YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEPREM ETKİSİ ALTINDAKİ TEK SERBESTLİK DERECELİ YAPILARDA P-Δ ETKİLERİ

İnşaat Mühendisi Reşat Atalay OYGUÇ

FBE İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Yapı Programında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. İbrahim EKİZ (YTÜ)

Prof. İbrahim Ekiz
Doç. Dr. Turgut ÖZTÜRK
Y. Doç. Dr. Bülent AKBAŞ

İSTANBUL, 2003

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

a	Zaman artım metotlarında kullanılan bir sabit
A	İntegrasyon sabiti; Spektral ivme spektrumu ordinat değeri
A'	İntegrasyon katsayısı
$A(t)$	Spektral ivme
A_1, A_2	Keyfi sabitler
b	Zaman artım metotlarında kullanılan bir sabit
B	İntegrasyon sabiti;
B'	İntegrasyon katsayısı
B_1,B_2	Keyfi sabitler
c	Sönüm katsayısı
$\overline{c}$	Visko-elastik sönüm katsayısı
c_{cr}	Kritik sönüm katsayısı
C	İntegrasyon sabiti
C'	İntegrasyon katsayısı
D	İntegrasyon sabiti; Deformasyon spektrumu ordinatı
D'	İntegrasyon katsayısı
D_y	Akma deformasyon spektrumu ordinat değeri
e	Eksantrisite
E	Elastiklik modülü
E_D	Sönümle azaltılan enerji miktarı
E_f	Sürtünme ile azaltılan enerji miktarı
E_I	Sisteme giren enerji
E_K	Kinetik enerji
E_{K0}	Maksimum kinetik enerji
E_S	Yayın enerjisi
E_{S0}	Maksimum yay enerjisi
E_Y	Akma ile azaltılan enerji miktarı
f	Sisteme etkiyen kuvvetin frekansı
f_D	Sönüm kuvveti
f_I	Atalet kuvveti
f_n	Sönümsüz doğal frekans
f_S	Elastik ya da elastik ötesi direnç kuvveti
$\tilde{f}_s(u,\dot{u})$	Bir katsayı
$(f_s)_i$	f_s'in i anındaki değeri
f_{S0}	f_S'in maksimum değeri
f_0	f_S'in maksimum değeri
f_y	Akma dayanımı
$\bar{f}_y$	Normalize edilmiş akma dayanımı
F	Sürtünme kuvveti; Büyütme çarpanı
g	Yerçekimi ivmesi
G	Kesme modülü
H	Yanal dış kuvvet
H_0	P-Δ etkisini içermeyen yanal tepki kuvveti
H_p	P-Δ etkisini içeren yanal tepki kuvveti
H_{yb}	Çevrim eğrisinin alt akma sınır çizgisi
H_{yt}	Çevrim eğrisinin üst akma sınır çizgisi
H'	Yanal kuvvet artış miktarı

h	Kat yüksekliği; Tek katlı çeçervenin yüksekliği
i	Zaman artım sayısı
I	Atalet momenti
I_b	Kiriş atalet momenti
I_c	Kolon atalet momenti
k	Rijitlik
k^*	Genelleştirilmiş rijitlik
$(k_i)_{sec}$	i anında sekant rijitliği
$(k_i)_T$	i anında tanjant rijitliği
$\hat{k}_i$	Denklem için verilen bir katsayı
K_p	P-Δ etkisini içeren elastik rijitlik
L	Çerçevenin açıklığı
m	Kütle
m^*	Genelleştirilmiş kütle
M_b	Taban devrilme momenti
M_{bo}	Taban devrilme momentinin maksimum değeri
N	Sistemin serbestlik derecesi
p	Sisteme etkiyen dış yük
$P(\omega)$	p(t)'nin fourier dönüşümü
$p(t)^*$	Genelleştirilmiş dış yük
p_{eff}	Etkin deprem kuvveti
$(p_{eff})_0$	Etkin deprem kuvvetinin maksimum değeri
$\hat{p}_i$	Denklem için verilen bir katsayı
p_0	p(t) değerinin genliği
P_{cr}	Kritik burkulma yükü
R_a	İvme mukabele çarpanı
R_d	Deplasman mukabele çarpanı
R_v	Hız mukabele çarpanı
R_y	Akma azaltım çarpanı
t	Zaman değişkeni
t_0	u(t)'nin maksimum olduğu zaman değeri
T_a, T_b	Spektral bölgeleri tanımlayan periyotlar
T_c, T_d, T_e	Spektral bölgeleri tanımlayan periyotlar
T_D	Sönümlü doğal periyot
T_n	Sönümsüz doğal periyot
u	Deplasman; deformasyon
u^t	Toplam deplasman
$u(0)$	Başlangıç deplasman değeri
$\dot{u}(0)$	Başlangıç hız değeri
u_g	Yer hareketi
$\ddot{u}_g$	Yer ivmesi
u_{g0}	Maksimum yer hareketi
$\dot{u}_{g0}$	Maksimum yer hızı
$\ddot{u}_{g0}$	Maksimum yer ivmesi
$u_{g\theta}$	Yer dönmesi
u_i	i anındaki deplasman
$\dot{u}_i$	i anındaki hız
$\ddot{u}_i$	i anındaki ivme

u_m	Elastik olmayan sistemin maksimum deplasmanı
u_0	u(t)'nin maksimum değeri
u_p	Özel çözüm
$u_{st}(t)$	p(t) yükünden oluşan statik deformasyon
$(u_{st})_0$	p_0 yükünden oluşan statik deformasyon
V	Spektral hız spektrumu ordinatı
V_b	Taban kesme kuvveti
V_{b0}	Taban kesme kuvvetinin maksimum değeri
w	Ağırlık
x,y	Kartezyen koordinatlar
α_A, α_D, α_V	Spektral büyütme çarpanları
β	Newmark Metodu'nun parametresi
γ	Newmark Metodu'nun parametresi
$\delta u(x)$	Virtüel deplasman
Δ_j	j katındaki kat ötelenmesi
Δt	Zaman aralığı
ζ	Sönüm oranı
$\bar{\zeta}$	Normalize edilmiş sönüm oranı
μ	Süneklik çarpanı
σ	Standart sapma
τ	Çok küçük zaman değişkeni
φ	Faz açısı
ω	Zorlayıcı frekans (rad/s)
ω_D	Sönümlü doğal frekans (rad/s)
ω_n	Sönümsüz doğal frekans (rad/s)

KISALTMA LİSTESİ

BSD	Bir serbestlik derecesi
HCC	Hysteresis centre curve
TDY	Türk Deprem Yönetmeliği

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

ÖNSÖZ

Doğal afetler arasında, verdiği zarar yönünden en dikkat çekici olanı depremdir. Deprem, diğer afetler gibi insanlara doğrudan değil de, dolaylı olarak zarar vermektedir. Yapılan araştırmalarda, deprem sırasında insanların, en çok bulundukları yapıların göçmesi sonucu zarar gördükleri tespit edilmiştir. Bu nedenle deprem etkisi, geçmişten beri incelenmekte ve buna karşı özel mühendislik teorileri üretilmektedir. Ancak tüm bu teorilere rağmen, depremin ne zaman olacağı halen bilinmemektedir.

Yapı tarihi, insanlık tarihi ile özdeştir diyebiliriz. Eski çağlarda yapı davranışı bilinmediğinden, tasarımda en önemli rolü, yapımcının tecrübesi ve mühendislik önsezisi oynamıştır. Yapılan birçok yapı çökmüş, her çökme yapımcıya yeni bir tecrübe kazandırmıştır. İlerleyen zaman içinde, özellikle 19. yüzyılda endüstrinin doğması ile, yapılması gereken yapı sayısı hızla artmış ve mühendislik biliminin temelleri atılmaya başlamıştır.

Günümüzde, taşıyıcı sistemlerin statik çözümlemeleri bilgisayar programları yardımı ile gerçekleştirilebilse de, sonuçların değerlendirilmesi, karşılaştırmaların yapılması ve karşılaşılan sorunların giderilmesi için, mühendislik önsezisi ve iyi bir sistem bilgisine gereksinim vardır. İyi sistem bilgisi ise, yürürlükte olan yönetmeliklerin kavranması ile pekişmelidir.

Bu tezde, hem deprem mühendisliği konusundaki yeni bilgilerin sunulmasına ve hem de yurdumuzdaki depremlerle ilgili bilgi ve kayıtların incelenmesine çalışılmıştır. Bunun yanında SI birimlerinin kullanılması ve sembollerde milletlerarası gösterimler esas alınmıştır. Tezin hazırlanışı sırasında yurt içi ve yurt dışında yayımlanan pek çok kitap ve makalelerden yararlanılmıştır.

Bu tezin hazırlanmasında, bana her türlü konuda yardımcı olan ve hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan, kıymetli hocalarım Sn. Prof. İbrahim EKİZ'e ve Sn. Yrd. Doç. Dr. Bülent AKBAŞ'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

ÖZET

Yapı dinamiğinin en önemli konularından biri deprem etkisine maruz kalmış yapıların mukabelelerinin incelenmesidir. Yapılar, kütlelerinin toplu olarak bir noktaya etkitilmesi ve taşıyıcılarının kütlesiz kabul edilmesiyle idealize edilebilirler. Bu tezde, deprem etkisine maruz doğrusal elastik ve doğrusal elastik olmayan sistemler incelenmiştir. BSD sistemlerin, harmonik tetikleme altındaki davranışları da, yine tez kapsamına alınmıştır. Bir yapıya etkiyen herhangi bir kuvvete karşı, yapının mukabelesinin incelenebilmesi için, yapının harmonik tetikleme altındaki davranışının çok iyi bilinmesi gerekir. BSD sistem, doğrusal değil ve sisteme etkiyen kuvvet zamanla değişiyorsa, hareket denklemlerinin analitik çözümü mümkün değildir. Bu tezde, BSD sistemler için, çok kullanılan dinamik analiz yöntemlerinden bazılarına yer verilmiştir.

Narin ve hafif yapılar yapma eğilimi, daha etkin ve dikkate alınması gereken P-delta etkilerine yol açmıştır. Buda; yapı mühendislerini basit ama tutarlı, P-delta analizi metotları geliştirmeye zorlamıştır. Bu çalışmada, metotlar yeniden gözden geçirilerek, etkinliklerine ve tutarlılıklarına göre karşılaştırılmışlardır. Metotlar, bulunuş sıralarına göre; büyütme çarpanı metodu, direkt metot, iteratif metot, negatif özellikli eleman metotları ve II. Mertebe bilgisayar program metodu şeklinde sıralanabilirler. Bunlara ek olarak, iteratif metota çok benzeyen, fakat gerçek yerçekim yüklerinin deforme olmuş yapı şekline etkitilmesi ile analiz yapan, yeni bir metot da incelenmiştir. Bu metodun sonuçları, iteratif metotla aynı olmakla beraber, analiz için gereken süre, üçte bir oranında azalmaktadır.

Tezin sonuna eklenen uygulamada ise; 1999 Kocaeli depremi ivme geçmişi kullanılarak, çeşitli betonarme çerveler ve 10 katlı çelik bir çerçeve, Sap 2000 programı kullanılarak, zaman tanım alanı analizine tâbi tutulmuş ve bu çerçevelerde P-delta etkileri araştırılmıştır.

Anahtar kelimeler: Doğrusal sistem, doğrusal olmayan sistem, tek serbestlik dereceli sistemler, P-delta etkileri, P-delta analizi metotları.

ABSTRACT

One of the most important applications of the theory of structural dynamics is in analyzing the response of structures to ground shaking caused by an earthquake. The structures can be idealized as a system with a lumped mass and a massles supporting structure. Linearly elastic structures as well as inelastic structures subjected to earthquake-induced ground motion are considered. The response of SDF systems to harmonic excitation is worked, because understanding the response of structures to harmonic excitation provides insight into how the system will respond to other types of forces. Analytical solution of the equation of motion for a SDF system is usually not possible if the excitation varies with time or if the system is nonlinear. A brief presentation of a very few methods that are especially useful in dynamic response analysis of SDF systems is included here.

The trend towards more slender and lighter building structures has resulted in potentially more significant P-delta effects; this has led to the demand for simple and accurate methods of P-delta analysis. Methods are reviewed and compared in terms of their efficiency and accuracy. Considered roughly in their order of sophistication, the methods reviewed include the amplification factor method, the direct method, the iterative method, the negative property member methods, and the second-order computer program method. In additon to these, a new method similar to the iterative method, but based on analyses using the actual gravity loading applied to successive deflected shapes, is presented. The results are identical to those given by the iterative method, while the analysis takes less than one-third of the time.

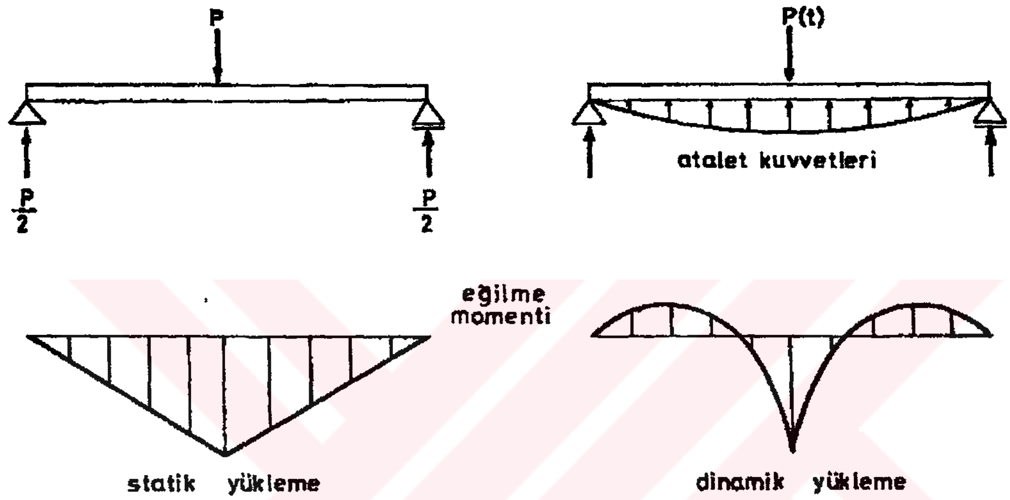
Sap 2000 computer code has used solve the P-delta effects on a 10 story steel frame and some selected concrete frames, that are subjected to 1999 Kocaeli earthquake accelaration time history.

Keywords: Linear systems, nonlinear systems, single degree of freedom systems, P-delta effects, P-delta analysis methods.

1. GİRİŞ

1.1 Yapıların Yer Hareketi Etkisindeki Titreşimleri

Titreşim problemlerinin konusu, zamana bağlı olarak değişen yükler altında taşıyıcı sistemdeki gerilmelerin ve yerdeğiştirmelerin incelenmesini içerir. Bu maksatla kullanılan yöntemler, statikte kullanılanların genelleştirilmişi olarak görülebilir. Dinamik çözüm, statik çözüm gibi tek bir çözümden ibaret olmayıp, zamana bağlı bir çözüm ailesinden meydana gelir. Bu ise, dinamik çözümün, statiğe göre olan zorluğunu ortaya koyar.



Şekil 1.1 Statik ve dinamik davranışta kuvvetler (Celep ve Kumbasar, 1996).

Bu iki çözüm arasındaki bir diğer fark da, dinamik yerdeğiştirme sırasında atalet kuvvetlerinin meydana gelmesidir. Örneğin, Şekil 1.1'de gösterilen basit bir kirişe etkiyen statik yükten meydana gelen eğilme momenti ve yerdeğiştirmeler, denge denklemleri kullanılarak kolayca bulunabilir; eğer kirişe etkiyen yük dinamik özelliğe sahipse, zamana bağlı olarak meydana gelecek yerdeğiştirmelerin ivmeleri, d'Alembert ilkesine göre atalet kuvvetleri ortaya çıkarırlar.

Böyle bir durumda kirişin iki tür yük etkisi altında olduğu düşünülebilir: Harekete sebep olan dış yük ve hareketin ivmelenmesine karşı duran atalet kuvvetleri. Kirişin kesitlerinde ise, bu iki etkiye karşı duracak kesit tesirleri meydana gelir. Bu nedenlerden dolayı iç kuvvetlerin hesap edilebilmesi için daha önce atalet kuvvetlerinin belirlenmiş olması gerekir. Ancak atalet kuvvetleri ise, yerdeğiştirmelere, dolayısıyla iç kuvvetlere bağlıdır. Bu birbirine bağımlılık şeklinde ortaya çıkan kapalı devreyi çözüp hesap yapabilmek, sistemin hareketi için yazılacak diferansiyel denklemin uygun sınır ve başlangıç koşulları altında çözülmesi ile mümkün olur.

Bir taşıyıcı sistemin dinamik etkiler altındaki davranışını gösteren diferansiyel denklemin çözümünün belirlenmesi için hareketin başlangıç koşullarının bilinmesine ihtiyaç vardır. Sistem, sükunetten dış kuvvet etkisiyle veya mesnet yerdeğiştirmesi ile harekete başlayabilir. Ayrıca sistemin hareketi, başlangıçta belirli bir yerdeğiştirme ve hız vererek sağlanabilir. Dinamik davranışın tamamen belirli olabilmesi için, başlangıç koşulları yanında sistemin mesnetlenme şeklinin, yani problemin sınır koşullarının da bilinmesi gerekir.

Statik yüklerle birlikte dinamik yüklerde taşıyan sistemlerin bir çoğunda, dinamik yük etkisi statik yük etkilerinden oldukça küçüktür. Bu gibi durumlarda dinamik etkinin ayrıntılı bir hesabı yerine eşdeğer bir statik yük tanımlayarak, çarpma katsayısı veya benzeri bir çarpan uygulayarak, bazen de güvenlik katsayısını değiştirerek işlemlerin yürütülmesi yoluna gidilir. Ancak; ağır makinelerin dinamik etkisindeki yapılar, kule türünde yüksek binalar ve büyük açıklıklı köprüler söz konusu olduğunda, yapının davranışının incelenmesi gerekir. Bu dinamik davranışa yol açan etkiler, yukarıda sözü edilen titreşen ağır makineler olabileceği gibi, çarpma, patlama, rüzgar ve deprem etkileri de olabilir. Bir yükün büyüklüğü, doğrultusu ve etkime yeri zamana bağlı olarak da ortaya çıkabilir. Bunun sonucu olarak da taşıyıcı sistemde meydana gelen iç etkiler, şekil değiştirme ve yerdeğiştirmeler zamanın bir fonksiyonu şeklinde belirir (Celep ve Kumbasar, 1996).

Statik çözümlemede olduğu gibi, dinamik çözümlemede de en önemli adım ele alınan problemin matematik modelinin kurulmasıdır. Bu işlem sırasında bazı basitleştirici kabullerin yapılması gerekir. Bu kabullerin seçiminde taşıyıcı sistemin durumu yanında, etkiyen yüklerin türünün de göz önüne alınması önemlidir. Yapılacak çok fazla basitleştirici kabullerle elde edilen modelin, sistemin davranışını gerçekçi biçimde yansıtamayacağı açıktır. Ancak karmaşık modellerin kullanılması da, her zaman gerçekçi bir çözüm değildir. Böyle bir durumda hesap hacmi artacağı gibi, bazı ikinci etkiler öne çıkarak sonuçların yorumlanmasını zorlaştırabilir. Uygun kabuller yapabilmek için ise, mühendislik deneyimi gerekmektedir. Bunun yanında, farklı türden yaklaşık modellerin irdelenmesi sonucu yapılacak kabullere karar vermek de, geçerli bir yol olabilir.

Matematik model kurulduktan sonraki ilk adım, dinamik çözümleme için hareket denklemlerinin yazılması ve modelin davranışının belirlenmesidir. **Serbest titreşim** ve **Zorlanmış titreşim** taşıyıcı sistemin önemli olan iki dinamik davranışıdır. Bunlardan ilki öngörülen başlangıç koşullarının etkisiyle meydana gelirken, ikincisi sisteme etkiyen dış yüklerden veya mesnet hareketlerinden ortaya çıkar (Celep ve Kumbasar, 1996).

1.2 Sistemin Serbestlik Derecesi

Taşıyıcı sistemde kütle sürekli dağılı bulunduğu için, atalet kuvvetleri ancak her noktanın ivmesinin, dolayısıyla yerdeğiştirmesinin, bilinmesiyle belirlenebilir. Sistemin her noktasının yerdeğiştirmesinin hesabı ise çok büyük hesap hacmi gerektirir. Sistemin tüm yerdeğiştirmesi, bazı seçilmiş noktaların yerdeğiştirmeleri cinsinden ifade edilerek, hesap hacmi kabul edilebilir bir hacme indirilebilir. Bu tür çözümlerin birinde, sistemin kütlesi söz konusu seçilen noktalarda toplanmış kabul edildiğinden, uygulanan hesap yöntemine **Toplu Kütleli Yaklaşım** denir. Uygulanan diğer bir yaklaşım yönteminde ise, sistemin yerdeğiştirmesi uygun fonksiyonların süperpozisyonu olarak kabul edilebilir. Bu fonksiyonlar, koordinat fonksiyonları olarak isimlendirildiği için, ilgili hesap yöntemine **Genelleştirilmiş Koordinat Yaklaşımı** denir (Celep ve Kumbasar, 1996).

Yapılan kabuller gereği, taşıyıcı sistemin tüm yerdeğiştirmesi, seçilen bazı noktaların yerdeğiştirmeleriyle veya belirli fonksiyonların toplamı şeklinde ortaya çıkar. Bu noktaların veya koordinat fonksiyonların sayısı sistemin **Serbestlik Derecesi** olarak adlandırılır. Böylece sistemin tüm yerdeğiştirme durumu, serbestlik derecesi kadar noktanın yerdeğiştirmesinin veya koordinat fonksiyonun bilinmesine bağlanmış olur. Yerdeğiştirme için çıkarılan bu sonuç, hız ve ivmeleri de kapsayacak şekilde genişletilebilir. Sistemin serbestlik derecesi artırılırken, davranış daha hassas bir şekilde elde edilmesine karşılık, çözüm için harcanan zaman artar. Bu nedenle, dinamik davranışının belirlenmesinde en önemli konu, yeterli yaklaşıklıkta sonuç verecek serbestlik derecesinin seçilmesidir.

Her ne kadar, yapılar sürekli sistemler ise de, günümüzde yaygın olan bilgisayar çözümleri için sistem ayrıklaştırılır ve çok serbestlik dereceli sistem haline getirilir. Çok serbestlik dereceli sistemlerin incelenmesinde de tek serbestlik dereceli sistemlerin ana kavramları kullanılır. Bunun yanında çok serbestlik dereceli sistemlerin çoğu, basit yaklaşımla, tek serbestlik dereceli olarak kabul edilerek uygun yaklaşıklıkta sonuçlar elde edilebilir(Celep ve Kumbasar, 1996).

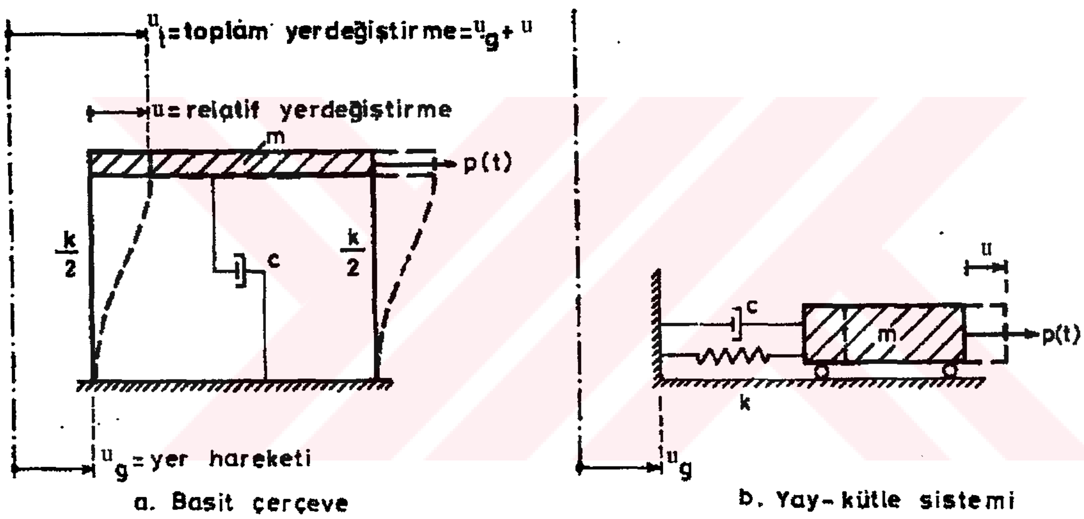
Bir yapı boyunca etkiyen iç kuvvetlerin ve eğilme momentlerinin belirlenmesinde genellikle I. Mertebe analizler kullanılır. Bu tip analizler ise, doğrusal olmayan davranışın denge denklemleri üzerindeki etkilerini ve eksenel kuvvetten dolayı eleman rijitliklerindeki artışı ihmal ederler. Son yıllarda yapılan çalışmalar da, I. Mertebe analizlere tâbi tutulmuş çerçevelerin rijitlik ve mukavemetlerinin, gerçek değerlerinden çok farklı oldukları bulunmuştur. Eğer eksenel kuvvetler çok belirginse, yapı boyunca oluşacak iç kuvvetlerin ve eğilme momentlerinin belirlenmesinde daha gerçekçi yaklaşım, yapının II. Mertebe analizlere tâbi tutulmasıdır. II. Mertebe analizlerin temelinde ise, denge denklemlerinin deforme olmuş yapı şekli üzerinde çıkartılması fikri vardır. Bir başka deyişle, bu tip analizlerde yapının doğrusal olmayan deplasmanları boyunca etkiyen ve düşey yüklerden dolayı oluşan ikincil momentler dikkate alınır. Bu ikincil momentler ve kuvvetler ise P–Δ etkileri olarak adlandırılır (MacRae, 1994).

2. TEK SERBESTLİK DERECELİ SİSTEMLER

Bir sistemin hareket halinde bulunduğu konum, tek bir parametrenin verilmesi ile belirlenebiliyorsa, bu tür sistem **tek serbestlik dereceli** olarak isimlendirilir. Sistemin dinamik davranışının belirlenebilmesi için, sistemin hareket denkleminin yazılmasına ihtiyaç vardır. Hareket denklemi ise, sisteme etkiyen kuvvetlere, atalet kuvvetinin de eklenmesiyle, kuvvet dengesi olarak da görülebilir (Celep ve Kumbasar, 1996).

2.1 Toplu Kütleli Sistem

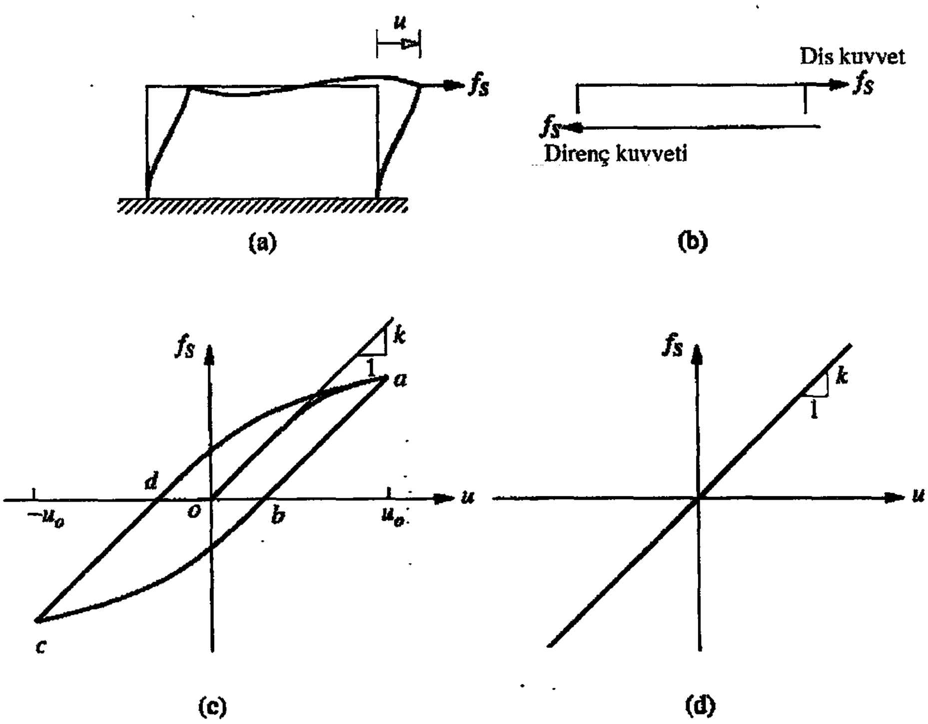
Genel halde tek serbestlik dereceli bir sistem, Şekil 2.1'de verildiği gibi, tek katlı bir çerçeve veya bir yay - kütle sistemi olarak gösterilebilir. Her iki durumda da, **m** rijit kütlesi, **k** elastik yayına ve **c** sönümüne sadece bir yönde öteleme yapacak şekilde bağlanmıştır.



Şekil 2.1 Toplu kütleli tek serbestlik dereceli sistem (Celep ve Kumbasar, 1996).

2.1.1 Dış Kuvvet Altında Basit Çerçeve Sistemlerde Kuvvet – Yerdeğiştirme İlişkisi

Dinamik tetikleme etkisinde olmayan, sadece f_S statik kuvveti tarafından **u** yerdeğiştirmesine zorlanan tek serbestlik dereceli bir sistem göz önüne alalım (Şekil 2.2.a). **u** yerdeğiştirmesine karşı koyacak iç kuvvet, f_S dış kuvvetine eşit ve ters yönde olacaktır (Şekil 2.2.b). Genelde f_S kuvveti ile **u** rölatif yerdeğiştirmesi arasındaki bağıntının sistemdeki deformasyonlarla ilişkilendirilmesi istenmektedir. Bu kuvvet – yerdeğiştirme bağıntısı, küçük deformasyonlarda doğrusal, büyük deformasyonlarda ise doğrusal olmayan (Şekil 2.2.c), bir davranış gösterecektir (Şekil 2.2.c ve d) (Chopra, 2001).



Şekil 2.2 Sadece statik kuvvet etkisi altındaki tek serbestlik dereceli basit çerçeve sistemin kuvvet – yerdeğiştirme ilişkisi (Chopra, 2001).

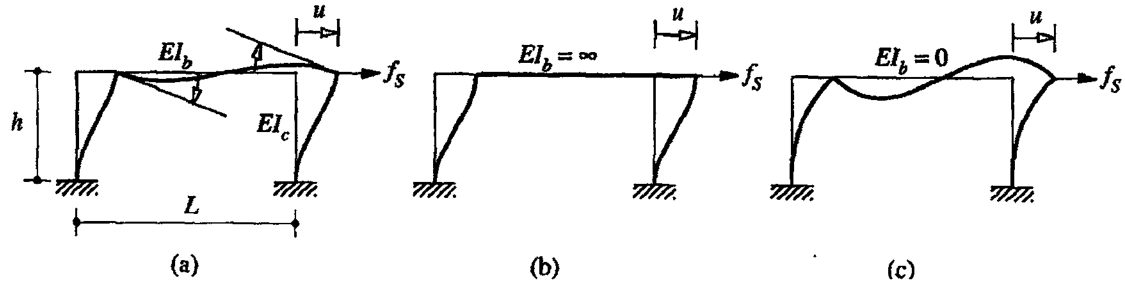
2.1.1.1 Doğrusal Elastik Basit Çerçeve Sistemler

Doğrusal bir sistem için, $\mathbf{f_S}$ yanal kuvveti ile **u** nihai deplasmanı arasındaki bağıntı, (2.1) ifadesinden de görüleceği üzere, doğrusal olacaktır.

$$f_S = ku \tag{2.1}$$

Burada **k** sistemin yanal rijitliği olup; (2.1) denkleminin de incelenmesinden anlaşılacağı gibi, birimi "kuvvet/uzunluk" tur. Yine bu ifadeden, sistemlerin küçük deformasyonlarında doğrusal olan $\mathbf{f_S}$ – **u** ilişkisinin, sistemin büyük deformasyonları içinde geçerli olacağını söylemek mümkündür. Bu doğrusal ilişki bize, $\mathbf{f_S}$ parametresinin **u** değerinin tek değişkenli bir fonksiyonu olduğunu belirtir. Böyle bir sistem **elastik sistem** olarak isimlendirilmekte ancak, hem elastiklik ve hem de doğrusallık özelliklerini belirtmek için **doğrusal elastik sistem terimi** kullanılmaktadır (Chopra, 2001).

Şekil 2.3.a' da gösterilen ankastre çerçevede; **L** çerçeve açıklığını, **h** çerçeve yüksekliğini, **E** elastiklik modülünü, $\mathbf{I_b}$ kiriş atalet momentini ve $\mathbf{I_c}$ kolon atalet momentini belirtmektedir. Çerçevenin **yanal rijitliği,** kirişin rijitliğine bağlı olarak değişir. Kirişin eğilme rijitliği ∞ ise, yani kiriş rijitse ($EI_b = \infty$), **k** çerçevenin yanal rijitliği (2.2) ifadesiyle; kirişin eğilme rijitliği 0 ise, yani kiriş rijit değilse ($EI_b = 0$), **k** çerçevenin yanal rijitliği (2.3) ifadesiyle bulunur.



Şekil 2.3 Doğrusal elastik çerçeve (Chopra, 2001).

$$k = \sum_{kolonlar} \frac{12EI_c}{h^3} = 24\frac{EI_c}{h^3} \tag{2.2}$$

$$k = \sum_{kolonlar} \frac{3EI_c}{h^3} = 6\frac{EI_c}{h^3} \tag{2.3}$$

Yukarıdaki bağıntıların incelenmesinden de görüleceği üzere; çerçevenin yanal rijitliği, kiriş genişliğinden ve kiriş açıklığından bağımsızdır. Çerçevenin yanal rijitlik matrisi; **yanal deplasmana** ve kiriş ile kolon birleşim yerlerindeki iki düğüm noktasındaki **dönmelere** bağlı olarak üç serbestlik derecesi cinsinden ifade edilir.

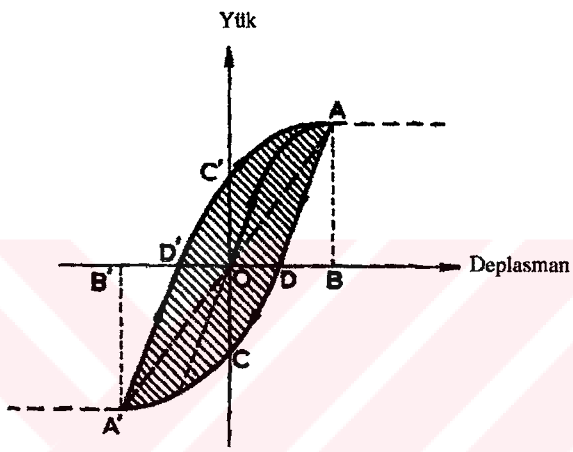
2.1.1.2 Elastik Olmayan Basit Çerçeve Sistemler

Şekil 2.4'de; tekrarlı yükler altında deneye tâbi tutulan çelik bir yapının, kuvvet – deplasman ilişkisi gösterilmiştir. Şekilden de görüleceği gibi, büyük deplasman değerlerinde ilk yükleme eğrisi, doğrusal olmayan bir davranış içindedir. Aynı zamanda, boşalma ve geri yükleme eğrileri de ilk yükleme eğrisinden farklı değerlere gelmektedirler. İşte bu davranıştaki sistemler **elastik olmayan sistemler** olarak adlandırılırlar (Chopra, 2001).

Elastik olmayan sistemlerde $\mathbf{f_S}$ yanal kuvveti, **u** deformasyonun tek değişkenli bir fonksiyonu olmayıp; deformasyonun yanında deformasyon hızına da bağlı, çift değişkenli bir fonksiyondur.

$$f_S = f_S(u, \dot{u}) \tag{2.4}$$

Şekil 2.2.a'da gösterildiği gibi, tek açıklıklı basit bir çerçevenin elastik olmayan bölgedeki kuvvet – deformasyon ilişkisini belirlemek için iki farklı yöntem izlenir. Birinci yaklaşım, doğrusal olmayan statik analiz metotlarını kullanmaktır. Örneğin, basınç – gerilim dağılımı belirli bir çerçevenin analizinde, çerçevenin Şekil 2.2.c'de gösterilen dağılımı izlediği görülmüştür. Çerçeve başlangıç noktasından akma noktasına kadar gelmiş ve bu noktadan ilk yükleme eğrisine (0 – a) geri dönebilmek için plastik mafsallar oluşturmuştur. Boşalma (a – c) ve geri yükleme (c – a) eğrileri de benzer şekilde hesaplanabilir veya varolan statik hipotezlerin, ilk yükleme eğrisine tatbiki ile belirlenebilir. Diğer yaklaşım ise, daha önce yapılmış deneylerden elde edilmiş olan elastik olmayan kuvvet – deformasyon ilişkisinin mevcut çerçeveye uygulanmasıdır. Gerçi, elastik olmayan sistemin dinamik mukabelesinin bulunması daha gerçekçi bir yaklaşımdır; çünkü yapılar şiddetli yer sarsıntıları altında çatlayacakları, devrilecekleri ve hatta ağır hasar görecekleri düşünülerek tasarlanırlar.



Şekil 2.4 Elastik olmayan bir sistemin tekrarlı yükler altında yük – deplasman ilişkisi (Penelis, 1997).

2.1.2 Sönüm Kuvveti

Serbest titreşimin genliğini sürekli olarak azaltan olay, **sönüm** olarak adlandırılır. Sönüm olayında, titreşen sistemin enerjisi çeşitli mekanizmalar tarafından sürekli olarak harcanmakta, hatta bazen, aynı anda birden fazla mekanizma beraber etkileşim içine girmektedir. Laboratuvar modellerinde enerji azalmasının büyük bölümü, tekrarlanan elastik gerilimler altındaki maddeden ortaya yayılan ısı etkisinden ve katı cismin deforme olması sırasında ortaya çıkan içsel sürtünme kuvvetinden meydana gelmektedir. Gerçek yapılarda ise bu mekanizmalara ek olarak bir çok enerji azaltıcı etkilerin ortaya çıkacağı aşikardır. Çelik bağlantılardaki sürtünmeler, betondaki kılcal çatlaklar, yapı ile yapısal olmayan (bölme duvarlar gibi) elemanların arasındaki sürtünmeler, titreşen binalardaki ek mekanizmalara birer örnektir. Gerçek bir yapıda bu enerji azaltıcı mekanizmaları tanımlamak ya da bunların matematiksel modellerini çıkarabilmek mümkün olmamaktadır.

Yapının ve zeminin özelliğinden dolayı deprem hareketi altındaki yapılarda değişik türden sönümler ortaya çıkar. Bu sönümler ve parametreleri malzeme türüne bağlı olduğu gibi, titreşimin genliğine de bağlıdır. Yapının rijitliği, geometrik boyutlarına ve elastisite modülüne bağlı olarak belirlenebilmesine karşılık, sönüm ile ilgili parametrelerin belirlenmesi için dinamik deneylerin yapılmasına ihtiyaç vardır. Deneyler serbest titreşim veya zorlanmış titreşim türünden olabilir (Celep ve Kumbasar, 1996).

a) Dış Viskoz Sönüm : Yapının içinde bulunduğu su veya hava ortamının meydana getirdiği sönümdür. Diğer tür sönümlere göre ihmal edilebilecek düzeydedir.

b) İç Viskoz Sönüm : Yapı malzemesinin iç sönümü olup, hızla orantılıdır. Bu durum yüksek frekanslarda büyük sönüm değerleri meydana gelmesine yol açar. Genellikle, taşıyıcı sistemin davranışının modellenmesinde bu tür sönüm, sönüm kutusu kabulü ile göz önüne alınır. Bu sönümün etkili olması, malzemedeki gerilmelerin meydana getirdiği plastik şekil değiştirmelerin seviyesine bağlıdır. Plastik şekil değiştirmelerin büyük olması ve taşıyıcı olan ve olmayan elemanlarda meydana gelen çatlakların artması sönümü artırır. Bu nedenle küçük yerdeğiştirmeler altında deneysel olarak ölçülen sönüm küçük kalırken, deprem etkisi altında meydana gelen elastik ötesi şekil değiştirmeler ve çatlamalarla sönüm büyür.

c) Coulomb Rijit Cisim Sönümü : Taşıyıcı sistemin mesnetlerinde ve birleşim yerlerinde ortaya çıkar. Hız ve yerdeğiştirmelerden bağımsız olarak sabit kabul edilebilir. Yerdeğiştirmelerin küçük olması durumunda iç sönümle, büyük olması durumunda da çevrimsel sönümle birleştirilerek göz önüne alınır. Betonarme taşıyıcı sistemin dolgu duvarlarında meydana gelen çatlaklardaki sürtünme ile enerji kaybı, bu tür sönüme örnektir. Bu sürtünmenin yapıların deprem etkisinin karşılanmasında önemli katkısı vardır.

d) Çevrimsel Sönüm : Malzemenin doğrusal elastik olmayan davranışında ve yükün yön değiştiren türden etkimesi durumunda meydana gelir. Bu tür sönüm, hızdan bağımsız, yerdeğiştirmeye bağımlı olarak meydana gelir. Ancak, böyle bir sönümün analitik ifadelere katılması yerine, daha kolay olan eşdeğer viskoz sönümün kullanılması tercih edilir.

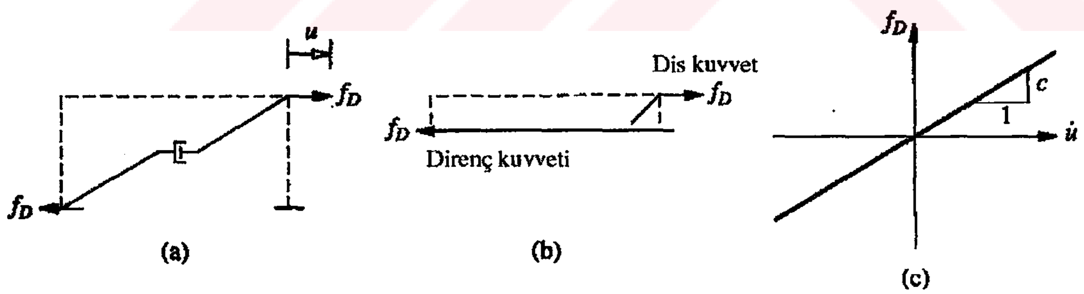
e) Enerji Yayılma Sönümü : Enerji, ana kayadan gelen hareketle zemin tabakalarından geçerek yapıyı titreştirir. Bu titreşim zemin serbest yüzeyinden yansır ve yapı içinde yukarı doğru ilerler, en üst kattan yansıyarak geri döner ve yarı sonsuz ortam olan zemin içinde geri yayılır. Bu suretle enerjinin bir kısmı tekrar geri dönmemek üzere kaybolur. Enerjinin çok büyük bir ortamda yayılmasıyla ortaya çıkan bu sönüm, ortamın elastik sabitlerine, kütlesel yoğunluğuna ve yapının diğer özelliklerine bağlıdır. Yapı rijitliği arttıkça, mesnet ortamı yumuşadıkça ve zeminde ana kaya üzerindeki dolgu büyüdükçe, mesnet ortamında enerji yayılması nedeniyle sönüm artar. Viskoz sönümün tersine, yüksek modlardaki enerji yayılma sönümünün, düşük modlara göre daha az olduğu belirlenmiştir.

Yukarıda açıklanan sönüm türlerinden matematiksel çözümlemede en kolay göz önüne alınılabileni viskoz sönümdür. Bu nedenle, diğer tüm sönümlerin de eşdeğer viskoz sönüme çevrilerek hesaba katılması tercih edilir. Yüksek modlarda sönüm, frekansla orantılı bir şekilde artar. Ayrıca, sönümün genlikle de orantılı büyüdüğü belirlenmiştir. Yapılan deneylerden tipik bir yapıda, düşük genliklerde sönüm % 1 ~ 2 olarak elde edilmiştir. Kuvvetli yer hareketinde ise sönümün % 5 ~ 10 değerine ulaştığı belirlenmiştir. Bazı durumlarda sönümün % 15 değerini bile aştığı olmuştur. Yapılarda eşdeğer viskoz sönüm, titreşim yerdeğiştirmesinde zamanla meydana gelen azalma esas alınarak bulunur.

Şekil 2.5.a'da **u** serbestlik derecesi boyunca, $\mathbf{f_D}$ kuvveti etkisinde kalmış doğrusal viskoz sönümleyici gösterilmektedir. Sönümleyicide oluşan iç kuvvet, $\mathbf{f_D}$ dış yanal kuvvetine ters yönde ve eşittir (Şekil 2.5.b). $\mathbf{f_D}$ sönüm kuvveti ise, viskoz sönümleyicideki hıza bağlı olup, **c viskoz sönüm katsayısı** ile doğru orantılıdır (Şekil 2.5.c).

$$f_D = c\dot{u} \tag{2.5}$$

(2.5) ifadesinden görüleceği gibi, **c** katsayısının birimi "kuvvet x zaman/uzunluk" tur.

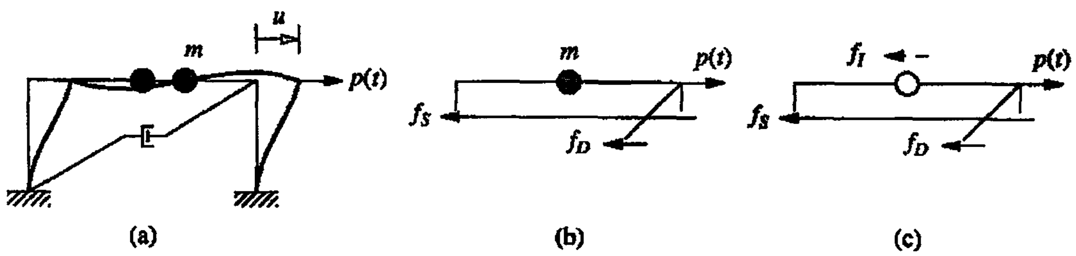


Şekil 2.5 Dış kuvvet etkisi altında kalmış doğrusal viskoz sönümleyici (Chopra, 2001).

Titreşim enerjisini sönümleyen mekanizmaların bazen matematiksel modele dayandırılamayacağı daha önceden belirtilmişti. Sönüm katsayısı da, yapının boyutlarından veya yapısal elemanların ebatlarından hesap edilemez. Bunun için bu katsayı, daha önceden yapılmış olan deney sonuçlarının idealize edilmesiyle bulunur. Deformasyon genliğine bağlı olarak sönüm katsayısının değişeceği bilinmesine rağmen, dinamik analizlerde bu doğrusal olmayan davranış ihmal edilir. Bunun yerine, çoğunlukla yapının doğrusal elastik davranış bölgesinden alınan beklenen deformasyon genliğine karşılık gelen sönüm katsayısı seçilir (Chopra, 2001).

2.1.3 Dış Kuvvet Etkisindeki Basit Çerçeve Sistemin Hareket Denklemi

Şekil 2.6'da idealize edilmiş tek açıklıklı basit çerçeveye, zamana bağlı **p(t)** dış yükü etkitilmiş ve bu yükten dolayı oluşan iç kuvvetler gösterilmiştir.



Şekil 2.6 Dış yük etkisi altında idealize edilmiş basit çerçeve (Chopra, 2001).

Sisteme etkiyen dış yük zamana bağlı olduğu için, **u(t)**, kütlenin nihai deplasmanı da zamana bağlı olacaktır. Bu diferansiyel denklemin çözümü, iki metot kullanılarak incelenecektir. Bunlardan ilki; Newton'un II. Hareket Yasası, diğeri ise Dinamik Denge yöntemidir.

2.1.3.1 Newton'un II. Hareket Yasası

Belli bir zamanda, çerçeve kütlesine etkiyen kuvvetler Şekil 2.6.b'de gösterilmiştir. Bunlar; **p(t)** dış yükü, $\mathbf{f_S}$ elastik ya da elastik olmayan direnç kuvveti (Şekil 2.2) ve $\mathbf{f_D}$ sönüm direnç kuvvetidir (Şekil 2.5). Dış kuvvetin yönü, x ekseni doğrultusunda pozitif olarak seçilmiştir. Buna bağlı olarak, $u(t)$ deplasman, $\dot{u}(t)$ hız ve $\ddot{u}(t)$ ivme değerleri de x ekseni doğrultusunda pozitif yöndedirler. Elastik kuvvet ve sönüm kuvveti, sırasıyla deformasyon ve hıza karşı koyan iç kuvvetler oldukları için seçilen yöne ters etkitilmişlerdir. Newton'un II. Hareket Yasası uyarınca;

$$p - f_S - f_D = m\ddot{u} \tag{2.6}$$

$$m\ddot{u} + f_D + f_S = p(t) \tag{2.6.a}$$

yazılabilir. (2.1) ve (2.5) denklemleri (2.6.a)'da yerine yazılırsa ifade;

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \tag{2.7}$$

şeklini alır. Doğrusal elastik sistem için geçerli olan bu ifade, elastik olmayan sistemlerde;

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + f_S(u,\dot{u}) = p(t) \tag{2.8}$$

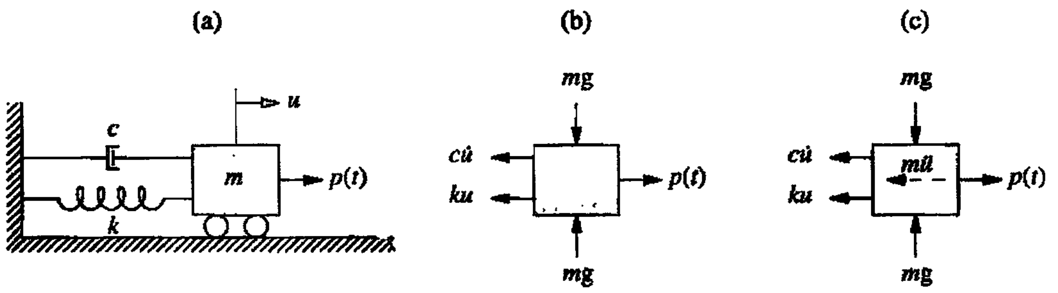
şeklindedir.

2.1.3.2 Dinamik Denge

Diferansiyel denkleminin çözümü için, d'Alembert kuvvetlerin dengesi prensibi, çoğu yapı mühendisinin tercih ettiği bir yöntemdir. Bu metodun temelinde, ivmeye ters yönde etkiyen ve kütle ile bu kütleye etkiyen atalet kuvvetinin çarpımına eşit olan **fiktif atalet kuvveti** tanımlanır. Etkiyen kuvvetlere, atalet kuvvetleri dahil edildiğinde, sistemin seçilen her zaman aralığında sistem dengede olur. Şekil 2.6.c'de, t anında serbest cisim diyagramı çizilen bir kütleye etkiyen fiktif atalet kuvveti kesikli çizgiyle gösterilerek, diğer kuvvetlerden ayırt edilmek istenmiştir. Tüm bu kuvvetlerin toplamı sıfıra eşitlenirse, Newton'un II. Hareket Yasası kullanılarak elde edilen (2.6.a) ifadesine ulaşılmış olur (Chopra, 2001).

2.1.4 Kütle – Yay – Sönümleyicili Sistem

Şekil 2.6'da tek serbestlik dereceli bir sistem, tek açıklıklı basit bir çerçevenin idealleştirilmesi ile sembolize edilerek, yapı mühendisliği araştırmaları için uygun bir hale getirilmiştir. Ancak, klasik tek serbestlik dereceli sistem yaklaşımı, Şekil 2.7'de gösterildiği gibi, kütle – yay – sönümleyicili sistemden oluşur. Bu tip sistemlerin dinamik davranışları ise, daha çok mekanik biliminin alanı içindedir.

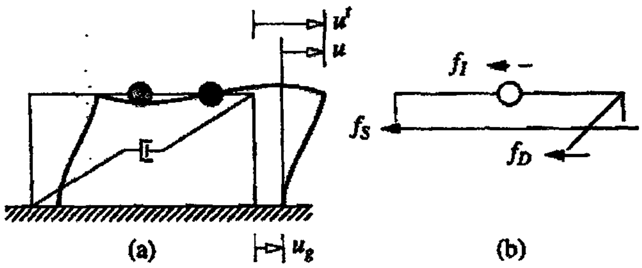


Şekil 2.7 Kütle – yay – sönümleyicili sistem (Chopra, 2001).

Yay ve sönümleyicinin kütlelerini ihmal eder, kütlenin rijit olduğunu varsayar ve tüm hareketin x ekseni boyunca olduğunu kabul edersek, tek serbestlik dereceli bir sistem elde etmiş oluruz. Şekil 2.7.b'de rijit kütleye etkiyen kuvvetler gösterilmiştir. İster Newton'un II. Hareket Yasasından, ister serbest cisim diyagramı üzerine etkiyen kuvvetlere atalet kuvvetini de ekleyerek (Şekil 2.7.c) d'Alembert prensibinden, (2.6.a) ifadesi elde edilir. İdealize edilmiş tek açıklıklı dış kuvvet etkisi altındaki basit çerçeve (Şekil 2.6) için çıkartılan hareket denklemi, aynı zamanda kütle – yay – sönümleyicili sistem (Şekil 2.7) içinde geçerlidir.

2.1.5 Yer Hareketi Etkisindeki Tek Serbestlik Dereceli Sistemlerin Hareket Denklemi

Depreme eğilimli bölgelerde, yapı mühendislerini meşgul eden yapı dinamiğinin temel problemi, yapı tabanına etkiyen deprem etkisi altında yapının davranışının belirlenmesidir.



Şekil 2.8 Deprem etkisi altında basit çerçeve (Chopra, 2001).

Şekil 2.8'de $\mathbf{u_g}$ yerin deplasmanını, $\mathbf{u^t}$ kütlenin toplam deplasmanını, **u** kütle ile yerin rölatif deplasmanını göstermektedir. Herhangi bir zamanda bu deplasmanlar arasındaki ilişki, (2.9) bağıntısıyla bulunabilir.

$$u^t(t) = u(t) + u_g(t) \tag{2.9}$$

Şekil 2.8'de gösterilen, deprem etkisi altında kalan idealize edilmiş tek katlı çerçevenin hareket denklemi, Bölüm 2.1.3'de anlatılan metotlardan her ikisiyle de bulunabilir. Burada dinamik denge yöntemi ile hareket denklemi çıkartılacaktır. $\mathbf{f_I}$, atalet kuvvetini de içeren serbest cisim diyagramından dinamik denge denklemi (2.10) ifadesiyle verilebilir.

$$f_I + f_D + f_S = 0 \tag{2.10}$$

Kütle ve zemin arasındaki, **u** rölatif hareketi, yapısal deformasyona da yol açarak, elastik kuvvet ve sönümleyici kuvvet oluşturur. Doğrusal sistemler için (2.1) ve (2.5) ifadeleri geçerli olup, $\mathbf{f_I}$ atalet kuvveti zamana bağlı ivme göz önüne alınarak (2.11) denklemiyle hesaplanabilir.

$$f_I = m\ddot{u}^t \tag{2.11}$$

(2.1), (2.5) ve (2.11) denklemlerini, (2.9) denkleminden faydalanarak (2.10) ifadesinde yerine yazarsak hareket denklemini elde ederiz.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t) \tag{2.12}$$

(2.12) ifadesi, Şekil 2.8'de gösterildiği gibi, yer sarsıntısı altındaki doğrusal çerçeve için geçerlidir. Eğer sistem elastik değilse, (2.4) ve (2.5) ifadeleri (2.10) denkleminde yerine yazılır (Chopra, 2001).

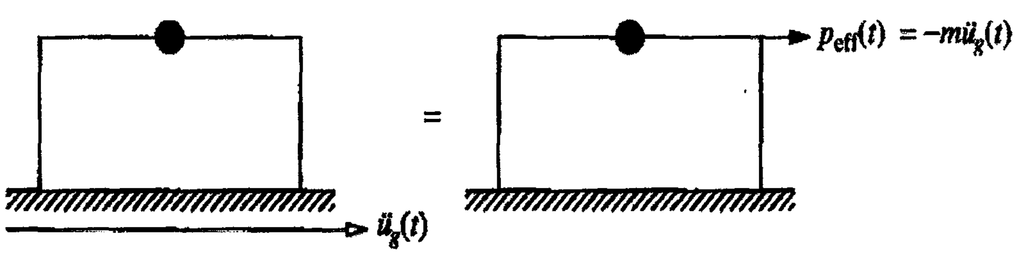
$$m\ddot{u} + c\dot{u} + f_S(u,\dot{u}) = -m\ddot{u}_g(t) \tag{2.13}$$

Görüldüğü gibi burada yer hareketinin etkisi, dış kuvvete benzer olarak ortaya çıkmaktadır. (2.12) hareket denklemindeki eksi işareti, eşdeğer dış kuvvet etkisinin, yer hareketi ivmesine zıt yönde meydana geldiğini göstermektedir. Ancak; yer hareketi deprem etkisi olarak ele alınırsa, bu işaretinde önemli olmadığı söylenebilir. Yer hareketi sonucu ortaya çıkan **etkili (eşdeğer) bir kuvvet** (Şekil 2.9) tarifiyle, hareket denklemi (2.15) ifadesine dönüşür.

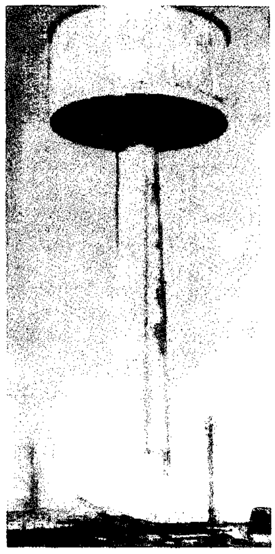
$$p_{eff}(t) = -m\ddot{u}_g(t) \tag{2.14}$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_{eff}(t) \tag{2.15}$$

Deprem sırasında, yer hareketinin dönen bileşenleri ihmal edilse de, bunlar dönmüş bileşenlerden ölçülerek bulunabilir. Bu etkiyi sisteme dahil etmek ise, yapılan incelemeye bağlıdır. Şekil 2.10'da Valdivia Havaalanı yakınında, tek betonarme kolondan oluşan, 12 metre yüksekliğindeki bir su tankı gösterilmiştir. Bu tank, 1960 Mayıs Şili depremini de hiç zarar görmeden geçirmiştir. Tank su ile dolu olduğu zaman, tek serbestlik dereceli bir sistem gibi analiz edilebilir.

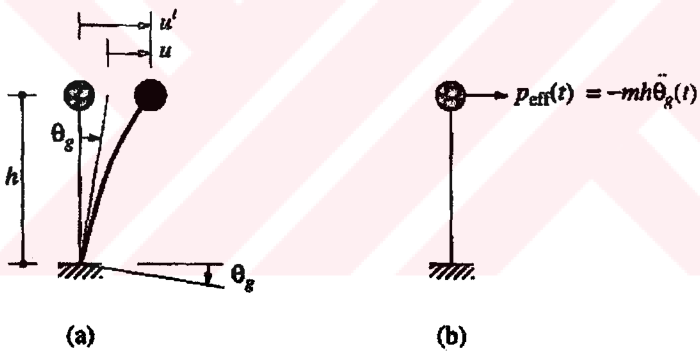


Şekil 2.9 Yatay yer hareketi altındaki sisteme etkiyen etkin deprem kuvveti (Chopra, 2001).



Şekil 2.10 Tek kolonlu betonarme su tankı (Chopra, 2001).

Şekil 2.11'de ise, θ_g zemin dönmesi etkisi altında, Şekil 2.10'daki su tankının, konsol bir sistem haline getirilerek idealize edilmiş hali gösterilmiştir.



Şekil 2.11 Dönel zemin etkisi altında etkin deprem kuvveti (Chopra, 2001).

Kütlenin $\mathbf{u}^t$ toplam deplasmanı iki bileşen cinsinden yazılabilir; birincisi yapısal deformasyonla ilgili olan **u** parametresi, diğeri ise serbest cisim diyagramı ile ilgili olan $\mathbf{h\theta_g}$ çarpanıdır. Burada **h** sistemin yüksekliğini göstermektedir. O halde, toplam deplasman herhangi bir **t** anında (2.16) denklemiyle bulunabilir.

$$u^t(t) = u(t) + h\theta_g(t) \qquad (2.16)$$

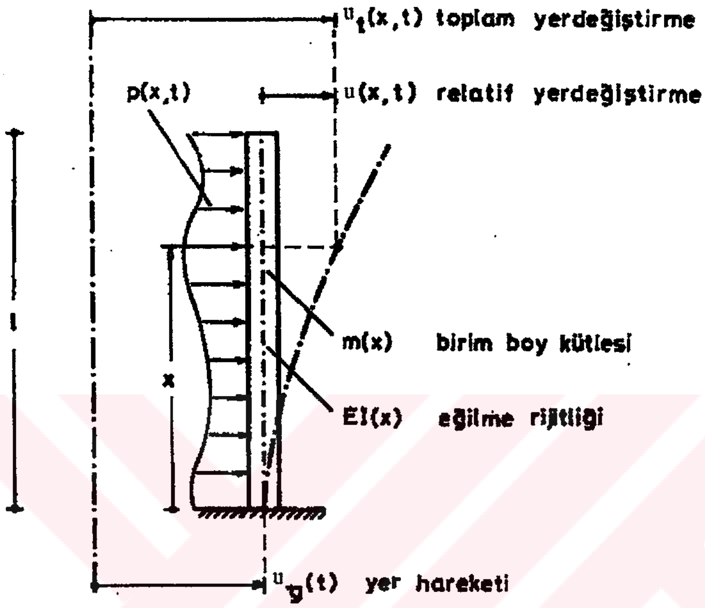
(2.10) ve (2.11) ifadeleri geçerli olmasına rağmen, $\ddot{u}^t(t)$ toplam ivmesi artık (2.16) denkleminden belirlenmelidir. Yeni hareket denklemi (2.17)'de verildiği gibidir.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -mh\ddot{\theta}_g(t) \tag{2.17}$$

Yerin dönmesiyle alakalı olan etkin deprem kuvveti ise (2.18) denklemiyle bulunabilir.

$$p_{eff}(t) = -mh\ddot{\theta}_g(t) \tag{2.18}$$

2.2 Genelleştirilmiş Koordinat Sistemi



Şekil 2.12 Tek serbestlik dereceli sisteme dönüştürülen sürekli parametreli sistem (Celep ve Kumbasar, 1996).

Bu tür sisteme örnek olarak Şekil 2.12'de verilen konsol kolon göz önüne alınacaktır. Kolonun birim boy kütlesi **m(x)** ve kesit eğilme rijitliği **EI(x)** şeklinde eksen boyunca değişen türden verilmiş olsun. Kolon **p(x,t)** dış yükü yanında, $\mathbf{u_g(t)}$ yer hareketi altında bulunsun. Sürekli kütleli böyle bir sistemi, tek serbestlik dereceli bir sistem şeklinde incelemek amacıyla, kolonun rölatif elastik yerdeğiştirmesi (2.19) ifadesindeki gibi kabul edilsin. Burada **Ψ(x)**, kolonun dinamik davranışı için kabul edilen yerdeğiştirmesini, **Y(t)** ise bu yerdeğiştirme şeklinin zamana bağlı olarak değişimini göstermektedir. Sadece eğilme türü şekildeğiştirmelerinin mevcut olduğu kabul edilirse, kolonda yayılı olarak meydana gelen atalet kuvveti ve kesit eğilme momenti için (2.20) ve (2.21) ifadeleri yazılabilir.

$$u(x,t) = \Psi(x)Y(t) \tag{2.19}$$

$$f_I(x,t) = m(x)\ddot{u}_t(x,t) = m(x)[\ddot{u}(x,t) + \ddot{u}_g(t)] \tag{2.20}$$

$$M(x,t) = EI(x)\ddot{u}(x,t) \tag{2.21}$$

Sistemin hareket denklemi değişik mekanik ilkelerinden hareketle elde edilir. Aşağıda virtüel yerdeğiştirme ilkesi kullanılarak, yapılan dış ve iç işlerin eşitliği yazılacaktır. Kolonda, belirli bir zamanda $\delta u(x) = \Psi(x)\delta \mathrm{Y}$ virtüel yerdeğiştirmesi sonucu dış kuvvetlerin yaptığı iş (2.22) denklemiyle ifade edilebilir.

$$\delta W_E = \int_0^1 p(x,t)\delta u(x)dx = \delta \mathrm{Y}\int_0^1 p(x,t)\Psi(x)dx \tag{2.22}$$

Atalet ve elastik kuvvetler gibi iç kuvvetlerin yaptığı iş ise (2.23) denklemiyle bulunabilir.

$$\delta W_I = \int_0^1 f_I(x)\delta u(x)dx + \int_0^1 M(x)\delta \ddot{u}(x)dx \tag{2.23}$$

(2.20) ve (2.21) denklemlerini (2.23) ifadesinde yerine yazarsak;

$$\delta W_I = \ddot{\mathrm{Y}}\delta \mathrm{Y}\int_0^1 m(x)[\Psi(x)]^2 dx + \delta \mathrm{Y}\ddot{u}_g(t)\int_0^1 m(x)\Psi(x)dx + \mathrm{Y}\delta \mathrm{Y}\int_0^1 EI(x)[\ddot{\Psi}(x)]^2 dx \tag{2.24}$$

(2.24) ifadesini elde ederiz.

İç ve dış işlerin birbirine eşitliğinden;

$$\ddot{\mathrm{Y}}\int_0^1 m(x)[\Psi(x)]^2 dx + \mathrm{Y}\int_0^1 EI(x)[\ddot{\Psi}(x)]^2 dx = -\ddot{u}_g(t)\int_0^1 m(x)\Psi(x)dx + \int_0^1 p(x,t)\Psi(x)dx \tag{2.25}$$

eşitliği bulunur. Genelleştirilmiş koordinat kullanılması sonucu ortaya çıkan büyüklüklere genelleştirilmiş isimler verilirse, (2.26) denklemiyle gösterilen yeni tanımlamalar yapılabilir. Bu tanımlardan sonra oluşacak hareket denklemi ise (2.27) ifadesiyle gösterilmiştir. (2.27) ifadesinin (2.7) denklemiyle karşılaştırılması yapılırsa, (2.26)'de yapılan tanımlamalar daha da anlam kazanacaktır (Celep ve Kumbasar, 1996).

$$m^* = \int_0^1 m(x)[\Psi(x)]^2 dx \qquad \text{: Genelleştirilmiş kütle} \tag{2.26.a}$$

$$k^* = \int_0^1 EI(x)[\ddot{\Psi}(x)]^2 dx \qquad \text{: Genelleştirilmiş rijitlik} \tag{2.26.b}$$

$$p^*(t)=\int_0^1 p(x,t)\Psi(x)dx$$: Genelleştirilmiş dış yük (2.26.c)

$$P_{eff}^*(t)=-\ddot{u}_g(t)\int_0^1 m(x)\Psi(x)dx$$: Genelleştirilmiş etkili yük (2.26.d)

$$c^*=\int_0^1 \bar{c}(x)[\Psi(x)]^2 dx$$: Genelleştirilmiş viskoz sönüm (2.26.e)

$$c^*=\int_0^1 \bar{c}(x)[\ddot{\Psi}(x)]^2 dx$$: Genelleştirilmiş visko-elastik sönüm (2.26.f)

Bu halde hareket denklemi;

$$m^*\ddot{Y}(t)+k^*Y(t)=p^*(t)+p^*_{eff}(t) \tag{2.27}$$

olarak belirlenir. Eğer sistemde sönümün varlığı kabul edilirse denklem;

$$m^*\ddot{Y}(t)+c^*\ddot{Y}(t)+k^*Y(t)=p^*(t)+p^*_{eff}(t) \tag{2.28}$$

halini alır.

Burada açıklanan koordinat fonksiyonlarının gelişigüzel seçilemeyeceği aşikardır. Örneğin, elastik bir kirişin yerdeğiştirmesini temsil eden fonksiyonların sağlaması gereken sınır koşullarını iki bölüme ayırmak mümkündür. **Geometrik Sınır Koşulları** olarak adlandırılan bölümde koşullar yerdeğiştirme veya dönmeler cinsinden ifade edilir. **Doğal Sınır Koşulları** ise geometrik bir sınır koşulun önerilmediği durumda ortaya çıkan koşullardır. Bunlar, eğilme momenti ve kesme kuvveti türündendirler. Koordinat fonksiyonlarının geometrik sınır koşullarını sağlayacak şekilde seçilmeleri yaklaşım için yeterlidir (Celep ve Kumbasar, 1996).

2.3 Diferansiyel Hareket Denkleminin Çözüm Metotları

Yanal kuvvet etkisi altındaki doğrusal tek serbestlik dereceli sistemlerin hareket denklemlerinin ikinci dereceden diferansiyel denklemler oldukları (2.7) ifadesiyle daha önceden belirtilmişti. Problemin tam olarak açıklanabilmesi için, başlangıç anındaki (t=0), $u(0)$ ilk deplasmanının ve $\dot{u}(0)$ ilk hızının belirlenmesi gerekmektedir. Doğal olarak, bir sistem dinamik tetiklemeden önce durağan durumdadır. Bundan dolayı ilk deplasman ve ilk hız sıfır olmalıdır.

2.3.1 Klasik Çözüm

(2.7) diferansiyel hareket denkleminin **u(t)** toplam çözümü; **u_c(t)** homojen çözümü ve **u_p(t)** özel çözümünün toplamına eşittir.

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t) \tag{2.29}$$

(2.7) diferansiyel denklemi ikinci dereceden olduğundan, homojen çözümde sınır şartlarına bağlı iki tanede integral sabiti vardır.

2.3.2 Duhamel İntegrali

Tek serbestlik dereceli sistemin hareket denklemi gibi, doğrusal diferansiyel denklemlerin yaygın bir çözümü de; sisteme uygulanan kuvvetin, sonsuz küçük ani itmeler dizisi şeklinde belirtilmesidir. Sistemin, **t** anında uygulanan **p(t)** kuvvetine mukabelesi, o ana kadar etkiyen tüm itmelerin mukabelelerinin toplamı şeklinde bulunur. Sonuçta, sönümsüz tek serbestlik dereceli sistem için çözüm (2.30) denkleminde verildiği gibi olur.

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t p(\tau)\sin[\omega_n(t-\tau)]d\tau \tag{2.30}$$

Eğer sistem sönümlü ise o zaman (2.30) ifadesi (2.31)'a dönüşür.

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D}\int_0^t p(\tau)e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\sin[\omega_D(t-\tau)]d\tau \tag{2.31}$$

(2.30) ve (2.31) denklemleri **Duhamel İntegrali** olarak bilinirler. Burada kullanılan ve ileride daha detaylı açıklanacak büyüklükler ise (2.32) bağıntısıyla verilmiştir.

$$\omega^2{}_n = k/m \tag{2.32.a}$$

$$\omega^2{}_D = \omega^2(1-\xi^2) \tag{2.32.b}$$

$$\xi = c/c_{cr} \tag{2.32.c}$$

$$c_{cr} = 2m\omega \tag{2.32.d}$$

2.3.3 Frekans Tanım Alanında Çözüm

Laplace ve Fourier dönüşümleri, doğrusal tek serbestlik dereceli sistemler gibi doğrusal diferansiyel denklemlerin çözümünde çok sık kullanılan yöntemlerdir. Aslında iki dönüşüm metodu da temelde aynıdır. Ancak Fourier dönüşümü dinamik analizlerdeki **Frekans Alanı**

Metodunun esasını oluşturduğundan burada Fourier dönüşümü kullanılacaktır.

p(t) tetikleme fonksiyonun, **P(ω)** Fourier Dönüşüm Fonksiyonu (2.33) denklemiyle verilmiştir.

$$P(\omega) = F[p(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-i\omega t}dt \tag{2.33}$$

u(t), diferansiyel denkleminin çözüm fonksiyonun, **U(ω)** Fourier Dönüşümü ise (2.34) ifadesinde gösterilmiştir.

$$U(\omega) = H(\omega)P(\omega) \tag{2.34}$$

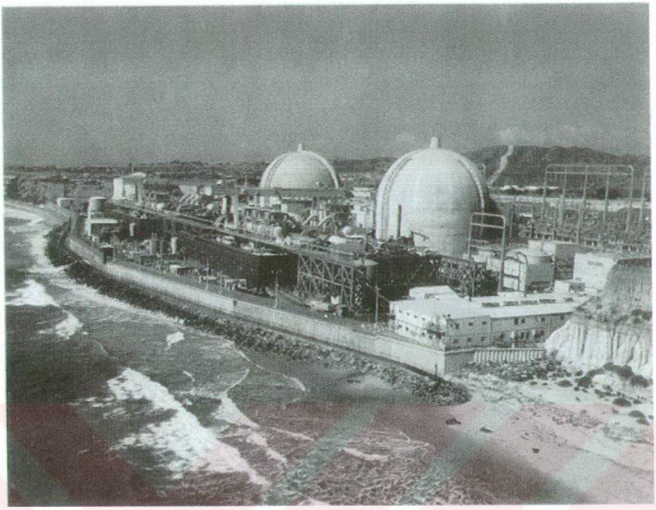
(2.34) denkleminde **H(ω)** frekans – mukabele fonksiyonu, sistemin harmonik tetiklemeler altındaki mukabelesini gösterir. Sonuçta, (2.34) ifadesine ters Fourier Dönüşümü uygulayarak aranan **u(t)** çözümü bulunmuş olur.

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)P(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{2.35}$$

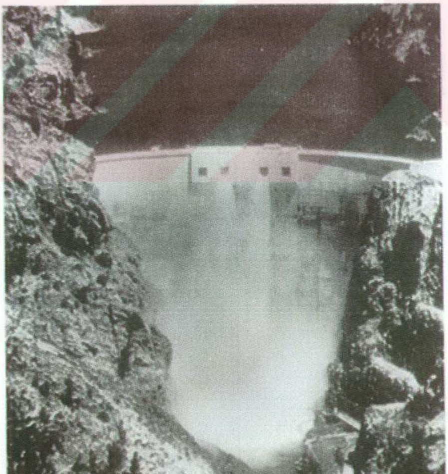
Duhamel İntegral Metoduna alternatif olan Frekans Tanım Alanı Metodu, daha çok çözülmüş bölgelerle etkileşim halinde olan yapıların dinamik analizlerinde tercih edilmektedir. Bu duruma örnek olarak Şekil 2.13 ve Şekil 2.14'de gösterilen yapılar verilebilir. Şekil 2.13'de California'da kubbe şekilli iki tane betonarme nükleer reaktör gösterilmiştir. Tasarım aşamasında, zeminin sabit olduğu durumda yapıların doğal esas titreşim periyotları 0.15 s olarak, zeminin elastik olduğu durumda ise 0.50 s olarak alınmıştır. Bu durum ise, zemin ile yapı arasındaki etkileşimin boyutuna dikkat çekmektedir. Şekil 2.14'de ise, Colorado'da, Gunnison Nehri üzerinde inşa edilmiş, 142 metre yüksekliğinde betonarme bir baraj gösterilmiştir. Titreşim deneylerinden, baraj haznesi kısmen su ile dolu iken, yapının doğal esas titreşim periyodu 0.268 s olarak, hazne tamamen su ile dolu iken ise periyot 0.303 s olarak bulunmuştur. Bu da, barajların deprem analizlerinde yapının haznedeki su ile etkileşim içine girerek, en üst noktadaki kuvvetleri arttıracağı yönünde yorumlanabilir (Chopra, 2001).

2.3.4 Nümerik Metotlar

Daha önce açıklanan dinamik analiz metotlarının üçü de, sadece doğrusal sistemlerde kullanılmakta ve şiddetli deprem etkisi altında kalan, elastik olmayan davranışlardaki yapılarda geçerli olmamaktadırlar. Bu çeşit yapılarda geçerli olan tek yöntem zaman alanında nümerik çözüm metotlarının kullanılmasıdır. Bu metot analitik olarak çözümlemesi çok karışık olan doğrusal sistemlerin mukabelelerinin bulunmasında da kullanılabilir.



Şekil 2.13 California'daki betonarme kubbeler (Chopra, 2001).



Şekil 2.14 Colorado'daki 142 m. yüksekliğindeki baraj (Chopra, 2001).

2.4 Serbest Titreşim

Bir yapı, statik denge durumundan hareket ettirilir ve bu hareketi sırasında herhangi bir dış dinamik tetiklemeye maruz kalmadan titreşmesi sağlanırsa, yapının **serbest titreşim** yaptığı söylenir (Chopra, 2001).

2.4.1 Sönümsüz Serbest Titreşim

Daha önce, (2.7) ifadesinde, **p(t)** dış yük etkisine maruz kalmış, idealize edilmiş tek açıklıklı çerçeve ya da kütle – yay – sönümleyicili doğrusal tek serbestlik dereceli sistemlerin hareket denklemleri verilmişti. **p(t)** dış yükünün 0'a eşit olması hali, sistemin serbest titreşim durumundaki diferansiyel denklemini verir. Bu ifade, sönümsüz sistemlerde (2.36) bağıntısına dönüşür.

$$m\ddot{u} + ku = 0 \tag{2.36}$$

Serbest titreşim; sistemin statik denge konumundan tetiklenerek, sıfır anında kütlesine belli bir $\dot{u}(0)$ hızıyla, $u(0)$ deplasmanı yaptırılması sonucu başlar. Bu harekete maruz kalan sistemin homojen diferansiyel hareket denkleminin çözümü çeşitli matematiksel yöntemlerle bulunmuş olup, (2.37) denkleminde verildiği gibidir.

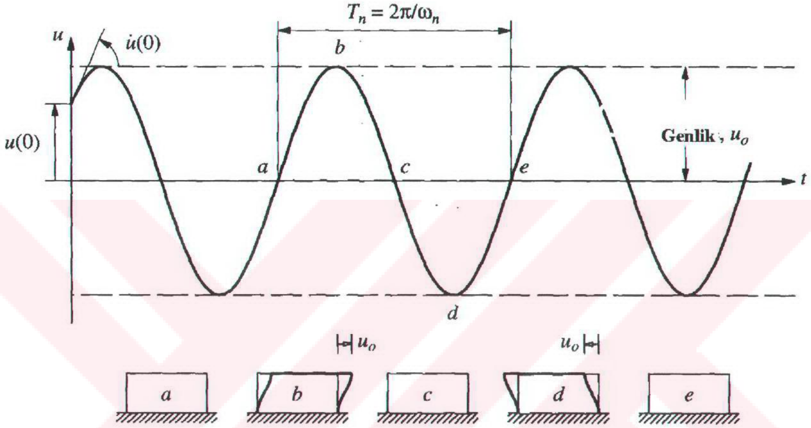
$$u(t) = u(0)\cos\omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\sin\omega_n t \tag{2.37}$$

(2.37) ifadesinde;

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.38}$$

(2.36) bağıntısının grafiği, Şekil 2.15'de gösterilmiştir. Grafiğinde incelenmesinden anlaşılacağı gibi; sistem, statik denge konumu olan $u = 0$'dan titreşime başlamakta ve her $2\pi/\omega_n$ saniye aralıkla bu hareket kendini tekrar etmektedir. İşte; (2.37) denklemiyle verilen ve Şekil 2.15'de grafiği çizilen bu hareket, **basit harmonik hareket** olarak tanımlanır.

Şekil 2.15'de deplasman-zaman eğrisi üzerindeki a-b-c-d-e kısımları, sistemin tam bir devir serbest titreştiği bölümü belirtmektedir. Kütle, statik denge konumu olan (şekil değiştirmemiş konumdan) **a noktasından** sağa doğru harekete başlamakta ve maksimum pozitif deplasmanına **(u_0)**, **b noktasında** ulaşmaktadır. Kütlenin **b noktasına** ulaştığında hızı sıfırdır. Artık bu noktadan sonra, deplasman azalmaya başlayacak ve kütle **c noktasında** statik denge konumuna geri gelecektir. Kütle **c noktasına** geldiğinde hızı maksimumdur. Bu yüzden kütle bu konumda da durmayacak ve bu sefer ilk hareketine ters tarafa doğru, yani sola doğru, harekete başlayacaktır. Minimum deplasmanına **d noktasında ulaşacaktır;** ki bu noktada da hızı sıfırdır. Daha sonra deplasman tekrar azalmaya başlayacak ve kütle **e noktasında** yine denge konumuna dönecektir. İşte kütle bu **e noktasına** ulaştığında, $2\pi/\omega_n$ saniye zaman geçmiş olacak, kütlenin deplasman ve hız değerleri ise ilk konumuyla (a konumu) aynı olacaktır. Bu noktadan sonra kütle bir başka titreşim devrine aynen devam eder.



Şekil 2.15 Sönümsüz serbest titreşim yapan sistem (Chopra, 2001).

Sönümsüz sistemin, bir tam devir serbest titreşebilmesi için gereken süre sistemin **doğal titreşim periyodu** olarak adlandırılır ve $\mathbf{T_n}$ sembolü ile gösterilir. Birimi ise "radyan/saniye" dir.

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \tag{2.39}$$

Bir sistem, $1/T_n$ devri, 1 saniyede tamamlar. Buda, **titreşimin doğal frekansı** olarak adlandırılır.

$$f_n = \frac{1}{T_n} \tag{2.40}$$

$\mathbf{f_n}$'nin birimi **Hertz** (Hz) dir. $\mathbf{f_n}$ **ve** $\boldsymbol{\omega_n}$ arasında bir bağıntı yazılacak olursa (2.41) ifadesi elde edilir.

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \tag{2.41}$$

Doğal titreşim frekansı terimi, **f_n ve ω_n** içinde kullanılabilmektedir.

T_n, f_n ve **ω_n**, doğal titreşim özellikleri, sadece yapının kütle ve rijitliğine bağlıdır. (2.38) den (2.41)'e kadar olan ifadelerin incelenmesinden de bu görülür. İki tane **aynı kütleye** sahip tek serbestlik dereceli sistemden, daha **rijit olanı**, daha yüksek doğal frekansa ve daha **düşük periyoda sahip olacaktır**. Benzer olarak, **aynı rijitlikte** iki yapıdan daha **ağır olanı**, daha düşük doğal frekansa ve daha **büyük periyoda** sahip olacaktır. Burada **T_n, f_n ve ω_n** ifadelerinde, **doğal** sıfatının kullanılmasının amacı, bunların sistemin dış tetiklemelerden bağımsız serbest titreşimine izin verildiğinde, sistemin doğal özellikleri olduklarının vurgulanması içindir. Sistem doğrusal olduğundan, bu titreşim özellikleri, başlangıç deplasmanı ve hızından bağımsızdırlar (Chopra, 2001).

Sönümsüz sistem, **u_0** maksimum deplasmanı ve **$-u_0$** minimum deplasmanı arasında bir ileri bir geri titreşmektedir. Bu iki deplasman değerlerinin büyüklükleri de aynı olup, **hareketin genliği** olarak isimlendirilir ve (2.42) bağıntısıyla hesaplanır.

$$u_0 = \sqrt{[u(0)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\right]^2} \tag{2.42}$$

u_0 genliği, başlangıç deplasmanına ve hızına bağlı olup, tireşim hareketi devir üstüne devir yapsa da, hep aynı kalmaktadır. Bu da, hareketin devam ettiğini, bitmediğini göstermektedir.

Şekil 2.3'de gösterilen tek katlı ankastre çerçevenin doğal frekansı (2.43) denklemlerinde verilmiştir.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.43.a}$$

$$k = \frac{24EI_c}{h^3}\frac{12\rho + 1}{12\rho + 4} \tag{2.43.b}$$

$$\rho = \frac{I_b}{4I_c} \tag{2.43.c}$$

Bir kirişin ekstrem değerleri, $\rho = \infty$ ve $\rho = 0$ için, yanal rijitlik değerleri (2.2) ve (2.3) ifadelerinde verilmişti. Doğal frekanslar ise (2.44) denklemlerinde verildiği gibidir.

$$(\omega_n)_{\rho=\infty} = \sqrt{\frac{24EI_c}{mh^3}} \tag{2.44.a}$$

$$(\omega_n)_{\rho=0} = \sqrt{\frac{6EI_c}{mh^3}} \tag{2.44.b}$$

Bağıntıların incelenmesinden de görüleceği üzere, ρ, kirişin kolon rijitliğine oranı, $\rho = 0$ dan $\rho = \infty$'a ulaştığında doğal frekansta dikkate değer bir artış olmaktadır.

2.4.2 Vizkoz Sönümlü Serbest Titreşim

(2.7) denkleminde **p(t)=0** olması halinde, serbest titreşim yapan tek serbestlik dereceli sistemin diferansiyel hareket denklemi (2.45) ifadesinde verildiği gibidir.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \tag{2.45}$$

(2.45) eşitliğinin her tarafı **m** ile bölünürse (2.46) denklemi elde edilir.

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0 \tag{2.46}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.47}$$

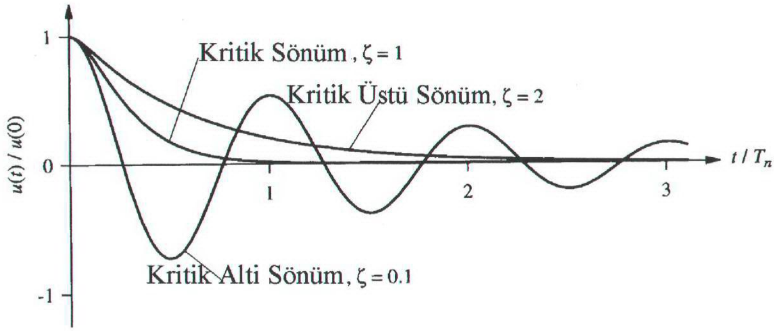
$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{c_{cr}} \tag{2.48}$$

$$c_{cr} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km} = \frac{2k}{\omega_n} \tag{2.49}$$

(2.49) bağıntısında $\mathbf{c_{cr}}$, **kritik sönüm katsayısı** ve ζ, **sönüm oranı** olarak adlandırılır. Serbest veya zorlanmış harmonik titreşimindeki bir devirde açığa çıkan enerjinin ölçüsü, **c**, **sönüm sabiti** olarak adlandırılır. **Sönüm oranı** ise sönümün birimsiz ölçüsü olup, sistemin hem **kütlesine** hem de **rijitliğine** bağlı bir özelliktir (Chopra, 2001).

2.4.2.1 Hareket Çeşitleri

Şekil 2.16'da u(t) / u(0) oranının, ζ'nin üç değişik değeri için aldığı değerler gösterilmiştir. Eğer, $\mathbf{c=c_{cr}}$ ise yani $\boldsymbol{\zeta=1}$ **ise**, sistem **titreşim yapmadan**, denge durumuna döner. Eğer, $\mathbf{c>c_{cr}}$ ise yani $\boldsymbol{\zeta>1}$ ise, sistem yine **titreşim yapmadan**, ancak ζ=1durumundan daha yavaş hızla, denge durumuna döner. Eğer, $\mathbf{c<c_{cr}}$ ise yani $\boldsymbol{\zeta<1}$ ise sistem azalan genlikle, denge konumu etrafında **titreşir**.



Şekil 2.16 Kritik altı sönüm, kritik sönüm ve kritik üstü sönümlü sistemlerin serbest titreşimleri (Chopra, 2001).

$\mathbf{c_{cr}}$ sönüm katsayısı, **c sönümünün** titreşimi tamamen önleyen en küçük değeri olduğundan, **kritik sönüm katsayısı** olarak adlandırılır. Bu katsayı, ayrıca titreşim yapan ve yapmayan hareket arasındaki ayırıcı çizgiyi temsil eder (Chopra, 2001).

Binalar, köprüler, nükleer enerji merkezleri, kıyı yapıları...vb. sistemler ise **kritik altı sönümlü** ($\mathbf{c<c_{cr}}$), sistemler kategorisinde incelenirler. Hepsinin sönüm oranı $\boldsymbol{\zeta<0.1}$ den küçüktür. Bunun için pratikte, kritik üstü sönümlü ve kritik sönümlü sistemler, her ne kadar mevcut olsalarda pek incelenmezler.

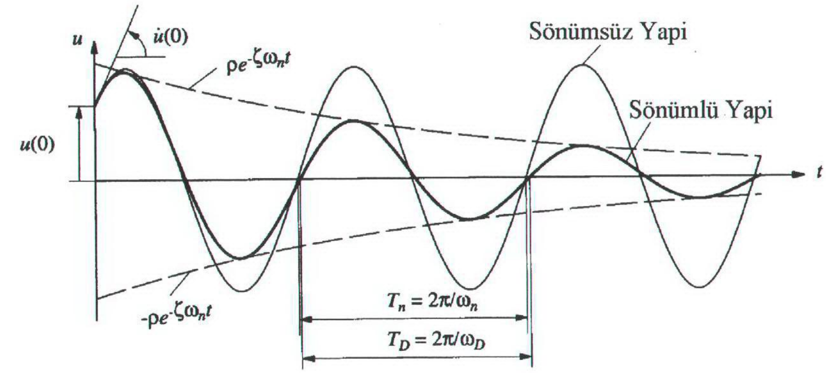
2.4.2.2 Kritik Altı Sönümlü Sistemler

(2.45) denkleminin, $\mathbf{c<c_{cr}}$ veya $\boldsymbol{\zeta<1}$ olan sistemler için, başlangıç koşulları olan $u = u(0)$ ve $\dot{u} = \dot{u}(0)$ değerleri altında çözümü (2.50) denklemiyle verilmiştir.

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[u(0)\cos\omega_D t + \frac{\dot{u}(0)+\zeta\omega_n u(0)}{\omega_D}\sin\omega_D t\right] \tag{2.50}$$

$$\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{2.51}$$

Şekil 2.17'de (2.50) denkleminin grafiği çizilmiş olup; $\boldsymbol{\zeta=0.05}$ ya da **ζ=%5 sönüm oranı** altında, tek serbestlik dereceli sistemin serbest titreşim mukabelesi gösterilmiştir. Yine aynı şekilde, mukayese yapabilmek için aynı sistemin sönümsüz serbest titreşim mukabelesini gösteren ve daha önce Şekil 2.15'de verilen eğride çizilmiştir.



Şekil 2.17 Serbest titreşime sönümün etkileri (Chopra, 2001).

Her iki sistemin de serbest titreşimleri aynı $u(0)$ deplasmanından ve aynı $\dot{u}(0)$ hızından başlamaktadır. (2.50) ve (2.51) denklemleri ve Şekil 2.17'den de görüleceği üzere, $\boldsymbol{\omega_D}$, **sönümlü titreşimin doğal frekansı** ile $\boldsymbol{\omega_n}$, **sönümsüz sistemin doğal frekansı** arasında bir bağıntı vardır. Frekanslar arasında bağıntı varsa, periyotlar arasında da bir bağıntı yazılabilir (2.52) (Chopra, 2001).

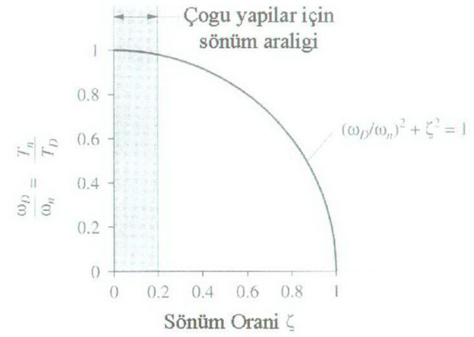
$$T_D = \frac{T_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{2.52}$$

(2.52) ifadesinde, $T_D = 2\pi/\omega_D$, **sönümlü sistemin doğal periyodu** ile, $\mathbf{T_n}$, **sönümsüz sistemin doğal periyodu** arasındaki bağıntı verilmiştir.

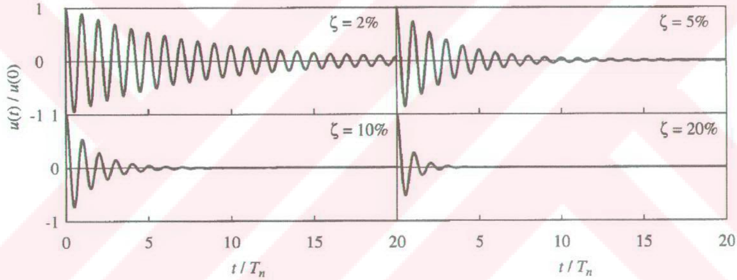
Sönüm, doğal frekans $\boldsymbol{\omega_n}$'ni $\boldsymbol{\omega_D}$'ye **düşürerek**; doğal periyodu $\mathbf{T_n}$'den $\mathbf{T_D}$'ye **artırır**. Sönümün bu etkisi, %20'den küçük sönüm oranları için ihmal edilebilir (Şekil 2.18). Yine aynı şekilde, çoğu yapılar için geçerli sönüm bölgesi belirtilmiştir; ki bu bölgede çeşitli ζ sönüm oranlarında, $\omega_D/\omega_n = T_n/T_D$ eşitliği yazılabilir. Çoğu yapılarda, $\boldsymbol{\omega_D}$ ve $\mathbf{T_D}$ sönüm özellikleri, sırasıyla $\boldsymbol{\omega_n}$ ve $\mathbf{T_n}$ sönümsüzlük özelliklerine yaklaşık olarak eşittir. Kritik sönümlü sistemlerde ise $\omega_D = 0$ ve $T_D = \infty$ olur; ki bu da sistemin titreşmediğini söylemenin bir başka yoludur (Şekil 2.16).

Sönümün, serbest titreşimin sonlanma hızına etkisi, Şekil 2.19'da gösterilmiştir. Aynı $\mathbf{T_n}$ doğal periyoduna sahip fakat farklı **ζ=%2, %5, %10, %20** sönüm oranlarında dört sistemin,

u(0) ilk deplasmanında serbest titreşimleri, Şekil 2.19'da belirtilmiştir.



Şekil 2.18 Sönümün, doğal titreşim frekansına etkisi (Chopra, 2001).



Şekil 2.19 Dört farklı sönüm oranında serbest titreşim (Chopra, 2001).

2.5 Sönümsüz Sistemlerin Harmonik Tetiklemelere Mukabeleleri

Tek serbestlik dereceli sistemlerin harmonik tetiklemelere cevapları, diğer kuvvetlerin yapı üzerine etkisini de anlayabilmeleri açısından, yapı mühendislerinin ilgilendikleri konuların başında gelmektedir.

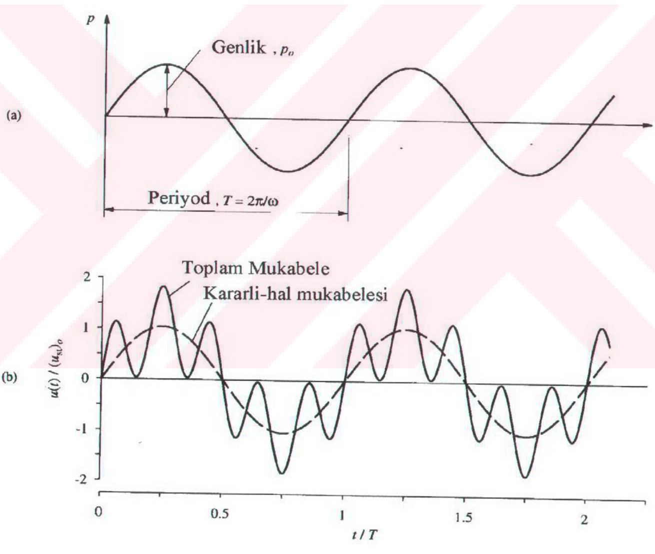
Harmonik kuvvetler, $p(t) = p_0 \sin \omega t$ ya da $p(t) = p_0 \cos \omega t$ şeklinde tanımlanabilirler. Bu ifadelerde, p_0 terimi **genliği**, bir başka deyişle kuvvetin ve frekansının maksimum değerini; ω terimi ise **tetikleyici veya zorlayıcı frekansı** ifade etmektedir. $T = 2\pi/\omega$ ise **tetikleyici**

veya zorlayıcı frekans yerine kullanılmaktadır (Şekil 2.20.a). (2.7) ifadesi, $p(t) = p_0 \sin \omega t$ şeklinde düzenlenirse, zorlanmış harmonik tetiklemeye maruz sistemin titreşim ifadesi bulunmuş olur. Sönümsüz sistemler için bu ifade (2.53) halini alır (Chopra, 2001).

$$m\ddot{u} + ku = p_0 \sin \omega t \tag{2.53}$$

Bu denklem; **u(t)** deplasmanının, $u = u(0)$ ve $\dot{u} = \dot{u}(0)$ başlangıç değerleri için çözümlenmelidir. Burada, $u(0)$, kuvvet uygulandığı andaki deplasman ve $\dot{u}(0)$ ise, kuvvet uygulandığı andaki hızı göstermektedir. Bu diferansiyel denklemin özel çözümü (2.54) denklemiyle verilmiştir.

$$u_p(t) = \frac{p_o}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin \omega t \qquad \omega \neq \omega_n \tag{2.54}$$



Şekil 2.20 (a) Harmonik kuvvet (b) Sönümsüz sistemin harmonik kuvvete mukabelesi (Chopra, 2001).

Aynı (2.53) denkleminin aşikar çözümü ise, (2.55) ifadesinde verilmiştir.

$$u_c(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t \tag{2.55}$$

(2.53) diferansiyel denkleminin toplam çözümü ise, özel ve aşikar çözümlerinin toplamı olup, bu da (2.56) denklemiyle verilmiştir.

$$u(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{p_0}{k}\frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2}\sin\omega t \tag{2.56}$$

(2.56) ifadesindeki Ave B sabitleri ise, başlangıç şartlarının yazılması sonucu bulunur. Bulunan bu değerlerde yerlerine yazılırsa, denklem (2.57) halini alır.

$$u(t) = \underbrace{u(0)\cos\omega_n t + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} - \frac{p_0}{k}\frac{\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right]\sin\omega_n t}_{Kararsiz} + \underbrace{\frac{p_0}{k}\frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2}\sin\omega_n t}_{Kararlı-hal} \tag{2.57}$$

(2.57) denklemi, $\omega/\omega_n = 0.2$, $u(0) = 0$ ve $\dot{u}(0) = \omega_n p_0/k$ için, Şekil 2.20'de düz çizgi ile gösterilmiştir. (2.57) denklemindeki $\sin\omega t$ terimi, özel çözümü belirterek, bu da kesikli çizgi ile gösterilmiştir.

(2.57) denkleminin ve Şekil 2.20' nin incelenmesinden, **u(t)**'nin iki belirgin titreşim bileşeninden oluştuğu görülebilir. Bu bileşenlerden **sinωt** terimi; zorlayıcı veya tetikleyici frekanstaki titreşimini, **sinω_nt** ve **cosω_nt** terimleri; sistemin doğal frekanstaki titreşimini göstermektedir. Bu bileşenlerden ilkine, etkiyen kuvvetin başlangıç koşullarından bağımsız olmasından dolayı **kararlı – hal titreşimi** veya **zorlanmış titreşim**; ikincisine ise, başlangıç deplasmanına ve başlangıç hızına bağlı olduğu için **kararsız titreşim** adı verilmiştir.

Kararsız titreşim, $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ halinde dahi ortaya çıkabilir. Bu durumda, (2.57) denklemi, (2.58)'de verilen ifadeye dönüşür.

$$u(t) = \frac{p_0}{k}\frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_n}\sin\omega_n t\right) \tag{2.58}$$

Şekil 2.20'de; düz ve kesikli çizgiler arasındaki ve sonsuza kadar gittiği varsayılan fark, kararsız bileşen olarak tanımlanmaktadır.

Kararlı – hal titreşimi ise, sinüs fonksiyonu olarak (2.59) bağıntısında gösterilmiştir.

$$u(t) = (u_{st})_0\left[\frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right]\sin\omega t \tag{2.59}$$

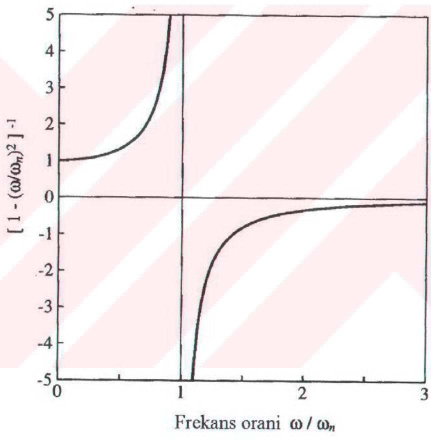
(2.53) ifadesinde atalet kuvvetinin ihmal edilmesiyle, ifade (2.60)'da verilen formu alır. Bu denklemdeki deformasyon; dinamik etkilerin sadeleştirilmesinden dolayı, statik deformasyondur.

$$u_{st}(t) = \frac{p_0}{k} \sin \omega t \tag{2.60}$$

Statik deformasyonun maksimum değeri, (2.61) denklemiyle verilmiştir.

$$(u_{st})_0 = \frac{p_0}{k} \tag{2.61}$$

(2.61) ifadesi, sisteme etkiyen p_0 genliğindeki kuvvetin yol açtığı statik deformasyon olarak açıklanabilir. (2.59) bağıntısında, parantez içinde verilen ifadenin, ω/ω_n frekans oranına göre değişimi, Şekil 2.21'de gösterilmiştir.



Şekil 2.21 Frekans oranı altında $\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^{-1}$ ifadesinin değişimi (Chopra, 2001).

Şekil 2.21'den de görüleceği üzere, $\omega/\omega_n < 1$ ya da $\omega < \omega_n$ ise, $\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^{-1}$ çarpanı pozitiftir. Bu çarpanın pozitif olması ise, $u(t)$ ve $p(t)$ değerlerinin aynı işarette oldukları anlamına gelir. Bir başka deyişle, sisteme etkiyen kuvvet sağ tarafa doğru ise, sistemin yapacağı deplasmanda sağa doğru olacaktır. Bu durumdaki deplasman için, etkitilen kuvvetle **aynı fazdadır** denir. Eğer; $\omega/\omega_n > 1$ ya da $\omega > \omega_n$ ise, $\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^{-1}$ çarpanı negatiftir. Bu çarpanın negatif olması ise, $u(t)$ ve $p(t)$ değerlerinin farklı işarette oldukları anlamına gelir.

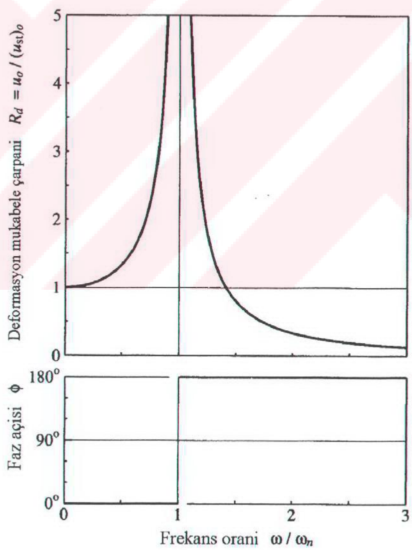
Bir başka deyişle, sisteme etkiyen kuvvet sağ tarafa doğru ise, sistemin yapacağı deplasman sola doğru olacaktır. Bu durumdaki deplasman için, etkitilen kuvvetle **farklı fazdadır** denir.

Faz kavramını, matematiksel olarak açıklayabilmek için; (2.59) bağıntısı, $u(t)$ titreşim deplasmanının $u(0)$ genliği ve ϕ **faz açısı** türünden yazılırsa, (2.62) ifadesi elde edilir.

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t - \phi) = (u_{st})_0 R_d \sin(\omega t - \phi) \tag{2.62}$$

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{\left|1-(\omega/\omega_n)^2\right|} \quad \text{ve} \quad \phi = \begin{cases} 0^\circ & \omega < \omega_n \\ 180^\circ & \omega > \omega_n \end{cases} \tag{2.63}$$

$\omega < \omega_n$ ve $\phi = 0^\circ$ için, deplasman $\sin \omega t$ değeri kadar değişerek, etkiyen **kuvvetle aynı fazdadır**. $\omega > \omega_n$ ve $\phi = 180^\circ$ için, deplasman $-\sin \omega t$ değeri kadar değişerek, etkiyen **kuvvetle farklı fazlardadır**. Faz açısı, frekans oranının bir fonksiyonu olarak, Şekil 2.22'de gösterilmiştir.



Şekil 2.22 Harmonik kuvvete maruz sönümsüz sistem için deformasyon mukabele çarpanı ve faz açısı (Chopra, 2001).

$u(0)$ dinamik yerdeğiştirmenin, $(u_{st})_0$ statik yerdeğiştirmeye oranı, **R_d Dinamik Büyütme**

Çarpanı olarak isimlendirilir. Bu ifade, Şekil 2.22'de de frekanslar oranının fonksiyonu olarak gösterilmiştir. Şeklin de incelenmesinden görüleceği gibi, $\beta = \dfrac{\omega}{\omega_n}$ oranı eğer küçükse, $R_d > 1$ ve dinamik deplasmanın genliği yaklaşık statik deplasmanın genliğine eşittir. Eğer $\beta > \sqrt{2}$ ise, $R_d < 1$ olacak ve dinamik deplasman genliği statik deplasman genliğinden küçük olacaktır. β değeri $\sqrt{2}$ den artmaya devam ederse, R_d küçülür ve $\beta \to \infty$ iken, sıfır değerine ulaşır. Buda şunu gösterir: Çok çabuk değişen kuvvetler altında titreşim deplasmanı çok küçüktür. Bir başka deyişle; zorlanma frekansı çok büyük olduğu için, kütle, atalet kuvveti dolayısıyla bunu izleyememekte ve hemen hemen hareketsiz kalmaktadır. $\beta = 1$ ise, $R_d >> 1$ olur. Buda, dinamik deplasman genliğinin, statik deplasman genliğinden çok fazla büyük olduğunu gösterir. **Rezonans frekansı**, R_d'yi maksimum yapan zorlayıcı frekanstır. Sönümsüz bir sistem için rezonans frekansı, ω_n olup, bu frekansta R_d sonsuz değerini almaktadır (Chopra, 2001).

Eğer, $\beta = \dfrac{\omega}{\omega_n} = 1$ ise, (2.58) denklemi artık geçerli olmamaktadır. Bu durumda, özel çözüm için seçilen, $C \sin \omega t$, fonksiyonu artık homojen çözümün de bir parçası olduğundan kullanılamamakta ve özel çözüm (2.64) ifadesine dönüşmektedir.

$$u_p(t) = -\frac{p_0}{2k}\omega_n t \cos \omega_n t \qquad \omega = \omega_n \tag{2.64}$$

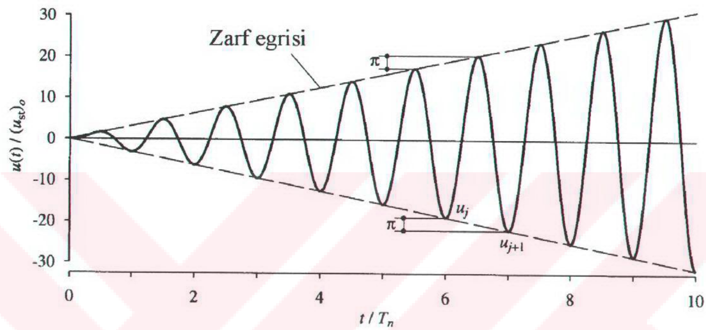
Başlangıçta sükunetteki bir sistem için toplam çözüm (2.65) ve (2.66)'da verilmiştir.

$$u(t) = -\frac{1}{2}\frac{p_0}{k}(\omega_n t \cos \omega_n t - \sin \omega_n t) \tag{2.65}$$

$$\frac{u(t)}{(u_{st})_0} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2t\pi}{T_n}\cos\frac{2t\pi}{T_n} - \sin\frac{2t\pi}{T_n}\right) \tag{2.66}$$

Bu sonuçlarda, Şekil 2.23'de gösterilmiştir. Bu şekilde, bir tam devri tamamlamak için geçen titreşim süresi $\mathbf{T_n}$ dir. Deformasyonun her devrinde, genlik $\dfrac{p_0\pi}{k}$ kadar artmaktadır. Deplasman genliği sonsuza doğru büyümekte, fakat sonsuz zaman geçtikten sonra ancak sonsuz olabilmektedir. Bu, araştırmaların sonucunda bulunmuş bir sonuç olup, gerçek yapılar için uygulanabilir. Bununla beraber uygulamada **teorik anlamda rezonans ortaya çıkmaz.**

Bunun önemli nedenlerinden biri her sistemde küçükte olsa bir sönüm bulunması ve sistemin tam anlamıyla doğrusal olmamasıdır. Eğer sistem kırılgan ise, deformasyon belli bir noktaya kadar artmaya devam edecek ve bu noktada sistem çökecektir. Diğer yandan, eğer sistem sünekse, akmaya çalışacak, rijitliği azalacak ve artık sistemin doğal frekansı zorlayıcı frekansa eşit olmayacaktır. Yukarıda incelemeden çıkan sonuç, rezonansta ve yakınında deplasmanların çok büyük olacağıdır. Bu durumda da (2.65), (2.66) ve Şekil 2.23 artık geçersiz olacaktır (Chopra, 2001).



Şekil 2.23 Sönümsüz sistemin, $\omega = \omega_n$ frekansında ve $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ sinüzoidal kuvvete mukabelesi (Chopra, 2001).

2.6 Sönümlü Sistemlerin Harmonik Tetiklemelere Mukabeleleri

Viskoz sönümleyici de içeren tek serbestlik dereceli sistemlerin harmonik titreşimlere mukabeleleri, (2.67) ifadesinde verilmiştir.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \sin \omega t \tag{2.77}$$

Bu ifadeye başlangıç şartları ($u = u(0)$ ve $\dot{u} = \dot{u}(0)$) uygulanırsa, (2.77) diferansiyel denkleminin özel çözümü, aşağıda verilen (2.78) denklemi kullanılarak elde edilir.

$$u_p(t) = C \sin \omega t + D \cos \omega t \tag{2.78}$$

(2.78) ifadesindeki C ve D sabitlerinin değerleri ise, (2.79) ve (2.80) denklemlerinde verilmiştir.

$$C = \frac{p_0}{k} \frac{1-(\omega/\omega_n)^2}{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2 + \left[2\zeta(\omega/\omega_n)\right]^2} \tag{2.79}$$

$$D = \frac{p_0}{k} \frac{-2\zeta\, \omega/\omega_n}{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2 + \left[2\zeta(\omega/\omega_n)\right]^2} \tag{2.80}$$

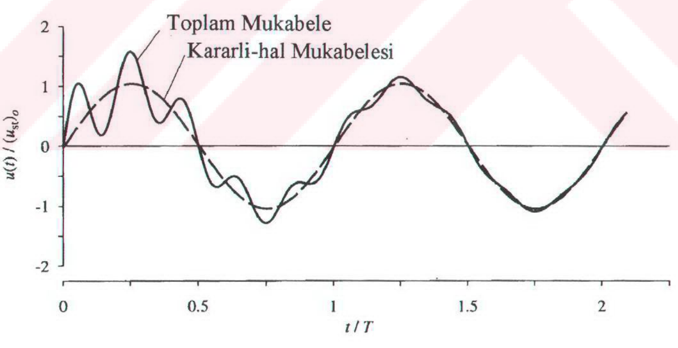
(2.77) denkleminin homojen çözümü ise, (2.81) ifadesinde verilmiştir.

$$u_c(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(a\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t) \tag{2.81}$$

(2.81) denkleminde; $\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ dir. Toplam çözüm, (2.82) ifadesinde verilmiştir.

$$u(t) = \underbrace{e^{-\zeta\omega_n t}(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t)}_{Kararsiz} + \underbrace{C\sin\omega t + D\cos\omega t}_{Kararlı-hal} \tag{2.82}$$

(2.82) denkleminde verilen **A** ve **B** katsayıları, başlangıç şartlarının uygulanması ile bulunabilir. Burada çözümün ilk parçasının sistemin davranışına olan etkisi üstel fonksiyondan dolayı söner, bu nedenle **Kararsız (Geçici) Titreşim** olarak isimlendirilir. İkinci parça ise dış yükle aynı frekansta olup, zamanla sönen bir titreşim değildir ve kalıcı olan **Kararlı Titreşim**'i temsil eder (Şekil 2.24) (Chopra, 2001).



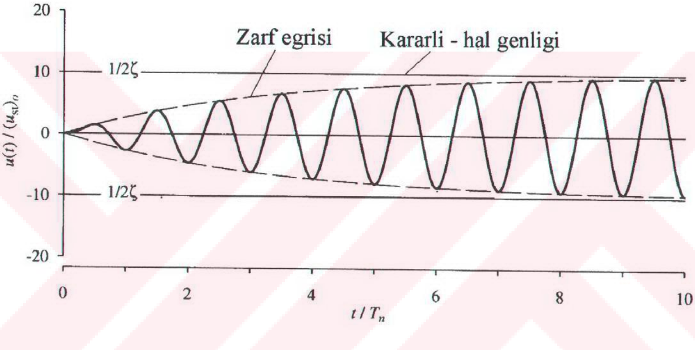
Şekil 2.24 Harmonik kuvvet etkisi altındaki sönümlü sistemin mukabelesi ($\beta = 0.2, \zeta = 0.05, u(0) = 0, \dot{u}(0) = \omega_n p_0/k$) (Chopra, 2001).

(2.79) ve (2.80) denklemlerinin incelenmesinden de görüleceği gibi, başlangıç koşulları altında $\beta = 1$ ise, $C = 0$ ve $D = -(u_{st})_0/2\zeta$ olur. Bu durumda (2.82) denkleminin sabitleri

$A = (u_{st})_0 / 2\zeta$ ve $B = (u_{st})_0 / 2\sqrt{1-\zeta^2}$ olur. Tüm bu sabitlerin değerleri yerlerine yazılırsa, (2.83) denklemi elde edilir.

$$u(t) = (u_{st})_0 \frac{1}{2\zeta}\left[e^{-\zeta\omega_n t}(\cos\omega_D t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_D t) - \cos\omega_n t \right] \quad (2.83)$$

(2.83) denkleminin grafiği, $\zeta = 0.05$ olan bir sistem için, Şekil 2.25'de gösterilmiştir. Şekil 2.23 ve Şekil 2.25'in incelenmesinden de görüleceği gibi, **sönüm, titreşim dalgalarının tepe noktalarının maksimum değerlerini düşürerek**, mukabelelerini de sınır değer olan $u_0 = (u_{st})_0 / 2\zeta$ ile kısıtlamaktadır.



Şekil 2.25 Sinüzoidal kuvvete maruz, $\omega = \omega_n$, $u(0) = \dot{u}(0) = 0$, $\zeta = 0.05$ için sönümlü sistemin mukabelesi (Chopra, 2001).

Hafif sönümlü sistemlerde, (2.83) denklemindeki sinüslü terim küçüktür ve $\omega_D \approx \omega_n$ olur. Bu halde (2.83) denklemi, (2.84) de verilen ifadeye dönüşür.

$$\underbrace{u(t) \approx (u_{st})_0 \frac{1}{2\zeta}\left[(e^{-\zeta\omega_n t} - 1)\cos\omega_n t\right]}_{Zarf\ Fonksiyonu} \quad (2.84)$$

Deformasyon, zamanla cosinüs fonksiyonu olarak değişir. Şekil 2.25'de kesikli çizgilerle gösterilen zarf eğrisine göre, deformasyon fonksiyonunun genliği zamanla artar.

Harmonik tetiklemeye maruz sistemin, (2.78), (2.79) ve (2.80) de açıklanan kararlı – hal deformasyon denklemleri yeniden düzenlenirse, (2.85) bağıntısı elde edilir.

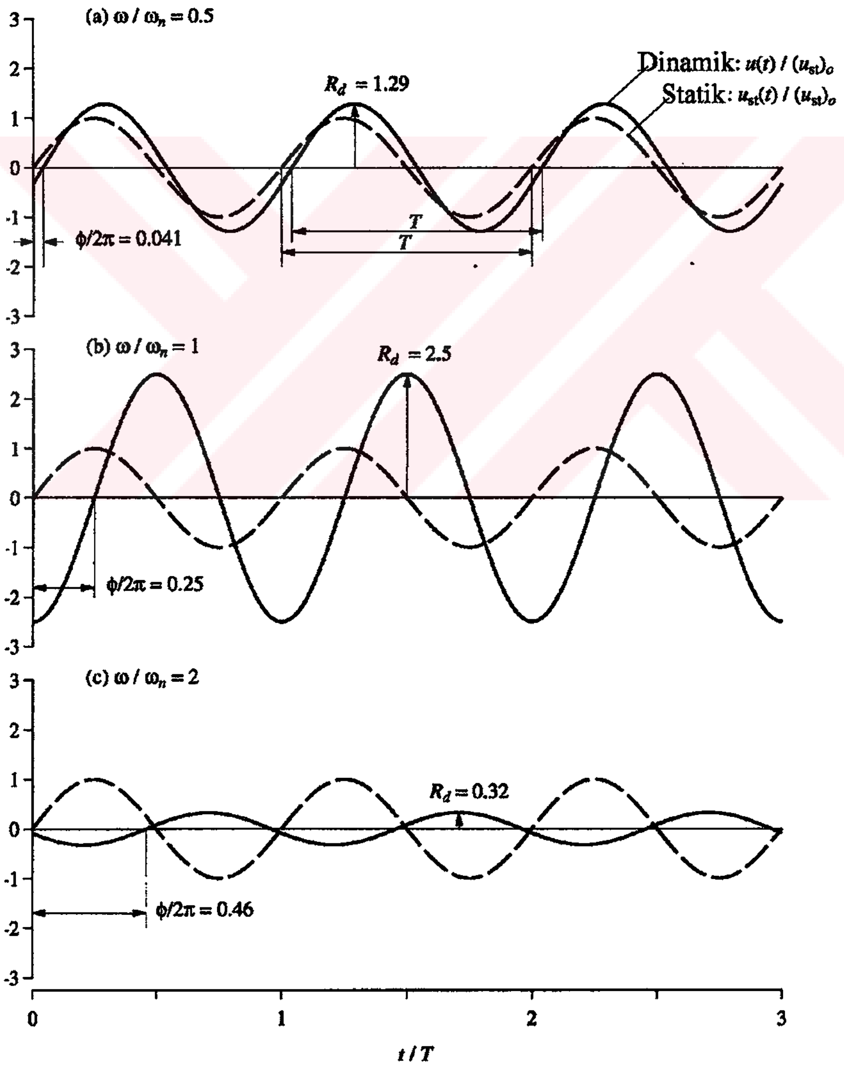
$$u(t) = u_0 \sin(\omega t - \phi) = (u_{st})_0 R_d \sin(\omega t - \phi) \qquad (2.85)$$

Bu denklemde; $u_0 = \sqrt{C^2 + D^2}$ ve $\phi = \tan^{-1}(-D/C)$ olur. C ve D değerleri yerlerine yazılarak ifade düzenlenirse; (2.86) ifadesi elde edilir.

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2 + \left[2\zeta(\omega/\omega_n)\right]^2}} \qquad (2.86)$$

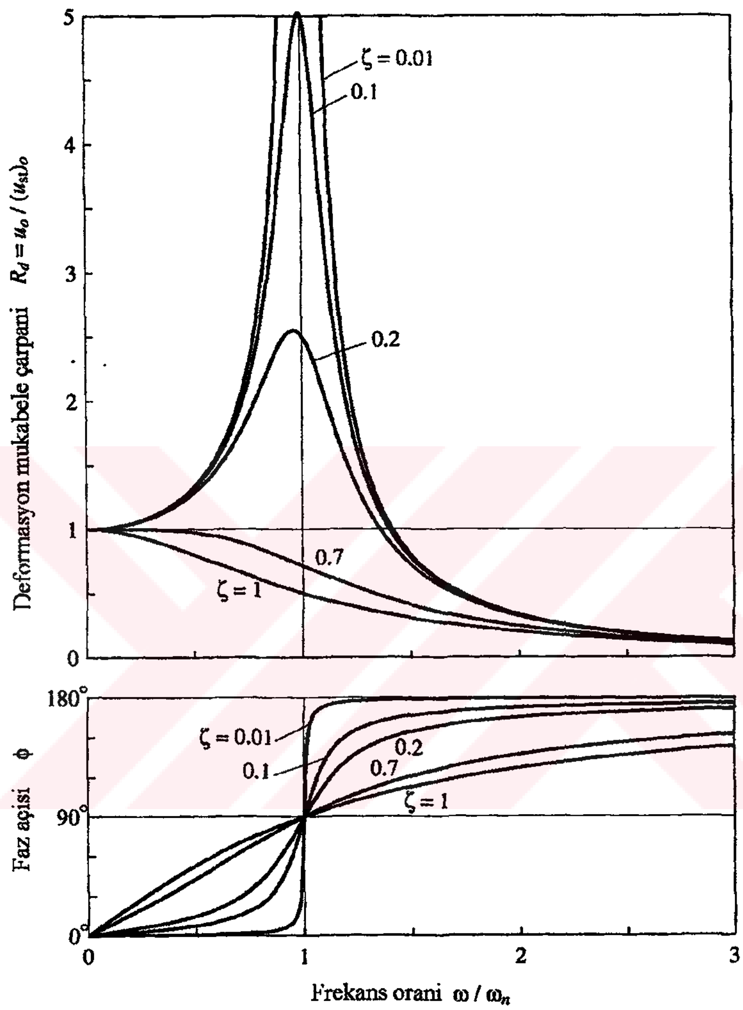
$$\phi = \tan^{-1}\frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} \qquad (2.87)$$

(2.85) denklemi, β nın üç değeri ve sabit $\zeta = 0.20$ değeri için, Şekil 2.26' da çizilmiştir.



Şekil 2.26 (a) $\beta = 0.5$ (b) $\beta = 1$ (c) $\beta = 2$ için, sönümlü sistemlerin sinüzoidal kuvvete kararlı-hal mukabelesi (Chopra, 2001).

Şekil 2.26'da verilen R_d ve ϕ değerleri, (2.86) ve (2.87) denklemlerinden hesaplanmıştır. Kesikli çizgilerle gösterilen ise, (2.60) denklemiyle verilen, **p(t)** yüküne maruz sistemin statik deformasyonudur. (2.60) denkleminde, etkiyen kuvvet değişmekte, **k** ise sabit kalmaktadır. Kararlı titreşim $T = 2\pi/\omega$ zorlayıcı frekansında, $\phi/2\pi$ kadar zaman gecikmesiyle oluşur. Bu ifadede ϕ **faz açısı** veya **faz gecikmesi** olarak isimlendirilir.



Şekil 2.27 Harmonik tetiklemeye maruz sönümlü sistemin dinamik büyütme çarpanı ve faz açısı (Chopra, 2001).

Zorlayıcı frekansa karşı gelen mukabelenin genlik değerinin grafiği, **frekans – mukabele eğrisi** olarak adlandırılır. Şekil 2.27'de böyle bir eğri görülmektedir. Şekil 2.27 incelenirse, tüm ζ değerlerinin, Şekil 2.22'de verilen $\zeta = 0$ eğrisinin altında olduğu görülür. **Sönüm, dinamik büyütme çarpanını ve deformasyon genliğini tüm tetikleme frekanslarında azaltmaktadır. Bu azalmanın değeri, zorlayıcı frekansa bağlıdır.** Buda **titreşim – frekans grafiğinde** üç bölgeye ayrılarak incelenecektir (Chopra, 2001).

1. Eğer frekanslar oranı, $\beta << 1$ ise; ($T >> T_n$ ve yavaş değişen kuvvet) R_d,1 den çok az büyük olup sönümden bağımsız değişmektedir. Bu sonuç; **dinamik mukabele genliğinin statik deformasyonunkiyle aynı olduğunu ve bununda sistemin rijitliği tarafından kontrol edildiğini** belirtmektedir.

$$u_0 \approx (u_{st})_0 = p_0/k \tag{2.88}$$

2. Eğer frekanslar oranı, $\beta >> 1$ ise; ($T << T_n$ ve hızlı değişen kuvvet) R_d, β arttıkça sıfıra yaklaşmakta ve sönümden etkilenmemektedir. β'nın çok büyük değerleri için (2.86) denklemiyle verilen ifadede, β^4 terimi daha baskın olmakta ve bu ifade yaklaşık olarak aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir. Bu sonuç; **mukabelenin sistemin kütlesi tarafından kontrol edildiğini** belirtmektedir.

$$u_0 \approx (u_{st})_0 \frac{\omega_n^2}{\omega^2} = \frac{p_0}{m\omega^2} \tag{2.89}$$

3. Eğer frekanslar oranı, $\beta \approx 1$ ise; R_d, sönüme karşı çok hassastır. Ufak sönüm değerleri için bile R_d, 1'den çok büyük olabilmektedir. Bir başka deyişle, dinamik mukabelenin genliği, statik deformasyonunkinden o oranda fazla olabilir. Eğer, $\beta = 1$ ise (2.86) bağıntısı aşağıdaki hale gelir. Bu sonuç; **mukabelenin sistemin sönümü tarafından kontrol edildiğini** belirtmektedir.

$$u_0 = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta} = \frac{p_0}{c\omega_n} \tag{2.90}$$

Şekil 2.27'de ϕ faz açısı; β'ya bağlı olarak değişerek, mukabelenin kuvvetin gerisinde kaldığı zaman olarak tanımlanır. Buda **titreşim – frekans grafiğindeki** aynı üç bölgeye ayrılarak incelenecektir (Chopra, 2001).

1. Eğer frekanslar oranı, $\beta << 1$ ise; (yavaş değişen kuvvet) ϕ, 0° yakın olup, **deplasman, etkiyen kuvvetle aynı fazdadır** (Şekil 2.26.a). Bir başka deyişle, sisteme etkiyen kuvvet sağa doğru ise, sistemin deplasmanıda sağa doğru olacaktır.

2. Eğer frekanslar oranı, $\beta >> 1$ ise; (hızlı değişen kuvvet) ϕ, 180° yakın olup, **deplasman etkiyen kuvvetle farklı fazdadır** (Şekil 2.26.c). Bir başka deyişle, sisteme etkiyen kuvvet sağa doğru ise, sistemin deplasmanı sola doğru olacaktır.

3. Eğer frekanslar oranı, $\beta = 1$ ise; ζ 'nin tüm değerleri için $\phi = 90^\circ$ olup, kuvvet sıfır noktalarından geçtiğinde, **deplasman ekstrem değerlerini almaktadır** (Şekil 2.26.b).

2.7 Dinamik Mukabele Çarpanları

Bu bölümde, deformasyon, hız, ivme mukabele çarpanları ile bu çarpanların boyutsuz oldukları ve bu üç mukabele değerinin genlikleri açıklanmaya çalışılacaktır. Kolaylık açısından, (2.85) denklemini, düzenleyerek tekrar yazarsak,

$$\frac{u(t)}{p_0/k} = R_d \sin(\omega t - \phi) \tag{2.90}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada, R_d, **deformasyon mukabele çarpanı** olup; u_0 dinamik deformasyonun $(u_{st})_0$ statik deformasyonuna oranıdır. (2.90) denkleminin türevi, hız mukabelesi için bir ifade verir.

$$\frac{\dot{u}(t)}{p_0/\sqrt{km}} = R_v \cos(\omega t - \phi) \tag{2.91}$$

Burada, R_v, **hız mukabele çarpanı** olup, R_d ile arasında aşağıdaki şekilde bir bağıntı yazılabilir.

$$R_v = \frac{\omega}{\omega_n} R_d \tag{2.92}$$

(2.91) denkleminin türevi, ivme mukabelesi için bir ifade verir.

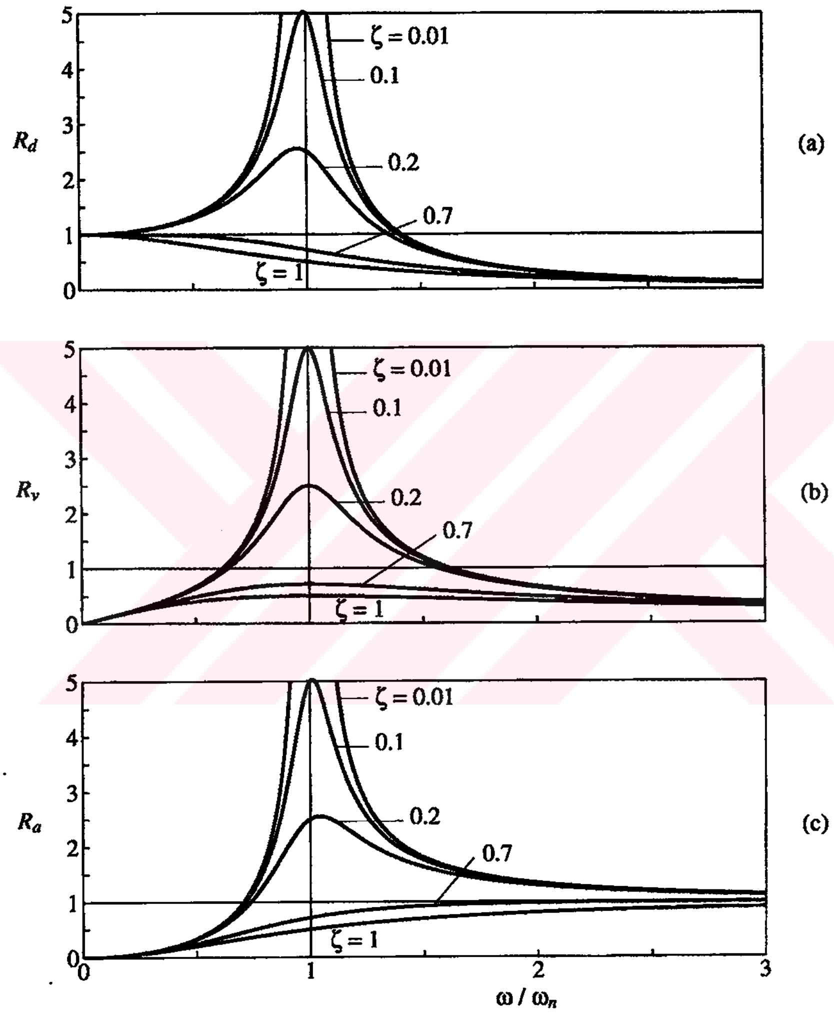
$$\frac{\ddot{u}(t)}{p_0/m} = -R_a \sin(\omega t - \phi) \tag{2.93}$$

Burada, R_a, **ivme mukabele çarpanı** olup, R_v ile arasında aşağıdaki şekilde bir bağıntı yazılabilir (Chopra, 2001).

$$R_a = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 R_d \tag{2.94}$$

Şekil 2.28'de R_d, R_v ve R_a dinamik mukabele çarpanları, β'nın fonksiyonu olarak grafiklendirilmiştir. Şeklin incelenmesinden de görüleceği gibi; R_d, Şekil 2.27 ile aynı olmasına karşın, R_v ve R_a grafikleri yenidir. R_d grafiğinin incelenmesinden, $\beta = 0$ iken

$R_d = 1$ olduğu, $\beta < 1$ iken R_d'nin maksimum değerine ulaştığı ve $\beta \to \infty$ iken de $R_d \to 0$ olduğu görülür. R_v grafiğinin incelenmesinden, $\beta = 0$ iken, $R_v = 0$ olduğu, $\beta = 1$ iken R_v'nin maksimum değerine ulaştığı ve $\beta \to \infty$ iken de $R_v \to 0$ olduğu görülür. R_a grafiğinin incelenmesinden de, $\beta = 0$ iken, $R_a = 0$ olduğu, $\beta > 1$ iken R_a'nın maksimum değerine ulaştığı ve $\beta \to \infty$ iken de $R_a \to 1$ olduğu görülür. $\zeta > 1/\sqrt{2}$ için ise, R_d ve R_a'nın ekstrem değerinin olmadığı görülür.

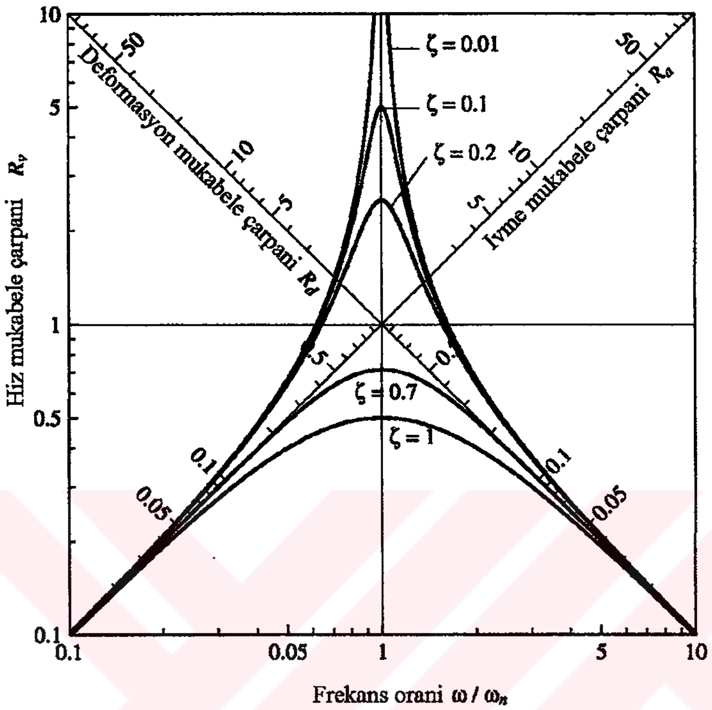


Şekil 2.28 Harmonik kuvvet etkisi altındaki sönümlü sistem için deformasyon, hız ve ivme mukabele çarpanları (Chopra, 2001).

Dinamik mukabele çarpanları arasında aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz.

$$\frac{R_a}{\omega/\omega_n} = R_v = \frac{\omega}{\omega_n} R_d \tag{2.95}$$

(2.95) ifadesi, her üç çarpanı da tek bir grafik üzerinde gösterme imkanı vermektedir. R_v - β grafiğindeki veriler (Şekil 2.28.b), Şekil 2.29'da dört yönlü logaritmik grafik kağıdına aktarılmıştır. R_d ve R_a değerleri logaritmik grafiğin, köşegeni üzerinden okunur. Bu değerlerin ölçekleri, R_v düşey ölçekten bağımsızdır.



Şekil 2.29 Harmonik kuvvet etkisi altındaki sönümlü sistem için dört yönlü logaritmik grafik (Chopra, 2001).

Rezonans frekansı, en fazla mukabele genliğini oluşturan zorlayıcı frekans olarak tanımlanmıştı. Şekil 2.28'de deplasman, hız ve ivme frekans – mukabele eğrilerinde maksimumlar, birbirinden çok az farklı frekanslarda oluşmaktadırlar. Bu rezonans frekansları; R_d, R_v ve R_a değerlerinin ilk bileşenlerini sıfıra eşitleyerek, β oranı altında, $\zeta < 1/\sqrt{2}$ için, aşağıdaki denklemlerle bulunabilir (Chopra, 2001).

Deplasman resonans frekansı: $\omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$

Hız rezonans fekansı: ω_n

İvme rezonans fekansı: $\omega_n / \sqrt{1-\zeta^2}$

Sönümsüz bir sistem için ise, üç rezonans frekansı da aynı olup, ω_n doğal frekansa eşittirler.

İçgüdüsel olarak, sönümlü sistemin rezonans frekanslarının, $\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ doğal frekansında olması gerektiği düşünülebilir; ancak bu böyle olmamaktadır. Üç rezonans frekansı ve doğal frekans arasındaki farkta ihmal edilebilir düzeydedir. Buna göre, üç dinamik mukabele çarpanının, rezonans frekansları (2.96) denklemiyle verilmiştir.

$$R_d = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad R_v = \frac{1}{2\zeta} \qquad R_a = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{2.96}$$

2.8 Viskoz Sönümde Kaybolan Enerji

Tek serbestlik dereceli kararlı bir sistemin, $p(t) = p_0 \sin \omega t$ kuvvetine maruz kaldığını düşünelim. Harmonik titreşimin bir çevriminde (devrinde) viskoz sönüm tarafından harcanan enerji aşağıda verildiği gibidir.

$$E_D = \int f_D du = \int_0^{2\pi/\omega} (c\dot{u})\dot{u}dt = \int_0^{2\pi/\omega} c\dot{u}^2 dt = c\int_0^{2\pi/\omega} [\omega u_0 \cos(\omega t - \phi)]^2 dt = \pi c\omega u_0^2 = 2\pi\zeta\frac{\omega}{\omega_n}ku_0^2 \tag{2.97}$$

Görüleceği gibi, harcanan enerji hareketin genliğinin karesi ile orantılıdır. Harcanan enerji, zorlayıcı titreşim ile doğrusal olarak artacağından, her farklı sönüm ve genlik için bu değer değişir. Kararlı titreşimde, uygulanan kuvvetten dolayı sisteme giren enerji, viskoz sönümle harcanır. Titreşimin herbir çevriminde, $p(t)$ dış yükünden dolayı sisteme giren enerji;

$$E_I = \int p(t)du = \int_0^{2\pi/\omega} p(t)\dot{u}dt = \int_0^{2\pi/\omega} [p_0 \sin \omega t][\omega u_0 \cos(\omega t - \phi)]dt = \pi p_0 u_0 \sin\phi \tag{2.98}$$

şeklindedir. (2.87) denklemi faz açısı için tekrar düzenlenirse, (2.99) ifadesi bulunur.

$$E_I = 2\pi\zeta\frac{\omega}{\omega_n}ku_0^2 \tag{2.99}$$

(2.97) ve (2.99) ifadelerinden $E_I = E_D$ eşitliği görülür.

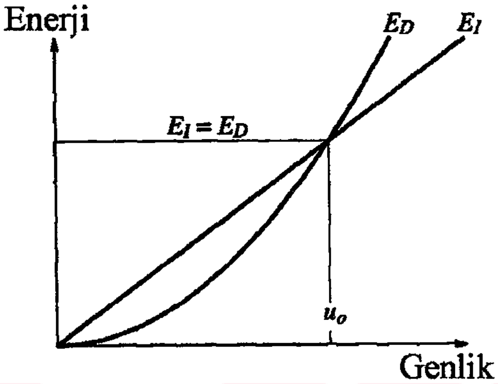
Potansiyel enerji ve kinetik enerjiye ne olduğunu bulmaya çalışalım. Harmonik titreşimin herbir çevriminde, potansiyel enerjideki (yayın gerilme enerjisine eşit) ve kinetik enerjideki değişim sıfırdır. Buda, (2.100) ve (2.101) bağıntılarında gösterilmiştir (Chopra, 2001).

$$E_S = \int f_S du = \int_0^{2\pi/\omega} (ku)\dot{u}dt = \int_0^{2\pi/\omega} k[u_0 \sin(\omega t - \phi)][\omega u_0 \cos(\omega t - \phi)]dt = 0 \tag{2.100}$$

$$E_K = \int f_I \, du = \int_0^{2\pi/\omega} (m\ddot{u})\dot{u}dt = \int_0^{2\pi/\omega} m[-\omega^2 u_0 \sin(\omega t - \phi)][\omega u_0 \cos(\omega t - \phi)]dt = 0 \qquad (2.101)$$

(2.98) ifadesi, $\omega = \omega_n$ ve $\phi = 90°$ değerleri için tekrar düzenlenecek olursa, (2.102) ifadesi elde edilir.

$$E_I = \pi p_0 u_0 \qquad (2.102)$$



Şekil 2.30 E_I, sisteme giren enerji ve E_D viskoz sönümde dağıtılan enerji (Chopra, 2001).

Şekil 2.30'dan da görüleceği gibi, sisteme giren enerji deplasman genliği ile doğrusal değişir. Buna mukabil, harcanan enerji, deplasman genliği ile ikinci dereceden değişir (2.97). Şekil 2.30'da gösterildiği gibi, kararlı duruma ulaşılmadan önce; her çevrimde sisteme giren enerji, sönüm tarafından dağıtılan enerjiden daha fazladır. Bu iki enerji arasındaki fark, bir sonraki çevrimde daha büyük genklikli deplasmana yol açar. Büyüyen deplasman genliği ile, harcanan enerji, giren enerjiden daha çabuk artar. Nihayet, **giren ve dağıtılan enerjiler, sistemin kararlı durumu için, u_0 genlikli deplasmanında, birbirlerine eşit olurlar**. Bu enerji dengesi, $\omega = \omega_n$ ile harmonik kuvvete maruz sistemin u_0 genliğinin bulunmasına alternatif bir yol teşkil eder. (2.97) ve (2.102) denklemlerinin eşitliğinden, u_0 genliği çekilirse (2.103) ifadesi bulunur (Chopra, 2001).

$$\pi p_0 u_0 = \pi c \omega_n u_0^2 \qquad (2.102)$$

$$u_0 = \frac{p_0}{c\omega_n} \qquad (2.103)$$

(2.103) denklemi, (2.82) hareket denkleminin çözümüyle de uyumludur.

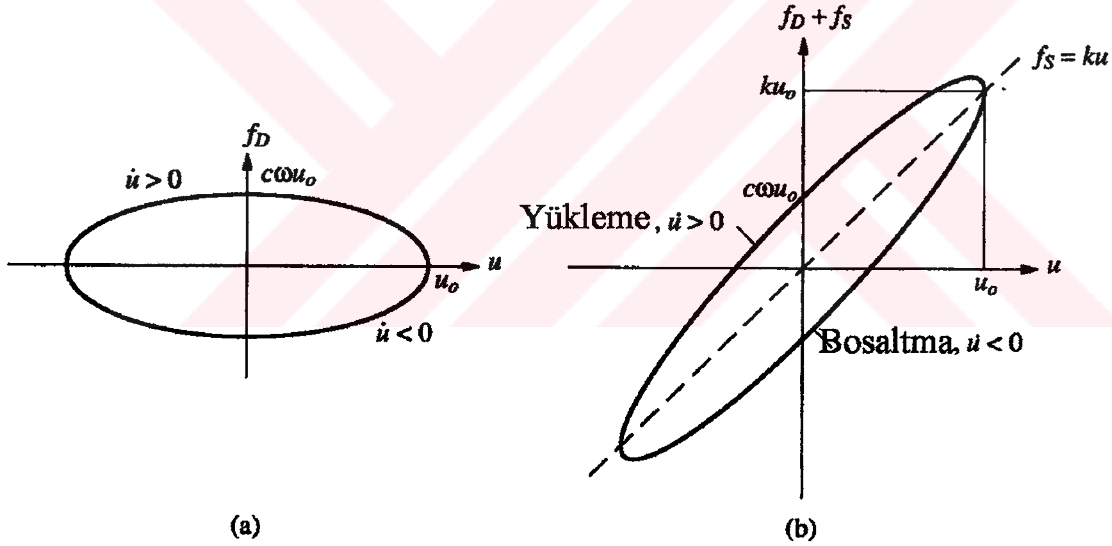
Viskoz sönümde dağıtılan enerjinin grafiğini çizmek için, önce f_D sönüm kuvveti ile u deplasmanı arasındaki bağıntıyı çıkarmak gerekir.

$$f_D = c\dot{u}(t) = c\omega u_0 \cos(\omega t - \phi) = c\omega\sqrt{u_0^2 - u_0^2 \sin^2(\omega t - \phi)} = c\omega\sqrt{u_0^2 - [u(t)]^2} \tag{2.104}$$

Bu ifade de tekrar düzenlenecek olursa, (2.105) denklemi elde edilir.

$$\left(\frac{u}{u_0}\right)^2 + \left(\frac{f_D}{c\omega u_0}\right)^2 = 1 \tag{2.105}$$

(2.105) denklemi ise, bir elips denklemi verir (Şekil 2.31.a). Şekilde verilen $f_D - u$ eğrisinin incelenmesinden fonksiyonun tek değerli olmadığı görülür. Bu eğri şeklide, **çevrimsel eğri (halka)** olarak bilinir. Elipsin sınırladığı alan, (2.97) ifadesinde verildiği gibi olup, $\pi(u_0)(c\omega u_0) = \pi c\omega u_0^2$ şeklindedir. İşte bu çevrimsel eğrinin altındaki alan, harcanan (dağıtılan) enerjiyi verir.



Şekil 2.31 (a) Viskoz sönümleyici; (b) yay ve viskoz sönümleyici beraber sistemler için çevrimsel eğriler (Chopra, 2001).

Deney sonuçlarından bulunduğu üzere, hesaplamalarda, toplam direnç kuvvetini dikkate almak gerekir.

$$f_S + f_D = ku(t) + c\dot{u}(t) = ku + c\omega\sqrt{u_0^2 - u^2} \tag{2.106}$$

$f_S + f_D$ toplamının, u deplasmanında değişim grafiği, Şekil 2.31.a'da gösterilen elipsin, (2.106) denkleminde bulunan ku teriminden dolayı dönmüş şekli olup, bu da Şekil 2.31.b'de gösterilmiştir. Dikkat edilirse, $f_S = ku$ tek değerli elastik kuvvetinin sınırladığı alan sıfır olduğundan, sönümün dağıttığı enerji, yine elips tarafından sınırlanan alandır.

Viskoz sönümle ilintili olan çevrimsel eğri, dinamik yüklemenin tabiatıyla alakalı olduğu için, dinamik çevrimin bir sonucudur. Eğrinin alanı, tetikleme frekansı ile orantılıdır; ki bu da, eğer çevrimsel kuvvet yeteri kadar yavaş uygulanıyorsa (ω=0), kuvvet – deformasyon eğrisinin çevrimsel eğri yerine, tek değerli bir eğri olmasına yol açar. Dinamik çevrimin ayırtedici özelliği, plastik deformasyonla bağlantılı iseler, çevrim eğrisinin Şekil 2.2.c'de gösterildiği gibi noktasal değilde, eliptik olmasıdır. Bir başka önemli konu ise, çevrimsel eğrilerin statik çevrimsel yüklemelerde dahi oluşabileceğidir. Bu fevkalede önemli olay, kuvvet – deformasyon eğrisinin deformasyon hızına bağlı olmamasından, **statik çevrim** olarak bilinir (Chopra, 2001).

3. TEK SERBESTLİK DERECELİ SİSTEMLERİN ÇÖZÜM METOTLARI

Literatürde, tek serbestlik dereceli sistemlerin çözümleri için bugüne kadar pekçok metot geliştirilmiştir. Aslında bu konu başlı başına araştırma gerektirmektedir. Bundan dolayı, burada metotların temel prensipleri açıklanmaya çalışılacaktır.

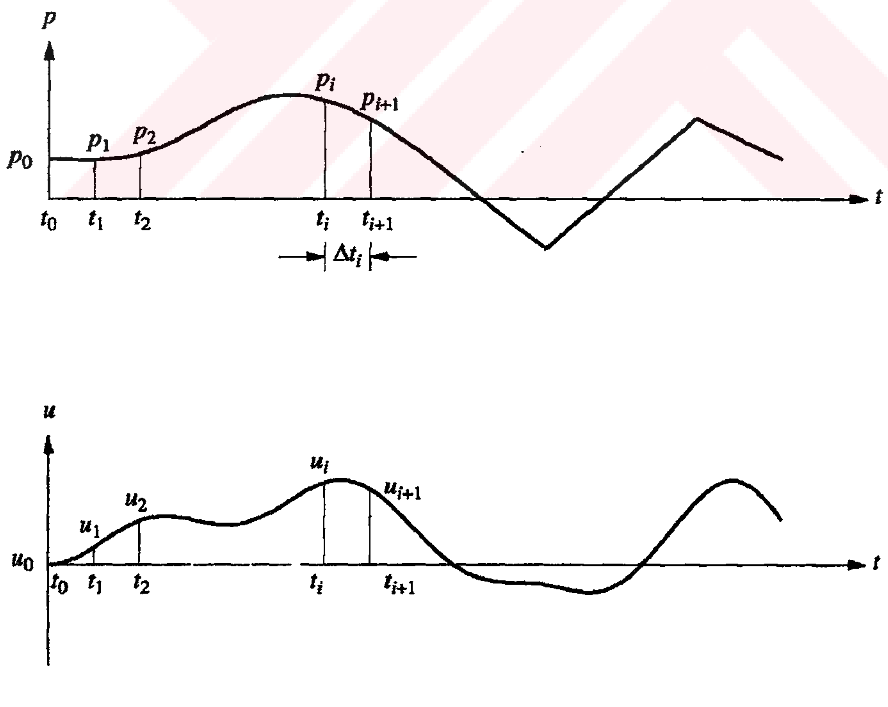
Eğer sisteme uygulanan kuvvet dinamikse, ya da sistem doğrusal değilse, mukabeleyi analitik olarak çözmek mümkün olmayabilir. Bu durumda da nümerik yöntemler kullanılmalıdır.

3.1 Zaman Artım Yöntemleri

Elastik olmayan bir sistemin hareket denklemi, (3.1) ifadesinde olduğu gibidir.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + f_S(u,\dot{u}) = p(t) \text{ veya } -m\ddot{u}_g(t) \tag{3.1}$$

Bu denklemde, başlangıç koşulları, $u = u(0)$ ve $\dot{u} = \dot{u}(0)$ dır. Sistemin doğrusal viskoz sönüme sahip olduğu varsayılır. Her ne kadar, diğer sönüm türleri de geçerli olsa da, burada viskoz sönüm ele alınacaktır. $p(t)$, uygulanan kuvvet ise ayrılmış, $p_i = p(t_i); i = 0'dan\, N'ye$, olan kümelerin toplanmasıyla bulunur (Şekil 3.1).



Şekil 3.1 Zaman artım yöntemi için notasyon (Chopra, 2001).

Şekilden de görüleceği gibi, zaman aralığı (3.2) ifadesinde verildiği gibidir.

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i \tag{3.2}$$

Gerekli olmasada, genelde Δt_i zaman aralığı sabit alınır. Mukabele, ayrılmış t_i zaman aralıklarında belirlenir. i, zamanı göstemek üzere, u_i, $\dot{u}_i$ ve $\ddot{u}_i$ sırasıyla, tek serbestlik dereceli sistemin deplasmanını, hızını ve ivmesini verir. Bu ifadeler, i zamanında, (3.1) denklemini sağlarlar.

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + (f_S)_i = p_i \tag{3.3}$$

(3.3) denkleminde; $(f_S)_i$, i anındaki direnç kuvvetini gösterir. Doğrusal elastik sistem için $(f_S)_i = ku_i$ olur. Eğer sistem elastik değilse, o zaman $(f_S)_i$, o andaki deplasmana ve hıza bağlıdır. $i+1$ anında, mukabele niteliyecileri, u_{i+1}, $\dot{u}_{i+1}$ ve $\ddot{u}_{i+1}$ değerlerinde olup, (3.1) denklemini sağlarlar.

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + (f_S)_{i+1} = p_{i+1} \tag{3.4}$$

$i = 0,1,2,3...$ değerleri uygulandığında, zaman artım yöntemiyle, $i = 1,2,3...$ zamanlarında istenen mukabeleler bulunur. İşleme ise, bilinen başlangıç koşullarından $(u(0), \dot{u}_0 = \dot{u}(0))$ başlanır. i zamanından $i+1$ zamanına geçmek tam olarak çözüm değildir. Nümerik yöntemlerin sağlaması gereken şartlar vardır. Bu şartlardan önemli 3 tanesi aşağıda verilmiştir (Akbaş, 2002).

1. **Yakınsama**: Δt_i zaman aralığı azaldıkça, nümerik çözüm gerçek çözüme yaklaşmalıdır.

2. **Stabilite** : Nümerik yöntem, çözümün her anında stabil olmalı, makul ve mantıklı sonuçlar vermelidir.

3. **Doğruluk Derecesi** : Nümerik yöntem, gerçek çözüme yakın değerler vermelidir.

3.2 Merkezi Farklar Yöntemi

Bu yöntem, yerdeğiştirmenin zamana göre türevlerinin sonlu farklarla ifade edilmesine dayanır. $\Delta t_i = \Delta t$, sabit zaman aralığı seçilerek;

$$\dot{u}_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t} \quad \text{ve} \quad \ddot{u}_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2} \tag{3.5}$$

ifadeleri bulunur. Bu ifadeler, (3.3) denkleminde yerine yazılarak, doğrusal elastik sistemler için, (3.6) ifadesine ulaşılır. Bu ifadede, u_i ve u_{i-1} değerlerinin bilindiği kabul edilir. Bilinen değerler, eşitliğin sağ tarafına geçirilerek, denklem tekrar düzenlenirse (3.7) ifadesi elde edilir.

$$m\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{(\Delta t)^2}+c\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta t}+ku_i=p_i \tag{3.6}$$

$$\underbrace{\left[\frac{m}{(\Delta t)^2}+\frac{c}{2\Delta t}\right]}_{\hat{k}}u_{i+1}=\underbrace{p_i-\left[\frac{m}{(\Delta t)^2}-\frac{c}{2\Delta t}\right]u_{i-1}-\left[k-\frac{2m}{(\Delta t)^2}\right]u_i}_{\hat{p}_i} \tag{3.7}$$

Bir başka deyişle;

$$\hat{k}u_{i+1}=\hat{p}_i \tag{3.8}$$

elde edilir. Son eşitlikten, u_{i+1} bilinmeyeni çekilirse,

$$u_{i+1}=\frac{\hat{p}_i}{\hat{k}} \tag{3.9}$$

bulunmuş olur.

$i+1$ anındaki u_{i+1} çözümü, $i+1$ anındaki (3.4) denge koşulu kullanılmadan; i anındaki (3.3) denge ifadesi ile bulunabilir. Bu tür metotlara, **aşikar (kesin) metotlar** denir (Chopra, 2001).

Eğer, (3.7) denklemi de incelenirse, bilinen u_i ve u_{i-1} değerlerinin, u_{i+1} değerini hesaplamada kullanıldığı görülür. Öyleyse; u_0 ve u_{-1} değerleri, u_1 değerini bulmada kullanılabilir. Burada u_0, başlangıç deplasmanı bilinmektedir. u_{-1} değerini bulmak için, (3.3) ifadesinde, $i=0$ yazılarak;

$$\dot{u}_0=\frac{u_1-u_{-1}}{2\Delta t} \quad \text{ve} \quad \ddot{u}_0=\frac{u_1-2u_0+u_{-1}}{(\Delta t)^2} \tag{3.10}$$

ifadeleri elde edilir. Birinci denklemden u_1 çekilerek, ikinci denklemde yerine yazılırsa;

$$u_{-1}=u_0-\Delta t(\dot{u}_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{u}_0 \tag{3.11}$$

ifadesi bulunur.

u_0 başlangıç deplasmanı ve $\dot{u}_0$ başlangıç hızı verilmişti. $t_0 = 0$ (0 anında) hareket denklemi;

$$m\ddot{u}_0 + c\dot{u}_0 + ku_0 = p_0 \tag{3.12}$$

halini alır. Bu denklemden de $t_0 = 0$ anındaki ivme çekilirse;

$$\ddot{u}_0 = \frac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m} \tag{3.13}$$

denklemi elde edilir. Tüm bu adımlar Çizelge 3.1'de özetlenmiştir.

Çizelge 3.1 Merkezi Farklar Yöntemi (Chopra, 2001).

1.0 ***Baslangic hesaplari***

1.1 $\ddot{u}_0 = \dfrac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m}.$

1.2 $u_{-1} = u_0 - \Delta t\dot{u}_0 + \dfrac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{u}_0.$

1.3 $\hat{k} = \dfrac{m}{(\Delta t)^2} + \dfrac{c}{2\Delta t}.$

1.4 $a = \dfrac{m}{(\Delta t)^2} - \dfrac{c}{2\Delta t}.$

1.5 $b = k - \dfrac{2m}{(\Delta t)^2}.$

2.0 ***i zaman adimi için hesaplar***

2.1 $\hat{p}_i = p_i - au_{i-1} - bu_i.$

2.2 $u_{i+1} = \dfrac{\hat{p}_i}{\hat{k}}.$

2.3 Gerekirse : $\dot{u}_i = \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t}$; $\ddot{u}_i = \dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2}.$

3.0 ***Bir sonraki adim için tekrarlar***

i yerine i+1 yazarak; 2.1, 2.2 ve 2.3 deki adimlar tekrarlanir.

Eğer seçilen zaman aralığı yeteri kadar küçük değilse, işlemler sırasında anlamsız sonuçlar çıkmaya başlar ve metot kullanılamaz hale gelir. **Stabilite şartı** denilen ve (3.14)'de gösterilen deklemin sağlanması gerekmektedir.

$$\frac{\Delta t}{T_n} < \frac{1}{\pi} \tag{3.14}$$

Bu şart, tek serbestlik dereceli sistemler için hiçbir zaman zorlayıcı değildir; çünkü zaten mantıklı sonuçlar elde edebilmek için, küçük zaman aralığı seçmek gerekmektedir. Genelde, mukabeleyi tanımlamak için, $\frac{\Delta t}{T_n} \leq 0.1$ değeri yeterli olmaktadır. Çoğu deprem mukabele analizlerinde, yer ivmesini belirlemek için, genelde $\Delta t = 0.01 \sim 0.02\,\mathrm{s}$ gibi daha küçük değerler seçilmektedir (Chopra, 2001).

3.3 Newmark Yöntemi

1959 yılında, N. M. Newmark, aşağıdaki denklemlere dayanan bir grup zaman artım metotları geliştirmiştir.

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [(1-\gamma)\Delta t]\ddot{u}_i + (\gamma\Delta t)\ddot{u}_{i+1} \tag{3.15.a}$$

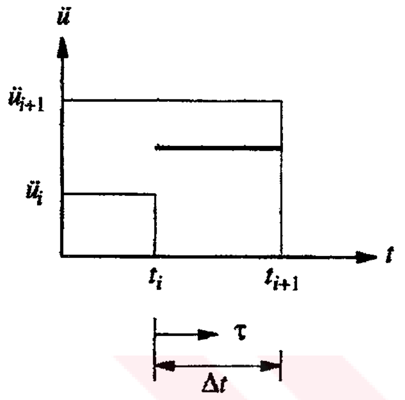
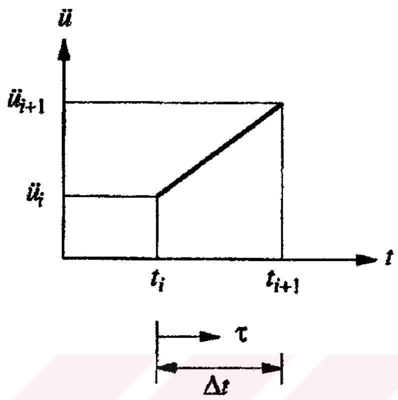
$$u_{i+1} = u_i + (\Delta t)\dot{u}_i + \left[(0.5-\beta)(\Delta t)^2\right]\ddot{u}_i + \left[\beta(\Delta t)^2\right]\ddot{u}_{i+1} \tag{3.15.b}$$

Bu denklemlerde, β ve γ parametreleri, zaman aralığında ivmenin değişimini ifade ederek, metodun **stabilite** ve **tutarlılık** karakteristiklerini belirten katsayılardır. Genelde, $\gamma = \frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{6} \leq \beta \leq \frac{1}{4}$ aralığında seçilerek, tutarlılık ve diğer karakteristik özellikler de sağlanmış olur. Zaman aralığının sonunda, yukarıdaki iki denklemle, (3.4) denklemi birleştirilerek; i anında bilinenler olan; u_i, $\dot{u}_i$ ve $\ddot{u}_i$ değerlerinden, $i+1$ anında bilinmeyenler olan; u_{i+1}, $\dot{u}_{i+1}$ ve $\ddot{u}_{i+1}$ değerleri hesaplanabilir. $\ddot{u}_{i+1}$ ifadesi, (3.15) denklemlerinin sağ tarafında yer aldığından, bu hesaplamaların yapılması için iterasyon gerekmektedir (Chopra, 2001).

3.3.1 Newmark Yönteminin Özel Durumları

Doğrusal sistemler için, Newmark yöntemi değiştirilerek, (3.15) denklemleri iterasyonsuz da çözülebilmektedir. Bu yönteme geçmeden önce, Newmark Yönteminin iki özel ve çok bilinen durumları olan; **ortalama ivme** ve **doğrusal ivme** yöntemlerinden bahsedilecektir. Bu iki yöntemin özellikleri, Çizelge 3.2'de gösterilmiştir. (3.16) denklemi, sabit zaman aralığında, ortalama ve doğrusal ivme yöntemlerine göre, ivmenin değişimini göstermektedir. (3.17) denkleminde ise, (3.16) denkleminin integrali alınmış ve $\dot{u}(\tau)$ hız değişkeni bulunmuştur. (3.17) denkleminde, $\tau = \Delta t$ için, (3.18) ifadesinde $i+1$ anındaki hız ifadesi elde edilmiştir. (3.19) denkleminde, (3.17) denkleminin integrali alınmış ve $u(\tau)$ deplasmanı bulunmuştur. (3.19) ifadesinde, $\tau = \Delta t$ ve $i+1$ anındaki deplasman için (3.20) bağıntısı elde edilmiştir. (3.18) ve (3.20) bağıntılarının, (3.15) bağıntılarıyla mukayesesinden, Newmark ortalama ivme denklemlerinin, $\gamma = \dfrac{1}{2}$ ve $\beta = \dfrac{1}{4}$ değerleri için; Newmark doğrusal ortalama denklemlerinin ise, $\gamma = \dfrac{1}{2}$ ve $\beta = \dfrac{1}{6}$ değerleri için sağlandığı görülebilir.

Çizelge 3.2 Newmark Yöntemleri (Chopra, 2001).

Ortalama Ivme Yöntemi	Dogrusal Ivme Yöntemi	
		
$\ddot{u}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$	$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_i + \frac{\tau}{\Delta t}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)$	(3.16)
$\dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \frac{\tau}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$	$\dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \ddot{u}_i\tau + \frac{\tau^2}{2\Delta t}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)$	(3.17)
$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$	$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$	(3.18)
$u(\tau) = u_i + \dot{u}_i\tau + \frac{\tau^2}{4}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$	$u(\tau) = u_i + \dot{u}_i\tau + \ddot{u}_i\frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{6\Delta t}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)$	(3.19)
$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i\,\Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{4}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$	$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i\,\Delta t + (\Delta t)^2\left(\frac{1}{6}\ddot{u}_{i+1} + \frac{1}{3}\ddot{u}_i\right)$	(3.20)

3.3.2 Newmark Yönteminin İteratif Olmayan Formülasyonu

İterasyon yapmadan, (3.15) denklemlerini yeniden düzenlemek için, aşağıdaki artım değerleri kullanılır.

$$\Delta u_i \equiv u_{i+1} - u_i \qquad \Delta\dot{u}_i \equiv \dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i \qquad \Delta\ddot{u}_i \equiv \ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i \tag{3.21}$$

$$\Delta p_i \equiv p_{i+1} - p_i \tag{3.22}$$

Bu ifadelere göre yeniden düzenlenen (3.15) denklemleri aşağıdaki hale gelir.

$$\Delta\dot{u}_i = (\Delta t)\ddot{u}_i + (\gamma\Delta t)\Delta\ddot{u}_i \tag{3.23.a}$$

$$\Delta u_i = (\Delta t)\dot{u}_i + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{u}_i + \beta(\Delta t)^2\Delta\ddot{u}_i \tag{3.23.b}$$

(3.23.b) denkleminden yararlanarak, (3.24) denklemini yazabiliriz.

$$\Delta\ddot{u}_i = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\Delta u_i - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{u}_i - \frac{1}{2\beta}\ddot{u}_i \tag{3.24}$$

(3.24) denklemini, (3.23.a) ifadesinde yerine yazarsak;

$$\Delta\dot{u}_i = \frac{\gamma}{\beta(\Delta t)}\Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta}\dot{u}_i + \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{u}_i \tag{3.25}$$

denklemini elde ederiz. (3.4) denkleminden (3.3) denklemini çıkarır ve elde ettiğimiz denklemde, (3.24) ve (3.25) ifadelerini yerlerine yazarsak, hareket denkleminin doğrusal sistemler için, artımsal halini elde etmiş oluruz (Chopra, 2001).

$$m\Delta\ddot{u}_i + c\Delta\dot{u}_i + k\Delta u_i = \Delta p_i \tag{3.26}$$

Yine bu denklemlerden;

$$\hat{k}\Delta u_i = \Delta\hat{p}_i \tag{3.27}$$

ifadesi elde edilir.

$$\hat{k} = k + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}c + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}m \tag{3.28}$$

$$\Delta\hat{p}_i = \Delta p_i + \left(\frac{1}{\beta\Delta t}m + \frac{\gamma}{\beta}c\right)\dot{u}_i + \left[\frac{1}{2\beta}m + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)c\right]\ddot{u}_i \tag{3.29}$$

m, k ve c sistem özelliklerinin; γ ve β algoritma parametrelerinin; $\dot{u}_i$ ve $\ddot{u}_i$ değerlerinin yerlerine yazılmasıyla; $\hat{k}$ ve $\Delta\hat{p}_i$ ifadeleri bulunmuş olur. Deplasman artımı ise, (3.30) ifadesiyle bulunur.

$$\Delta u_i = \frac{\Delta\hat{p}_i}{\hat{k}} \tag{3.30}$$

Δu_i bilindiğinden, $\Delta\dot{u}_i$ ve $\Delta\ddot{u}_i$, sırasıyla (3.25) ve (3.24) denklemlerinden; u_{i+1}, $\dot{u}_{i+1}$ ve $\ddot{u}_{i+1}$ ise (3.21) denkleminden bulunabilir.

$i+1$ anındaki ivme ise, $i+1$ anındaki hareket denkleminden ya da (3.24) ve (3.21) ifadelerinden elde edilebilir.

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{p_{i+1} - c\dot{u}_{i+1} - ku_{i+1}}{m} \tag{3.31}$$

(3.31) denklemi, hesaplara başlamak için gerekli olan $\ddot{u}_0$ değerinin bulunmasında kullanılır.

Newmark metodunda, $i+1$ anındaki çözüm, $i+1$ anında (3.4) denge denklemine eşit olan (3.26) denkleminden elde edilir. Bu tip metotlara, **kesin metotlar** denir.

Çizelge 3.3 Doğrusal sistemler için Newmark Yöntemi (Chopra, 2001).

Özel durumlar

(1) Ortalama ivme yöntemi $(\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4})$

(2) Dogrusal ivme yöntemi $(\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{6})$

1.0 ***Baslangiç hesaplari***

1.1 $\ddot{u}_0 = \dfrac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m}.$

1.2 Seçim: Δt.

1.3 $\hat{k} = k + \dfrac{\gamma}{\beta\,\Delta t}c + \dfrac{1}{\beta(\Delta t)^2}m.$

1.4 $a = \dfrac{1}{\beta\,\Delta t}m + \dfrac{\gamma}{\beta}c$; ve $b = \dfrac{1}{2\beta}m + \Delta t\left(\dfrac{\gamma}{2\beta} - 1\right)c.$

2.0 ***Her bir adim için yapilacak hesaplar***

2.1 $\Delta\hat{p}_i = \Delta p_i + a\dot{u}_i + b\ddot{u}_i.$

2.2 $\Delta u_i = \dfrac{\Delta\hat{p}_i}{\hat{k}}.$

2.3 $\Delta\dot{u}_i = \dfrac{\gamma}{\beta\,\Delta t}\Delta u_i - \dfrac{\gamma}{\beta}\dot{u}_i + \Delta t\left(1 - \dfrac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{u}_i.$

2.4 $\Delta\ddot{u}_i = \dfrac{1}{\beta(\Delta t)^2}\Delta u_i - \dfrac{1}{\beta\Delta t}\dot{u}_i - \dfrac{1}{2\beta}\ddot{u}_i.$

2.5 $u_{i+1} = u_i + \Delta u_i,\ \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta\dot{u}_i,\ \ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta\ddot{u}_i.$

3.0 ***Bir sonraki adim için tekrarlar.*** i yerine i+1 yazarak, 2. adim tekrarlanir.

Çizelge 3.3'de, Newmark metodu kullanılarak yapılan zaman artım yöntemi çözümünün özeti verilmiştir.

$$\frac{\Delta t}{T_n} \le \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}} \tag{3.32}$$

Yukarıda, (3.32) denklemi ile verilen ifade, Newmark yönteminin **stabilite şartıdır**.

$\gamma = \dfrac{1}{2}$ ve $\beta = \dfrac{1}{4}$ değerleri için, (3.32) stabilite şartı; aşağıda (3.33) ile verilen şekli alır.

$$\frac{\Delta t}{T_n} < \infty \tag{3.33}$$

(3.33) bağıntısından da anlaşılacağı gibi, **ortalama ivme yöntemi Δt'nin her değeri için koşulsuz stabildir**; ancak, **Δt'nin küçük değerleri için tutarlıdır**.

$\gamma = \frac{1}{2}$ ve $\beta = \frac{1}{6}$ değerleri için, (3.32) stabilite şartı; aşağıda (3.34) ile verilen şekli alır.

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq 0.551 \tag{3.34}$$

(3.34) bağıntısından da anlaşılacağı gibi, **doğrusal ivme yöntemi koşullu stabildir**.

Merkezi farklar yönteminde olduğu gibi, tek serbestlik dereceli sistemlerin analizlerinde, bu koşul da çok önemli bir yer tutmamaktadır. Bunun nedeni ise, tutarlı titreşim mukabelesi değeri elde edebilmek için zaten, $0.551T_n$'den daha küçük zaman artımları kullanılmaktadır.

3.4 Stabilite ve Hesaplama Hataları

3.4.1 Stabilite

Nümerik analizlerde seçilen zaman aralığı, verilen stabilite limitinden daha küçük ise, bu tür analizlere **koşullu stabil analiz** denir. Eğer nümerik analiz, zaman aralığının uzunluğundan bağımsız ise, bu tür analizlere **koşulsuz stabil analiz** denir. Daha önce de belirtildiği gibi, ortalama ivme yöntemi koşulsuz stabildir. Doğrusal ivme yöntemi $\Delta t/T_n \leq 0.551$ koşulu için stabil olup; merkezi farklar yöntemi ise, $\Delta t/T_n < 1/\pi$ koşulu için stabildir. Sonraki iki metot ise yine koşullu stabildir.

Nümerik sonuçlarda yeterli tutarlılığın (doğruluğun) sağlanması için, $\Delta t/T_n$ oranının stabilite limitinden daha küçük seçilmesi gerekir. Buda; tek serbestlik dereceli sistemlerin analizlerinde, stabilite kriterlerinin çok da sınırlayıcı olmadığını göstermektedir. Nümerik metotların stabiliteleri her ne kadar önemli ise de, çok serbestlik dereceli sistemlerin analizlerinde, genellikle koşulsuz stabil metotları kullanmak önemlidir (Chopra, 2001).

3.4.2 Hesaplama Hataları

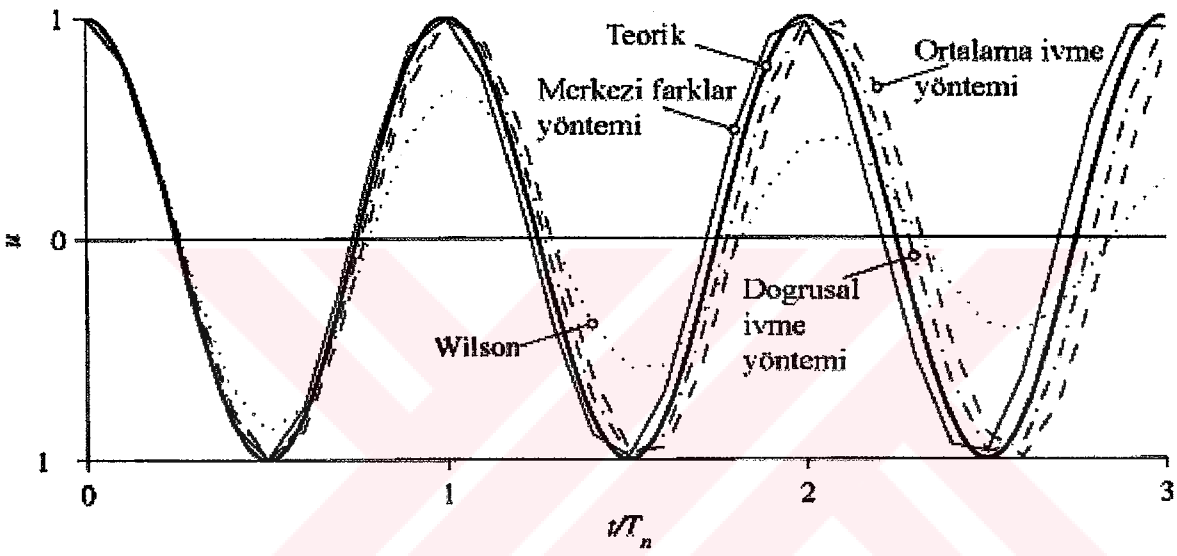
Serbest titreşim problemini göz önüne alalım;

$$m\ddot{u} + ku = 0 \qquad u(0) = 1 \qquad \dot{u}(0) = 0 \tag{3.35}$$

Teorik sonuç, (3.36) denkleminde olduğu gibidir.

$$u(t) = \cos\omega_n t \qquad (3.36)$$

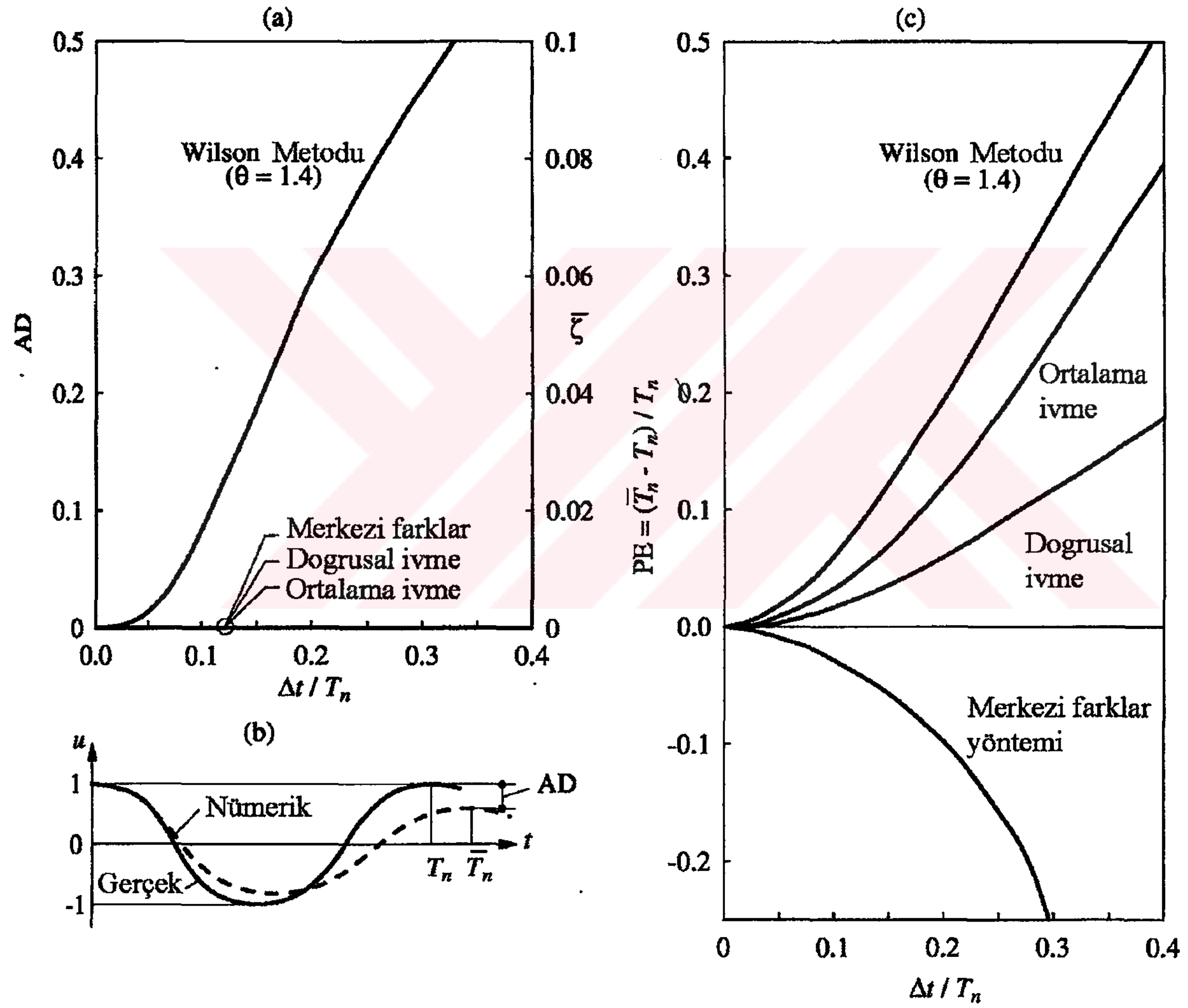
Bu problem; merkezi farklar yöntemi, ortalama ivme yöntemi, doğrusal ivme yöntemi ve Wilson yöntemi olmak üzere dört farklı metotla çözülmüştür. Şekil 3.2'de; $\Delta t = 0.1T_n$ için, nümerik sonuçlarla teorik sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmadan da görüleceği gibi, bazı nümerik metotların temeli, sistemin sönümsüz olsa dahi deplasman genliğinin zaman içinde azaldığı ve doğal periyodunun uzadığı ya da kısaldığı fikrine dayanmaktadır.



Şekil 3.2 Serbest titreşim için, nümerik ve teorik sonuçların karşılaştırılması (Chopra, 2001).

Şekil 3.3'de, dört nümerik yöntemde de $\Delta t/T_n$ oranının bir fonksiyonu olarak, **AD**, **genlik gecikmesi** ve **PE**, **periyot uzaması** gösterilmiş; AD ve PE sırasıyla, şeklin (b) ve (c) bölümlerinde açıklanmıştır. Burada işin matematiği üzerinde durulmayacaktır. Şekilden de görülebileceği gibi, üç metot deplasman genliğinde gecikme öngörmemektedir. **Wilson metodunda**, genlik gecikmesi dikkate alınmakta ise de; bu metot **nümerik sönüm** adı verilen ve şeklin (a) kısmında gösterilen $\bar{\zeta}$, **eşdeğer viskoz sönüm oranı** tanımlamaktadır. **Merkezi farklar yönteminde**, metodun stabilite limiti olan $\Delta t/T_n < 1/\pi$ değeri civarında, periyot yanlışının hızlı artışı görülebilir. Merkezi farklar yöntemi, en fazla yanlış periyot hatası yapmaktadır. Bu nedenle, **incelenen yöntemler içinde en tutarsızı bu metottur**. **Doğrusal ivme yöntemi**, stabilite değerinden küçük $\Delta t/T_n$ değerleri için, en az periyot uzamasını yapmaktadır. Metodun, genlik gecikmesini de göz önüne almadığını düşünürsek, **bu metot tek serbestlik dereceli sistemlerin çözümü için en ideal metottur** (bu sonuç çok serbestlik dereceli sistemler için farklıdır) (Chopra, 2001).

Şekil 3.3, seçilecek zaman aralığının sistemin doğal periyodu ile bağlantısı olduğunu ve $\Delta t = 0.1T_n$ değerinin tutarlı sonuçlar vereceğini belirtmektedir. Zorlayıcı fonksiyonun bozulmasını minimum da tutabilmek için, zaman aralığı yeterli küçüklükte olmalıdır. Genelde, depremlerde, $\Delta t = 0.02$ s olmakta ve sistemin mukabelesini hesaplamak için yapılan analizlerde, seçilen zaman aralığı bu değerden büyük olmamalıdır.



Şekil 3.3 Nümerik yöntemlerin $\Delta t/T_n$ oranında tutarlılıkları (Chopra, 2001).

Zaman aralığının seçiminde ilmi olmayan, ancak yararlı olan bir başka yol ise, mantıklı bir zaman aralığı için problemi çözmek ve ilk değerden biraz daha küçük bir zaman aralığı için problemi tekrarlayarak, çıkan sonuçları mukayese etmektir. Bu işleme, birbirine yakın iki sonuç bulunana kadar devam edilir.

3.5 Doğrusal Olmayan Mukabele Analizlerinde Merkezi Farklar Yöntemi

Elastik sınırının ötesine geçen yapıların, mukabelelerini analitik olarak belirlemek; her ne kadar tetiklemenin zamanla değişimi basit fonksiyonla tanımlansada; neredeyse imkansız hale gelir. Bu sebepten dolayı, doğrusal olmayan sistemlerde nümerik metotlar kullanılır. Merkezi farklar yöntemi, i anında, doğrusal olmayan sistemlerin (3.3) hareket denklemini çözmek için, kolaylıkla uygulanabilir. (3.5) denklemleri yerlerine yazılır, hız ve ivme için merkezi fark yuvarlamaları yapılırsa, (3.6) denkleminin ku_i teriminin yerine, $(f_S)_i$ terimi yazılmış hali elde edilir; ki bu denklemden hareketle $i+1$ anındaki mukabele değerlerini veren ifadeler aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\hat{k}u_{i+1} = \hat{p}_i \tag{3.37}$$

Bu denklemde;

$$\hat{k} = \frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t} \tag{3.38}$$

$$\hat{p}_i = p_i - \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t}\right]u_{i-1} - (f_S)_i + \frac{2m}{(\Delta t)^2}u_i \tag{3.39}$$

Bu denklemlerin doğrusal denklemler ile mukayesinden, farkın sadece $\hat{p}_i$ teriminin tanımınında olduğu görülür. Bu uyarlamalar ile, Çizelge 3.1 doğrusal olmayan sistemler için de aynen geçerlidir (Chopra, 2001).

$(f_S)_i$ direnç kuvveti, sadece i anındaki mukabeleye bağlı olduğu ve $i+1$ anındaki bilinmeyen mukabele değeri ile alakası olmadığından, kesin olarak bulunabilir. Hesapların kolay yapılabilme açısından, **merkezi farklar yöntemi, doğrusal olmayan sistemler için belkide en kolay yöntemdir**. Bu açıdan metot çekici gelse de; daha etkin metotlar olduğundan, **araştırmalarda** ya da pratik uygulamalarda **bu metot pek kullanılmamaktadır**.

3.6 Doğrusal Olmayan Mukabele Analizlerinde Newmark Yöntemi

Bu bölümde, (3.3) bölümünde açıklanan doğrusal sistemler için Newmark yönteminin, doğrusal olmayan sistemlere uygulaması yapılacaktır. Bu yöntem, her ne kadar merkezi farklar yöntemi kadar **basit olmasa da**, ileri derecede tutarlılığı sayesinde, **deprem mukabele analizlerinde en çok kullanılan yöntemdir**.

(3.3) ve (3.4) denklemlerinin farkları, (3.40) artım denge denklemini verir.

$$m\Delta\ddot{u}_i + c\Delta\dot{u}_i + (\Delta f_S)_i = \Delta p_i \tag{3.40}$$

Artım direnç kuvveti ise, (3.41) denkleminde verilmiştir.

$$(\Delta f_S)_i = (k_i)_{sec}\,\Delta u_i \tag{3.41}$$

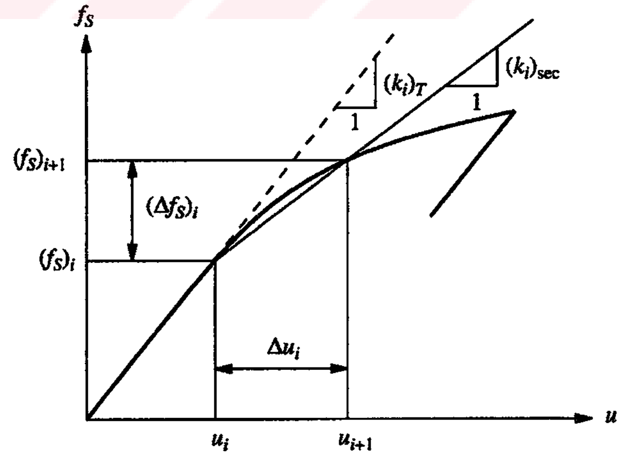
(3.41) denkleminde $(k_i)_{sec}$ ifadesi, **sekant rijitliği** olup; Şekil 3.4' de gösterilmiştir. u_{i+1} değeri bilinmediğinden dolayı, $(k_i)_{sec}$ değeri de belirlenemez. Ancak; küçük Δt zaman artımı için, $(k_i)_{sec}$, sekant rijitliği yerine $(k_i)_T$, **tanjant rijitliği** alınabilir (Şekil 3.4). O halde, (3.41) denklemi de aşağıdaki şekle gelir (Chopra, 2001).

$$(\Delta f_S)_i \approx (k_i)_T\,\Delta u_i \tag{3.42}$$

(3.42) denklemini, $(k_i)_T$ teriminin T'sini ihmal ederek, (3.40) denkleminde yerine yazarsak;

$$m\Delta\ddot{u}_i + c\Delta\dot{u}_i + k_i\Delta u_i = \Delta p_i \tag{3.43}$$

denklemi elde edilir.



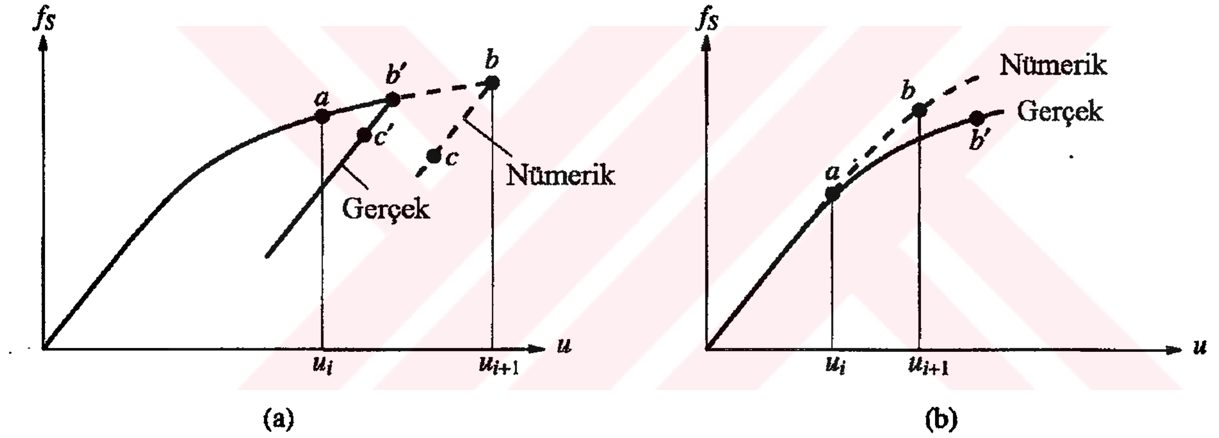
Şekil 3.4 $(k_i)_{sec}$ ve $(k_i)_T$ (Chopra, 2001).

(3.43) ve (3.26) denklemleri arasındaki benzerlikten, Newmark metodunun iteratif olmayan formülasyonunun doğrusal sistemlerde olduğu gibi, doğrusal olmayan sistemlerin mukabele analizlerinde de kullanılabileceği sonucuna ulaşırız. Burada tek yapılması gereken; (3.28) denkleminde k yerine, tanjant rijitliği olan k_i'nin her adım başında yazılmasıdır. Bu değişiklik; Çizelge 3.3'de 1.3 adımının, 2.1 adımını izlemesiyle gerçekleşir. Çizelge 3.3'de 2.5 adımı ve (3.31) denklemi, doğrusal olmayan sistemler için, $\ddot{u}_{i+1}$'in farklı değerlerini verirler. Denklemden elde edilen sonuç, $i+1$ adımındaki dengeyi de göz önüne aldığı için daha tercih edilir.

Sabit Δt zaman aralığında bu işlemlerin yapılması, kabul edilemez tutarsız sonuçlara yol açar. Bu yöntemde, belirgin hatalar iki nedenden ortaya çıkar (Akbaş, 2002).

1. Sekant rijitliği yerine, tanjant rijitliği kullanıldığından;

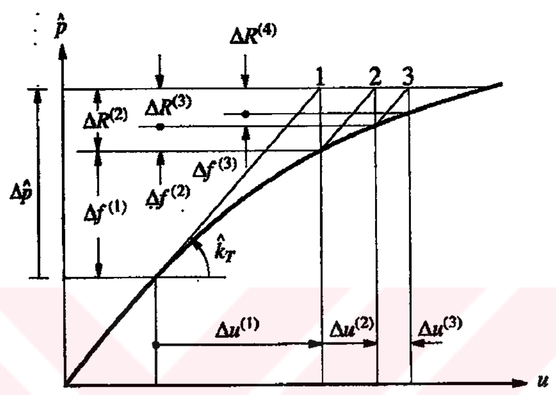
2. Sabit zaman aralığı kullanıldığında, kuvvet – deplasman eğrisindeki halden hale geçişleri tespit etmek geciktiğinden.



Şekil 3.5 Kuvvet – deformasyon arasındaki hata grafiği (Chopra, 2001).

İlk önce, Şekil 3.5.a'da gösterilen kuvvet – deformasyon grafiği ile açıklanan, ikinci tip hata kaynağı ele alınacaktır. Şekil 3.5.a'da, **a noktasında**, zaman aralığının başlangıcı olan i anında, u_i deplasmanının ve $\dot{u}_i$ hızının pozitif olduğunu kabul edelim. **b noktasında**, daha önce açıklanan nümerik yöntemlerin, zaman aralığı için uygulanması sonucu u_{i+1} deplasmanı ve $\dot{u}_{i+1}$ hızı bulunur.

Eğer; $\dot{u}_{i+1}$ negatif ise, zaman aralığında bir **b' noktasında**, hız sıfır değerine ulaşarak, bu noktada işaret değiştirir ve deplasmanda azalmaya başlar. Nümerik hesap adımlarında, eğer **b' noktasının** yerini dikkate almayarak, bir sonraki adıma **b noktasından** devam eder ve boşalma eğrisinin eğimi olarak tanjant rijitliğini alırsak; zaman aralığının sonunda, **c noktasını** negatif eğimli ve u_{i+2} deplasmanlı olarak bulmuş oluruz. Halbuki, zaman aralığı hızın sıfırlandığı **b' noktasından** ele alınırsa, nümerik hesap adımlarının sonunda, deplasman ve hızın **c' noktasında** olduğunu görürüz. **b' noktasını** dikkate almamak, eğrinin **b noktasına** atlayarak, gerçek olmayan bir kuvvet – deplasman grafiği oluşturmasına yol açar. Grafiğin gerçek yolundan ayrılması, hızın her dönüş noktasında olacağından, nümerik analizlerin sonucunda, yanlış değerlere ulaşılmış olacaktır. Elastoplastik sistemlerde de olduğu gibi, kuvvet – deplasman eğrisinin her köşe dönüş noktasında benzer sorunlar çıkacaktır.



Şekil 3.6 Doğrusal olmayan sistemler için Değiştirilmiş Newton – Raphson İterasyon yöntemi (Chopra, 2001).

b' noktası, titizlikle ve doğru olarak seçilirse, bu hatalar ortadan kalkar. Bu da, integrasyonun t_i den t_{i+1} zaman aralığı boyunca, $\Delta t/4$ gibi daha küçük zaman adımları için düzenlenmesi ile olabilir. Buna alternatif olarak iteratif bir yol önerilebilir. Bu yolda ise, integrasyon, i anından, tüm zaman aralığı yerine daha küçük zaman aralığına kadar yapılır. Bu küçük zaman aralığı ise, sonunda hızın sıfıra yaklaşacağı bir aralık olarak seçilir.

Şimdi ise, tanjant rijitliğinin kullanılmasından kaynaklanan hataya değinilecektir. Bu tip hata, Şekil 3.5.b'de kuvvet – deplasman grafiği ile gösterilmiştir. i anında, deplasman **a noktası** olarak gösterilmiştir. Bu noktanın tanjant rijitliği kullanılarak, i anından $i+1$ anına yapılan nümerik integrasyonlar, deplasmanın u_{i+1} ile tanımlanan **b noktasına** gitmesine yol açarlar. Eğer eğriyi tam anlamıyla izleyebilmiş olsaydık, sonuç deplasmanın **b' noktası** olması gerekirdi. Zaman adımları serisi altında bu çelişkilerin yığılması sonucu, dikkate değer hatalar ortaya çıkar (Chopra, 2001).

İteratif bir metot izleyerek bu hatalar en aza indirgenebilir. Newmark yönteminde her zaman adımında kullanılan (3.27) denklemi, doğrusal olmayan sistemler için değiştirilerek aşağıda verilen (3.44) denklemi elde edilir.

$$\hat{k}_i \Delta u_i = \Delta \hat{p}_i \tag{3.44}$$

Bu ifade de, $\Delta \hat{p}_i$, (3.29) denkleminde verildiği gibidir.

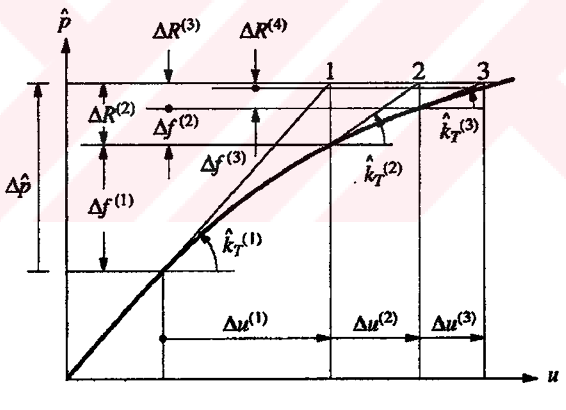
$$\hat{k}_i = k_i + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} m \tag{3.45}$$

Tanjant rijitliği kullandığımızdan ve notasyonlarda uyum olması açısından, yukarıdaki ifadelerde, k_i yerine k_T yazılır ve diğer i indisleri yazılmazsa;

$$\hat{k}_T \Delta u = \Delta \hat{p} \tag{3.46}$$

$$\hat{k}_T = k_T + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} m \tag{3.47}$$

denklemleri elde edilir.



Şekil 3.7 Doğrusal olmayan sistemler için Newton – Raphson iterasyon yöntemi (Chopra, 2001).

Şekil 3.6'da, (3.46) denkleminin şematik grafiği gösterilmiştir. k_T, tanjant rijitliği u deplasmanına bağlı olduğundan ve aynı zamanda, k_T rijitliği sabit olmadığından, grafik doğrusal değildir. Doğrusal olmayan sistemlerin statik analizlerinde, $\hat{k}_T = k_T$ ve $\hat{k}_T$'nin doğrusal ötesi davranışı ile k_T'nin doğrusal ötesi davranışı da aynıdır. Dinamik analizlerde ise, $\hat{k}_T$ içindeki kütle ve sönüm terimleri, doğrusal olmayan davranışı azaltırlar; çünkü Δt'nin tipik değerleri için, $m/\beta(\Delta t)^2$ sabit terimi, genellikle k_T'den daha büyüktür (Akbaş, 2002).

Bundan sonra açıklanacak iteratif zincirde, Şekil 3.6 dikkate alınacaktır. İlk iteratif adım ise, (3.46) denkleminin daha önce açıklanan zincire uygulanmasıdır.

$$\hat{k}_T \Delta u^{(1)} = \Delta \hat{p} \tag{3.48}$$

Şekil 3.5.b'de, b noktasına karşılık gelen $\Delta u^{(1)}$ değerini belirleyebilmek için, Şekil 3.5.b'de, b' noktasına karşılık gelen nihai Δu değerine ilk yuvarlama yapılır. $\Delta f^{(1)}$, $\Delta u^{(1)}$ deplasmanı yaptıran gerçek kuvvet olup, $\Delta \hat{p}$ değerinden daha azdır. $\Delta R^{(2)} = \Delta \hat{p} - \Delta f^{(1)}$ ise bir sonraki adımda uygulanması gereken kalıcı kuvvettir. Bu kalıcı kuvvete karşı gelen, $\Delta u^{(2)}$ kalıcı deplasmanı ise (3.49) bağıntısından elde edilir.

$$\hat{k}_T \Delta u^{(2)} = \Delta R^{(2)} = \Delta \hat{p} - \Delta f^{(1)} \tag{3.49}$$

Bu ek deplasman, kalıcı kuvvetin yeni değerini bulmada kullanılır ve bu işleme, iki değer birbirlerine yaklaşana kadar devam edilir. Aşağıda, Çizelge 3.4'de i den $i+1$ zaman aralığına uzanan iteratif zincir gösterilmiş olup, bu metot **Değiştirilmiş Newton – Raphson Yöntemi** olarak bilinir (Chopra, 2001).

Çizelge 3.4 Değiştirilmiş Newton – Raphson Yöntemi (Chopra, 2001).

1.0 ***Baslangiç bilgileri***

$$u_{i+1}^{(0)} = u_i \qquad f_S^{(0)} = (f_S)_i \qquad \Delta R^{(1)} = \Delta \hat{p}_i \qquad \hat{k}_T = \hat{k}_i$$

2.0 ***Her iterasyon için gerekli hesaplar, j=1, 2, 3, ...***

2.1 Çöz : $\hat{k}_T\, \Delta u^{(j)} = \Delta R^{(j)} \Rightarrow \Delta u^{(j)}$.

2.2 $u_{i+1}^{(j)} = u_{i+1}^{(j-1)} + \Delta u^{(j)}$.

2.3 $\Delta f^{(j)} = f_S^{(j)} - f_S^{(j-1)} + (\hat{k}_T - k_T)\, \Delta u^{(j)}$.

2.4 $\Delta R^{(j+1)} = \Delta R^{(j)} - \Delta f^{(j)}$.

3.0 ***Sonraki iterasyon. j yerine j+1 yazilarak, 2. adim tekrarlanir.***

Δu_i değeri bilindiğinden, hesapların geri kalan kısmı için gerekli olan; $\Delta \ddot{u}_i$ ve $\Delta \dot{u}_i$ değerleri sırasıyla, (3.24) ve (3.25) denklemlerinden bulunurlar. Çizelge 3.5'de doğrusal olmayan sistemler için, Newmark yönteminin adımları belirtilmiştir.

Orijinal Newton – Raphson yöntemi, diğer iteratif yöntemlerden daha çabuk yakınsar (Şekil 3.7). Bu yakınsama ise, her iterasyonda gerçek tanjant rijitliğinin kullanılmasından kaynaklanmaktadır.

Çizelge 3.5 Doğrusal olmayan sistemler için Newmark Yöntemi (Chopra, 2001).

Özel durumlar

(1) Ortalama ivme yöntemi $(\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4})$

(2) Dogrusal ivme yöntemi $(\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{6})$

1.0 ***Baslangiç hesaplari***

1.1 $\ddot{u}_0 = \dfrac{p_0 - c\dot{u}_0 - (fs)_0}{m}.$

1.2 Seç Δt.

1.3 $a = \dfrac{1}{\beta \Delta t} m + \dfrac{\gamma}{\beta} c; \qquad b = \dfrac{1}{2\beta} m + \Delta t \left(\dfrac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) c.$

2.0 ***Her bir adim için yapilacak hesaplar***

2.1 $\Delta \hat{p}_i = \Delta p_i + a\dot{u}_i + b\ddot{u}_i.$

2.2 Tanjant rijitliginin belirlenmesi.

2.3 $\hat{k}_i = k_i + \dfrac{\gamma}{\beta \Delta t} c + \dfrac{1}{\beta (\Delta t)^2} m.$

2.4 Çöz : Δu_i ($\hat{k}_i$ ve $\Delta \hat{p}_i$ degerleri kullanilarak,Çizelge 3.4'den).

2.5 $\Delta \dot{u}_i = \dfrac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta u_i - \dfrac{\gamma}{\beta} \dot{u}_i + \Delta t \left(1 - \dfrac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{u}_i.$

2.6 $\Delta \ddot{u}_i = \dfrac{1}{\beta (\Delta t)^2} \Delta u_i - \dfrac{1}{\beta \Delta t} \dot{u}_i - \dfrac{1}{2\beta} \ddot{u}_i.$

2.7 $u_{i+1} = u_i + \Delta u_i, \; \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta \dot{u}_i, \; \ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta \ddot{u}_i.$

3.0 ***Bir sonraki adim için tekrarlar. i yerine i+1 yazarak, 2. adim tekrarlanir.***

3.7 Doğrusal Bir Sistemin Nümerik Metotlarla Çözümüne Dair Bir Örnek

Tek serbestlik dereceli bir sistem aşağıdaki özelliklere sahiptir (Akbaş, 2002):

$m = 0.2533 KN\, s^2/cm$

$k = 10\, KN/cm$

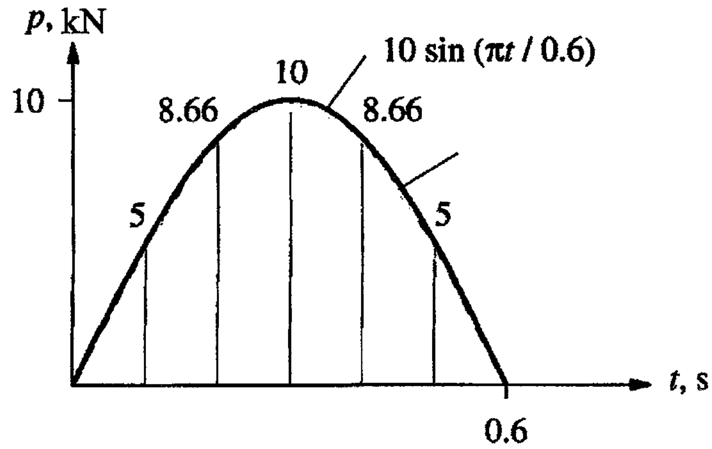
$T_n = 1s$

$\omega_n = 6.283\, rad/s$

$c = 0.1592$

$\zeta = 0.05$

Sistemin yükleme – zaman grafiği aşağıda verildiği gibi, yarım sinüs fonksiyonu şeklindedir.



Şekil 3.8 P – t grafiği (Chopra, 2001).

Sistemin $u(t)$ mukabelesini, aşağıda istenen nümerik yöntemlere göre bulunuz.

a) Merkezi farklar yöntemini kullanarak, $\Delta t = 0.1s$ için;

b) Ortalama ivme yöntemini kullanarak, $\Delta t = 0.1s$ için;

c) Doğrusal ivme yöntemini kullanarak, $\Delta t = 0.1s$ için.

d) Bulunan sonuçlarla, teorik sonuçları $u(t) - t$ grafiğinde gösteriniz.

ÇÖZÜM:

a) Merkezi farklar yöntemini kullanarak;

1.0 ***Baslangiç hesaplari***

$$m = 0.2533 \qquad k = 10 \qquad c = 0.1592$$

$$u_0 = 0 \qquad \dot{u}_0 = 0$$

1.1 $\ddot{u}_0 = \dfrac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m} = 0.$

1.2 $u_{-1} = u_0 - (\Delta t)\dot{u}_0 + \dfrac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{u}_0 = 0.$

1.3 $\hat{k} = \dfrac{m}{(\Delta t)^2} + \dfrac{c}{2\Delta t} = 26.13.$

1.4 $a = \dfrac{m}{(\Delta t)^2} - \dfrac{c}{2\Delta t} = 24.53.$

1.5 $b = k - \dfrac{2m}{(\Delta t)^2} = -40.66.$

2.0 *Her adim için hesaplar*

2.1 $\hat{p}_i = p_i - au_{i-1} - bu_i = p_i - 24.53u_{i-1} + 40.66u_i.$

2.2 $u_{i+1} = \dfrac{\hat{p}_i}{\hat{k}} = \dfrac{\hat{p}_i}{26.13}.$

3.0 ***i=0, 1, 2, 3, ... için 2. adimin tekrari. (Çizelge 3.6'da, bulunan sonuçlarla teorik sonuçlar karsilastirilmistir).***

Çizelge 3.6 Merkezi farklar yöntemine göre nümerik çözüm (Chopra, 2001).

t_i	p_i	u_{i-1}	u_i	$\hat{p}_i$ (Adim 2.1)	u_{i+1} (Adim 2.2)	Teorik u_{i+1}
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0328
0.1	5.0000	0.0000	0.0000	5.0000	0.1914	0.2332
0.2	8.6602	0.0000	0.1914	16.4419	0.6293	0.6487
0.3	10.0000	0.1914	0.6293	30.8934	1.1825	1.1605
0.4	8.6603	0.6293	1.1825	41.3001	1.5808	1.5241
0.5	5.0000	1.1825	1.5808	40.2649	1.5412	1.4814
0.6	0.0000	1.5808	1.5412	23.8809	0.9141	0.9245
0.7	0.0000	1.5412	0.9141	−0.6456	−0.0247	0.0593
0.8	0.0000	0.9141	−0.0247	−23.4309	−0.8968	−0.7751
0.9	0.0000	−0.0247	−0.8968	−35.8598	−1.3726	−1.2718
1.0	0.0000	−0.8968	−1.3726	−33.8058	−1.2940	−1.2674

b) Ortalama ivme yöntemini kullanarak;

1.0 *Baslangiç hesaplari*

$$m = 0.2533 \qquad k = 10 \qquad c = 0.1592$$
$$u_0 = 0 \qquad \dot{u}_0 = 0 \qquad p_0 = 0$$

1.1 $\ddot{u}_0 = \dfrac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m} = 0.$

1.2 $\Delta t = 0.1.$

1.3 $\hat{k} = k + \dfrac{2}{\Delta t}c + \dfrac{4}{(\Delta t)^2}m = 114.5.$

1.4 $a = \dfrac{4}{\Delta t}m + 2c = 10.45;$ ve $b = 2m = 0.5066.$

2.0 ***Her adim için hesaplamalar***

2.1 $\Delta \hat{p}_i = \Delta p_i + a\dot{u}_i + b\ddot{u}_i = \Delta p_i + 10.45\dot{u}_i + 0.5066\ddot{u}_i.$

2.2 $\Delta u_i = \dfrac{\Delta \hat{p}_i}{\hat{k}} = \dfrac{\Delta \hat{p}_i}{114.5}.$

2.3 $\Delta \dot{u}_i = \dfrac{2}{\Delta t}\Delta u_i - 2\dot{u}_i = 20\Delta u_i - 2\dot{u}_i.$

2.4 $\Delta \ddot{u}_i = \dfrac{4}{(\Delta t)^2}(\Delta u_i - \Delta t \dot{u}_i) - 2\ddot{u}_i = 400(\Delta u_i - 0.1\dot{u}_i) - 2\ddot{u}_i.$

2.5 $u_{i+1} = u_i + \Delta u_i,\ \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta \dot{u}_i,\ \ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta \ddot{u}_i.$

3.0 ***Bir sonraki adim için tekrarlar. (Çizelge 3.7'de, bulunan sonuçlarla teorik sonuçlar karsilastirilmistir).***

Çizelge 3.7 Ortalama ivme yöntemine göre nümerik çözüm (Chopra, 2001).

t_i	p_i	$\ddot{u}_i$ (Adim 2.5)	Δp_i	$\Delta \hat{p}_i$ (Adim 2.1)	Δu_i (Adim 2.2)	$\Delta \dot{u}_i$ (Adim 2.3)	$\Delta \ddot{u}_i$ (Adim 2.4)	$\dot{u}_i$ (Adim 2.5)	u_i (Adim 2.5)	Teorik u_i
0.0	0.0000	0.0000	5.0000	5.0000	0.0437	0.8733	17.4666	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	5.0000	17.4666	3.6603	21.6356	0.1890	2.0323	5.7137	0.8733	0.0437	0.0328
0.2	8.6602	23.1803	1.3398	43.4485	0.3794	1.7776	−10.8078	2.9057	0.2326	0.2332
0.3	10.0000	12.3724	−1.3397	53.8708	0.4705	0.0428	−23.8893	4.6833	0.6121	0.6487
0.4	8.6603	−11.5169	−3.6602	39.8948	0.3484	−2.4839	−26.6442	4.7261	1.0825	1.1605
0.5	5.0000	−38.1611	−5.0000	−0.9009	−0.0079	−4.6417	−16.5122	2.2422	1.4309	1.5241
0.6	0.0000	−54.6733	0.0000	−52.7740	−0.4609	−4.4187	20.9716	−2.3995	1.4231	1.4814
0.7	0.0000	−33.7017	0.0000	−88.3275	−0.7714	−1.7912	31.5787	−6.8183	0.9622	0.9245
0.8	0.0000	−2.1229	0.0000	−91.0486	−0.7952	1.3159	30.5646	−8.6095	0.1908	0.0593
0.9	0.0000	28.4417	0.0000	−61.8123	−0.5398	3.7907	18.9297	−7.2936	−0.6044	−0.7751
1.0	0.0000	47.3714						−3.5029	−1.1442	−1.2718

c) Doğrusal ivme yöntemini kullanarak;

1.0 ***Baslangiç hesaplari***

$$m = 0.2533 \qquad k = 10 \qquad c = 0.1592$$
$$u_0 = 0 \qquad \dot{u}_0 = 0 \qquad p_0 = 0$$

1.1 $\ddot{u}_0 = \dfrac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m} = 0.$

1.2 $\Delta t = 0.1.$

1.3 $\hat{k} = k + \dfrac{3}{\Delta t}c + \dfrac{6}{(\Delta t)^2}m = 166.8.$

1.4 $a = \dfrac{6}{\Delta t}m + 3c = 15.68$; ve $b = 3m + \dfrac{\Delta t}{2}c = 0.7679.$

2.0 ***Her adim için hesaplamalar***

2.1 $\Delta\hat{p}_i = \Delta p_i + a\dot{u}_i + b\ddot{u}_i = \Delta p_i + 15.68\dot{u}_i + 0.7679\ddot{u}_i$.

2.2 $\Delta u_i = \dfrac{\Delta\hat{p}_i}{\hat{k}} = \dfrac{\Delta\hat{p}_i}{166.8}$.

2.3 $\Delta\dot{u}_i = \dfrac{3}{\Delta t}\Delta u_i - 3\dot{u}_i - \dfrac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i = 30\Delta u_i - 3\dot{u}_i - 0.05\ddot{u}_i$.

2.4 $\Delta\ddot{u}_i = \dfrac{6}{(\Delta t)^2}(\Delta u_i - \Delta t\dot{u}_i) - 3\ddot{u}_i = 600(\Delta u_i - 0.1\dot{u}_i) - 3\ddot{u}_i$.

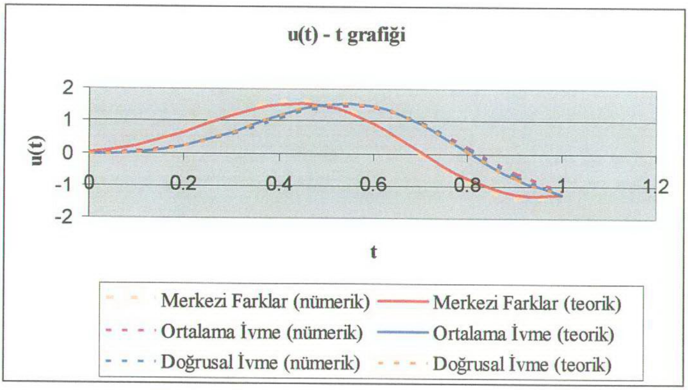
2.5 $u_{i+1} = u_i + \Delta u_i,\ \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta\dot{u}_i,\ \ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta\ddot{u}_i$.

3.0 ***Bir sonraki adim için hesaplamalar. (Çizelge 3.8 'de, bulunan sonuçlarla teorik sonuçlar karsilastirilmistir).***

Çizelge 3.8 Doğrusal ivme yöntemine göre nümerik çözüm (Chopra, 2001).

t_i	p_i	$\ddot{u}_i$ (Adim 2.5)	Δp_i	$\Delta\hat{p}_i$ (Adim 2.1)	Δu_i (Adim 2.2)	$\Delta\dot{u}_i$ (Adim 2.3)	$\Delta\ddot{u}_i$ (Adim 2.4)	$\dot{u}_i$ (Adim 2.5)	u_i (Adim 2.5)	Teorik u_i
0.0	0.0000	0.0000	5.0000	5.0000	0.0300	0.8995	17.9903	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	5.0000	17.9903	3.6603	31.5749	0.1893	2.0824	5.6666	0.8995	0.0300	0.0328
0.2	8.6602	23.6569	1.3398	66.2479	0.3973	1.7897	−11.5191	2.9819	0.2193	0.2332
0.3	10.0000	12.1378	−1.3397	82.7784	0.4964	−0.0296	−24.8677	4.7716	0.6166	0.6487
0.4	8.6603	−12.7299	−3.6602	60.8987	0.3652	−2.6336	−27.2127	4.7420	1.1130	1.1605
0.5	5.0000	−39.9426	−5.0000	−2.6205	−0.0157	−4.7994	−16.1033	2.1084	1.4782	1.5241
0.6	0.0000	−56.0459	0.0000	−85.2198	−0.5110	−4.4558	22.9749	−2.6911	1.4625	1.4814
0.7	0.0000	−33.0710	0.0000	−137.4264	−0.8241	−1.6292	33.5584	−7.1469	0.9514	0.9245
0.8	0.0000	0.4874	0.0000	−137.1965	−0.8227	1.6218	31.4613	−8.7761	0.1273	0.0593
0.9	0.0000	31.9487	0.0000	−87.6156	−0.5254	4.1031	18.1644	−7.1543	−0.6954	−0.7751
1.0	0.0000	50.1130						−3.0512	−1.2208	−1.2718

d) Bulunan sonuçlarla, teorik sonuçların $u(t) - t$ grafiğinde karşılaştırılması;



3.8 Doğrusal Olmayan Bir Sistemin Nümerik Metotlarla Çözümüne Dair Bir Örnek

Tek serbestlik dereceli bir sistem aşağıdaki özelliklere sahiptir (Akbaş, 2002):

$m = 0.2533 KN - s^2/cm$

$k = 10 KN/cm$

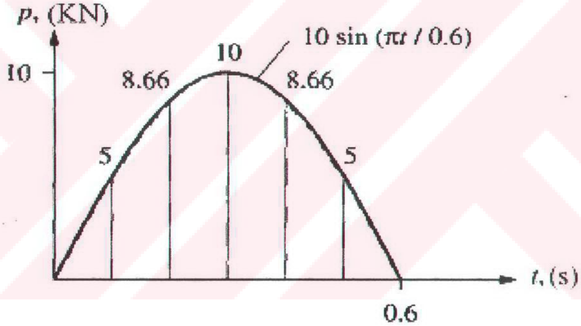
$T_n = 1s$

$\omega_n = 6.283 rad/s$

$c = 0.1592$

$\zeta = 0.05$

Sistemin yükleme – zaman grafiği aşağıda verildiği gibi, yarım sinüs fonksiyonu şeklindedir..



Şekil 3.9 P – t grafiği (Chopra, 2001).

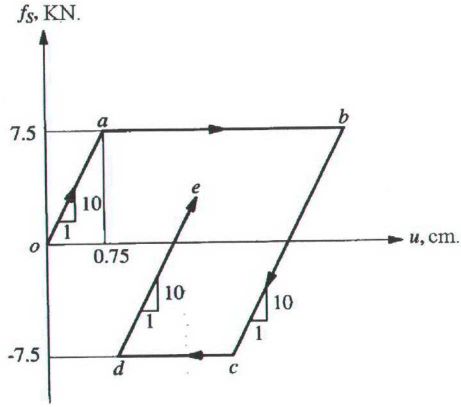
Sistemin kuvvet – deformasyon grafiği ise Şekil 3.10'da verilmiştir. $u_y = 0.75 cm$ de sistem akmaya başlamaktadır.

Sistemin $u(t)$ mukabelesini, aşağıda istenen nümerik yöntemlere göre bulunuz.

a) İterasyon yapmadan Ortalama ivme yöntemini kullanarak, $\Delta t = 0.1s$ için;

b) Newton – Raphson iterasyon yöntemini kullanarak, $\Delta t = 0.1s$ için;

c) Bulunan sonuçları $u(t) - t$ grafiğinde gösteriniz.



Şekil 3.10 f_S – u grafiği (Chopra, 2001) .

ÇÖZÜM:

a) İterasyon yapmadan Ortalama ivme yöntemini kullanarak, $\Delta t = 0.1s$ için;

1.0 ***Baslangiç hesaplari***

$$m = 0.2533 \qquad k_0 = 10 \qquad c = 0.1592$$

$$u_0 = 0 \qquad \dot{u}_0 = 0 \qquad p_0 = 0$$

1.1 $\ddot{u}_0 = \dfrac{p_0 - c\dot{u}_0 - k_0 u_0}{m} = 0.$

1.2 $\Delta t = 0.1.$

1.3 $a = \dfrac{4}{\Delta t}m + 2c = 10.45$; ve $b = 2m = 0.5066.$

2.0 ***Her adim için hesaplamalar***

2.1 $\Delta\hat{p}_i = \Delta p_i + a\dot{u}_i + b\ddot{u}_i = \Delta p_i + 10.45\dot{u}_i + 0.5066\ddot{u}_i.$

2.2 "oa, bc ve de" kollari için, ki=k; "ab ve cd" için, ki=0'dir.

2.3 $\hat{k}_i = k_i + \dfrac{2}{\Delta t}c + \dfrac{4}{(\Delta t)^2}m = k_i + 104.5.$

2.4 $\Delta u_i = \dfrac{\Delta\hat{p}_i}{\hat{k}_i}.$

2.5 $\Delta\dot{u}_i = \dfrac{2}{\Delta t}\Delta u_i - 2\dot{u}_i = 20\Delta u_i - 2\dot{u}_i.$

2.6 $u_{i+1} = u_i + \Delta u_i$; ve $\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta\dot{u}_i.$

2.7 $(fs)_{i+1} = (fs)_i + k_i \Delta u_i$.

2.8 $\ddot{u}_{i+1} = \dfrac{p_{i+1} - c\dot{u}_{i+1} - (fs)_{i+1}}{m}$.

diger yöntemlerden farkli olarak, bu yöntemde ivme, 2.7 ve 2.8. ci adimlarda iterasyon yapilmadan bulunmaktadir.

3.0 ***Bir sonraki adim için tekrarlar. (Çizelge 3.9'da; bulunan tüm sonuçlar gösterilmistir).***

Çizelge 3.9 İterasyon yapmadan Ortalama ivme yöntemini kullanarak nümerik çözüm (Chopra, 2001).

t_i	p_i	$(fs)_i$	$\ddot{u}_i$ (Adim 2.8)	$\Delta\hat{p}_i$ (Adim 2.1)	k_i	$\hat{k}_i$ (Adim 2.3)	Δu_i (Adim 2.4)	$\dot{u}_i$ (Adim 2.6)	u_i (Adim 2.6)
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	5.0000	10	114.5043	0.0437	0.0000	0.0000
0.1	5.0000	0.4367	17.4666	21.6356	10	114.5043	0.1890	0.8733	0.0437
0.2	8.6602	2.3262	23.1803	43.4485	10	114.5043	0.3794	2.9057	0.2326
0.3	10.0000	6.1207	12.3724	53.8708	10	114.5043	0.4705	4.6833	0.6121
0.4	8.6603	7.5000	1.6110	46.5455	0	104.5043	0.4454	4.7261	1.0825
0.5	5.0000	7.5000	−12.4970	32.3703	0	104.5043	0.3098	4.1818	1.5279
0.6	0.0000	7.5000	−30.8738	5.3984	0	104.5043	0.0517	2.0132	1.8377
0.7	0.0000	7.5000	−28.9930	−24.9304	10	114.5043	−0.2177	−0.9801	1.8893
0.8	0.0000	5.3228	−18.8932	−44.8354	10	114.5043	−0.3916	−3.3744	1.6716
0.9	0.0000	1.4071	−2.7549	−47.9712	10	114.5043	−0.4189	−4.4568	1.2801

b) Newton – Raphson iterasyon yöntemini kullanarak, $\Delta t = 0.1s$ için;

Çizelge 3.4 ve 3.5 de anlatılan işlem sırası problemin bu kısmında uygulanacaktır. Çizelge 3.5'in hesap aşamalarından 1.1 den 2.3'e kadar olan kısmı, sorunun (a) şıkkıyla aynıdır. 2.4. cü adım ise, Çizelge 3.4 kullanılarak iterasyon sonucu bulunacaktır. 2.5. ci adımda aynı olup, aşağıdaki 2.6 ve 2.7. adımlarınca izlenecektir.

2.6 $\Delta\ddot{u}_i = \dfrac{4}{(\Delta t)^2}\Delta u_i - \dfrac{4}{\Delta t}\dot{u}_i - 2\ddot{u}_i = 400\Delta u_i - 40\dot{u}_i - 2\ddot{u}_i$

2.7c $\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta\ddot{u}_i$

İlk 0.9 s için bulunan hesap sonuçları, Çizelge 3.10'da gösterilmiştir. İlk üç adımda, $u_i < u_y = 0.75$ olup, iterasyon sonucu değiştirmemektedir (sistem doğrusal). Aslında, bu adımlarda yapılan iterasyonlar daha ilk devirde yakınsayarak, (a) şıkkında belirtilen 2.4 adımıyla aynı sonucu verirler. Eğer, zaman aralığında, rijitlik (veya sönüm) değişirse, yakınsama için birden fazla iterasyon gerekmektedir. Çizelge 3.4'ün incelenmesine örnek olması bakımından, Çizelge 3.10'dan 0.3 s ve 0.4 s'ler arasını inceleyelim (Chopra, 2001).

1.0 ***Baslangiç verileri***

$$u_{i+1}^{(0)} = 0.6121 \qquad f_S^{(0)} = 6.1207$$

$$\Delta R^{(1)} = \Delta \hat{p}_i = 53.8708 \qquad \hat{k}_T = 114.5043$$

2.0 ***j=1 için ilk iterasyon***

2.1 $\hat{k}_T \Delta u^{(1)} = \Delta R^{(1)}, \text{veya} \Delta u^{(1)} = \dfrac{53.8708}{114.5043} = 0.4705.$

2.2 $u_{i+1}^{(1)} = u_{i+1}^{(0)} + \Delta u^{(1)} = 0.6121 + 0.4705 = 1.0826.$

2.3 $\Delta f^{(1)} = f_S^{(1)} - f_S^{(0)} + \dfrac{a}{\Delta t}\Delta u^{(1)}$

$= 7.500 - 6.1207 + (104.5043)0.4705 = 50.5454.$

2.4 $\Delta R^{(2)} = \Delta R^{(1)} - \Delta f^{(1)} = 53.8708 - 50.5454 = 3.3254.$

2.0 ***j=2 için ikinci iterasyon***

2.1 $\hat{k}_T \Delta u^{(2)} = \Delta R^{(2)}, \text{veya} \Delta u^{(2)} = \dfrac{3.3254}{114.5043} = 0.02904.$

2.2 $u_{i+1}^{(2)} = u_{i+1}^{(1)} + \Delta u^{(2)} = 1.0825 + 0.02904 = 1.1116.$

2.3 $\Delta f^{(2)} = f_S^{(2)} - f_S^{(1)} + \dfrac{a}{\Delta t}\Delta u^{(2)}$

$= 7.500 - 7.500 + (104.5043)0.02904 = 3.0349.$

2.4 $\Delta R^{(3)} = \Delta R^{(2)} - \Delta f^{(2)} = 3.3254 - 3.0349 = 0.2904.$

2.0 ***j=3 için üçüncü iterasyon.***

2.1 $\hat{k}_T \Delta u^{(3)} = \Delta R^{(3)}, \text{veya} \Delta u^{(3)} = \dfrac{0.2904}{114.5043} = 0.0025.$

Çizelge 3.10 İterasyon yaparak Ortalama ivme yöntemiyle nümerik çözüm (Chopra, 2001).

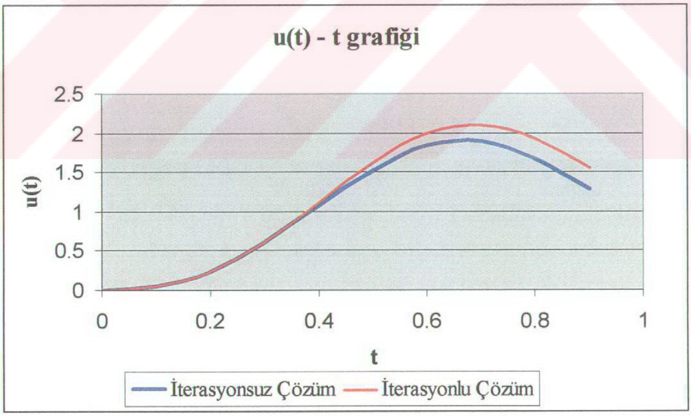
t_i	p_i	$(f_S)_i$	$\Delta\hat{p}_i$ veya $\Delta R^{(j)}$	k_i	$\hat{k}_i$	Δu_i veya $\Delta u^{(j)}$	$\dot{u}_i$	$\ddot{u}_i$	u_i veya $u_{i+1}^{(j)}$
0.0	0.0000	0.0000	5.0000	10	114.5043	0.0437	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	5.0000	0.4367	21.6356	10	114.5043	0.1890	0.8733	17.4666	0.0437
0.2	8.6602	2.3262	43.4485	10	114.5043	0.3794	2.9057	23.1803	0.2326
0.3	10.0000	6.1207	53.8708	10	114.5043	0.4705	4.6833	12.3724	0.6121
			3.3254			0.0290			1.1116
			0.2904			0.0025			1.1141
			0.0254			0.0002			1.1143
			0.22E−02			0.19E−04			1.1143
0.4	8.6603	7.5000	52.9849	0	104.5043	0.5070	5.3621	1.2027	1.1143
0.5	5.0000	7.5000	38.4086	0	104.5043	0.3675	4.7782	−12.8805	1.6213
0.6	0.0000	7.5000	11.0600	0	104.5043	0.1058	2.5725	−31.2339	1.9889
0.7	0.0000	7.5000	−19.6226	10	114.5043	−0.1714	−0.4558	−29.3312	2.0947
0.8	0.0000	5.7863	−41.6857	10	114.5043	−0.3641	−2.9716	−20.9850	1.9233
0.9	0.0000	2.1458	−47.9600	10	114.5043	−0.4188	−4.3095	−5.7722	1.5593

Bu işlemlere devam edilir. Tüm bunlar, Çizelge 3.10'da gösterilmiştir. Bundan sonraki üç adımda ise, sistem sadece akma konumunda olup, akma kolunu izlemektedir. Bir başka deyişle, $k_i = 0$ olup, iterasyona da gerek yoktur. 0.6 ve 0.7 saniyeler arsında, hız pozitiften negatife geçerek, deformasyonun azaldığını göstermektedir. Kuvvet – deplasman grafiğinde **bc kolu** boyunca sistem geri boşalım yapmakta olup, $k_i = 10$'dur. Zaman aralığı boyunca, sistemin **ab kolunda** kaldığı kabul edilmiş ve bu değişim ihmal edilmiştir (Chopra, 2001).

0.6.cı saniyeden sonra iterasyon hesaplamaları daha da kolay yapılır. Çünkü, bu anda $\dot{u} = 0$ dır. Bu aralığın başlarında $k_i = 0$ olup, aralığın ikinci kısmında ise $k_i = 10$'dur.

Çizelge 3.9 ve Çizelge 3.10 karşılaştırıldığında, iterasyonlu ve iterasyonsuz durumlarda tanjant rijitliğinin kullanılmasının önemi daha da net anlaşılacaktır. Her iki durumda da, zaman aralığının sonunda dengeye ulaşılmaktadır. Tabiiki, iterasyonlu olan analizler, doğrusal olmayan davranışı daha net yansıttıklarından, daha gerçekçi olmaktadırlar. Ancak, iterasyonlu analizlerin sonunda dahi, tam denge sağlanamaz. Buda, enerji dengesinin tam sağlanamadığı anlamına gelir ki, buda nümerik analizlerdeki sonuçların hatalı olmasının bir nedenidir.

c) Bulunan sonuçları $u(t)-t$ grafiğinde gösteriniz.



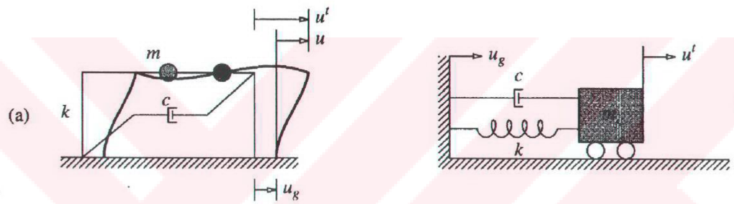
4. DOĞRUSAL SİSTEMLERİN DEPREM MUKABELELERİ

Bu bölümde, doğrusal elastik tek serbestlik dereceli sistemlerin deprem hareketine mukabeleleri incelenecektir. İlk başta, deprem mukabelesi üzerinde durulacak ve ilerleyen bölümlerde ise, mukabele spektrum kavramı üzerinde durulacaktır.

4.1 Hareket Denklemi

$\ddot{u}_g(t)$ yer ivmesi etkisi altında kalan, tek serbestlik dereceli bir sistemin hareket denklemi (2.12) ile verilmiştir (Şekil 4.1). Bu ifadede eşitliğin her tarafı m ile bölünürse;

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = -\ddot{u}_g(t) \tag{4.1}$$



Şekil 4.1 Tek serbestlik dereceli bir sistem (Chopra, 2001).

(4.1) ifadesinden de anlaşılacağı gibi, sistemin $u(t)$ deformasyon mukabelesi, sistemin ω_n doğal frekansına ya da T_n doğal periyoduna ve ζ sistemin sönüm oranına bağlıdır. Bir başka gösterim şekliyle; $u \equiv u(t, T_n, \omega_n)$ yazılabilir. Buradan; aynı T_n ve aynı ζ değerlerine sahip, **biri diğerinden daha ağır ya da daha rijit, iki sistemin de $u(t)$ deformasyon mukabelelerinin aynı olacağı sonucuna ulaşırız** (Chopra, 2001).

Deprem sırasında, yer ivmesi o kadar düzensiz değişir ki, hareket denkleminin analitik olarak çözümü neredeyse imkansız olur. İşte bu yüzden, Bölüm 3'de açıklanan nümerik metotlar, sistemin mukabelesini belirlemek için gerekmektedir.

4.2 Mukabele Değerleri

Yapı mühendisliğinin en önemli konularından biri, sistemin deformasyonunun belirlenmesidir. Yani, iç kuvvetlerin doğrusal olduğu kabulü ile, kütlenin, yer hareketine karşı bağıl $u(t)$ deplasmanının belirlenmesi, hala üstünde araştırmaların yapıldığı bir kavramdır.

Bu iç kuvvetler ise; Şekil 4.1.a'da gösterilen tek açıklıklı çeçevenin kiriş ve kolonlarındaki eğilme momentleri ve kesme kuvvetleri ile, Şekil 4.1.b'de gösterilen yaylı sistemin yay kuvvetidir. Kütlenin, $u^t(t)$ toplam deplasmanının bilinmesi sayesinde, deprem sırasında, bitişik binaların birbirlerine girişim yapmasını önlemek için gerekli mesafe, belirlenmiş olur. Çekiçleme etkisi olarak bilinen bu olay, hemen hemen her depremde sıkça görülmektedir. (4.1) ifadesinin nümerik çözümü, bağıl değerler olan; $u(t)$, $\dot{u}(t)$, $\ddot{u}(t)$'nin ve toplam değerler olan; $u^t(t)$, $\dot{u}^t(t)$, $\ddot{u}^t(t)$'nin bulunmasında kullanılır.

4.3 Mukabele Kavramı

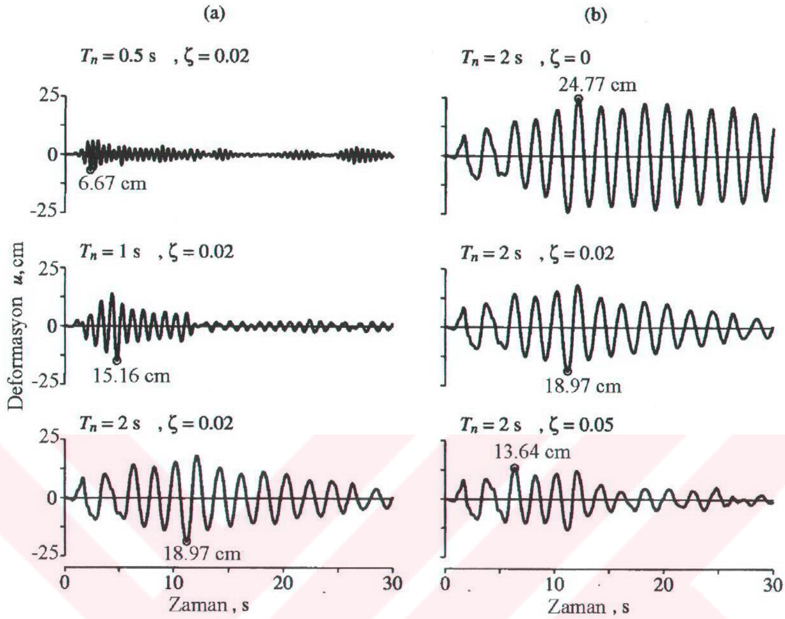
$\ddot{u}_g(t)$ yer ivmesi altında, tek serbestlik dereceli sistemin, $u(t)$ deformasyon mukabelesi, sistemin doğal periyoduna ve sönüm oranına bağlıdır. Şekil 4.2.a'da, El Centro deprem kayıtlarına tâbi tutulmuş üç farklı sistemin deformasyon mukabeleleri gösterilmiştir. Üç sistemin de ζ sönüm oranları %2 olup; doğal periyotlarındaki fark nedeniyle, deformasyon mukabelelerinde büyük farklar gözlenmektedir. Buna ek olarak, tek serbestlik dereceli bir sistemin bir titreşim devrini tamamlaması için geçecek sürenin, sistemin doğal periyoduna çok yakın olduğu da görülebilir. Bu üç sistemin de incelenmesinden, titreşim periyodu ne kadar büyük olursa, ekstrem deformasyonun da o oranda büyük olduğu anlaşılır.

Şekil 4.2.b'de ise, aynı yer hareketine maruz kalmış üç sistemin deformasyon mukabeleleri gösterilmiştir. Üç sisteminde, T_n titreşim periyotları da aynı olmasına karşılık, deformasyon mukabelelerindeki fark, sönüm oranları ile ilgilidir. Yapılan gözlemler sonucunda, **sönüm oranı büyük olan sistemlerin mukabelelerinin, sönüm oranı küçük olanlardan daha az olduğu saptanmıştır** (Chopra, 2001).

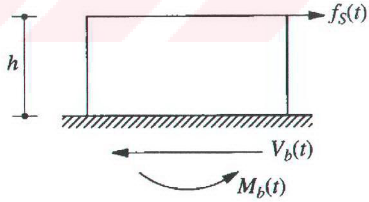
Dinamik analizlerle, sistemin $u(t)$ deformasyon mukabelesi belirlendikten sonra, herhangi bir zaman aralığında yapılacak statik analizlerle sistemin iç kuvvetleri de belirlenebilir. Daha önceki bölümlerde de açıklandığı gibi, iç kuvvetler bulunurken izlenecek en tutarlı yol, etkiyen kuvvetin eşdeğer statik kuvvete dönüştürülmesidir (Şekil 4.3).

$$f_S(t) = ku(t) \tag{4.2}$$

Burada, k, Şekil 4.1.a'da gösterilen çerçevenin yanal rijitliğidir. Eğer k; m, kütle cinsinden ifade edilecek olursa, (4.3) bağıntısı elde edilir (Chopra, 2001).



Şekil 4.2 El Centro yer hareketine maruz sistemin deformasyon mukabelesi (Chopra, 2001).



Şekil 4.3 Eşdeğer statik kuvvet (Chopra, 2001).

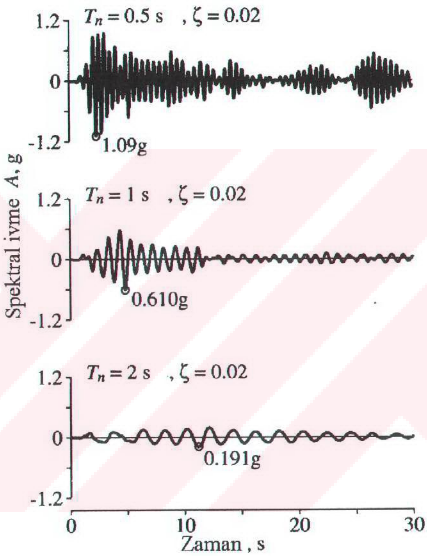
$$f_S(t) = m\omega_n^2 u(t) = mA(t) \tag{4.3}$$

Burada, (4.4) denklemiyle verilen $A(t)$, **spektral ivme değeri** olarak adlandırılır.

$$A(t) = \omega_n^2 u(t) \tag{4.4}$$

Denklemden de görüleceği gibi, eşdeğer kuvvet, m kütlesi ile $\ddot{u}^t(t)$ toplam ivme değerinin çarpımına eşit olmayıp; $A(t)$ ile m çarpımına eşittir.

Spektral ivme değeri $A(t)$, $u(t)$ deformasyon mukabelesinden hesaplanabilir. Şekil 4.2'de; $T_n = 0.5$, 1 ve 2 saniyeler için; $\zeta = 0.02$ olan üç sistemin de, $u(t)$ deformasyon mukabele değerleri verilmiştir. Her $u(t)$ değerini, karşı geldiği $\omega_n^2 = (2\pi/T_n)^2$ değeri ile çarparak; bu sistemlerin **spektral ivme değerleri** bulunmuş olur (Şekil 4.4).



Şekil 4.4 Tek serbestlik dereceli sistemin El Centro yer hareketine spektral ivme mukabelesi (Chopra, 2001).

Şekil 4.3'de görüldüğü gibi; tek katlı bir çerçevenin, iç kuvvetlerinin belirlenmesinde, seçilen zaman aralığında, $f_S(t)$ eşdeğer kuvveti etkitilerek sistem statik analize tâbi tutulur. Her hangi bir andaki mukabele değerleri istendiğinde, statik analiz gereklidir. Bunun sonucunda **V_b(t) taban kuvveti** ve **M_b(t) tabandaki dönme momenti** de bulunabilir (Chopra, 2001).

$$V_b(t) = f_S(t) \qquad \text{ve} \qquad M_b(t) = hf_S(t) \tag{4.5}$$

Burada, h, çerçevenin yüksekliğidir. (4.3) değerini, (4.5)'de yerine yazaraktan;

$$V_b(t) = mA(t) \qquad \text{ve} \qquad M_b(t) = hV_b(t) \tag{4.6}$$

denklemi elde edilir.

Eğer, tek serbestlik dereceli sistem, kütle – yay – sönümleyici şeklinde ise (Şekil 4.1.b); eşdeğer statik kuvvet kavramı gerekli değildir. Yaydaki kuvvetin kolaylıkla, (4.2) ifadesine eşit olduğu söylenebilir.

4.4 Mukabele Spektrumu Kavramı

Mukabele spektrum kavramı, deprem mühendisliğinin en önemli konularından biridir. Bu kavram sayesinde, belirli yer hareketi altında, tek serbestlik dereceli bir sistemin ekstrem tüm mukabele değerleri bulunabilir. Aynı zamanda, yapıların tasarımında da dinamik bilgilerinin uygulanmasını kolaylaştırmakta ve deprem yönetmeliklerinde belirtilen yanal kuvvetin bulunmasını sağlamaktadır. Ancak, mukabele spektrumu gerçekte tek kütle sisteminin titreşimi esası üzerine kurulmuştur. Bunun için, mukabele spektrumlarını tanımlamak için, tek serbestlik dereceli sistemlerin iyice anlaşılması gerekmektedir.

Bir sistemin herhangi bir mukabelesinin en büyük değerinin, sabit sönüm oranında, doğal periyodun veya doğal frekansın fonksiyonu olarak grafiğinin çizilmesine o mukabele değerinin **mukabele spektrumu** denir. Genelde, mukabele fonksiyonun ikinci değişkeni olarak, doğal periyot alınmaktadır.

Grafiklenen mukabele değerlerine bağlı olarak çeşitli mukabele spektrumları tanımlanabilir.

$$u_0(T_n,\zeta) \equiv \max_t |u(t,T_n,\zeta)|$$

$$\dot{u}_0(T_n,\zeta) \equiv \max_t |\dot{u}(t,T_n,\zeta)|$$

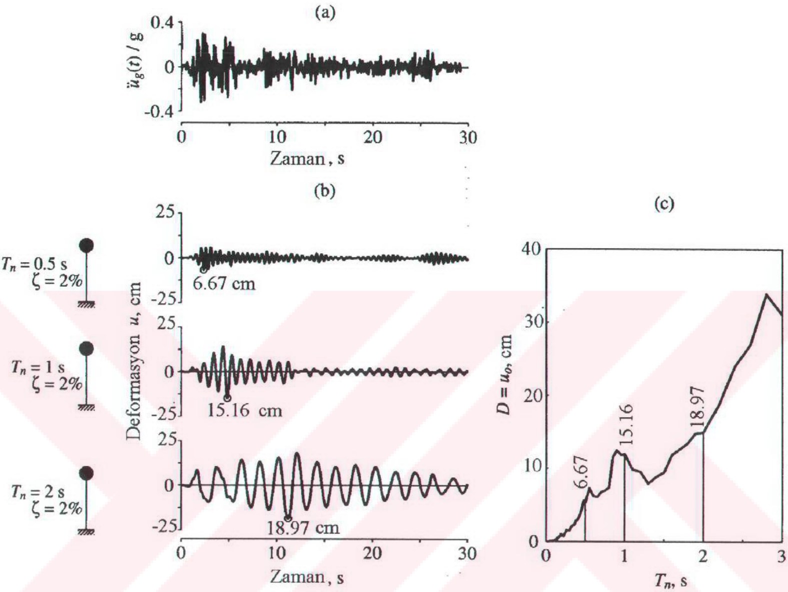
$$\ddot{u}_0^t(T_n,\zeta) \equiv \max_t |\ddot{u}^t(t,T_n,\zeta)|$$

Yukarıdaki ifadeler sırasıyla; **bağıl deformasyon mukabele spektrumu**, **bağıl hız mukabele spektrumu** ve **bağıl ivme mukabele spektrumu** olarak adlandırılırlar. Genel bir terim olarak bunlara **deprem mukabele spektrumları** da denmektedir (Chopra, 2001).

4.5 Deplasman, Spektral Hız ve Spektral İvme Mukabele Spektrumları

(4.3) bölümünde de anlatıldığı gibi, iç kuvvetlerin belirlenmesinde $u(t)$ deformasyonunun bilinmesi yeterlidir. Oluşturulacak deformasyon spektrumunun en büyük değerlerinden iç kuvvetler bulunabilir.

4.5.1 Deformasyon Mukabele Spektrumu



Şekil 4.5 (a) Yer ivmesi; (b) tek serbestlik dereceli üç sistem için deplasman mukabelesi; (c) ζ = %2 için deplasman mukabele spektrumu (Chopra, 2001).

Şekil 4.5'de deformasyon mukabele spektrumunun nasıl belirleneceği gösterilmiştir. Bu şeklin (a) kısmında, El Centro yer hareketi için oluşturulmuş spektrum görülmekte; (b) kısmında ise, tek serbestlik dereceli üç sistemde, aynı zaman aralıklarında, bu yer hareketinden dolayı oluşan deformasyon değişiklikleri gösterilmiştir. Her sistemin deformasyon grafiğinden, $D \equiv u_0$ ekstrem değerleri bulunmuş ve grafiğin üzerinde işaretlenmiştir. Şeklin (c) kısmında ise, bulunan D, ekstrem değerlerinin, doğal periyot ve sabit sönüm oranı altındaki grafiği, yani **deformasyon mukabele spektrumu** gösterilmiştir.

4.5.2 Spektral Hız Mukabele Spektrumu

Deprem hareketine maruz kalmış, $D \equiv u_0$ ekstrem deformasyonuna bağlı ω_n doğal periyoduna sahip, tek serbestlik dereceli bir sistemin, **V** hız bileşenini inceleyelim;

$$V = \omega_n D = \frac{2\pi}{T_n} D \tag{4.7}$$

V değeri, deprem sırasında sistemde biriken, E_{So}, yay - gerilim enerjisinin bir fonksiyonu olup, bu iki değer arasında (4.8) bağıntısı yazılabilir.

$$E_{S0} = \frac{1}{2} m V^2 \tag{4.8}$$

Yay - gerilim enerjisi tanımından ve (4.7) denkleminden de faydalanarak, (4.9) bağıntısı aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$E_{S0} = \frac{1}{2} k u_0^2 = \frac{1}{2} k D^2 = \frac{1}{2} k (V/\omega_n)^2 = \frac{1}{2} m V^2 \tag{4.9}$$

Yukarıdaki denklemin sağ tarafı kinetik enerji ifadesine eşit olup; **V** ise, spektral hız olarak adlandırılmaktadır. Spektral hız spektrumu ise, V'nin, T_n doğal titreşim periyodunun fonksiyonu olarak çizilmesiyle elde edilir. Şekil 4.5.a'daki yer hareketine maruz, T_n doğal periyoduna sahip bir sistemin **V** spektral hızı, (4.7) bağıntısından; aynı sistemin D ekstrem deformasyonu ise, aynı şeklin (c) kısmından belirlenebilir. Şekil 4.5.c, örnek olması için, Şekil 4.6.a'da tekrar gösterilmiştir. Örneğin; Şekil 4.5'den; $T_n = 0.5\,s$, $\zeta = \%2$ ve $D = 6.67\,cm$ için; (4.7) denklemi kullanılarak, $V = 83.82\,cm/s$ bulunabilir. Benzer olarak, $T_n = 1\,s$, $\zeta = \%2$ ve $D = 15.16\,cm$ için; (4.7) denklemi kullanılarak, $V = 95.25\,cm/s$ ve $T_n = 2\,s$, $\zeta = \%2$ ve $D = 18.97\,cm$ için; (4.7) denklemi kullanılarak, $V = 59.59\,cm/s$ olarak bulunur. Spektral hızın bu üç değeri, Şekil 4.6.b'de gösterilmiştir (Chopra, 2001).

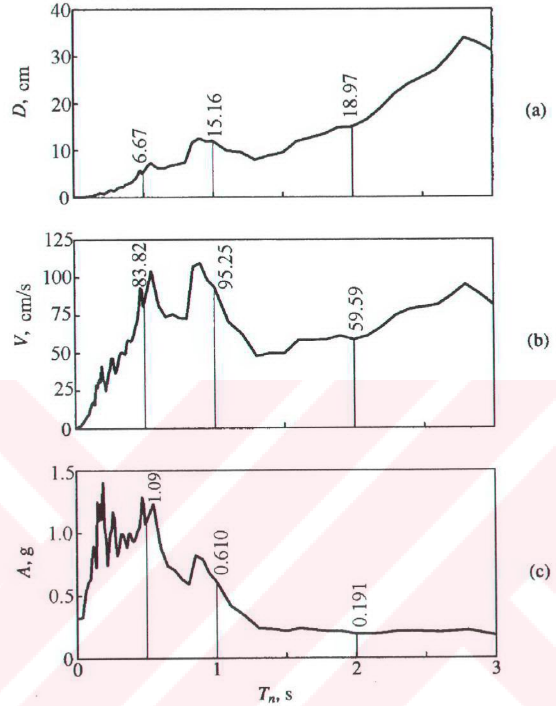
4.5.3 Spektral İvme Mukabele Spektrumu

Deprem hareketine maruz kalmış, $D \equiv u_0$ ekstrem deformasyonuna bağlı ω_n doğal periyoduna sahip tek serbestlik dereceli bir sistemin, **A** ivme bileşenini inceleyelim;

$$A = \omega_n^2 D = \left(\frac{2\pi}{T_n}\right)^2 D \tag{4.10}$$

A değeri, V_{b0} taban kesme kuvvetinin ekstrem değerinin fonksiyonudur.

$$V_{b0} = f_{S0} = mA \tag{4.11}$$



Şekil 4.6 El Centro yer hareketi için $\zeta = \%2$ altında mukabele spektrumu: (a) deformasyon mukabele spektrumu; (b) spektral hız mukabele spektrumu; (c) spektral ivme mukabele spektrumu (Chopra, 2001).

(4.4) bağıntısının idealize edilerek, zamana bağlı ekstrem $A(t)$ değerinin, A olarak alınmasıyla, ekstrem taban kesme kuvveti;

$$V_{b0} = \frac{A}{g} w \tag{4.12}$$

(4.12) şeklini alır. Burada w, yapının ağırlığı olup; g yerçekim ivmesidir. A/g terimi, **taban kesme katsayısı** ya da **yanal kuvvet katsayısı** olarak bilinir. Çeşitli ülkelerin deprem yönetmeliklerinde, **yapısal ağırlıkla çarpıldığında taban kesme kuvvetini veren katsayı** olarak nitelendirilmektedir (Chopra, 2001).

Yukarıdaki denklemlerde, **A** spektral ivme olarak adlandırılmaktadır. Spektral ivme spektrumu ise, A'nın T_n doğal titreşim periyodunun fonksiyonu olarak çizilmesiyle elde edilir. Şekil 4.5.a'daki yer hareketine maruz, T_n doğal periyoduna sahip bir sistemin **A** spektral ivmesi, (4.10) bağıntısından; aynı sistemin D ekstrem deformasyonu ise, aynı şeklin (c) kısmından belirlenebilir. Örneğin; Şekil 4.5'den; $T_n = 0.5\,s$, $\zeta = \%2$ ve $D = 6.67\,cm$ için; (4.10) denklemi kullanılarak, $A = 1.09\,g$ bulunur. Benzer olarak, $T_n = 1\,s$, $\zeta = \%2$ ve $D = 15.16\,cm$ için; (4.10) denklemi kullanılarak, $A = 0.610\,g$ ve $T_n = 2\,s$, $\zeta = \%2$ ve $D = 18.97\,cm$ için; (4.10) denklemi kullanılarak, $A = 0.191\,g$ olarak bulunur. Burada, birimler santimetre cinsinden verildiğinden; $g = 981\,cm/s^2$ olarak alınmalıdır. Spektral ivmenin bu üç değeri, Şekil 4.6.c'de gösterilmiştir.

4.5.4 Birleştirilmiş D-V–A Spektrumu

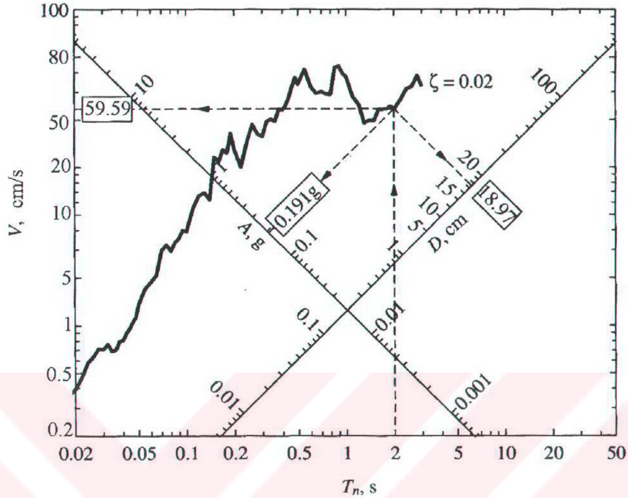
Deformasyon, spektral hız ve spektral ivme mukabele spektrumlarının hepsi de, verilen yer hareketi için aynı bilgilere sahiptirler. Bu üç spektrum arasındaki tek fark, yapısal mukabeleyi değişik şekillerde belirtmeleridir. Bir spektrum bilinirse, diğer ikisi (4.7) ve (4.10) bağıntılarının da yardımıyla bulunabilir.

O halde, aklımıza "mademki her bir spektrum da aynı bilgiyi içeriyor, neden üç spektruma da ihtiyacımız var?" şeklinde bir soru gelebilir. Bunun ilk nedeni, **her bir spektrum değerinin de sistemin ayrı fiziksel değerlerini temsil etmesidir**. Örneğin, deformasyon spektrumu sistemin ekstrem deformasyonunu vermektedir. Spektral hız spektrumu, deprem sırasında sisteme giren kinetik enerjiye bağlı olduğundan enerjinin ekstrem değerini verir. Spektral ivme spektrumu ise direkt olarak eşdeğer statik kuvvete ve taban kesme kuvvetinin ekstrem değerlerine bağlıdır. İkinci neden ise, **üç spektrumun da gözlenmesiyle, bunlardan elde edilen ekstrem değerlere göre yapısal tasarım daha da kolay olmaktadır**. Tüm bu nedenlerden hareketle, 1960 yılında Newmark, bu üç spektrumu da birleştirerek, bugün deprem mukabele spektrumu olarak kullandığımız spektrumu elde etmiştir (Chopra, 2001).

Newmark bu spektrumu oluştururken, üç spektrum değerinin de, (4.7) ve (4.10) bağıntılarında verildiği gibi, birbirleriyle bağlantılı olmalarından faydalanmıştır. Bu bağıntı;

$$\frac{A}{\omega_n} = V = \omega_n D \quad \text{veya} \quad \frac{T_n}{2\pi} A = V = \frac{2\pi}{T_n} D \tag{4.13}$$

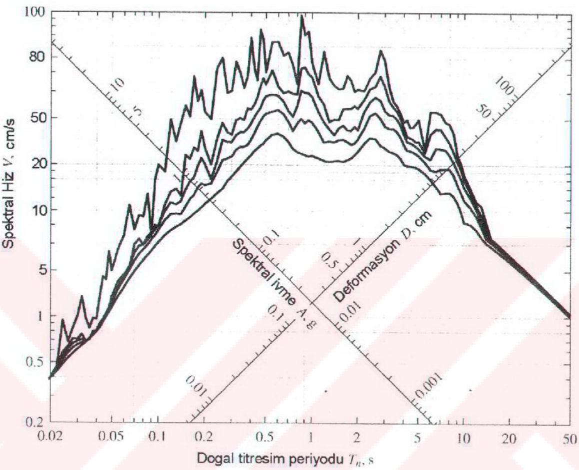
şeklinde gösterilebilir.



Şekil 4.7 $\zeta = \%2$ altında, El Centro yer hareketi için birleştirilmiş D-V-A mukabele spektrumu (Chopra, 2001).

Yukarıdaki bağıntılar ile, harmonik tetiklemeye maruz tek serbestlik dereceli bir sistemin; R_d, R_v ve R_a, dinamik çarpanları için yazılan, (2.95) bağıntısının, birbirlerine benzediği kolayca görülebilir. (2.95) bağıntısı da, Şekil 2.29'da dört yönlü logaritmik ölçekle gösterilmiştir. Spektral değerler de, dört yönlü logaritmik ölçekte gösterilmek kaydıyla bir araya getirilebilirler. V düşey ölçeği ile, T_n yatay ölçeği standart logartimik ölçeklerdir. Diğer iki ölçek olan D ve A için, sırasıyla yatayla +45° ve -45°'lik açılar yapan ölçekler çizilir. Logaritmik ölçekli kağıt hazırlandıktan sonra, spektrumlar kolaylıkla kağıda işlenebilir. Şekil 4.6.b'de gösterilen V - T_n doğrusal ölçekli grafiğikten, Şekil 4.7'de gösterilen logaritmik ölçekli grafiğe geçiş yapılabilir. Verilen T_n doğal periyodu için, D ve A değerleri köşegen ölçeklerinden okunabilir. Şekil 4.7'de buna bir örnek verilmiştir. $T_n = 2s$ için; $D = 18.97cm$ ve $A = 0.191g$ olarak bulunmuştur. (Aslında bu değerler bu kadar netlikte okunamamakla beraber, burada Şekil 4.6'dan yararlanılmıştır.) Dört yönlü gösterim, Şekil 4.6'daki doğrusal gösterimin birleştirilmiş halidir (Chopra, 2001).

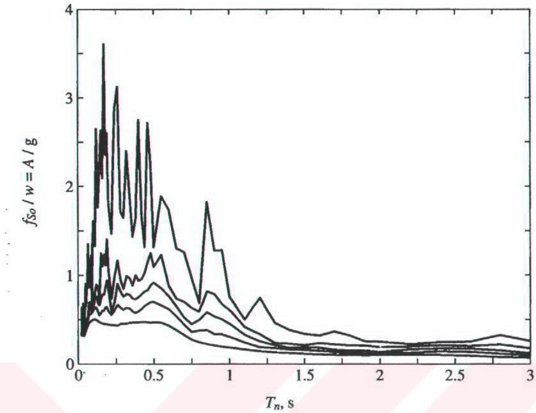
Bir mukabele spektrumu, çok çeşitli sönüm oranlarını ve çok çeşitli periyot değerlerini kapsamalı, olası yapı türlerinin hepsinin ekstrem değerlerini gösterebilmelidir. Şekil 4.7'deki periyot değerleri genişletilmelidir. Diğer yapı türlerinin periyotlarına oranla, çok katlı yapıların ve uzun açıklı köprülerin titreşim periyotları daha büyüktür. Bunun için, periyot ölçeğindeki değerler, $\zeta = \%\,0 - 20$ arasındaki sönüm oranları için genişletilmelidir.



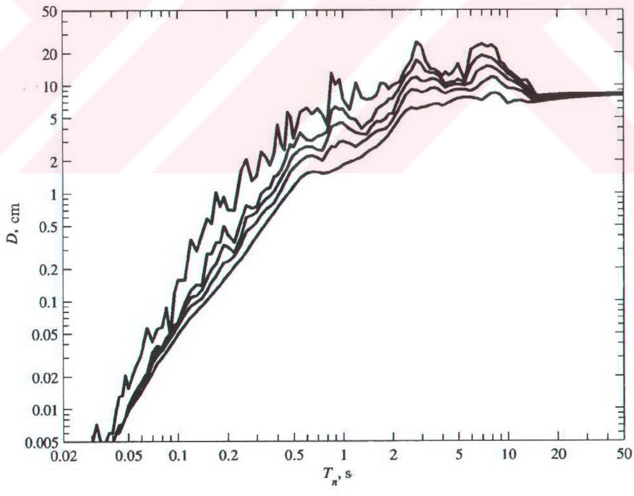
Şekil 4.8 $\zeta = \%0, 2, 5, 10\, ve\ 20$ altında, El Centro yer hareketi için birleştirilmiş D-V-A mukabele spektrumu (Chopra, 2001).

Şekil 4.8'de $\zeta = \%0, 2, 5, 10\, ve\ 20$ oranları için $0.02 - 50\,s$ arasındaki periyot değişimleri gösterilmiştir. Bu şekilde gösterilen spektrum, 18 Mayıs 1940 yılında meydana gelen El Centro depreminin, İmperial Vadisinde kaydedilen kuzey - güney bileşenine aittir. Tek serbestlik dereceli bir sitemin yanal kuvveti ya da taban kesme kuvveti (4.12) uyarınca, $\dfrac{A}{g}$'ye bağlı olduğundan dolayı, Şekil 4.9'da normalize edilmiş spektral ivme spektrumu da gösterilmiştir. Ekstrem deformasyon, D ile verildiğinden, Şekil 4.10'da da deformasyon mukabele spektrumu gösterilmiştir (Chopra, 2001).

Deprem mühendisliğinde, mühendislerin ilgisini çeken yer hareketlerine ait mukabele spektrumları, hareketin olmasından hemen sonra oluşturulabilmektedir. Geçmiş yıllardaki kayıtların incelenmesinden, gelecekteki depremlerin davranışlarının nasıl olacaklarına dair bilgiler elde edilmektedir. Ayrıca, farklı bölgelerdeki kayıtlardan da, uzaklık etkisi, zemin koşullarının etkisi, ...vb. konularda fikir sahibi olunmaktadır.



Şekil 4.9 $\zeta = \%0, 2, 5, 10\, ve\ 20$ oranlarında, El Centro depreminin normalize edilmiş spektral ivme, ya da taban kesme katsayısı, mukabele spektrumu (Chopra, 2001).



Şekil 4.10 $\zeta = \%0, 2, 5, 10\, ve\ 20$ için El Centro depreminin deformasyon mukabele spektrumu (Chopra, 2001).

4.5.5 Mukabele Spektrumu Çizimi

Verilen $\ddot{u}_g(t)$ yer hareketi için bir mukabele spektrumu oluşturmak için (Chopra, 2001);

1. $\ddot{u}_g(t)$ yer hareketi, nümerik olarak düzenlenir. Genellikle, yer hareketinin ordinatları 0.02 s, ara ile değişir.

2. Tek serbestlik dereceli sistemin, T_n doğal periyodu ve ζ sönüm oranı seçilir.

3. $\ddot{u}_g(t)$ yer hareketine maruz sistemin, u(t) deformasyon mukabelesi, 3. Bölümde açıklanan nümerik metotlardan herhangi birisi ile çözülür.

4. u_0, u(t)'nin ekstrem değeri hesaplanır.

5. Spektral ordinatlar hesaplanır: $D = u_0, V = \left(\frac{2\pi}{T_n}\right)D,\ A = \left(\frac{2\pi}{T_n}\right)^2 D$

6. İhtiyaca göre, değişik T_n doğal periyodu ve ζ sönüm oranları seçilerek, 2.-5. adımlar tekrarlanır.

7. 2.-6. adımlar arasında bulunan sonuçlar, ya Şekil 4.6'daki gibi ayrı ayrı, ya da Şekil 4.8'deki gibi üçü bir arada logaritmik ölçekte gösterilir.

5. adımın incelenmesinden de görülebileceği gibi, bir sistemin ekstrem deformasyonu, aşağıdaki bağıntıyla bulunabilir.

$$u_0 = D = \frac{T_n}{2\pi}V = \left(\frac{T_n}{2\pi}\right)^2 A \tag{4.14}$$

Daha önceden de belirtilen eşdeğer statik kuvvet ise,

$$f_{s0} = kD = mA \tag{4.15}$$

ifadesiyle bulunur.

Sistemin tabanında oluşan kesme kuvveti ile moment ise;

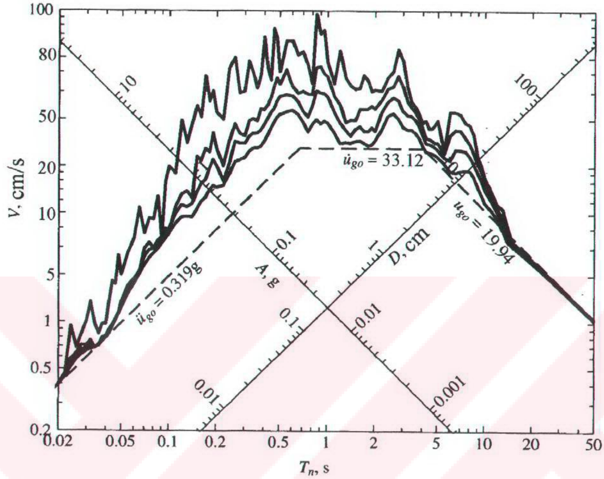
$$V_{b0} = kD = mA \tag{4.16.a}$$

$$M_{b0} = hV_{b0} \tag{4.16.b}$$

(4.16) ifadeleri ile bulunabilirler.

4.6 Mukabele Spektrumunun Karakteristik Özellikleri

Bu bölümde deprem mukabele spektrumlarının önemli özellikleri üzerinde durulacaktır. Şekil 4.11'de, El Centro yer hareketinin, u_{g0} ekstrem yerdeğiştirmesi, $\dot{u}_{g0}$ ekstrem yer hızı ve $\ddot{u}_{g0}$ ekstrem yer ivmesi değerleri birlikte bir mukabele spektrumu üzerinde gösterilmiştir.



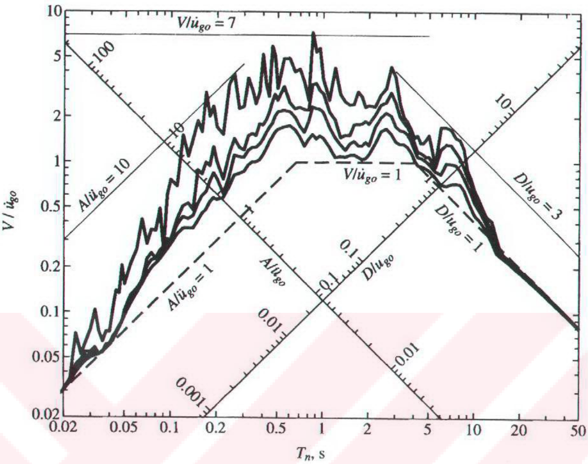
Şekil 4.11 El Centro yer hareketinin $\zeta = \%0, 2, 5, 10\, ve\ 20$ değerlerinde, spektral değerleri (Chopra, 2001).

Mukabele spektrumu ve yer hareketi parametreleri arasındaki alakayı daha da detaylı gösterebilmek için, Şekil 4.11'in verileri, $\dfrac{D}{u_{g0}}, \dfrac{V}{\dot{u}_{g0}}, \dfrac{A}{\ddot{u}_{g0}}$ normalize edilmiş ölçekleri altında, Şekil 4.12'de tekrardan gösterilmiştir. Şekil 4.13'de ise, idealize edilmiş spektrum ile Şekil 4.12'den $\zeta = \%\ 5$ sönüm oranı için çizilen eğri karşılaştırılmıştır.

Periyotları çok kısa olan sistemlerde, (örneğin; $T_n < T_a = 0.35s$) **A, spektral ivme değeri,** $\ddot{u}_{g0}$ değerine yaklaşır, **D, yerdeğiştirmesi** ise çok küçülür. Sabit kütle için, **çok küçük periyotlu sistem rijittir**. Bu şekilde bir sistemin çok az yerdeğiştirme yaptığı ve kütlesinin de yere göre rölatif yerdeğiştirme yaptığı kabul edilirek, maksimum ivme $\ddot{u}_{g0}$ değerine yaklaşık olarak eşit olarak alınır. Bu teori, Şekil 4.14'de daha detaylı açıklanmıştır.

Periyotları çok büyük olan sistemlerde, (örneğin; $T_n < T_f = 15s$) tüm sönüm oranlarında, D,

u_{g0} değerine yaklaşmakta ve A küçülmektedir. Bir başka deyişle sisteme etkiyen kuvvet azalmaktadır. Sabit kütle için, çok uzun periyotlu sistem esnektir. Böyle sistemlerde, kütlenin sabit kaldığı ancak yerin hareket ettiği düşünülmektedir (Şekil 4.15.c).

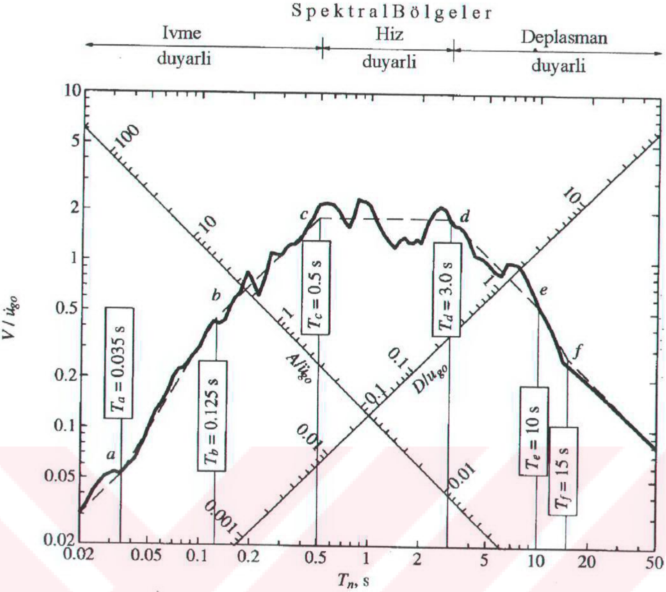


Şekil 4.12 El Centro yer hareketinin normalize edilmiş mukabele spektrumu (Chopra, 2001).

Doğal periyotları T_n, $T_a = 0.035s$ ile $T_c = 0.50s$ arasında olan **küçük periyotlu sistemlerde**; T_n ile ζ sönüm oranına bağlı olan genişletme çarpanı kadar; **A**, $\ddot{u}_{g0}$ değerini aşar. Bu aralıkta $T_b = 0.125s$ değeri ile $T_c = 0.50s$ arasında **A** sabit kabul edilerek, $\ddot{u}_{g0}$ değeri ζ sönüm oranına bağlı olan bir çarpan ile genişleterek idealleştirme yapılır.

T_n, doğal periyotları, $T_d = 3s$ ile $T_f = 15s$ arasında olan **büyük periyotlu sistemlerde**; **D**, T_n ile ζ sönüm oranına bağlı olan genişletme çarpanı kadar, u_{g0} değerini aşar. $T_d = 3s$ değeri ile $T_e = 10s$ arasında **D** sabit kabul edilerek, u_{g0} değeri ζ sönüm oranına bağlı olan bir çarpan ile genişletilerek idealleştirme yapılır.

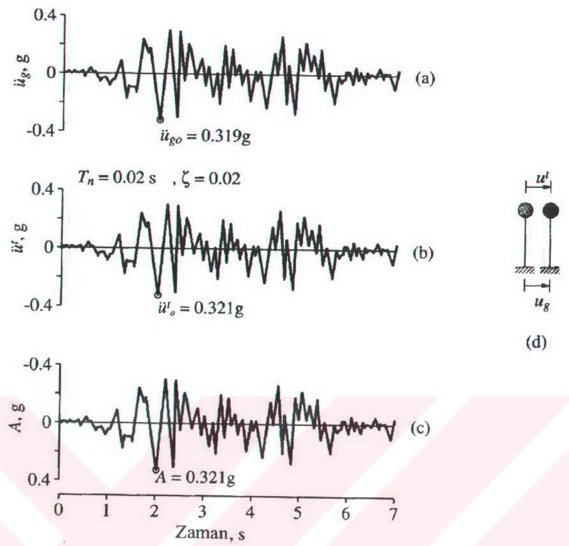
T_n, doğal periyotları, $T_c = 0.5s$ ile $T_d = 3s$ arasında olan **orta periyotlu sistemlerde**; **V**, $\dot{u}_{g0}$ değerini aşar. Bu aralıkta **V** sabit kabul edilerek, $\dot{u}_{g0}$ değeri ζ sönüm oranına bağlı olan bir çarpan ile genişleterek idealleştirme yapılır (Chopra, 2001).



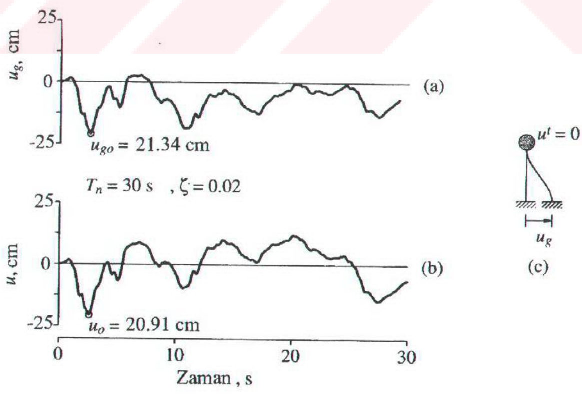
Şekil 4.13 İdealize edilmiş ve edilmemiş halde, El centro yer hareketine ζ=%5 için mukabele spektrumu (Chopra, 2001).

Tüm bu anlatılanların ışığında, Şekil 4.13'de de görüldüğü gibi, mukabele spektrumu üç bölgeye ayırmak mümkündür. **d noktasının sağında** kalan ve $T_n > T_d$ olan **büyük periyotlu bölge**, **deplasman hassasiyetli bölge** olarak isimlendirilebilir. Bu bölgede yapısal mukabele, daha çok yerin deplasmanına bağlıdır. **c noktasının solunda** kalan ve $T_n < T_c$ olan **kısa periyotlu bölge**, **ivme hassasiyetli bölge** olarak isimlendirilir. Bu bölgede yapısal mukabele, daha çok yerin ivmesine bağlıdır. **c noktası** ile **d noktası** arasında kalan ve $T_c < T_n < T_d$ olan **orta periyotlu bölge**, **hız hassasiyetli bölge** olarak isimlendirilir. Bu bölgede yapısal mukabele, daha çok yerin hızına bağlıdır. Herhangi bir yer hareketinde, idealize edilmiş spektrum üzerinde bulunan **T_a, T_b, T_e ve T_f** değerleri sönümden bağımsız iken; **T_c ve T_d** değerleri sönüme bağlıdır. İlerleyen bölümlerde de açıklanacağı gibi; idealize edilmiş spektrumu kullanmak, tasarım spektrumunun oluşturulmasında, bir çok yer hareketini temsil etmede faydalıdır (Chopra, 2001).

Spektrumları en önemli kavram olan **sönüm** açısından incelersek; sönümün deprem spektrumları üzerinde etkin rolü vardır (Şekil 4.8-4.10).



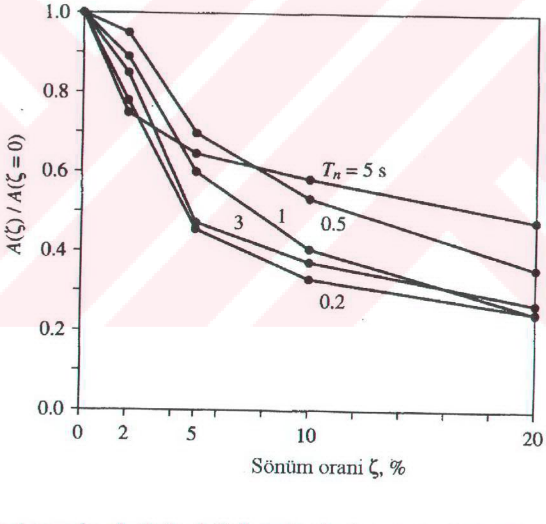
Şekil 4.14 (a) El Centro yer hareketi; (b) tek serbestlik dereceli bir sistemin toplam mukabelesi; (c) aynı sistemin spektral ivme mukabele spektrumu; (d) rijit sistem (Chopra, 2001).



Şekil 4.15 (a) El Centro yer deplasmanı; (b) BSD deformasyon mukabelesi; (c) elastik sistem (Chopra, 2001).

Şekil 4.8-4.10 arasındaki şekiller dikkatle incelenirse, sıfır sönümlü eğrilerin dik sıçramalar yaptıkları görülür. Eğrilerin bu durumu, mukabelenin, doğal titreşimdeki ufak değişimlere bile duyarlı olduğunu gösterir. Sönümün başlamasıyla, mukabele, titreşim periyoduna karşı duyarlılığını kaybetmeye başlar.

Daha önce de değinildiği gibi, sönüm bir sistemin mukabelesini azaltır. Üç spektral bölgede de, sönümden kaynaklanan bu mukabele azalımı farklıdır. $T_n \rightarrow 0$ limit durumunda, yapı yerle beraber rijit hareket ettiği için sönüm mukabeleyi etkilemez. $T_n \rightarrow \infty$ limit durumunda da yapı kütlesi sabit ve altta yer hareket ettiği için, sönüm mukabeleyi etkilemez. Tanımlanan üç spektral bölge arasında **sönümün en çok etkili olduğu aralık hız hassasiyetli bölgedir**. Bu bölgede, sönümün etkileri, hareket halindeki yerin özelliklerine bağlıdır. Eğer, yer hareketi bir çok devirde de harmonik hareket yapmakta ise, **sönümün özellikle rezonans sınırındaki sistemlere etkisi çok büyük olacaktır** (Chopra, 2001).



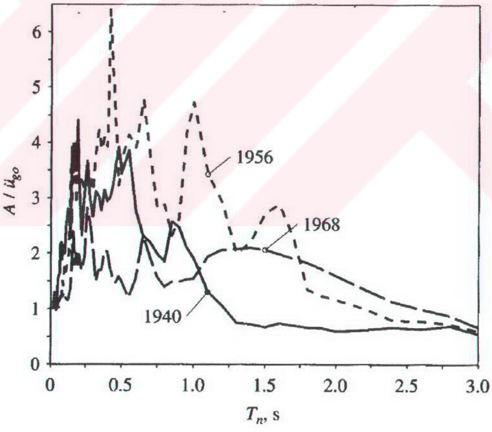
Şekil 4.16 El Centro yer hareketinde, değişik periyotlu sistemlerin sönüm altında, maksimum spektral ivmelerindeki değişim (Chopra, 2001).

Şekil 4.16'da, A(ζ), maksimum spektral ivme değerinin, ζ'nin fonksiyonu olarak, T_n'in değişik değerlerinde grafiği gösterilmiştir. Burada, A(ζ=0) için normalize edilmiştir. Şeklin incelenmesinden rahatça görülebilceği gibi, küçük sönüm değerleri için sönümün etkisi daha fazladır. Bir başka ifade ile, eğer sönüm, %0 değerinden %2 değerine çıkarsa, mukabeledeki azalım; sönümün %10'dan %12'ye çıktığı durumdakinden daha fazladır.

4.7 Elastik Tasarım Spektrumu

Bu bölümde elastik deprem tasarım kavramı üzerinde durulacak ve ekstrem spektrum değerlerinden yaralanarak, elastik tasarım grafiğinin çizimi anlatılmaya çalışılacaktır.

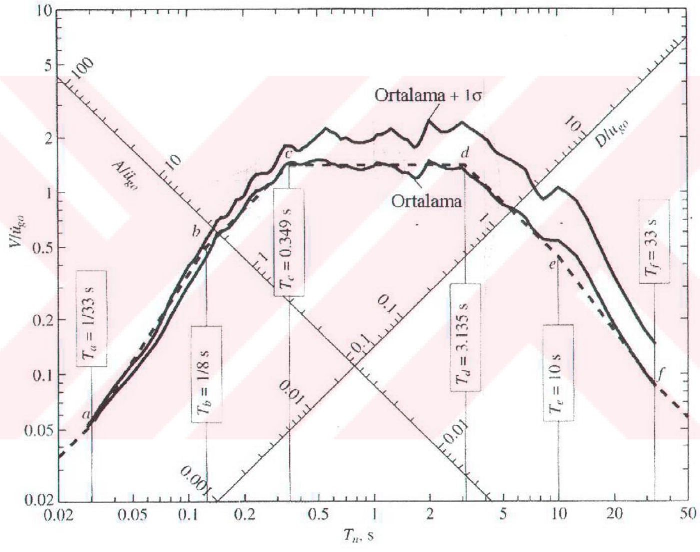
Tasarım deprem spektrumları, yeni yapıların, gelecekte olacak depremlere karşı tasarlanmalarında ya da mevcut yapıların mukavemetlerinin artırılmasında kullanılırlar. Bu yüzden, geçmiş depremlerde oluşan yer hareketlerine ait mukabele spektrum kayıtları geçerli olmazlar. Şekil 4.8'de de görüldüğü gibi, bir mukabele spektrumundaki kesikli ve sivri sıçramalar, tetiklemenin özelliklerini göstermektedir. Şekil 4.17'nin incelenmesinden ise, farklı zamanlarda aynı bölgede olan depremlerin mukabele spektrumlarında da böyle sıçramaların olduğu, ama bu noktaların ekstremum değerlerinin aynı periyotta olmadığı sonucu çıkarılabilir. Aynı mantıktan hareketle, gelecekte olabilecek bir yer hareketinin de, hangi periyotta sıçrama yapacağı ya da bir başka deyişle hangi periyotta ekstrem değere sahip olacağını tahmin etmek o kadar da kolay değildir (Chopra, 2001).



Şekil 4.17 İmperial Vadisinde farklı zamanlarda oluşan deprem mukabele spektrumu (Chopra, 2001).

Genel şekliyle bir tasarım spektrumu, geçmiş yıllara ait yer hareketlerini tanımlayabilmelidir. O bölgeye ait hiç kayıt yoksa, tasarım spektrumu oluşturulurken, aynı koşullarda farklı bölgelerde olan yer hareketleri dikkate alınmalıdır. Eğer, aynı koşullarda olan bölgelerde bulunmazsa, başka bölgelerde olan deprem kayıtlarını idealleştirme yoluna gidilir.

Tasarım spektrumları, grup halindeki yer hareketlerinin mukabele spektrumlarının istatistiksel analizlerine dayanırlar. Seçilen yer hareketi ailesinde, **I** adet yer hareketi kaydı olduğunu düşünelim. Herhangi bir (i'ninci) yer hareketi $\ddot{u}_g^i(t)$ ile gösterilmiş olsun. Bu yer hareketine ait değerler; u_{g0}^i maksimum deplasman, $\dot{u}_{g0}^i$ maksimum hız ve $\ddot{u}_{g0}^i$ maksimum ivmedir. Bu topluluğu oluşturan tüm yer hareketlerinin aynı maksimum ivmeye ($\ddot{u}_{g0}$) sahip olmaları için, her hareket normalize edilir. Normalize edilmiş her yer hareketinin mukabele spektrumu Bölüm 4.5'de izah edilen yöntemlerle hesap edilebilir (Chopra, 2001).

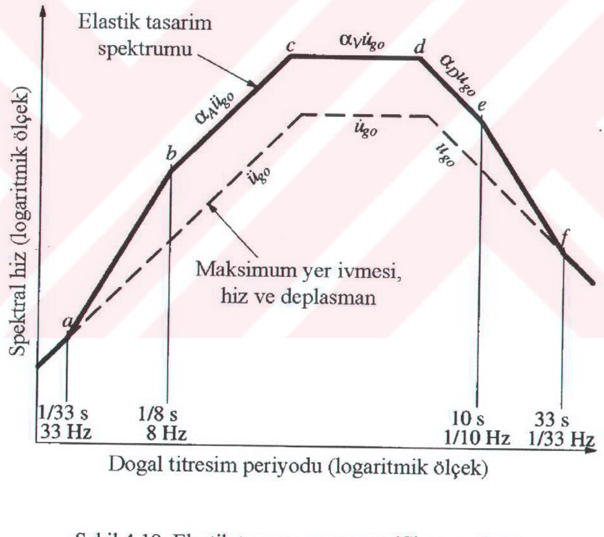


Şekil 4.18 ζ=%5 için, T_n=0.25, 1 ve 4 saniyelerde; V'nin ortalama ve ortalama +1σ olasılık dağılım spektrumu (Chopra, 2001).

Şekil 4.18; 10 deprem kayıtlı bir topluluktan elde edilmiştir. Bu şeklin normalize edilmiş ekseninde bulunan u_{g0}, $\dot{u}_{g0}$ ve $\ddot{u}_{g0}$ değerleri; **I** tane yer hareketinin ortalama maksimum yer değiştirmesi, ortalama maksimum hız ve ortalama maksimum ivme değerleridir. Bu verilerin istatistiksel analizleri sonucunda, her T_n periyodunda, spektral ordinatların olasılık dağılımları, ortalama değerleri ve standart sapma değerleri elde edilir. Şekilde, seçilen üç T_n

değeri için olasılık dağılımları gösterilmiştir. Buradan çıkarabileceğimiz bir başka sonuç ise, varyasyon katsayısı (=standart sapma/ortalama değer), T_n değerine göre değişir. Tüm bu ortalama değerlerinin birleştirilmesi sonucu oluşacak spektrum **ortalama mukabele spektrumu** olarak isimlendirilir. Benzer şekilde, ortalama $+\sigma$ değerlerinin birleştirilmesi ile oluşacak spektrum ise, **ortalama standart sapma mukabele spektrumu** olarak isimlendirilir. Şekil 4.8 ile Şekil 4.18'in karşılaştırılmasından, son şekilde verilen spektrumların tek yer hareketi için verilen spektrumlardan daha düz oldukları görülür. Yine bu karşılaştırmadan, daha düz spektrumların, bir seri düzgün doğrularla idealize edilmeye daha müsait oldukları görülebilir.

Araştırmacılar, yer hareketi değişkenlerinden faydalanarak, tasarım spektrumu oluşturmak için çeşitli yollar geliştirmişlerdir. Bu yollardan bir tanesi Şekil 4.19'da da gösterilen, **büyütme çarpanı metodur** (Chopra, 2001).



Şekil 4.19 Elastik tasarım spetrumu (Chopra, 2001).

Bu metotta tavsiye edilen periyot değerleri, T_a=1/33 s, T_b=1/8 s, T_e=10 s ve T_f =33 s şeklindedir. Üç spektral bölge için; **α_A, α_V ve α_D büyütme çarpanları**, Newmark tarafından, çok fazla sayıda yer hareketi ailesinin analizlerinden bulunmuş ve Çizelge 4.1'de gösterilmiştir. Newmark, yaptığı analizlerde, yer hareketlerini oldukları yere göre; kaya, yumuşak kaya ve tortul kaya olarak üç grupta toplamıştır. Bu analizlerde, ortalama değerinin aşılmama olasılığı ise, %50 ve %84.1'e göre ayrı ayrı hesap edilmiştir.

Çizelge 4.1 Elastik spektrumlar için Newmark'ın büyütme çarpanları (Chopra, 2001).

Sönüm oranı, ζ (%)	Ortalama (%50)			Bir Sigma (%84.1)		
	α_A	α_V	α_D	α_A	α_V	α_D
1	3.21	2.31	1.82	4.38	3.38	2.73
2	2.74	2.03	1.63	3.66	2.92	2.42
5	2.12	1.65	1.39	2.71	2.30	2.01
10	1.64	1.37	1.20	1.99	1.84	1.69
20	1.17	1.08	1.01	1.26	1.37	1.38

Ortalama değerin %50 aşılmama olasılığı, spektral ordinatların ortalama değerlerini verir. %84.1 değeri ise, spektral ordinatlarda logaritmik bir olasılık dağılımı kabul ederek, ortalama standart sapma değerini yuvarlar.

Bir tasarım spektrumunu oluşturmak için gereken adımları, Şekil 4.19'u referans alarak özetleyecek olursak (Chopra, 2001);

1. Tasarım yer hareketini çizebilmek için, $\ddot{u}_{g0}$ yer ivmesinin, $\dot{u}_{g0}$ hızının ve u_{g0} deplasmanının spektral değerlerine karşılık gelen üç tane doğru, kesikli çizgilerle çizilir.

2. Çizelge 4.1'den seçilen ζ sönüm oranı için, α_A, α_V ve α_D büyütme çarpanları belirlenir.

3. $\ddot{u}_{g0}$ yer ivmesi, α_A çarpanı ile çarpılarak, b-c arasındaki düzgün doğru bulunur. Bu doğru A spektral ivmesinin sabit değerini verir.

4. $\dot{u}_{g0}$ hızı, α_V çarpanı ile çarpılarak, c-d arasındaki düzgün doğru bulunur. Bu doğru V spektral hızının sabit değerini verir.

5. u_{g0} deplasmanı, α_D çarpanı ile çarpılarak, d-e arasındaki düzgün doğru bulunur. Bu doğru D deformasyonun sabit değerini verir.

6. T_a değerinden küçük olan periyotlar için $A = \ddot{u}_{g0}$ doğrusu; T_f değerinden büyük olan periyotlar için ise $D = u_{g0}$ doğrusu çizilir.

7. a-b ve e-f geçiş çizgilerinin de çizilmesiyle spektrum tamamlanır.

Tek serbestlik dereceli sistemlerin elastik kalmasını sağlayan tasarım kuvvetinin ve deplasmanının bulunmasında da elastik tasarım spektrumu esas alınır. Bundan dolayı, spektral değerlerin bulunmasında, tasarım spektrumları, mukabele spektrumu gibi kullanılabilir.

Herhangi bir mukabele spektrumu ile tasarım spektrumu arasında, spektrumun üç bölgesinde de farklılar olması doğaldır. Zira, tasarım spektrumu, birçok yer hareketinin ortalama değerleri alınarak oluşturulmuş bir spektrumdur (Chopra, 2001).

5. DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERİN DEPREM MUKABELELERİ

Önceki bölümlerde, yer hareketi etkisi altındaki doğrusal elastik bir sistemin maksimum taban kesme kuvvetinin, $V_b = (A/g)w$ olduğunu görmüştük. Burada, w, sistemin ağırlığı, A, ise sistemin doğal periyot ve sönümüne karşılık gelen spektral ivme spektrumunun ordinatıdır. Çoğu binalar, elastik taban kesme kuvvetinden daha düşük taban kesme kuvvetlerine göre tasarlanırlar. Bir başka deyişle, yönetmeliklere göre tasarlanan binalar, doğrusal elastik davranışın ötesinde deforme olurlar. Eğer, bir deprem sonrasında yapı, tamiri hiç de ekonomik olmayan hasarlara maruz kalıyor ya da tamamen çöküyorsa tasarımın başarılı olmadığı muhakkaktır. Burada asıl iş, tasarım mühendislerine kalmaktadır. Tasarım mühendisleri, yapıyı kabul edilebilir limitlerde hasar görecek şekilde tasarlamalıdırlar. Özellikle son yıllarda, şiddetli yer hareketleri altında, yapıların elastik ötesi mukabeleleri deprem mühendisliğinin en önemli konuları arasındadır (Chopra, 2001).

5.1 Kuvvet – Deformasyon İlişkileri

1960'lı yıllardan beri, depremin yapılara etkilerini anlayabilmek için yüzlerce laboratuar deneyleri yapılmıştır. Deprem sırasında yapılar, bir kısım deformasyonun geri döndüğü çevrimsel hareket yaparlar.

Geçmiş zamanlardan beri yapılan deneylerden elde edilen sonuçlara göre; çevrimsel kuvvet – deformasyon davranışı yapısal sisteme ve yapısal malzemeye bağlıdır (Şekil 5.1). Kuvvet – deformasyon grafiği, tekrarlı yüklemeler altında, elastik olmayan davranıştan dolayı çevrimsel eğri davranışı gösterir.

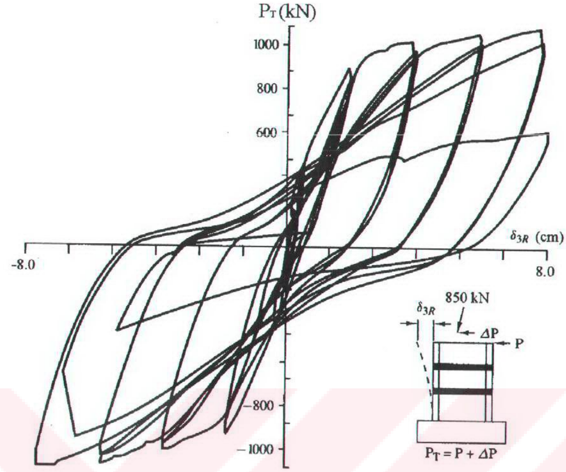
1960'lı yıllardan bu yana, kuvvet – deformasyon eğrileri, Şekil 5.1'de ki gibi idealize edilmiş olan tek serbestlik dereceli sistemlerin deprem mukabelelerinin belirlenebilmesi için, çok sayıda bilgisayar programı geliştirilmiştir.

5.1.1 Elastoplastik İdealleştirme

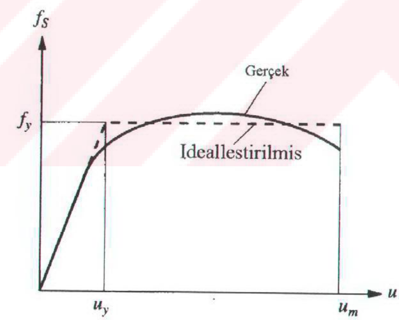
Herhangi bir yapının başlangıç yüklemesinin, Şekil 5.2'de verilen kuvvet – deformasyon grafiği gibi olduğunu kabul edelim. Grafikteki eğriyi, **elastik – tam plastik** veya başka deyişle **elastoplastik** kuvvet – deformasyon grafiğine dönüştürmek uygun bir idealleştirme şekli olur. İleride açıklanacağı gibi, bu idealleştirme sayesinde, sistemin mukabele spektrumunun, doğrusal elastik sistemlerinkine benzediği söylenebilir (Chopra, 2001).

Gerçek kuvvet – deformasyon eğrisine sahip bir sistem, elastoplastiklik yaklaşımı yapılarak

Şekil 5.2'de gösterilmiştir.

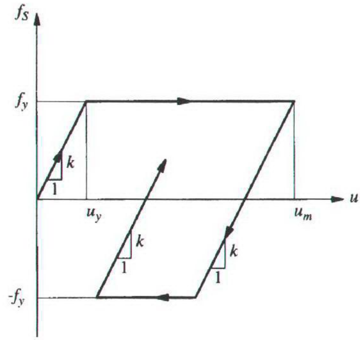


Şekil 5.1 Betonarme için çevrimsel eğri (Chopra, 2001).



Şekil 5.2 Başlangıç yüklemesine ait kuvvet – deformasyon grafiği: gerçek ve idealleştirilmiş (Chopra, 2001).

Şekil 5.2'deki grafikte; iki eğri altında kalan alanlar, seçilen bir u_m, **maksimum deplasmanında** eşit değerdedirler. İlk yüklemede, idealize edilmiş bu sistem, f_y kuvvetini aşmadığı sürece, doğrusal elastik olup, k **rijitliğine** sahiptir. Kuvvet, f_y **akma dayanımına** ulaştğında akma başlar. Akmanın başladığı andaki deformasyon, u_y **akma deformasyonu** olarak adlandırılır. Akma, f_y sabit kuvveti altında gerçekleşir (Chopra, 2001).



Şekil 5.3 Elastoplastik kuvvet – deformasyon ilişkisi (Chopra, 2001).

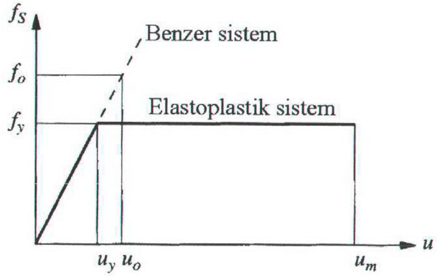
Şekil 5.3'de, elastoplastik sistemler için; yükleme, boşalma ve geri yüklemeden oluşan tipik bir döngü gösterilmiştir. Deformasyonun her iki yönünde de akma dayanımı aynıdır. Geri boşalım eğrisi, maksimum deformasyonun olduğu noktadan, ilk elastik kısma paralel bir yol izler. Eğer sistem geri yükleme ya da boşalım yapıyorsa, çevrimsel (döngüsel) kuvvet – deformasyon ilişkisi artık tek değişkenli değildir. t anında, u deformasyonu için, f_S direnç kuvveti, sistemin hareketine ve deformasyonun artıp ($\dot{u} > 0$), artmamasına ($\dot{u} < 0$) bağlıdır.

5.1.2 Elastoplastik Sistemlere Tekabül Eden Doğrusal Sistemler

Elastoplastik bir sistemin, deprem yer hareketi sırasında oluşacak maksimum deformasyonunu belirlemek ve bu değeri, elastoplastik sisteme karşı gelen, doğrusal elastik sistemin deformasyonu ile karşılaştırmak mühendislerin uğraştığı bir konudur.

Yukarıda bahsedilen elastik sistem, elastoplastik sistemin ilk yükleme anındaki rijitliğine sahiptir. Her iki sistemde aynı kütleye ve sönüm oranına sahiptir. Bu nedenden dolayı, karşı gelen doğrusal sistemin doğal titreşim periyodu, küçük titreşimler yapan ($u \leq u_y$) elastoplastik sistemin doğal titreşim periyoduna eşittir.

Hareketin genliği büyüdükçe, doğal titreşim periyodu, elastik olmayan sistemler için tanımlanmaz (Chopra, 2001).



Şekil 5.4 Elastoplastik sistem ve ona tekabül eden doğrusal sistem (Chopra, 2001).

5.2 Normalize Edilmiş Akma Dayanımı, Akma Dayanım Azaltım Çarpanı ve Süneklik Çarpanı

Elastoplastik bir sistemin, **normalize edilmiş akma dayanım kuvveti** $\overline{f}_y$, (5.1) bağıntısıyla bulunabilir.

$$\overline{f}_y = \frac{f_y}{f_0} = \frac{k\,u_y}{k\,u_0} = \frac{u_y}{u_0} \qquad (5.1)$$

Bu denklemde, $f_0 = f_{S0}$ ve u_0 değerleri, deprem etkisine maruz kalmış, karşı gelen doğrusal sistemlerin, sırasıyla, tepki kuvveti ve deformasyon değerleridir. f_0 değerini, yer hareketine karşı, sistemin doğrusal elastik kalması için gereken minimum dayanım kuvveti olarak da tanımlayabiliriz. Eğer, bir sistemin normalize edilmiş akma dayanımı, 1'den küçük ise, sistem akarak, elastik ötesi bölgede deforme olmaya başlar. Normalize edilmiş akma dayanımları 1'e eşit olan sistemler ise, doğrusal elastik kalırlar. Bu sistemlerde, $f_y = f_0$ olur (Chopra, 2001).

f_y değerini, f_0 değeri cinsinden ifade etmenin bir başka yolu ise, R_y **akma dayanım azaltım çarpanından** faydalanmaktır.

$$R_y = \frac{f_0}{f_y} = \frac{u_0}{u_y} \qquad (5.2)$$

(5.2) ve (5.1) ifadelerinin incelenmesinden, R_y değerinin, f_y'nin tersi olduğu görülür. Doğrusal elastik sistemler için $R_y = 1$ ve elastik ötesi bölgede deforme olan sistemler için

$R_y > 1$ olur. Örneğin; $R_y = 2$, sistemin akma dayanımının, sistemin elastik kalması için gereken minimum dayanımın 2'ye bölünmesi ile bulunabileceği anlamına gelmektedir.

Elastoplastik sistemin yer hareketine karşı ekstrem ya da mutlak maksimum deformasyonu, u_m ile gösterilir. Sistemin akma deformasyonuna bağlı olarak, u_m değerinin normalize edilmiş hali;

$$\mu = \frac{u_m}{u_y} \tag{5.3}$$

şeklindedir. (5.3) ifadesiyle gösterilen bu birimsiz oran, **süneklik çarpanı** olarak adlandırılır. **Elastik ötesi bölgede** deforme olan sistemlerde, u_m değeri, u_y değerini aşar, buna bağlı olarak da **süneklik çarpanı 1'den büyük olur**.

$f_y = f_0$ olduğunda, karşı gelen doğrusal sistem, süneklik çarpanı da birim değerini alarak, elastoplastik bir sistem olarak dikkate alınabilir. Elastoplastik sistemin ve buna karşılık gelen doğrusal sistemin ekstrem deformasyonları u_m ve u_0 değerlerini oranlarsak;

$$\frac{u_m}{u_0} = \mu \overline{f}_y = \frac{\mu}{R_y} \tag{5.4}$$

ifadesini elde ederiz (Chopra, 2001).

5.3 Hareket Denklemi ve Parametreleri

Elastik olmayan sistemlerin hareket ifadesi, daha önceki bölümlerde de gösterildiği gibi aşağıdaki gibidir.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + f_S(u,\dot{u}) = -m\ddot{u}_g(t) \tag{5.5}$$

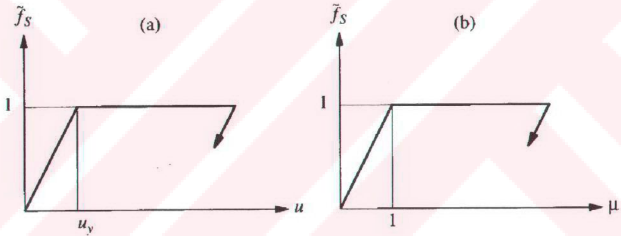
Şekil 5.3'de gösterilen elastoplastik bir sistemde, $f_S(u,\dot{u})$ direnç kuvvetini göstermektedir. (5.5) denklemi, 3. Bölümde açıklanan nümerik metotlardan biri ile çözülerek, $u(t)$ ifadesi belirlenebilir. Burada verilen sonuçlar, $\Delta t = 0.02\,s$ için ve **ortalama ivme metodu** kullanılarak bulunan sonuçlardır. Δt zaman aralığı, 3. Bölümde verilen kuvvet – deformasyon ilişkisinde elastik bölgeden plastik bölgeye geçişte; ya da tam tersi, plastik bölgeden elastik bölgeye geçişte, daha da küçülür (Chopra, 2001).

Verilen $\ddot{u}_g(t)$ değeri için, $u(t)$; kuvvet – deformasyon bağıntılarının yanında; ω_n, ζ, u_y den oluşan üç sistem parametresine bağlıdır. Burada, kuvvet – deformasyon grafiği elastoplastik alınmıştır.

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u_y \tilde{f}_S(u,\dot{u}) = -\ddot{u}_g(t) \tag{5.6}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \qquad \tilde{f}_S(u,\dot{u}) = \frac{f_S(u,\dot{u})}{f_y} \tag{5.7}$$

(5.6) denkleminden, $u(t)$'nin ω_n, ζ, u_y değerlerine bağlı olduğu kolaylıkla görülebilir. ω_n değeri; elastik olmayan sistemin, doğrusal elastik bölgede yaptığı titreşiminin doğal frekansıdır. Bu değer aynı zamanda, karşı gelen doğrusal sistemin de doğal fekansıdır. ζ değeri; elastik olmayan sistemin, doğrusal elastik bölgede yaptığı titreşimin, $2m\omega_n$ kritik sönüm değerine bağlı olan sönüm oranıdır. Bu değer aynı zamanda, karşı gelen doğrusal sistemin de sönüm oranıdır. $\tilde{f}_S(u,\dot{u})$ fonksiyonu ise, Şekil 5.5.a'da gösterildiği gibi, boyutsuz kuvvet – deformasyon ilişkisini belirtmektedir.



Şekil 5.5 Normalize edilmiş halde kuvvet – deformasyon ilişkileri (Chopra, 2001).

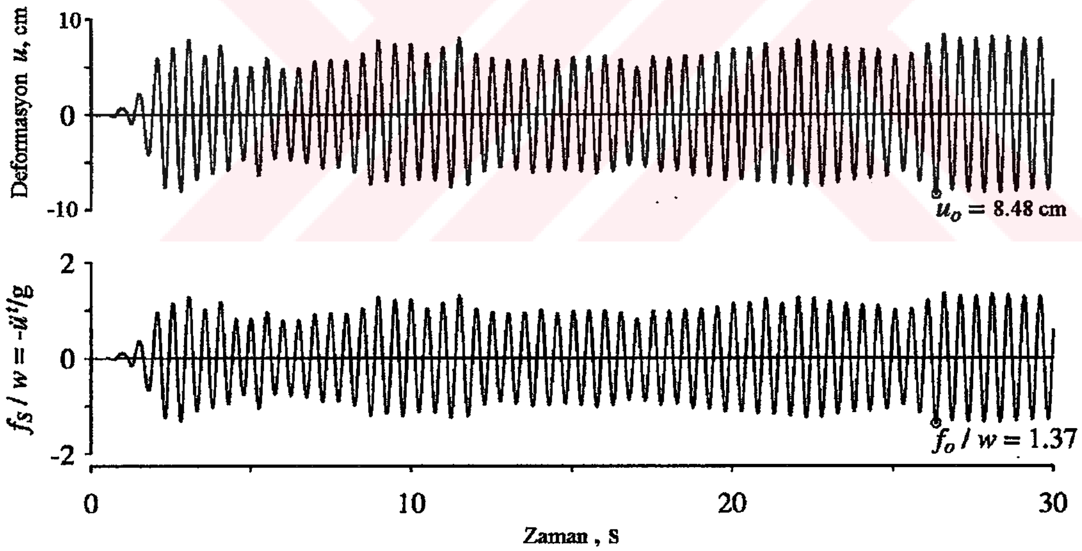
Verilen $\ddot{u}_g(t)$ değeri için, μ, süneklik oranı; elastoplastik sistemin ω_n, ζ, $\bar{f}_y$'den oluşan üç sistem parametresine bağlıdır. $\mu(t) = u(t)/u_y$ ifadesinden elde edilen, $u(t) = u_y\mu(t)$, $\dot{u}(t) = u_y\dot{\mu}(t)$ ve $\ddot{u}(t) = u_y\ddot{\mu}(t)$ değerleri, (5.6) bağıntısında yerine yazılır ve elde edilen bağıntı u_y ile bölünürse;

$$\ddot{\mu} + 2\zeta\omega_n\dot{\mu} + \omega_n^2 \tilde{f}_S(\mu,\dot{\mu}) = -\omega_n^2 \frac{\ddot{u}_g(t)}{a_y} \tag{5.8}$$

ifadesi elde edilir. Bu bağıntıda; $a_y = f_y/m$ değeri, kütlenin gerekli akma kuvvetini oluşturacak ivme değeri olarak ele alınır. $\tilde{f}_S(\mu,\dot{\mu})$ değeri ise, Şekil 5.5.b'de gösterilen kuvvet – deformasyon ilişkisinin boyutsuz şeklidir. $\ddot{u}_g(t)/a_y$ ivme oranı; yer ivmesinin yapının akma dayanımının ölçüsüne oranı olarak tanımlanır. (5.8) ifadesinin incelenmesinden, $\ddot{u}_g(t)$ yer ivmesinin 2 katına çıkarılıp, akma dayanımı yarıya indirilirse, aynı $\mu(t)$ mukabele değerinin elde edileceği görülür.

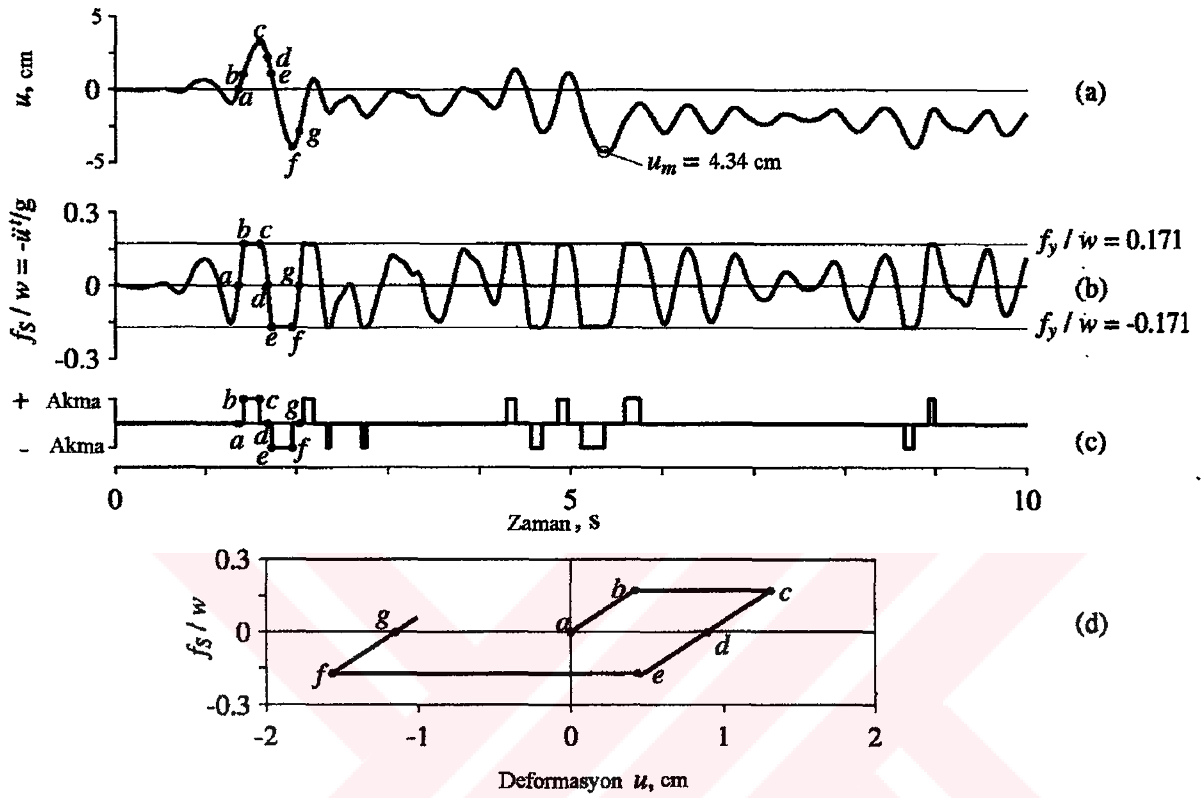
(5.8) ifadesinden çıkarılabilecek ikinci sonuç ise, verilen $\ddot{u}_g(t)$ ve $\tilde{f}_S(\mu,\dot{\mu})$ elastoplastik formu için; $\mu(t)$; ω_n, ζ, a_y değerlerine bağlıdır. Buna mukabil, a_y; $\omega_n, \zeta, \bar{f}_y$ değerlerine bağlı olup, $a_y = f_y/m$ ifadesinde, (5.1) ifadesi yerine yazılırsa; $a_y = \omega_n^2 u_0 \bar{f}_y$ bağıntısı elde edilir. Bu son bağıntıdan da görüleceği üzere, u_0 ekstrem deformasyonu, karşı gelen doğrusal sistemde, ω_n, ζ değerlerine bağlıdır. Bir başka deyişle; verilen $\ddot{u}_g(t)$ yer hareketi için, μ; $\omega_n, \zeta, \bar{f}_y$ değerlerine bağlıdır (Chopra, 2001).

5.4 Akmanın Etkileri



Şekil 5.6 Doğrusal sistemin $T_n = 0.5s$ ve $\zeta = 0$ için, El Centro yer hareketine mukabelesi (Chopra, 2001).

Şekil 5.6'da, w ağırlığında, $T_n = 0.5s$ doğal periyodunda ve sönümsüz, doğrusal elastik bir sistemin mukabelesi gösterilmiştir. Deformasyonun zamanla değişimi, sistemin, deforme olmamış şekli civarlarında titreştiğini ve maksimum deformasyonun da, $u_0 = 8.84cm$ olduğunu göstermektedir. Yine aynı şekilde, f_S elastik direnç kuvvetinin de zamanla değişimi ve bu f_0 kuvvetinin maksimum değeri, $f_0/\omega = 1.37$ olarak verilmiştir. Bu değer, yapının elastik kalması için gereken minimum dayanımdır. Daha önceki bölümlerde anlatılanlardan, $\ddot{u}_0^t = 1.37g$ olarak bulunabilir (Chopra, 2001).



Şekil 5.7 Elastoplastik bir sistemin, $T_n = 0.5s$ ve $\zeta = 0$ ve $\bar{f}_y = 0.125$ için, El Centro yer hareketine mukabelesi: (a) deformasyon; (b) direnç kuvveti ve ivme; (c) akmanın zaman aralıkları; (d) kuvvet – deformasyon ilişkisi (Chopra, 2001).

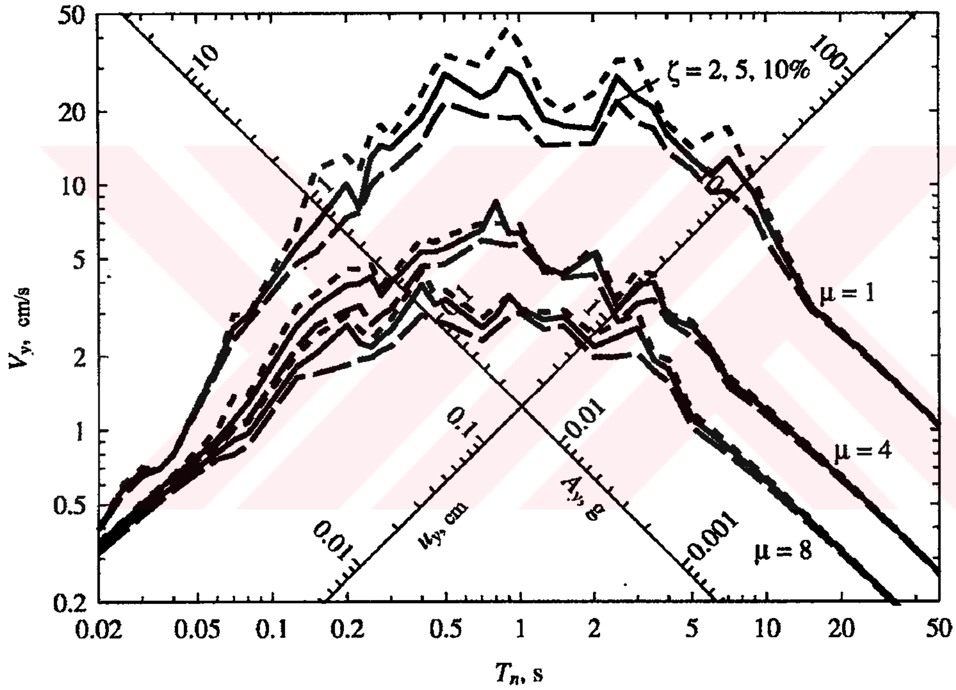
Şekil 5.7'de, doğrusal elastik sistemle aynı kütleye ve başlangıç rijitliğine sahip olan, $\bar{f}_y = 0.125$ ($R_y = 8$, akma dayanım azaltma çarpanı) normalize edilmiş dayanıma sahip, elastoplastik bir sistemin mukabelesi gösterilmiştir. Bu sistemin, akma dayanımı, $f_y = 0.125 f_0$ ve Şekil 5.6'dan $f_0 = 1.37\omega$ olur. O halde; $f_y = 0.125(1.37\omega) = 0.171\omega$ olarak bulunur. Mukabelenin daha detaylı incelenebilmesi bakımından, Şekil 5.7'de 10 s'lik kısım alınmış ve buda dört bölümde incelenmiştir: (a) u(t) deformasyonu; (b) $f_S(t)$ direnç kuvvetini ve $\ddot{u}^t(t)$ ivmesini; (c) sistemin aktığı zaman aralıklarını ve (d) hareketin bir devrinde oluşan kuvvet – deformasyon ilişkisini göstermektedir. Başlangıçta, b noktasına kadar, deformasyon küçük olup $f_S < f_y$ dir. Bir başka ifade ile, sistemin titreşimi doğrusal elastik bölgede olur. Çevrimin başladığı ve aynı zamanda u ile f_S değerlerinin 0 olduğu a noktasından b noktasına kadar sistem doğrusal elastik davranış içindedir. Deformasyon, ilk akma deformasyonu olan b noktasına eriştiğinde, akma başlar. Sistem b noktasından c noktasına kadar akmaya devam eder (Şekil 5.7.c); kuvvet f_y değerinde sabittir (Şekil 5.7.b) ve sistem kuvvet – deformasyon grafiğinin b-c plastik kolu üzerindedir (Şekil 5.7.d). Sistem c noktasına ulaştığında, belirli maksimum deformasyon değerine sahip olup, bu noktada hızı sıfırdır ve deformasyon tersine dönmeye başlar (Şekil 5.7.a). Sistem c-d boyunca elastik olarak geri boşalım yapar (Şekil 5.7.d). Bu anda sistem akmamaktadır (Şekil 5.7.c). Sistemin geri boşalımı, direnç kuvvetinin 0 olduğu d noktasına ulaşıncaya kadar devam eder (Şekil 5.7.d). Bundan sonra sistem, ters yönde tekrar yüklenmeye başlar. Bu olay, e noktasında f_S değeri $-f_y$ değerine ulaşıncaya kadar devam eder (Şekil 5.7.b ve d). Artık, ters yönde akma başlayacak ve f noktasına kadar devam edecektir (Şekil 5.7.c). Bu zaman aralığında, $f_S=-f_y$ olup (Şekil 5.7.b); sistem e-f plastik kolu üzerinde hareket etmektedir (Şekil 5.7.d). Sistem f noktasında iken, deformasyon değeri için yerel minimum bir değere ulaşacak, hızı sıfır olacak ve deformasyon tekrardan tersinerek (Şekil 5.7.a); sistem f-g kolu boyunca geri yüklenecektir (Şekil 5.7.d). Yine bu anda sistemde akma meydana gelmeyecektir (Şekil 5.7.c). Geri yükleme, sistemdeki direnç kuvvetini g noktasında sıfıra getirir ve direnç kuvveti $+f_y$ değerine erişinceye kadar elastik kol üzerinde hareket eder.

Şekilden de görüldüğü gibi; elastik olmayan sistemler, elastik sistemlerden farklı olarak, akmaya başladıktan sonra, ilk denge durumlarında titreşmemektedirler. Akma, sistemin ilk denge konumundan ötelenmesine yol açmaktadır. Artık sistem, bir sonraki akma anına kadar, yeni denge konumu etrafında titreşmektedir. Bir başka deyişle, yer sarsıntısı sona erdiğinde, sistem ilk denge konumundan farklı bir konumda titreşimini bırakacaktır (sabit deformasyon kalıcıdır). Deprem sırasında, belirgin akmaya uğramış sistemler, deprem hareketinin sonunda tam düşeyliklerini koruyamazlar. Buna mukabil, doğrusal bir sistem, yer sarsıntısı sona erdiğinde, serbest titreşiminin sönümlenmesi sonucu, ilk denge konumuna döner. Her ne kadar, Şekil 5.6 ve Şekil 5.7'de verilen sistemler, ekstrem değerlerine farklı zamanlarda ulaşsalar da; Şekil 5.6'da verilen doğrusal elastik sistemin maksimum 8.48 cm' lik deplasmanı ile, Şekil 5.7'de verilen elastoplastik sistemin maksimum 4.34 cm'lik deplasmanı arasındaki fark, yukarıda açıklananlara bir örnek teşkil edebilir. Ayrıca yapılan deneylerden; **akma dayanımları düşük olan sistemlerin, daha uzun zaman aralıklarında daha sıklıkla aktıkları belirlenmiştir** (Chopra, 2001).

Elastoplastik bir sistemin süneklik çarpanı, (5.4) bağıntısından yararlanılarak bulunabilir. Örneğin; $\bar{f}_y = 0.25$ olan elastoplastik bir sistemin ve buna karşılık gelen elastik sistemin ekstrem deformasyon değerleri sırasıyla; $u_m = 4.44\,cm$ ve $u_0 = 5.72\,cm$ ise; $\mu = \left(\dfrac{4.44}{5.72}\right)\left(\dfrac{1}{0.25}\right) = 3.11$ olur. Bu değer, yer hareketi tarafindan sistemin ulaşması istenen değer olup; **süneklik talebi** adı verilir. Bir sistemin tasarımında, **süneklik kapasitesi** (elastik limitin ötesinde deforme olabilme yetisi), talep süneklik değerini aşmalıdır.

5.5 Akma ve Sönümün Bağıl Etkileri

Şekil 5.8'de; $\zeta = \%2,5,10$ için doğrusal elastik bir sistemin mukabele spektrumu gösterilmiştir. Elastoplastik bir sistemin mukabele spektrumu ise, aynı üç sönüm değerinde, ancak $\mu = 4\ ve\ 8$ gibi farklı iki süneklik çarpanı için belirtilmiştir.



Şekil 5.8 El Centro yer hareketi için, elastoplastik sistemlerin mukabele spektrumu (Chopra, 2001).

Akma ve viskoz sönümün etkileri bir yönden birbirlerine benzerlerken, başka bir yönden farklıdırlar. Benzedikleri yön; her iki etkide, **A_y spektral ivme** değerini ve buna bağlı olarak, sistemin tasarlanmasında göz önüne alınacak, yanal kuvveti azaltırlar. Spektrumun bölgelerine göre, bu iki etkinin karşılaştırılması aşağıda verilmiştir (Chopra, 2001);

1. Bir sistemin periyodu, **deplasman hassasiyetli spektrum bölgesinde** ise, sönümün etkisi ihmal edilebilir düzeyde iken; bu tip sistemler için, akmanın tasarım kuvvetine etkisi çok

önemlidir. Ancak ekstrem deformasyon bulunurken akma etkisi ihmal edilebilir.

2. Bir sistemin periyodu, **ivme hassasiyetli spektrum bölgesinde** ise, sönümün etkisi ihmal edilebilir düzeyde iken; bu tip sistemler için, akmanın ekstrem deformasyona ve süneklik talebine etkisi çok önemlidir. Ancak, tasarım kuvvetinde bunlar çok küçük kaldıklarından ihmal edilebilirler.

3. Bir sistemin periyodu, **hız hassasiyetli spektrum bölgesinde** ise, sistemin mukabelesini azaltmada, sönüm çok etkilidir. Ancak, akmada etkin sayılabilir.

Elastik olmayan sistemlerin mukabelelerini azaltmada, sönümün etkisi çok etkin değildir. Bu etki, elastik olmayan deformasyon arttıkça daha da azalır.

5.6 Elastik Olmayan Tasarım Spektrumu

Elastik olmayan tasarım spektrumunun belirlenmesinde en kolay yol, bir önceki bölümde açıklanan şekilde, belirli bir süneklik için çizilen elastik tasarım spektrumunun, $\bar{f}_y$ normalize edilmiş dayanım ile çarpılması ya da R_y akma dayanım azaltım çarpanına bölünmesi yoludur.

5.6.1 $R_y - \mu - T_n$ İfadeleri

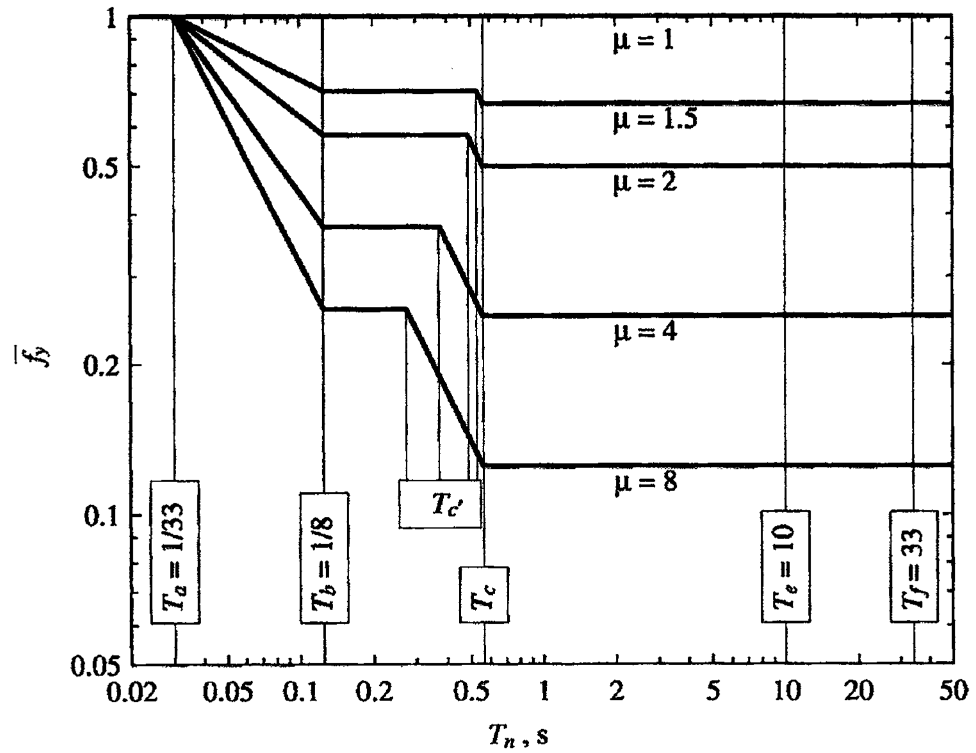
Şekil 5.9'da, $\bar{f}_y$'nin bir yer hareketi için T_n ile değişimi gösterilmiştir. Bu konu üzerinde yapılan araştırmalardan elde edilen sonuçlar, istatistiki olarak düzenlenmiş ve değişik μ değerleri için, $\bar{f}_y$'nin T_n ile değişimi için bağıntılar çıkartılmıştır. Bu bağıntılardan en yaygın kullanılanı (5.9) denkleminde verilmiştir (Chopra, 2001).

$$\bar{f}_y = \begin{cases} 1 & T_n < T_a \\ 1/\sqrt{(2\mu - 1)} & T_b < T_n < T_{c'} \\ 1/\mu & T_n > T_c \end{cases} \tag{5.9}$$

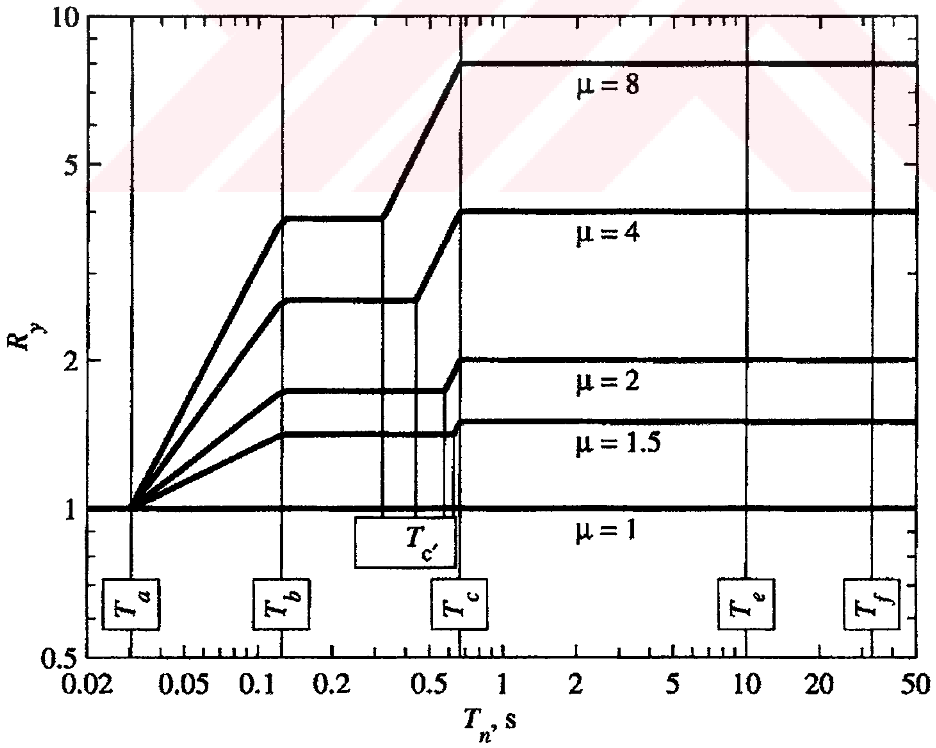
$R_y = 1/\bar{f}_y$ olduğundan; (5.10) ifadesinde, farklı spektral bölgelerde, R_y'nin μ'nün bir fonksiyonu olarak değişimi gösterilmiştir.

$$R_y = \begin{cases} 1 & T_n < T_a \\ \sqrt{2\mu - 1} & T_b < T_n < T_{c'} \\ \mu & T_n > T_c \end{cases} \tag{5.10}$$

(5.10) denklemi, çeşitli μ değerleri için, Şekil 5.10'da gösterilmiştir.

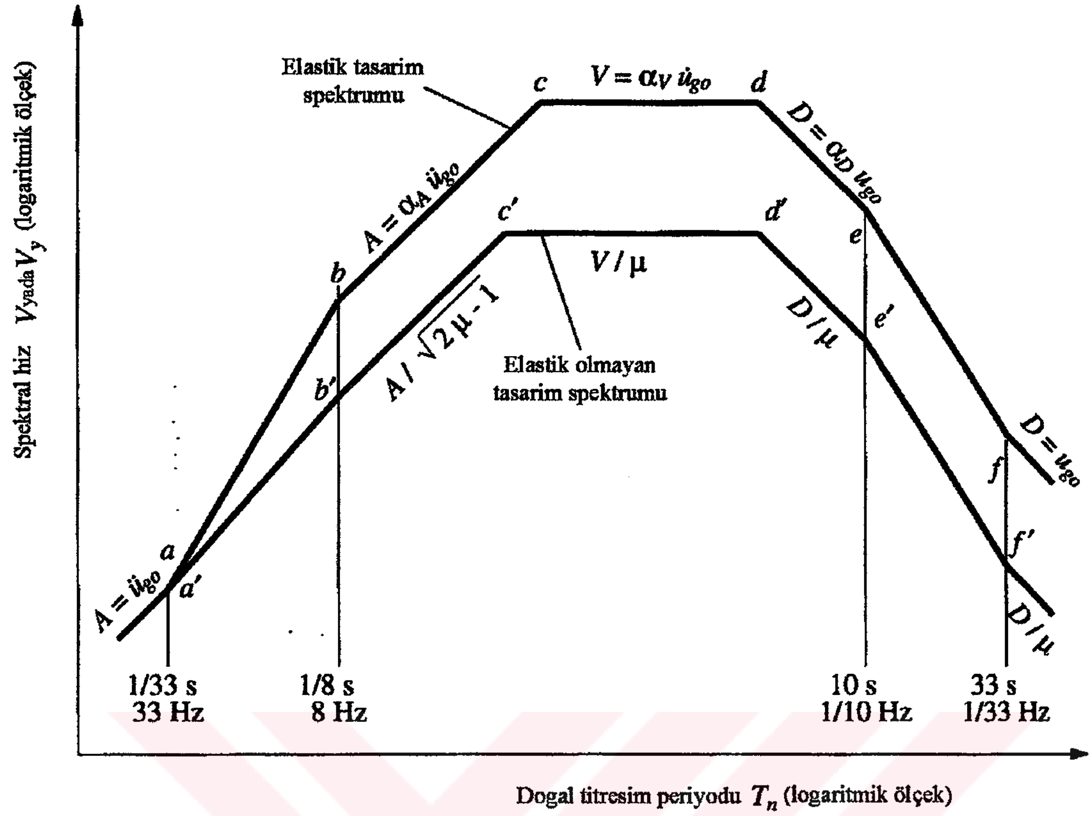


Şekil 5.9 Normalize edilmiş akma dayanımının tasarım değerleri (Chopra, 2001).



Şekil 5.10 Akma dayanım azaltım çarpanın tasarım değerleri (Chopra, 2001).

5.6.2 Sabit Süneklikte Tasarım Spektrumu



Şekil 5.11 Elastik olmayan tasarım spektrumunun elde edilişi (Chopra, 2001).

Şekil 5.11'de gösterilen elastik tasarım spektrumu (a-b-c-d-e-f), Bölüm 4'de açıklandığı gibi çizilmiştir. Seçilen μ süneklik çarpanı değeri için, bu elastik tasarım spektrumu R_y ile bölünerek (Şekil 5.10 ve (5.11) ifadesi), Şekil 5.11'de gösterilen $a'\!-\!b'\!-\!c'\!-\!d'\!-\!e'\!-\!f'$ elastik olmayan spektrum elde edilmiştir. Elastik olmayan spektrum çizilirken, aşağıdaki yollar takip edilir (Chopra, 2001);

1. b-c kolunun sabit A ordinat değeri, $R_y = \sqrt{2\mu - 1}$ ile bölünerek, $b'\!-\!c'$ kolu elde edilir.

2. c-d kolunun sabit V ordinat değeri, $R_y = \mu$ ile bölünerek, $c'\!-\!d'$ kolu elde edilir.

3. d-e kolunun sabit D ordinat değeri, $R_y = \mu$ ile bölünerek, $d'\!-\!e'$ kolu elde edilir.

4. f noktasındaki ordinat değeri $R_y = \mu$ ile bölünerek, f' noktası bulunur. f' ve e' noktaları birleştirilir. $T_n > 33s$ için, $D_y = u_{g0}/\mu$ çizilir.

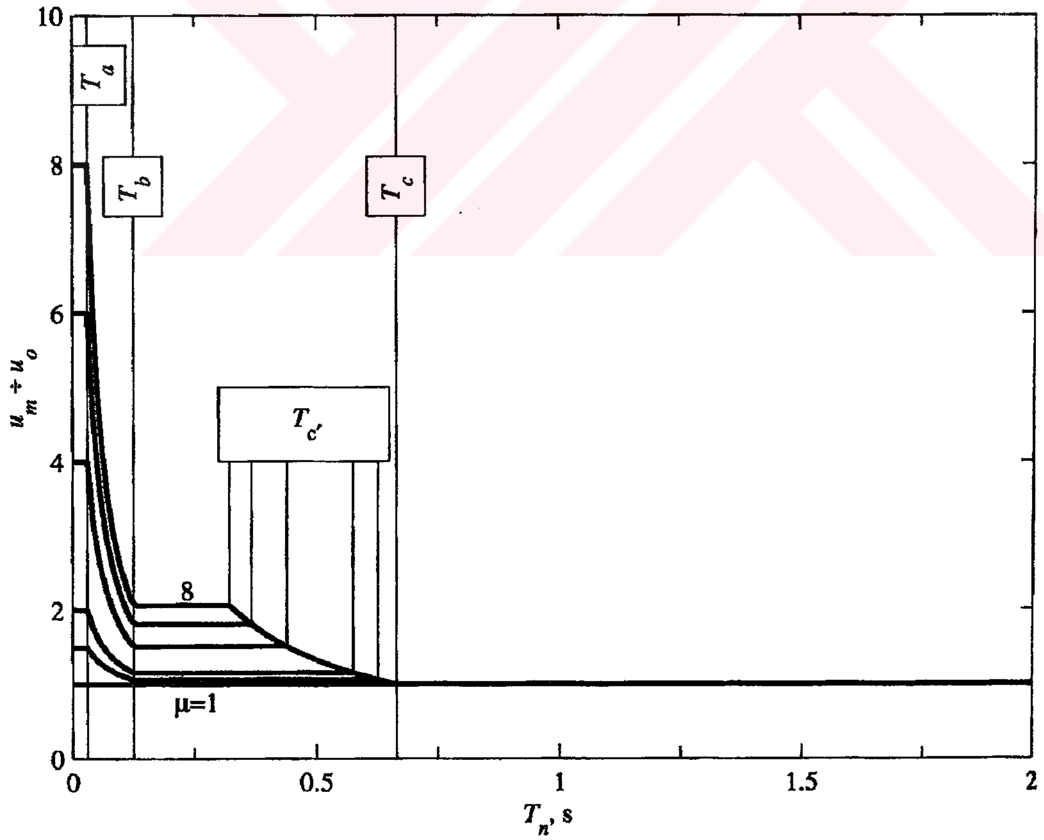
5. $T_n = 1/33s$ de, elastik olmayan spektrumun a' ordinatı, elastik spektrumun a ordinatına

eşit alınır. Bu eşitlikten dolayı, $R_y = 1$ olur. a' ve b' noktaları birleştirilir.

6. $T_n < 1/33\,s$ için $A_y = \ddot{u}_{g0}$ çizilir.

a', b', e' ve f' noktaları elastik ve elastik olmayan spektrum değerleri için sabittir. Sert zeminde oluşan yer hareketlerinde, $T_a = 1/33\,s, T_b = 1/8\,s, T_e = 10\,s$ ve $T_f = 33\,s$ dir. T_c ve T_d değerleri, sönüme bağlı çarpanlarla belirlendikleri için (Çizelge 4.1), sönümden etkilenirler. $T_{c'}$ ve $T_{d'}$ değerleri, R_y, μ'ye bağlı olarak değiştiği için, elastik tasarım spektrumunun b-c, c-d ve d-e kollarını azaltacak değerlere bağlıdırlar. (5.10) ifadesine göre seçilen R_y değeri ile, üç spektral bölgede de, $T_{d'}$ ve T_d aynı değerde iken, $T_{c'}$ ve T_c aynı değillerdir. c-d ve d-e spektral bölgelerinde R_y aynı olmasa idi, $T_{d'}$ ve T_d aynı değerde olmayacaklardı. Şeklin incelenmesinden de görülebileceği gibi, spektrumun c-d-e-f bölgesi μ sabit değeri ile azaltılır (Chopra, 2001).

5.6.3 $f_y - f_0$ ve $u_m - u_0$ Arasındaki Bağıntılar



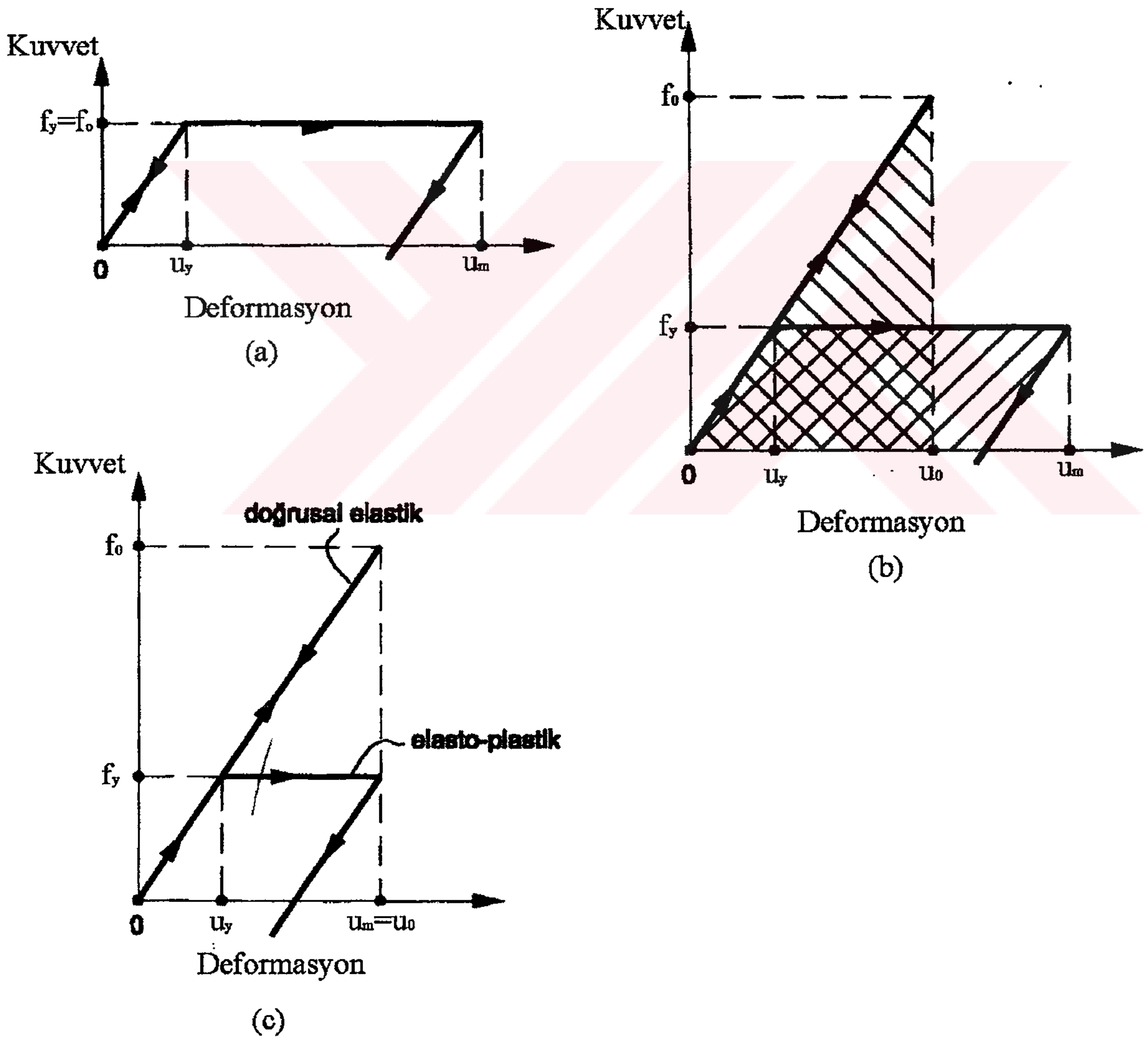
Şekil 5.12 Ekstrem u_m ve u_0 değerlerinin, sönüm altında doğal periyotla değişimi (Chopra, 2001).

(5.2), (5.4) ve (5.10) denklemlerinden, ekstrem değerler, u_m ve u_0 ile, gereken akma dayanımları f_o ve f_y arasında şu ilişkiler vardır:

1. $T_n < T_a$ ise $R_y = 1$ olur ki, bu da (5.11) ifadesiyle belirtilebilir.

$$f_y = f_0 \text{ ve } u_m = \mu u_0 \tag{5.11}$$

Küçük periyot (büyük frekans) bölgesinde, sistemlerde elastik davranışın etkin olduğu ve her iki sistemin hemen hemen aynı toplam kuvvetle zorlandığı belirlenmiştir. Bu durumda elastik olan ve olmayan davranıştaki kuvvetlerin eşit olduğu kabul edilirse, elastoplastik sistemin yer değiştirmesinin elastik sistemden yerdeğiştirme sünekliği kadar büyük olduğu ortaya çıkar. Bu ilke, **eşit kuvvet ilkesi** olarak bilinir (Şekil 5.13.a) (Chopra, 2001).



Şekil 5.13 Süneklik nedeniyle yapılan azaltma ilkeleri: (a) Eşit kuvvet, (b) Eşit iş, (c) En büyük yerdeğiştirme (Chopra, 2001).

2. $T_b < T_n < T_{c'}$ ise $R_y = \sqrt{2\mu - 1}$ olur ki, bu da (5.12) ifadesiyle belirtilebilir;

$$f_y = \frac{f_0}{\sqrt{2\mu - 1}} \quad \text{ve} \quad u_m = \frac{\mu}{\sqrt{2\mu - 1}} u_0 \tag{5.12}$$

Orta periyot (orta frekans) bölgesinde elastik ve elastoplastik her iki sistemdeki toplam şekil değiştirme enerjisi birbirine yakın değerdedir. Bu durumda elastik olan ve olmayan davranışta yapılan şekil değiştirme işinin eşit olduğu kabul edilir. Bu ilke, **eşit iş ilkesi** olarak bilinir (Şekil 5.13.b) (Chopra, 2001).

3. $T_n > T_c$ ise $R_y = \mu$ olur ki, bu da (5.13) ifadesiyle belirtilebilir;

$$f_y = \frac{f_0}{\mu} \quad \text{ve} \quad u_m = u_0 \tag{5.13}$$

Büyük periyot (küçük frekans) değerlerinde her iki davranışta toplam yerdeğiştirme birbirine yakın değerdedir. Bu durumda yaklaşık olarak elastik olan ve olmayan davranışta maksimum yerdeğiştirmelerin eşit olduğu kabul edilir. Bu, ilke, **eşit en büyük yerdeğiştirme ilkesi** olarak bilinir (Şekil 5.13.c) (Chopra, 2001).

6. ÇOK SERBESTLİK DERECELİ SİSTEMLER VE SÜNEKLİK

Bir sistemin hareket halinde bulunduğu konum, eğer birden fazla parametrenin verilmesi ile belirlenebiliyorsa, bu tür sistem çok serbestlik dereceli olarak isimlendirilir. Sistemin serbestlik derecesi, hareket halindeki konumunu tam olarak belirlemek için gerekli ve yeterli bağımsız parametre sayısına eşittir. Böyle bir sistem, serbestlik derecesi sayısı kadar birbirinden bağımsız hareket türüne sahiptir. Sistemin hareketini, serbestlik derecesi kadar yazılacak diferansiyel denklem yönetir. Hareket denklemleri, sisteme etkiyen atalet kuvvetleri, sönüm etkileri ve şekil değiştirme sonucu meydana gelen elastik kuvvetlerle, varsa dış kuvvetlerin dengesinden ibarettir. Sadece yer hareketinin varlığı kabul edilirse, bu denklem;

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m1\ddot{u}_g \tag{6.1}$$

olarak yazılabilir. Burada, **m=[m_{ij}] küle matrisi, c=[c_{ij}] sönüm matrisi, k=[k_{ij}] rijitlik matrisi, d=[d_{ij}] esneklik** (fleksibilite) **matrisi, u=[u_{ij}] yerdeğiştirme matrisi,** u_g yer hareketi, **1=[1 1 ...]^T birim matrisi**, olarak isimlendirilir. Sönümsüz sistemin serbest titreşim frekansları, $\left|k - \omega_i^2\, m\right| = 0$ **karakteristik denkleminin** çözümü sonucu, sistemin serbestlik sayısı kadar, ω_1, ω_2, ..., ω_n bulunur (Celep ve Kumbasar, 1996).

Sistemin serbest titreşim mod şekilleri ϕ_i ise, her bir titeşim frekansı için;

$$\left(k - \omega_i^2\right)\phi_i = 0 \tag{6.2}$$

doğrusal homojen denkleminin çözümü olarak elde edilir. Bunların kolonlara yerleştirilmesi ile bulunan,

$$\Phi = \left[\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\right] \tag{6.3}$$

matrisine sistemin **modal matrisi** denir. İki farklı titreşim frekansına ait titreşim modları kütle ve rijitlik matrislerine göre;

$$\phi_i^T\, m\phi_j = 0 \qquad \phi_i^T\, k\,\phi_j = 0 \qquad i \neq j \tag{6.4}$$

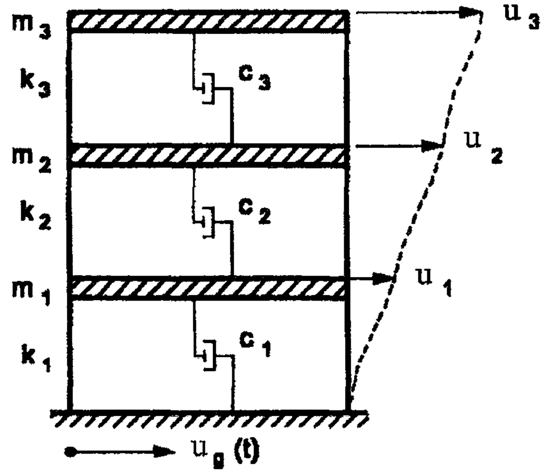
olarak verilen **ortogonallik özelliğine** sahiptirler (Celep ve Kumbasar, 1996).

Yer hareketi etkisindeki sistemin, (6.1) ile verilen hareket denkleminin çözümü için modların birleştirilmesi yöntemi uygulanabilir. Bu amaçla çözümün mod vektörlerinin doğrusal bir birleşimi olarak yazılabilceği kabul edilir. Ancak bu yöntemde, süperpozisyon kuralı kullanıldığı için, bu yöntem doğrusal elastik hesapta geçerlidir. Davranışın doğrusal elastik olmadığı durumlarda süperpozisyon ilkesi geçerli olmaz. Eğer klasik sönüm kavramı kabul edilmezse veya elastik ötesi bir davranış söz konusu ise, hareket denklemlerinin ayrıklaştırılması sonucu bulunan modların birleştirme yöntemi geçerli olmaz. Bu durumda hareket denklemlerinin sayısal çözümü söz konusu olur. Yer hareketi etkisi altındaki sistemlerin çözümünde kullanılan yaygın bir yöntem de, hareket denkleminin zaman alanında adım adım sayısal integrasyonudur. Bu integrasyon yapılırken, daha önce açıklanan sabit ortalama ivme yöntemi ve doğrusal ivme değişimi yöntemleri kullanılır.

Bir başka yöntem olarak da, zaman alanında çözümleme yapılır. Zaman alanında sayısal çözümleme, yerdeğiştirme veya kesit etkisi gibi bir sistem parametresinin zamana bağlı olan değişimini verir. Ancak, taşıyıcı sistemin boyutlandırılmasında genel olarak bu parametrenin en büyük değeri etkili olur. Bu nedenle, uzun ve yorucu olan sayısal çözümlemeye ihtiyaç kalmadan, deprem hareketinin spektrumunu kullanarak, boyutlamaya esas olan değerlerin elde edilmesi önemli ölçüde kolaylık sağlar. Yer hareketinin spektrumunun elde edilmesi tek serbestlik dereceli sisteme dayandığı için, bu tür işlem tek serbestlik dereceli bir sistem için kolayca yapılabilir (Celep ve Kumbasar, 1996).

6.1 Çerçeveli Sistem Davranışı

Kiriş ve kolonların meydana getirdiği en basit çok serbestlik dereceli taşıyıcı sistem **düzlem çerçeve** olarak görülebilir. Çerçeve için yapılabilecek en basit modelde, kirişleri bağlayan kolonların kütlesiz oldukları ve yapının kat kütlelerinin döşeme seviylerinde toplu olduğu kabul edilir. Bu durumda elastik kolon ve kirişlerin oluşturduğu ve her kat seviyesinde toplu kütlesi bulunan bir çerçeve oluşur. Genellikle kolonların yatay yerdeğiştirme yapabildikleri ve düşey doğrultuda boy değiştirmedikleri varsayılır. Yapının mesnetlerinde yere rijit olarak bağlı olduğu da yapılan diğer önemli bir kabuldür. Çerçeve rölatif kat yerdeğiştirmesi rijitliğine; kolonlardaki eğilme momenti şekil değiştirmesi yanında kolonlarının iki ucunun dönmesi de etkili olur. Kolon uçlarının dönmesi, kolonun iki uçta bağlandığı kirişlere göre olan rölatif rijitliği ile artar. Rijitliği küçük olan kirişlere bağlı kolon, mafsallı mesnetlenmeye yakın biçimde kolayca dönebilirken, rijitliği büyük kirişlere bağlı kolon uçları ankastre mesnetlenmeye yakın davranış gösterir. Kolonun eğilme şekil değiştirmesinden doğan yatay yerdeğiştirme ise, eğilme rijitliğine bağlı olarak ortaya çıkar. Kolondaki eğilme momenti kesme kuvveti ile doğrudan ilişkili olduğundan, kolon uçlarının rölatif yerdeğiştirmesi kolonun ötelenme rijitliğine ve kolon kesme kuvvetine bağlanabilir. Bu durum çerçeveyi oluşturan kolonların yatay yerdeğiştirmesinde kesme kuvvetinin etkili olduğunu gösterdiğinden, **Kayma Çerçevesi** tanımı yapılarak hesaplar basitleştirilebilir (Şekil 6.1) (Celep ve Kumbasar, 1996).

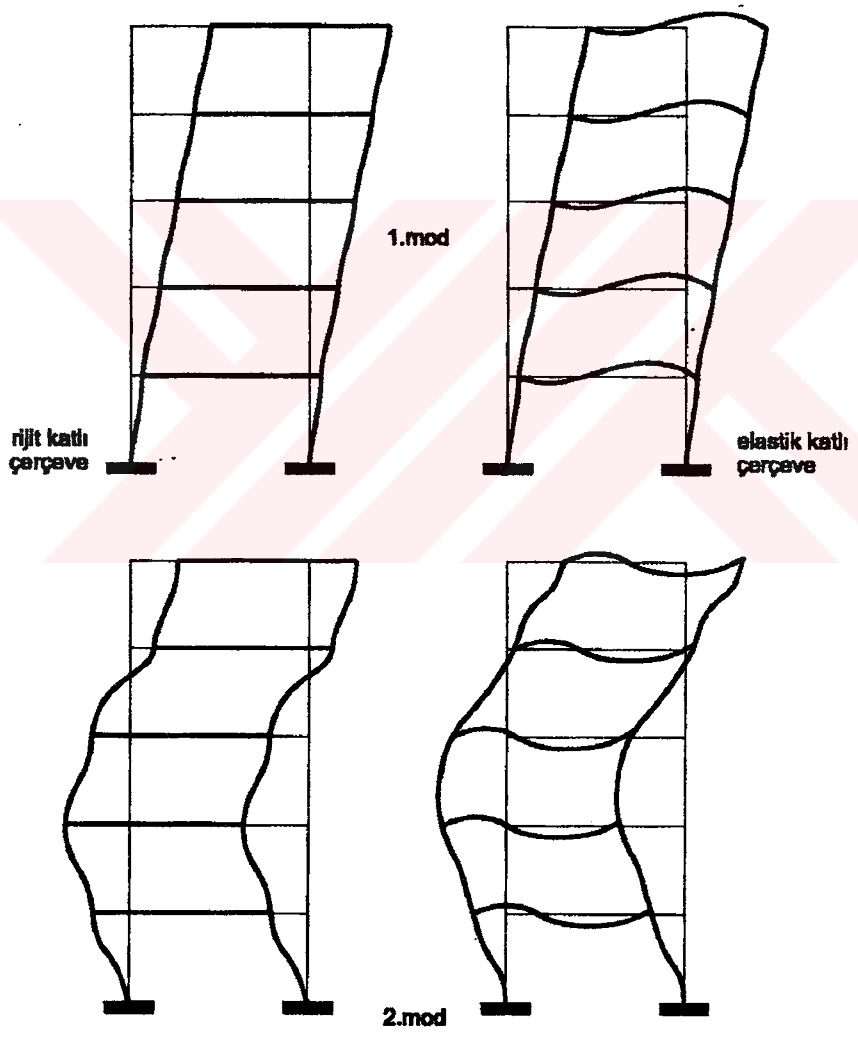


Şekil 6.1 Yer hareketi altındaki üç katlı kayma çerçevesi (Celep ve Kumbasar, 1996).

6.2 Düzlem Çerçeve

Düzenli yapılarda çerçeveler genellikle birbirine dik iki eksen doğrultusunda bulunur. Bu doğrultuların birinde deprem kuvvetinin bulunması durumunda, taşıyıcı sistem önemli bir burulma etkisi altında kalmaksızın çerçeveler birbiri ile etkileşirken öteleme hareketi yaparlar. Eğer çerçeveler birbirine yakın rijitliklere sahip ise, etkileşim çok küçük olacağı için çerçevelerin yalnız olarak bulundukları düzlem içinde şekil değiştirerek yük taşıdıkları kabul edilebilir. Kirişleri rijit olan düzlem çerçevelerde, kat kesme kuvveti kolon rijitlikleri oranında kolonlar tarafından paylaşılır. Genel olarak bir kolonun öteleme rijitliğinin oluşmasına çerçevenin diğer bütün elemanları etkili olurlar. Ancak, kolona doğrudan bağlanan kirişlerin rijitlikleri kolon öteleme rijitliğinin oluşmasında çok daha fazla etkilidir. Bu kabulden hareket ederek geliştirilen Muto Yöntemi ve benzeri yaklaşımların uygulanabildiği çerçevelerde katlar, kat yanal rijitliklerine ve kata etkiyen kesme kuvvetine bağlı rölatif yerdeğiştirmeler yaptıkları için, bu tür çerçeveler de kayma çerçevesi olarak alınabilir (Şekil 6.1).

Çok katlı binaların dinamik davranışındaki temel kavramların belirlenmesinde kayma çerçevesi modeli faydalı bir yaklaşımdır. Bununla beraber, davranışın daha gerçekçi belirlenmesi için daha ayrıntılı model kurmak gereklidir. Şekil 6.2'de böyle kayma çerçevesi olarak kabul edilen çerçevenin birinci ve ikinci titreşim mod şekilleri verilmiştir. Görüldüğü gibi, **döşeme sistemi rijit** kabul edildiği için bir kattaki bütün düğüm noktaları aynı yatay yerdeğiştirmeyi yapmakta ve kolon başlarında dönme meydana gelmemektedir. Serbestlik derecesi kat sayısı kadar, Örneğin Şekil 6.2'deki beş katlı çerçevede 5 dir, seçilir. Döşeme sistemi düzlemi içinde oldukça rijit olduğu için daha ayrıntılı kabulde, bir kattaki düğüm noktalarının aynı yatay yerdeğiştirmeyi yaptığı kabul edildiği halde, düğüm noktalarının dönmelerinin farklı olması, yeni serbestlik derecelerini oluşturur. Buna göre, çerçevenin serbestlik derecesi, düğüm noktası sayısının çerçevedeki kat sayısına eklenmesi ile bulunur. Örneğin, Şekil 6.2'de verilen 5 katlı çerçevenin bu kabuller altında serbestlik derecesi 15 dir. Ancak, kat kütlelerinin sadece yatay yerdeğiştirme yaptıkları göz önüne alınırsa, sistem kütle matrisi, dinamik serbestlik derecesi kadar 5x5 elemanlı olarak ortaya çıkar.



Şekil 6.2 Düzlem çerçevede düğüm noktası dönmesinin mod şekline etkisi
(Celep ve Kumbasar, 1996).

Bu durum serbestlik derecelerinden kat ötelenmelerine kat kütleleri karşı getirilebildiği halde, düğüm noktalarının dönmelerine kütle karşı getirilmemesinden doğar. Buna uygun olarak gerekli düzenlemeler yapılarak, kütle karşılıkları bulunmayan serbestlik dereceleri olan düğüm noktalarının dönmeleri, atalet terimlerinin bulunmadığı denklemler yardımı ile ortadan kaldırılarak, rijitlik matrisi de aynı boyuta getirilebilir. Bu işlem, **Statik Daraltma** olarak isimlendirilir. Daha da ayrıntılı kabuller yaparak kesme kuvveti ve normal kuvvetin şekil değiştirmeye olan etkisi göz önüne alınabilirse de, genellikle çerçeve türünden yapılarda bunların katkıları ihmal edilebilir (Celep ve Kumbasar, 1996).

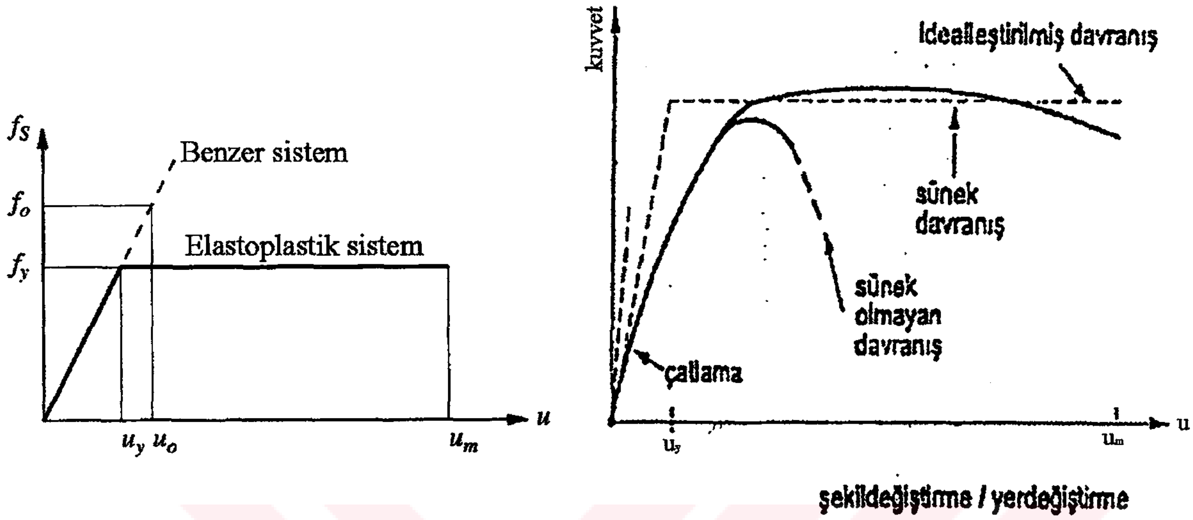
6.3 Süneklik ve Çeşitleri

Yapı sistemlerinin göçme modlarının arzu edilen biçimde oluşması için, sistemi teşkil eden elemanların davranışını etkileyen parametreleri ve bunların miktarlarının yapı elemanın davranışına katkılarını göz önünde tutmak gerekir. Depreme dayanıklı yapı bağlamında süneklik, yapı elemanı ve yapı davranışını belirleyen en önemli parametredir.

Genel olarak **süneklik**; **yapı dayanımında önemli bir azalma ve kararsız denge konumu oluşmaksızın deprem sırasında yapıya geçen enerjinin, elastoplastik davranışla ve tersinir dönüşümlü büyük şekil değiştirmelerle tüketilmesi yeteneği** olarak tanımlanır (Polat, 2001). Betonarme bir yapı sisteminde süneklik, sistemi limit durumuna getiren yanal yükün akma başladığı andaki yanal yüke oranı olarak ifade edilmektedir. Sistem sünekliği ise, deplasman sünekliği ile tanımlanır. Bir yapının bütünü için **deplasman sünekliği**, yapının belli bir noktasındaki en büyük yatay yerdeğiştirmesinin akma başlangıcındaki yer değiştirmeye oranıdır. Sistem davranışı söz konusu olduğunda, Şekil 6.3'deki yük-yerdeğiştirme eğrisine **kapasite eğrisi** denir. Sistemin kapasite eğrisinden hareketle, **deplasman ya da sistem sünekliği** denilince, (5.3) ifadesi anlaşılır (Polat, 2001).

Şekil 6.3'ün ve (5.3) denkleminin incelenmesinden, süneklik, u_y ve u_m ötelenmelerinin doğru tespit edilebildiği ölçüde doğru hesaplanmış olur. Uygulamada, u_m değerini hesaplamak kolaysa da, u_y ötelenmesini belirlemek için bazı kabullere ihtiyaç vardır; bu bağlamda çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Ayrıca tıpkı sistem sünekliği gibi, kimi kere **kat deplasman sünekliğinden** de bahsedilir. İdeal bir sistemde her katta ve sistemin genelinde gerçekleşen süneklik oranı ile tasarımda öngörülen süneklik oranı çakışmalıdır. Bununla beraber, kat süneklik oranları, tek başına yapı performansını belirlemede yeterli bir gösterge değildir; aynı zamanda plastik mafsallarda meydana gelecek elastik olmayan dönmelerin o mafsalın dönme kapasitesini de aşmaması gerekir. Buradan; yapıların kritik kesitlerindeki eğrilik sünekliğinin de yeteri kadar sağlanmış olması gerekir; bir başka anlatımla, mafsalların her biri için belirlenecek eğrilik süneklikleri de önemlidir.

Yukarıda açıklananlar çerçevesinde bakıldığında, **süneklik** deyimi, genellikle aşağıdaki süneklilik çeşitlerinde biri ile kullanılmaktadır (Polat, 2001).



Şekil 6.3 Solda: Elastik olan ve olmayan yerdeğiştirme grafiği (Chopra, 2001); sağda: Betonarme elemanda ya da yapı sisteminde kuvvet-yerdeğiştirme grafiği (Polat, 2001).

(a) Malzeme Sünekliği: Malzeme gerilme-şekil değiştirme eğrisinde (5.3) denklemindeki, u_y ifadesi yerine ε_y ve u_m yerine de ε_m alınarak tanımlanan sünekliktir; malzemenin sünek oluşu, sünek yapı elemanı oluşturmak için bir üstünlüktür.

(b) Kesit Sünekliği: Bir yapı elemanı kesitinde, ϕ_u / ϕ_y ile tanımlanan kesitteki limit durumdaki dönme açısının akma anındaki dönme açısına oranıdır.

(c) Deplasman Sünekliği: (5.3) ifadesindeki, eleman ya da sistem deplasmanlarını gösterir.

(d) Eğrilik Sünekliği: Bir mafsalda limit durumdaki eğriliğin akma noktasındaki eğriliğe oranı, φ_u / φ_y olarak tanımlanır.

Sonuç olarak; eleman düzeyinde ve sistem elemanlarına mümkün mertebe düzgün yayılı sağlanan eleman süneklikleri, sistem için arzu edilen sünekliğe ulaşabilmenin kaynağını teşkil etmektedir (Polat, 2001).

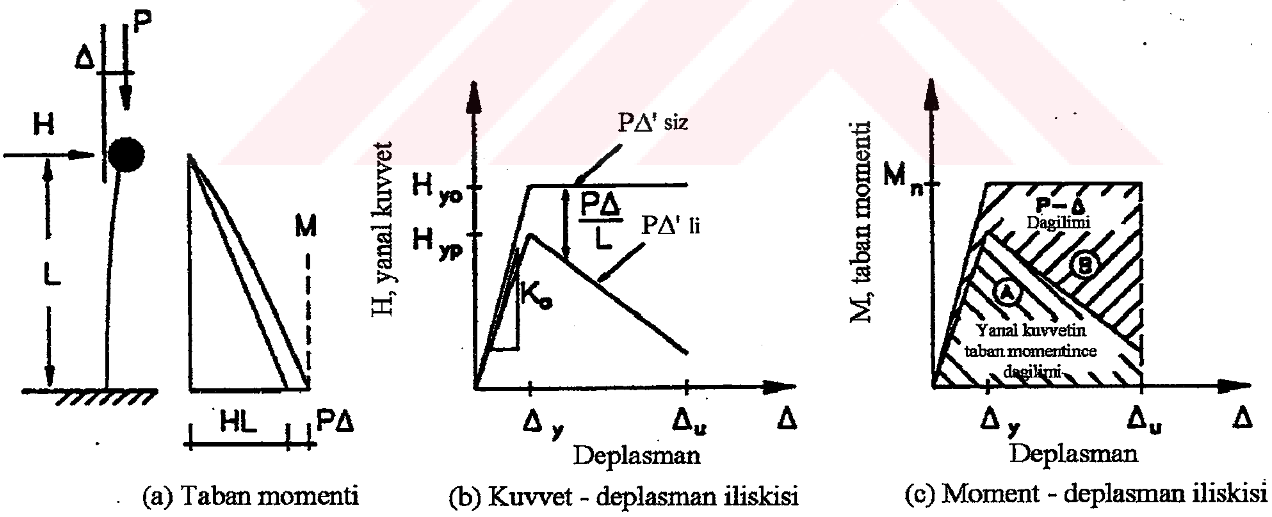
7. TEK SERBESTLİK DERECELİ SİSTEMLERDE P-Δ ETKİLERİ

Bir yapıya etkiyen iç kuvvetlerin ve eğilme momentlerinin belirlenmesinde genellikle I. Mertebe analizler kullanılır. Bu tip analizler de ise, kesme kuvveti denge denklemlerinde doğrusal olmayan deformasyonlar ve eksenel kuvvetten dolayı eleman rijitliğindeki artışlar ihmal edilir. I. Mertebe analizleri, bir çerçevenin hem rijitliğini ve hem de dayanımını arttırır.

Eksenel kuvvetler çok fazla ise, yapının II. Mertebe analizlere göre incelenmesi, yapı boyunca oluşacak iç kuvvetlerin ve eğilme momentlerinin belirlenmesinde daha gerçekçi bir yoldur. II. Mertebe analizlerde, denge denklemleri deforme olmuş yapı şekli üzerinden çıkartılır. Bir başka deyişle, bu tip analizlerde, **yapının doğrusal olmayan deplasmanları boyunca etkiyen düşey yüklerden dolayı oluşan ikincil momentler** dikkate alınır. İşte bu ikincil momentler ve kuvvetler $P\Delta$ etkileri olarak adlandırılırlar (Gaiotti, 1989).

7.1 Statik Yüklü Konsol Bir Sistemde P – Δ Etkileri

Bir sistemin kütlesinin P kuvveti ile Δ deplasmanı kadar ötelenmesi sonucu, sistemin tabanında, $P\cdot\Delta$ çarpımı ile ifade edilebilen bir ek momentin oluşması P – Δ etkisi olarak bilinir (Şekil 7.1.a) (MacRae, 1994).



Şekil 7.1 Konsol bir sistemde P – Δ etkisi (MacRae, 1994).

Sistemin tabanında oluşacak toplam momentin denklemi, (7.1) ifadesinde verilmiştir.

$$M = H_p L + P\Delta \tag{7.1}$$

(7.1) ifadesinde, H_p; $P-\Delta$ etkisine maruz sistemin yanal kuvveti ve L ise yapının kütle merkezinin yüksekliğidir. Bu ifadenin düzenlenmesiyle, H_p yanal kuvveti, (7.2) ifadelerinde verildiği gibidir (MacRae, 1994).

$$H_p = \frac{(M - P \cdot \Delta)}{L} \tag{7.2.a}$$

$$H_p = \frac{M}{L} - \frac{P \cdot \Delta}{L} \tag{7.2.b}$$

(7.2.b) ifadesinden; H_0, $P-\Delta$ etkisini içermeyen yanal kuvveti belirtmek üzere;

$$H_p = H_0 - \frac{P \cdot \Delta}{L} \tag{7.3}$$

ifadesi elde edilebilir.

(7.3) ifadesinde; K_0, $P-\Delta$ etkisini içermeyen rijitliği ve θ, $P-\Delta$ stabilite çarpanını göstermek üzere;

$$K_0 = \frac{H_{y0}}{\Delta y} \quad \text{ve} \quad \theta = \frac{P}{K_0 \cdot L} = \frac{P}{H_{y0}} \cdot \frac{\Delta_y}{L} \tag{7.4}$$

ifadesi elde edilebilir. (7.4) bağıntılarında; H_{y0}, $P-\Delta$ etkisinin ihmal edildiği durumdaki akma dayanımı; Δ_y ise, akma anındaki deplasmandır.

(7.4) denklemlerinin (7.3)'de yerine yazılmasıyla;

$$H_p = H_0 - \theta \cdot K_0 \cdot \Delta \tag{7.5}$$

ifadesi elde edilmiş olur.

(7.5) ifadesinin incelenmesinden de görülebileceği gibi, H_p; H_0'ın azalmasına ve Δ'nın artmasına bağlı olarak azalmaktadır (Şekil 7.1.b).

K_p, $P-\Delta$ etkisi dikkate alınmış haldeki elastik rijitlik olmak üzere (7.6) ifadesinde gösterildiği şekilde bulunur (MacRae, 1994).

$$K_p = \frac{\partial H}{\partial \Delta} = \frac{\partial\left(H_i - \frac{P\Delta}{L}\right)}{\partial \Delta} = \frac{\partial H_i}{\partial \Delta} - \frac{\partial\left(\frac{P\Delta}{L}\right)}{\partial \Delta} = K_0 - \frac{P}{L} = K_0(1-\theta) \tag{7.6}$$

7.2 Dinamik Yüklü Konsol Bir Sistemde P – Δ Etkileri

$P-\Delta$ kuvvetleri, dinamik mukabele özelliklerini artırdığı için, $P-\Delta$'dan dolayı, dinamik yüklü sistemlerin mukabelelerindeki değişimin belirlenmesi, statik sistemlerinkine nazaran daha karmaşıktır. $P\cdot\Delta$ momentleri, yapısal sisteme denge bozucu bir bileşen ekleyerek tesir ederler. Sistemin dengesini de bozan bu bileşen, sistemin deplasmanında bir artışa, tek yönlü akmalara ya da toptan göçmeye yol açar.

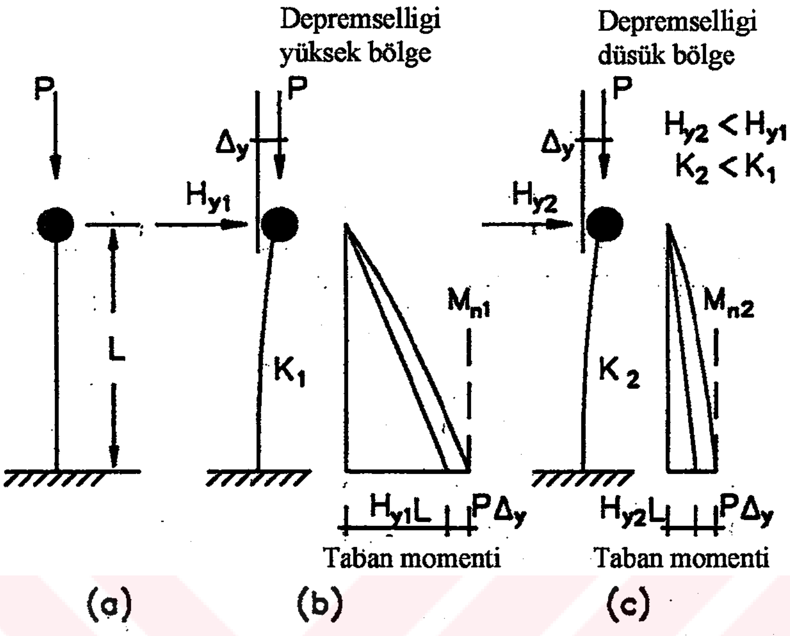
Araştırmacılar, 1970'li yıllardan bu yana, $P-\Delta$ etkileri ile ilgili araştırmalar yapmaktadırlar. Bir yapıda $P-\Delta$ etkisinden oluşacak hasarlar, söz konusu etkinin hangi durumlarda ihmal edilebileceği, yapısal özelliklerin değiştirilmesine bu etkinin nasıl davranacağı gibi sorulara araştırmalarda cevap aranmıştır.

Aşağıdaki bölümde, $P-\Delta$ etkilerini dikkate alan çalışmalardan bazılarına yer verilmiştir.

7.2.1 Statik Esaslara Dayanarak P – Δ Etkilerinin İhmal Edilebilme Koşullarını Açıklayan Çalışmalar

Andrews (1977), **enerji kavramı** esaslarına dayanarak yaptığı çalışmasında, eğer bir yapının yanal deplasmanı belirlenmiş bir limit deplasman değerinden küçük ise, $P-\Delta$ etkisinin ihmal edilebileceğini belirtmiştir. Andrews çalışmasının sonunda, $P-\Delta$ etkisinin kabul edilebilir seviyesini yine enerji kavramlarına dayanarak açıklamıştır. Andrews, $P-\Delta$ etkisinde kalmış bir yapının kuvvet – deplasman eğrisinin altında kalan enerjinin (Şekil 7.1.c'de "A" ile gösterilen bölge), $P-\Delta$ etkisinde kalmamış bir yapının kuvvet – deplasman eğrisinin altında kalan enerjinin (Şekil 7.1.c'de "A" + "B" ile gösterilen bölge), en az % 90' ı olduğu seviyeyi limit durum olarak tanımlamıştır. Δ_y/L, göreli akma oranı sınır değeri, bu teoriye dayanılarak, Yeni Zelanda Yük Şartnamesinin (SANZ,1984) kapsamına alınmıştır.

Bu göreli akma oranı sınır değerine, depremselliği düşük bölgelerde daha da dikkat edilmelidir. Aslında, yapıların minimum yanal rijitliği tüm deprem bölgelerinde aynı olmalıdır (Andrews, 1977). Şekil 7.2'de değişik deprem bölgelerinde, aynı göreli akma oranına göre tasarlanmış iki yapı gösterilmiştir. Belirli bir μ süneklik değeri için, H_1 depremselliği yüksek bölgedeki tasarım kuvvetinin, H_2 depremselliği düşük bölgelerdeki tasarım kuvvetinden daha büyük olması gerektiği bellidir. Buna göre, aynı akma deplasman değerini elde etmek için; K_1, **depremselliği yüksek bölgedeki yapının rijitliği,** K_2, **depremselliği düşük bölgedeki yapının rijitliğinden daha büyük olacaktır**.



Şekil 7.2 Değişik deprem bölgelerinde $P-\Delta$ etkisi (MacRae, 1994).

Her iki yapıda, aynı deplasmanda eşit $P\cdot\Delta$ momentine sahip olacaktır. $P\cdot\Delta$ momentinin yapının tabanında oluşan toplam momente oranı ise, depremselliği düşük bölgede, depremselliği yüksek bölgeye nazaran daha büyük olacaktır. Bu yüzden, depremselliği düşük bölgede olan yapının, $P-\Delta$ etkisinde kalan kuvvet – deplasman eğrisinin altındaki enerjinin, $P-\Delta$ etkisinde olmayan kuvvet – deplasman eğrisinin altındaki enerjiye oranı daha azdır. $P\cdot\Delta$ momentinin toplam momente oranının tüm bölgelerde aynı kalması için, rijitliğin her bölgede aynı olması gerekir. Depremselliği beklenenden daha düşük bölgelerdeki yapılar içinse, ötelenme ya da deplasman limitleri daha da düşük tutulur (MacRae, 1994).

7.2.2 Dinamik Esaslara Dayanarak P – Δ Etkilerinin İhmal Edilebilme Koşullarını Açıklayan Çalışmalar

Paulay'in (1978), $P-\Delta$ etkilerinin, $\mu\cdot\theta$, kat kararlılık indeksinin küçük olduğu durumlarda ihmal edilebileceğine dair teorisi, bugünkü çok katlı betonarme çerçevelerin analizlerinin temelini oluşturmaktadır. Burada μ, deplasman sünekliği ve θ (7.4) denklemiyle verilen stabilite faktörüdür.

Moss ve Carr (1980); 6, 12 ve 18 katlı betonarme çerçeveleri analiz etmişlerdir. Yapıların maksimum iç kat ötelenmelerinin, kat yüksekliğinin % 1'inden fazla olmadığı durumlarda, $P-\Delta$ etkilerinin ihmal edilebileceğini öne sürmüşlerdir. Buna mukabil, $P-\Delta$ etkilerinin, büyük iç kat ötelenmelerinde, kat ötelenmelerini aniden artırarak, yapının süneklik kapasitesini aşmasına yol açtıklarını belirtmişlerdir.

Montgomery (1981), maksimum kat ötelenmesinin, kat akma ötelenmesine oranının 2'den büyük olduğu durumlarda ya da; $V/P < 0.10$, taban kesme kuvvetinin yapının ağırlığına oranı 0.10'dan az olduğu durumlarda, $P-\Delta$ etkilerinin dikkate alınması gerektiğini belirtmiştir. Elastik veya elastik davranışa yakın mukabeleli yapılarda, $P-\Delta$ etkisini tanımlamak için, böyle bir kararlık endeksinin tanımlanması tutarlı bir yaklaşımdır.

Mahin ve Boroschek (1991), Bernal (1987a) gibi; deneylere dayanarak, eğer belirli bir sünekliğe ulaşmak için gereken dayanım büyütmesi % 10'dan daha az ise, $P-\Delta$ etkisinin ihmal edilebileceğini önermişlerdir. Moehle (1992), Mahin ve Boroschek'in (1991) analizlerinden faydalanarak, Paulay (1978) ile aynı yaklaşımı önermiştir.

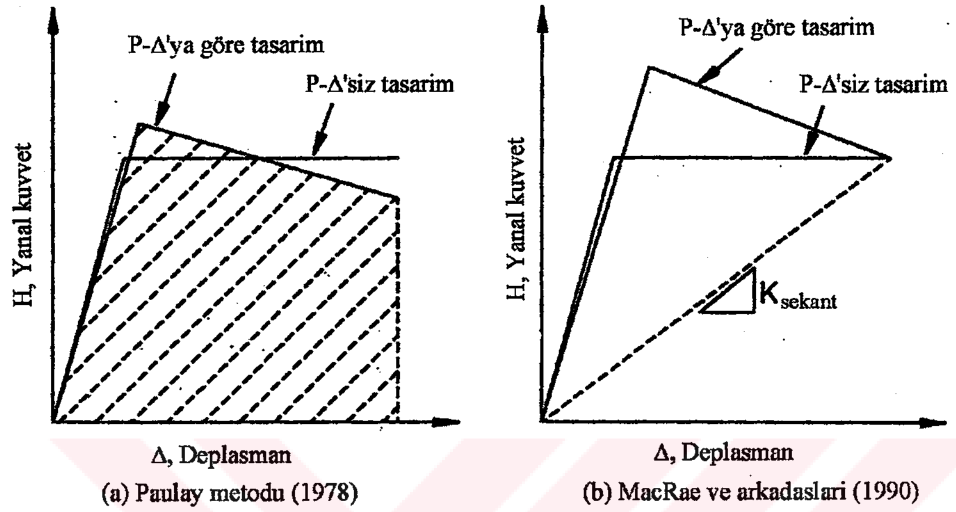
Tjondro, Carr ve Moss (1992); ötelenme oranın 0.02'den büyük olduğu durumlarda, $P-\Delta$ etkilerinin çok katlı çelik çerçevelerin mukabelelerini artırdığını bulmuşlardır. Ayrıca, bazı durumlarda $P-\Delta$ etkisinin deplasman mukabelesini azalttığı da tespit edilmiştir.

7.2.3 Statik Esaslara Dayanarak Yapıların P – Δ Etkilerine Göre Tasarlanma Koşullarını Açıklayan Çalışmalar

Paulay (1978); betonarme bir çerçevenin, $P-\Delta$ etkilerine karşı davranışında, **rijitliktense dayanımın artırılmasının** daha önemli rol oynadığını belirtmiştir. Rijitliğin artırılması ise, çerçeveyi daha büyük periyotlu deprem mukabelesine zorlayacaktır. $P-\Delta$ etkisini dikkate alan tek çevrimli eğri altındaki enerji, $P-\Delta$ etkisi dikkate alınmadığındaki enerjiyle hemen hemen aynıdır. Bunun için, büyük göreli iç kat ötelenmelerinde, dayanımın belli bir değerde artırılması önerilir (Şekil 7.3.a).

Neuss, Maison ve Bouwkamp (1983); muhtemel elastik olmayan deplasmanların sonucu olan, büyütülmüş $P-\Delta$ kuvvetlerini belirlemede bir geometrik rijitlik matrisi çarpanı kullanmanın faydalı olacağını tavsiye etmişlerdir. Bu yaklaşımda; etkin $P-\Delta$ yanal kuvveti, P eksenel yükü ile Δ_u/L, maksimum elastik olmayan ötelenme oranının çarpılmasıyla bulunur.

Şekil 7.3.b'de; MacRae, Carr ve Walpole (1990) tarafından önerilen ve **sekant rijitliği** ile açıklanan yöntem gösterilmiştir. MacRae ve arkadaşları, esas periyot ve sönüm kavramlarına dayanarak, dayanımın artırılması gerektiğini belirtmişlerdir. Böylece, sekant rijitliğinin nihai deplasmanda, $P-\Delta$ etkisine göre tasarlanmış ve tasarlanmamış yapılarda aynı olacağını söylemişlerdir. Periyot, sekant rijitliğine bağlı olduğu için, $P-\Delta$ etkisi dikkate alınmadan önce ve alındıktan sonra periyotlar aynıdır. Ancak, $P-\Delta$ etkisi dikkate alınan sistemin, yuttuğu enerji ve buna bağlı olan sönüm değeri daha fazladır. Buna göre, **$P-\Delta$ etkileri dikkate alınarak tasarlanmış sistemlerin mukabeleleri daha düşük olur** (MacRae, 1994).



Şekil 7.3 $P-\Delta$'ya göre tasarım için statik esaslara dayanan metotlar (MacRae, 1994).

7.3 TDY 98'e Göre İnceleme

Türk deprem yönetmeliğinde de, göreli kat ötelemelerinin ve II. Mertebe etkilerinin dikkate alınması gereken durumlarla ilgili çeşitli sınırlamalar vardır. Deprem yönetmeliğinde, herhangi bir kolon veya perde için, ardışık iki kat arasındaki yerdeğiştirme farkını ifade eden Δ_i, göreli kat ötelemesi, Denklem (7.7) ile elde edilecektir.

$$\Delta_i = d_i - d_{i-1} \tag{7.7}$$

(7.7) ifadesinde, d_i ve d_{i-1} ifadeleri ile, binanın i'inci ve (i-1)'inci katlarında herhangi bir kolon veya perdenin uçlarında hesaptan elde edilen yatay yerdeğiştirmeleri göstermektedir. Her bir deprem doğrultusu için, binanın herhangi bir i'inci katındaki kolon veya perdelerde, Denklem (7.7) ile hesaplanan göreli kat ötelenmelerinin, $(\Delta_i)_{max}$, kat içindeki en büyük değeri (7.8)'de verilen koşulların elverişsiz olanını sağlayacaktır;

$$(\Delta_i)_{max} / h_i \le 0.0035 \tag{7.8.a}$$

$$(\Delta_i)_{max}/h_i \leq \frac{0.02}{R} \qquad (7.8.b)$$

Daha öncede belirtildiği gibi, kat ötelenmeleri, yapının yatay ötelenme rijitliği ile ilgilidir. Yatay ötelenme rijitliği küçük olan bir yapı, deprem etkisi altında büyük ötelenmeler yapar. Bu ötelenmeler, özellikle kolon-kiriş düğüm noktalarının aşırı dönme göstermesine neden olur. Bu dönmenin karşılanabilmesi için kolon-kiriş düğüm noktasının yeterli sünekliğe sahip olması gerekir. Eğer bu süneklik sağlanamazsa, doğal olarak, sonuçta kırılma ve çökme meydana gelecektir (Atımtay, 2000).

Yatay ötelenmenin büyük olması, büyük ikinci mertebe momentlerinin de oluşmasına yol açar. Kolon uçlarındaki momentler, ikinci mertebe momentlerinin eklenmesi ile daha da büyür, yapının ötelenmesi artar.

Anlaşılabileceği gibi, **göreli kat ötelenmelerinin büyük olması**, dayanım ve süneklik başta olmak üzere, yapının **deprem davranışını olumsuz etkiler**. Göreli kat ötelenmelerinin büyük olması, taşıyıcı olmayan elemanların da hasar görmesine yol açar. Yapı içindeki eşyalar savrularak kırılır, bölme duvarlar çatlar ve ezilir, kaplamalar dökülür, camlar kırılır, ...vb. Bu hasarın maliyeti, kesinlikle, taşıyıcı sistemin maliyetinden büyüktür.

Statik analiz yapan tasarımcı, $(\Delta_i)_{max}/h_i$ oranını maksimum yapan değeri araştırıp bulmalıdır. **Sonsuz rijit diyafram** koşulunun sağlandığı binalarda, burulmanın olmadığı durumda, yatay deprem yükü altında binanın i'inci katındaki tüm düşey taşıyıcılar eşit (Δ_i) ötelenmesi yaparlar. Tamamen simetrik olsa dahi, binalarda ek dışmerkezlik ve buna tekabül eden kat burulmasının dikkate alınması istenir. Bu burulma momenti altında kat, düşey eksen etrafında döner. Bu dönme de bir rijit kütle hareketidir, ancak dönme ekseninin solunda ve sağında kalan (Δ_i) ötelenmeleri değişir. İşte bu dönme hareketi sonucunda oluşan $(\Delta_i)_{max}$ bulunmalıdır ve bu değerle hesap yapılmalıdır (Atımtay, 2000).

(7.8) denklemleri ile verilen koşulun binanın herhangi bir katında sağlanamaması durumunda, taşıyıcı sistemin rijitliği artırılarak deprem hesabı tekrarlanacaktır. Ancak verilen koşul sağlansa bile, yapısal olmayan gevrek elemanların (cephe elemanları vb), elde edilen göreli kat ötelemeleri altında kullanılabilirliği hesapla doğrulanmalıdır.

Tüm bu anlatılanlardan, deprem yönetmeliğinde, rijitlik koşulana ne kadar önem verildiği ortaya çıkmaktadır. Söz konusu koşullar sağlanmamış ise, binanın deprem davranışı kabul edilmeyecek kadar olumsuz olacaktır. Öyle ise, tek çare yapının ötelenme rijitliğini büyüterek deprem hesabını tekrarlamaktır. Binanın ötelenme rijitliğini artırmanın en etkin yolları şöyledir (Atımtay, 2000):

(a) Eğer perde kullanılmamış ise, perde kullanmak

(b) Eğer perde varsa ve buna rağmen şartlar sağlanamıyor ise, perde alanları toplamını, birbirine dik her iki deprem doğrultusunda da, çoğaltmak.

(c) Belirli nedenlerle perde kullanılması istenmiyor ise, kolon ve/veya kiriş enkesit alanlarını büyütmek.

Göz önüne alınan deprem doğrultusunda her bir katta, θ_i, ikinci mertebe gösterge endeksinin (7.9) ile verilen koşulu sağlaması durumunda, ikinci mertebe etkileri daha önce açıklanan şartlara göre değerlendirilirler.

$$\theta_i = \frac{(\Delta_i)_{ort} \sum_{j=1}^{N} w_j}{V_i h_i} \tag{7.9}$$

Bu ifade de, $(\Delta_i)_{ort}$, i'inci kattaki kolon ve perdelerde hesaplanan göreli kat ötelemelerinin kat içindeki ortalama değerini; w_j, yapının j'inci katının, hareketli yük katılım katsayısı kullanılarak hesaplanan ağırlığı; V_i, yapının i'inci katının düşey taşıyıcılarında göz önüne alınan deprem doğrultusunda oluşan kesme kuvvetlerinin toplamını ve h_i ise yapının i'inci katının kat yüksekliğini göstermektedir (Atımtay, 2000).

(7.9) koşulunun herhangi bir katta sağlanamaması durumunda, taşıyıcı sistemin rijitliği yeterli ölçüde artırılarak deprem hesabı tekrarlanacaktır.

7.4 P – Δ Etkilerinin Belirlenmesi İçin Önerilen Çözüm Metotları

Orta katlı yapılarda, P – Δ etkileri ihmal edilebilir. Yapı yüksekliği artıkça, söz konusu etkiler daha da belirginleşecektir. Bu etkiler bazen o kadar etkin olurlar ki, tasarımda seçilen taşıyıcı sistemlerin boyutlarının büyütülmesi bile gerekebilir. Bir sistemin P – Δ etkilerine karşı tasarlanabilmesi için, aşağıdaki metotlardan bir tanesi kullanılır.

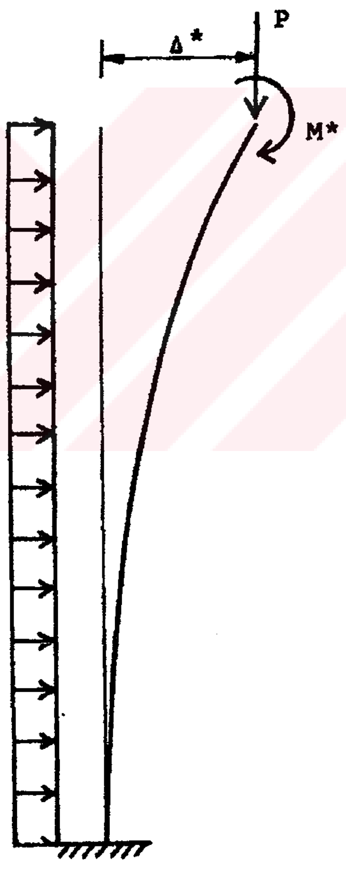
7.4.1 Büyütme Çarpanı Yöntemi

Büyütme çarpanı metodu, yaklaşık bir yöntemdir. Bu metotta; sisteme etkiyen yanal kuvvetlerin I. Mertebe analizleri sonucu bulunan momentleri ve enine deplasmanları, belirli bir katsayı oranında genişletilirler. Büyütme çarpanı, eksenel yüklü herhangi bir elemanın ilk enine deplasmanın bulunmasıyla belirlenebilir (Şekil 7.4).

Bir sistemin P – Δ etkisini de içeren serbest uçtaki deformasyonu, şekil değiştirme eğrisinin (7.10) diferansiyel denkleminin çözümünden bulunabilir (Timoshenko ve Gere, 1961).

$$\Delta^* = \Delta \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \right) \tag{7.10}$$

Bu denklemde; Δ*, P-Δ etkisini içeren serbest uçtaki nihai deplasman; Δ, I. Mertebe analizinden elde edilen deplasman; P, konsol sistemin serbest ucuna etkiyen eksenel kuvvet; P_{cr}, ise konsol sistemin elastik burkulma yükünü temsil etmektedir.



Şekil 7.4 Eğilmeli konsol bir eleman (Gaiotti, 1989).

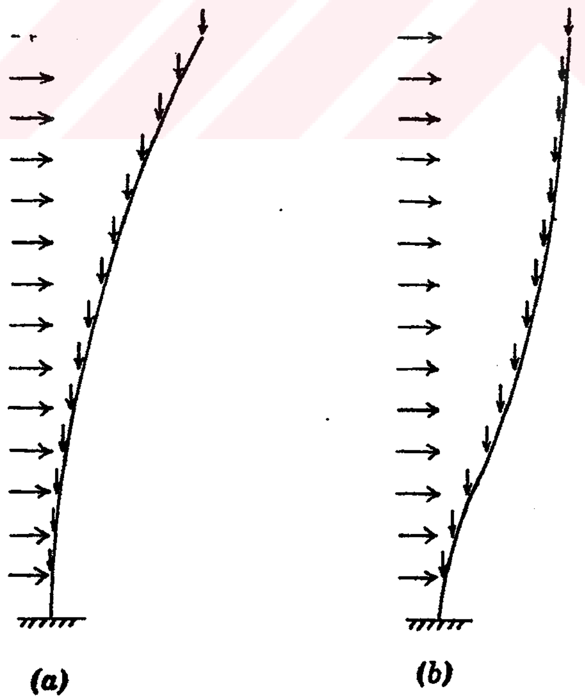
Denklemin incelenmesinden de görüleceği gibi; mevcut eksenel bir P kuvveti altında, düzgün yayılı yanal yüklemeden dolayı, serbest uçta oluşan deformasyon, F, büyütme çarpanı kadar artırılmıştır.

$$F = \frac{1}{1 - \dfrac{P}{P_{cr}}} \tag{7.11}$$

Büyütme çarpanı metodu, çok katlı yapılarda da uygulanabilir. Yerçekimi kuvveti, yapı yüksekliği boyunca etkitilir (Şekil 7.5). Her ne kadar, (7.10) ifadesi konsol sistemin ucundaki maksimum deplasmanı verse de, pratikte yapının herhangi bir i'inci katındaki deplasmanı bulmak için de kullanılır.

$$\Delta_i^* = \Delta_i \cdot \left(\frac{1}{1 - \dfrac{P_0}{P_{cr}}} \right) \tag{7.12}$$

Bu denklemde; Δ_i^* , P-Δ etkisini içeren i'inci kattaki nihai deplasman; Δ_i, i'inci katta I. Mertebe analizinden elde edilen deplasman; P_0, konsol sistemin tabanındaki toplam yerçekimi kuvveti; P_{0cr}, ise konsol sistemin tabanında oluşan elastik burkulma yükünü temsil etmektedir. Bu yöntemde, büyütme çarpanının yapı yüksekliği boyunca sabit kaldığı kabul edilmiştir (Gaiotti, 1989).



Şekil 7.5 Düzgün dağıtılmış yer çekim kuvveti etksinde: (a) Eğilme kolonu; (b) Kayma kolonu (Gaiotti, 1989).

Bir P-Δ analizinde, deplasmanlar ve yerçekimi yükleri arasındaki bağıntı doğrusal değildir. Bu yüzden analizlerde, sistemi göçmeye götürecek P_{0cr} yükünün dikkate alınması gerekmektedir. Büyütülmüş yükler son limit durum analizlerinde, diğer yükler ise kullanılabilirlik limit durumu analizlerinde dikkate alınmalıdır. P_{0cr} yükünün değişik sistemlerde bulunması için, Goldberg çeşitli bağıntılar öne sürmüştür:

(a) Eğer sistem uniform dağıtılmış kuvvetler altında, **eğilmeli konsol** sistem gibi davranıyorsa, P_{0cr} yükü, (7.13) bağıntısıyla bulunabilir (Goldberg, 1947). Bu bağıntıda EI_0, yapının tabanındaki eğilme rijitliğini; $EI_0(1-0.3\beta)$ ifadesi, yapının üstündeki eğilme rijitliğini ve L, tüm yapı yüksekliğini göstermektedir.

$$P_{0cr} = \frac{7.82EI_0}{L^2}(1-0.3\beta) \tag{7.13}$$

(b) **Kayma modunda** deforme olan ankastre bağlı, rijit çerçevelerin burkulma yükleri, (7.14.a) denklemi uyarınca bulunur. Eğer çerçeve kolonları mafsallı bağlı ise, ozaman (7.14.b) denklemi kullanılır (Goldberg, 1973).

$$P_{0cr} = \frac{12E\left(1+\dfrac{C_1}{6G_1}\right)}{h_1\left(\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{2}{3G_1}\right)} \tag{7.14.a}$$

$$P_{0cr} = \frac{12E}{h_1\left(\dfrac{4}{C_1}+\dfrac{3}{2G_1}\right)} \tag{7.14.b}$$

Bu iki bağıntıda da E, elastisite modülü; h_1, ilk katın yüksekliği; $C_1 = \sum(I_c/h)_1$ olup, ilk kattaki tüm kolonların toplamını; $G_1 = \sum(I_g/l)_1$ olup, ilk katın üstündeki döşemenin tüm kirişlerinin toplamını göstermektedir.

(c) **Hem kayma ve hem de eğilme** etkisindeki bir sistemin kritik burkulma yükünü bulmak için ise, (7.15) bağıntısı kullanılır (Goldberg, 1973).

$$\frac{1}{P_{0cr}} = \frac{1}{P_{0f}} + \frac{1}{P_{0S}} \tag{7.15}$$

Bu bağıntıda P_{0f} ve P_{0S} değerleri sırasıyla, (7.13) ve (7.14) denklemlerinden bulunan kritik burkulma yükleridir.

P-Δ etkileri enine deplasmanı arttırdığı gibi iç momentlerin artmasına da yol açarlar. Bu artan momentler de (7.16) ifadesi ile bulunabilirler (Timoshenko ve Gere, 1961).

$$M_i^* = M_i \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{P_0}{P_{cr}}} \right) \tag{7.16}$$

Bu denklemde; M_i^* , P-Δ etkisini içeren i'inci kattaki nihai moment; M_i, i'inci katta, I. Mertebe analizinden elde edilen momenttir.

Büyütme çapanı metodu, P-Δ etkilerinin belirlenmesinde hızlı fakat yaklaşık bir yöntemdir. Her ne kadar, P-Δ etkilerinin belirlenmesinde **pratik bir metotsa** da, daha çok bu etkilerin ihmal edilip edilmeyeceğinin belirlenmesinde kullanılır (Gaiotti, 1989).

7.4.2 İterasyon Yöntemi

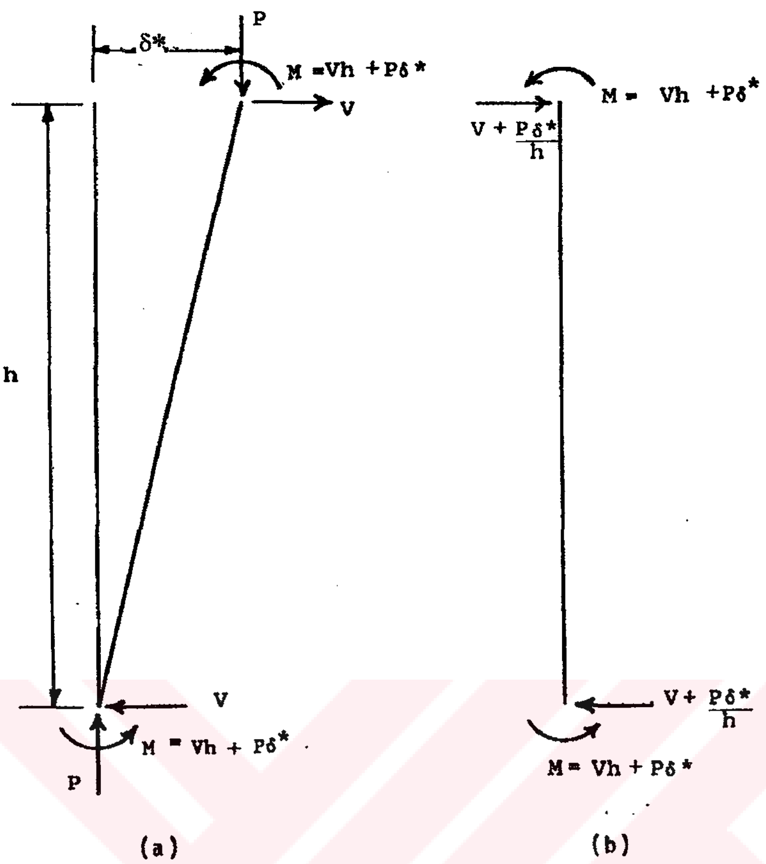
Bu metotta yapı üzerine etkiyen eksantrik yerçekimi kuvveti eşdeğer yanal kuvvete dönüştürülür (Adams 1974). Bu dönüştürülmüş eşdeğer yanal kuvvetin, yapı üzerine etkiyen gerçek yanal kuvvete eklenerek analiz edilmesiyle bulunan sonuçlar, P-Δ etkilerini içerirler.

Şekil 7.6.a'da, yerdeğiştirmiş durumdaki kolon için, P-Δ etkisi gösterilmiştir. Kolon uçlarındaki dönmeler ihmal edilmiş ve kolon uçlarının tutulu olduğu varsayılmıştır. Bu yaklaşımla, yerçekim kuvveti P'nin sadece kolon ucunda Pδ* büyüklüğünde bir momente yol açtığı sonucuna varabiliriz. Kolonun üstünde ya da altında oluşacak moment;

$$M^* = Vh + P\delta^* \tag{7.17}$$

Burada M*, kolonun altındaki veya üstünde, P-Δ momenti etkilerini içeren nihai moment; V, kolonun yanal kesme kuvveti; P, kolondaki yerçekimi kuvveti; δ*, P-Δ kat ötelemesini içeren nihai kat ötelemesi ve h, kat yüksekliğidir. Bu teoriye göre, eğer V, yatay kesme kuvveti $P\delta^* / h$ oranında artırılır ve kolonun moment analizi yapılırsa, kolon uçlarında bulunan momentler P- Δ etkilerini içerirler (Şekil 7.6.b) (Gaiotti, 1989).

Kolon momentlerinin tek bir işlemle bulunması için, δ*, nihai kat ötelemesinin bilinmesi gerekir. İlk başta nihai kat ötelemesi bilinmediği için, iterasyona I. Mertebe ötelemeden bulunacak Pδ/ h artımıyla başlanır. İterasyona δ kat ötelemesi, δ* değerine yaklaşana kadar devam edilir.



Şekil 7.6 Kat yüksekliğinde kolon (Gaiotti, 1989).

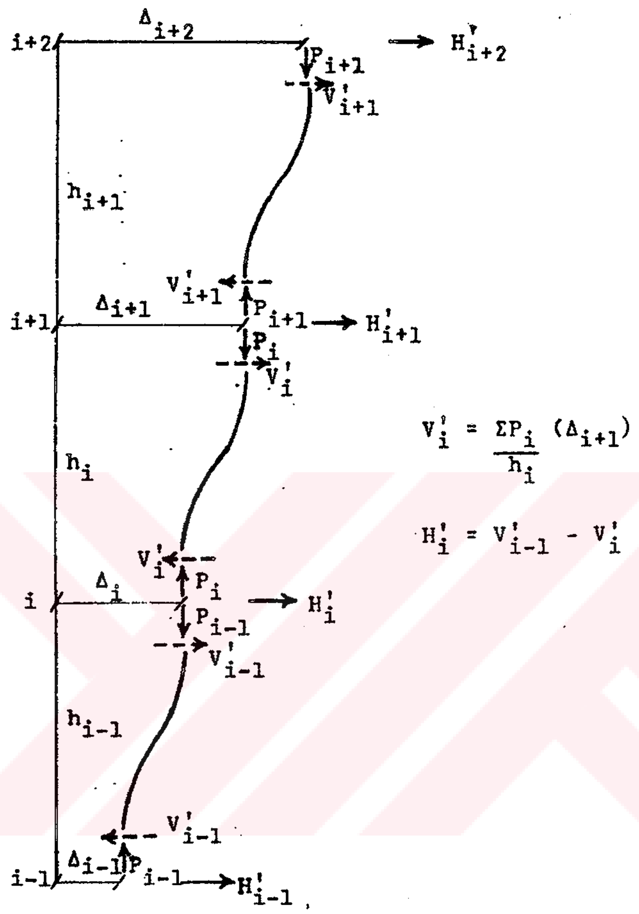
Tek bir kolon için açıklanan bu yöntem, kolaylıkla çok katlı yapılara uygulanabilir. Şekil 7.7'de çok katlı bir yapının sıralı katları gösterilmiştir. Burada "i", kat seviyesini belirtmektedir. Bir "i" katındaki yanal kesme kuvvetlerindeki artış aynı kattaki yerçekimi yüklemesinden dolayı oluşan eksantirisiteye eşittir (7.18).

$$V_i' = \frac{\sum P_i}{h_i}(\Delta_{i+1} - \Delta_i) \tag{7.18}$$

Bu denklemde ΣP_i, i'inci kattaki kolon ve perdelere etkiyen eksenel yüklerin toplamı; h_i, i'inci katın kat yüksekliği; Δ_{i+1}, i+1'inci kat seviyesindeki düşey eksene göre deplasmanı; Δ_i ise i'inci kat seviyesindeki düşey eksene göre deplasmanı belirtmektedir. Δ deplasmanın ilk iterasyon değeri, gerçek yatay yükler etkitilen yapının I. Mertebe analizinden bulunan değeridir. Eşdeğer yanal kuvvet ise, bir kat seviyesinin üstündeki ve altındaki kat kesme kuvvetlerinin farkına eşittir. (7.19).

$$H_i' = V_{i-1}' - V_i' \tag{7.19}$$

H_i', eşdeğer yanal kuvvetteki artış miktarı, dış yanal kuvvete eklenerek yapı tekrar analize tâbi tutulur. Bu iterasyona, eşdeğer yanal kuvvet değerleri bir önceki iterasyonla aynı değere ulaşıncaya kadar devam edilir.



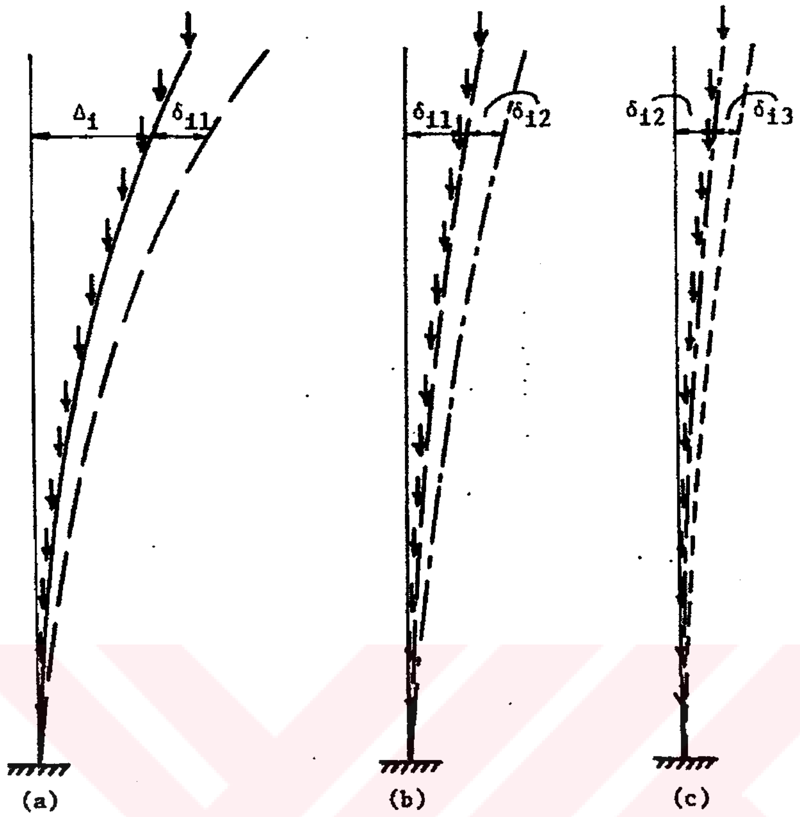
Şekil 7.7 Eşdeğer yanal kuvvet artımı (Gaiotti, 1989).

Böylece, yapının analizi sonucu bulunan momentler ve deplasmanlar P-Δ etkisini içermiş olurlar. Genellikle iki veya üç iterasyon kâfi gelir. Eğer beş iterasyon sonucunda sonuçlar birbirlerine yaklaşmazlar ise, sistem kararsız olabilir (Gaiotti, 1989).

Bu metot, ikinci mertebe analiz yapan programlarla yakın sonuçlar verse de, yüksek katlı yapılarda uygulanması **hem zaman alıcı ve hem de yorucudur**.

7.4.3 İterasyonlu Yerçekimi Yöntemi

Yanal kuvvetlerin iterasyonla artırılması metodu hem uzun zaman, hem de bilgisayar desteği gerektirir. Bunun için daha kolay ve daha gerçekçi, bilgisayarla uyumlu iteratif bir P-Δ metodu geliştirilmiştir (Smith ve Gaiotti, 1988).



Şekil 7.8 Deforme olmuş şekle etkiyen yerçekimi kuvveti (Gaiotti, 1989).

Bu yöntemde, bir çerçeve analiz programı kullanarak, sistem I. Mertebe yanal yüklere göre analiz edilir. Sistemin, Δ_i deplasmanı sonucu deforme olmuş şekli elde edilir. Daha sonra bu deforme olmuş yüksüz şekle yerçekimi yükleri etkitilerek, δ_{i1} deplasman artımı bulunur (Şekil 7.8.a). Bundan sonraki adım ise, δ_{i1} artımı altında, deforme olmuş şekle tekrar yerçekimi yükleri etkitmektir. Bu iterasyon sonucunda da, yeni δ_{i2}, artırılmış deplasman bulunur (Şekil 7.8.b). Bu işlemlere deplasmandaki ek artım miktarı ihmal edilebilecek seviyeye gelene kadar devam edilir (Şekil 7.8.c) (Gaiotti, 1989).

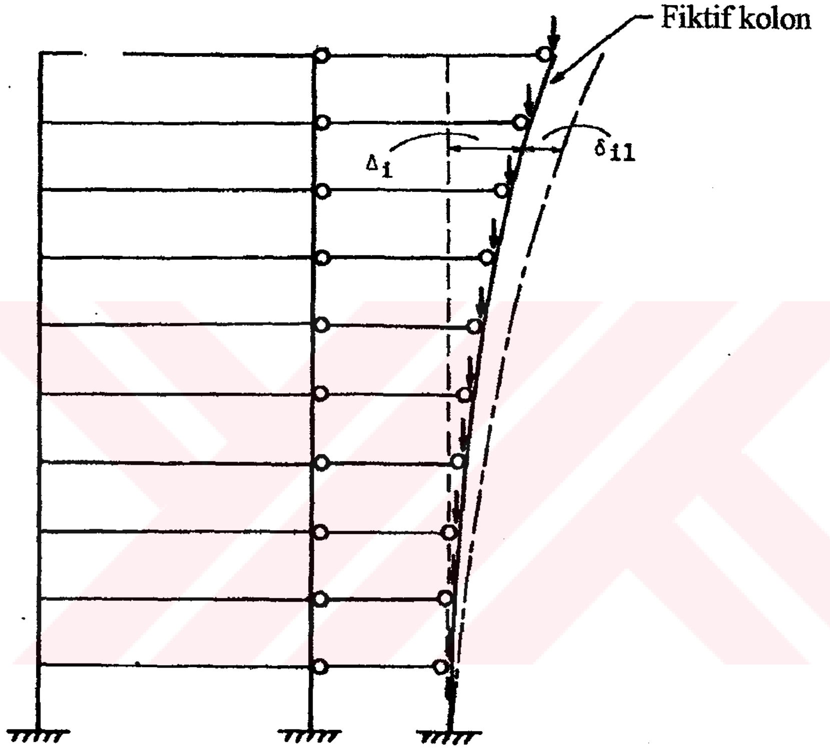
P- Δ etkisini de içeren i'inci kattaki Δi^*, nihai deformasyonu, I. Mertebe analizinde bulunan deplasmanla, diğer tüm ek deplasmanların toplamına eşittir.

$$\Delta_i^* = \Delta_i + \delta_{i1} + \delta_{i2} + \delta_{i3} + \ldots \qquad (7.20)$$

Düşey yükler, deforme olmuş şekle etkitilmediklerinden iterasyon gerekmektedir. i'inci katta P- Δ etkisini içeren, M_i^* sonuç momenti, I. Mertebe analizinde bulunan momente, ek kuvvet artımda oluşan ek momentlerinin eklenmesi ile bulunur.

$$M_i^* = M_i + \delta M_{i1} + \delta M_{i2} + \delta M_{i3} + \ldots \tag{7.21}$$

Pratikte bu metot, tüm yapı yüksekliği boyunca uzanan, eğilme rijitliği sıfıra eşit olan ve yapıya eksenel rijit bağlarla bağlanmış bir **eksenel rijit fiktif kolon** ekleyerek kolaylaştırılabilir (Şekil 7.9). Bir kata etkiyen yerçekimi kuvveti, deforme olmuş fiktif kolonun o kata karşı gelen kısmına yüklenir. Bu sayede, tüm yapının koordinatları yerine fiktif kolonunkilerin bilinmesi yetecektir (Gaiotti, 1989).



Şekil 7.9 Deforme olmuş şekle etkiyen yerçekimi kuvveti (Gaiotti, 1989).

Bu metodun sonuçları, artımsal yanal kuvvet iterasyon metodu ile aynı olup, analiz zamanı bakımından 1/3 oranında daha hızlıdır.

7.4.4 Direkt Yöntem

Önceki bölümlerde açıklanan iterasyon yöntemlerinden farklı olarak, bu yöntemde direkt ikinci mertebe etkiler dikkate alınır. Bu ikinci mertebeler etkiler, her katta I. Mertebe yanal analizlerden bulunan ve katın yanal rijitliğine bağlı olan direkt etkilerdir.

İterasyon esasına dayanan yöntemlerde olduğu gibi, i'inci kattaki yerdeğiştirmiş kolonlara, P_i

düşey yükünün etkitilmesi sonucu, i'inci katın S_i, dış kesme kuvveti (7.22) denklemi kadar artar.

$$\delta S_i = \frac{P_i \delta_i^*}{h_i} \tag{7.22}$$

Bu denklemde, δ_i^* bir P-Δ etkisini de içeren nihai deplasmandır.

Sisteme sadece yanal kuvvetler etkiyorsa, i'inci katın kayma rijitliği (7.23) ifadesi ile bulunur.

$$K_{Si} = \frac{S_i}{\delta_i} \tag{7.23}$$

δ_i , i'inci katın I. Mertebe yanal ötelenmesidir.

S_i, başlangıçtaki kesme kuvveti olmak üzere, P-Δ etkisini de içeren toplam kesme kuvveti ifadesi;

$$S_i^* = S_i + \delta S_i = S_i + \frac{P_i \delta_i^*}{h_i} \tag{7.24}$$

şeklindedir. Herhangi bir çerçevede, kat ötelenmesinin kattaki kesme kuvveti ile orantılı olduğunu kabul edersek;

$$S_i^* = \delta_i^* K_{Si} \tag{7.25}$$

ifadesini elde ederiz. (7.24) ifadesini yerine yazarsak, i'inci katın nihai deplasmanı;

$$\delta_i^* = \frac{\left[S_i + \left(\dfrac{P_i \delta_i^*}{h_i}\right)\right]}{K_{Si}} \tag{7.26}$$

şeklinde olur. (7.23) ifadesi bu denklemde yerine yazılırsa ifade;

$$\delta_i^* = \frac{\delta_i}{\left[1 - \left(\dfrac{P_i \delta_i}{S_i h_i}\right)\right]} \tag{7.27}$$

haline gelir. i'inci katta, P-Δ etkisini de içeren toplam deplasman;

$$\Delta_i^* = \sum_{j=1}^{i} \delta_j^* \tag{7.28}$$

şeklinde bulunabilir.

(7.27) denklemindeki, $1/[1-(P_i\delta_i/S_ih_i)]$ çarpanı, yapı yüksekliği boyunca, yerçekim yükünün doğrusal olmayan bir fonksiyonu şeklinde değişir.

Benzer olarak, nihai momentte;

$$M_i^* = \frac{M_i}{\left[1-\left(\dfrac{P_i\delta_i}{S_ih_i}\right)\right]} \tag{7.29}$$

bağıntısıyla bulunabilir (Gaiotti, 1989).

Direkt yöntem, **az yada orta katlı rijit çerçevelerde kesin ve yeterli sonuçlar vermektedir.**

7.4.5 Negatif Fiktif Eleman Yöntemi

Rutenberg (1981) tarafından önerilen bu yöntemde, sistem yanal kuvvetler etkisinde analiz edildiğinde moment ve deplasmanların P-Δ etkilerini de içermesi için yapısal modelde çeşitli değişiklikler yapılır. Bu değişiklik sisteme **negatif rijitlik oranlı fiktif bir kolon** eklemektir. Bu kolonun rijitliği ise, yerçekimi yüklemesi ile orantılı olmalıdır. Bu sayede, her katın yanal rijitliği azalmış olur. Nihai deplasman ve artırılmış eleman momentleri de, yanal yükleme ve yerçekimi yüklemesinin bir fonksiyonu olarak belirtilebilir (Gaiotti, 1989).

Fiktif kolon yönteminin incelenmesinde, Şekil 7.7 ele alınacaktır. H', P-Δ etkilerini de içeren yanal kuvvetteki artış miktarı matris formunda yazılacak olursa (7.30) elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} H'_1 \\ H'_2 \\ H'_3 \\ \vdots \\ H'_i \\ \vdots \\ H'_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P_0}{h_0}+\frac{P_1}{h_1} & -\frac{P_1}{h_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ -\frac{P_1}{h_1} & \frac{P_1}{h_1}+\frac{P_2}{h_2} & -\frac{P_2}{h_2} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & -\frac{P_2}{h_2} & \frac{P_2}{h_2}+\frac{P_3}{h_3} & -\frac{P_3}{h_3} & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{P_{i-1}}{h_{i-1}}+\frac{P_i}{h_i} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{P_{n-1}}{h_{n-1}}+\frac{P_n}{h_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1^* \\ \Delta_2^* \\ \Delta_3^* \\ \vdots \\ \Delta_i^* \\ \vdots \\ \Delta_n^* \end{Bmatrix} \tag{7.30}$$

Bu bağıntı Clough, Panzien ve Nair (1975)'de, çok katlı yapılarda P-Δ etkilerinin göz önüne alınması için önerilmiştir. (7.30) bağıntısını aşağıdaki formda yazabiliriz.

$$\{H'\}=[K_g]\{\Delta^*\} \tag{7.31}$$

Burada $[K_g]$, geometrik rijitlik matrisidir. H, yanal kuvvetlerine, H' artım miktarları eklenirse;

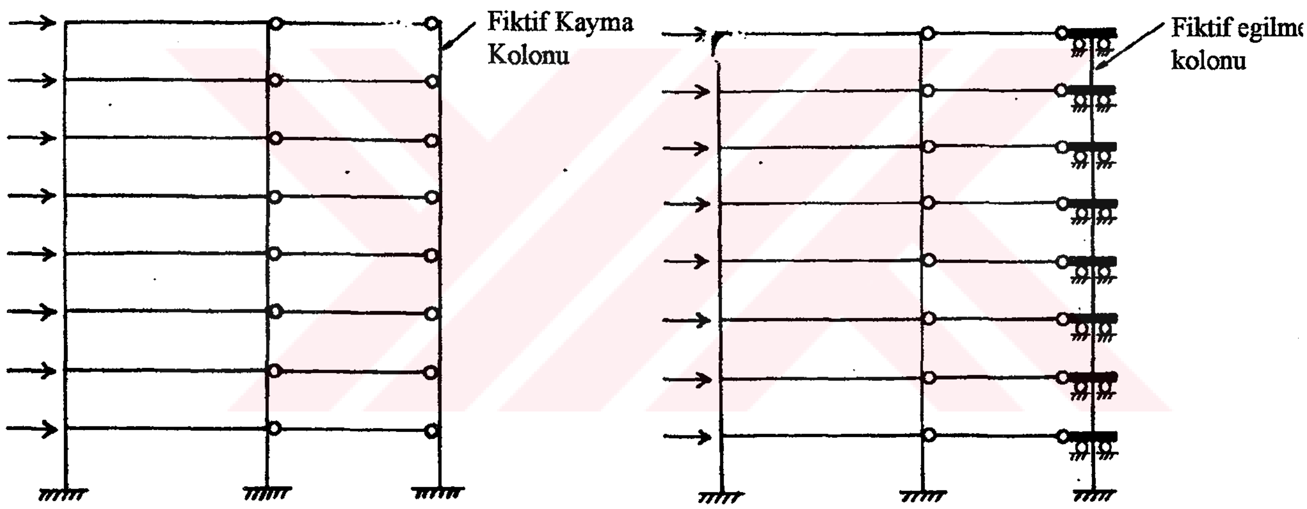
$$\{H\}+\{H'\}=[K]\{\Delta^*\} \tag{7.32}$$

elde edilir. Burada, **[K], I. Mertebe yanal rijitlik matrisidir**.

(7.31) ifadesini, (7.32)'de yerine yazarsak;

$$\{H\}=[K-K_g]\{\Delta^*\}=[K_S]\{\Delta^*\} \tag{7.33}$$

bulunur. Burada, **$[K_S]$, II. Mertebe yanal rijitlik matrisidir** (Gaiotti, 1989).



Şekil 7.10 Solda: Fiktif kayma kolonu; sağda: fiktif eğilme kolonu modeli (Gaiotti, 1989).

Tüm yapı yüksekliği boyunca uzanan ve yanal rijitliği $-P_i/h_i$ olan fiktif kolon, yapıya eksenel rijit bağlantılarla bağlanmıştır (Şekil 7.10.a). Böylece, I. Mertebe bilgisayar programları II. Mertebe rijitlik matrisinin tüm terimlerini üretebilir. Eğer, analiz programı kayma alanında giriş tanımıyorsa, aynı sonuçlara eğilmeli kolon davranışıyla da ulaşılabilir (Şekil 7.10.b).

Bu yöntem, P-Δ etkilerini göz önüne almasından ve iterasyon gerektirmediğinden elverişlidir.

7.5 P-Δ Yöntemlerinin Karşılaştırılması

Daha verimli yapı tasarlama fikri, tasarım mühendislerini P-Δ etkilerini dikkate almaya zorlamıştır. Yapılan çalışmalar önceki bölümlerde verilmiştir. Şimdi bu yöntemlerin karşılaştırılmasına bakalım (Gaiotti, 1989):

1. Eğer deforme olmuş şekil üzerinde denge denkleminin formüle edildiği bir bilgisayar programı yazılırsa, P-Δ etkilerinin tayininde en geçerli metot bu olur. Şu an, II. Mertebe programları ofislerde kullanım için uygun değildirler. Gerçi, I. Mertebe analiz programı hemen hemen her durumda kabul edilebilir yaklaşık sonuçlar vermektedir.

2. Eğer I. Mertebe analiz programı, negatif eleman özelliklerini tanımlayabilirse; negatif özellikli kolon metodu P-Δ etkilerini tanımlamada en iyi metottur. İterasyona gereksinimi yoktur. Metot kesme modundaki, eğilme modundaki veya her ikisinin birleşimdeki yapılarda kullanılabilir. Eğer program, negatif eleman özellikleri tanımıyorsa, o zaman eğilmeyle deforme olan çok katlı çerçevelerde, iteratif yerçekimi yükü metodu kullanılabilir. Bu metotta, yerçekim yüklerinin eşdeğer yanal kuvvete dönüştürüldüğü iteratif metotla yakın sonuçlar verir fakat uygulaması daha kolay ve çabuktur. Her tür yapı için kullanımı uygundur.

3. Direkt metot ve LeMessurier (1977) tarafından önerilen yanal kuvvet analizlerinin doğrusal olmayan bir çarpan ile artırıldığı metot da etkin ve uygun sonuçlar vermektedir. Ancak bu metotlar az veya orta katlı rijit çerçeveli kesme modunda deformasyona sahip yapılarda uygulanabilir.

4. Büyütme çarpanı metodu da çabuk fakat P-Δ etkilerinin belirlenmesinde çok yaklaşıktır. Bu metodun pratikteki kullanımı P-Δ etkilerinin ne zaman belirgin, ne zaman daha yaklaşık bir P-Δ analizinin gerektiğinin belirlenmesi ile sınırlıdır.

7.6 Genel Çevrimsel Eğriler Üzerinde P-Δ Etkileri

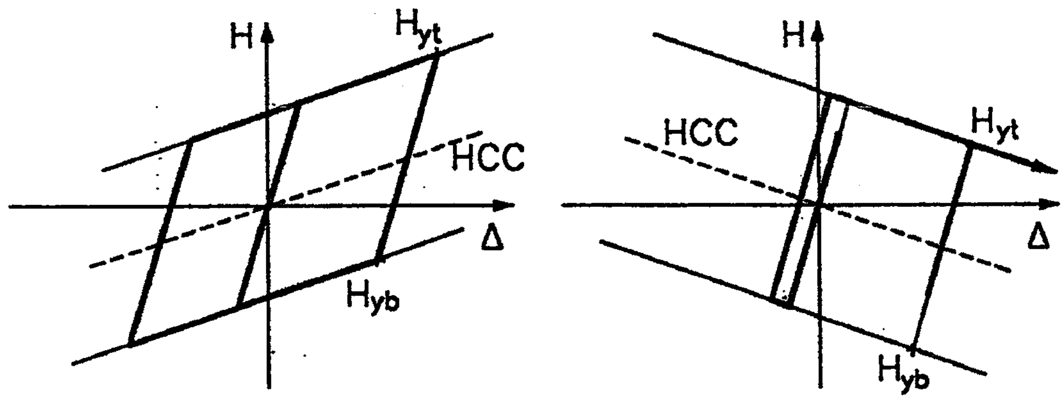
Çevrim eğrileri, genel şekillerde olan sistemlerde, P-Δ etkilerini belirlemek için, önce çevrimsel eğrilerin stabilitelerini etkileyen etkenler kavranmalıdır. Çevrimsel eğrilerin stabiliteleri ise, tek serbestlik dereceli, iki yönlü doğrusal titreşen osilatörlerin mukabele analizleri ile bulunabilir.

7.6.1 İki Yönde Doğrusal Çevrim Eğrilerinin Stabiliteleri

MacRae ve Kawashima (1993); deprem tipi harekete maruz tek serbestlik dereceli osilatörlerin, çevrimsel eğri şeklinden bağımsız olarak, hem pozitif ve hem de negatif yönde yaklaşık aynı ivme değeri ile titreşmeye meyilli olduklarını bulmuşlardır. Bu ivme değeri, akma limit değeri olup, **osilatörler, sıfır ivme çizgisine en yakın akma limitinde akmak**

isteyeceklerdir.

Şekil 7.11'de; pozitif ve negatif rijitlik oranlı osilatörlerin stabiliteleri gösterilmiştir. Pozitif rijitlik oranına sahip çevrim eğrisi üzerinde elastik olarak titreşen bir osilatör düşünelim. Osilatör, eğrinin H_{yt}, en üst akma limit çizgisi ile H_{yb}, en alt akma limit çizgileri arasında titreşecektir (Şekil 7.11.a).



(a) Pozitif rijitlik oranli egri (b) Negatif rijitlik oranli egri

Şekil 7.11 İki yönlü çevrim eğrilerinin stabiliteleri (MacRae, 1994).

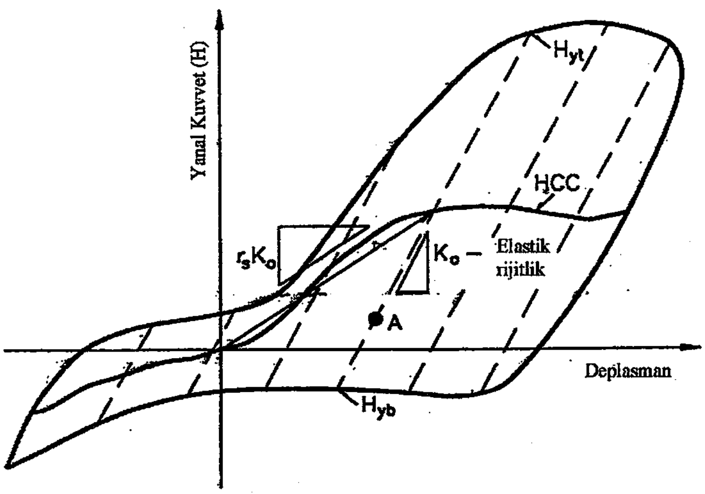
H_{yb}, **en alt akma limit çizgisi**, sıfır kuvvet çizgisine daha yakın olduğundan, osilatörün bu akma limitinde akması beklenir (MacRae). Bir başka deyişle akma, sıfır deplasman pozisyonuna doğru olacaktır. Osilatör, H_{yt}, **en üst akma noktasında** iken; yön değiştirdiğinden, hızı sıfır olacaktır. Buna mukabil; osilatörün potansiyel enerjisi ve ivmesi, maksimum değerlerinde olacaktır. Osilatör, sıfır kuvveti pozisyonuna dönmeye başladığında, hızı da artmaya başlar. Eğer osilatör serbest titreşim yapmakta ise, H, yanal atalet kuvveti sıfır değerini aldığında maksimum hıza ulaşır. Bu noktada maksimum momentuma sahip olan osilatör, $H = 0$ değerine karşılık gelen maksimum deplasmanda durmak istemeyecek, fakat sıfır deplasman pozisyonuna doğru akmaya yönelecektir. Bu davranışı yapan eğriler, **kararlı çevrim eğrileri** olarak adlandırılırlar (MacRae, 1994).

Diğer taraftan, Şekil 7.11.b'dekine benzer negatif rijitlik oranına sahip çevrimsel eğrinin, H_{yt}, en üst akma limiti ile H_{yb}, en alt akma limiti arasında elastik titreşen bir osilatörü ele alalım. H_{yt} noktası, en alt akma limitinden sıfır kuvvet çizgisine daha yakın olduğundan, osilatör en üst akma limitinde akmaya yeltenecektir. Bir başka ifade ile, osilatör, sıfır deplasman pozisyonundan uzaklaşacak yönde akmaya meyillidir. Eğer osilatör herhangi bir yönde akmışsa, bir sonraki akma anında da, aynı yönde akmaya meyillenecektir. Buda büyük kalıcı deplasmanlara ve küçük döngüsel enerji emilmelerine yol açacaktır. Bu davranışı yapan eğriler ise, **kararsız çevrim eğrileri** olarak adlandırılırlar (MacRae, 1994).

Bu eğrilerin stabiliteleri, **merkezil çevrimsel eğriler (HCC)** terimleri yardımıyla açıklanabilir (MacRae ve Kawashima, 1993). Elastik mukabele grafiğinde, H_{yt} en üst akma limiti ve H_{yb}, en alt akma limiti, arasında kalan noktaların, orta noktalarının birleştirilmesi ile, HCC elde edilebilir. Daha önce anlatılan iki yönlü çevrimlerde, H_{yt} ve H_{yb} arasındaki mesafe sabit ve HCC doğrusaldır. Eğer HCC'nin eğimi pozitif ise, o zaman osilatör **kararlıdır**. Pozitif yönde deplasman yapan osilatörlerde, HCC sıfır ivme çizgisinin üstünde olduğundan ve en alt akma limiti sıfır ivme çizgisine daha yakın olduğundan dolayı, akma, negatif yönde olacaktır. Negatif deplasmanlı bir osilatör de ise; HCC sıfır ivme çizgisinin altında olduğundan ve en üst akma limiti sıfır çizgisine daha yakın olduğundan dolayı, akma, pozitif yönde olacaktır. Eğer HCC'nin eğimi negatif ise, o zaman osilatör **kararsızdır** (MacRae, 1994).

7.6.2 Genel Şekle Sahip Çevrimsel Eğrilerin Stabiliteleri

Genel şekilli çevrimsel eğrilere $P-\Delta$ etkisi de, "merkezil çevrimsel eğriler" (HCC) kavramı kullanılarak bulunabilir (MacRae ve Kawashima, 1993). Genel şekle sahip eğriler için, HCC Şekil 7.12'de gösterilmiştir. HCC kavramı, iki yönlü eğriler çinde geçerli olan (7.34) denklemiyle tanımlanmıştır. Burada, H_{yt} ve H_{yb} herhangi bir elastik mukabele çizgisinde en üst ve en alt akma limitleridir.



Şekil 7.12 Genel şekilli kararlı eğri (MacRae, 1994).

$$H_c(\Delta) = \frac{(H_{yt} + H_{yb})}{2} \tag{7.34}$$

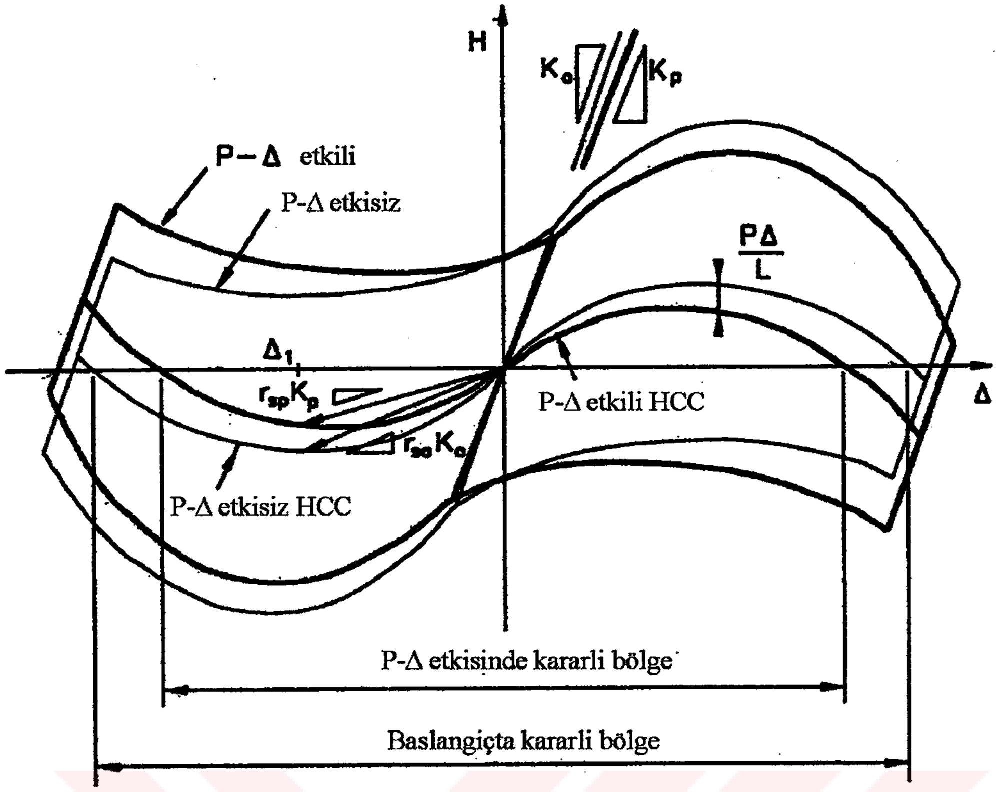
Şekil 7.12'de bir osilatöre ait kuvvet – deplasman grafiği gösterilmiştir. Osilatörün, grafiğin üzerinde alınan bir "A" noktasındaki davranışını göz önüne alalım. A noktasından elastik rijitliğe çizilen paralel doğrunun, HCC eğrisini kestiği nokta ile orijini birleştiren doğrunun eğimi, $r_s K_0$ çarpımına eşit olup, **sekant rijitliği** olarak isimlendirilir (MacRae, 1994). Eğer, sekant rijitliği sıfırdan büyükse, akma, kalıcı deplasmanları da azaltarak, en alt akma zarfında oluşur. Bunun nedeni; en alt akma zarfına erişmek için, en üst akma zarfına oranla daha az mutlak ivme mukabelesi gerekmektedir. Bir eğri, sekant rijitlik oranında yansıtılan stabilite derecesi kadar "kararlı" olarak tanımlanabilir. Eğer sekant rijitliği negatif ise, o zaman akma, kalıcı deplasmanlar oluşturarak ve stabiliteyi bozarak, en üst zarfta gerçekleşir. Burada genel şekilli çevrimsel eğriler için kullanılan sekant rijitlik yaklaşımı, genel şekilli çevrimsel eğrilerin iki yönlü doğrusal şekillenmiş eğrilere benzetilmesine imkan sağlamaktadır.

Çevrimsel eğri üzerindeki her nokta için, r_s, sekant rijitlik oranı, sıfırdan büyük ise tüm eğri **mutlak (koşulsuz) kararlı** olarak; eğer, r_s, tüm eğri için sıfırdan küçük ise **mutlak (koşulsuz) kararsız** olarak adlandırılabilir. **Koşullu kararlı eğri** ise, HCC'nin sıfır kuvvet çizgisini bir kereden fazla geçerek, r_s, sekant rijitliğinin, deplasmana bağlı olarak pozitif veya negatif olduğu durumdaki eğridir (MacRae, 1994).

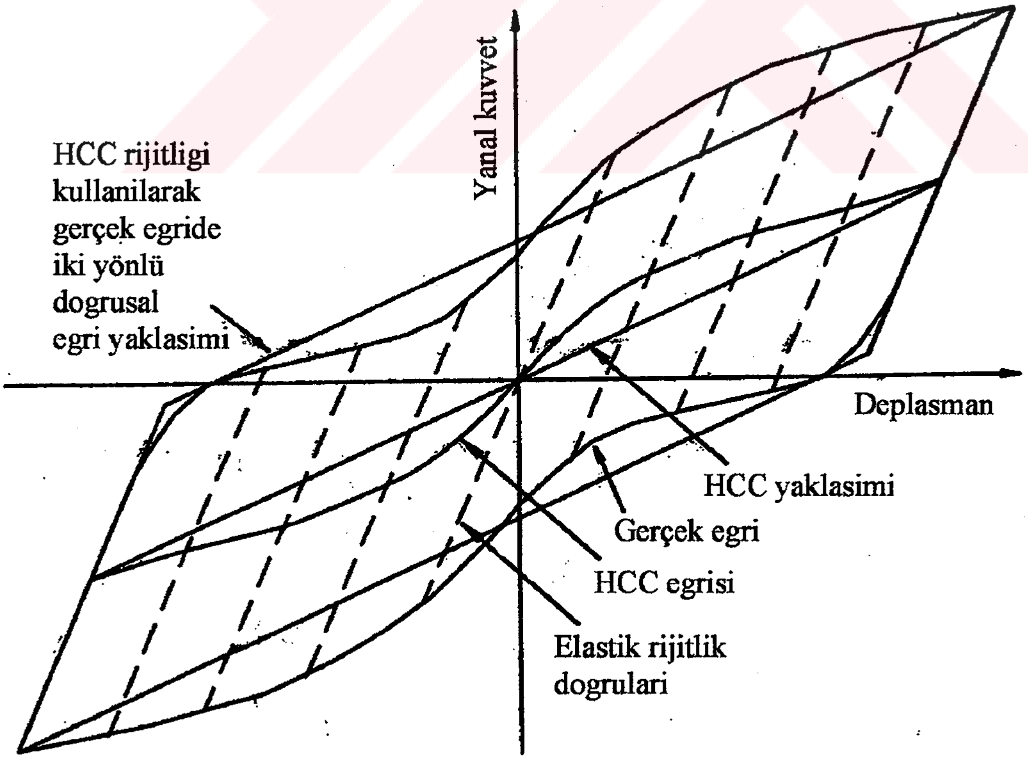
Bazen, tetikleme anında çevrimsel eğri şekil değiştirerek, HCC'nin sıfır kuvvet çizgisini geçtiği noktayı ilk deplasmandan uzaklaştırır. Eğrilerin mukabeleleri hala aynı iken, kalıcı deplasman değerleri eğriyi başlangıç noktasından başka bir ötelenmeye zorlarlar. Bu durumda artık, sekant rijitliği yeni orijinden dikkate alınmalıdır.

7.6.3 Genel Şekilli Çevrimsel Eğrilerin Stabilitelerine P – Δ Etkisi

Şekil 7.13'de $P-\Delta$ etkisi sonucu, genel şekilli bir çevrimsel eğrinin, yanal dayanımında oluşan azalma gösterilmiştir. (7.2.b) denklemi uyarınca, dayanımdaki bu azalmanın büyüklüğü $P\Delta/L$ değerine eşittir. HCC, çevrimsel merkezi eğri üzerindeki keyfi bir Δ_1 deplasmanında, $r_{S0}K_0$, $P-\Delta$ etkilerini göz önüne almayan sekant rijitliğidir. $P-\Delta$'nın bir sonucu olarak, sekant rijitliği, eğri üzerindeki tüm noktaların stabilitelerini de bozaraktan, $r_{Sp}K_p$ değerine düşer. Aynı zamanda $P-\Delta$ etkisi, HCC'nin sıfır kuvvet çizgisini geçtiği noktaları orijine doğru öteleyerek, stabilite aralığını azaltır.



Şekil 7.13 Çevrimsel eğrilerde P-Δ etkileri (MacRae, 1994).



Şekil 7.14 Genel şekilli çevrimsel eğrilerin, iki yönlü doğrusal eğriler olarak modellenmesi (MacRae, 1994).

HCC üzerindeki herhangi bir noktanın r_s, sekant rijitlik oranı ve r_0, rijitlik oranı, iki yönlü doğrusal eğriler için de aynıdır. Şekil 7.14'de gösterildiği gibi, doğrusal olmayan eğrilerin; yutulan enerji ve akma dayanımları birbirine eşit olduğunda, HCC'nin maksimum deplasmanında $r_0 = r_s$ alınarak iki yönlü eğriler gibi modellenebilirler. Bu yüzden $P-\Delta$ etkileri, genel şekilli eğrilerde, iki yönlü doğrusal eğrilerde olduğu gibi göz önüne alınabilir (MacRae, 1994).

8. ÖRNEK ÇERÇEVELERİN BİRİNCİ MERTEBE VE P-Δ ETKİLERİ İÇİN SAP 2000 PROGRAMI İLE ZAMAN TANIM ALANI ANALİZLERİ

8.1 Zaman Tanım Alanı Analizi

Bir zaman ekseni üzerine çizilmiş bulunan kayda **zaman geçmişi (time history)** adı verilir. Deprem yükü zamana bağlı taban ivmesi şeklinde üretilir. Zaman tanım alanı dönüştürülerek, davranış spektrumu üretilir. Zaman tanım alanı belirli zaman dilimlerinde, belirli bir yönde depreme ait ivmelerin kaydıdır. Kayıtlar genellikle **g**, yerçekimi ivmesi ile bölünerek normalize edilir. Normalize edilmiş kayıt, yerçekimi ivmesi veya uygun bir katsayı ile çarpılarak, kaydın gerçek değerleri elde edilebilir. Mukabele spektrumunu normalize etmek için, **g**, yerçekim ivmesi **ölçek çarpanı** olarak alınır (Mertol, 2002).

Bu yöntemde, TDY'de belirtilen ana kuralların ötesine geçilerek deprem mühendisliği bilgileri ile gerçek veya üretilmiş bir deprem kaydı kullanılır. Geçmiş depremlerin ivme kayıtlarının bu konuda önemli yeri vardır. Boyutlandırma sırasında gerçek deprem kaydının esas alınması; deprem büyüklüğü, merkez üssü, odak uzaklığı, kaynak mekanizması ve zemin koşullarının gerçek durumla en iyi bir şekilde uyuşması bakımından tercih edilir. Böylece pek çok belirsizlik önlenmiş olur (Celep ve Kumbasar, 2000).

Zaman tanım alanında hesap, mukabele spektrum analizine göre daha uzun zaman ister. Mukabele spektrumu ve zaman tanım alanı analizleri birbirlerine yakın sonuçlar verirler.

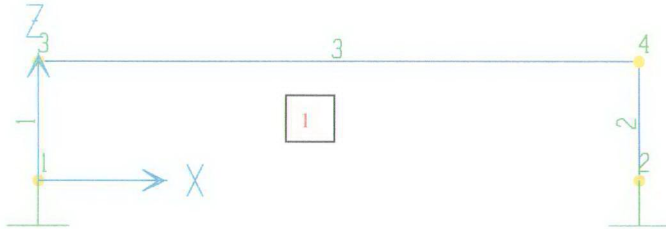
8.2 Zaman Tanım Alanı Analizine Tâbi Tutulan Betonarme Çerçevelerde P-Δ Etkilerinin Araştırılması

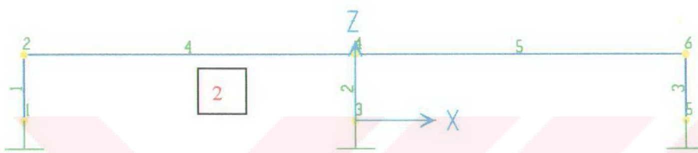
Şekil 8.1'de verilen 5 çerçevede $P-\Delta$ etkileri, Sap 2000 programı kullanılarak icelenmiştir. Sonuçların tutarlılığı bakımından, çerçevelerin **1999 Kocaeli depremi** etkisinde kaldıkları düşünülmüş ve çerçeveler **zaman tanım alanında analize** tâbi tutulmuşlardır. Analizler her çerçeve için önce $P-\Delta$ etkitilmeden, daha sonra etkitilerek yapılmış ve aralarındaki farklar incelenmiştir.

Tek açıklıklı ve tek katlı olan birinci çerçeve (C1) ise, önceki bölümlerde açıklanan $P-\Delta$ yöntemlerinden biri olan, büyütme çarpanı yöntemi ile elle hesap yapılarak da kontrol edilmiştir.

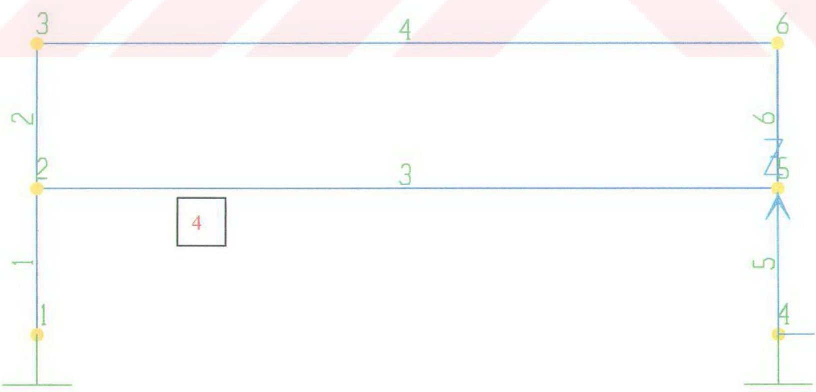
Çerçeveler I. Derece deprem bölgesinde kabul edilmişlerdir.

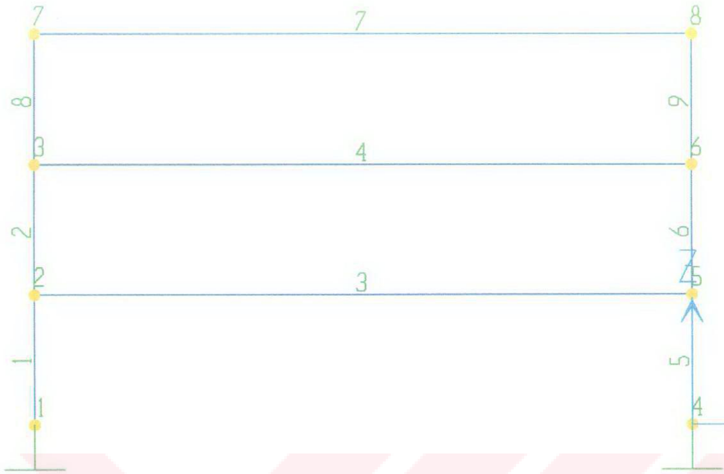
BS 20 ve $E = 28 \cdot 10^6$ kN/m^2 alınmıştır.


Z
X
1


Z
X
2


Z
X
3


Z
4



Şekil 8.1 Seçilen örnek betonarme çerçeveler.

I. Çerçevenin çözümü;

Rijitlik Matrisi (Chopra, 2001);

$$k_{11} = 2\frac{12EI_c}{h^3} = 224000\, kN/m$$

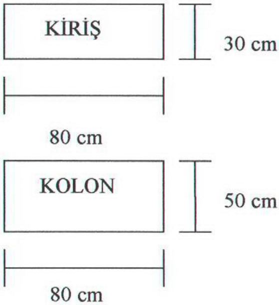
$$k_{12} = k_{21} = \frac{6EI_c}{h^2} = 224000\, kN/m$$

$$k_{13} = k_{31} = \frac{6EI_c}{h^2} = 224000\, kN/m$$

$$k_{22} = \frac{4EI_c}{h} + \frac{4EI_b}{l} = 669013.333\, kN/m$$

$$k_{23} = k_{32} = \frac{2EI_b}{l} = 35840\, kN/m$$

$$k_{33} = \frac{4EI_c}{h} + \frac{4EI_b}{l} = 669013.333\, kN/m$$ şeklinde hesaplanır.



$$I_b = \frac{0.3 \cdot 0.8^3}{12} = 0.0128 m^4$$

$$I_c = \frac{0.5 \cdot 0.8^3}{12} = 0.0213 m^4$$

Şekil 8.2 Seçilen örnek betonarme çerçevelerin kesitleri.

Sistemin rijitlik matrisi ise;

$$[K] = \begin{bmatrix} 224000 & 224000 & 224000 \\ 224000 & 669013.333 & 35840 \\ 224000 & 35840 & 669013.333 \end{bmatrix}$$ şeklinde bulunur.

Sistemin yanal rijitliği ise (Chopra, 2001);

$$\begin{bmatrix} 224000 & 224000 & 224000 \\ 224000 & 669013.333 & 35840 \\ 224000 & 35840 & 669013.333 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_S \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$ sisteminin çözümünden;

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0.3178 \\ 0.3178 \end{bmatrix} u_1$$ (Chopra, 2001) ve

$f_s = 81627.11863 u_1 \quad [kN/m][m]$ olarak bulunur.

Bu yöntem; Statik daraltma yöntemi olarak bilinmektedir (Chopra, 2001). Buna göre, çerçevenin u_2 ve u_3 bilinmeyenleri, u_1 cinsinden yazılarak; dış kuvvetle u_1 arasında bir bağıntı yazılır ve $u_1=1$ için, çerçevenin rijitliği bulunmuş olur.

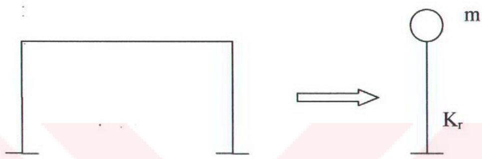
$(K_0)_{el} = 81627.11863\ kN/m$

C1 çerçevesi, SAP 2000 programı ile çözüldüğünde, çerçevenin yanal rijitliği;

$(K_0)_{comp} = 78247.26135\ kN/m$ olarak bulunmuştur.

Bilgisayar ve elle yapılan çözümlerden bulunan rijitliklerinin tamamen aynı olmamasının nedeni kullanılan yöntemlerin farklılığındandır. Hesapların bundan sonraki kısmında, rijitlik değeri olarak bilgisayardan bulunan değer kullanılacaktır.

C1 çerçevesi, idealize edilerek, tek serbestlik dereceli bir sisteme dönüştürülür. Tek serbestlik dereceli sistemin rijitliği ise, tabanında varsayılan yay tarafından karşılanır. Bu yayın rijitliği ise; $K_r = K_0 \cdot H^2$ dir (Bernal, 1987). Bu ifaden de görülebileceği gibi, tek serbestlik dereceli sistemin tabanında olduğunu kabul ettğimiz yayın rijitliği, P-Δ etkilerinden bağımsız olmaktadır.



Şekil 8.3 İdealleştirme.

$$K_r = K_0 \cdot H^2 = 78247.26135 \cdot (4)^2$$

$K_r = 1251956.182\ Kn \cdot m / rad$ olarak bulunur.

Büyütme Çarpanı Yöntemine (Goldberg, 1973) göre;

$$P_{0cr} = \frac{7.83}{H^2} EI_0 (1 - 0.3\beta) = \frac{7.83}{H^2} K_r = 612676.0566\, kN$$

Çerçeveye, Sap 2000 programı ile Kocaeli depremi ivme kaydı tatbik edilmiş ve yanal kuvvet, deprem analizinden bulunan kuvvet olarak alınmıştır.

$$P = 136.9\, kN$$

$$F = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} = \frac{1}{1 - \frac{136.9}{612676.0566}} = 1.000223$$

Çerçevenin Sap 2000 programı ile I. Mertebe analizinden bulunan deplasman değeri, F, büyütme çarpanı ile çarpılarak, çerçeveye etkiyen II. Mertebe etkiler bulunur.

$(u)_{comp}^{I\,Mertebe} = 0.5352\,mm$ ve $(T)_{comp}^{I\,Mertebe} = 0.0881\,s$ olarak

$(u)_{el}^{II\,Mertebe} = 1.000223 \cdot 0.5352 = 0.5353\,mm$ bulunur.

C1 çerçevesi, Sap 2000 programı ile, P-Δ analizine tâbi tutulursa;

$(u)_{comp}^{II\,Mertebe} = 0.5356\,mm$ ve $(T)_{comp}^{II\,Mertebe} = 0.0881\,s$ olarak bulunur.

Analiz sonuçlarının incelenmesinden de görülebileceği gibi, P-Δ etkileri, sistemin deplasmanını artırmaktadır.

C2, C3, C4 ve C5 çerçeveleri de, Kocaeli depremi için, SAP 2000 programı ile I. Mertebe ve II. Mertebe analizlere tâbi tutulmuşlar ve bulunan sonuçlar, Çizelge 8.1'de gösterilmiştir.

Çizelge 8.1 Çerçeve analizlerinin sonuçları.

		I. Mertebe Analiz	**P-Δ Analizi**
		Deplasman (mm)	**Deplasman (mm)**
Çerçeve No	**Düğüm No**	**Zaman tanım alanı analizi sonuçları**	**Zaman tanım alanı analizi sonuçları**
2	6	0.622	0.6225
3	8	0.5988	0.5992
4	6	5.362	5.377
5	8	21.23	21.33

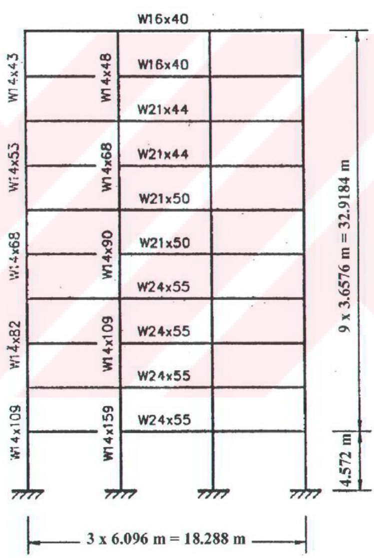
8.3 Zaman Tanım Alanı Analizine Tâbi Tutulan Çelik Çerçevede P-Δ Etkilerinin Araştırılması

Daha önceki bölümlerde de belirtildiği gibi, yapısal analizlerde, ikinci mertebe etkileri ya da stabilite problemleri ihmal edilerek yapı I. Mertebe analize tâbi tutulur. Ancak; yüksek katlı ve hafif yapılarda dikkate alınması gereken II. Mertebe etkiler ortaya çıkmaktadır.

Çelik elemanların, betonarme elemanlara göre **daha narin olmalarından dolayı, II. Mertebe etkileri daha çok, yüksek katlı çelik yapılarda gözlenmektedir**. Pratikte, bu tip yapılarda, **çapraz kuşak elemanlarının** kullanılmasının en önemli nedenlerinden biri de, çapraz elemanlarının, yapıda oluşacak P-Δ etkilerini azaltmalarıdır. Çelik çapraz elemanlar kullanarak, yapının tasarım aşamasında talep edilen deplasmanı yapması sağlanır. Bir başka deyişle, yapının yanal ötelenmesi sınırlandırılmış olur (Naeim, 1991).

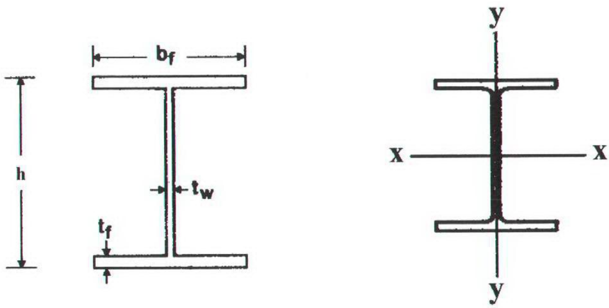
Burada incelenecek olan örnek; **10 katlı ve 3 açıklıklı çelik çerçeve** olup, Naeim'in (1991) "Yanal Stabilite Etkilerine Göre Tasarım" adlı makalesinden alınmıştır.

8.3.1 Zaman Tanım Alanı Analizine Tâbi Tutulacak Çerçeve ve Yüklerin Tâyini



Şekil 8.4 Örnek olarak alınan 10 katlı çelik çerçeve (Naeim, 1991).

Şekil 8.4'de, örnek olarak alınan 10 katlı çelik çerçeve gösterilmiştir. Çerçevede kullanılan kolon ve kiriş kesitleri şekilde gösterilmiş olup; kesit özellikleri Çizelge 8.2'de verilmiştir. Çerçevenin derinliği 9.144 m olarak alınmıştır. Çerçeveye etkiyen düşey yük; çatıda 4.788 kN/m^2, normal katlarda ise 5.7456 kN/m^2 olarak alınmıştır (Naeim, 1991).



Şekil 8.5 Örnekte kullanılan tipik bir çelik profil kesiti (Naeim, 1991).

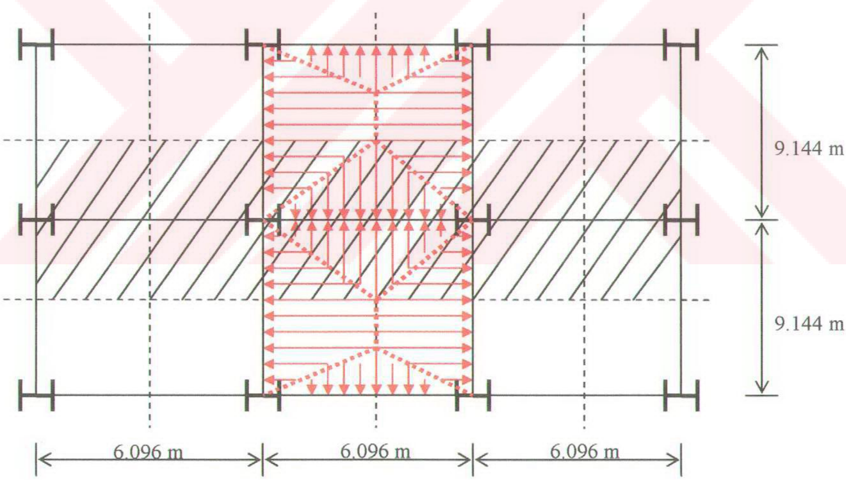
Şekil 8.5'de; b_f, başlık genişliğini; t_f, başlık kalınlığını; t_w, gövde kalınlığını ve h, kesit yüksekliğini göstermektedir.

Çizelge 8.2 Örnek çerçevede belirtilen kesitlerin özellikleri.

						KESİT BİLGİLERİ	
KESİT	**BOYUTLAR**				**ALAN**	**x-x aksı**	**y-y aksı**
	h (mm)	**b_f (mm)**	**t_f (mm)**	**t_w (mm)**	**A (cm^2)**	**I_x (cm^4)**	**I_y (cm^4)**
W14x43	346.964	203.073	13.462	7.747	81.2902	17814.705	1881.3661
W14x48	350.266	203.962	15.113	8.636	90.9676	20187.224	2139.4296
W14x53	353.568	204.724	16.764	9.398	100.645	22518.12	2401.6554
W14x68	356.616	254.889	18.288	10.541	129.032	30093.532	5036.4002
W14x82	363.474	257.302	21.717	12.954	155.4836	36711.61	6160.2251
W14x90	356.108	368.808	18.034	11.176	170.9674	41581.52	15067.578
W14x109	363.728	370.967	21.844	13.335	206.4512	51612.7	18605.545

	h (mm)	b_f (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)	A (cm^2)	I_x (cm^4)	I_y (cm^4)
W14x159	380.492	395.351	30.226	18.293	301.2897	79083.97	31134.111
W16x40	406.654	177.673	12.827	7.747	76.1289	21560.788	1202.9088
W21x44	524.764	165.1	11.43	8.89	83.8708	35088.31	861.5991
W21x50	529.082	165.862	13.589	9.652	94.8385	40957.17	1036.4162
W24x55	598.678	177.927	12.827	10.033	104.5159	56191.24	1211.2335

Çerçevenin analizine geçmeden önce, seçilen akslar için kiriş yüklerinin uniform yayılı yüke dönüştürülmesi gerekir.



Şekil 8.6 Hesapta dikkate alınan aks açıklıkları ve bu aksta etkiyen yükler.

Şekil 8.6'da dikkate alınan aksta, trapez ve üçgen dağılım göstererek etkiyen kiriş yüklerini uniform dağılım şekline dönüştürmek için (8.1), (8.2) ve (8.3) ifadeleri kullanılır (Celep ve Kumbasar, 1996).

$$m = \frac{l_{uzun}}{l_{kisa}} \tag{8.1}$$

$$\frac{q \cdot l_{kisa}}{3} \cdot \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2m^2}\right] \tag{8.2}$$

$$\frac{q \cdot l_{kisa}}{3} \tag{8.3}$$

Yukarıda verilen (8.2) bağıntısı trapez yüklerin, (8.3) bağıntısı ise üçgen yüklerin uniform şekle dönüştürülmesinde kullanılır.

Normal katlarda, trapez yükler (8.4) ve (8.5) ifadeleri ile;

$$m = \frac{l_{uzun}}{l_{kisa}} = \frac{9.144}{6.096} = 1.50 \tag{8.4}$$

$$q_2 = \frac{q \cdot l_{kisa}}{3} \cdot \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2m^2}\right] = \frac{5745.6 \cdot 6.096}{3} \cdot \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 1.5^2}\right] = 14918.1312\ N/m \tag{8.5}$$

üçgen yükler ise (8.6) ifadesi ile bulunur.

$$q_1 = \frac{q \cdot l_{kisa}}{3} = \frac{5745.6 \cdot 6.096}{3} = 11675.0592\ N/m \tag{8.6}$$

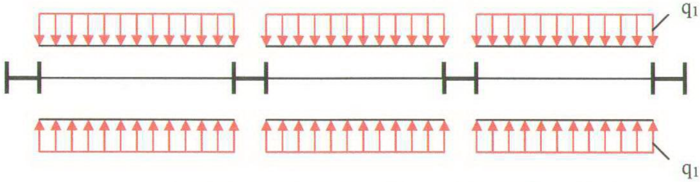
Çatı katında, trapez yükler (8.4) ve (8.7) ifadeleri ile;

$$q_2 = \frac{q \cdot l_{kisa}}{3} \cdot \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2m^2}\right] = \frac{4788 \cdot 6.096}{3} \cdot \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 1.5^2}\right] = 12431.776\ N/m \tag{8.7}$$

üçgen yükler ise (8.8) ifadesi ile bulunur.

$$q_1 = \frac{q \cdot l_{kisa}}{3} = \frac{4788 \cdot 6.096}{3} = 9729.216\ N/m \tag{8.8}$$

Bu durumda ele alınan aks kesitinde, uniform kiriş yükleri Şekil 8.7'de gösterildiği gibi olur.



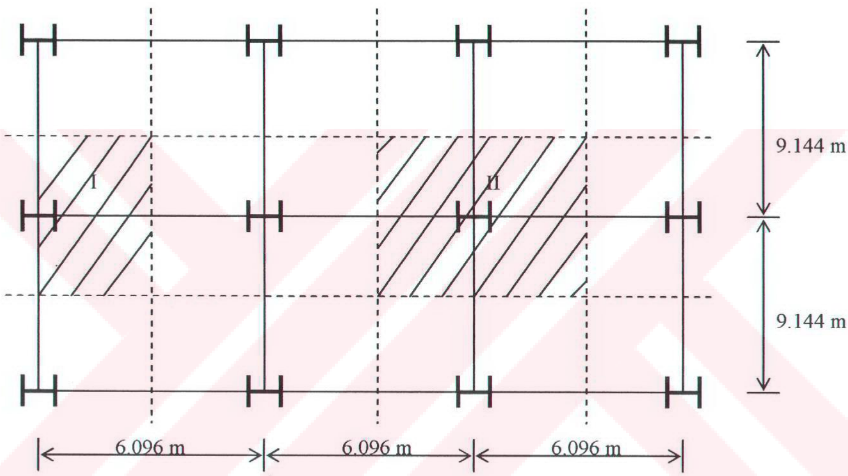
Şekil 8.7 Seçilen aksa etkiyen uniform kiriş yükleri.

Şekil 8.7'de gösterilen uniform kiriş yüklerinin değerleri; normal katlarda (8.9) ifadesi ile, çatı katında ise (8.10) ifadesi ile verilmiştir.

$$q_{1\,normal\,kat} = 2 \cdot 11675.0592 = 23350.1184\ N/m \tag{8.9}$$

$$q_{1\,çatı} = 2 \cdot 9729.216 = 19458.432\ N/m \tag{8.10}$$

Tüm bu hesaplardan sonra, kat kütlelerinin düğüm noktalarına dağıtılması gerekmektedir. Şekil 8.8'de hesap için seçilen aks aralıkları gösterilmiştir. Şekilde; I ile kenar kısımlar, II ile de orta kısımlar belirtilmiştir.



Şekil 8.8 Kütlenin düğüm noktalarına dağıtılması.

Normal katlarda I ve II bölgelerinde kat kütleleri (8.11) ve (8.12) bağıntılarıyla verilmiştir.

$$m_1 = \frac{6.096}{2} \cdot 9.144 \cdot \frac{5745.6}{9.81} = 16323.66\ N\,s^2/m \tag{8.11}$$

$$m_2 = 6.096 \cdot 9.144 \cdot \frac{5745.6}{9.81} = 32647.32151\ N\,s^2/m \tag{8.12}$$

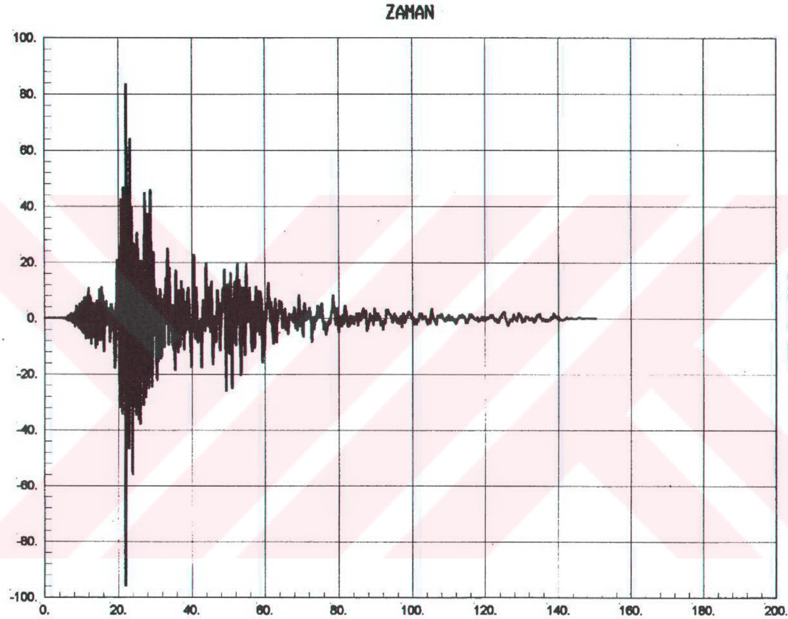
Çatı katında I ve II bölgelerinde kat kütleleri (8.13) ve (8.14) ifadelerinde gösterilmiştir.

$$m_1 = \frac{6.096}{2} \cdot 9.144 \cdot \frac{4788}{9.81} = 13603.05063\ N\,s^2/m \tag{8.13}$$

$$m_2 = 6.096 \cdot 9.144 \cdot \frac{4788}{9.81} = 2773.302881\, N\, s^2 / m \tag{8.14}$$

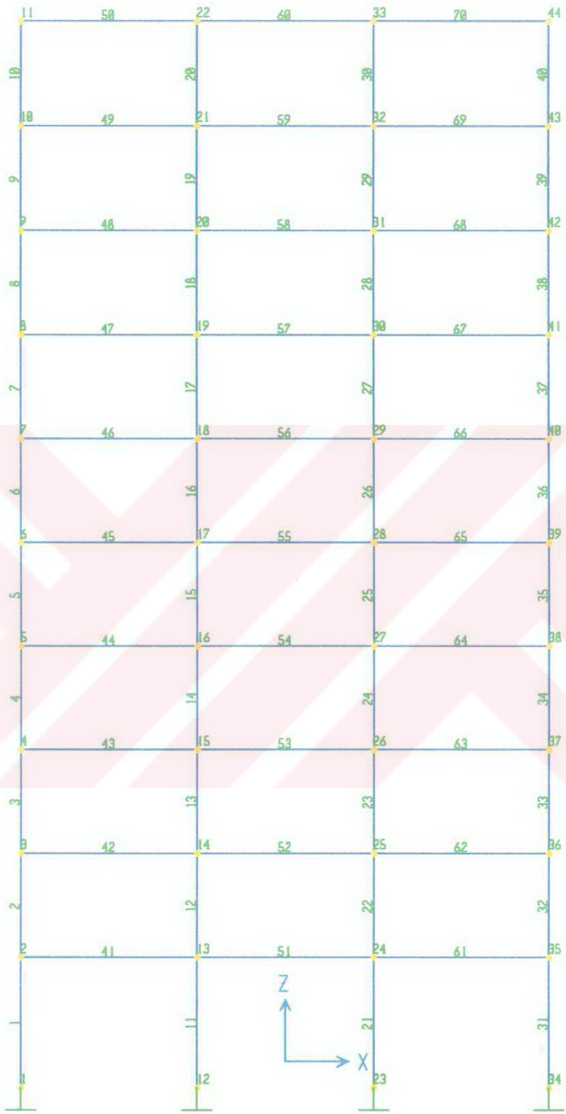
8.3.2 P-Δ Etkileri Dikkate Alınmadan Zaman Tanım Alanı Analizi

Tüm bu hesaplamalardan sonra yapı zaman tanım alanında analize tâbi tutulmuştur. Zaman geçmişi fonksiyonu olarak, Şekil 8.9'da gösterilen, **1999 Kocaeli depremi ivme geçmişi** kullanılmıştır.



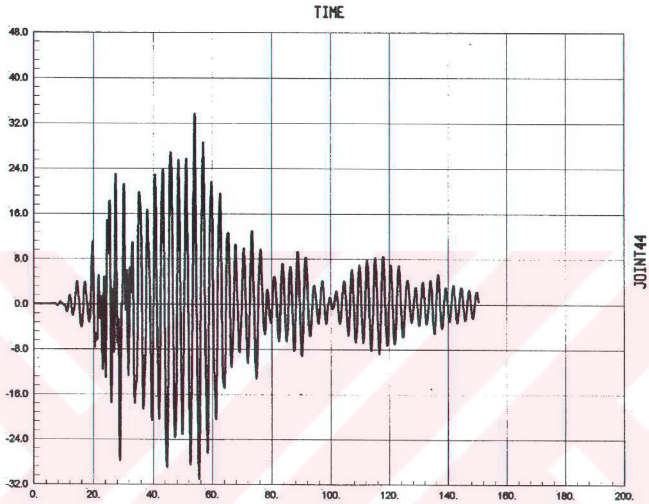
Şekil 8.9 1999 Kocaeli depremi yer ivmesi kaydı (mm/s^2).

Kocaeli depremi ivme kaydının metin şeklindeki verilerine, California Üniversitesi, Berkeley'in internet veri tabanından ulaşılmıştır. Kaydın metni çok hassas olup, 0.005 s'lik zaman aralıkları ile 150.4 s'ye sürmektedir. Kayıt normalize edilmiş halde verildiği için, değerler analiz sırasında yerçekimi ivmesi ile çarpılmıştır. Çelik bir çerçevenin analizi yapıldığından sönüm oranı 0.02 olarak alınmış ve çerçeve doğrusal olan zaman tanım alanı analizine tâbi tutulmuştur. İlk önce analizde, çerçevenin kendi ağırlığı da göz önüne alınarak, hareketli yük ve sabit yüke, Kocaeli depremi etkitilmiş ve P-Δ etkileri dikkate alınmamıştır.



Şekil 8.10 Analiz edilen çerçevenin eleman ve düğüm noktası numaraları.

Zaman tanım alanı analizi sonucunda; her düğüm noktasının zamana bağlı olarak yaptığı deplasmanlar görülebilmekte ve buradan da düğüm noktasının ekstrem değerleri bulunabilmektedir. Burada en fazla deplasmanın, çerçevenin en üst katında olacağı düşüncesinden yola çıkarak; 44 ve 43 numaralı düğüm noktalarının deplasmanları incelenmiştir.

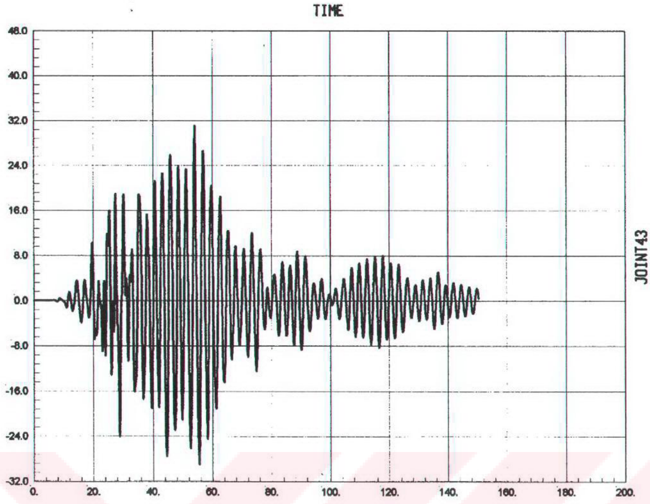


Şekil 8.11 44 numaralı düğüm noktasının zaman tanım alanı analizi sonucu yaptığı zamana bağlı deplasman kaydı (cm).

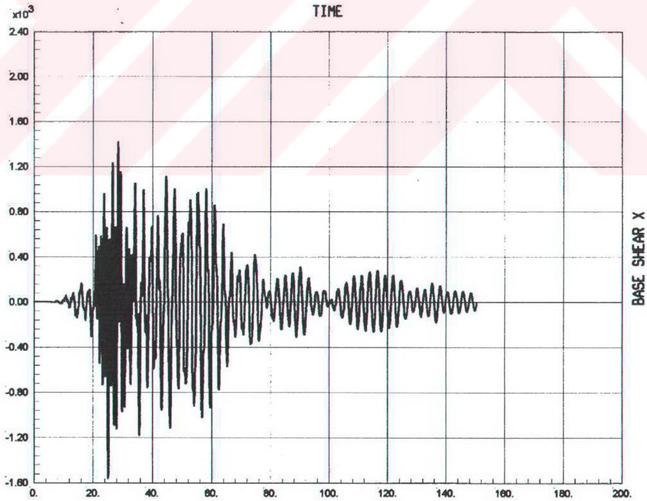
Şekil 8.11'de 44 numaralı düğüm noktasının zaman tanım alanı analizi sonucu bulunan zamana bağlı deplasman kaydı gösterilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi, 44 numaralı düğüm noktası, 54.065 s'de ekstrem değerine ulaşarak, maksimum 33.70 cm değerini almaktadır.

Şekil 8.12'de 43 numaralı düğüm noktasının zaman tanım alanı analizi sonucu bulunan zamana bağlı deplasman kaydı gösterilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi, 43 numaralı düğüm noktası, 54.055 s'de ekstrem değerine ulaşarak, maksimum 31.07 cm değerini almaktadır.

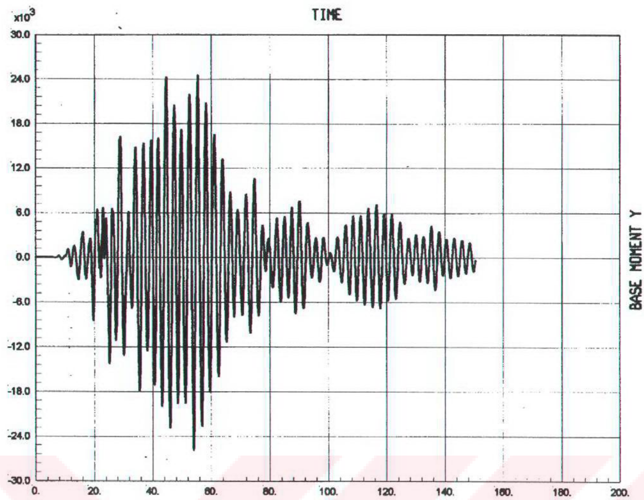
Şekil 8.13'de tabanda oluşan keme kuvvetinin zaman geçmişi verilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi, maksimum kesme kuvveti 25.14 s'de oluşmakta ve 1560 kN olmaktadır.



Şekil 8.12 43 numaralı düğüm noktasının zaman tanım alanı analizi sonucu yaptığı zamana bağlı deplasman kaydı (cm).



Şekil 8.13 Zamana bağlı taban kesme kuvvetinin değişimi (kN).



Şekil 8.14 Zamana bağlı taban momentinin değişimi (kNm).

Şekil 8.14'de ise, tabanda oluşan momentin zaman geçmişi verilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi, maksimum moment 54.06 s'de oluşmakta ve ters yönde 25900 kNm olmaktadır.

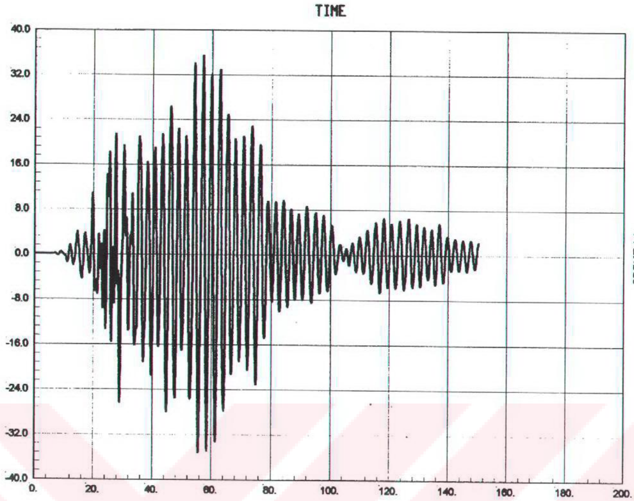
P-Δ etkileri dikkate alınmadan yapılan zaman tanım alanı sonuçları, seçilen zaman geçmişi fonksiyonları için Çizelge 8.3'de özet şeklinde verilmiştir.

Çizelge 8.3 Seçilen zaman geçmişi fonksiyonlarının özeti.

Maksimum Deplasman (cm)	33.70 cm
Taban Kesme Kuvveti (kN)	1560 kN
Taban Momenti (kNm)	25900 kNm

8.3.3 P-Δ Etkileri Dikkate Alınarak Yapılan Zaman Tanım Alanı Analizi

Bundan sonraki bölümde, aynı çerçevede P-Δ etkileri göz önüne alınarak zaman tanım alanı analizi yapılmıştır. Daha öncede belirtildiği gibi, maksimum deplasman en üst kattaki düğüm noktasında oluşacağından ve P-Δ etkilerinin mukayesesinde kolaylık olması bakımından 44 ve 43 numaralı düğüm noktaları deplasmanları incelenmiştir.



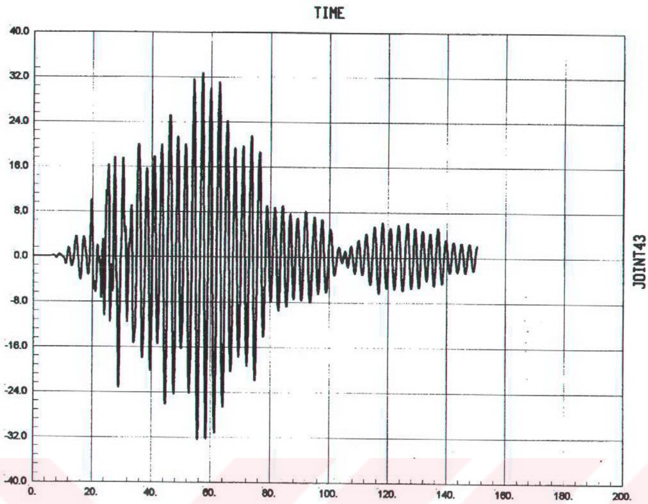
Şekil 8.15 44 numaralı düğüm noktasının P-Δ etkilerini de içeren zaman tanım alanı analizi sonucu yaptığı zamana bağlı deplasman kaydı (cm).

Şekil 8.15'de 44 numaralı düğüm noktasının P-Δ etkilerini de içeren zaman tanım alanı analizi sonucu bulunan zamana bağlı deplasman kaydı gösterilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi, 44 numaralı düğüm noktası, 57.060 s'de ekstrem değerine ulaşarak, maksimum 35.46 cm değerini almaktadır.

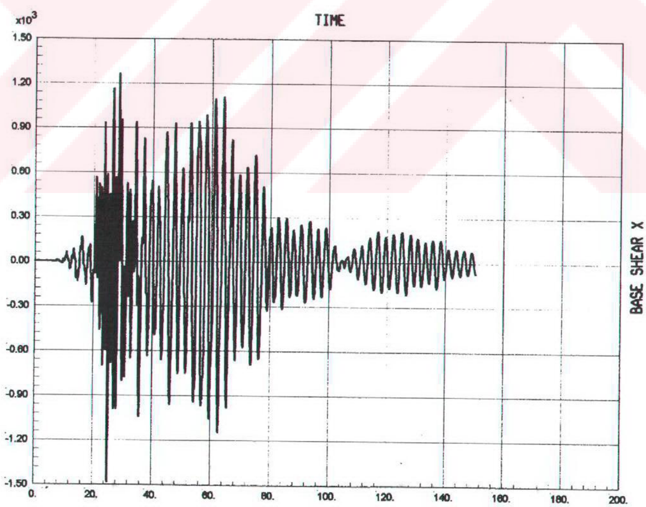
Şekil 8.16'da 43 numaralı düğüm noktasının P-Δ etkilerini de içeren zaman tanım alanı analizi sonucu bulunan zamana bağlı deplasman kaydı gösterilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi, 43 numaralı düğüm noktası, 57.060 s'de ekstrem değerine ulaşarak, maksimum 32.74 cm değerini almaktadır.

Şekil 8.17'de tabanda oluşan keme kuvvetinin P-Δ etkilerini de içeren zaman geçmişi verilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi, maksimum kesme kuvveti 25.160 s'de oluşmakta ve ters yönde 1484 kN olmaktadır.

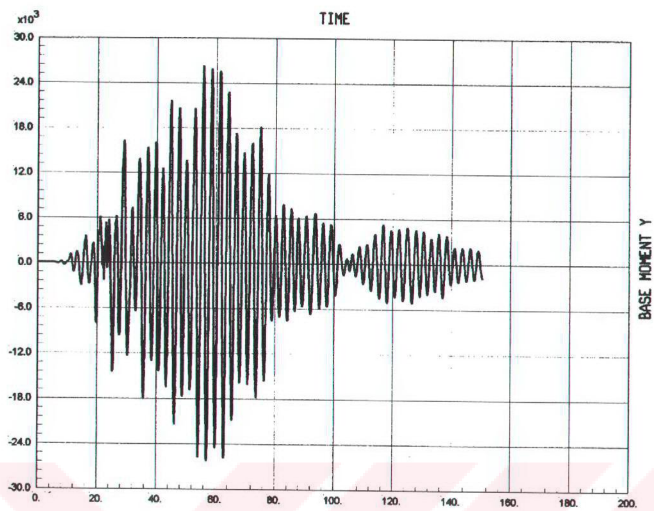
Şekil 8.18'de ise, tabanda oluşan momentin P-Δ etkilerini de içeren zaman geçmişi verilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi, maksimum moment 57.03 s'de oluşmakta ve ters yönde 26250 kNm olmaktadır.



Şekil 8.16 43 numaralı düğüm noktasının P-Δ etkilerini de içeren zaman tanım alanı analizi sonucu yaptığı zamana bağlı deplasman kaydı (cm).



Şekil 8.17 Zamana bağlı P-Δ etkilerini içeren taban kesme kuvvetinin değişimi (kN).



Şekil 8.18 Zamana bağlı P-Δ etkilerini içeren taban momentinin değişimi (kNm).

P-Δ etkileri dikkate alınarak yapılan zaman tanım alanı analizlerinin incelenmesinden, P-Δ etkilerinin tabanda oluşan momenti ve maksimum deplasmanı artırdığı görülebilir. P-Δ etkileri dikkate alınmadan ve dikkate alınarak yapılan zaman tanım alanı sonuçları, seçilen zaman geçmişi fonksiyonları için Çizelge 8.4'de özet şeklinde verilmiştir.

Çizelge 8.4 Seçilen zaman geçmişi fonksiyonlarının mukayesesi.

	P-Δ Etkileri dikkate alınmadan	**P-Δ Etkileri dikkate alınarak**
Maksimum Deplasman (cm)	33.70 cm	35.46 cm
Taban Kesme Kuvveti (kN)	1560 kN	1484 kN
Taban Momenti (kNm)	25900 kNm	26250 kNm

8.4 Seçilen Örnek Çerçevenin Modal Analizi

Modal analizle, zaman tanım alanı analizinin mukayese edilebilmesi için, modal analizde kullanılacak mukabele spektrumu, zaman tanım alanı analizi yapılan çerçevenin tabanında seçilen bir noktanın mukabele spektrumu olarak alınır. Mukabele spektrumunun apsisi periyot ekseni, ordinatı ise maksimum spektral ivme değerleri olarak alınmıştır.

Mukabele spektrumunu elde etmek için kullanılan zaman geçmişi "**g**" yerçekim ivmesi ile çarpıldığından, normalize edilmiş değerleri bulabilmek için, **ölçek çarpanı olarak "1/g"** alınmıştır. Çerçeve çelik olduğundan dolayı, sönüm oranı 0.02 olarak alınmıştır.

Çizelge 8.5'de P-Δ dikkate alınarak ve dikkate alınmadan yapılan zaman tanım alanı analiz sonuçları ile, P-Δ dikkate alınarak ve dikkate alınmadan yapılan modal analiz sonuçları karşılaştırılmıştır.

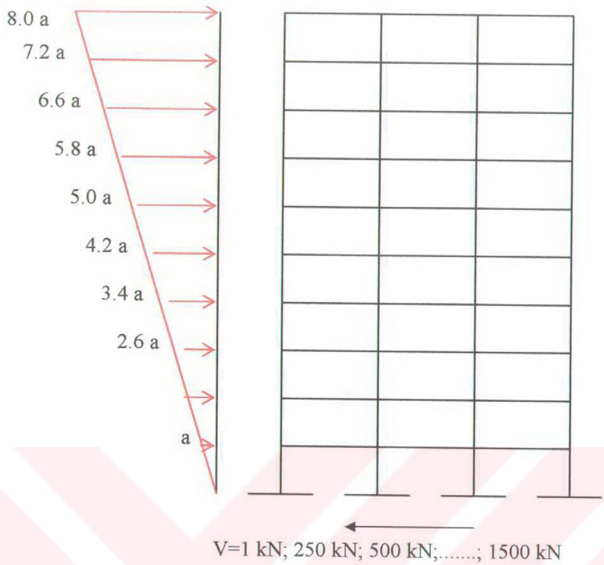
Çizelge 8.5 Zaman tanım alanı ve modal analizin seçilen fonksiyonlar için mukayesesi.

	Zaman Tanım Alanı Analizi		**Modal Analiz**	
	P-Δ Etkileri dikkate alınmadan	**P-Δ Etkileri dikkate alınarak**	**P-Δ Etkileri dikkate alınmadan**	**P-Δ Etkileri dikkate alınarak**
Maksimum Deplasman (cm)	33.70	35.46	33.43	33.88
Taban Kesme Kuvveti (kN)	1560	1484	1500.69	1424.408
Taban Momenti (kNm)	25900	26250	26426.78	27105.721

Çizelge 8.5'in incelenmesinden de görüleceği gibi, zaman tanım alanı analizi ile modal analiz, deplasmanlar açısından yaklaşık sonuçlar vermektedir. Ancak, analiz süresi bakımından modal analizin daha kısa sürdüğünü söylemek mümkündür. Zaman tanım alanı analizlerinde, zaman geçmişi fonksiyonları küçük zaman artımları ile analiz edildiklerinden, zaman tanım alanı analizleri daha gerçekçi ve güvenilir sonuçlar vermektedir.

8.5 Yanal Kuvvet Değişiminin P-Δ Etkilerine Tesirinin İncelenmesi

Bu bölümde, çerçeveye çeşitli taban kesme kuvvetleri etkitilerek, katlara gelen kuvvetler belirlenmiş ve bu kuvvetler altında, çerçeve P-Δ etkileri dikkate alınmadan ve dikkate alınarak analiz edilmiş ve sonuçlar mukayese edilmiştir. Çerçeveye etkitilen taban kesme kuvvetinin başlangıç değeri 1 kN olarak alınmış ve 250 kN artımla, zaman tanım alanı analizinden bulunan 1560 kN değerine ulaşılmıştır. Bu taban kesme kuvvetleri altında, kenar kolonlarda oluşacak momentler ve moment büyütme katsayıları hesaplanmıştır.



Şekil 8.19 Değişik taban kesme kuvvetleri altında katlarda oluşacak kat kesme kuvveti dağılımı.

Ele alınan çerçeveye değişik taban kesme kuvvetlerinin etkitilmesi sonucu, katlara gelecek kesme kuvveti dağılımı Şekil 8.19'da gösterildiği gibidir. Kat yükseklikleri belli olduğundan, alt kattaki kat kesme kuvveti bilinmeyen olarak seçilirse, üçgenlerin benzerliğinden, diğer katlardaki kat kesme kuvvetleri de bilinmeyen cinsinden ifade edilebilir. Tüm bu kat kesme kuvvetlerinin toplamının çerçevenin tabanına etkitilen kesme kuvvetine eşit olması gerektiğinden, bilinmeyen kolayca bulunabilir. Buna bağlı olarak da, katlara gelen kesme kuvveti değerleri de belirlenmiş olur. Kat kesme kuvvetleri belli olan çerçeve daha sonra analize tâbi tutularak, katların deplasmanları belirlenebilir.

V=1 kN ise;

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 45.6\,a = 1\,kN \tag{8.15}$$

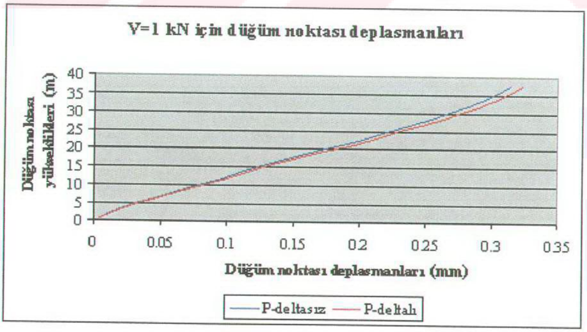
$$a = 0.02193 \text{ olur} \tag{8.16}$$

Kat kesme kuvvetleri belli olduktan sonra, artık analize geçilebilir. V=1 kN için, P-Δ etkileri dikkate alınmadan ve P-Δ etkileri dikkate alındıktan sonra katların yaptığı deplasmanlar Çizelge 8.6'da verilmiştir.

Çizelge 8.6 V=1 kN için P-Δ etkisi dikkate alınmış ve alınmamış durumlardaki deplasmanlar.

Düğüm no	Düğüm no'su yüksekliği (m)	P- Δ dikkate alınmadığında düğüm noktalarındaki deplasmanlar (mm)	P- Δ dikkate alındığında düğüm noktalarındaki deplasmanlar (mm)
11	37.4904	0.31312	0.32271
10	33.8328	0.29505	0.30435
9	30.1752	0.26792	0.27668
8	26.5176	0.23789	0.24593
7	22.86	0.20246	0.20948
6	19.2024	0.16691	0.17282
5	15.5448	0.13043	0.13510
4	11.8872	0.09679	0.10031
3	8.2296	0.06190	0.06412
2	4.572	0.03090	0.03198
1	0	0	0

Şekil 8.20'de, Çizelge 8.6'nın grafiği gösterilmiştir.



Şekil 8.20 V=1 kN için P-Δ'lı ve P-Δ'sız düğüm noktası deplasmanları.

V=250 kN ise;

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 45.6\, a = 250\, kN \qquad (8.17)$$

$$a = 5.482 \text{ olur} \qquad (8.18)$$

Kat kesme kuvvetleri belli olduktan sonra, artık analize geçilebilir. V=250 kN için, P-Δ etkileri dikkate alınmadan ve P-Δ etkileri dikkate alındıktan sonra katların yaptığı deplasmanlar Çizelge 8.7'de verilmiştir.

Çizelge 8.7 V=250 kN için P-Δ etkisi dikkate alınmış ve alınmamış durumlardaki deplasmanlar.

Düğüm no	Düğüm no'su yüksekliği (m)	P- Δ dikkate alınmadığında düğüm noktalarındaki deplasmanlar (mm)	P- Δ dikkate alındığında düğüm noktalarındaki deplasmanlar (mm)
11	37.4904	78.28074	80.67767
10	33.8328	73.76295	76.08854
9	30.1752	66.98095	69.17022
8	26.5176	59.47320	61.48173
7	22.86	50.61555	52.36957
6	19.2024	41.72785	43.20386
5	15.5448	32.60721	33.77574
4	11.8872	24.19873	25.07685
3	8.2296	15.47585	16.02961
2	4.572	7.72554	7.99540
1	0	0	0

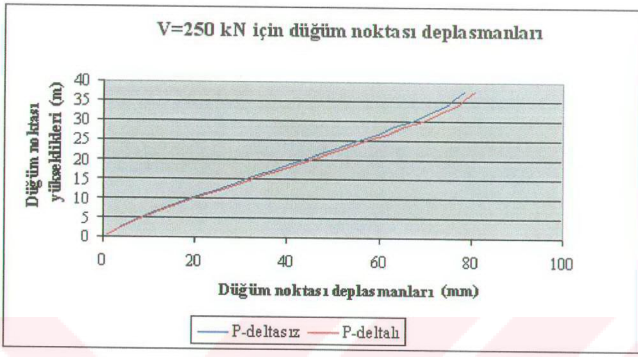
Şekil 8.21'de, Çizelge 8.7'nin grafiği gösterilmiştir.

V=500 kN ise;

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 45.6\, a = 500\, kN \qquad (8.19)$$

$$a = 10.965 \text{ olur} \qquad (8.20)$$

Kat kesme kuvvetleri belli olduktan sonra, artık analize geçilebilir. V=500 kN için, P-Δ etkileri dikkate alınmadan ve P-Δ etkileri dikkate alındıktan sonra katların yaptığı deplasmanlar Çizelge 8.8'de verilmiştir.

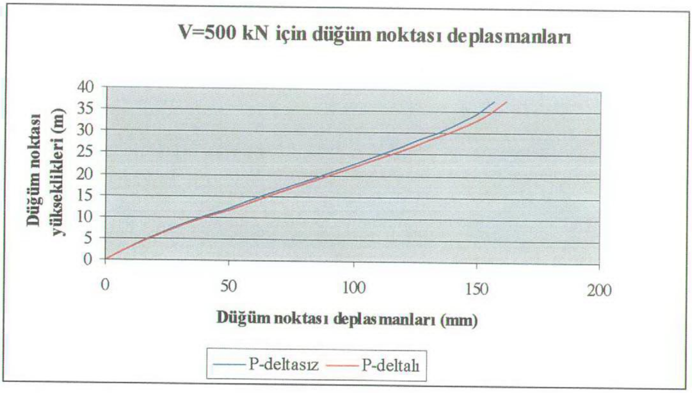


Şekil 8.21 V=250 kN için P-Δ'lı ve P-Δ'sız düğüm noktası deplasmanları.

Çizelge 8.8 V=500 kN için P-Δ etkisi dikkate alınmış ve alınmamış durumdaki deplasmanlar.

Düğüm no	**Düğüm no'su yüksekliği (m)**	**P- Δ dikkate alınmadığında düğüm noktalarındaki deplasmanlar (mm)**	**P- Δ dikkate alındığında düğüm noktalarındaki deplasmanlar (mm)**
11	37.4904	156.56148	161.35535
10	33.8328	147.52590	152.17708
9	30.1752	133.96191	138.34044
8	26.5176	118.94640	122.96345
7	22.86	101.23111	104.73914
6	19.2024	83.4557	86.40772
5	15.5448	65.21442	67.55148
4	11.8872	48.39747	50.15370
3	8.2296	30.95170	32.05921
2	4.572	15.45108	15.99080
1	0	0	0

Şekil 8.22'de, Çizelge 8.8'in grafiği gösterilmiştir.



Şekil 8.22 V=500 kN için P-Δ'lı ve P-Δ'sız düğüm noktası deplasmanları.

V=750 kN ise;

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 45.6\,a = 750\ kN \tag{8.21}$$

$$a = 16.4474 \text{ olur} \tag{8.22}$$

Kat kesme kuvvetleri belli olduktan sonra, artık analize geçilebilir. V=750 kN için, P-Δ etkileri dikkate alınmadan ve P-Δ etkileri dikkate alındıktan sonra katların yaptığı deplasmanlar Çizelge 8.9'da verilmiştir.

Şekil 8.23'de, Çizelge 8.9'un grafiği gösterilmiştir.

V=1000 kN ise;

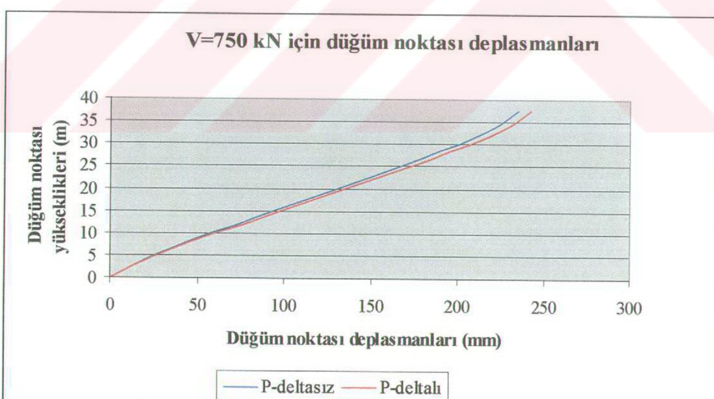
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 45.6\,a = 1000\ kN \tag{8.23}$$

$$a = 21.929 \text{ olur} \tag{8.24}$$

Kat kesme kuvvetleri belli olduktan sonra, artık analize geçilebilir. V=1000 kN için, P-Δ etkileri dikkate alınmadan ve P-Δ etkileri dikkate alındıktan sonra katların yaptığı deplasmanlar Çizelge 8.10'da verilmiştir.

Çizelge 8.9 V=750 kN için P-Δ etkisi dikkate alınmış ve alınmamış durumdaki deplasmanlar.

Düğüm no	**Düğüm no'su yüksekliği (m)**	**P- Δ dikkate alınmadığında düğüm noktalarındaki deplasmanlar (mm)**	**P- Δ dikkate alındığında düğüm noktalarındaki deplasmanlar (mm)**
11	37.4904	234.84222	242.03302
10	33.8328	221.28884	228.26562
9	30.1752	200.94286	207.510666
8	26.5176	178.41960	184.44518
7	22.86	151.84666	157.10871
6	19.2024	125.18356	129.61158
5	15.5448	97.82163	101.32722
4	11.8872	72.59620	75.23054
3	8.2296	46.42755	48.08882
2	4.572	23.17662	23.98620
1	0	0	0

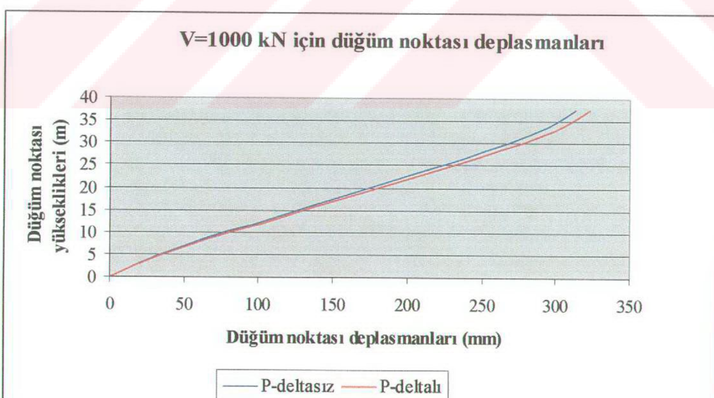


Şekil 8.23 V=750 kN için P-Δ'lı ve P-Δ'sız düğüm noktası deplasmanları.

Şekil 8.24'de, Çizelge 8.10'nun grafiği gösterilmiştir.

Çizelge 8.10 V=1000 kN için P-Δ etkisi dikkate alınmış ve alınmamış durumdaki deplasmanlar.

Düğüm no	Düğüm no'su yüksekliği (m)	P- Δ dikkate alınmadığında düğüm noktalarındaki deplasmanlar (mm)	P- Δ dikkate alındığında düğüm noktalarındaki deplasmanlar (mm)
11	37.4904	313.12296	322.71069
10	33.8328	295.05179	304.35417
9	30.1752	267.92382	276.68088
8	26.5176	237.89281	245.92691
7	22.86	202.46222	209.47828
6	19.2024	166.99141	172.815544
5	15.5448	130.42884	135.10296
4	11.8872	96.79494	100.30739
3	8.2296	61.90340	64.11842
2	4.572	30.90216	31.98160
1	0	0	0



Şekil 8.24 V=1000 kN için P-Δ'lı ve P-Δ'sız düğüm noktası deplasmanları.

V=1250 kN ise;

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 45.6\,a = 1250\ kN \tag{8.25}$$

$$a = 27.412 \text{ olur} \tag{8.26}$$

Kat kesme kuvvetleri belli olduktan sonra, artık analize geçilebilir. V=1250 kN için, P-Δ etkileri dikkate alınmadan ve P-Δ etkileri dikkate alındıktan sonra katların yaptığı deplasmanlar Çizelge 8.11'de verilmiştir.

Çizelge 8.11 V=1250 kN için P-Δ etkisi dikkate alınmış ve alınmamış durumdaki deplasmanlar.

Düğüm no	Düğüm no'su yüksekliği (m)	P- Δ dikkate alınmadığında düğüm noktalarındaki deplasmanlar (mm)	P- Δ dikkate alındığında düğüm noktalarındaki deplasmanlar (mm)
11	37.4904	391.40370	403.38837
10	33.8328	368.81474	380.44271
9	30.1752	334.90477	345.85110
8	26.5176	297.36601	307.40864
7	22.86	253.07777	261.84784
6	19.2024	208.63926	216.01930
5	15.5448	163.03605	168.87890
4	11.8872	120.99367	125.38424
3	8.2296	77.37925	80.14803
2	4.572	38.62770	39.9770
1	0	0	0

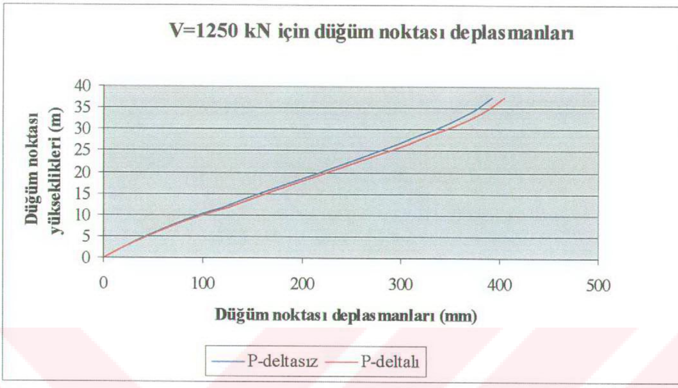
Şekil 8.25'de, Çizelge 8.11'in grafiği gösterilmiştir.

V=1500 kN ise;

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 45.6\,a = 1500\ kN \tag{8.27}$$

$$a = 32.895 \text{ olur} \tag{8.28}$$

Kat kesme kuvvetleri belli olduktan sonra, artık analize geçilebilir. V=1500 kN için, P-Δ etkileri dikkate alınmadan ve P-Δ etkileri dikkate alındıktan sonra katların yaptığı deplasmanlar Çizelge 8.12'de verilmiştir.

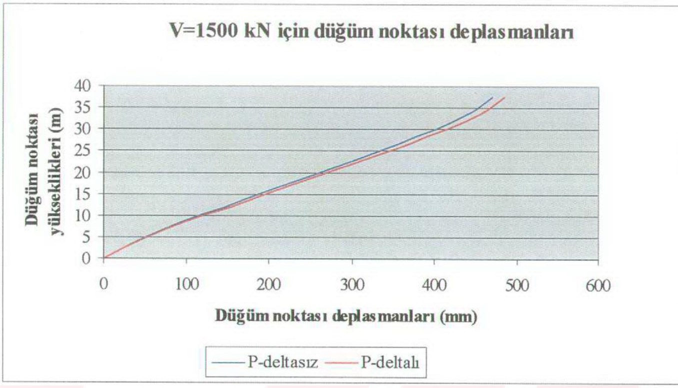


Şekil 8.25 V=1250 kN için P-Δ'lı ve P-Δ'sız düğüm noktası deplasmanları.

Çizelge 8.12 V=1500 kN için P-Δ dikkate alınmış ve alınmamış durumdaki deplasmanlar.

Düğüm no	Düğüm no'su yüksekliği (m)	P- Δ dikkate alınmadığında düğüm noktalarındaki deplasmanlar (mm)	P- Δ dikkate alındığında düğüm noktalarındaki deplasmanlar (mm)
11	37.4904	469.68444	484.06604
10	33.8328	442.57769	456.53125
9	30.1752	401.88573	415.02152
8	26.5176	356.8391	368.89036
7	22.86	303.69332	314.21741
6	19.2024	250.36711	259.22316
5	15.5448	195.64326	202.65444
4	11.8872	145.19241	150.46109
3	8.2296	92.85510	96.17763
2	4.572	46.35324	47.97209
1	0	0	0

Şekil 8.26'da, Çizelge 8.12'nin grafiği gösterilmiştir.



Şekil 8.26 V=1500 kN için P-Δ'lı ve P-Δ'sız düğüm noktası deplasmanları.

8.5.1 Çerçeve Tabanına Etkitilen Taban Kesme Kuvvetlerinden Dolayı Kenar Kolonlarda Oluşan, P-Δ Etkisini İçeren ve P-Δ Etkisini İçermeyen, Momentlerin Belirlenmesi

Bu bölümde, daha önce etkitilen değişken taban kesme kuvvetlerinden dolayı kenar kolonlarda oluşacak P-Δ etkisini içeren ve P-Δ etkisini içermeyen momentler hesaplanarak, moment büyütme katsayıları bulunmuştur.

Moment büyütme katsayıları aşağıda (8.29) ifadesi ile bulunabilir.

$$\beta = \frac{M_{P-\Delta'lı}}{M_{P-\Delta'sız}} \tag{8.29}$$

Şekil 8.10'da verilen eleman numaraları için, değişik taban kesme kuvvetleri için, kenar kolonlarda oluşacak momentler, aşağıda çizelgeler şeklinde verilmiştir. Çizelgelerde, dikkate alınan her kolon elemanının alt ve üst uçlarında oluşan momentler, P-Δ'lı ve P- Δ'sız durumlar için ayrı ayrı belirtilmiştir.

Çizelgelerin incelenmesinden görülebileceği gibi, P-Δ etkileri, elemanların momentlerini artırıcı yönde tesir ederler. Çerçeveye etkiyen taban kesme kuvveti ve hâliyle de katlara gelen kesme kuvvetleri arttıkça, P-Δ etkileri de artmaktadır.

Çizelge 8.13 V=1 kN için P-Δ dikkate alınmış ve alınmamış durumdaki momentler.

		P- Δ dikkate alınmamış momentler (kNm)		P- Δ dikkate alınmamış momentler (kNm)		$\beta = \frac{M_{P-\Delta'h}}{M_{P-\Delta'su}}$	
Kesme Kuv.(kN)	**Eleman No**	**M_{alt}**	**$M_{üst}$ (-)**	**M_{alt}**	**$M_{üst}$ (-)**	**β_{alt}**	**$\beta_{üst}$**
V=1	40	39.84	48.8	39.84	48.79	1	0.9998
	39	31.71	32.32	31.71	32.31	1	0.9996
	38	36.64	38.18	36.64	38.17	1	0.9997
	37	32.16	34.03	32.16	34.02	1	0.9997
	36	36.79	38.62	36.8	38.61	1.00027	0.9997
	35	32.12	33.99	32.13	33.98	1.00031	0.9997
	34	34.87	36.37	34.88	36.96	1.00029	1.0162
	33	29.06	31.71	29.06	31.7	1	0.9996
	32	37.87	36.67	37.9	36.68	1.00079	1.0002
	31	10.72	23.22	10.81	23.17	1.0084	0.9978

Çizelge 8.14 V=250 kN için P-Δ dikkate alınmış ve alınmamış durumdaki momentler.

		P- Δ dikkate alınmamış momentler (kNm)		P- Δ dikkate alınmamış momentler (kNm)		$\beta = \frac{M_{P-\Delta'h}}{M_{P-\Delta'su}}$	
Kesme Kuv.(kN)	**Eleman No**	**M_{alt}**	**$M_{üst}$ (-)**	**M_{alt}**	**$M_{üst}$ (-)**	**β_{alt}**	**$\beta_{üst}$**
V=250	40	47.1	65.59	47.11	65.76	1.0002	1.0026
	39	58.32	61.29	58.76	61.86	1.0075	1.0093
	38	69.54	77.12	70.19	78.04	1.0093	1.0119
	37	79.35	83.63	80.65	85.1	1.0164	1.0176
	36	90.12	95.56	91.69	97.36	1.0174	1.0188
	35	100.1	95.08	102.36	97.23	1.0226	1.0226
	34	102.54	105.32	104.74	107.67	1.0215	1.0223
	33	106.43	107.97	109.33	110.9	1.0272	1.0271
	32	112.56	107.55	115.31	110.12	1.0244	1.0239
	31	152.18	95.16	156.45	97.69	1.0281	1.0266

Çizelge 8.15 V=500 kN için P-Δ dikkate alınmış ve alınmamış durumdaki momentler.

		P- Δ dikkate alınmamış momentler (kNm)		P- Δ dikkate alınmamış momentler (kNm)		$\beta = \frac{M_{P-\Delta'h}}{M_{P-\Delta'sn}}$	
Kesme Kuv.(kN)	**Eleman No**	M_{alt}	$M_{üst}$ (-)	M_{alt}	$M_{üst}$ (-)	β_{alt}	$\beta_{üst}$
V=500	40	54.41	82.45	54.4	82.79	0.9998	1.0041
	39	85.03	89.54	85.92	91.54	1.0105	1.0223
	38	102.57	116.22	103.88	118.06	1.0128	1.0158
	37	126.73	133.44	129.32	136.4	1.0204	1.0222
	36	143.66	152.74	146.81	156.34	1.0219	1.0236
	35	168.34	156.42	172.87	160.73	1.0269	1.0276
	34	170.47	174.55	174.88	179.27	1.0259	1.027
	33	184.11	184.53	189.93	190.42	1.0316	1.0319
	32	187.55	178.72	193.02	183.86	1.0292	1.0288
	31	294.11	167.38	302.67	172.3	1.0291	1.0294

Çizelge 8.16 V=750 kN için P-Δ dikkate alınmış ve alınmamış durumdaki momentler.

		P- Δ dikkate alınmamış momentler (kNm)		P- Δ dikkate alınmamış momentler (kNm)		$\beta = \frac{M_{P-\Delta'h}}{M_{P-\Delta'sn}}$	
Kesme Kuv.(kN)	**Eleman No**	M_{alt}	$M_{üst}$ (-)	M_{alt}	$M_{üst}$ (-)	β_{alt}	$\beta_{üst}$
V=750	40	61.7	99.31	61.69	99.82	0.9998	1.0051
	39	111.75	119.47	113.08	121.821	1.0119	1019.7
	38	135.59	155.32	137.57	158.08	1.0146	1.0178
	37	174.1	183.25	178	187.69	1.0224	1.0242
	36	197.2	209.91	201.93	215.32	1.024	1.0258
	35	236.59	217.76	243.98	224.23	1.0312	1.0297
	34	238.41	243.78	245.02	250.86	1.0277	1.029
	33	261.79	261.09	270.52	269.95	1.0333	1.0339
	32	262.55	249.89	270.76	257.6	1.0313	1.0309
	31	436.23	239.6	448.89	247.03	1.029	1.031

Çizelge 8.17 V=1000 kN için P-Δ dikkate alınmış ve alınmamış durumdaki momentler.

		P- Δ dikkate alınmamış momentler (kNm)		P- Δ dikkate alınmamış momentler (kNm)		$\beta = \frac{M_{P-\Delta'lı}}{M_{P-\Delta'sız}}$	
Kesme Kuv.(kN)	**Eleman No**	**M_{alt}**	**$M_{üst}$ (-)**	**M_{alt}**	**$M_{üst}$ (-)**	**β_{alt}**	**$\beta_{üst}$**
V=1000	40	69	116.17	68.98	116.85	0.9997	1.0059
	39	138.46	148.56	140.25	151	1.0129	1.0156
	38	168.62	194.42	171.25	198.1	1.0156	1.0189
	37	221.48	233.05	226.68	238.99	1.0235	1.0255
	36	250.74	267.08	257.04	274.3	1.0251	1.027
	35	304.83	279.1	313.89	287.73	1.0297	1.0309
	34	306.35	313.1	315.16	322.46	1.0288	1.0299
	33	339.47	337.66	351.11	349.47	1.0343	1.035
	32	337.54	321.06	348.48	331.34	1.0324	1.032
	31	578.26	311.83	595.11	322.15	1.0291	1.0331

Çizelge 8.18 V=1250 kN için P-Δ dikkate alınmış ve alınmamış durumdaki momentler.

		P- Δ dikkate alınmamış momentler (kNm)		P- Δ dikkate alınmamış momentler (kNm)		$\beta = \frac{M_{P-\Delta'lı}}{M_{P-\Delta'sız}}$	
Kesme Kuv.(kN)	**Eleman No**	**M_{alt}**	**$M_{üst}$ (-)**	**M_{alt}**	**$M_{üst}$ (-)**	**β_{alt}**	**$\beta_{üst}$**
V=1250	40	76.3	133.02	76.27	133.89	0.9996	1.0065
	39	165.17	177.65	167.41	181	1.0136	1.0163
	38	201.65	233.52	204.94	238.12	1.0163	1.0197
	37	268.85	282.86	275.35	290.28	1.0242	1.0262
	36	304.28	324.26	312.16	333.29	1.0259	1.0278
	35	373.08	340.44	384.4	351.23	1.0303	1.0317
	34	374.29	382.24	385.31	394.05	1.0294	1.0309
	33	417.15	414.22	431.71	428.99	1.0349	1.0357
	32	412.53	392.23	426.2	405.08	1.0331	1.0328
	31	720.29	384.05	741.34	396.97	1.0292	1.0336

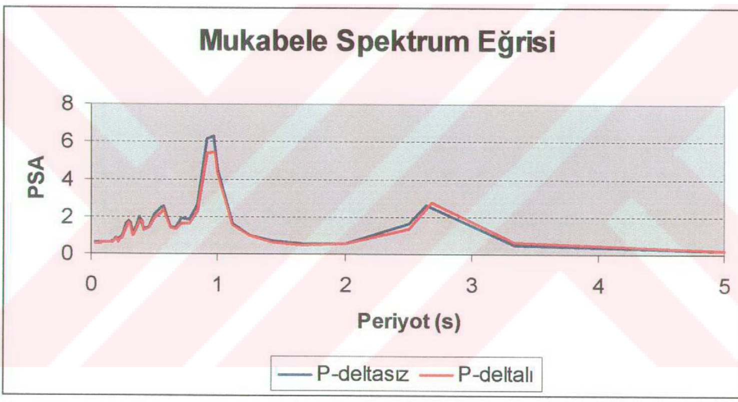
Çizelge 8.19 V=1500 kN için P-Δ dikkate alınmış ve alınmamış durumdaki momentler.

		P- Δ dikkate alınmamış momentler (kNm)		**P- Δ dikkate alınmamış momentler (kNm)**		$\beta = \frac{M_{P-\Delta' h}}{M_{P-\Delta' sn}}$	
Kesme Kuv.(kN)	**Eleman No**	$\mathbf{M_{alt}}$	$\mathbf{M_{üst}}$ **(-)**	$\mathbf{M_{alt}}$	$\mathbf{M_{üst}}$ **(-)**	$\boldsymbol{\beta_{alt}}$	$\boldsymbol{\beta_{üst}}$
V=1500	40	83.6	149.88	83.56	150.92	0.9995	1.0069
	39	191.89	206.74	194.57	210	1.014	1.0169
	38	234.68	272.62	238.62	278.15	1.0168	1.0203
	37	316.23	332.67	324.03	341.57	1.0247	1.0268
	36	357.82	381.43	367.28	392.27	1.0264	1.0284
	35	441.32	401.78	454.91	414.73	1.0308	1.0322
	34	442.23	451.46	455.45	465.65	1.0299	1.0314
	33	494.83	490.79	512.3	508.51	1.0353	1.0361
	32	487.53	463.4	503.92	478.82	1.0336	1.0333
	31	862.31	456.27	887.56	471.79	1.0293	1.034

9. SONUÇLAR

Günümüzde, **yüksek katlı** ve **hafif binalar** yapma eğilimi, yapı mühendislerini tasarım aşamasında $P-\Delta$ etkilerini dikkate almaya zorlamışsa da, bu etkiler tam olarak anlaşılamamıştır. Bu nedenle, bu tezde; $P-\Delta$ etkilerinin yapıların mukabeleleri üzerine etkileri araştırılmıştır. Çelik, betonarmeye nazaran daha narin bir yapı elemanı olduğundan, burada $P-\Delta$ etkileri araştırılırken 10 katlı çelik çerçeve kullanılmıştır.

İlk önce, çerçeveye **99 Kocaeli deprem ivme zaman geçmişi** kullanılarak deprem etkitilmiş ve $P-\Delta$ etkileri dikkate alınarak ve alınmayarak çerçevenin en üst katının her iki durum içinde mukabele spektrumları elde edilmiştir. Şekil 9.1'de, Ek 1 ve Ek 2'de 44 numaralı düğüm noktası için sırasıyla $P-\Delta$ etkileri dikkate alınmayarak ve alınarak çizilmiş mukabele spektrumu grafiklerinden yararlanılarak çizilmiş, mukabele spektrumu görülmektedir.



Şekil 9.1 44 numaralı düğüm noktasının $P-\Delta$ etkileri dikkate alınmış ve alınmamış durumlardaki mukabele spektrum eğrisi.

Şekil 9.1'de gösterilen mukabele spektrumundaki değişimin nedeni, çerçevenin rijitliğindeki değişimdir. $P-\Delta$ **etkilerinden dolayı çerçevenin rijitliğinde azalma meydana gelir**. Bu azalmadan dolayı da çerçevenin periyodu artmakta ve dolayısıyla çerçevenin mukabelesi tamamen değişmektedir.

Zaman tanım alanı analizinden elde edilen depremin 0.02 sönüm için mukabele spektrumu çizilerek, çerçeve bu spektrum kullanılarak modal analize tâbi tutulmuştur. Çizelge 8.5'den görülebileceği gibi, **iki analiz de birbirlerine yakın sonuçlar vermektedir**.

Bu analizler sonucunda, Çizelge 8.6'dan Çizelge 8.12'ye kadar yapılan incelemelerden görülebileceği gibi, $P-\Delta$ **etkileri çerçevenin yanal deplasmanlarını ve kesit tesirlerini de değiştirmektedir. Bu değişimin nedeni ise rijitlikteki azalmadır**.

Yanal kuvvet değişiminin $P-\Delta$'ya etkilerini görebilmek için çerçeve, itme analizine tâbi tutularak, $P-\Delta$ etkileri dikkate alınarak ve alınmayarak çerçevenin yaptığı yanal deplasmanlarındaki farklar incelenmiştir. Çizelge 8.13'den Çizelge 8.19'a kadar yapılan incelemelerden görülebileceği gibi, **yapıya etkiyen yanal kuvvet arttıkça, yapı üzerindeki** $P-\Delta$ **etkileri de artmaktadır**.

Tüm bu elde edilen sonuçlara göre, $P-\Delta$ etkileri **yapının rijitliğini azalttığından** dolayı, tasarım aşamasında **yanal rijitliği artırıcı yönde tedbirler alınmalıdır**. Sisteme çelik çapraz, perde elemanlar veya viskoz sönümleyiciler eklemek bu tedbirlerden bazılarıdır.

KAYNAKLAR

Akbaş, B., (2002), Yapıların Doğrusal Olmayan Analizleri, Ders Notları.

Atımtay, E., (2000), Açıklamalar ve Örneklerle Afet Bölgelerinde Yapılacak Yapılar Hakkında Yönetmelik, Cilt I, Bizim Büro Yayınevi, Ankara.

Bernal, D., (1987), "Amplification Factors For Inelastic Dynamic P-Δ Effects In Earthquake Analysis", Journal Of Earthquake Engineering And Structural Dynamics, 15:635-651.

Celep, Z. ve Kumbasar, N., (1996), Yapı Dinamiği ve Deprem Mühendisliğine Giriş, İkinci Baskı, Beta Dağıtım, İstanbul.

Celep, Z. ve Kumbasar, N., (1998), Betonarme Yapılar, İkinci Baskı, Beta Dağıtım, İstanbul.

Celep, Z. ve Kumbasar, N., (2000), Deprem Mühendisliğine Giriş ve Depreme Dayanıklı Yapı Tasarımı, İkinci Baskı, Beta Dağıtım, İstanbul.

Chopra, A., (2001), Dynamics of Structures, Second Edition, Prentice Hall, New Jersey.

Çakıroğlu, A. ve Çetmeli, E., (1998), Yapı Statiği, Cilt I, Beta Dağıtım, İstanbul.

Çakıroğlu, A. ve Çetmeli, E., (1998), Yapı Statiği, Cilt II, Beta Dağıtım, İstanbul.

Ersoy, U. ve Özcebe, G., (2001), Betonarme, Birinci Baskı, Evrim Yayınevi, Ankara.

Gaiotti, R. ve Smith, S., (1989), "P-Δ Analysis Of Building Structures", Journal Of Structural Engineering, 115(4):755-770.

Gupta, A. ve Krawinkler, H., (2000), "Estimation Of Seismic Drift Demands For Frame Structures", Journal Of Earthquake Engineering And Structural Dynamics, 29:1287-1305.

İnşaat Mühendisleri Odası, (1998), Afet Bölgelerinde Yapılacak Yapılar Hakkında Yönetmelik, İnşaat Mühendisleri Odası, İstanbul.

İpek, M., (1991), Deprem Dalgasının Spektral Analizine Giriş, İMO, İstanbul.

MacRae, G., (1994), "P-Δ Effects On Single Degree Of Freedom Structures In Earthquakes", Journal Of Earthquake Engineering Research Institute, 10(3):539-569.

Mertol, A. ve Mertol, H., (2002), Deprem Mühendisliği, Kozan Ofset, Ankara.

McGuire, W., Gallagher, R. ve Ziemian, R., (2000), Matrix Structural Analysis, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Naeim, F., (1991), "Design For Drift And Lateral Stability", Chapter 6, 171-209, California.

Penelis, G. ve Kappos, A., (1997), Earthquake Resistant Concrete Structures, Chapman & Hall, London.

Polat, Z., (2001), Deprem Mühendisliği, Ders Notları.

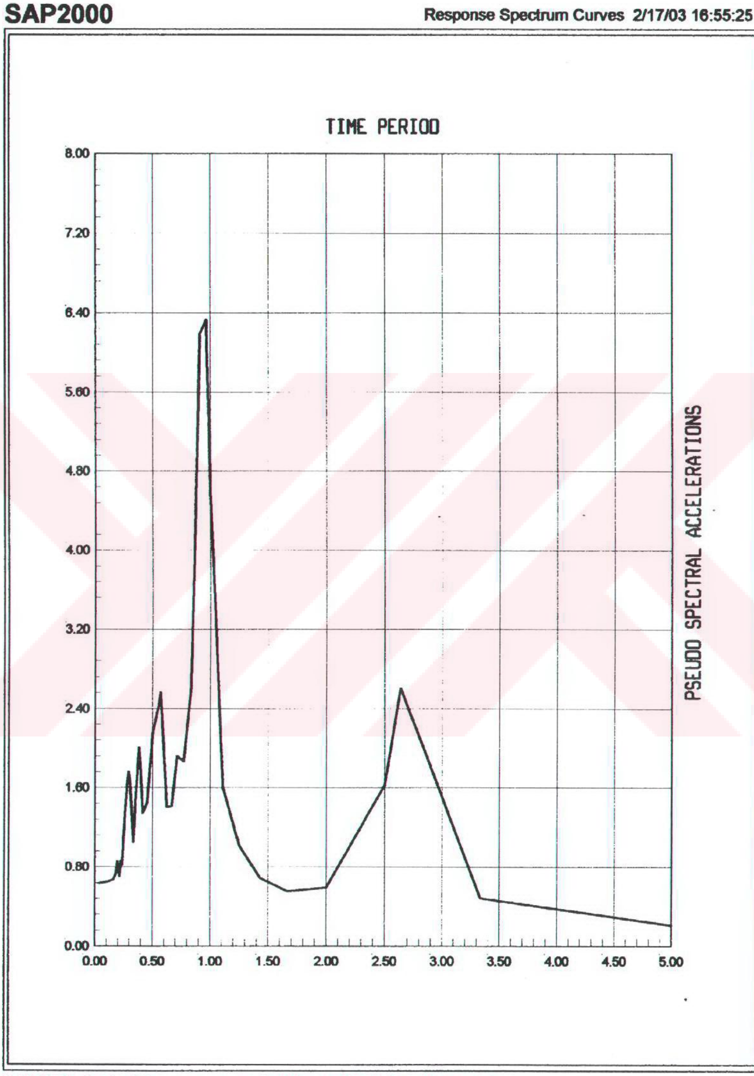
Scholz, H., (1990), "P-Δ Effect Under Repeated Loading", Journal Of Earthquake Structural Engineering, 116(8):2070-2082.

TSE, (2000), TS 500 Betonarme Yapıların Hesap ve Yapım Kuralları, Ankara.

Wood, B., Beaulieu, D. ve Adams, P., (1976), "Column Design By P-Δ Method", Journal Of Structural Division, 102(2):411-427.

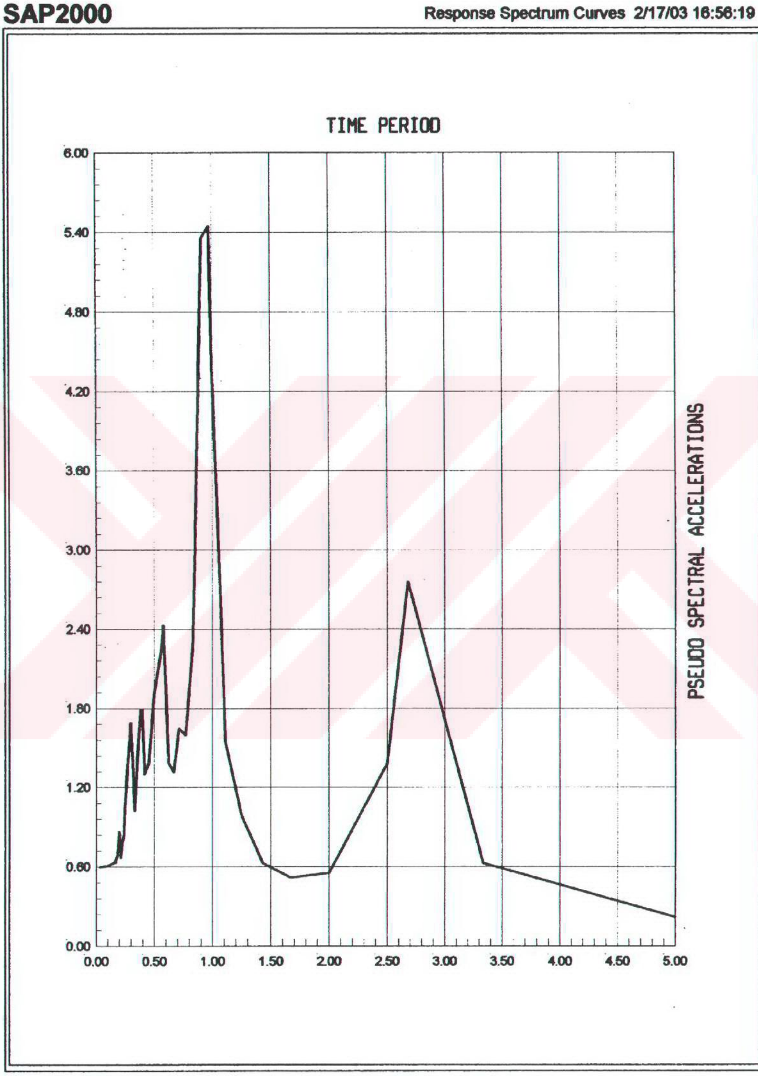
EKLER

Ek 1 44 numaralı düğüm noktasının P-Δ etkileri dikkate alınmamış durumdaki mukabele spektrumu



SAP2000 v7.44 - File:esasçerçeve-th - History:KOCAELI - KN-m Units
Joint 44 Direction X
Damping Values 0.02 Scale Factor 1.02e-01 Widening 0.00 %

Ek 2 44 numaralı düğüm noktasının P-Δ etkileri dikkate alınmış durumdaki mukabele spektrumu



SAP2000 v7.44 - File:esasçerçeve-th-pdelta - History:KOCAELI - KN-m Units
Joint 44 Direction X
Damping Values 0.02   Scale Factor 1.02e-01   Widening 0.00 %

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi	26.09.1978	
Doğum Yeri	İstanbul	
Lise	1993-1996	Özel Eyüboğlu Fen Lisesi
Lisans	1996-2001	Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi, İnşaat Müh. Bölümü
Yüksek Lisans	2001-2003	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Müh. Anabilim Dalı, Yapı Programı