

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

139758

NOKTA MESNETLİ GENEL ORTOTROP DİKDÖRTGEN
PLAKLARIN SERBEST TİTREŞİMİNİN İNCELENMESİ

139758-

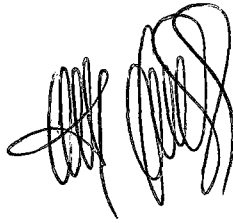
İnşaat Mühendisi Türker EKŞİ

F.B.E İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof.Dr. Turgut KOCATÜRK

T. Kocatürk



17/11/2003

İSTANBUL, 2003

TEZ YÖNERGESİNE GÖRE
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
ÇİZELGE LİSTESİ	v
ÖNSÖZ	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. Giriş	1
1.1 Tez Konusuna İlişkin Araştırmalar	1
1.2 Tez Çalışmasının Kapsamı ve Amacı	3
2. BAĞINTILAR	4
2.1 Plak	4
3. KURAMSAL ÇALIŞMA	7
3.1 Yer Değiştirme ve Şekil Değiştirme Arasındaki Bağıntılar	7
3.2 Potansiyel Enerji	7
3.3 Kinetik Enerji	12
3.4 Ritz Metodu	13
4. PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ	14
5. SAYISAL SONUÇLAR	17
6. SONUÇLAR	29
KAYNAKLAR	31
ÖZGEÇMİŞ	33

SİMGE LİSTESİ

A	Antisimetrik
A_{mn}	Polinom terim katsayıları
a	Plak kenar boyu
b	Plak kenar boyu
c	Kosinüs
D_{ij}	Özel ortotrop plakta eğilme rijitlik tansörü
\bar{D}_{ij}	Genel ortotrop plakta eğilme rijitlik tansörü
dm	Birim kütle
E_{11}	Ortotrop plağın 1 eksenine doğurultusundaki elastisite modülü
E_{22}	Ortotrop plağın 2 eksenine doğurultusundaki elastisite modülü
e	Elastisite modül oranı
F_s	Elastik mesnet şekil değiştirme enerjisi
G_{12}	Kayma modülü
h	Plak kalınlığı
k_i	Mesnet rijitliği
Q_{ij}	Özel ortotrop plakta indirgenmiş rijitlik matrisi
\bar{Q}_{ij}	Genel ortotrop plakta indirgenmiş rijitlik matrisi
S	Simetrik
s	Sinüs
T	Kinetik enerji
t	Zaman
U_i	Potansiyel enerji
u_i	Birim hacim enerjisi
V	Hız
W	Özel ortotrop plağın genliği
\bar{W}	Genel ortotrop plağın genliği
X_1, X_2	Koordinat eksenleri
w	Plağın boyutsuz genliği
α	Plağın X_2 doğurultusundaki kenarının X_1 doğurultusundaki kenarına oranı
ε	Şekil değiştirme
λ	Doğal frekans
ν	Poisson oranı
θ	Döndürme açısı
ρ	Birim hacim ağırlığı
σ_i	Özel ortotrop plakta normal gerilme
$\bar{\sigma}_i$	Genel ortotrop plakta normal gerilme
ω	Açısal frekans

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Genel ortotrop laminada döndürme açısı	4
Şekil 2.2 Özel ortotrop lamina.....	5
Şekil 2.3 Genel ortotrop lamina.....	5
Şekil 4.1 Elastik nokta mesnetli plak.....	14
Şekil 5.1 SS1, $\lambda_1 = 5.8392$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=0^\circ$)	
Şekil 5.2 $\lambda_1 = 5.8757$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=15^\circ$)	22
Şekil 5.3 $\lambda_1 = 5.94$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=30^\circ$)	
Şekil 5.4 $\lambda_1 = 5.98$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=45^\circ$)	22
Şekil 5.5 SS1, $\lambda_1 = 6.085$ ($k=10^8, e=0.6, \theta=0^\circ$)	
Şekil 5.6 $\lambda_1 = 6.259$ ($k=10^8, e=0.6, \theta=45^\circ$)	22
Şekil 5.7 SS2, $\lambda_4 = 16.69$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=0^\circ$)	
Şekil 5.8 $\lambda_4 = 16.628$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=15^\circ$)	23
Şekil 5.9 $\lambda_4 = 16.51$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=30^\circ$)	
Şekil 5.10 $\lambda_4 = 16.45$ ($k=10^8, e=0.6, \theta=45^\circ$)	23
Şekil 5.11 SS3, $\lambda_6 = 36.272$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=0^\circ$)	
Şekil 5.12 $\lambda_6 = 37.441$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=15^\circ$).....	23
Şekil 5.13 $\lambda_6 = 37.847$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=30^\circ$)	
Şekil 5.14 $\lambda_6 = 38.043$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=45^\circ$)	24
Şekil 5.15 SS3, $\lambda_6 = 38.496$ ($k=10^8, e=0.6, \theta=0^\circ$)	
Şekil 5.16 $\lambda_6 = 41.06$ ($k=10^8, e=0.6, \theta=45^\circ$)	24
Şekil 5.17 SS3, $\lambda_6 = 38.65$ ($k=10^2, e=0.8, \theta=0^\circ$)	
Şekil 5.18 SS3, $\lambda_6 = 41.67$ ($k=10^8, e=0.8, \theta=0^\circ$)	24
Şekil 5.19 AS1, $\lambda_2 = 12.1383$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=0^\circ$) Profil ve Plan	25
Şekil 5.20 $\lambda_2 = 11.4859$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=45^\circ$) Profil ve Plan.....	25
Şekil 5.21 AS1, $\lambda_2 = 12.8265$, ($k=10^8, e=0.6, \theta=0^\circ$) Profil ve Plan	25
Şekil 5.22 $\lambda_2 = 12.0729$ ($k=10^8, e=0.6, \theta=45^\circ$) Profil ve Plan.....	26
Şekil 5.23 SA1, $\lambda_3 = 12.9748$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=0^\circ$) Profil ve Plan.....	26
Şekil 5.24 $\lambda_3 = 13.5846$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=45^\circ$) Profil ve Plan	26
Şekil 5.25 SA1, $\lambda_3 = 13.8521$ ($k=10^8, e=0.6, \theta=0^\circ$) Profil ve Plan	27
Şekil 5.26 $\lambda_3 = 14.5825$ ($k=10^8, e=0.6, \theta=45^\circ$) Profil ve Plan.....	27
Şekil 5.27 AA1, $\lambda_5 = 29.4513$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=0^\circ$) Profil ve Plan.....	27
Şekil 5.28 $\lambda_5 = 28.7769$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=45^\circ$) Profil ve Plan.....	28
Şekil 5.29 AA1, $\lambda_5 = 32.7321$ ($k=10^8, e=0.6, \theta=0^\circ$) Profil ve Plan	28
Şekil 5.30 $\lambda_5 = 31.6368$ ($k=10^8, e=0.6, \theta=45^\circ$) Profil ve Plan.....	28

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 5.1 $k = 10^2$, $e = 0.6$ Durumunda λ değerleri.....	17
Çizelge 5.2 $k = \infty \approx 10^8$, $e = 0.6$ Durumunda λ değerleri	17
Çizelge 5.3 $k = 10^2$, $e = 0.8$ Durumunda λ değerleri	17
Çizelge 5.4 $k = \infty \approx 10^8$, $e = 0.8$ Durumunda λ değerleri	18
Çizelge 5.5 λ_1 Grafikleri.....	18
Çizelge 5.6 λ_2 Grafikleri.....	19
Çizelge 5.7 λ_3 Grafikleri.....	19
Çizelge 5.8 λ_4 Grafikleri.....	20
Çizelge 5.9 λ_5 Grafikleri.....	20
Çizelge 5.10 λ_6 Grafikleri.....	21
Çizelge 5.11 Yakınsama analizi: Polinom terim sayısı - λ ilişkisi	21



ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans bitirme tezinde genel ortotrop plağın doğal frekans değerleri ve mod şekilleri araştırılmıştır. Bu konuda yapılan ilk çalışma olması bakımından önemli olup, bundan sonraki çalışmalarda, ilgili kişilere önemli bir kaynak olmasını ummaktayım.

Eğitim hayatım boyunca benden desteklerini esirgemeyen aileme, hocalarıma ve bu tezin oluşmasında bana zamanını ayıran çok değerli bilgi ve tecrübelerinden destek aldığım değerli hocam Prof. Dr. Turgut Kocatürk'e şükranlarımı sunarım.



ÖZET

Mühendislikte mekanik biliminin yeri inşaat mühendisliğinde uygulamaları ile büyük bir alana sahiptir. Bilgisayar teknolojisi ile hesaplamalardaki kolaylıklar sonucu en karmaşık ve zor problemlere çözüm bulunabilmektedir. Bu avantajlardan yararlanılarak elastik nokta mesnetli genel ortotrop plağın özdeğerlerinin ve mod şekillerinin elde edilmesi tezin özünü oluşturmaktadır. Bu çalışmada elastik nokta mesnetli genel ortotrop dikdörtgen plakların serbest titreşimleri incelenmiştir. Problemin çözümü için klasik Ritz metodu kullanılmıştır. Çalışmada, Ritz metodunun uygulanması için plağın yerdeğiştirmelerini ifade eden çözüm fonksiyonunun oluşturulmasında polinomlar kullanılmıştır. Ritz metodu kullanılarak problem cebrik denklem sisteminin çözümüne indirgenmiştir. Elastik nokta mesnetli genel ortotrop dikdörtgen plağın mod şekilleri üzerinde mekanik özelliklerin etkisi çeşitli döndürme açıları, nokta mesnetlerin rijitlikleri ve plak malzemesinin anizotropisini karakterize eden özellikler için sayısal olarak incelenmiştir. İlk altı doğal frekans değeri için, yukarıda sözü edilen çeşitli parametreler alınarak, tablolar oluşturulmuştur. Bu çalışmaya benzer çalışmalar literatürde mevcut olup, bu çalışmanın farklılığı nokta mesnetli genel ortotrop bir plağın ilk kez çözümlenmesidir. Göz önüne alınan problemler Kirchhoff-Love hipotezi çerçevesinde çözülmüştür.

Anahtar kelimeler:Nokta mesnet, ortotrop, plak, mod şekli, serbest titreşim, güçlendirici (fiber), döndürme açısı, rijitlik parametresi.

ABSTRACT

Science of engineering mechanics has an important place especially in civil engineering. Improvements and advantages of computer technology make it possible to find solutions to most complex and difficult problems. In this study, by using these advantages, eigenvalues and mode shapes of, elastically point supported generally orthotropic plates are investigated mainly. The classical Ritz method is used for solving the problem. In the study, for applying the Ritz method, the trial function denoting the deflection of the plate is expressed in the polynomial form. By using the Ritz method, the problem is reduced to the solution of a system of algebraic equations. The influence of the mechanical properties on the mode shapes of the elastically point supported rectangular generally orthotropic plates is investigated numerically for various values of stiffness parameters of point supports, off-axis angles and mechanical properties characterizing the anisotropy of the plate material. The first six eigenvalues are tabulated for various orthotropy parameters, off axis angles and stiffness parameters of point supports. In literature there are similar topics examined. The difference of the thesis is that the point supported generally orthotropic plates are analyzed for the first time. The problems considered are solved within the framework of the Kirchhoff-Love hypothesis.

Keywords: Point support, orthotropy, plate, mode shape, free vibration, fiber, off-axis angle, stiffness parameters.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada elastik nokta mesnetli genel ortotrop dikdörtgen plakların serbest titreşimleri incelenmiştir. Problemin çözümü için klasik Ritz metodu kullanılmıştır. Çalışmada, Ritz metodunun uygulanması için plağın yerdeğiştirmelerini ifade eden çözüm fonksiyonunun oluşturulmasında polinomlar kullanılmıştır. Ritz metodu kullanılarak problem, cebrik denklem sisteminin çözümüne indirgenmiştir. Elastik nokta mesnetli ortotrop dikdörtgen plağın mod şekilleri üzerinde mekanik özelliklerin etkisi çeşitli boyut oranları, nokta mesnetlerin rijitlikleri ve plak malzemesinin anizotropisini karakterize eden özellikler için sayısal olarak incelenmiştir. Sayısal değerler çok sayıda ortotropi parametresi, nokta mesnetlerin rijitlik parametreleri ve iki adet boyut oranı durumunda, dört mod ailesi için tablolaştırılmıştır. Tablolaştırılan sonuçların tasarımcılar için faydalı olacağı ve diğer araştırmacıların sonuçlarını karşılaştırmada referans olacağına inanılmaktadır. Göz önüne alınan problemler Kirchhoff-Love hipotezi çerçevesinde çözülmüştür.

İzotrop dikdörtgen plakların serbest titreşimi, çeşitli noktalardan mesnetli olması durumu için Kirchhoff Love ve Mindlin teorilerinde araştırılmıştır. Ancak nokta elastik mesnetli plakların serbest titreşimi incelemesi sınırlıdır.

Özdeğerler çeşitli ortotropi değerleri, nokta mesnetlerin rijitlikleri için tablolaştırılmıştır. Sonuçların doğruluğu daha önce elde edilmiş veya yayınlanmış sonuçlarla karşılaştırılarak sınanmıştır.

1.1 Tez Konusuna İlişkin Araştırmalar

Çeşitli noktalarından mesnetli dikdörtgen izotrop ve ortotrop plakların serbest titreşimine ilişkin çok sayıda çalışma mevcuttur. Bu çalışmalarda çoğunlukla Kirchhoff-Love veya Mindlin plak teorileri kullanılmıştır.

Nokta mesnetli plakların titreşimi konusunda yapılmış olan yayınlar mesnetlenme durumuna (serbest, ankastre nokta mesnetli, elastik nokta mesnetli, viskoelastik nokta mesnetli, basit nokta mesnetli) göre veya yapılan analizin çeşidine (serbest titreşim, zorlanmış titreşim) bağlı olarak pek çok sınıflandırma altında incelenebilir. Yapılan analizlerde Sonlu Farklar, Rayleigh-Ritz, Sonlu Elamanlar, Lagrange çarpanları metodları kullanılarak çözümlenmeler yapılmıştır.

Nokta mesnetli plakların titreşimi ile ilgili çalışmalara ilk olarak 1950'li yıllarda rastlanmaktadır. Bu yayınlarda ilk göze çarpan çalışmalar kenar noktalarından nokta mesnetli

plakların titreşimi Cox (1955) tarafından, köşe noktalarından mesnetli plakların titreşimi Cox (1955) ve Boxer(1960) tarafından yapılan çalışmalardır. Misuzawa ve Kajita (1987), 1953 ve 1986 yılları arasında konu ile ilgili yapılan kırktan fazla yayına çalışmalarının referanslarında yer vermişlerdir. Yapılan tez çalışmasında kullanılan ve konu ile ilgili çalışmalar aşağıda özetlenmiştir.

Kerstens (1979) serbest titreşen kirişin özfonksiyonlarını, plağın yerdeğiştirme fonksiyonunu ifade etmek için keyfi noktalardan mesnetli bir dikdörtgen plağın titreşimini, mesnet kısıtlıklarını Lagrange genelleştirilmiş kısıtlık kuvvetleriyle göz önüne alarak incelemiştir. Kerstens (1979) nokta mesnetli izotrop Kirchhoff plağını nokta mesnetlerinde çökme olmayan basit mafsal olmaları durumu ve serbest plak hali için incelemiştir. Her iki mesnetlenme durumunda kenar uzunluklarının birbirlerine oranlarının farklı değerleri için serbest titreşim modları bulunmuştur. Sayısal incelemede Rayleigh-Ritz metodu kullanılmıştır Plak merkezinden geçen eksenlere göre simetrik yerleştirilmiş nokta mesnetler üzerine oturan ince dikdörtgen ortotropik plakların serbest titreşimini Gorman (1990) tarafından incelenmiştir. Tamamen serbest ortotrop dikdörtgen plakların hassas şekillerde serbest titreşim analizi Gorman (1994) tarafından yapılmıştır. Nokta mesnetli Mindlin plaklarının serbest titreşimleri süperpozisyon metoduyla Gorman (1999) tarafından incelenmiştir. Kenarlar boyunca simetrik dağılı nokta mesnetli dikdörtgen plakların serbest titreşimlerinin analizi Gorman (1980) tarafından yapılmıştır.

Gorman (1979) izotrop malzemedan yapılmış serbest Kirchhoff plağının serbest titreşim modlarını kenar uzunluklarının birbirlerine oranlarının farklı değerleri için elde etmiştir. Sayısal incelemede yönetici denklem fourier serileri kullanılarak çözülmüştür.

Raju ve Rao (1973) çalışmalarında nokta mesnetlerin farklı konumlarında olmaları durumunda plağın serbest modlarını incelemiştirlerdir. Raju ve Rao (1973), çalışmalarında izotrop malzemedan yapılmış Kirchhoff plağının çözümünde sonlu farklar metodunu kullanmışlardır.

Narita (1984) izotrop Kirchhoff plağının serbest titreşim modlarını mesnetlerin farklı konumları için bulmuştur. Problemin sayısal çözümü, sistemin enerji denkleminde Ritz metodunun uygulanması ile yapılmıştır, bu tezde kullanılan sayısal yöntem, Narita'nın (1984) çalışmasına oldukça benzemektedir. Yer değiştirme fonksiyonu olarak çift kuvvet serisi seçilerek, kısıtlılık koşulları Lagrange çarpanları ile sağlatılmıştır. Nokta mesnetli plakların ilk birkaç frekansı Venkateswara Rao (1973) tarafından sonlu elemanlar metodu kullanılarak

elde edilmiştir. Çeşitli noktalardan nokta mesnetli dikdörtgen plakların serbest titreşimleri üzerinde çok sayıda çalışma olmasına karşın, elastik nokta mesnetli dikdörtgen plaklar üzerinde az sayıda çalışma vardır: Elastik nokta mesnetli plak Leuner (1974) ve Laura Guttierrez (1981) tarafından analiz edilmiştir. Kenarlar boyunca üniform yayılı olarak elastik tutulu dikdörtgen Mindlin plaklarının serbest titreşimleri Saha (1996) tarafından çalışılmıştır. Özdeğerler çeşitli ortotropi değerleri, nokta mesnetlerin rijitlikleri için tablolastırılmıştır. Sonuçların doğruluğu daha önce elde edilmiş veya yayınlanmış sonuçlarla karşılaştırılarak sınanmıştır. Ele alınan problemler Kirchoff-Love hipotezi çerçevesinde çözülmüştür.

Kim ve Dickenson (1987) izotrop Kirchhoff plağının serbest titreşim modlarını nokta mesnetlerin plağın kenarlarının farklı mesnet koşullarına sahip olduğu durumlarla birlikte kullanılması hali için elde etmişlerdir.

Aksu ve Felemban (1992) nokta mesnetli izotrop Mindlin plağının serbest titreşimin karakteristiklerini plak kalınlığının değişen değerleri için elde etmişlerdir. Aksu ve Felemban (1992) yaptıkları çalışmada sonlu fark ağının düğüm noktası sayısına, bir diyer deyişle denklem sayısına bağlı olarak modların yakınsamalarının da incelemişlerdir.

Köşe noktalarında kolon tarzında mesnetleri olan izotrop Mindlin plağının kolonların kapladığı alanların ve plak kalınlığının değişen değerlerine bağlı olarak serbest titreşim modları Aksu (1993) tarafından elde edilmiştir. Aksu (1993) bu çalışmasında da enerji tabanlı sonlu farklar metodunu kullanmıştır.

Bu konudaki en son çalışmalardan birisi de Kocatürk ve İlhan (2003) tarafından yapılmıştır. Yapılan çalışmada ortotrop Kirchhoff plağının serbest titreşim modları elde edilmiştir.

1.2 Tez Çalışmasının Kapsamı ve Amacı

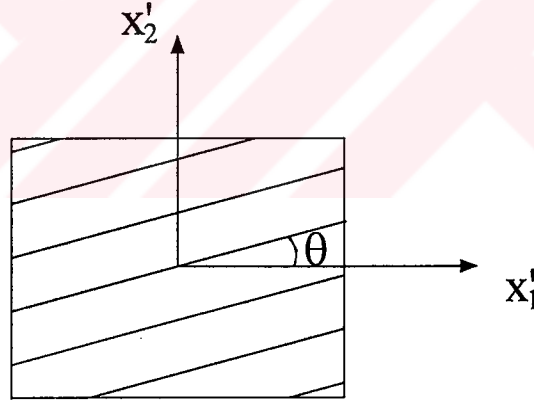
Tez çalışmasının amacı kısaca şöyle özetlenebilir: Kirchhoff plağı için döndürme açısının, ortotropinin ve elastik mesnet katsayılarının sistemin doğal frekanslar ve mod şekilleri üzerindeki etkilerinin araştırılması yapılmıştır. Plak için enerji ifadeleri çıkartılmış olup, klasik Ritz metodu kullanılarak, sayısal çözümler, bir bilgisayar programı hazırlanarak yapılmıştır. Hazırlanmış olan bu programda, birbirinden farklı, ortotropi, döndürme açısı ve elastik mesnet katsayıları durumları için, nokta mesnetleri köşeler üzerinde olan genel ortotrop dikdörtgen plağın serbest titreşim karakteristikleri bulunmuştur.

2. BAĞINTILAR

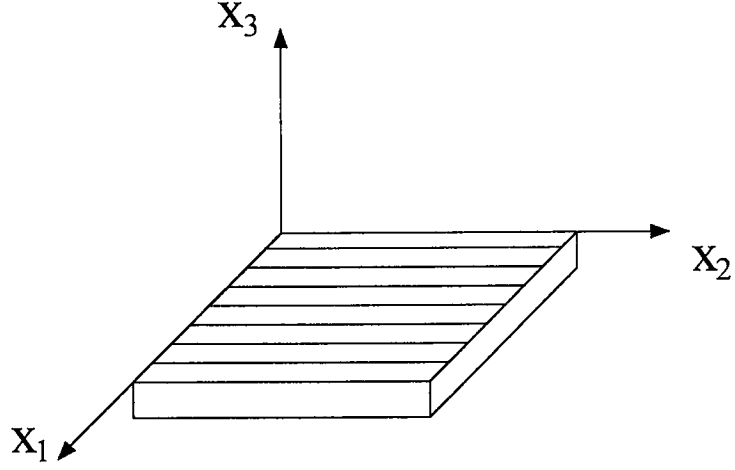
2.1 Plak

Modern sanayide, yapı elemanlarında, plak gibi kompozit elemanlar kullanılmaktadır, bu yüzden bu çalışma kompozit malzemelerin mekaniği kapsamındaki bir problem olarak düşünülebilir. Bir çok fiberle güçlendirilmiş kompozit malzemelerin mühendislikte kullanılanları ortotropdur.

Kompozit malzeme konusunda en sık kullanılan terim laminadır. Bilindiği üzere lamina, matrisi güçlendiren tüm fiberlerin aynı doğrultuda yerleştirildiği bir kompozit malzeme tabakasıdır. Özel ortotrop laminadaki döndürme açısı sıfır veya doksan derecedir, genel ortotrop laminadaki döndürme açısı θ , Şekil 2.1 da gösterildiği gibi olup, sıfır veya doksan dereceden farklıdır. Aşağıdaki Şekil 2.2 ve Şekil 2.3 de olası iki durum için lamina içindeki fiberlerin yerleştirilme biçimleri gösterilmiştir.

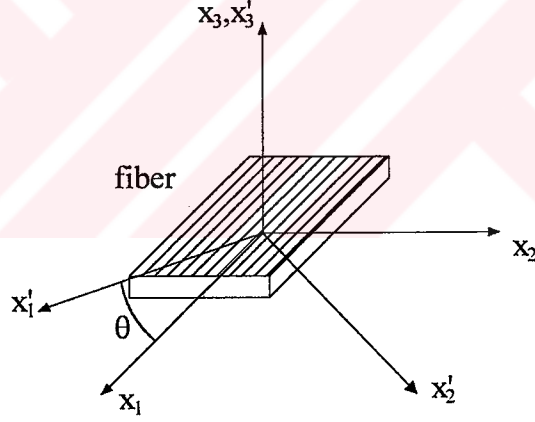


Şekil 2.1 Genel ortotrop laminada döndürme açısı



Şekil 2.2 Özel ortotrop lamina

İndirgenmiş rijitlik matrisinin bileşenleri, referans koordinat sisteminin yönlenmesine bağlıdır. Düzlem gerilme durumunda Şekil 2.3 de görüldüğü gibi koordinat sistemi dönmesi, X_3 eksenini etrafında alınmıştır.



Şekil 2.3 Genel ortotrop lamina

Kirchhof-Love hipotezi çerçevesinde incelenen plaklarda, düzlem gerilme hali ortaya çıkmakta olup, bünye ilişkileri plağın genel ortotrop olarak alınması durumunda aşağıdaki bağıntı ile verilmiştir (Choo, 1990) :

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_6 \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

Burada \bar{Q}_{ij} ler ve s ile c ler izleyen şekilde verilir:

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}s^4$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}c^4$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})s^3c$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})c^3s$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} - 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{66}(s^4 + c^4)$$

$$s = \sin \theta$$

$$c = \cos \theta \quad (2.2)$$

Düzlem gerilme durumunda, Şekil 2.1 deki dönme hali için dönüştürülmüş rijitlik tansörü bileşenleri yukarıda verildiği gibidir. Denklem içinde kullanılan Q_{mn} ifadeleri özel ortotrop durumu belirtmektedir ve bunların eşitlikleri izleyen denklemlerle gösterilmiştir:

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad (2.3)$$

$$\nu_{21}E_{11} = \nu_{12}E_{22}$$

Burada E_{11}, E_{22} sırasıyla OX_1 ve OX_2 doğrultularındaki Young modülleri olup, ν_{21} ise X_2 doğrultusunda uygulanan gerilme nedeniyle X_1 doğrultusundaki şekil değiştirme cevabı için Poisson oranıdır.

3. KURAMSAL ÇALIŞMA

3.1 Yer Değiştirme ve Şekil Değiştirme Arasındaki Bağlılıklar

Genel ortotrop dikdörtgen plaklarda şekil değiştirmeler, yerdeğiştirmeler cinsinden izleyen şekilde ifade edilmiştir (Vincent, 1990):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \\
 \varepsilon_2 &= -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \\
 \varepsilon_{12} &= -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{\varepsilon_6}{2}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Burada \bar{w} , t anındaki plak yer değiştirmesidir.

3.2 Potansiyel Enerji

Potansiyel enerji ifadesi genel olarak

$$U_i = \frac{1}{2} \int_V \sigma_i \varepsilon_i dV \quad \text{şeklindedir.} \tag{3.2}$$

Bu ifadedeki σ_i , genel ortotrop plakta izleyen şekilde verilmiştir (Choo, 1990):

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \tag{3.3}$$

Bu ifade ε_i lerle çarpılarak u_i birim hacim enerjisi aşağıdaki gibi verilir:

$$u_i = \frac{1}{2} \sigma_i \varepsilon_i \quad i = 1, 2, 6 \tag{3.5}$$

Genel ortotrop plak için birim hacimdeki potansiyel enerji ifadesine aşağıdaki şekildeki gibi ulaşılmıştır:

$$u_i = \frac{1}{2} \sigma_i \varepsilon_i = \frac{1}{2} \left(\bar{Q}_{11} \varepsilon_1^2 + \bar{Q}_{12} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \bar{Q}_{66} \varepsilon_6 \varepsilon_1 + \bar{Q}_{12} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \bar{Q}_{22} \varepsilon_2^2 + \bar{Q}_{26} \varepsilon_6 \varepsilon_2 + \bar{Q}_{16} \varepsilon_1 \varepsilon_6 + \bar{Q}_{26} \varepsilon_2 \varepsilon_6 + \bar{Q}_{66} \varepsilon_6^2 \right)$$

$$u_i = \frac{1}{2} \sigma_i \varepsilon_i = \frac{1}{2} \left(\bar{Q}_{11} \varepsilon_1^2 + 2 \bar{Q}_{12} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \bar{Q}_{22} \varepsilon_2^2 + 2 \bar{Q}_{16} \varepsilon_1 \varepsilon_6 + 2 \bar{Q}_{26} \varepsilon_2 \varepsilon_6 + \bar{Q}_{66} \varepsilon_6^2 \right) \quad (3.7)$$

Bu ifade, genel ortotrop plağın geometrik bölgesinde integre edilerek, böylesi plağın potansiyel enerjisi elde edilir. Herhangi bir t anındaki yerdeğiştirmesi \bar{W} olan bir genel ortotrop plağın potansiyel enerjisi kartezyen koordinatlarda aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\bar{D}_{11} \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial X_1^2} \right)^2 + 2 \bar{D}_{12} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial X_1^2} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial X_2^2} + \bar{D}_{22} \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial X_2^2} \right)^2 + 4 \bar{D}_{16} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial X_1^2} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial X_1 \partial X_2} + 4 \bar{D}_{26} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial X_2^2} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial X_1 \partial X_2} + 4 \bar{D}_{66} \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial X_1 \partial X_2} \right)^2 \right] dX_1 dX_2 \quad (3.8)$$

Yukarıdaki (3.8) denkleminde kullanılan \bar{D}_{ij} ifadeleri aşağıdaki formda verilir:

$$\bar{D}_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}^k(z^2) dz \quad (3.9)$$

Yukarıdaki (3.9) ifadesinden yararlanarak aşağıdaki eşitlikler bulunur:

$$\begin{aligned} \bar{D}_{11} &= \frac{\bar{Q}_{11}}{12} h^3 & \bar{D}_{16} &= \frac{\bar{Q}_{16}}{12} h^3 \\ \bar{D}_{12} &= \frac{\bar{Q}_{12}}{12} h^3 & \bar{D}_{26} &= \frac{\bar{Q}_{26}}{12} h^3 \\ \bar{D}_{22} &= \frac{\bar{Q}_{22}}{12} h^3 & \bar{D}_{66} &= \frac{\bar{Q}_{66}}{12} h^3 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ayrıca izleyen eşitliğin geçerli olduğu bilinmektedir (Vincent, 1990):

$$\frac{\nu_{12}}{E_{11}} = \frac{\nu_{21}}{E_{22}} \quad (3.11)$$

Bu aşamada (2.2) eşitliklerinde Q_{ij} ifadeleri yerlerine koyulursa, \bar{Q}_{ij} ifadeleri izleyen şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} c^4 + 2\left(\frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} + 2G_{12}\right) s^2 c^2 + \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} s^4 \\ \bar{Q}_{12} &= \left(\frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} + \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} - 4G_{12}\right) s^2 c^2 + \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (c^4 + s^4) \\ \bar{Q}_{22} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} s^4 + 2\left(\frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} + 2G_{12}\right) s^2 c^2 + \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} c^4 \\ \bar{Q}_{16} &= \left(\frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} - \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} - 2G_{12}\right) c^3 s + \left(\frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} - \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} + 2G_{12}\right) s^3 c \\ \bar{Q}_{26} &= \left(\frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} - \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} - 2G_{12}\right) s^3 c + \left(\frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} - \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} + 2G_{12}\right) c^3 s \\ \bar{Q}_{66} &= \left(\frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} - 2\frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} + \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} - 2G_{12}\right) c^2 s^2 + G_{12}(s^4 + c^4) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Burada G_{12} kayma modülüdür. Sayısal hesaplarda kullanılan G_{12} , aşağıdaki gibi ifade edilmiştir (Szilard, 1974):

$$G_{12} \approx \frac{E_{11}\sqrt{e}}{2(1 + \nu_{21}\sqrt{1/e})}; \quad e = \frac{E_{22}}{E_{11}} \quad (3.13)$$

Potansiyel enerji ifadesinde daha rahat çözümlene yapılması için boyusuzlaştırma yapılmıştır. $x_1 = X_1/a$, $x_2 = X_2/b$, $W = aw(x_1, x_2)$, $\alpha = b/a$ olarak tanımlanmıştır. Boyutsuzlaştırma için izleyen ifadelerden yararlanılacaktır:

$$x_1 = \frac{X_1}{a}, \quad x_2 = \frac{X_2}{b}, \quad W = aw(x_1, x_2), \quad \alpha = b/a$$

$$\bar{W} = W.e^{i\omega t} = aw(x_1, x_2)e^{i\omega t} \quad (3.14)$$

Dönüşümleri kullanarak, potansiyel enerji denklemindeki ifadeler

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X_1^2} \right)^2 = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X_2^2} \right) = \frac{1}{b^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X_2^2} \right)^2 = \frac{a^2}{b^4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X_1 \partial X_2} \right) = \frac{1}{ab} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X_1 \partial X_2} \right) = \frac{a}{b^3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X_1 \partial X_2} \right)^2 = \frac{1}{b^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \quad (3.15)$$

şeklinde oluşturulmuştur.

Yukarıda verilen (3.15) eşitliklerindeki boyutsuzlaştırmalar kullanılırsa izleyen form elde edilir:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\bar{D}_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2\bar{D}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \bar{D}_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + 4\bar{D}_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \right. \\ \left. + 4\bar{D}_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + 4\bar{D}_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] e^{i\omega t} a dx_1 b dx_2 \quad (3.16)$$

(3.16) denkleminde $\alpha = b/a$, kısaltması uygulanırsa, potansiyel enerji denklemi izleyen

şekilde oluşturulur:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\bar{D}_{11} \alpha \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \frac{2\bar{D}_{12}}{\alpha} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\bar{D}_{22}}{\alpha^3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + 4\bar{D}_{16} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{4\bar{D}_{26}}{\alpha^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{4\bar{D}_{66}}{\alpha} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] e^{i\omega t} dx_1 dx_2 \quad (3.17)$$

Yukarıdaki verilen (3.17) denklemi (3.18) denkleminde verilen, izotrop durumdaki D_{11} 'e bölünmesiyle, denklem (3.19) nolu denklemin formuna getirilmiştir.

Özel ortotrop durumdaki D_{11}

$$D_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \frac{h^3}{12} \quad (3.18)$$

şeklinde ifade edilmiştir. (3.10), (3.12) ve (3.18) ifadelerinin kullanımıyla (3.17) formülü

$$U = \frac{D_{11}}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\alpha (c^4 + 2(\nu_{12}e + 2\frac{G_{12}}{E_{11}}(1 - \nu_{12}\nu_{21}))s^2c^2 + es^4) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \frac{2}{\alpha} ((1 + e - 4\frac{G_{12}}{E_{11}}(1 - \nu_{12}\nu_{21}))s^2c^2 + \nu_{12}e(s^4 + c^4)) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + \frac{1}{\alpha^3} (s^4 + 2(\nu_{12}e + 2\frac{G_{12}}{E_{11}}(1 - \nu_{12}\nu_{21}))s^2c^2 + ec^4) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + 4(1 - \nu_{12}e - 2\frac{G_{12}}{E_{11}}(1 - \nu_{12}\nu_{21}))c^3s + (\nu_{21}e - e + 2\frac{G_{12}}{E_{11}}(1 - \nu_{12}\nu_{21}))s^3c \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{4}{\alpha^2} ((1 - \nu_{12}e - 2\frac{G_{12}}{E_{11}}(1 - \nu_{12}\nu_{21}))s^3c + (\nu_{12}e - e + 2\frac{G_{12}}{E_{11}}(1 - \nu_{12}\nu_{21}))c^3s) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{4}{\alpha} ((1 - 2\nu_{12}e + e - 2\frac{G_{12}}{E_{11}}(1 - \nu_{12}\nu_{21}))s^2c^2 + \frac{G_{12}}{E_{11}}(1 - \nu_{12}\nu_{21})(s^4 + c^4)) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] e^{i\omega t} dx_1 dx_2 \quad (3.19)$$

olarak yazılabilir.

3.3 Kinetik Enerji

Basit harmonik hareket yapan bir plak için kinetik enerji denkleminin çıkarılması izleyen şekildedir:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\frac{-b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \int_{\frac{-b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \left(\frac{d\bar{W}}{dt} \right)^2 dm \Rightarrow T = \frac{1}{2} \int_{\frac{-b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \int_{\frac{-b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \left(\frac{d\bar{W}}{dt} \right)^2 h \cdot \rho \cdot dA \Rightarrow T = \frac{1}{2} \int_{\frac{-b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \int_{\frac{-b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \left(\frac{d\bar{W}}{dt} \right)^2 h \cdot \rho \cdot dX_1 dX_2 \quad (3.20)$$

Denklemlerde ρ plak birim hacim ağırlığını, ω plak titreşim frekansını, h plak kalınlığını göstermektedir. Göz önüne alınan plağın kinetik enerjisi

$$T = \frac{h \cdot \rho \cdot a \cdot b}{2} \int_{\frac{-1-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{-1-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d\bar{W}}{dt} \right)^2 h \cdot \rho \cdot dx_1 dx_2 \quad (3.21)$$

olmaktadır. (3.14) gösteriminin kullanımıyla kinetik enerji ifadesi izleyen şekle dönüşür:

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot h \cdot \alpha^2}{2} \int_{\frac{-1-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{-1-1}{2}}^{\frac{1}{2}} w^2 \cdot e^{i\omega t} dx_1 dx_2 \quad (3.22)$$

(3.20) denkleminde kinetik enerjinin, $\frac{1}{2} mV^2$ genel ifadesi görülmektedir, $\frac{d\bar{W}}{dt}$ ifadesi

hızı (V), dm ifadesi kütleyi göstermektedir: Kütle $dm = h \cdot \rho \cdot dX_1 dX_2$ şeklinde yazılmıştır.

(3.14) denkleminde W hareketin genliğini göstermektedir. $e^{i\omega t}$ denkleme harmonik olma özelliğini katmaktadır.

3.4 Ritz Metodu

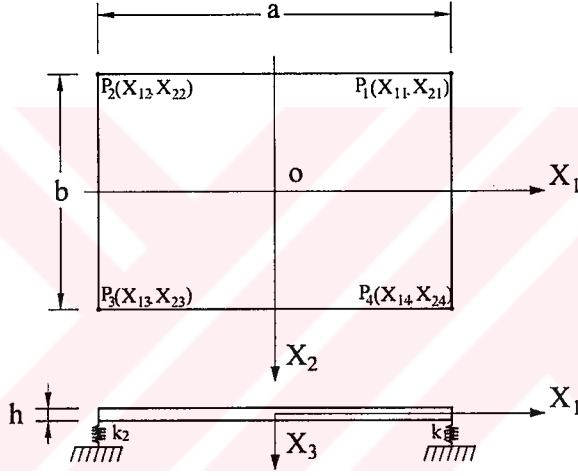
Ritz metodunun uygulanması için plağın yerdeğiştirmesini gösteren deneme fonksiyonu, Narita (1984) tarafından nokta mesnetli dikdörtgen plakların titreşimlerinin analizinde kullanılan izleyen polinom formunda ifade edilmiştir:

$$w(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^M A_{mn} x_1^m x_2^n \quad (3.23)$$

Her terim geometrik sınır koşullarını sağlamak zorundadır. Ancak bu problemde sağlatılacak bir geometrik sınır koşulu yoktur. Bununla beraber, doğal sınır koşullarının da, fonksiyon seçilirken, sağlatılması ile daha uygun sonuçlar alınacaktır. W için geometrik sınır koşullarını sağlayan bazı ifadelerin seçilmesinin gerekli olduğu bilinmektedir. $(U + F_s) - T$ enerji fonksiyoneli minimize edilerek doğal sınır koşulları da ayrıca sağlatılmıştır. Varyasyon hesabının köşelerde elastik nokta mesnetli ortotrop dikdörtgen plaklar için enerji fonksiyoneli minimize etmede doğrudan uygulanması titreşim yapan bir plak için kısmi diferansiyelli eşitlikleri verir. Bu işlemi yapmak yerine, $W(X_1, X_2)$ yer değiştirmesini kabul edilebilir fonksiyonların lineer serisi tarafından temsil edilebilir olarak kabul edip, serideki katsayıları enerji fonksiyonellerini minimize edecek şekilde ayarlamak için klasik Ritz metodu kullanılarak, yerdeğiştirme fonksiyonu için bir yaklaşık çözümler bulunur.

4. PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

Şekil 4.1 de gösterilen, kenarları a ve b olan h kalınlıktaki elastik nokta mesnetli genel ortotrop plak göz önüne alınmıştır. k_i , i . mesnetin elastik yay katsayısını ifade etmektedir. $P(X_{1i}, X_{2i})$ ise nokta mesnetin i . mesnet kuvvetini belirtmektedir. Koordinat eksenleri olan OX_1 ve OX_2 plak kenarlarına paralel olarak alınmıştır. Plakın dört köşe noktasında nokta mesnetler alınmıştır. Bunlar farklı yerlerde de alınabilirdi. Bununla beraber problemde çok fazla parametre olduğundan, kısalık için tüm mesnetlerin elastik yay sabitleri $k = k_i$ olarak birbirlerinin aynı alınmıştır.



Şekil 4.1 Elastik nokta mesnetli plak

Titreşimin maksimum kinetik enerjisi aşağıdaki gibi verilir:

$$T = \frac{a^3 b a h \omega^2}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} w^2 dx_1 dx_2 \quad (4.1)$$

Elastik mesnetlerin maksimum şekil değiştirme enerjisi aşağıda verilmiştir:

$$F_s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 k_i W_{Si}^2 \quad (4.2)$$

Boyutsuzlaştırılmış şekil değiştirme enerjisi ise (4.3) denkleminde verilmiştir.

$$F_s = \frac{a^2}{2} \sum_{i=1}^4 k_i w_i^2 \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
U = & \frac{D_{11}}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(c^4 + 2(\nu_{12}e + 2\frac{G_{12}}{E_{11}}(1-\nu_{12}\nu_{21}))s^2c^2 + es^4 \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \frac{2}{\alpha^2} \left((1+e-4\frac{G_{12}}{E_{11}}(1-\nu_{12}\nu_{21}))s^2c^2 + \right. \\
& \nu_{12}e(s^4+c^4) \left. \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + \frac{1}{\alpha^4} \left(s^4 + 2(\nu_{12}e + 2\frac{G_{12}}{E_{11}}(1-\nu_{12}\nu_{21}))s^2c^2 + ec^4 \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + 4((1-\nu_{12}e- \\
& 2\frac{G_{12}}{E_{11}}(1-\nu_{12}\nu_{21}))c^3s + (\nu_{21}e-e + 2\frac{G_{12}}{E_{11}}(1-\nu_{12}\nu_{21}))s^3c) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{4}{\alpha^3} ((1-\nu_{12}e- \\
& 2\frac{G_{12}}{E_{11}}(1-\nu_{12}\nu_{21}))s^3c + (\nu_{12}e-e + 2\frac{G_{12}}{E_{11}}(1-\nu_{12}\nu_{21}))c^3s) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{4}{\alpha^2} ((1-2\nu_{12}e+e- \\
& 2\frac{G_{12}}{E_{11}}(1-\nu_{12}\nu_{21}))s^2c^2 + \frac{G_{12}}{E_{11}}(1-\nu_{12}\nu_{21})(s^4+c^4)) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \Big] dx_1 dx_2 \quad (4.4)
\end{aligned}$$

(3.23) denklemi (4.1), (4.3), (4.4) denklemlerinde yerlerine konulduğu zaman söz konusu denklemler A_{mn} katsayılı fonksiyonlar haline gelmiştir. Enerjinin minimizasyonu ise aşağıdaki şekilde yapılmıştır:

$$\frac{\partial(U + F_s)}{\partial A_{ij}} - \frac{a^3 b \rho h \omega^2}{2} \frac{\partial}{\partial A_{ij}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} w^2 dx_1 dx_2 \right) = 0 \quad (4.5)$$

$$\text{Boyutsuz ifadeler; } \kappa_i = \frac{k_i a^3}{b D_{11}}, \quad \lambda^2 = \frac{\rho h \omega^2 a^4}{D_{11}} \quad (4.6)$$

(4.5) ifadesi izleyen formda yazılabilir:

$$\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N [C_{mn}^{ij}] = 0 \quad (4.7)$$

Yukarıdaki denklemde gösterilen C_{mn}^{ij} terimi açık olarak aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}
C_{mn}^{ij} = & (c^4 + 2(v_{12}e + 2\frac{G_{12}}{E_{11}}(1-v_{12}v_{21}))s^2c^2 + es^4)EE_{km}g_{nl} + \frac{1}{\alpha^4}(s^4 + 2(v_{12}e + 2\frac{G_{12}}{E_{11}}(1-v_{12}v_{21}))s^2c^2 + ec^4)FF_{nl}g_{mk} \\
& + \frac{1}{\alpha^2}((1+e-4\frac{G_{12}}{E_{11}}(1-v_{12}v_{21}))s^2c^2 + v_{12}e(s^4+c^4))(E_{mk}F_{ln} + E_{km}F_{nl}) \\
& + \frac{4}{\alpha^2}((1-2v_{12}e+e-2\frac{G_{12}}{E_{11}}(1-v_{12}v_{21}))s^2c^2 + \frac{G_{12}}{E_{11}}(1-v_{12}v_{21})(s^4+c^4))(H_{km}K_{ln}) \\
& + \frac{2}{\alpha}((1-v_{12}e-2\frac{G_{12}}{E_{11}}(1-v_{12}v_{21}))c^3s + (v_{21}e-e+2\frac{G_{12}}{E_{11}}(1-v_{12}v_{21}))s^3c)(Z_{mk}Y_{ln} + Z_{km}Y_{nl}) \\
& + \frac{2}{\alpha^3}((1-v_{12}e-2\frac{G_{12}}{E_{11}}(1-v_{12}v_{21}))s^3c + (v_{12}e-e+2\frac{G_{12}}{E_{11}}(1-v_{12}v_{21}))c^3s)(P_{mk}R_{ln} + P_{km}R_{nl})
\end{aligned} \tag{4.8}$$

(4.8) eşitliğinin yazılımında kullanılan notasyonlar aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
E_{km} &= \int_{-0.5}^{0.5} x_1^k \frac{d^2 x_1^m}{dx_1^2} & E_{mk} &= \int_{-0.5}^{0.5} x_1^m \frac{d^2 x_1^k}{dx_1^2} & F_{ln} &= \int_{-0.5}^{0.5} x_2^l \frac{d^2 x_2^n}{dx_2^2} & F_{nl} &= \int_{-0.5}^{0.5} x_2^n \frac{d^2 x_2^l}{dx_2^2} \\
g_{km} &= \int_{-0.5}^{0.5} x_1^m x_1^k & g_{nl} &= \int_{-0.5}^{0.5} x_2^n x_2^l & H_{km} &= \int_{-0.5}^{0.5} \frac{d^2 x_1^k}{dx_1^2} \frac{d^2 x_1^m}{dx_1^2} & K_{ln} &= \int_{-0.5}^{0.5} \frac{d^2 x_2^l}{dx_2^2} \frac{d^2 x_2^n}{dx_2^2} \\
Z_{mk} &= \int_{-0.5}^{0.5} \frac{d^2 x_1^k}{dx_1^2} \frac{dx_1^m}{dx_1} dx_1 & Z_{km} &= \int_{-0.5}^{0.5} \frac{d^2 x_1^m}{dx_1^2} \frac{dx_1^k}{dx_1} dx_1 & Y_{nl} &= \int_{-0.5}^{0.5} x_2^n \frac{dx_2^l}{dx_2} dx_2 \\
Y_{ln} &= \int_{-0.5}^{0.5} x_2^l \frac{dx_2^n}{dx_2} dx_2 & R_{nl} &= \int_{-0.5}^{0.5} \frac{dx_2^n}{dx_2} \frac{d^2 x_2^l}{dx_2^2} dx_2 & R_{ln} &= \int_{-0.5}^{0.5} \frac{dx_2^l}{dx_2} \frac{d^2 x_2^n}{dx_2^2} dx_2 \\
P_{mk} &= \int_{-0.5}^{0.5} x_1^m \frac{dx_1^k}{dx_1} dx_1 & P_{km} &= \int_{-0.5}^{0.5} x_1^k \frac{dx_1^m}{dx_1} dx_1
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Karakteristik λ değerleri (4.7) ifadesinin sıfıra eşitlenmesiyle bulunur.

5. SAYISAL SONUÇLAR

Oluşturulan denklem takımlarının bilgisayara girilmesi ile aşağıdaki tablolar, grafikler ve şekiller oluşturulmuştur:

Çizelge 5.1 $k = 10^2$, $e = 0.6$ Durumunda λ değerleri

$\theta \backslash \lambda$	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
0°	5.8392	12.1383	12.9748	16.6897	29.4513	36.2726
15°	5.8757	11.9100	13.1943	16.6288	29.2806	37.4411
30°	5.9484	11.6056	13.4778	16.5080	28.9392	37.8467
45°	5.9853	11.4859	13.5846	16.4484	28.7769	38.0429
90°	5.8392	12.1383	12.9748	16.6897	29.4513	36.2726

Çizelge 5.2 $k = \infty \approx 10^8$, $e = 0.6$ Durumunda λ değerleri

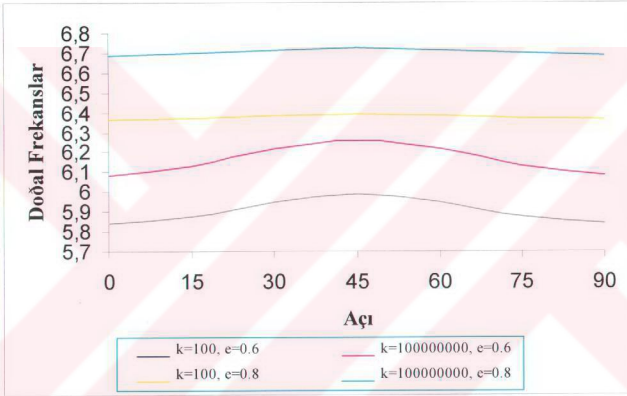
$\theta \backslash \lambda$	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
0°	6.0851	12.8265	13.8521	16.7960	32.7321	38.4963
15°	6.1283	12.5636	14.1112	16.6791	32.4435	39.9198
30°	6.2149	12.2112	14.4515	16.5250	31.8873	40.6950
45°	6.2591	12.0729	14.5825	16.4484	31.6368	41.0611
90°	6.0851	12.8265	13.8521	16.7960	32.7321	38.4963

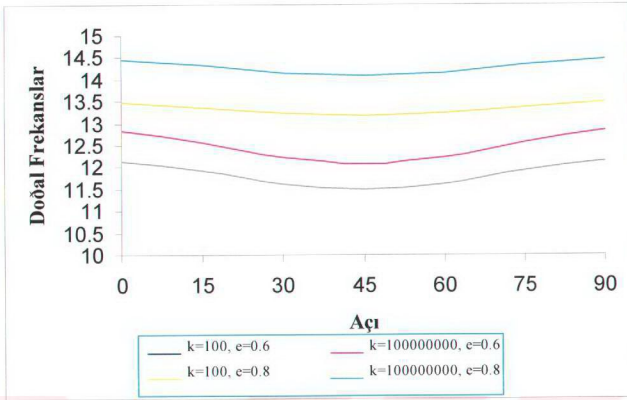
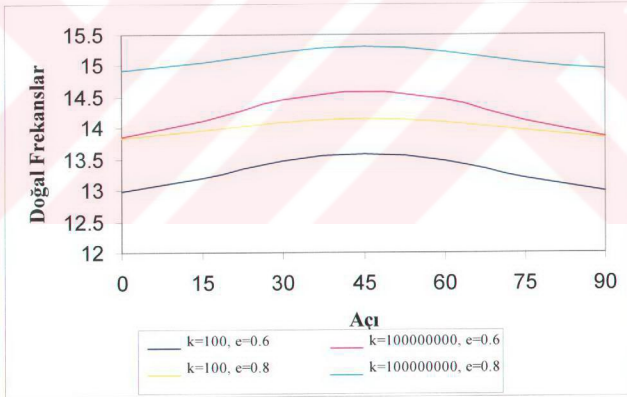
Çizelge 5.3 $k = 10^2$, $e = 0.8$ Durumunda λ değerleri

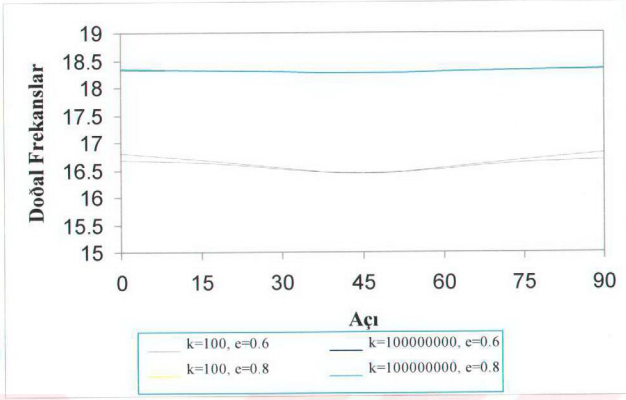
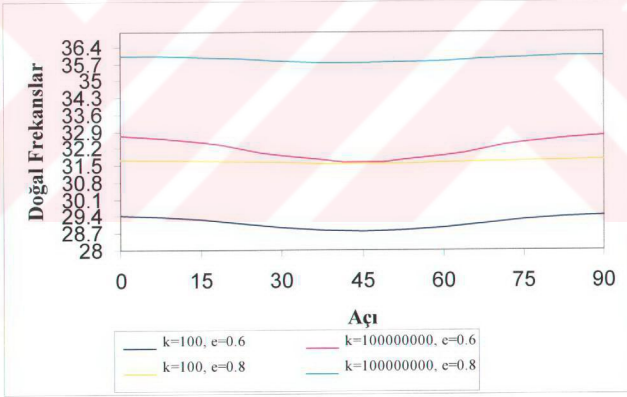
$\theta \backslash \lambda$	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
0°	6.3634	13.4813	13.8413	18.3175	31.7376	38.6539
15°	6.3714	13.3677	13.9541	18.3058	31.7040	39.7140
30°	6.3860	13.2200	14.0979	18.2826	32.6237	39.8026
45°	6.3935	13.1622	14.1539	18.2711	31.5840	39.8465
90°	6.3634	13.4813	13.8413	18.3175	31.7376	38.6539

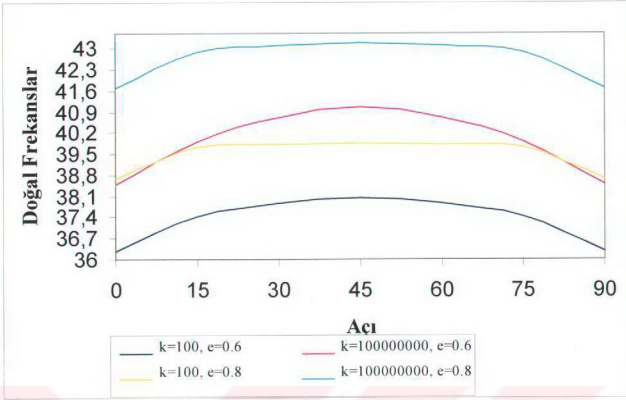
Çizelge 5.4 $k = \infty \approx 10^8$, $e = 0.8$ Durumunda λ değerleri

$\theta \backslash \lambda$	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
0°	6.6883	14.4562	14.9169	18.3338	36.0046	41.6742
15°	6.6981	14.3202	15.0546	18.3182	35.9484	42.8765
30°	6.7161	14.1414	15.2323	18.2867	35.7901	43.0800
45°	6.7253	14.0714	15.3018	18.2711	35.7138	43.1792
90°	6.6883	14.4562	14.9169	18.3338	36.0046	41.6742

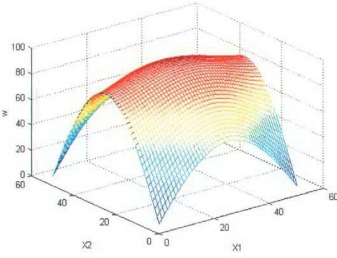
Çizelge 5.5 λ_1 Grafikleri

Çizelge 5.6 λ_2 GrafikleriÇizelge 5.7 λ_3 Grafikleri

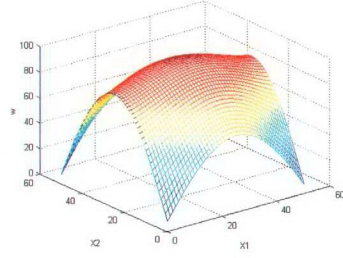
Çizelge 5.8 λ_4 GrafikleriÇizelge 5.9 λ_3 Grafikleri

Çizelge 5.10 λ_6 GrafikleriÇizelge 5.11 Yakınsama analizi: Polinom terim sayısı - λ ilişkisi

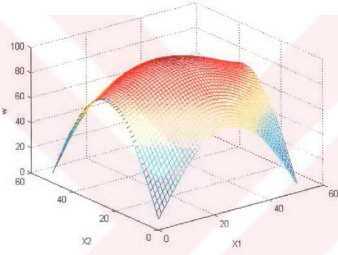
A_{mn} \ λ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
2	20.0000	20.0000	20.0000	20.0000	41.6786	61.1285
3	6.6399	12.8144	14.1569	18.7276	34.3909	41.6787
4	6.6399	12.7617	13.9527	18.7276	34.3909	37.2302
5	5.8397	12.2525	13.2431	16.6898	34.3909	36.2726
6	5.8397	12.1384	12.9754	16.6897	29.4600	37.2302
7	5.8392	12.1387	12.9749	16.5800	29.4600	36.2777
8	5.8392	12.1383	12.9748	16.5799	29.4513	36.2726
Kocatürk, İlhan(2003)	5.8392	12.1383	12.9748	16.5799	29.4513	36.2726



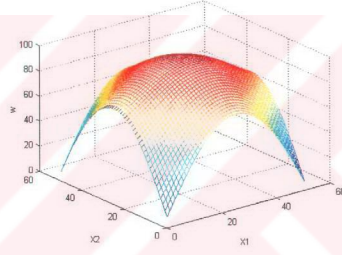
Şekil 5.1 SSI, $\lambda_1 = 5.8392$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=0^\circ$)



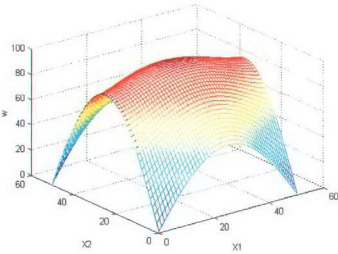
Şekil 5.2 $\lambda_1 = 5.8757$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=15^\circ$)



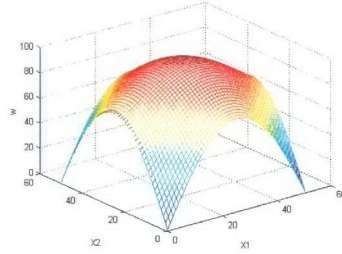
Şekil 5.3 $\lambda_1 = 5.94$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=30^\circ$)



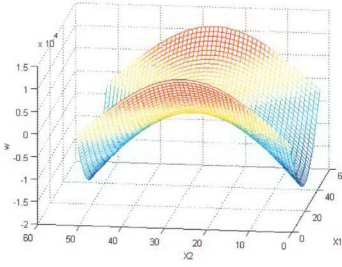
Şekil 5.4 $\lambda_1 = 5.98$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=45^\circ$)



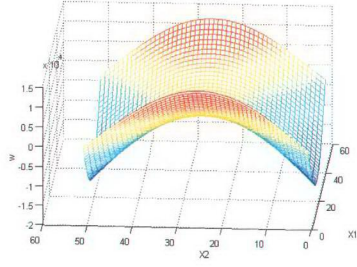
Şekil 5.5 SSI, $\lambda_1 = 6.085$ ($k=10^8, e=0.6, \theta=0^\circ$)



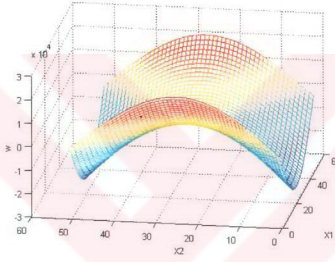
Şekil 5.6 $\lambda_1 = 6.259$ ($k=10^8, e=0.6, \theta=45^\circ$)



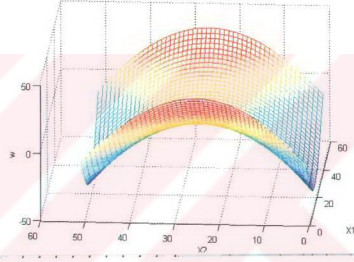
Şekil 5.7 SS2, $\lambda_4 = 16.69$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=0^\circ$)



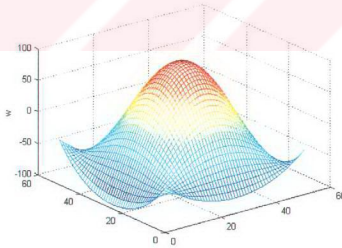
Şekil 5.8 $\lambda_4 = 16.628$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=15^\circ$)



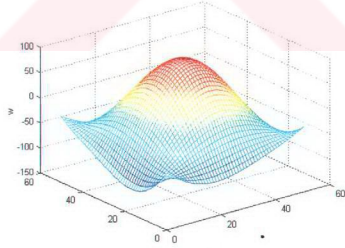
Şekil 5.9 $\lambda_4 = 16.51$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=30^\circ$)



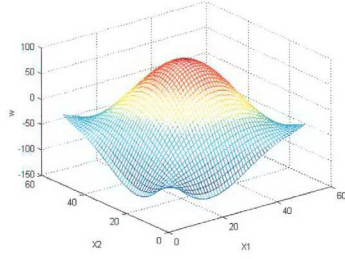
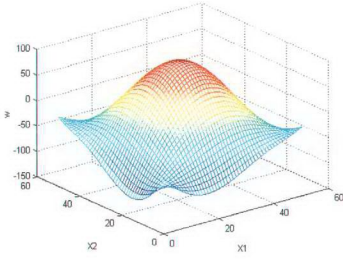
Şekil 5.10 $\lambda_4 = 16.45$ ($k=10^8, e=0.6, \theta=45^\circ$)



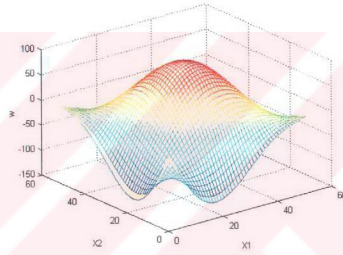
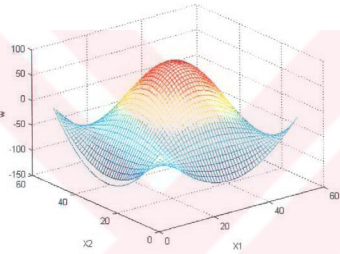
Şekil 5.11 SS3, $\lambda_6 = 36.272$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=0^\circ$)



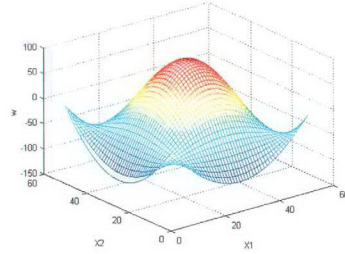
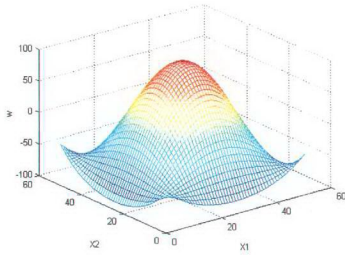
Şekil 5.12 $\lambda_6 = 37.441$ ($k=10^2, e=0.6, \theta=15^\circ$)



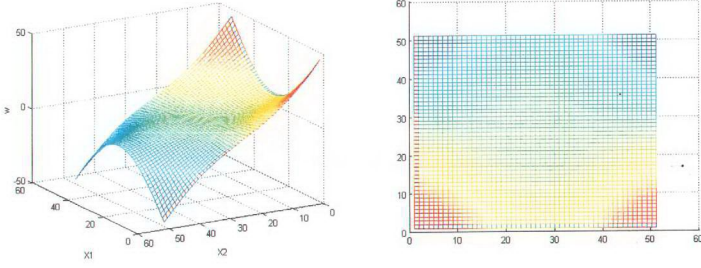
Şekil 5.13 $\lambda_6 = 37.847$ ($k=10^{-2}, e=0.6, \theta=30^\circ$) Şekil 5.14 $\lambda_6 = 38.043$ ($k=10^{-2}, e=0.6, \theta=45^\circ$)



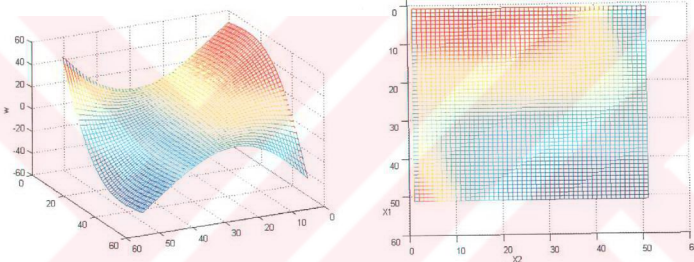
Şekil 5.15 $SS3, \lambda_6 = 38.496$ ($k=10^8, e=0.6, \theta=0^\circ$) Şekil 5.16 $\lambda_6 = 41.06$ ($k=10^8, e=0.6, \theta=45^\circ$)



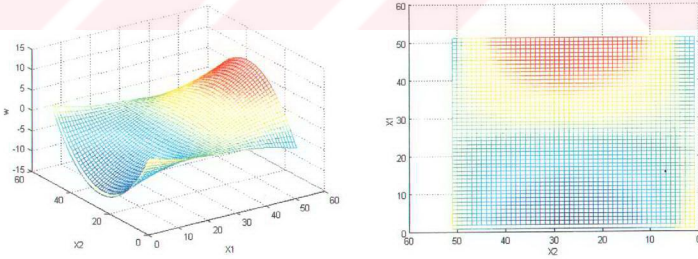
Şekil 5.17 $SS3, \lambda_6 = 38.65$ ($k=10^2, e=0.8, \theta=0^\circ$) Şekil 5.18 $SS3, \lambda_6 = 41.67$ ($k=10^8, e=0.8, \theta=0^\circ$)



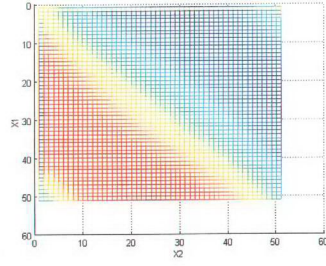
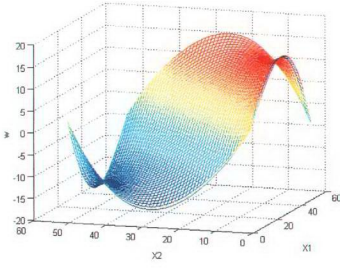
Şekil 5.19 $AS1, \lambda_2 = 12.1383$ ($k = 10^2, e = 0.6, \theta = 0^\circ$) Profil ve Plan



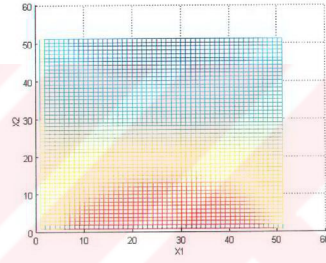
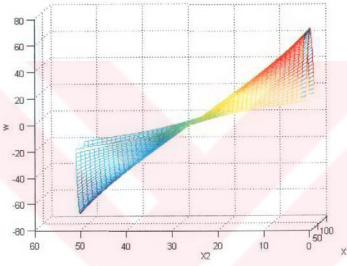
Şekil 5.20 $\lambda_2 = 11.4859$ ($k = 10^2, e = 0.6, \theta = 45^\circ$) Profil ve Plan



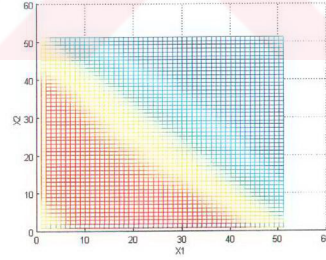
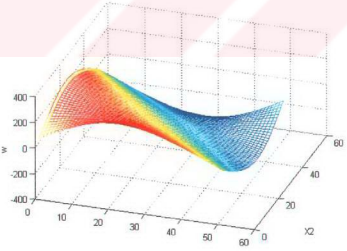
Şekil 5.21 $AS1, \lambda_2 = 12.8265$, ($k = 10^8, e = 0.6, \theta = 0^\circ$) Profil ve Plan



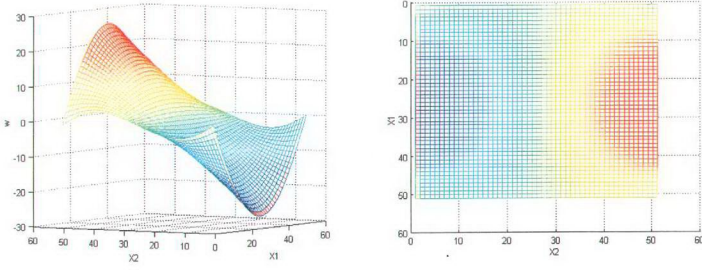
Şekil 5.22 $\lambda_2 = 12.0729$ ($k = 10^8$, $e = 0.6$, $\theta = 45^\circ$) Profil ve Plan



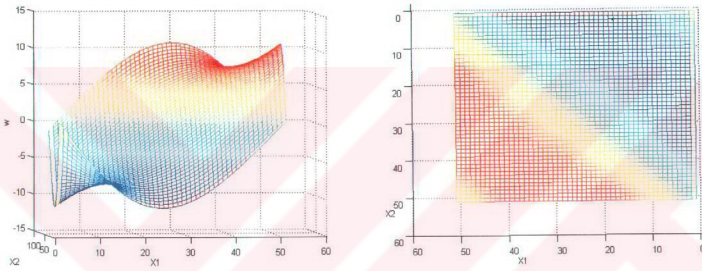
Şekil 5.23 $SA1$, $\lambda_3 = 12.9748$ ($k = 10^2$, $e = 0.6$, $\theta = 0^\circ$) Profil ve Plan



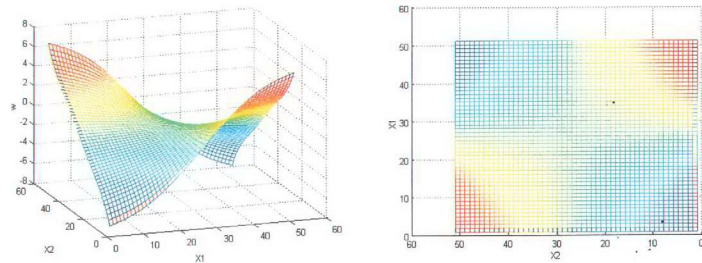
Şekil 5.24 $\lambda_3 = 13.5846$ ($k = 10^2$, $e = 0.6$, $\theta = 45^\circ$) Profil ve Plan



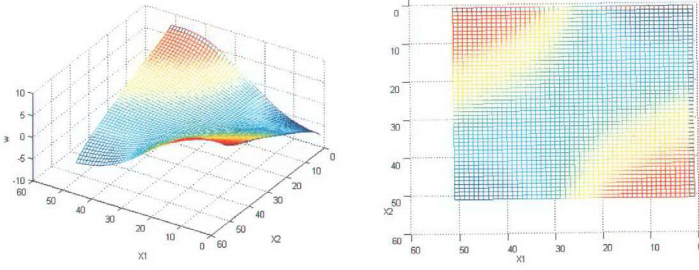
Şekil 5.25 S41, $\lambda_3 = 13.8521$ ($k = 10^8$, $e = 0.6$, $\theta = 0^\circ$) Profil ve Plan



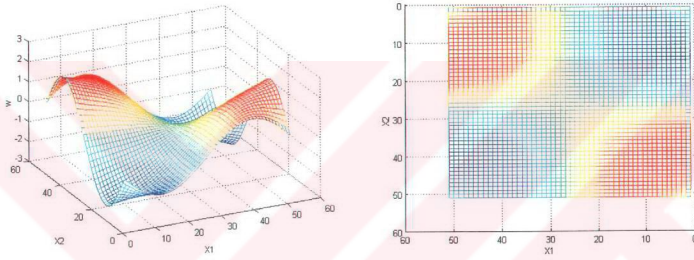
Şekil 5.26 $\lambda_3 = 14.5825$ ($k = 10^8$, $e = 0.6$, $\theta = 45^\circ$) Profil ve Plan



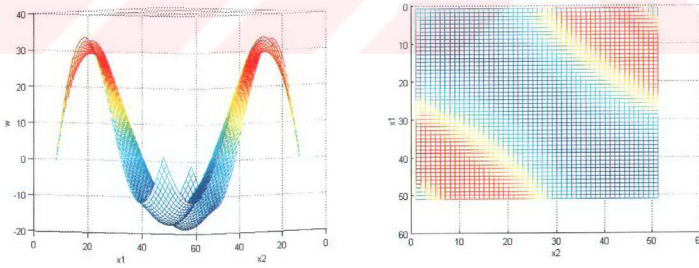
Şekil 5.27 A41, $\lambda_3 = 29.4513$ ($k = 10^2$, $e = 0.6$, $\theta = 0^\circ$) Profil ve Plan



Şekil 5.28 $\lambda_3 = 28.7769$ ($k = 10^2$, $e = 0.6$, $\theta = 45^\circ$) Profil ve Plan



Şekil 5.29 $AA1$, $\lambda_3 = 32.7321$ ($k = 10^8$, $e = 0.6$, $\theta = 0^\circ$) Profil ve Plan



Şekil 5.30 $\lambda_3 = 31.6368$ ($k = 10^8$, $e = 0.6$, $\theta = 45^\circ$) Profil ve Plan

6. SONUÇLAR

Sistemin çözümü ile nokta mesnetli genel ortotrop dikkörtgen plağın çeşitli ortotropi durumları için doğal frekans değerleri elde edilmiştir. Ortotropinin, döndürme açısının, mesnet rijitliğinin frekans parametrelerine etkisi araştırılmıştır. Frekans değerleri tablolaştırılmış olup, mod şekilleri 5.nolu şekillerde gösterilmiştir. Kullanılan çözüm metodu ile çok mesnetli sistemlere geçiş yapılması mümkündür.

Çözümlemede polinom denklemler kullanılarak, klasik Ritz metodu ile sonuçlara ulaşılmıştır. Polinom terim sayısı arttıkça kesin değere üstten yaklaşılmaktadır. Enerji metodları her zaman için doğal frekanslara üstten yaklaşır. Hassas sonuçlar için polinom denklemin derecesi artırılır. Belirtilen yöntemle titreşim modlarına ait doğal frekans değerlerinin (λ) ilk altı değeri bulunmuştur. Hesaplanan doğal frekans değerlerinde, sistemin 0° ve 90° derece döndürme açıları için plağın yaptığı hareketin mod şekilleri olup bunlar eksenlere göre simetri durumları için $SS-1$, $AS-1$, $SA-1$, $SS-2$, $AA-1$, $SS-3$ olacak şekilde meydana gelirler. S simetriği A antisimetriği belirtmektedir. Özel ortotropi durumunda frekans denklemlerindeki m ve n sayılarının tek veya çift olması mod şeklini tayin etmektedir. Örneğin SA modu X_2 eksenine göre simetrik X_1 eksenine göre antisimetriktir. Bu yüzden SA modunda $m = 0, 2, 4$ $n = 1, 3, 5...$ polinom terimleri alınır.

Ortotropi durumu (e), döndürme açısı (θ), mesnetlenme durumu için de elastik yay katsayıları (k) olup, bu değerlerin değişimi göz önüne alınarak sonuçlar elde edilmiştir.

Döndürme açısı θ , $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ alınarak doğal frekanslar elde edilmiştir. Ortotropi oranı (e), 0.6 ve 0.8 olması durumlarında doğal frekanslar bulunmuştur. Nokta mesnetlerin rijitlik değerleri her mesnette $k_1 = k$ olacak şekilde alınmıştır. $k_1 = 10^2$ ve $10^8 \approx \infty$ sayısal değerleri için sonuçlar elde edilmiştir.

Karşılaştırma, döndürme açısına (θ) göre yapıldığında ilk λ değerlerinde $0^\circ - 45^\circ$ dereceleri arası artış $45^\circ - 90^\circ$ dereceleri arası azalma olmuştur. İkinci λ değerlerinde $0^\circ - 45^\circ$ dereceleri arası azalma $45^\circ - 90^\circ$ dereceleri arası artış olmuştur. Üçüncü λ değerlerinde $0^\circ - 45^\circ$ dereceleri arası artış $45^\circ - 90^\circ$ dereceleri arası azalma olmuştur. Dördüncü λ değerlerinde $0^\circ - 45^\circ$ dereceleri arası azalma $45^\circ - 90^\circ$ dereceleri arası artış olmuştur. Beşinci λ değerlerinde $0^\circ - 45^\circ$ dereceleri arası azalma $45^\circ - 90^\circ$ dereceleri arası artış olmuştur.

Altıncı λ değerlerinde $0^\circ - 45^\circ$ dereceleri arası artış $45^\circ - 90^\circ$ dereceleri arası azalma olmuştur. Güçlendiricilerin açılı yerleştirildiği doğrultularda Şekil 5.20, 5.26, 5.22 den de görüleceği gibi plak orta bölgelerinde, diğer dik doğrultuya göre daha rijit, eğilmeyen bir bölge oluşmuştur. Bu bölge $\theta = 45^\circ$ için plağın döndürme açısına paralel doğrultudaki köşegen boyunca olan kuşakta ortaya çıkmıştır. Bu bölgenin şekillenmesinde mesnet rijitliği (k) etkili olup $k = 10^2$ değerinde mesnetler ilk konumlarından uzaklaşabilmektedir $k = 10^8$ değerinde ise mesnetler yer değiştirmeden plakta mod şekilleri oluşmuştur. Elastisite modül oranları (e) aynı alındığında, döndürme açısı $\theta = 45^\circ$ de, mesnetlerin rijitlik (k) durumu etkili olmaksızın dördüncü λ değerleri aynı olmaktadır. Nokta mesnetlerin rijitliğinin (k) artırılmasıyla plak rijit nokta mesnetli duruma gelmiştir ve tüm doğal frekans değerleri (λ) monoton olarak artmaktadır.

Elastisite modül oranı (e) büyük seçildiğinde elde edilen doğal frekans değerleri beklenen bir durum olarak artmaktadır. Buradan güçlendirici (fiber) olarak kullanılan malzeminin elastisite modülünün büyük olmasıyla daha rijit yapının oluştuğu ve doğal frekansların arttığı görülmektedir.

45° açısına göre bulunan değerlere göre doğal frekans değerleri 15° ile 75° , 30° ile 60° , 0° ile 90° açıları için simetriktir. Bu değerler Çizelge 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 de verilmiştir. Doğal frekans değerlerinin böylesi bir simetri göstermesinin sebebi plağın kare olmasıdır.

Sayısal çözümlene için seçilen polinom terimlerinin sayısının artırılmasıyla elde edilen değerler gerçek doğal frekans değerlerine yaklaştığı ve Kocatürk ve İlhan (2003) tarafından elde edilen değerlere çok yakın sonuçlar verdiği Çizelge 5.11 de görülmektedir. Bu çizelgeden görülebileceği gibi problemin yakınsaklığı çok iyidir.

KAYNAKLAR

- Aksu, G. ve Al-Kaabi , S. A.,(1987), "Free Vibration Analysis of Mindlin Plates with Lineary Varying Thickness", *Jornal of Sound and Vibration*, 119(2):189-205.
- Aksu, G. ve Felemban, M. B., (1992),"Frequency Analysis of Corner Point Supported Mindlin Plates by Finite Difference Energy Method", *Journal of Sound and Vibration*, 158(3):531-544
- Aksu, G., (1993), "Vibration of Mindlin Plates Symmetrically Column-Supported at Four Points", *Computers and Structures*, 48(6):1163-1166.
- Choo Vincent K.S., (1990), "Fundamentals of Composite Materials", Department of Mechanical Engineering New Mexico, U.S.A, 35,1,135-243
- Cox, H.L.,(1955), "Vibration of a Square Plate, Point Supported at Mid-Points of Sides", *Journal of the Acoustical Society of America*, 27:791-792.
- Cox, H.L. ve Boxer, J., (1955), "Vibrations of Rectangular Plates Point-Supported at the Corners", *Aeronatical Quarterly*, 11:41-50.
- Gorman D. J., (1980),. "Free Vibration Analysis of Rectangular Plates with Symmetrically Distributed Point Supports Along the Edges", *Journal of Sound and Vibration*, 73,4,563-574
- Gorman D. J., (1990), "A General Solution for the Free Vibration of Rectangular Plates Resting on Uniform Elastic Edge Supports", *Journal of Sound and Vibration*, 139,2,325-335.
- Gorman D. J., (1993), "Accurate Free Vibration Analysis of the Completely Free Orthotropic Rectangular Plate by the Method of Superposition", *Journal of Sound and Vibration*, 165,3,409-420.
- Gorman D. J., (1994), "Free Vibration Analysis of Point-Supported Orthotropic Plates", *American Society of Civil Engineers, Journal of Engineering Mechanics*, 120,1,58-74.
- Gorman D. J., (1999), "Accurate Free Vibration Analysis of Point Supported Mindlin Plates by the Superposition Method", *Journal of Sound and Vibration*, 219,2,265-277.
- Kerstens, J. G. M.,(1979), "Vibration of a Rectangular Plate Supported at an Arbitrary Number of Points", *Journal of Sound and Vibration*, 65(4):493-504.
- Kim, C. S.ve Dickensen, S. M., (1987), "The Flexural Vibration of Rectangular Plates With Point Supports", *Journal of Sound and Vibration*, 117(2):249-261.
- Kocatürk T., (1998), "Determination of the Steady State Response of Viscoelastically Point-Supported Rectangular Anisotropic (Orthotropic) Plates", *Journal of Sound and Vibration*, 213,4,665-672.
- Kocatürk T. ve İlhan, N., (2003), "Free Vibration Analysis of Elastically Point Supported Orthotropic Plates", *Journal of Yıldız Technical University*.
- Laura P. A. A., Gutierrez R. H., (1981), "Transverse Vibrations of Thin, Elastic Plates with Concentrated Masses and Internal Elastic Supports", *Journal of Sound and Vibration*, 75,1,135-143.
- Leuner T. R., (1974), "An Experimental-Theoretical Study of Free Vibrations of Plates on Elastic Point Supports", *Journal of Sound and Vibration*, 32,481-490.

- Mizusawa, T. ve Kajita, T., (1987), "Vibration of Skew Plates Resting on Point Supports", *Journal of Sound and Vibration*, 115(2):243-251.
- Narita Y., (1984), "Note on Vibrations of Point Supported Rectangular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, 93,4,593-597.
- Raju, I. S. ve Rao, C. L. A., (1983), "Free Vibration of a Square Plate Symmetrically Supported at Four Points on the Diagonals", *Journal of Sound and Vibration*, 90:291-297
- Saha K. N., Kar R. C., Datta P. K., (1996), "Free Vibration Analysis of Rectangular Mindlin Plates with Elastic Restraints Uniformly Distributed Along the Edges", *Journal of Sound and Vibration*, 192,4,885-904.
- Szilard, R., (1974), "Theory and Analysis of Plates", Predice-Hall, New Jersey.
- Venkateswara Rao G., Raju I. S., Amba-Rao C. L., (1973), "Vibrations of Point Supported Plates", *Journal of Sound and Vibration*, 29,3,387-391.
- Yamada G., Irie T., Takahashi M., (1985), "Determination of the Steady State Response of Viscoelastically Point-Supported Rectangular Plates", *Journal of Sound Vibration*, 102,2,285-295.