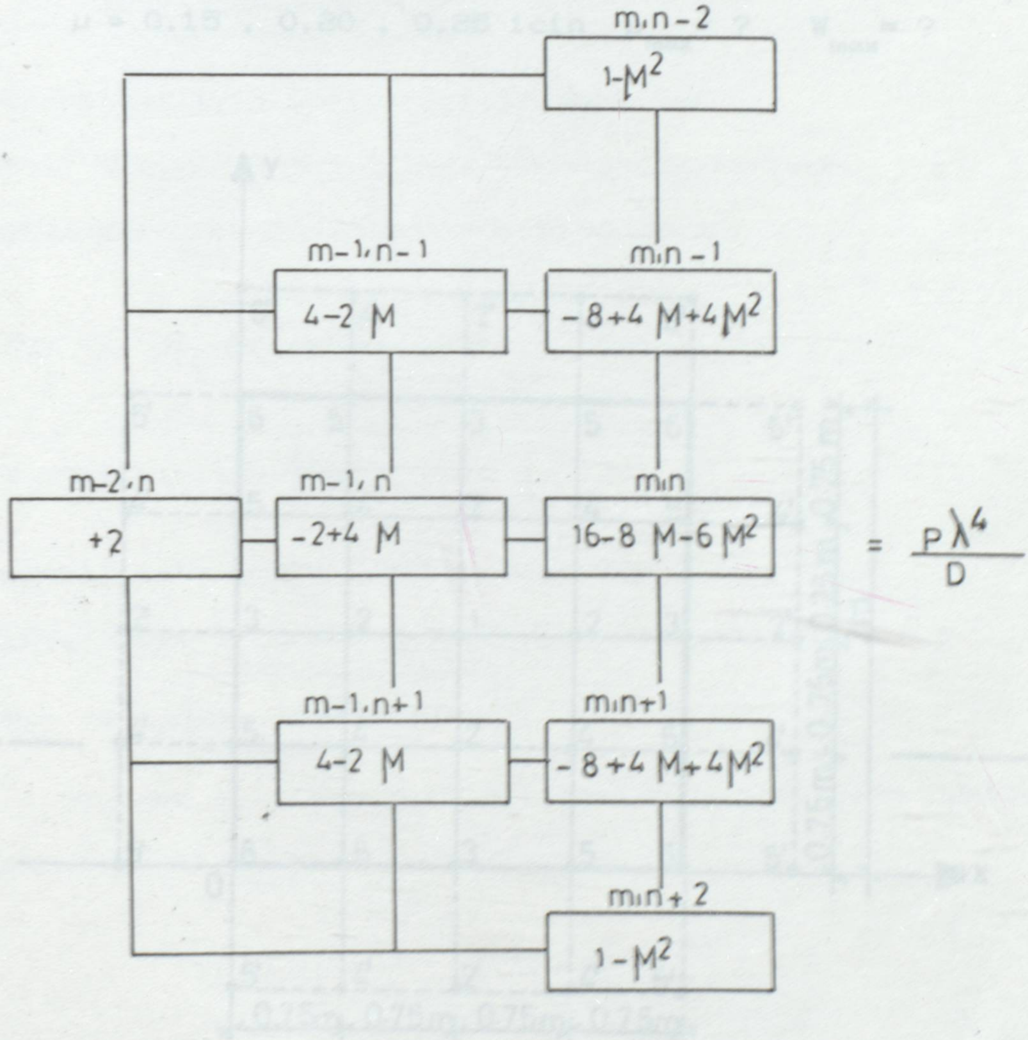
$[(w_{m+1,n+1}-2w_{m+1,n}+w_{m+1,n-1})-(w_{m-1,n+1}-2w_{m-1,n}+w_{m-1,n-1})]=0$

fiktif noktaların sehimlerini elimine etmek için iki ek ifad
daha gereklidir..

3) $(M_x)_{m,n-1} \cong (-w_{m+1,n-1}+2w_{m,n-1}-w_{m-1,n-1})-\mu(w_{m,n}-2w_{m,n-1}+w_{m,n-2})=0$

4) $(M_x)_{m,n+1} \cong (-w_{m+1,n+1}+2w_{m,n+1}-w_{m-1,n+1})-\mu(w_{m,n+2}-2w_{m,n+1})=0$

Bu ifadelereden $w_{m+2,n}$, $w_{m+1,n}$, $w_{m+1,n-1}$, $w_{m+1,n+1}$ yok edilirs
bosta kenar için katsayılar şeması elde edilmiş olur.



Serbest kenar için katsayılar şeması

SAYISAL UYGULAMALAR

Duzgun yayılı yuk etkisinde kenarlarından serbestçe mesnetlenmiş kare plak

a) $\Delta x = \Delta y = 0,75$ m

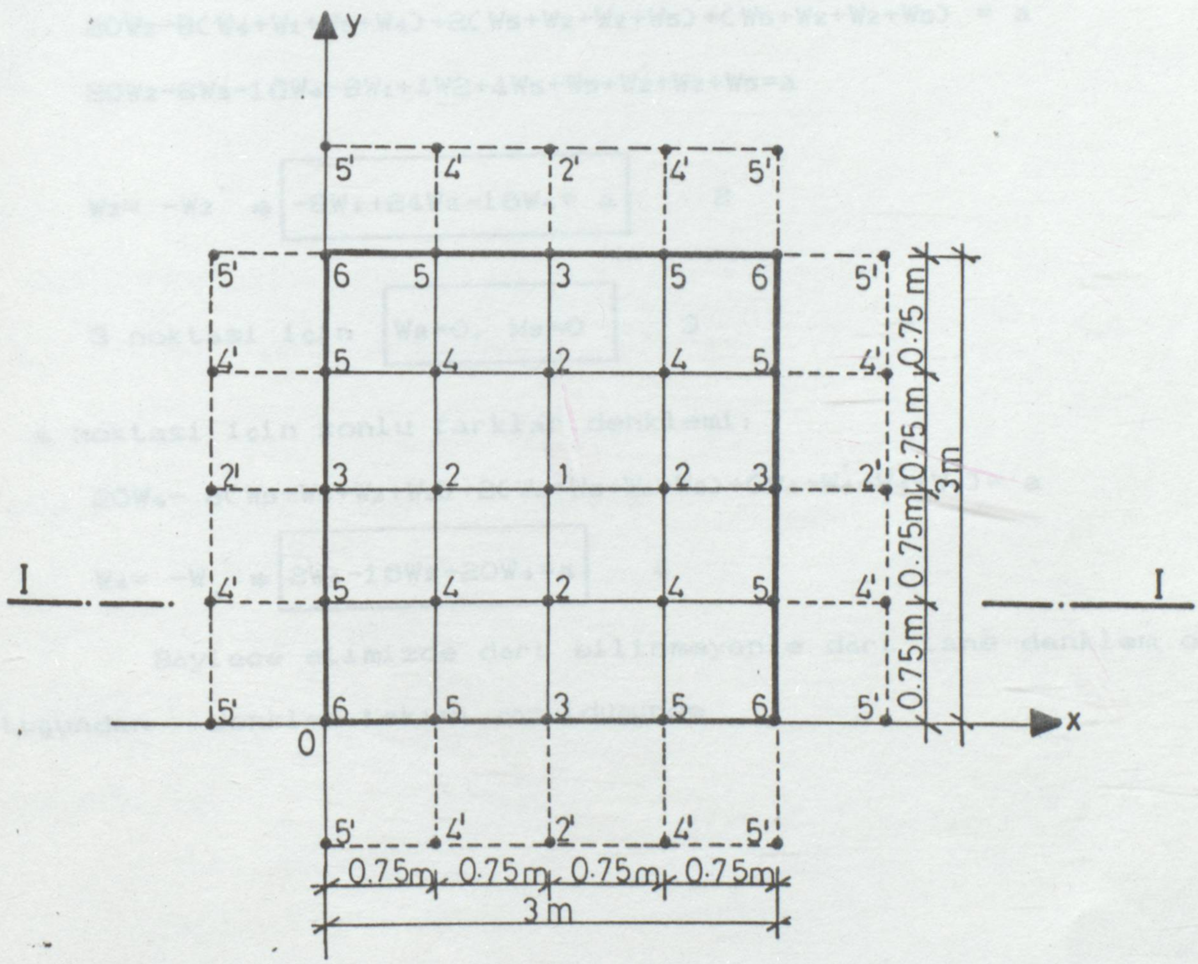
$P = 10\ kN/m^2 = 1\ t/m^2$

$a = b = 3$ m

$d = 10$ cm $= 0,1$ m

$E = 1000\ kN/cm^2 = 1000 * 10^3\ kg/m^2$

$\mu = 0,15\ ,\ 0,20\ ,\ 0,25$ icin $\mu_{max} = ?$ $W_{max} = ?$



basit mesnet sınır şartlarından $W_3=W_5=W_6=0$ $M_3=M_5=M_6=0$

Her noktaya sonlu farklar denklemimizi uygulayalım. 1

1 noktası için sonlu farklar denklemi

$$20W_{mn}-8(W_{m+1,n}+W_{m-1,n}+W_{m,n+1}+W_{m,n-1})+2(W_{m-1,n-1}+W_{m+1,n+1}+W_{m-1,n+1}+W_{m+1,n-1})+(W_{m+2,n}+W_{m-2,n}+W_{m,n+2}+W_{m,n-2})=\frac{P}{D}(\Delta y)$$

$$20W_1-(W_2+W_2+W_2+W_2)+2(W_4+W_4+W_4+W_4)+(W_3+W_3+W_3+W_3)=\frac{P}{D}(\Delta y)^4=a$$

$$\boxed{20W_1-32W_2+8W_4=a} \quad 1$$

2 noktası için sonlu farklar denklemi

$$20W_2-8(W_4+W_1+W_3+W_4)+2(W_5+W_2+W_2+W_5)+(W_5+W_2+W_2+W_5)=a$$

$$20W_2-8W_3-16W_4-8W_1+4W_2+4W_5+W_5+W_2'+W_2+W_5=a$$

$$W_2'=-W_2 \Rightarrow \boxed{-8W_1+24W_2-16W_4=a} \quad 2$$

3 noktasi için $\boxed{W_3=0,\ M_3=0}$ 3

4 noktasi için sonlu farklar denklemi:

$$20W_4-8(W_5+W_5+W_2+W_2)+2(W_3+W_6+W_1+W_3)+(W_4+W_4'+W_4'+W_4)=a$$

$$W_4'=-W_4 \Rightarrow \boxed{2W_1-16W_2+20W_4=a} \quad 4$$

Böylece elimizde dört bilinmeyenle dört tane denklem oluştuğundan denklem takımı çözüldüğünde

```
CLS:CLEAR :KEY OFF
PRINT " * * * *  SONLU FARKLARDA DENKLEM COZUMU  * * * * *":PRINT
PRINT " * * * *      INS.MUH. SANLI SERIFOGLU   * * * * *":PRINT
ON ERROR GOTO 170
READ N:M=N+1:DIM A(N,M),B(N,M)
FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO M :READ A(I,J):B(I,J)=A(I,J)
SA=4+I*2:SU=J*9:IF J=M THEN SU=J*11:LOCATE SA,SU:PRINT "=";A(I,J);" a";:GOTO

LOCATE SA,SU:PRINT A(I,J);"W";J;
NEXT J:PRINT :NEXT I
 FOR I=1 TO N:FOR J=I+1 TO M:A(I,J)=A(I,J)/A(I,I):NEXT J
 FOR J=1 TO N:IF J=I THEN 130
 FOR K=I+1 TO M:A(J,K)=A(J,K)-A(J,I)*A(I,K):NEXT K
 NEXT J,I :EB=A(1,M):ES=1:PRINT
 FOR I=1 TO N:PRINT " W";I;" =";A(I,M);" a":IF A(I,M)>EB THEN EB=A(I,M):ES=I
 NEXT I:PRINT:PRINT "W MAX =";"W";ES;"    =";EB;" a"
 INPUT "",A$:GOTO 180
 PRINT "DENKLEMIN COZUMU YOK":INPUT "",A$:RESUME 10
 END
 REM  BILINMEYEN SAYISI
 DATA 4
 REM DENKLEM KATSAYILARI
 DATA 20,-32,0,8,1
 DATA -8,24,0,-16,1
 DATA 0,0,1,0,0
 DATA 2,-16,0,20,1
```

```
* * *  SONLU FARKLARDA DENKLEM COZUMU  * * * * *

* * *      INS.MUH. SANLI SERIFOGLU   * * * * *

    20 W 1   -32 W 2   0 W 3    8 W 4              = 1  a

   -8 W 1    24 W 2   0 W 3  -16 W 4              = 1  a

    0 W 1     0 W 2   1 W 3    0 W 4              = 0  a

    2 W 1   -16 W 2   0 W 3   20 W 4              = 1  a

1  = 1.03125  a
2  = .7500001  a
3  = 0  a
4  = .5468751  a

AX =W 1     = 1.03125  a
```

a'yı bulmaya çalışalım. önce D plak rijitliğini bulmamız gerekiyor. "D" değişik katsayılar için bulunur.

$$D=\frac{E.I}{1-\mu^2} \quad \text{idi } \mu=0{,}15 \quad E=1000*10^9 \text{ ise}$$

$$D=\frac{1000*10^9}{12(1-0{,}15^2)}=85251.5 \text{ kNcm.}$$

$\mu=0{,}20 \Rightarrow$

$$D=\frac{1000*10^9}{12(1-0{,}2^2)}=86805.55 \text{ kNcm}$$

$\mu=0{,}25 \Rightarrow$

$$D=\frac{1000*10^9}{12(1-0{,}25^2)}=88888.88 \text{kNcm}$$

$$a=\frac{P}{D}(\Delta y)^4$$ olduğunu daha önce söylemiştik.

bulunan "D" değerlerine karşılık "a" değerlerini bulalım.

$$\mu=0{,}15 \quad a=\frac{10*(0{,}75)^4}{8.52515}=0{,}3711 \text{ cm}$$

$$\mu=0{,}20 \quad a=\frac{10*(0{,}75)^4}{8.680555}=0{,}3644 \text{ cm}$$

$$\mu=0{,}25 \quad a=\frac{10*(0{,}75)^4}{8.888888}=0{,}3559 \text{ cm}$$

W_1 max olduğundan max Moment'te 1 noktasındadır.

$\mu = 0.15$ $W_1 = 0.3827$ cm

$W_2 = 0.2783$ cm

$W_4 = 0.2029$ cm

$\mu = 0,20$ $W_1 = 0,3759$ cm

$W_2 = 0,2733$ cm

$W_4 = 0,1993$ cm

$\mu = 0,25$ $W_1 = 0,3670$ cm

$W_2 = 0,2669$ cm

$W_4 = 0,1946$ cm

$$(MX)_{mn} = -\frac{D}{\lambda^2}[(W_{m+1,n} - 2W_{mn} + W_{m-1,n}) + \mu(W_{m,n+1} - 2W_{mn} + W_{m,n-1})]$$

$$= -\frac{D}{\lambda^2}[(W_2 - 2W_1 + W_2) + \mu(W_2 - 2W_1 + W_2)]$$

$$= -\frac{2*D}{\lambda^2}[(W_2 - W_1) + \mu(W_2 - W_1)]$$

$$(MX)_{(1)} = -3,56*10^{-4}*D*[(W_2 - W_1) + \mu(W_2 - W_1)]$$

$\mu = 0,15$ ⇒

$$(MX)_{(1)} = -3,56*10^{-4}*D*[(0,2783-0,3827)+0,15*(0,2783-0,3827)]$$

$(MX)_{(1)} = 3,63$ kNcm

$\mu = 0,20$ ⇒ $(MX)_{(1)} = 3,805$ kNcm

$\mu = 0,25$ ⇒ $(MX)_{(1)} = 3,96$

$$MX(2) = -\frac{D}{\lambda^2}[(W_{m+1,n} - 2W_{mn} + W_{m-1,n}) + \mu(W_{m,n+1} - 2W_{mn} + W_{m,n-1})]$$

$$= -\frac{D}{\lambda^2}\left[(W_4-2W_2+W_4)+\mu(W_1-2W_2+W_3)\right]$$

$$= -\frac{D}{\lambda^2}\left[(2W_4-2W_2)+\mu(W_1-2W_2)\right]$$

$\mu = 0{,}15 \Rightarrow Mx(2) = 2{,}681$ kNcm

$\mu = 0{,}20 \Rightarrow Mx(2) = 2{,}81$ kNcm

$\mu = 0{,}25 \Rightarrow Mx(2) = 2{,}94$ kNcm

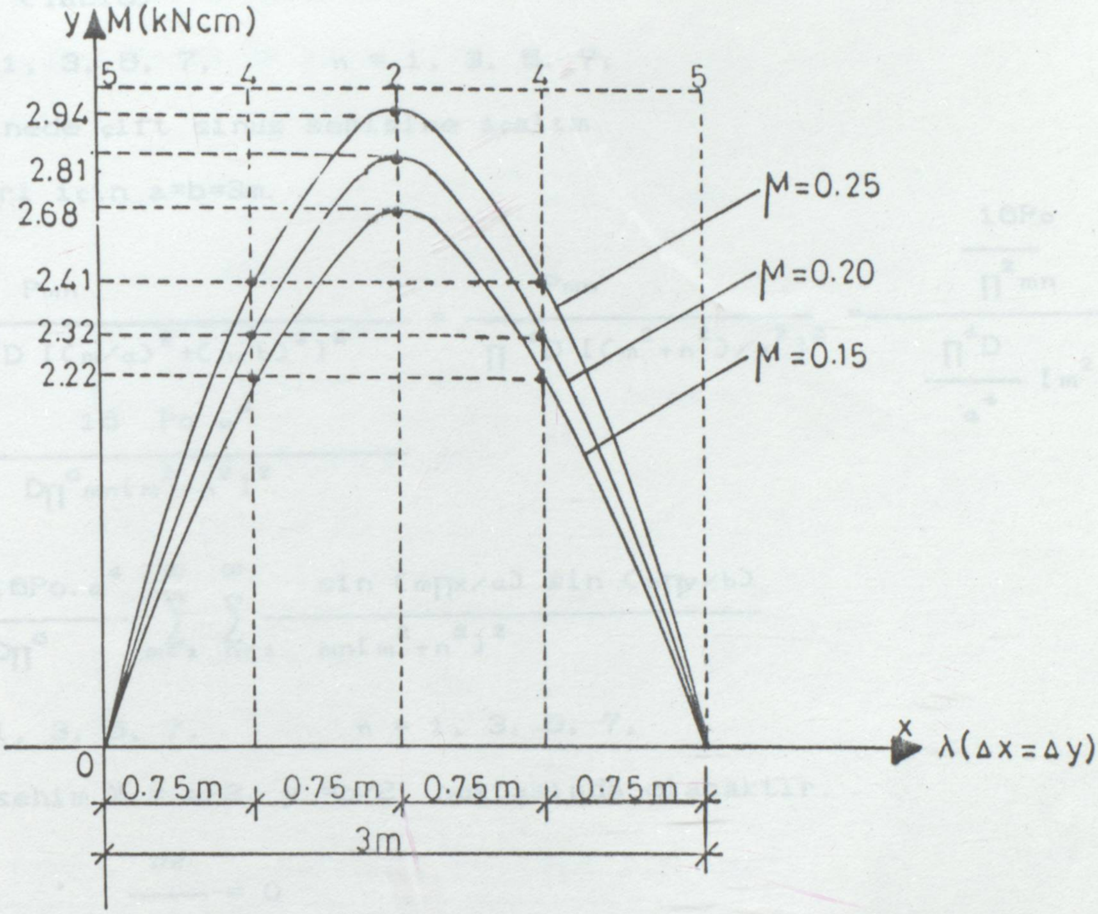
$$Mx(4) = -\frac{D}{\lambda^2}\left[(W_5-2W_4+W_2)+\mu(W_2-2W_4+W_5)\right]$$

$$= -\frac{D}{\lambda^2}\left[(-2W_4+W_2)+\mu(W_2-2W_4)\right]$$

$\mu = 0{,}15 \Rightarrow Mx(4) = 2{,}222$ kNcm

$\mu = 0{,}20 \Rightarrow Mx(4) = 2{,}320$ kNcm

$\mu = 0{,}25 \Rightarrow Mx(4) = 2{,}416$ kNcm



I-I kesiti M-λ diyagramı

$\Delta x = \Delta y = \lambda = l/4$

elde edilen bu sonuçlar yaklaşık sonuçtur. Aynı problemi kesin sonuç bulmak için seriler yardımıyla çözersek ne kadar hata ile çözüm yaptığımızı rahatlıkla saptayabiliriz.

SERILERLE COZUM

P yukunu $P_{mn} = \dfrac{16P_o}{\pi^2 mn}$ olacak şekilde çift sinus serisine açalım. (Tablo)

$m = 1, 3, 5, 7, \qquad n = 1, 3, 5, 7,$

W sehiminede çift sinus serisine açalım

W_{mn} değeri için a=b=3m.

$$W_{mn} = \frac{P_{mn}}{\pi^4 D\,[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} = \frac{P_{mn}}{\pi^4 D\,[(m^2+n^2)/a^2]^2} = \frac{\dfrac{16P_o}{\pi^2 mn}}{\dfrac{\pi^4 D}{a^4}[m^2+n^2]^2}$$

$$W_{mn} = \frac{16\;P_o\,a^4}{D\pi^6 mn[m^2+n^2]^2}$$

$$W(x,y) = \frac{16P_o.\,a^4}{D\pi^6}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(m\pi x/a)\,\sin(n\pi y/b)}{mn[m^2+n^2]^2}$$

$m = 1, 3, 5, 7, \qquad n = 1, 3, 5, 7,$

maximum sehim X = a/2, y =b/2 noktasında olacaktır.

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0 \;,\quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0$$

$$W_{max} = \frac{16P_o.\,a^4}{D\pi^6}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin m\pi/2\,\sin n\pi/2}{mn[m^2+n^2]^2}$$

$$W_{max} = \frac{16P_o.\,a^4}{D\pi^6}(0,25-0,0033-0,0033+0,0003+........)$$

$$W_{max} = \frac{0,0041 * P_o * a^4}{D}$$ burada a, b plağın x ve y yönündeki boyutlarıdır.

daha önceden hesaplamıştık ki

$\mu = 0,15 \Rightarrow D = 85251.5$ kNcm

$\mu = 0,20 \Rightarrow D = 86805.55$ kNcm

$\mu = 0,25 \Rightarrow D = 88888.88$ kNcm

$Po = 10$ kN/m^2

$$\mu = 0,15 \quad W_{max} = \frac{0,0041 * 10 * 3^4}{85251.5 * 10^{-2}} = 0,003896 \text{ m}$$

$W_{max} = 0,3896$ cm

$$\mu = 0,20 \quad W_{max} = \frac{0,0041 * 10 * 3^4}{86805.55 * 10^{-2}} = 0,003826 \text{ m}$$

$W_{max} = 0,3826$ cm

$$\mu = 0,25 \quad W_{max} = \frac{0,0041 * 10 * 3^4}{88888.88 * 10^{-2}} = 0,003736 \text{ m}$$

$W_{max} = 0,3736$ cm

$$Mx_{max} = \frac{16Po.a^2}{\Pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m^2+\mu n^2) \sin m\Pi/2 . \sin n\Pi/2}{mn\,[m^2+n^2]^2}$$

$$My_{max} = \frac{16Po.a^2}{\Pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+\mu m^2) \sin m\Pi/2 . \sin n\Pi/2}{mn\,[m^2+n^2]^2}$$

$(m = 1,3,5,7, \quad) \quad (n = 1,3,5,7, \quad)$

bu seriler daha az hızlı yakınsaktır. Ilk dort terimi almak yeterli yaklasıklığı sağlar.

$\mu = 0,15$ için $Mx_{max} = My_{max}$

$$M_{x max} = \frac{16 Po\, a^2}{\Pi^4} . (0,288-0,0078-0,031+0,0014+.....)$$

$$= 0,0412\ Po\ a^2 = 0,0412 * 10 * 3^2 = 3,71 \quad kNcm$$

$\mu = 0,20 \Rightarrow$

$$M_{x max} = \frac{16 Poa^2}{\Pi^4} (0,30-0,009-0,030+0,0018+......)$$

$$= 0,0431\ Poa^2 = 0,0431 * 10 * 3^2 = 3.88\ kNcm$$

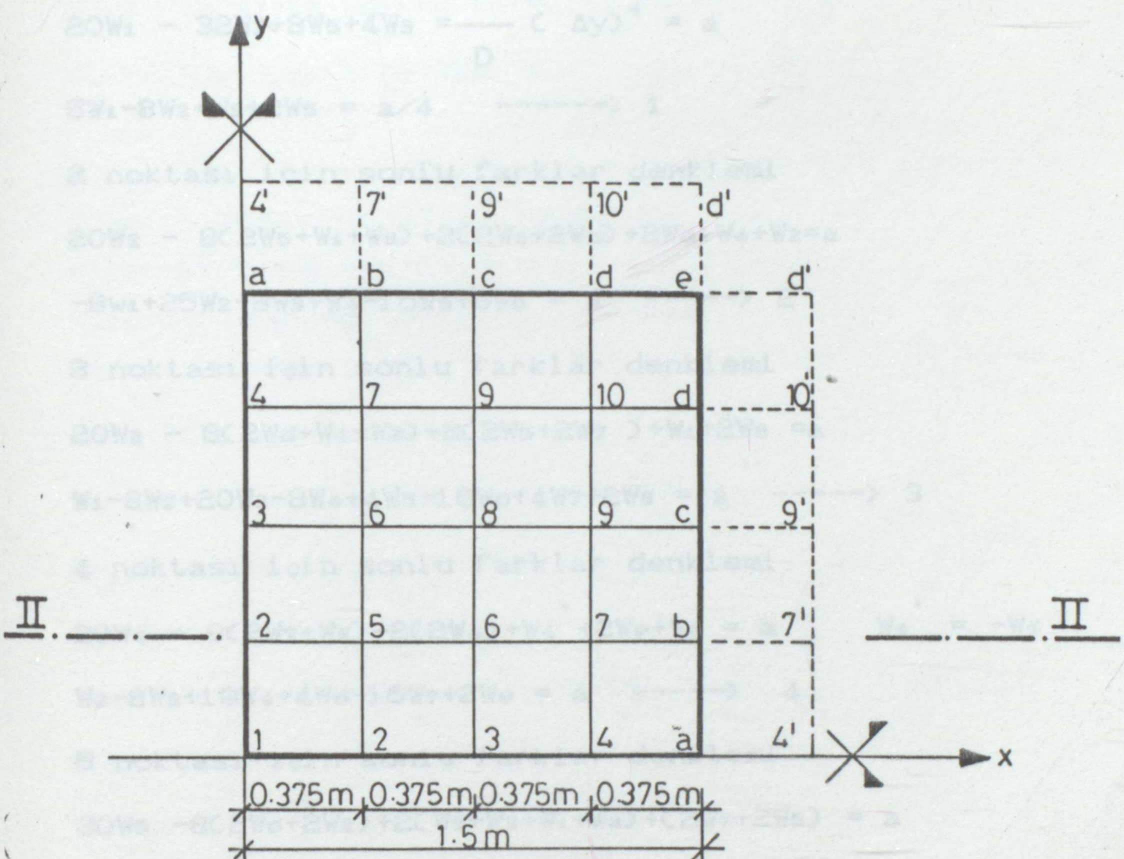
$\mu = 0,25 \Rightarrow$

$$M_{x max} = \frac{16 Poa^2}{\Pi^4} (0,313-0,011-0,0308+0,0021+.....)$$

$$= 0,046\ Poa^2 = 0,046 * 10 * 3^2 \quad = 4,14\ kNcm$$

burada goruluyorki kesin sonuç olarak serilerle bulunan değerler sonlu farklarla bulunan değerlere oldukça yakındır Fakat sonlu farklarda işlem hataları olma olasılığı çok fazladır. Eğer alınan aralığı ne kadar çok kuçultecek olursak o kadar kesin sonuca yaklaşırız ve tabii ki işlemler o'na gore daha fazla artacaktır. Fakat sonlu farklar yontemi bilgisayar programına çok elverişli bir meteddur. Eğer bu metodu bilgisayarda kullanırsak ve adım aralığı sonsuz kuçuk aldığımızda goreceğizki serilerle bulunan değere çok çok yakın değerler çıkacaktır. Bunu bir ornekle açıklıyalım . Daha once yapılan problemi ($\Delta x = \Delta y = l/4$) bu defada ($\Delta x = \Delta y = l/8$) aralığında çozmeye çalışalım.

b) $\Delta x = \Delta y = 0,75/2$ için çözelim



Basit mesnet sınır şartlarından biliyoruz ki

$W_a = W_b = W_c = W_d = W_e = 0$

$M_a = M_b = M_c = M_d = M_c = 0$

Her noktaya sonlu farklar denklemini uygulayalım

1 noktası için sonlu farklar denklemi

$$20W_1 - 8(2W_2+2W_2)+2(2W_5+2W_5)+(2W_3+2W_3)=\frac{P}{D}(\Delta y)^4$$

$$20W_1 - 32W_2+8W_5+4W_3 = \frac{P}{D}(\Delta y)^4 = a$$

$$5W_1-8W_2+W_3+2W_5 = a/4 \quad ------> \quad 1$$

2 noktası için sonlu farklar denklemi

$$20W_2 - 8(2W_5+W_1+W_3)+2(2W_2+2W_6)+2W_6+W_4+W_2=a$$

$$-8w_1+25W_2-8W_3+W_4-16W_5+6W_6 = a \quad -----> \quad 2$$

3 noktası için sonlu farklar denklemi

$$20W_3 - 8(2W_6+W_4+W_2)+2(2W_5+2W_7)+W_1+2W_8 =a$$

$$W_1-8W_2+20W_3-8W_4+4W_5-16W_6+4W_7+2W_8 = a \quad -----> \quad 3$$

4 noktası için sonlu farklar denklemi

$$20W_4 - 8(2W_7+W_3)+2(2W_6)+W_4'+2W_9+W_2 = a \qquad W_4' = -W_4$$

$$W_2-8W_3+19W_4+4W_6-16W_7+2W_9 = a \quad -----> \quad 4$$

5 noktası için sonlu farklar denklemi

$$20W_5 -8(2W_6+2W_2)+2(W_3+W_3+W_1+W_8)+(2W_7+2W_5) = a$$

$$20W_5-16W_6-16W_2+2W_3+2W_3+2W_1+2W_8+2W_7+2W_5 = a$$

$$W_1-8W_2+2W_3+11W_5-8W_6+W_7+W_8 = a/2 \quad -----> \quad 5$$

6 noktası için sonlu farklar denklemi

$$20W_6 - 8(W_3+W_5+W_7+W_8)+2(W_2+W_6+W_4+W_9)+W_9+W_6+W_2= a$$

$$3W_2-8W_3+2W_4-8W_5+23W_6-8W_7-8W_8+3W_9 = a \quad -----> \quad 6$$

7 noktası için sonlu farklar denklemi

$$20W_7 - 8(W_6+W_4+W_9)+2(W_3+W_8)+(-W_7+W_7+W_5+W_{10}) = a$$

$$2W_3-8W_4+W_5-8W_6+20W_7+2W_8-8W_9+W_{10} = a \quad -----> \quad 7$$

8 noktası için sonlu farklar denklemi

$$20W_8 - 8(2W_9+2W_6)+2(W_5+2W_7+W_{10})+W_3+W_3 = a$$

$$20W_8-16W_9-16W_6+2W_5+4W_7+2W_{10}+2W_3 = a$$

$W_3+W_5-8W_6+2W_7+10W_8-8W_9+W_{10} = a/2 \quad ------> \quad 8$

9 noktası için sonlu farklar denklemi

$20W_9 - 8(W_7+W_8+W_{10})+2(W_6+W_9)+W_6+W_4-W_9 = a$

$W_4+3W_6-8W_7-8W_8+21W_9-8W_{10} = a \quad -----> \quad 9$

10 noktası için sonlu farklar denklemi

$20W_{10} - 8(2W_9)+2(W_8)+W_7 \; W_7-W_{10}-W_{10} = a$

$W_7+W_8-8W_9+9W_{10} = a/2 \quad -----> \quad 10$

bulunan denklem takımını çozersek

$5W_1-8W_2+W_3+2W_5 = a/4$

$-8W_1+25W_2-8W_3+W_4-16W_5+6W_6 = a$

$W_1 -8W_2+20W_3-8W_4+4W_5-16W_6+4W_7+2W_8 = a$

$W_2 -8W_3+19W_4+4W_6-16W_7+2W_9 = a$

$W_1 -8W_2+2W_3+11W_5-8W_6+W_7+W_8 = a/2$

$3W_2-8W_3+2W_4-8W_5+23W_6-8W_7-8W_8+3W_9 = a$

$2W_3-8W_4+W_5-8W_6+20W_7+2W_8-8W_9+W_{10} = a$

$W_3+W_5-8W_6+2W_7+10W_8-8W_9+W_{10} = a/2$

$W_4+3W_6-8W_7-8W_8+21W_9-8W_{10} = a$

$W_7+W_8-8W_9+9W_{10} = a/2$

```
5 CLS:CLEAR :KEY OFF
20 PRINT " * * * *      INS.MUH. SANLI SERIFOGLU    * * * * *":PRINT
40 INPUT "BILINMIYEN SAYISI ";N:M=N+1:DIM A(N,M),B(N,M)
50 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO M
60 READ A(I,J):PRINT A(I,J);:NEXT J:PRINT :NEXT I
90 FOR I=1 TO N:FOR J=I+1 TO M:A(I,J)=A(I,J)/A(I,I):NEXT J
100 FOR J=1 TO N:IF J=I THEN 120
110 FOR K=I+1 TO M:A(J,K)=A(J,K)-A(J,I)*A(I,K):NEXT K
120 NEXT J,I :EB=A(1,M):ES=1:PRINT
130 FOR I=1 TO N:PRINT " W";I;" =";A(I,M);" a"
135 IF A(I,M)>EB THEN EB=A(I,M):ES=I
140 NEXT I:PRINT:PRINT "W MAX =";"W";ES;"     =";EB;" a"
150 INPUT "",A$:GOTO 170
160 PRINT "DENKLEMIN COZUMU YOK":INPUT "",A$:RESUME 5
170 END
180 DATA 5,-8,1,0,2,0,0,0,0,0,.25
190 DATA -8,25,-8,1,-16,6,0,0,0,0,1
200 DATA 1,-8,20,-8,4,-16,4,2,0,0,1
210 DATA 0,1,-8,19,0,4,-16,0,2,0,1
220 DATA 1,-8,2,0,11,-8,1,1,0,0,.5
230 DATA 0,3,-8,2,-8,23,-8,-8,3,0,1
240 DATA 0,0,2,-8,1,-8,20,2,-8,1,1
250 DATA 0,0,1,0,1,-8,2,10,-8,1,.5
260 DATA 0,0,0,1,0,3,-8,-8,21,-8,1
270 DATA 0,0,0,0,0,0,1,1,-8,9,.5
```

W_1 = 16.6081 a

W_2 = 15.4436 a

W_3 = 12.0311 a

W_4 = 6.6634 a

W_5 = 14.3636 a

W_6 = 11.1862 a

W_7 = 6.2065 a

W_8 = 8.7427 a

W_9 = 4.8598 a

W_{10} = 2.7144 a

$W_{max} = W_1 = 15.0234\ a$

daha önceden "D" değerleri bulunmuştu

$$\mu = 0{,}15 \quad a = \frac{10 * (0{,}375)^4}{8{,}52515} = 0{,}0232\ cm \Rightarrow D = 85251.5\ kNcm$$

$$\mu = 0{,}20 \quad a = \frac{10 * (0{,}375)^4}{8{,}680555} = 0{,}0228\ cm \Rightarrow D = 86805.55\ kNcm$$

$$\mu = 0{,}25 \quad a = \frac{10 * (0{,}375)^4}{8.88888} = 0{,}0222\ cm \Rightarrow D = 88888.88\ kNcm$$

W	μ=0.15	μ=0.20	μ=0.25
W1	0.3853	0.3887	0.3687
W2	0.3583	0.3521	0.3528
W3	0.2791	0.2743	0.2671
W4	0.1546	0.1519	0.1479
W5	0.3332	0.3275	0.3189
W6	0.2598	0.2553	0.2486
W7	0.144	0.1415	0.1378
W8	0.2028	0.1993	0.1941
W9	0.1127	0.1108	0.1079
W10	0.0630	0.0619	0.0603

W - μ TABLOSU

$$Mx(1) = -\frac{20}{\lambda^2}[(W_2-W_1)+\mu(W_2-W_1)] \quad \text{idi}$$

"D" değerlerini daha önceden bulmuştuk.

$$Mx(1) = 14,22 * 10^{-4} * D * [(W_2-W_1)+\mu(W_2-W_1)]$$

μ= 0,15 ⇒ Mx(1) = 3,7647 kNcm

μ= 0,20 ⇒ Mx(1) = 3,9401 kNcm

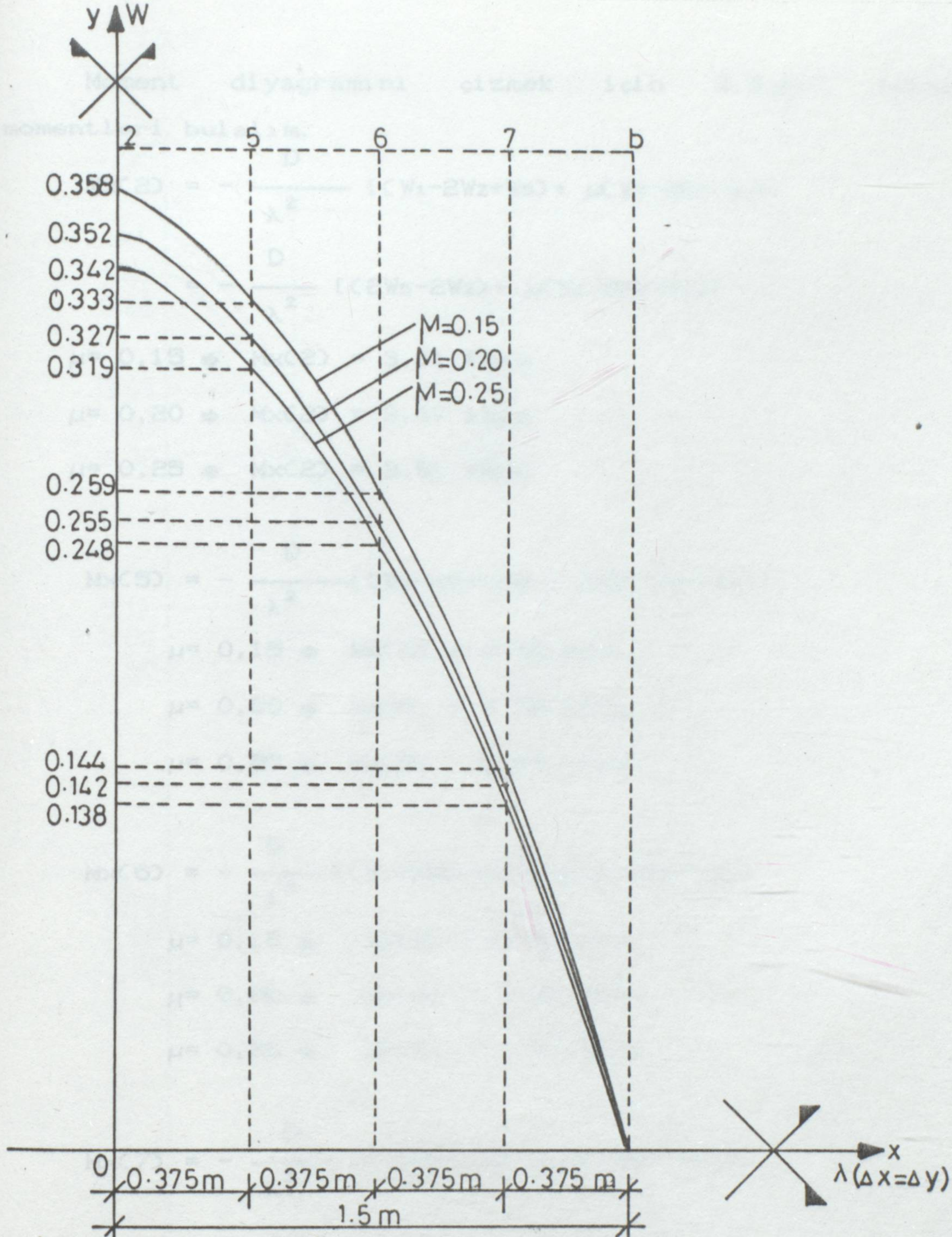
μ= 0,25 ⇒ Mx(1) = 4,0922 kNcm

Bulduğumuz bu değerlerden bir kıyaslama yapacak olursak, Sonlu farklar ile bulunan W_{max} değerlerine karşılık gelen max Momentlerin yaklaşık degerini seriler yardımıyla bulduğumuz kesin sonuçlarla karşılaştıralım.

	$\Delta x=\Delta y=l/4$	$\Delta x=\Delta y=l/8$	serilerle çozum
μ= 0,15	3,63	3,76	3,71
μ= 0,20	3,80	3,94	3,88
μ= 0,25	3,96	4,09	4,14

yukarıda görüleceği gibi sonlu farklar çozumunde aralığı ne kadar kuçuk alırsak çozume o kadar daha fazla yaklaşmış oluruz. Bulunan değerlerden hata miktarları ise aralık $l/4$ alındığında %022 hata olurken aralık $l/8$ alındığında hata %014 olmaktadır.

Bu yontem bilgisayara çok yatkındır. Aralığın kuçuk olması ile doğabilecek aritmetik hatalar bilgisayar yardımıyla ortadan kalkacak ve alınan sonsuz kuçuk noktalarda kesin sonuç elde edilecektir



II-II kesiti w -λ diyagramı

Δx=Δy=l/8

Moment diyagramını çizmek için 2,5,6,7 noktalarındaki momentleri bulalım.

$$M_x(2) = -\frac{D}{\lambda^2}\,[(W_1-2W_2+W_5)+\mu(W_3-2W_2+W_1)]$$

$$= -\frac{D}{\lambda^2}\,[(2W_5-2W_2)+\mu(W_1-2W_2+W_3)]$$

$\mu = 0,15 \Rightarrow$ $M_x(2) = 3,51$ kNcm

$\mu = 0,20 \Rightarrow$ $M_x(2) = 3,67$ kNcm

$\mu = 0,25 \Rightarrow$ $M_x(2) = 3,81$ kNcm

$$M_x(5) = -\frac{D}{\lambda^2}\,[(W_6-2W_5+W_2)+\mu(W_6-2W_5+W_2)]$$

$\mu = 0,15 \Rightarrow$ $M_x(5) = 3.38$ kNcm

$\mu = 0,20 \Rightarrow$ $M_x(5) = 3.53$ kNcm

$\mu = 0,25 \Rightarrow$ $M_x(5) = 3.66$ kNcm

$$M_x(6) = -\frac{D}{\lambda^2}\,[(W_7-2W_6+W_5)+\mu(W_8-2W_6+W_3)]$$

$\mu = 0,15 \Rightarrow$ $M_x(6) = 2.90$ kNcm

$\mu = 0,20 \Rightarrow$ $M_x(6) = 3.02$ kNcm

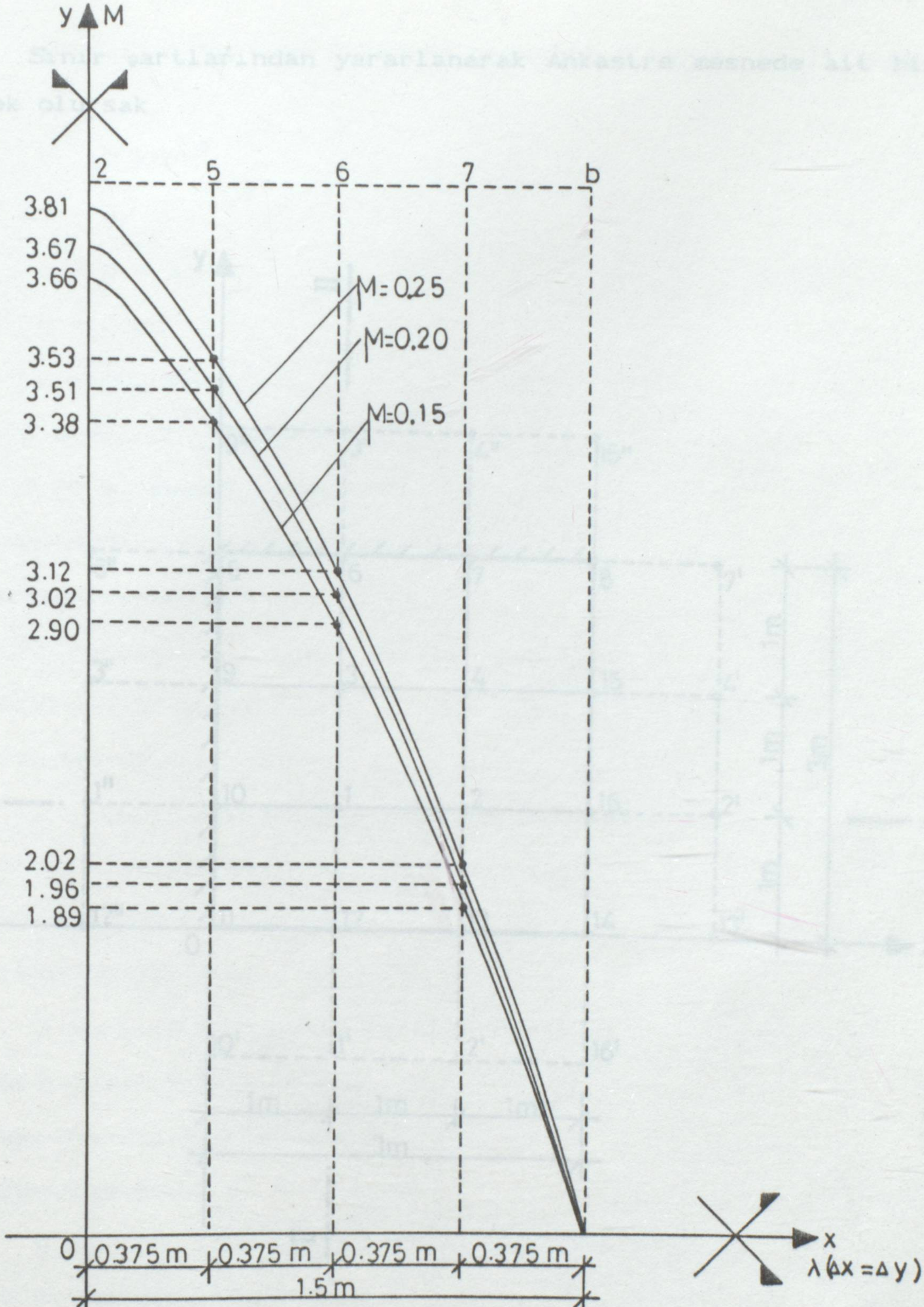
$\mu = 0,25 \Rightarrow$ $M_x(6) = 3.12$ kNcm

$$M_x(7) = -\frac{D}{\lambda^2}\,[(-2W_7+W_6)+\mu(W_9-2W_7+W_4)]$$

$\mu = 0,15 \Rightarrow$ $M_x(7) = 1.89$ kNcm

$\mu = 0,20 \Rightarrow$ $M_x(7) = 1.96$ kNcm

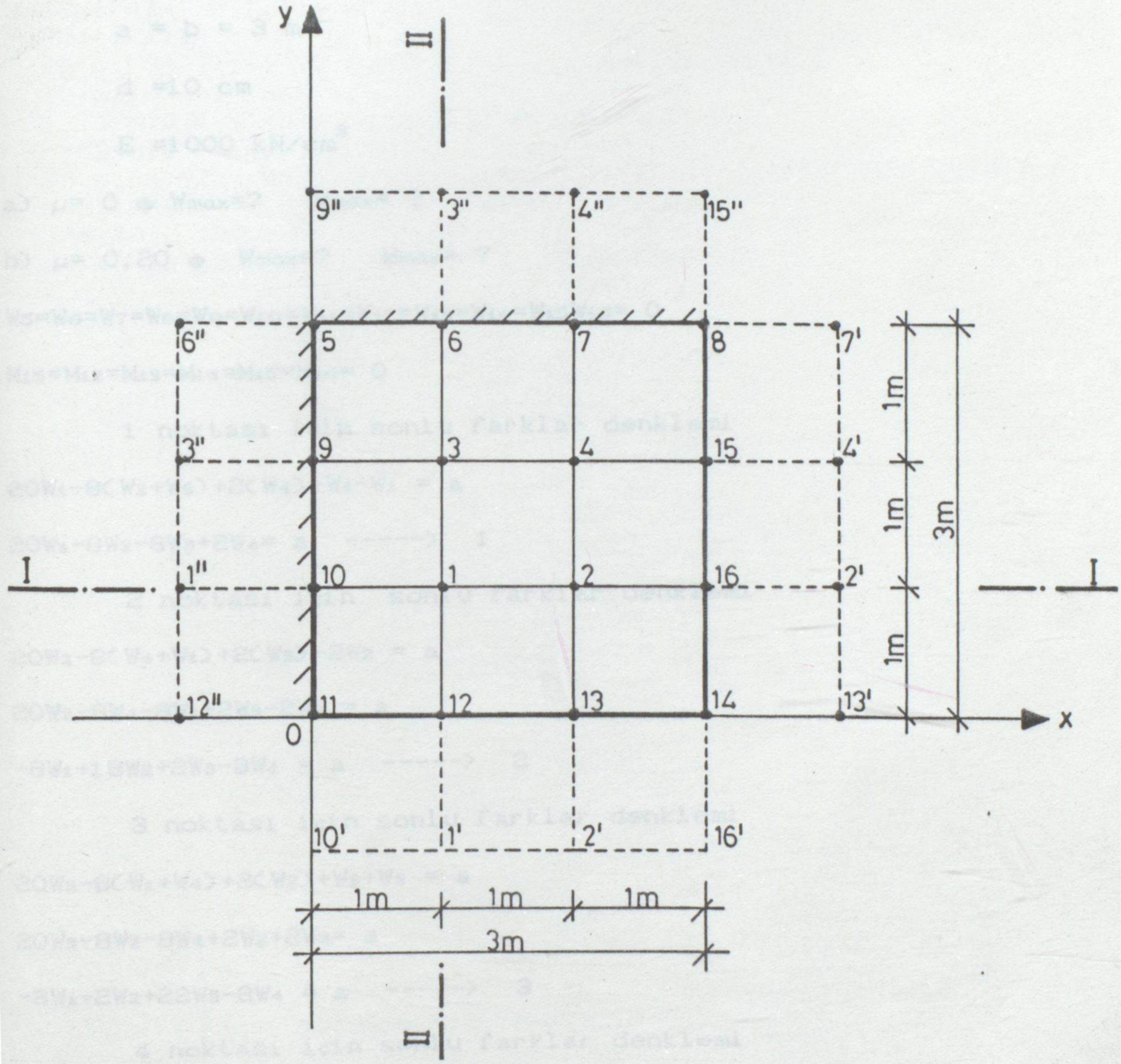
$\mu = 0.25 \Rightarrow$ $M_x(7) = 2.02$ kNcm



II II M – λ diyagramı

$\Delta x = \Delta y = \lambda = l/8$

Sınır şartlarından yararlanarak Ankastre mesnede ait bir örnek çözecek olursak



Boyutları verilen 2 kenarı ankastre 2 kenarı basit mesnetli plakta

P: 10 kN/m^2

$\Delta x = \Delta y = 1$

$a = b = 3$ m

$d = 10$ cm

$E = 1000$ kN/cm^2

a) $\mu = 0 \Rightarrow W_{max} = ?$ $M_{max} = ?$

b) $\mu = 0,20 \Rightarrow W_{max} = ?$ $M_{max} = ?$

$W_5 = W_6 = W_7 = W_8 = W_9 = W_{10} = W_{11} = W_{12} = W_{13} = W_{14} = W_{15} W_{16} = 0$

$M_{15} = M_{12} = M_{13} = M_{14} = M_{15} = M_{16} = 0$

1 noktası için sonlu farklar denklemi

$20W_1 - 8(W_2 + W_3) + 2(W_4) + W_1 - W_1 = a$

$20W_1 - 8W_2 - 8W_3 + 2W_4 = a$ -----> 1

2 noktası için sonlu farklar denklemi

$20W_2 - 8(W_4 + W_1) + 2(W_3) - 2W_2 = a$

$20W_2 - 8W_4 - 8W_1 + 2W_3 - 2W_2 = a$

$-8W_1 + 18W_2 + 2W_3 - 8W_4 = a$ -----> 2

3 noktası için sonlu farklar denklemi

$20W_3 - 8(W_1 + W_4) + 2(W_2) + W_3 + W_3 = a$

$20W_3 - 8W_2 - 8W_4 + 2W_2 + 2W_3 = a$

$-8W_1 + 2W_2 + 22W_3 - 8W_4 = a$ -----> 3

4 noktası için sonlu farklar denklemi

$20W_4 - 8(W_3 + W_2) + 2(W_1) + W_4 - W_4 = a$

$2W_1 - 8W_2 - 8W_3 + 20W_4 = a$ -----> 4

```
LEAR :KEY OFF
 " * * * *  SONLU FARKLARDA DENKLEM COZUMU  * * * * *":PRINT
 " * * * *       INS.MUH. SANLI SERIFOGLU   * * * * *":PRINT
ROR GOTO 170
N:M=N+1:DIM A(N,M),B(N,M)
=1 TO N:FOR J=1 TO M :READ A(I,J):B(I,J)=A(I,J)
I*2:SU=J*9:IF J=M THEN SU=J*11:LOCATE SA,SU:PRINT "=";A(I,J);" a";:GOTO

E SA,SU:PRINT A(I,J);"W";J;
J:PRINT :NEXT I
I=1 TO N:FOR J=I+1 TO M:A(I,J)=A(I,J)/A(I,I):NEXT J
J=1 TO N:IF J=I THEN 130
K=I+1 TO M:A(J,K)=A(J,K)-A(J,I)*A(I,K):NEXT K
 J,I :EB=A(1,M):ES=1:PRINT
I=1 TO N:PRINT " W";I;" =";A(I,M);" a":IF A(I,M)>EB THEN EB=A(I,M):ES=I
 I:PRINT:PRINT "W MAX =";"W";ES;"     =";EB;" a"
T "",A$:GOTO 180
T "DENKLEMIN COZUMU YOK":INPUT "",A$:RESUME 10

 BILINMEYEN SAYISI
 4
DENKLEM KATSAYILARI
 20,-8,-8,2,1
 -8,18,2,-8,1
 -8,2,22,-8,1
 2,-8,-8,20,1
```

),1693 a

),1892 a

),1514 a

),1693 a

$W_2 = W_{max} = 0,1892$ a

a'yı bulmaya çalışalım.

$$D = \text{Plak rijitliği} = \frac{E\,.\,I}{1-\mu^2} \Rightarrow$$

$$\mu = 0 \Rightarrow D = \frac{1000 * 10^3}{12(1-0^2)} = 83333 \text{ kNcm}$$

$$\mu = 0{,}2 \Rightarrow D = \frac{1000 * 10^3}{12(1-0{,}2^2)} = 86805 \text{ kN}$$

$$a = \frac{P}{D}(\Delta y)^4$$

$$\mu = 0 \Rightarrow a = \frac{10 * 1^4}{83333} = 1{,}2$$

$$\mu = 0{,}2 \Rightarrow a = \frac{10 * 1^4}{86806} = 1{,}15$$

W	M=0	M=0.20
W1	0.2032	0.1947
W2	0.2271	0.2176
W3	0.1817	0.1741
W4	0.2032	0.1947

$$Mx(1) = -\frac{D}{\lambda^2}[(W_{m+1,n}-2W_{mn}+W_{m-1,n}) + \mu(W_{mn+1}-2W_{mn}+W_{m,n-1})]$$

$$= -D\,[(W_2-2W_1) + \mu(W_3-2W_1)]$$

$\mu = 0 \Rightarrow Mx(1) = 1{,}494$ kNcm

$\mu = 0{,}20 \Rightarrow Mx(1) = 1{,}865$ kNcm

$$My(1) = -\frac{D}{\lambda^2}[(W_{m,n+1}-2\,W_{mn}+W_{m,n-1}) + \mu(W_{m+1,n} - 2\,W_{mn}+W_{m-1,n})]$$

$$= -D[(W_3-2W_1) + \mu(W_2-2W_1)]$$

$\mu = 0 \Rightarrow My(1) = 1{,}872$ kNcm

$\mu = 0{,}20 \Rightarrow My(1) = 2{,}167$ kNcm

$$Mx(2) = -\frac{D}{\lambda^2}[(-2W_2+W_1) + \mu(W_4-2W_2)]$$

$$= -D[(-2W_2+W_1) + \mu(W_4-2W_2)]$$

$\mu = 0 \Rightarrow Mx(2) = 2{,}09$ kNcm

$\mu = 0{,}20 \Rightarrow Mx(2) = 2{,}505$ kNcm

$$My(2) = -\frac{D}{\lambda^2}[(W_4-2W_2) + \mu(-2W_2+W_1)]$$

$\mu = 0 \Rightarrow My(2) = 2{,}051$ kNcm

$\mu = 0{,}20 \Rightarrow My(2) = 2{,}505$ kNcm

$$Mx(3) = -\frac{D}{\lambda^2}[(W_4-2W_3+W_0) + \mu(W_0-2W_3+W_1)]$$

$$= -D\,[(W_4-2W_3) + \mu(-2W_3+W_1)]$$

$\mu = 0 \Rightarrow Mx(3) = 1{,}335$ kNcm

$\mu = 0{,}20 \Rightarrow Mx(3) = 1{,}599$ kNcm

$$My(3) = -D\,[(-2W_3+W_1) + \mu\,(W_4-2W_3)]$$

$\mu = 0 \Rightarrow My(3) = 1{,}335$ kNcm

$\mu = 0{,}20 \Rightarrow My(3) = 1{,}599$ kNcm

$$Mx(4) = -\frac{D}{\lambda^2}[(-2W_4+W_3) + \mu(-2W_4+W_2)]$$

$\mu = 0 \Rightarrow Mx(4) = 1,872$ kNcm

$\mu = 0,20 \Rightarrow Mx(4) = 2,167$ kNcm

$$My(4) = -\frac{D}{\lambda^2}\left[(-2W_4+W_2)+\mu(-2W_4+W_9)\right]$$

$\mu = 0 \Rightarrow My(4) = 1,494$ kNcm

$\mu = 0,20 \Rightarrow My(4) = 1,865$ kNcm

Diyagram çizebilmesi için Mx(10), My(10), Mx(6), My(6), momentlerini bulalım.

$$Mx(6) = -\frac{D}{\lambda^2}\left[\mu(\ddot{W}_9+W_9)\right] \Rightarrow \ddot{W}_9 = W_9$$

$$= -D\left[\mu(2W_9)\right]$$

$\mu = 0 \Rightarrow Mx(6) = 0$

$\mu = 0.2 \Rightarrow Mx(6) = -0,605$ kNcm

$$My(6) = -D\left[2W_9\right]$$

$\mu = 0 \Rightarrow My(6) = -3.03$ kNcm

$\mu = 0.2 \Rightarrow My(6) = -3,02$ kNcm

$$Mx(10) = -\frac{D}{\lambda^2}\left[(W_1+\ddot{W}_1)+\mu(0)\right] \Rightarrow \ddot{W}_1 = W_1$$

$$Mx(10) = -D\left[2W_1\right]$$

$\mu = 0 \Rightarrow Mx(10) = -3,386$ kNcm

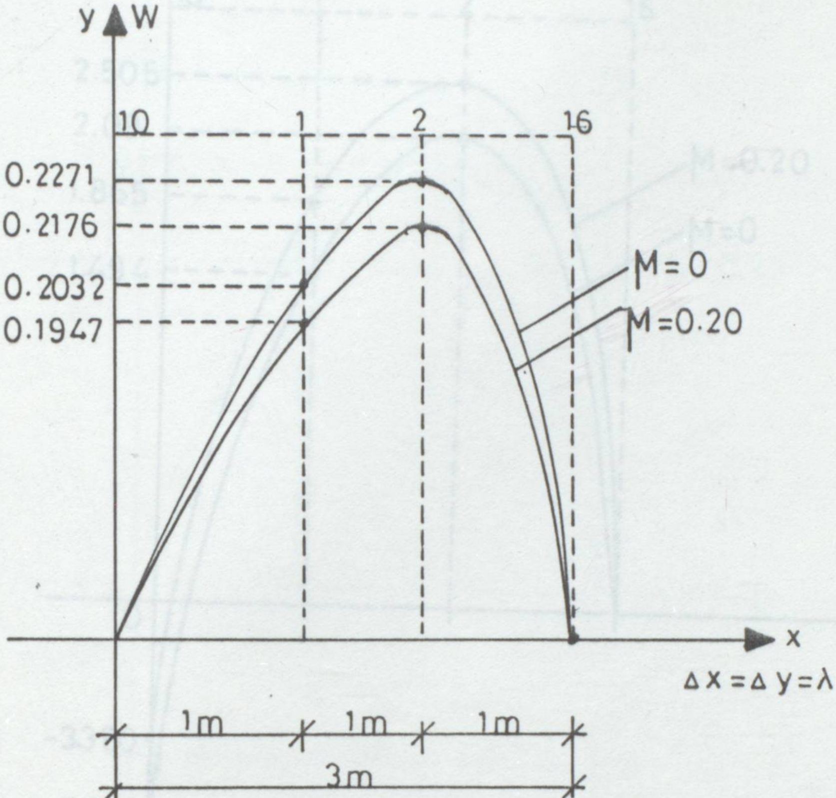
$\mu = 0,20 \Rightarrow Mx(10) = -3,380$ kNcm

$$My(10) = -\frac{D}{\lambda^2}\left[\mu(2W_1)\right]$$

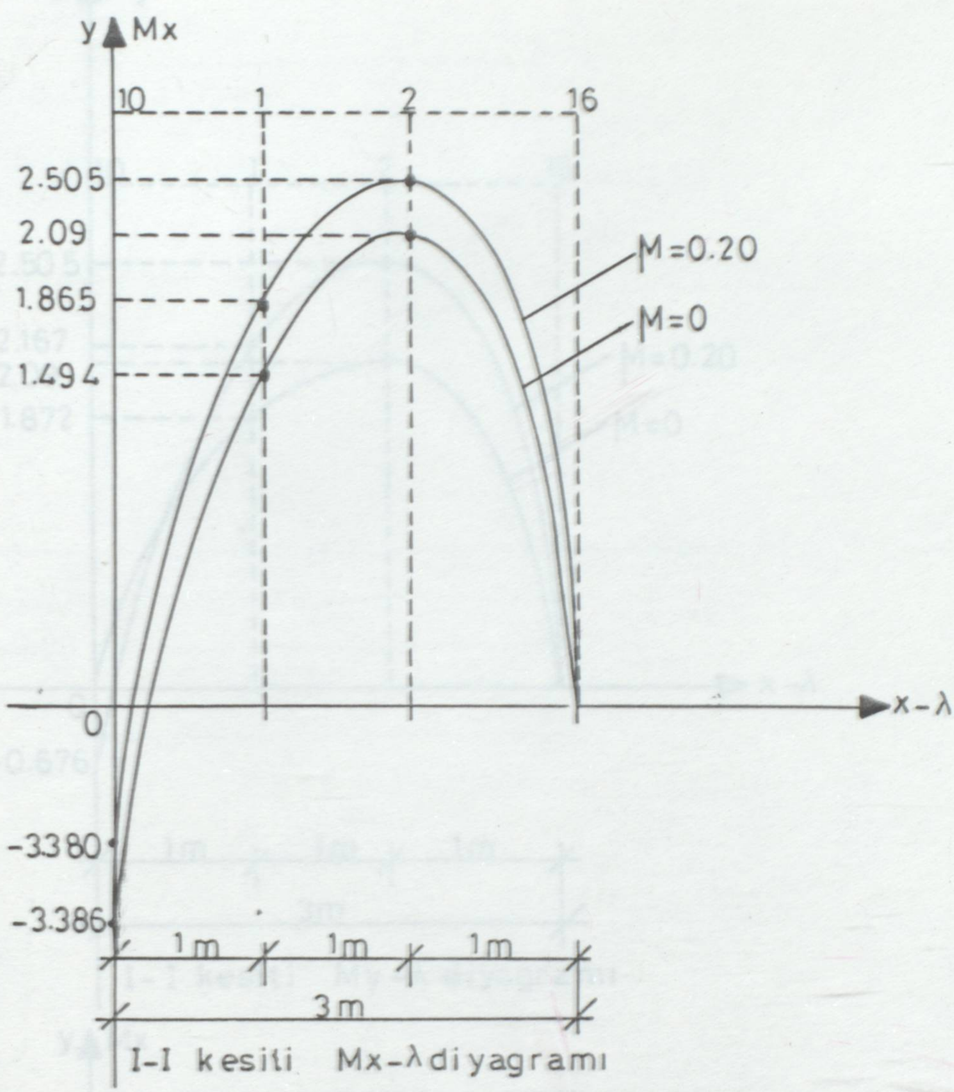
$\mu = 0 \Rightarrow My(10) = 0$

$\mu = 0,20 \Rightarrow My(10) = -0,676$ kNcm

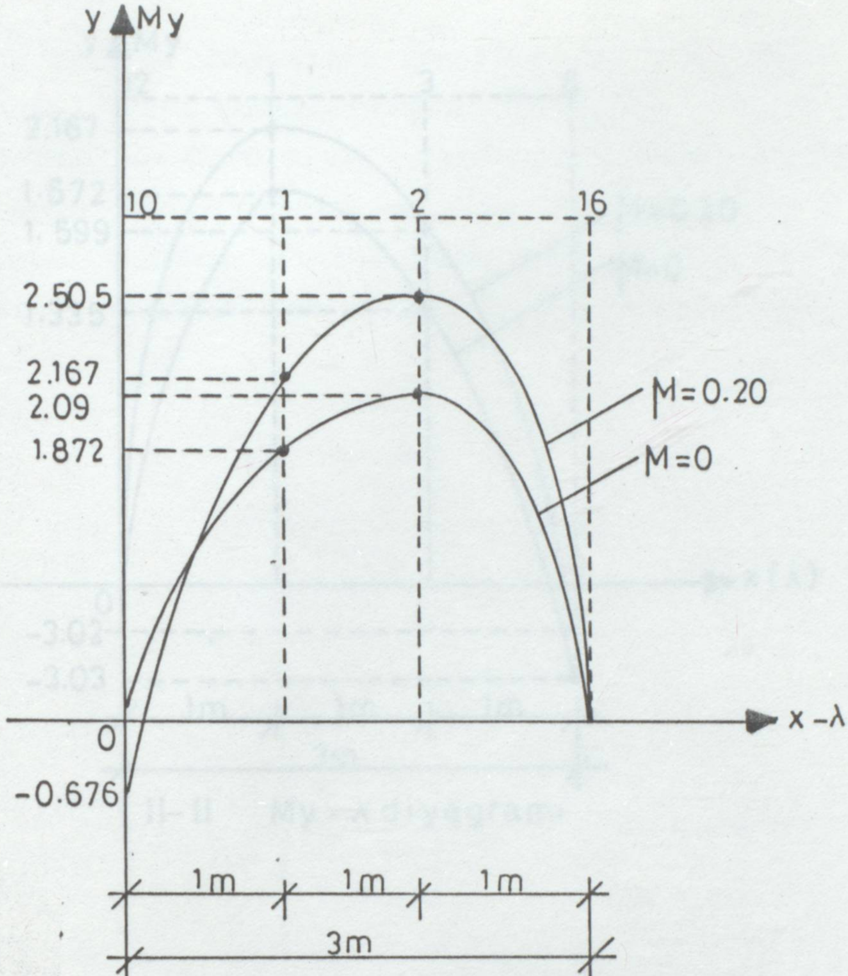
M	μ	Mx	My
M1	0	1.494	1.872
	0.20	1.865	2.167
M2	0	2.09	2.091
	0.20	2.505	2.505
M3	0	1.333	1.335
	0.20	1.559	1.559
M4	0	1.872	1.494
	0.20	2.167	1.865
M6	0	0	-3.03
	0.20	-0.605	-3.02
M10	0	-3.386	0
	0.20	-3.380	-0.676



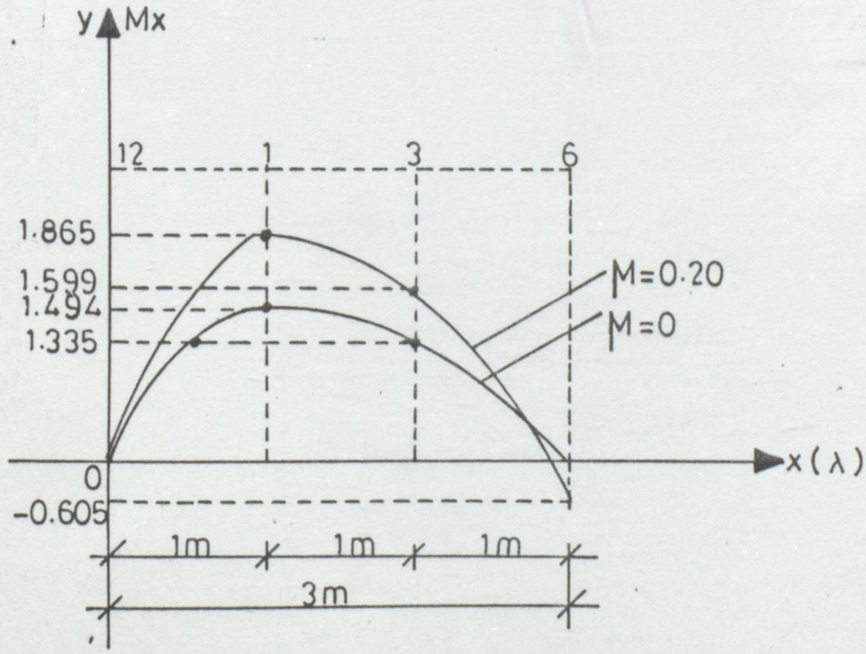
I-I kesiti W-λ diyagramı



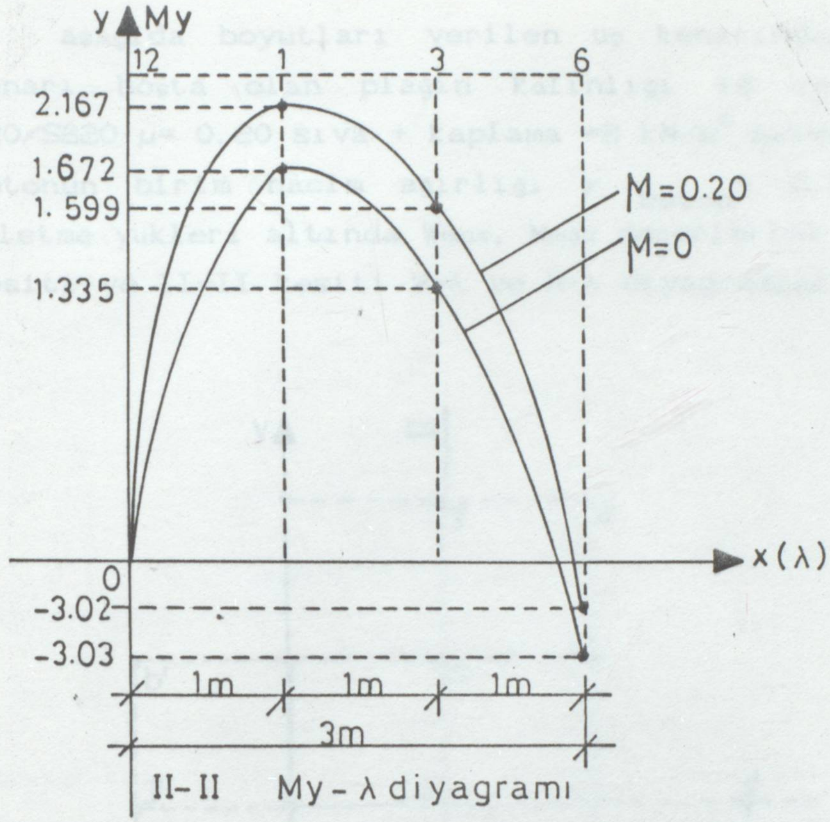
I-I kesiti Mx-λ diyagramı



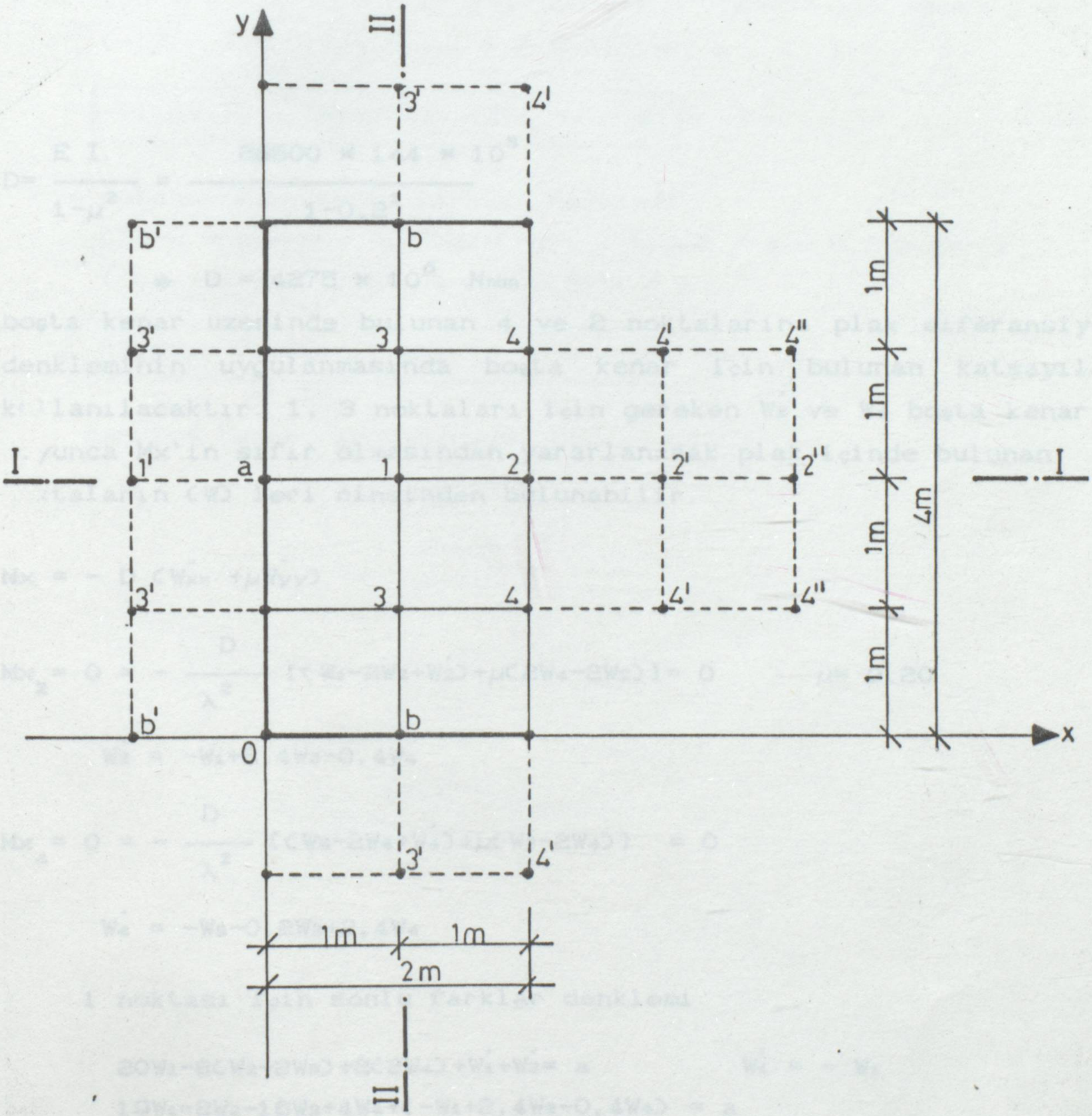
I-I kesiti My-λ diyagramı



II-II Mx-λ diyagramı


y My
12
1
3
6
2.167
1.672
1.599
1.335
M=0.20
M=0
x(λ)
0
-3.02
-3.03
1m
1m
1m
3m
II–II
My – λ diyagramı

aşağıda boyutları verilen uç kenarından basit mesnetli bir kenarı boşta olan plağın kalınlığı 12 cm (hf=12 cm) malzeme C20/S220 μ= 0.20 sıva + kaplama =2 kN/m^2 hareketli yuk= 5 kN/m^2 betonun birim hacim ağırlığı γ_{beton} = 2.5 kN/m^3 olduğuna göre işletme yukleri altında Wmax, Mmax değerlerini bulunuz ve I-I kesiti ve II-II kesiti W-λ ve M-λ diyagramlarını ciziniz.



C20 $B_c = 28500\ N/mm^2$

$g = 0,12 + 25 = 3\ kN/m^2$

$G = 3 + 2 = 5\ kN/m^2$

isletme yuku = $G + Q = P_z$

$P_z = 5 + 5 = 10\ kN/m^2$

$P_z = 10^{-2} N/mm^2$

$I = 120^3/12 = 144 * 10^3\ mm^4/mm$

$$D = \frac{E\,I}{1-\mu^2} = \frac{28500 * 144 * 10^3}{1-0,2^2}$$

$$\Rightarrow D = 4275 * 10^6\ Nmm$$

boşta kenar uzerinde bulunan 4 ve 2 noktalarına plak diferansiyel denkleminin uygulanmasında boşta kenar için bulunan katsayılar kullanılacaktır. 1, 3 noktaları için gereken W_2' ve W_4' boşta kenar boyunca Mx'in sıfır olmasından yararlanarak plak içinde bulunan noktaların (W) leri cinsinden bulunabilir.

$$M_x = -D\,(\ddot{W}_{xx} + \mu \ddot{W}_{yy})$$

$$M_{x_2} = 0 = -\frac{D}{\lambda^2}\left[(W_1 - 2W_2 + W_2') + \mu(2W_4 - 2W_2)\right] = 0 \qquad \mu = 0,20$$

$$W_2' = -W_1 + 2,4W_2 - 0,4W_4$$

$$M_{x_4} = 0 = -\frac{D}{\lambda^2}\left[(W_3 - 2W_4 + W_4') + \mu(W_2 - 2W_4)\right] = 0$$

$$W_4' = -W_3 - 0,2W_2 + 2,4W_4$$

1 noktası için sonlu farklar denklemi

$$20W_1 - 8(W_2 + 2W_3) + 2(2W_4) + W_1' + W_2' = a \qquad W_1' = -W_1$$

$$19W_1 - 8W_2 - 16W_3 + 4W_4 + (-W_1 + 2,4W_2 - 0,4W_4) = a$$

$$\boxed{18W_1-5,6W_2-16W_3+3,6W_4 = a} \qquad 1$$

3 noktası için sonlu farklar denklemi

$$20W_3-8(W_1+W_4)+2(W_2)+2W_3+W_3+W_4= a$$

$$20W_3-8W_1-8W_4+2W_2-W_3+(-W_3-0,2W_2+2,4W_4) = a$$

$$\boxed{-8W_1+1,8W_2+18W_3-5,6W_4 = a} \qquad 2$$

2 noktası için sonlu farklar denklemi

$$(16-8 * 0,2 -6 * 0,2^2)W_2+ 2(-8+4 * 0,2+4 * 0,2^2)W_4+$$
$$(-12 + 4 * 0,2)W_1+ 2(4 - 2 * 0,2)W_3= a$$

$$\boxed{-11,2W_1+14,16W_2+7,2W_3-14,08W_4 = a} \qquad 3$$

4 noktası için sonlu farklar denklemi

$$(16-8 * 0,2-6 * 0,2^2)W_4+(-8 + 4 * 0,2 + 4 * 0,2^2) W_2+$$
$$(-12 + 4 * 0,2)W_3+ (4-2 * 0,2)W_1 = a$$

$$\boxed{3,6W_1- 7,04W_2-11,2W_3+14,16W_4 = a} \qquad 4$$

denklem takımı çozuldugunde.

```
:CLEAR :KEY OFF
NT " * * * *  SONLU FARKLARDA DENKLEM COZUMU  * * * * *":PRINT
NT " * * * *     INS.MUH. SANLI SERIFOGLU   * * * * *":PRINT
ERROR GOTO 170
) N:M=N+1:DIM A(N,M),B(N,M)
I=1 TO N:FOR J=1 TO M :READ A(I,J):B(I,J)=A(I,J)
4+I*2:SU=J*9:IF J=M THEN SU=J*11:LOCATE SA,SU:PRINT "=";A(I,J);" a";:GOTO

ATE SA,SU:PRINT A(I,J);"W";J;
T J:PRINT :NEXT I
R I=1 TO N:FOR J=I+1 TO M:A(I,J)=A(I,J)/A(I,I):NEXT J
R J=1 TO N:IF J=I THEN 130
R K=I+1 TO M:A(J,K)=A(J,K)-A(J,I)*A(I,K):NEXT K
XT J,I :EB=A(1,M):ES=1:PRINT
R I=1 TO N:PRINT " W";I;"=";A(I,M);" a":IF A(I,M)>EB THEN EB=A(I,M):ES=I
XT I:PRINT:PRINT "W MAX =";"W";ES;"    =";EB;" a"
PUT "",A$:GOTO 180
INT "DENKLEMIN COZUMU YOK":INPUT "",A$:RESUME 10
D
M  BILINMEYEN SAYISI
TA 4
M DENKLEM KATSAYILARI
TA 18,-5.6,-16,3.6,1
TA -8,1.8,18,-5.6,1
TA -11.2,14.16,7.2,-14.08,1
TA 3.6,-7.04,-11.2,14.16,1
```

16a

18a

64a

67a

$$\Rightarrow a = \lambda^4 \frac{Pz}{D} = 10^{12}\frac{10^{-2}}{4275 * 10^6} = \frac{10^4}{4275} \text{ mm}$$

2 mm

35 mm

3 mm

31 mm

$W_{max} = W_2 = 3.785$ mm

$$M_{x(1)} = -\frac{D}{\lambda^2}[(W_2-2W_1)+\mu(2W_3-2W_1)]$$

$$= -D\,[(W_2-2W_1)+\mu(2W_3-2W_1)]$$

$$= 3.137 \text{ kNm}$$

$$M_{x(2)} = 0$$

$$M_{x(3)} = -\frac{D}{\lambda^2}[(W_4-2W_3)+\mu(-2W_3+W_1)]$$

$$= -D.10^{-6}[(W_4-2W_3)+\mu(W_1-2W_3)]$$

$$= 2.427 \text{ kNm}$$

$$M_{x(4)} = 0$$

$$M_{y(1)} = -\frac{D}{\lambda^2}[(2W_3-2W_1)+\mu(W_2-2W_1)]$$

$$= 5.460 \text{ kNm}$$

$$M_{y(2)} = -\frac{D}{\lambda^2}[(2W_4-2W_2)+\mu(W_2'-2W_2+W_1)] \Rightarrow \quad W_2' = 5.84 \text{ mm}$$

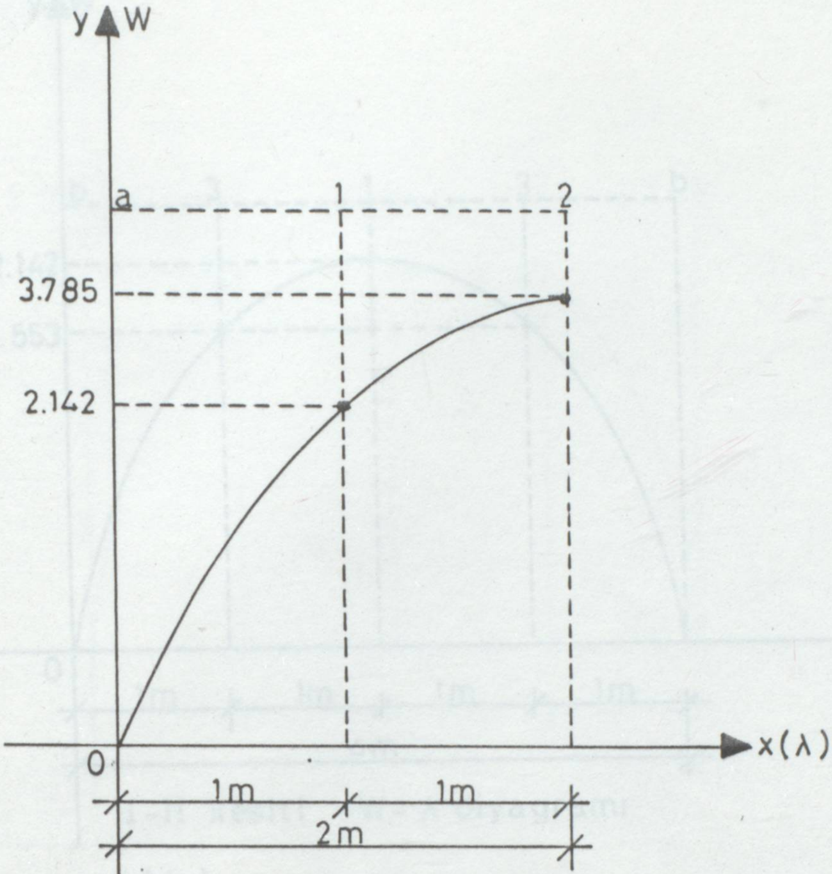
$$= 8.860 \text{ kNm}$$

$$M_{y(3)} = -\frac{D}{\lambda^2}[(W_1-2W_3)+\mu(W_4-2W_3)]$$

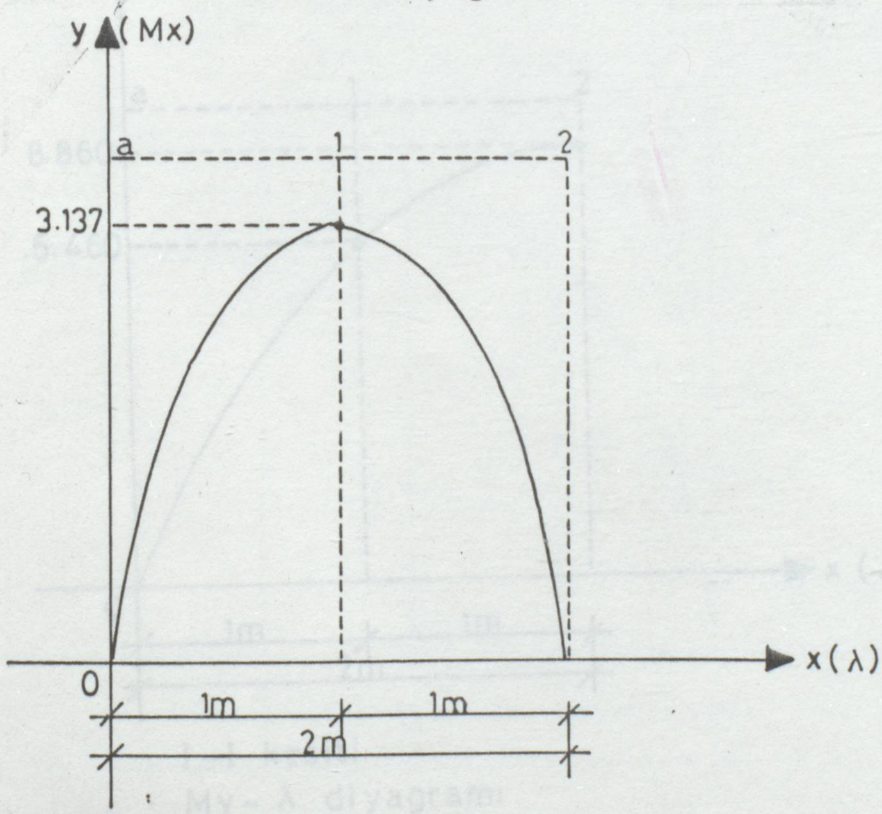
$$= 4.442 \text{ kNm}$$

$$M_{y(4)} = -\frac{D}{\lambda^2}[(-2W_4+W_2)+\mu(W_4'-2W_4+W_3)] \qquad W_4' = 4.24 \text{ mm}$$

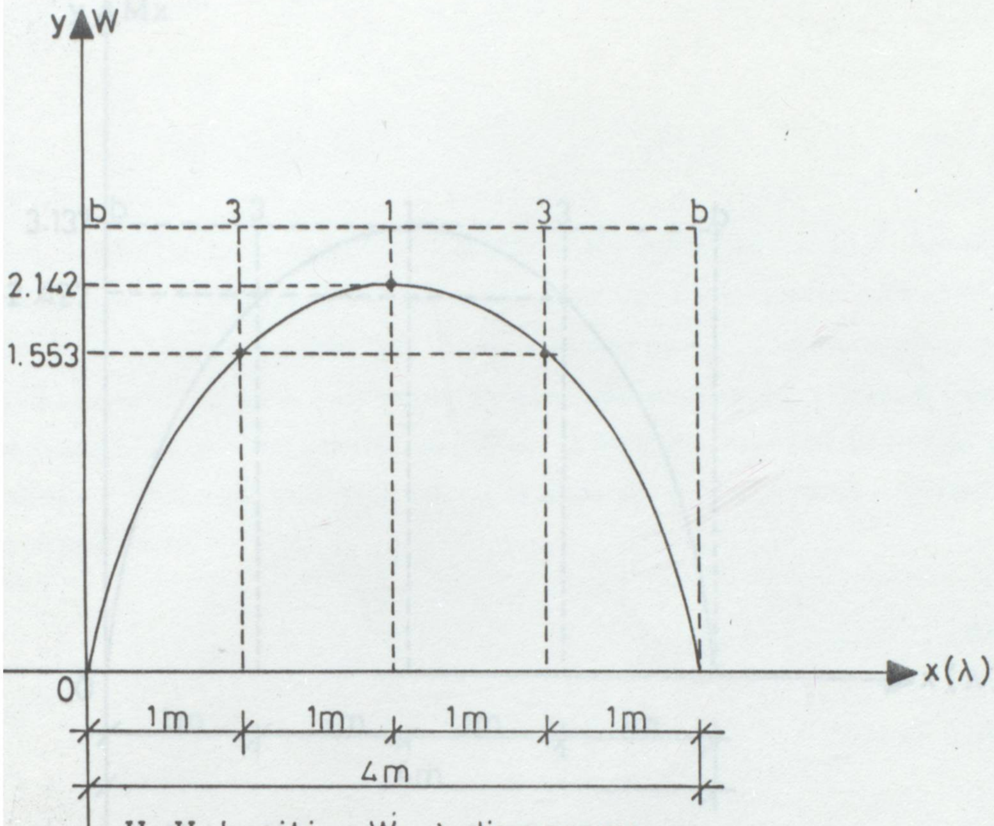
$$M_{y(4)} = 6.883 \text{ kNm}$$



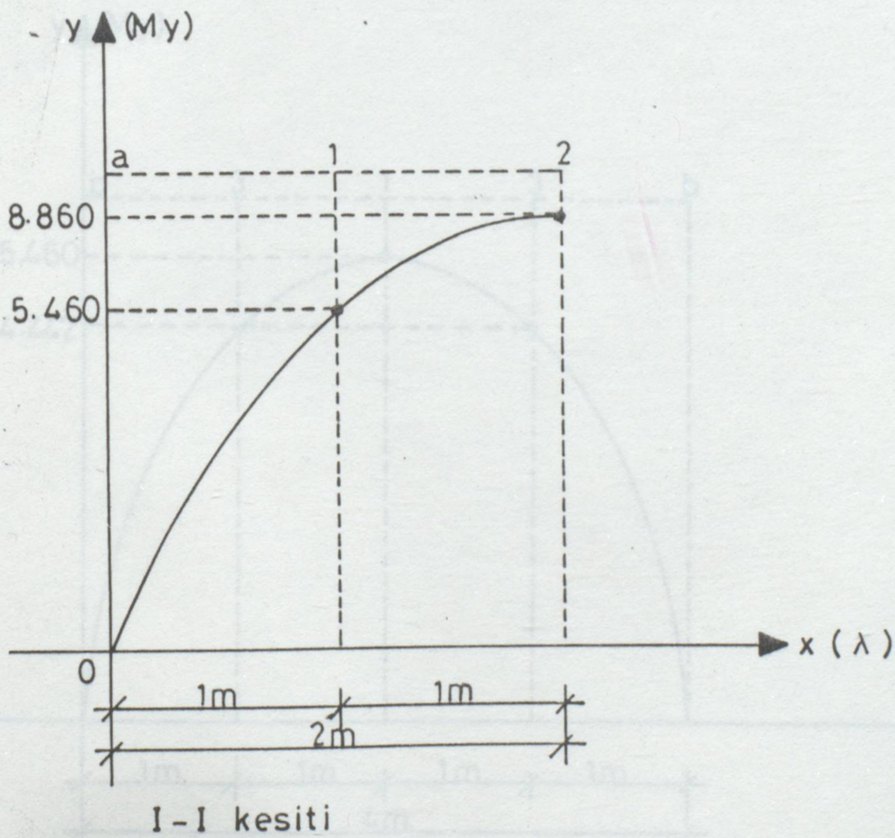
I-I kesiti W-λdiyagramı



I-I kesiti
Mx-λ diyagramı

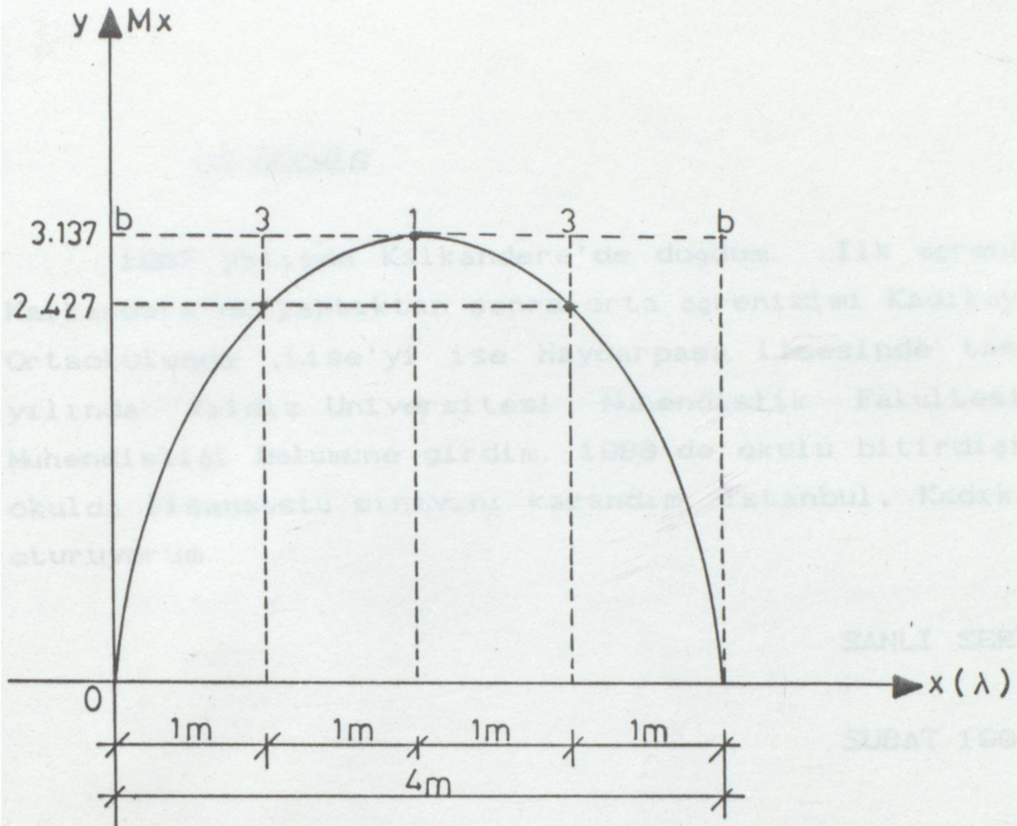


II-II kesiti W- λ diyagramı

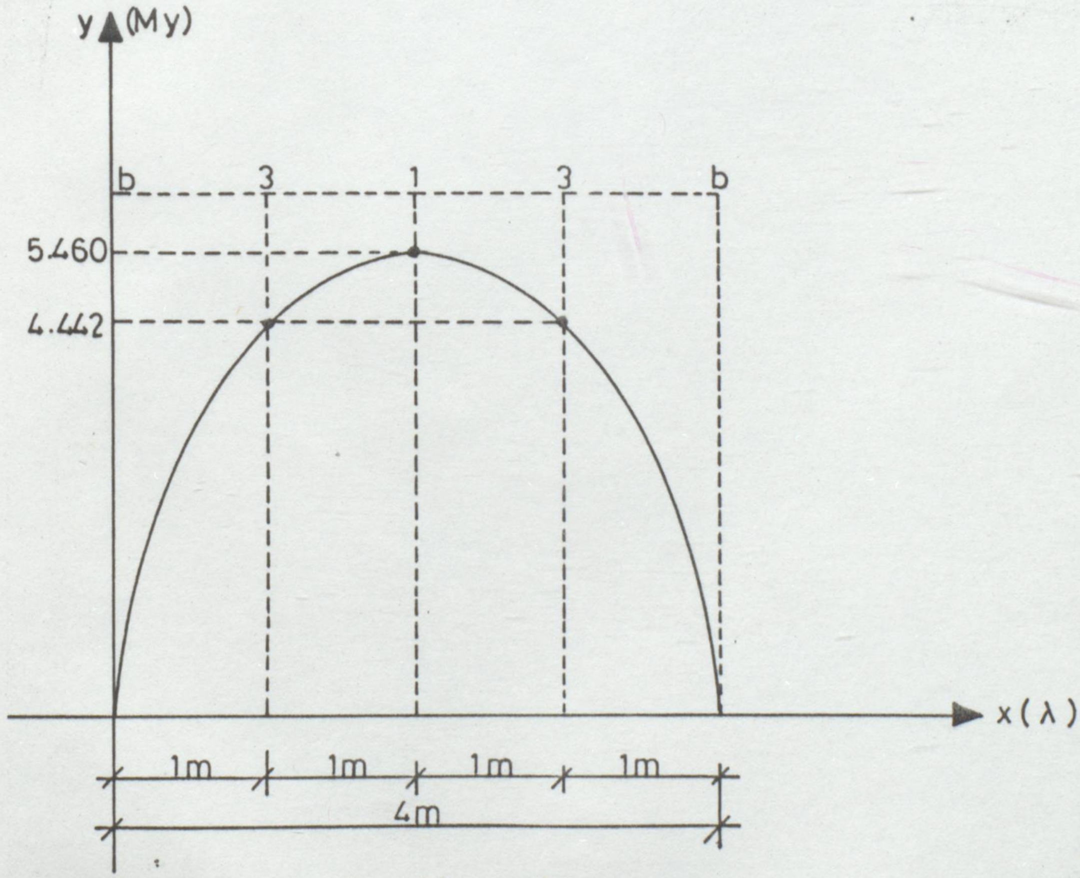


I-I kesiti

My – λ diyagramı



II-II kesiti Mx-λ diyagramı



II-II kesiti My-λ diyagramı

OZ GECMIS

1. 1967 yılında Kalkandere'de doğdum. Ilk öğrenimimi Kalkandere'de yaptıktan sonra orta öğrenimimi Kadıköy Kemal Ataturk Ortaokulunda ,Lise'yi ise Haydarpasa Lisesinde tamamladım. 1984 yılında Yıldız Universitesi Muhendislik Fakultesi Inşaat Muhendisliği Bölumune girdim. 1988'de okulu bitirdiğimde aynı okulda lisansustu sınavını kazandım. Istanbul, Kadıköy'de oturuyorum.

SANLI SERIFOGLU

SUBAT 1991

KAYNAKLAR

1. i.BERKTAY, "Plak teorisi ve uygulamaları" Y.U. Inşaat Fakultesi Istanbul 1988.

2. E.KOKSAL, "Kabuklar" Lisansustu ders notları,

3. Y.BERDAN, "Plak Teorisi" Lisansustu ders notları,

4. SZILARD.R, "Theory and Analysis of Plates" Prentise Hall INC. 1974