

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

139754

**BOŞLUK İÇEREN YARI SONSUZ BİR ORTAMIN HARMONİK
TİTREŞİMLERİ**

İnşaat Müh. Ali CINGİR

**FBE İnşaat Müh. Anabilim Dalı Mekanik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. İrfan COŞKUN

T. Kocak
Wongell
Ahm

İSTANBUL, 2003

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ KÜTÜPHANE KURULU
DOKÜMANASYON MERKEZİ**

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
ÖNSÖZ.....	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. DÜZLEM ELASTİSİTEDE TEMEL DENKLEMLER.....	3
3. ANALİTİK ÇÖZÜM.....	5
3.1 Problemin Formülasyonu.....	5
3.2 Sınır Koşullarının Sağlatılması.....	11
3.2.1 Silindirik Boşluğun İçindeki Sınır Koşullarının Sağlatılması.....	12
3.2.2 Serbest Yüzeyde Sınır Koşullarının Sağlatılması.....	14
3.2.2.1 Simphson Yöntemiyle Çözüm.....	14
3.2.2.2 En Küçük Kareler Yöntemiyle Çözüm.....	15
4. SONUÇLAR.....	17
KAYNAKLAR.....	29
EKLER.....	30
Ek 1 Matlab Programı Hazırlanırken Yapılan İşlemler.....	31
Ek 2 Bessel Fonksiyonları Hakkında Açıklamalar.....	33
Ek 3 Dalga Denklemleri Hakkında Açıklamalar.....	34
ÖZGEÇMİŞ.....	37

SİMGE LİSTESİ

a	Silindirik boşluğun yarıçapı
e	Düzlemsel hacim değiştirme oranı
E	Elastisite modülü
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	Şekil değiştirme bileşenleri
ε_{xy}	Kayma şekil değiştirmesi
H	Silindirik boşluk merkezinin serbest yüzeye olan mesafesi
J_n	Birinci tip Bessel fonksiyonu
Y_n	İkinci tip Bessel fonksiyonu
k_1	Boyuna dalga sayısı
k_2	Enine dalga sayısı
n_x	Sınır eğrisinin dış normal birim vektörünün x bileşeni
n_y	Sınır eğrisinin dış normal birim vektörünün y bileşeni
p_i	Harmonik iç basınç
p_0	Harmonik iç basınç genliği
r, θ	Kutupsal koordinatlar
t	Zaman
\hat{i}_x	Sınır eğrisine etki eden dış kuvvetin x bileşeni
\hat{i}_y	Sınır eğrisine etki eden dış kuvvetin y bileşeni
\hat{U}	Yer değiştirme vektörü
\hat{U}_x	Sınırdaki yer değiştirmenin x bileşeni
\hat{U}_y	Sınırdaki yer değiştirmenin y bileşeni
U_x	Yer değiştirmenin x bileşeni
U_y	Yer değiştirmenin y bileşeni
U_r	Yer değiştirmenin radyal doğrultudaki bileşeni
U_θ	Yer değiştirmenin açısız doğrultudaki bileşeni
$\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$	Polar koordinatlardaki gerilme bileşenleri
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	Kartezyen koordinatlarda gerilme bileşenleri
λ, μ	Lamé sabitleri
ϕ, ψ	Yer değiştirme potansiyelleri
ν	Poisson oranı
c_1	Boyuna dalga hızı
c_2	Enine dalga hızı

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3. 1	Yarım düzlemde bulunan dinamik p_i iç basıncı etkisindeki silindirik oyuk.....	5
Şekil 3. 2	Serbest yüzeydeki sınır koşulları	14
Şekil 4. 1	Serbest yüzeyde $H = 10, 15$ ve 20 m. iken normal gerilmeler	18
Şekil 4. 2	Serbest yüzeyde $H = 10, 15$ ve 20 m. iken kayma gerilmeleri	18
Şekil 4. 3	Serbest yüzeyde $H = 10, 15$ ve 20 m. iken düşey yer değiştirmeler.....	19
Şekil 4. 4	Serbest yüzeyde $H = 10, 15$ ve 20 m. iken yatay yer değiştirmeler.....	19
Şekil 4. 5	Delik iç yüzeyinde $H = 10, 15$ ve 20 m. iken radyal doğrultudaki yer değiştirmeler.....	20
Şekil 4. 6	Delik iç yüzeyinde $H = 10, 15$ ve 20 m. iken açısall doğrultudaki yer değiştirmeler.....	20
Şekil 4. 7	Serbest yüzeyde $\omega = 60, 80$ ve 100 rad/sn iken normal gerilmeler.....	21
Şekil 4. 8	Serbest yüzeyde $\omega = 60, 80$ ve 100 rad/sn iken kayma gerilmeleri.....	21
Şekil 4. 9	Serbest yüzeyde $\omega = 60, 80$ ve 100 rad/sn iken düşey yer değiştirmeler.....	22
Şekil 4. 10	Serbest yüzeyde $\omega = 60, 80$ ve 100 rad/sn iken yatay yer değiştirmeler.....	22
Şekil 4. 11	Delik iç yüzeyinde $\omega = 60, 80$ ve 100 rad/sn iken radyal doğrultudaki yer değiştirmeler.....	23
Şekil 4. 12	Delik iç yüzeyinde $\omega = 60, 80$ ve 100 rad/sn iken açısall doğrultudaki yer değiştirmeler.....	23
Şekil 4. 13	Delik iç yüzeyinde $\omega = 60, 80$ ve 100 rad/sn iken açısall doğrultudaki gerilmeler.....	24
Şekil 4. 14	Delik iç yüzeyinde $H = 10, 15$ ve 20 m. iken açısall doğrultudaki gerilmeler.....	25
Şekil 4. 15	Serbest yüzeydeki normal ve kayma gerilmeleri (en küçük kareler metodu kullanılarak).....	26
Şekil 4. 16	Serbest yüzeydeki düşey ve yatay yer değiştirmeler (en küçük kareler metodu kullanılarak).....	27
Şekil 4. 17	Delik iç yüzeyindeki radyal ve açısall yer değiştirmeler (en küçük kareler metodu kullanılarak).....	28

ÖNSÖZ

Tez çalışmasının her aşamasında değerli katkılarını ve desteğini esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Sayın İrfan Coşkun'a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca Arş. Gör. Sayın Nihat İlhan'a teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak eğitimimin tüm aşamalarında bana verdikleri destek için aileme şükran ve sevgilerimi sunarım.



ÖZET

Sonsuz veya yarı sonsuz elastik ortam içinde yapılan yeraltı tünelleri ve boru hatları gibi mühendislik yapıları taşıt yükleri, sıvı ve gaz basınçları ve deprem dalgaları gibi dinamik etkilere maruzdurlar. Bu yüzden, bu etkilerden dolayı yapıda oluşabilecek gerilme ve yer değiştirmeleri bilmek tasarım açısından önemlidir.

Bu çalışmada harmonik iç basınca maruz boşluk içeren bir elastik yarı sonsuz ortamın titreşimleri incelendi. İlk olarak ilgili elastisite bağıntıları verilerek potansiyel fonksiyonlar yardımıyla indirgenmiş dalga denklemleri elde edildi. Daha sonra bu denklemler yardımıyla yer değiştirme ve gerilme alanları elde edildi. Çözümde ortaya çıkan integral sabitleri, ilgili sınır koşulları kullanılarak Simphson metoduyla elde edildi.

Çözüm sonunda, serbest yüzeyde ve oyuk iç yüzeyinde gerilme ve yer değiştirme bileşenlerinin çeşitli parametrelerle değişimi grafikler yardımıyla açıklandı.

Anahtar Kelimeler: Dalga denklemleri, harmonik basınç, Simphson metodu, silindirik oyuk.

ABSTRACT

Engineering structures like underground tunnels and pipelines which will be built in infinite or semi-infinite elastic media are subjected to liquid and gas pressures, traffic loads and earthquake waves. So, it is important to know the strains and displacements in structures caused by these effects for design purposes.

The vibrations of an elastic semi-infinite medium that has a cylindrical cavity which is subjected to a harmonic inner pressure were investigated at this work. Firstly, through the potential functions the wave equations were found by using the relevant elasticity equations. After that, displacements and strains were obtained from that equations. The integral constants appeared in the solution were obtained from the boundary conditions by using Simpson's method.

After the solution, the variation of the strains and displacements on the free surface and on the surface of the cavity with respect to various parameters were expressed with graphics.

Keywords: Wave equations, harmonic pressure, Simpson's method, cylindrical cavity.

1. GİRİŞ

Elastik ortam içindeki yeraltı tünelleri, yeraltı boru hatları, sualtı boru hatları gibi mühendislik yapıları; taşıt yükleri, sıvı ve gaz basınçları, ani patlama şok dalgaları ve deprem dalgaları gibi dinamik etkilere maruz kalmaktadırlar. Bu yüzden, bu tür yapıların dinamik davranışı ile ilgili olarak çok sayıda çalışma yapılmıştır.

Sonsuz ortam ile ilgili araştırmaların çokluğuna rağmen (Eringen ve Şuhubi, 1974; Graff, 1975) yarı sonsuz ortamdaki yapıların dinamik davranışı ile ilgili çalışmalar yeni sayılmaktadır. Yarı sonsuz ortam modelinin yer altı yapıları için sonsuz ortam modeline göre daha uygun olmasına karşılık matematik yapısı sınır koşullarının sağlatılması açısından zordur. Bilgisayarların karmaşık matematik problemlerin çözümünde kullanılır hale gelmesiyle yarı sonsuz ortam üzerine yapılan çalışmalar da artmıştır.

Elastik yarım uzayda bulunan silindirik boşluk, elastik silindirik kabuk v.s. gibi yapıların P, S ve SH dalgaları altındaki davranışları Datta (1984) ve arkadaşlarının pek çok çalışmasına konu olmuştur. Bu çalışmalarda yarım uzaydaki silindirik kabuğun harmonik dalga altındaki davranışı, asimptotik açılımların uydurulması ve ardışık yansımalar metodları kullanılarak incelenmiştir.

Datta, Shah ve Wong (1984), yarım düzlemdeki boru hattının etrafının farklı malzemeyle doldurulması halinde oluşacak dinamik davranışı incelemişlerdir. Sistemin davranışı Bessel fonksiyon serileri yardımıyla ifade edilmiş, serbest yüzey ve dolgu bölgesi yüzeyinden dalgaların ardışık yansımaları gözönüne alınmıştır. Geometrisinin dairesel kabuktan farklı olması halini Wong, Shah ve Datta (1985) yaptıkları bir çalışmayla incelemişlerdir. Bu çalışmada, iç bölgelerde sonlu eleman formülasyonu, dış bölgelerde analitik çözüm metodları kullanılmıştır.

Deprem dalgalarının tünel ve boru hatlarındaki etkilerini, Nelson ve Weidlinger (1978) oldukça kapsamlı olarak incelemiştir. Silindirik boşluk içeren yarım uzayda silindirik yüzey, zamana bağlı yüzey kuvvetleri de dikkate alınarak Thiruvengkatachar (1965) tarafından ardışık yaklaşımlar metoduyla incelenmiştir. Yeraltı tünellerindeki trenlerin

hareketi nedeniyle yerüstü yapılarına etkilerini Balendra (1991) ve arkadaşları incelemiştir. Ortamı viskoelastik, yerüstü yapısının temelini ve tüneli rijit cisim kabul etmişlerdir. Serbest yüzey üzerinde sonlu sayıda sınır şartları alınmış ve sınır şartlarının sayısı bilinmeyen sayısından fazla olduğu için Trefftz metodu uygulanmıştır. Luco ve Barros (1994) kabuk eksenine eğri bir açıdan gelen, harmonik düzlem dalgalarına maruz kalan ve katmanlı viskoelastik yarı uzayda gömülmüş dairesel kesitli sonsuz uzunluktaki silindirik kabuğun üç boyutlu harmonik davranışını incelemiştir.

Bu çalışmada, harmonik iç basınca maruz silindirik boşluk içeren bir yarı sonsuz ortamın harmonik titreşimleri incelenmiştir. Silindirik boşluğun ekseni boyunca geometrisi, malzeme özellikleri ve yüklemenin değişmemesi nedeniyle problem bir düzlem gerilme problemi olarak dikkate alındı. Yarı sonsuz düzlemdeki malzeme lineer elastik, homojen ve izotrop olarak göz önüne alındı. Yer değiştirme potansiyellerinin kullanılması ile silindirik koordinatlarda iki adet dalga denklemi elde edildi. Bu denklemler Bessel trigonometrik fonksiyon serileri yardımıyla çözüldü. Analitik çözüm sonunda ortaya çıkan bilinmeyenler (sabitler) , delik iç yüzeyi ve serbest yüzey üzerinde yazılan sınır koşulları kullanılarak hesaplandı. Boşluk iç yüzeyinde sınır koşulları tam olarak sağlanmaktadır. Serbest yüzeyde ise sınır koşulları ancak yaklaşık olarak sağlatılabilmektedir. Bu nedenle boşluk iç yüzeyindeki koşullar kullanılarak sabitlerin yarısı diğerleri cinsinden yazılmış ve bunlar serbest yüzeydeki koşullarda kullanılarak sabitler hesaplanmıştır. Serbest yüzeydeki koşulların sağlatılmasında Simpson sayısal integrasyon metodundan faydalanılmıştır. Sabitler hesaplandıktan sonra geriye dönülerek ilgili yerlerde gerilme ve yer değiştirmeler hesaplanmıştır. İkinci çeşit Bessel fonksiyonlarının büyük mertebelerde özellikle küçük argümanlar için ekstrem değerler alması nedeniyle sonlu sayıda terim alınmıştır.

Sayısal işlemlerde ve grafik çizimlerinde Matlab programlama dili kullanılmıştır. Sabitleri elde etmek için Simpson sayısal integral yöntemi ve en küçük kareler yöntemi kullanılmıştır.

2. DÜZLEM ELASTİSİTEDE TEMEL DENKLEMLER

Bu bölümde, incelenen problemde düzlem şekil değiştirme durumu söz konusu olduğu için lineer elastik, homojen ve izotrop ortamlar için düzlem elastisiteye ait diferansiyel denklemler verilmiştir. Bu denklemlerde bünye bağıntılarının kullanılmasıyla da yer değiştirmeler cinsinden alan denklemleri (Navier denklemleri) elde edilmiştir.

Lineer elastik, homojen ve izotrop ortamlar için hareket denklemi (Nelson ve Weidlinger, 1978);

$$\tau_{ij,j} + k_i = \rho \ddot{u}_i \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

şeklindedir (Graff, 1975). Burada k_i kütle kuvvetlerini, ρ kütle yoğunluğunu, \ddot{u}_i ivmeyi göstermektedir. Hacim kuvvetlerinin sıfır alınması ile bu denklem;

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

şeklini almaktadır. Bu bağıntılarda $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ gerilme tansörünün elemanlarını, U_x, U_y yer değiştirme bileşenlerini, t ise zamanı göstermektedir.

Gerilmeler cinsinden sınır koşulları şöyledir:

$$\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = \hat{t}_x \quad (2.4)$$

$$\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = \hat{t}_y \quad (2.5)$$

Burada n_x ve n_y sınır eğrisinin dış normal birim vektörünün bileşenleri, \hat{t}_x ve \hat{t}_y ise sınırdaki etki eden dış gerilme bileşenleridir. Yer değiştirmeler cinsinden sınır koşulları ise $U_x = \hat{U}_x$ ve $U_y = \hat{U}_y$ olup şapkalı terimler sınırdaki bilinen yer değiştirme bileşenleridir.

Lineer elastik, homojen ve izotrop ortamlar için bünye bağıntısı şöyle yazılabilir :

$$\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.6)$$

Burada δ_{ij} Kronecker deltasını göstermektedir. λ ve μ ise Lamé sabitleri olup elastisite modülü ve poisson oranı cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.7)$$

Hacim değiştirme oranı olan ε_{kk} ise düzlem şekil değiştirme hali için;

$$\varepsilon_{kk} = e = \varepsilon_x + \varepsilon_y \quad (2.8)$$

olmaktadır. Buradaki şekil değiştirme bileşenleri yer değiştirmeler cinsinden şu bağıntılardan elde edilebilir:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}) \quad i, j = 1, 2 \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial U_y}{\partial y} \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right] \quad (2.12)$$

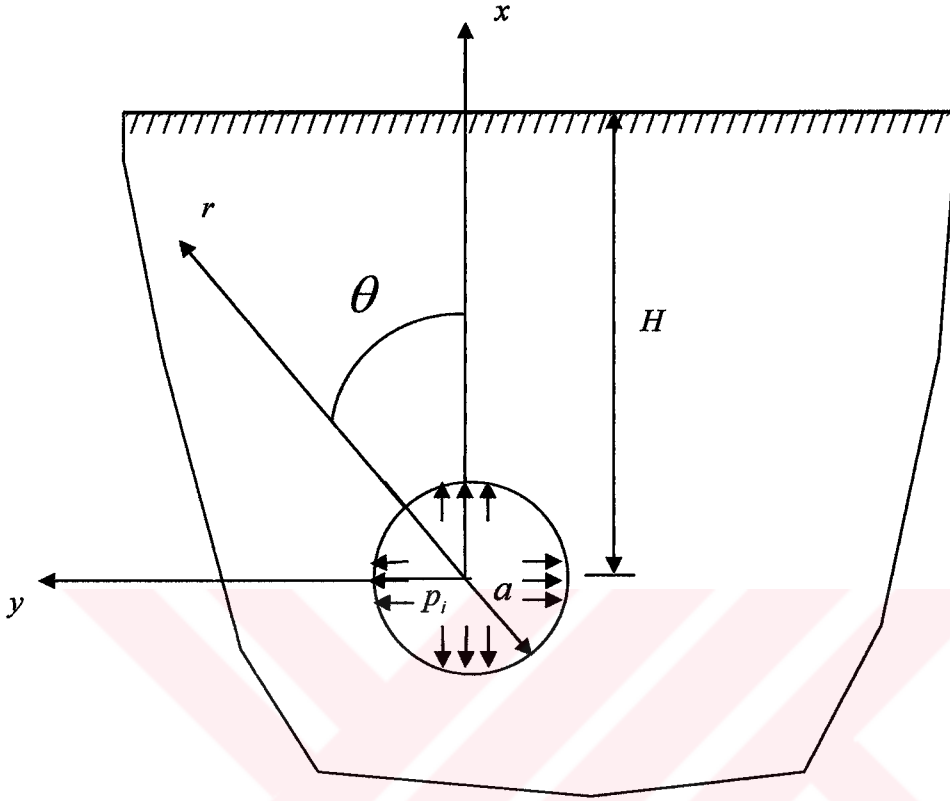
Yukarıda verilen şekil değiştirme bileşenleri, bünye bağıntısı ile birlikte hareket denklemlerinde yerine yazılıp düzenlenirse, yer değiştirmeler cinsinden Navier denklemleri şu şekilde elde edilir:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 U_x = \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^2 U_y = \rho \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} \quad (2.14)$$

3. ANALİTİK ÇÖZÜM

3.1 Problemin Formülasyonu



Şekil 3.1 Yarım düzlemde bulunan dinamik p_i iç basıncı etkisindeki silindirik oyuk

Yarı sonsuz ortamın serbest yüzeyinden H kadar derinlikte a yarıçaplı bir silindirik oyuk gözönüne alalım. Oyuk, iç yüzeyi boyunca harmonik iç basınca maruzdur. Ortamda geometri, malzeme özellikleri ve zorlama z oyuk eksenine boyunca değişmediğinden problem bir düzlem şekil değiştirme problemi olarak gözönüne alınmaktadır. Oyuk geometrisi nedeniyle kutupsal koordinatların kullanılması uygun olmaktadır. Bu durumda Navier denklemleri vektörel formda şu şekilde yazılabilir (Mow ve Pao, 1973; Eringen ve Şuhubi, 1974):

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla\cdot\vec{U} + \mu\nabla^2\vec{U} = \rho\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

Burada $\vec{U}(r,\theta,t)$ yer değiştirme vektörünü, ρ kütle yoğunluğunu, λ ve μ Lamé sabitlerini, r ve θ da kutupsal koordinatları göstermektedir. Boşluk iç yüzeyinde $p_i = p_0 e^{i\omega t}$ şeklinde bir harmonik iç basınç gözönüne alındığından yer değiştirme

fonksiyonu da $\vec{U}(r, \theta, t) = \vec{u}(r, \theta)e^{i\omega t}$ olarak alınabilir. Bu durumda hareket denklemleri şu hale gelir:

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla\cdot\vec{u} + \mu\nabla^2\vec{u} + \rho\omega^2\vec{u} = 0 \quad (3.2)$$

Burada \vec{u} çözüm fonksiyonunun koordinatlara bağlı kısmını göstermektedir. Bu vektör kutupsal koordinatlardaki bileşenleri cinsinden $\vec{u} = u_r\vec{e}_r + u_\theta\vec{e}_\theta$ şeklinde yazılabilir. (3.2) hareket denkleminin çözümü için Helmholtz ayırma teoremi kullanılacaktır (Graff, 1975). Bunun için \vec{u} yer değiştirme vektörü $\varphi(r, \theta)$ skaler ve $\vec{\psi}(r, \theta) = \psi(r, \theta)\vec{e}_z$ vektör potansiyel fonksiyonları cinsinden şu şekilde yazılmaktadır:

$$\vec{u} = \nabla\varphi + \nabla \times (\psi\vec{e}_z) \quad (3.3)$$

Bu ifadede tek çözüm elde edebilmek için $\nabla \times (\psi\vec{e}_z)$ terimi sıfır olmalıdır. Potansiyel fonksiyonlar cinsinden yazılan yer değiştirme ifadesi (3.2) denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse aşağıdaki indirgenmiş dalga denklemleri elde edilir :

$$\nabla^2\varphi + k_1^2\varphi = 0 \quad (3.4)$$

$$\nabla^2\psi + k_2^2\psi = 0 \quad (3.5)$$

Burada ∇^2 kutupsal koordinatlarda Laplasyen olup aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (3.6)$$

$k_1 = \omega/c_1$ boyuna dalga sayısını, $k_2 = \omega/c_2$ enine dalga sayısını, $c_1 = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}}$ boyuna

dalga hızını ve $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ enine dalga hızını göstermektedir.

Yer değiştirme vektörünün kutupsal koordinatlardaki bileşenleri, φ ve ψ potansiyelleri cinsinden şu şekilde yazılabilir:

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \quad (3.7)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (3.8)$$

Gerilme-yer değiştirme bağıntılarının silindirik koordinatlardaki ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (3.9)$$

$$\sigma_\theta = \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (\lambda + 2\mu) \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (3.10)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\mu}{r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - u_\theta + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad (3.11)$$

Yukarıdaki denklemlerin çözümleri için φ ve ψ potansiyel fonksiyonları Bessel ve trigonometrik fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki gibi sonsuz seriler şeklinde ifade edilebilir:

$$\varphi = \sum_{-\infty}^{\infty} [\bar{A}_n J_n(k_1 r) + \bar{B}_n Y_n(k_1 r)] [P_n \cos n\theta + Q_n \sin n\theta] \quad (3.12)$$

$$\psi = \sum_{-\infty}^{\infty} [\bar{C}_n J_n(k_2 r) + \bar{D}_n Y_n(k_2 r)] [\bar{P}_n \cos n\theta + \bar{Q}_n \sin n\theta] \quad (3.13)$$

Burada şekil, malzeme özellikleri ve sınır şartları x eksenine göre simetrik olduğu için Q_n ve \bar{P}_n özdeş olarak sıfırdır (Mow ve Pao, 1973). Bu durumda (3.12) ve (3.13) deki ifadeler şu şekilde olur:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n J_n(k_1 r) + B_n Y_n(k_1 r)] \cos n\theta \quad (3.14)$$

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n J_n(k_2 r) + D_n Y_n(k_2 r)] \sin n\theta \quad (3.15)$$

Buradaki A_n , B_n , C_n ve D_n ler sınır koşullarından elde edilecek sabitlerdir. J_n ve Y_n Bessel fonksiyonları ile ilgili açıklamalar Ek 2'de verilmiştir. Yer değiştirme bileşenleri, (3.14) ve (3.15) in (3.7) ve (3.8) ifadelerinde yerine yazılmasıyla şu şekilde elde edilir:

$$u_r = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \left(\frac{n}{r} J_n(k_1 r) - k_1 J_{n+1}(k_1 r) \right) + B_n \left(\frac{n}{r} Y_n(k_1 r) - k_1 Y_{n+1}(k_1 r) \right) + C_n \frac{n}{r} J_n(k_2 r) + D_n \frac{n}{r} Y_n(k_2 r) \right] \cos n\theta \quad (3.16)$$

$$u_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-A_n \frac{n}{r} J_n(k_1 r) - B_n \frac{n}{r} Y_n(k_1 r) - C_n \left(\frac{n}{r} J_n(k_2 r) - k_2 J_{n+1}(k_2 r) \right) - D_n \left(\frac{n}{r} Y_n(k_2 r) - k_2 Y_{n+1}(k_2 r) \right) \right] \sin n\theta \quad (3.17)$$

Bu yer değiştirmelere ait bağıntılar gerilme-yer değiştirme bağıntılarında yerine yazılırsa gerilme bileşenleri Bessel trigonometrik fonksiyon serileri cinsinden şu şekilde elde edilir:

$$\sigma_r = 2\mu \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_n \left[\left(\frac{n^2 - n}{r^2} - \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu} \right) k_1^2 \right) J_n(k_1 r) + \frac{k_1}{r} J_{n+1}(k_1 r) \right] + B_n \left[\left(\frac{n^2 - n}{r^2} - \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu} \right) k_1^2 \right) Y_n(k_1 r) + \frac{k_1}{r} Y_{n+1}(k_1 r) \right] + C_n \left[\left(\frac{n^2 - n}{r^2} \right) J_n(k_2 r) - n \frac{k_2}{r} J_{n+1}(k_2 r) \right] + D_n \left[\left(\frac{n^2 - n}{r^2} \right) Y_n(k_2 r) - n \frac{k_2}{r} Y_{n+1}(k_2 r) \right] \right\} \cos n\theta$$

$$\sigma_\theta = 2\mu \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_n \left[\left(-\frac{n^2 - n}{r^2} - \frac{\lambda}{2\mu} k_1^2 \right) J_n(k_1 r) - \frac{k_1}{r} J_{n+1}(k_1 r) \right] + B_n \left[\left(-\frac{n^2 - n}{r^2} - \frac{\lambda}{2\mu} k_1^2 \right) Y_n(k_1 r) - \frac{k_1}{r} Y_{n+1}(k_1 r) \right] + C_n \left[\left(-\frac{n^2 - n}{r^2} \right) J_n(k_2 r) + n \frac{k_2}{r} J_{n+1}(k_2 r) \right] + D_n \left[\left(-\frac{n^2 - n}{r^2} \right) Y_n(k_2 r) + n \frac{k_2}{r} Y_{n+1}(k_2 r) \right] \right\} \cos n\theta$$

$$\tau_{r\theta} = 2\mu \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_n \left[\left(-\frac{n^2 - n}{r^2} J_n(k_1 r) \right) + n \frac{k_1}{r} J_{n+1}(k_1 r) \right] + B_n \left[\left(-\frac{n^2 - n}{r^2} Y_n(k_1 r) \right) + n \frac{k_1}{r} Y_{n+1}(k_1 r) \right] + C_n \left[\left(-\frac{n^2 - n}{r^2} + \frac{k_2^2}{2} \right) J_n(k_2 r) - \frac{k_2}{r} J_{n+1}(k_2 r) \right] + D_n \left[\left(-\frac{n^2 - n}{r^2} + \frac{k_2^2}{2} \right) Y_n(k_2 r) - \frac{k_2}{r} Y_{n+1}(k_2 r) \right] \right\} \sin n\theta$$

(3.18)

Serbest yzey üzerinde kartezyen koordinatlardaki bzyklkler kullanılacağı için yer değiştirmeler için şu bağıntılar yazılmaktadır:

$$U_x = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta \quad (3.19)$$

$$U_y = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta \quad (3.20)$$

$$\sigma_x = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{r\theta} \sin 2\theta \quad (3.21)$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{r\theta} \sin 2\theta \quad (3.22)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta - \tau_{r\theta} \cos 2\theta \quad (3.23)$$

σ_x ve τ_{xy} gerilmeleri için Bessel fonksiyonlarına ve trigonometrik fonksiyonlara bağlı şu ifadeler yazılabilir (Akpınar, 2000):

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left\{ \left(-(\lambda + \mu)k_1^2 J_n(k_1 r) + 2\mu \left[\left(\frac{n^2 - n}{r^2} - \frac{k_1^2}{2} \right) J_n(k_1 r) + \frac{k_1}{r} J_{n+1}(k_1 r) \right] \cos 2\theta \right) \cos n\theta + \right. \\ & \left. 2\mu \left[-\frac{n^2 - n}{r^2} J_n(k_1 r) + n \frac{k_1}{r} J_{n+1}(k_1 r) \right] \sin 2\theta \sin n\theta \right\} \\ & + B_n \left\{ \left(-(\lambda + \mu)k_1^2 Y_n(k_1 r) + 2\mu \left[\left(\frac{n^2 - n}{r^2} - \frac{k_1^2}{2} \right) Y_n(k_1 r) + \frac{k_1}{r} Y_{n+1}(k_1 r) \right] \cos 2\theta \right) \cos n\theta + \right. \\ & \left. 2\mu \left[-\frac{n^2 - n}{r^2} Y_n(k_1 r) + n \frac{k_1}{r} Y_{n+1}(k_1 r) \right] \sin 2\theta \sin n\theta \right\} \\ & + C_n 2\mu \left\{ \left(\frac{n^2 - n}{r^2} J_n(k_2 r) - n \frac{k_2}{r} J_{n+1}(k_2 r) \right) \cos 2\theta \cos n\theta + \left[\left(-\frac{n^2 - n}{r^2} + \frac{k_2^2}{2} \right) J_n(k_2 r) - \frac{k_2}{r} J_{n+1}(k_2 r) \right] \right. \\ & \left. \sin 2\theta \sin n\theta \right\} \\ & + D_n 2\mu \left\{ \left(\frac{n^2 - n}{r^2} Y_n(k_2 r) - n \frac{k_2}{r} Y_{n+1}(k_2 r) \right) \cos 2\theta \cos n\theta + \left[\left(-\frac{n^2 - n}{r^2} + \frac{k_2^2}{2} \right) Y_n(k_2 r) - \frac{k_2}{r} Y_{n+1}(k_2 r) \right] \right. \\ & \left. \sin 2\theta \sin n\theta \right\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y = & \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left\{ \begin{aligned} & \left(-(\lambda + \mu)k_1^2 J_n(k_1 r) - 2\mu \left[\left(\frac{n^2 - n}{r^2} - \frac{k_1^2}{2} \right) J_n(k_1 r) + \frac{k_1}{r} J_{n+1}(k_1 r) \right] \cos 2\theta \right) \cos n\theta - \\ & 2\mu \left[-\frac{n^2 - n}{r^2} J_n(k_1 r) + n \frac{k_1}{r} J_{n+1}(k_1 r) \right] \sin 2\theta \sin n\theta \end{aligned} \right\} \\
& + B_n \left\{ \begin{aligned} & \left(-(\lambda + \mu)k_1^2 Y_n(k_1 r) - 2\mu \left[\left(\frac{n^2 - n}{r^2} - \frac{k_1^2}{2} \right) Y_n(k_1 r) + \frac{k_1}{r} Y_{n+1}(k_1 r) \right] \cos 2\theta \right) \cos n\theta - \\ & 2\mu \left[-\frac{n^2 - n}{r^2} Y_n(k_1 r) + n \frac{k_1}{r} Y_{n+1}(k_1 r) \right] \sin 2\theta \sin n\theta \end{aligned} \right\} + \\
& C_n 2\mu \left\{ \begin{aligned} & - \left(\frac{n^2 - n}{r^2} J_n(k_2 r) - n \frac{k_2}{r} J_{n+1}(k_2 r) \right) \cos 2\theta \cos n\theta - \left[\left(-\frac{n^2 - n}{r^2} + \frac{k_2^2}{2} \right) J_n(k_2 r) - \frac{k_2}{r} J_{n+1}(k_2 r) \right] \\ & \sin 2\theta \sin n\theta \end{aligned} \right\} + \\
& D_n 2\mu \left\{ \begin{aligned} & - \left(\frac{n^2 - n}{r^2} Y_n(k_2 r) - n \frac{k_2}{r} Y_{n+1}(k_2 r) \right) \cos 2\theta \cos n\theta - \left[\left(-\frac{n^2 - n}{r^2} + \frac{k_2^2}{2} \right) Y_n(k_2 r) - \frac{k_2}{r} Y_{n+1}(k_2 r) \right] \\ & \sin 2\theta \sin n\theta \end{aligned} \right\} \\
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = & 2\mu \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left\{ \begin{aligned} & \left[\left(\frac{n^2 - n}{r^2} - \frac{k_1^2}{2} \right) J_n(k_1 r) + \frac{k_1}{r} J_{n+1}(k_1 r) \right] \sin 2\theta \cos n\theta - \left[-\frac{n^2 - n}{r^2} J_n(k_1 r) + n \frac{k_1}{r} \right. \\ & \left. J_{n+1}(k_1 r) \right] \cos 2\theta \sin n\theta \end{aligned} \right\} \\
& + B_n \left\{ \begin{aligned} & \left[\left(\frac{n^2 - n}{r^2} - \frac{k_1^2}{2} \right) Y_n(k_1 r) + \frac{k_1}{r} Y_{n+1}(k_1 r) \right] \sin 2\theta \cos n\theta - \left[-\frac{n^2 - n}{r^2} Y_n(k_1 r) + n \frac{k_1}{r} \right. \\ & \left. Y_{n+1}(k_1 r) \right] \cos 2\theta \sin n\theta \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_n \left\{ \left(\frac{n^2 - n}{r^2} J_n(k_2 r) - n \frac{k_2}{r} J_{n+1}(k_2 r) \right) \sin 2\theta \cos n\theta - \left[\begin{array}{l} \left(-\frac{n^2 - n}{r^2} + \frac{k_2^2}{2} \right) J_n(k_2 r) - \frac{k_2}{r} J_{n+1} \\ (k_2 r) \end{array} \right] \right\} \\
& \left. \cos 2\theta \sin n\theta \right\} \\
& + D_n \left\{ \left(\frac{n^2 - n}{r^2} Y_n(k_2 r) - n \frac{k_2}{r} Y_{n+1}(k_2 r) \right) \sin 2\theta \cos n\theta - \left[\begin{array}{l} \left(-\frac{n^2 - n}{r^2} + \frac{k_2^2}{2} \right) Y_n(k_2 r) - \frac{k_2}{r} Y_{n+1} \\ (k_2 r) \end{array} \right] \right\} \\
& \left. \cos 2\theta \cos n\theta \right\}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

3.2 Sınır Koşullarının Sağlatılması

Analitik çözümde kullanılan $J_n(x)$ ve $Y_n(x)$ birinci ve ikinci çeşit Bessel fonksiyonlarından $Y_n(x)$ fonksiyonunun büyük indis ve küçük argüman halinde ekstrem değerler alması nedeniyle seriler belirli bir N değerinde kesilmektedir. Bu durumda sabitlerin sayısı $4N + 4$ olmaktadır. İfadelerde n sıfır alındığında C_0 ve D_0 sabitleri ortadan kalkmakta ve bilinmeyenlerin sayısı $4N + 2$ olmaktadır.

3.2.1 Silindirik Boşluğun İçindeki Sınır Koşullarının Sağlatılması

Silindirik boşluğun iç yüzeyinde σ_r , radyal gerilmesi, zorlayıcı etki olan p_0 dinamik iç basınç genliğine, $\tau_{r\theta}$ kayma gerilmesi de θ ' nın her değerinde sifıra eşit olmalıdır. Bunlardan σ_r ile ilgili olandan şu ifade gelir:

$$\sigma_r = 2\mu \sum_{n=0}^N \left\{ A_n \left[\left(\frac{n^2 - n}{r^2} - \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu} \right) k_1^2 \right) J_n(k_1 r) + \frac{k_1}{r} J_{n+1}(k_1 r) \right] + B_n \left[\left(\frac{n^2 - n}{r^2} - \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu} \right) k_1^2 \right) Y_n(k_1 r) + \frac{k_1}{r} Y_{n+1}(k_1 r) \right] + C_n \left[\left(\frac{n^2 - n}{r^2} \right) J_n(k_2 r) - n \frac{k_2}{r} J_{n+1}(k_2 r) \right] + D_n \left[\left(\frac{n^2 - n}{r^2} \right) Y_n(k_2 r) - n \frac{k_2}{r} Y_{n+1}(k_2 r) \right] \right\} \cos n\theta = -p_0 \quad (3.27)$$

Bu denklemin θ ' nın her değerinde sağlanabilmesi için $\cos n\theta$ ' nin çarpanı olan ifade $n = 0$ da $-p_0$ ' a, n ' nin diğer bütün değerlerinde ise sifıra eşit olmalıdır.

$n=0$ için:

$$2\mu \left\{ A_0 \left[- \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu} \right) k_1^2 J_0(k_1 a) + \frac{k_1}{a} J_1(k_1 a) \right] + B_0 \left[- \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu} \right) k_1^2 Y_0(k_1 a) + \frac{k_1}{a} Y_1(k_1 a) \right] \right\} = -p_0 \quad (3.28)$$

$n > 0$ için σ_r gerilmesi, aşağıdan da görüleceği üzere içerdeki sabitlere bağlı ifadelerin sifır olmasıyla mümkündür.

$$\sum_{n=1}^N \left\{ A_n \left[\left(\frac{n^2 - n}{a^2} - \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu} \right) k_1^2 \right) J_n(k_1 a) + \frac{k_1}{r} J_{n+1}(k_1 a) \right] + B_n \left[\left(\frac{n^2 - n}{a^2} - \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu} \right) k_1^2 \right) Y_n(k_1 a) + \frac{k_1}{a} Y_{n+1}(k_1 a) \right] + C_n \left[\left(\frac{n^2 - n}{a^2} \right) J_n(k_2 a) - n \frac{k_2}{a} J_{n+1}(k_2 a) \right] + D_n \left[\left(\frac{n^2 - n}{a^2} \right) Y_n(k_2 a) - n \frac{k_2}{a} Y_{n+1}(k_2 a) \right] \right\} = 0$$

$$n = 1, 2, \dots, N \quad (3.29)$$

Silindirik boşluğun iç yüzeyinde $\tau_{r\theta}$ ifadesi sifır olmalıdır:

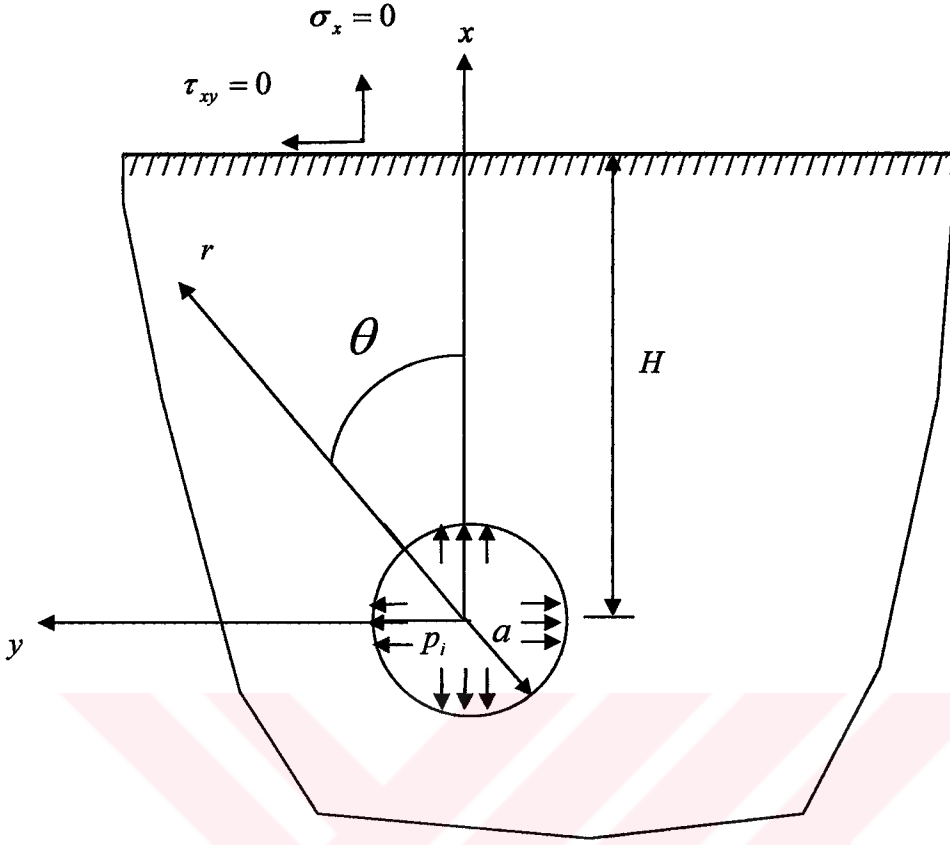
$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta} = \sum_{n=1}^N \left\{ A_n \left[\left(-\frac{n^2-n}{a^2} J_n(k_1 a) \right) + n \frac{k_1}{a} J_{n+1}(k_1 a) \right] + B_n \left[\left(-\frac{n^2-n}{a^2} Y_n(k_1 a) \right) + n \frac{k_1}{a} Y_{n+1}(k_1 a) \right] \right. \\
\left. + C_n \left[\left(-\frac{n^2-n}{a^2} + \frac{k_2^2}{2} \right) J_n(k_2 a) - \frac{k_2}{a} J_{n+1}(k_2 a) \right] + D_n \left[\left(-\frac{n^2-n}{a^2} + \frac{k_2^2}{2} \right) Y_n(k_2 a) - \frac{k_2}{a} Y_{n+1}(k_2 a) \right] \right\} = 0
\end{aligned}$$

$$n = 1, 2, \dots, N \quad (3.30)$$

Böylece silindirik boşluğun iç yüzeyinde toplam $2N + 1$ adet denklem elde edilmiş olur.



3.2.2 Serbest Yüzeyde Sınır Koşullarının Sağlatılması



Şekil 3.2 Yarım düzlemde bulunan dinamik p_i iç basıncı etkisindeki silindirik oyuk

Serbest yüzeyde $2N + 1$ adet koşula ihtiyacımız olmasına rağmen burada sonsuz sayıda koşul yazılabilir. Ancak N 'nin de belli değerlerden daha büyük alınmaması nedeni ile sonlu sayıda denkleme ihtiyacımız olacaktır. Bu denklemlerin elde edilmesi ve sabitlerin hesabı için ilk olarak Simpson yöntemi kullanıldı. Daha sonra en küçük kareler yöntemi ile de hesap yapılarak gerilme ve yer değiştirmeler elde edildi. Simpson yöntemi bir sayısal integral yöntemi olup bu yöntemin uygulanabilmesi için nokta sayısının tek sayıda olması ve aralıkların eşit alınması gerekir.

3.2.2.1 Simpson Yöntemi ile Çözüm

Sayısal integrasyon metodları bir fonksiyonun veya deneysel olarak elde edilmiş verilerin yaklaşık bir fonksiyonla değiştirilmesi esasına dayanmaktadır. Bu sayısal integrasyon metodlarından Simpson 1/3 metodu kullanıldı. Simpson 1/3 metodu şu ifade ile özetlenebilir:

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \cong \frac{h}{3} [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})] \quad (3.31)$$

Bu ifadedeki h üst sınırla alt sınır arasındaki farkın nokta sayısına oranını göstermektedir.

(3.31) deki ifadeyi aşağıdaki gibi yazmak mümkündür:

$$I \cong (b-a) \frac{f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5,\dots}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=2,4,6,\dots}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)}{3n} \quad (3.32)$$

Bahsedilen $2N+1$ denklem serbest yüzey üzerinde normal ve kayma gerilmelerinin bileşkesinin integralinin minimum olması koşulu kullanılarak elde edilebilir. Diğer bir deyişle;

$$J = \int_0^{\infty} (\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2) dy = \min \quad (3.33)$$

olmalıdır. Bunun için sabitlere göre alınacak türevler sıfır olmalıdır:

$$\frac{\partial J}{\partial E_n} = 0, \quad n = 0,1,2,\dots,N, \quad E_n = B_0, C_1, C_2, C_n, D_1, D_2, D_n \quad (3.34)$$

Sonuçta $2N+1$ adet lineer denklem elde edilerek sabitler bulunmaktadır.

3.2.2.2 En Küçük Kareler Yöntemi ile Çözüm

Serbest yüzey üzerindeki herhangi bir k noktasında $r_k = \frac{H}{\cos \theta_k}$ olmaktadır. Bu noktada

yaklaşık olarak hesaplanan σ_x , τ_{xy} gerilmeleri ile gerçek gerilmeler $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\tau}_{xy}$ arasındaki farkların kareleri toplamı:

$$d^2 = (\sigma_x - \bar{\sigma}_x)^2 + (\tau_{xy} - \bar{\tau}_{xy})^2 = \min \quad (3.35)$$

olmaktadır.

Yüzey üzerinde M adet nokta alınması halinde bu farkların karelerinin toplamı şu şekilde olur:

$$\sum_{k=1}^M d^2 = \sum_{k=1}^M (\sigma_x - \bar{\sigma}_x)^2 + (\tau_{xy} - \bar{\tau}_{xy})^2 \quad (3.36)$$

$\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{xy}$ yüzeydeki gerçek gerilmeler olup sifıra eşittirler. Yani $r_k = \frac{H}{\cos \theta_k}$ n' nin her değeri

için $\bar{\sigma}_x = 0$ ve $\bar{\tau}_{xy} = 0$ olmalıdır. Bu durumda (3.36) ifadesi aşağıdaki gibi olur:

$$\sum_{k=1}^M d^2 = \sum_{k=1}^M \sigma_x^2 + \sum_{k=1}^M \tau_{xy}^2 = \sum_{k=1}^M \left[P_1 + B_0 \gamma_{10} + \sum_{n=1}^N (C_n \gamma_{1n} + D_n \psi_{1n}) \right]^2 + \sum_{k=1}^M \left[\frac{P_2 + B_0 \gamma_{20} + \sum_{n=1}^N (C_n \gamma_{2n} + D_n \psi_{2n})}{\sum_{n=1}^N (C_n \gamma_{2n} + D_n \psi_{2n})} \right]^2 \quad (3.37)$$

Burada B_0, C_n ve D_n terimleri aradığımız bilinmeyen sabitlerdir.

En küçük kareler yönteminde $\sum d^2$ toplam ifadesinin minimum olması gerekmektedir.

Yani;

$$\frac{\partial}{\partial B_0} \sum d^2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial C_r} \sum d^2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial D_r} \sum d^2 = 0 \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (3.38)$$

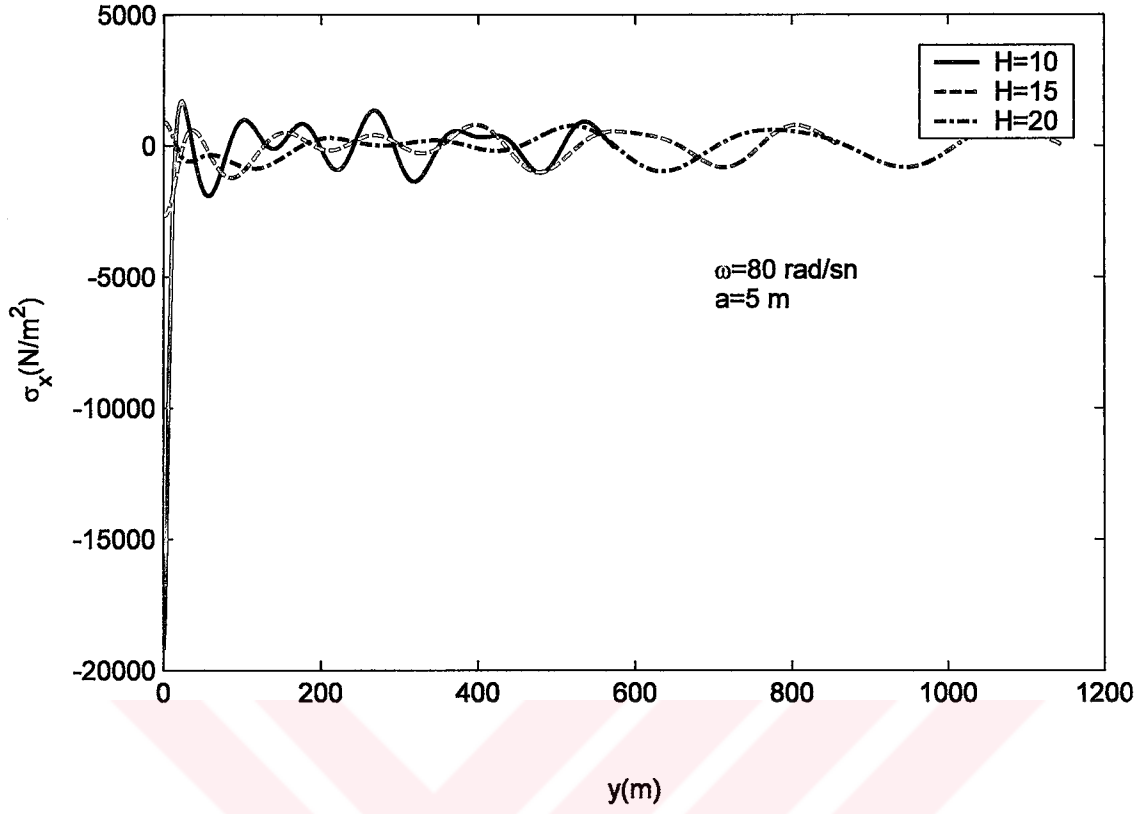
olmalıdır. Bu türetmeyi (3.37) de uygulayıp gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\sum_{k=1}^M \sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial B_0} + \sum_{k=1}^M \tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial B_0} = 0, \quad \sum_{k=1}^M \sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial C_n} + \sum_{k=1}^M \tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial C_n} = 0, \quad \sum_{k=1}^M \sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial D_n} + \sum_{k=1}^M \tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial D_n} = 0 \quad (3.39)$$

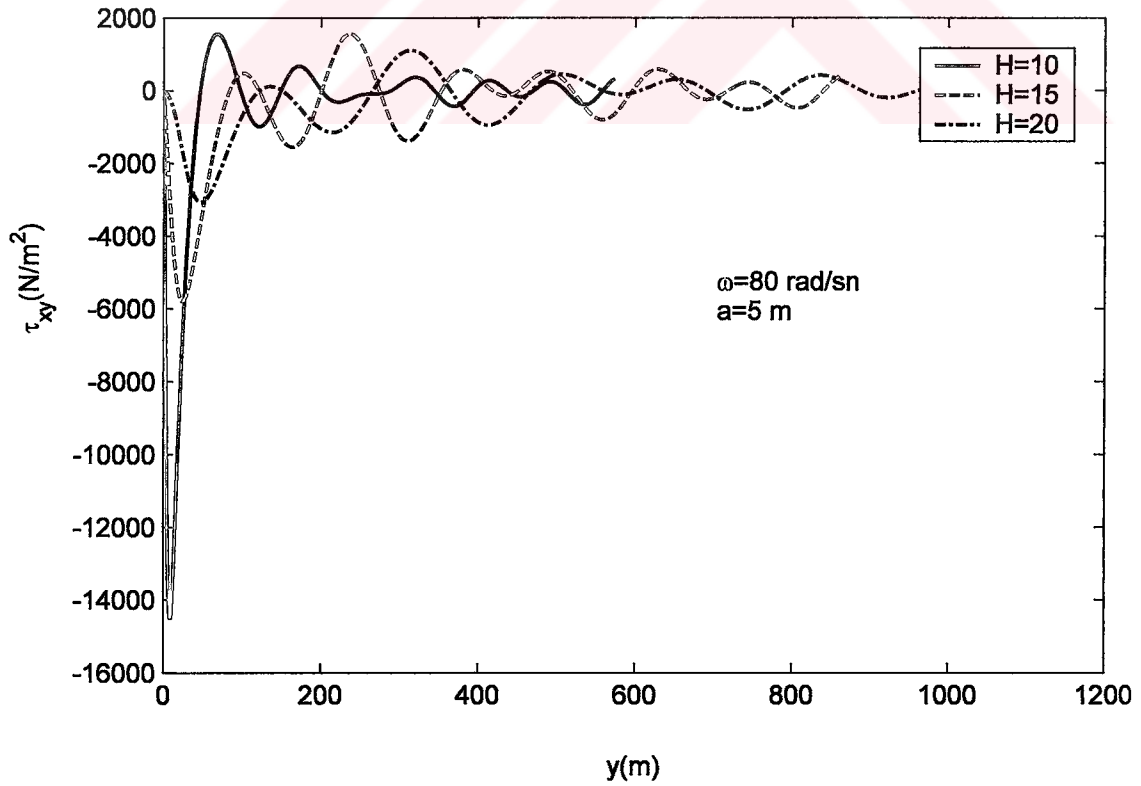
Bu lineer denklem sisteminin çözümü bize bilinmeyen sabitleri verecektir. Buradan B_0, C_n, D_n ve sonra da A_0, A_n, B_n bilinmeyenleri hesaplanmış olur. Bundan sonra bu katsayıları kullanarak istenilen herhangi bir noktadaki yer değiştirme ve gerilme bileşenlerini hesaplayabiliriz.

4. SONUÇLAR

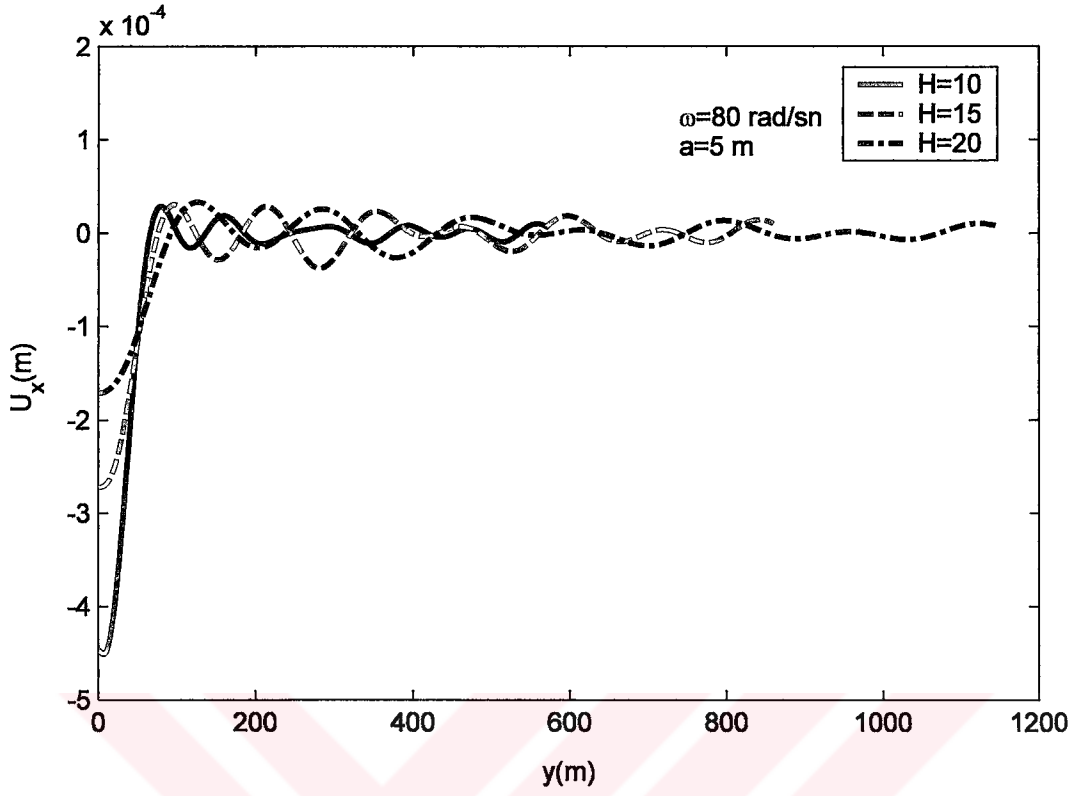
Bu çalışmada serbest yüzeyde 300 adet nokta alınarak Simphson metodu ile sonuçlar elde edildi. Ayrıca $\rho = 2665 \text{ kg/m}^3$, $E = 7.567 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\nu = 0.25$, $P_0 = 10^5 \text{ N/m}^2$ ve $N = 6$ alınarak işlemler yapıldı. Simphson metoduyla elde edilen grafikler yardımıyla yüzeyde oluşacak normal ve kayma gerilmelerinin H ve ω değerlerine bağlı değişimi, yüzeydeki yatay ve düşey yer değiştirmeler ile delik içindeki yer değiştirmelerin H ve ω ya bağlı değişimi incelendi. İlk altı grafikte ω sabitken H üç farklı değer alınarak ve bunlar bir grafikte gösterilerek incelendi. Sonraki altı grafikte de aynı H değerleri için ω değerleri değiştirilerek sonuçlar elde edildi. Serbest yüzeyde sıfır olması gereken normal ve kayma gerilmelerinin, oldukça küçük değerler aldığı ve oyuktan uzaklaştıkça azaldığı görülmektedir. Serbest yüzeydeki yatay yer değiştirmeler (4.4) ve (4.10) daki grafiklerden de görüldüğü gibi başlangıçta sıfır olup bir süre artmakta daha sonra azalmakta ve gittikçe sönümlenen bir harmonik salınım yapmaktadır. Serbest yüzeydeki düşey yer değiştirmelerse başlangıçta negatif ve mutlak olarak büyük bir değerden başlayıp pozitif değer almakta ve gittikçe sönümlenmektedir. Grafiklerden, en büyük yer değiştirmenin boşluk tepe noktası civarında ortaya çıktığı görülmektedir. Yer değiştirmenin radyal doğrultudaki bileşeni u_r , (4.5) ve (4.11) deki grafiklerden de görüleceği gibi negatif ve mutlak değerce büyük bir değerden başlayıp gittikçe artmakta ve daha sonra azalmaktadır. Delik iç yüzeyindeki radyal ve açısız doğrultudaki yer değiştirmeler, serbest yüzeye olan mesafe yani H değeri arttıkça azalmaktadır. Bu durumu (4.5) ve (4.6) daki grafiklerden görmek mümkündür. Buradan H değeri ile iç yüzeydeki yer değiştirmelerin ters orantılı olarak değiştiği söylenebilir. (4.13) ve (4.14) deki grafiklerden, σ_θ nın belirli bir H değeri için ω nın büyümesiyle büyüdüğü, belirli bir ω değeri içinse H ın artması ile küçüldüğü görülmektedir. Serbest yüzeyde ve delik iç yüzeyindeki gerilme ve yer değiştirmeler en küçük kareler metodu ile de elde edilip şekil (4.15), (4.16) ve (4.17) de bunların H ve ω parametreleriyle değişimi verilmiştir.



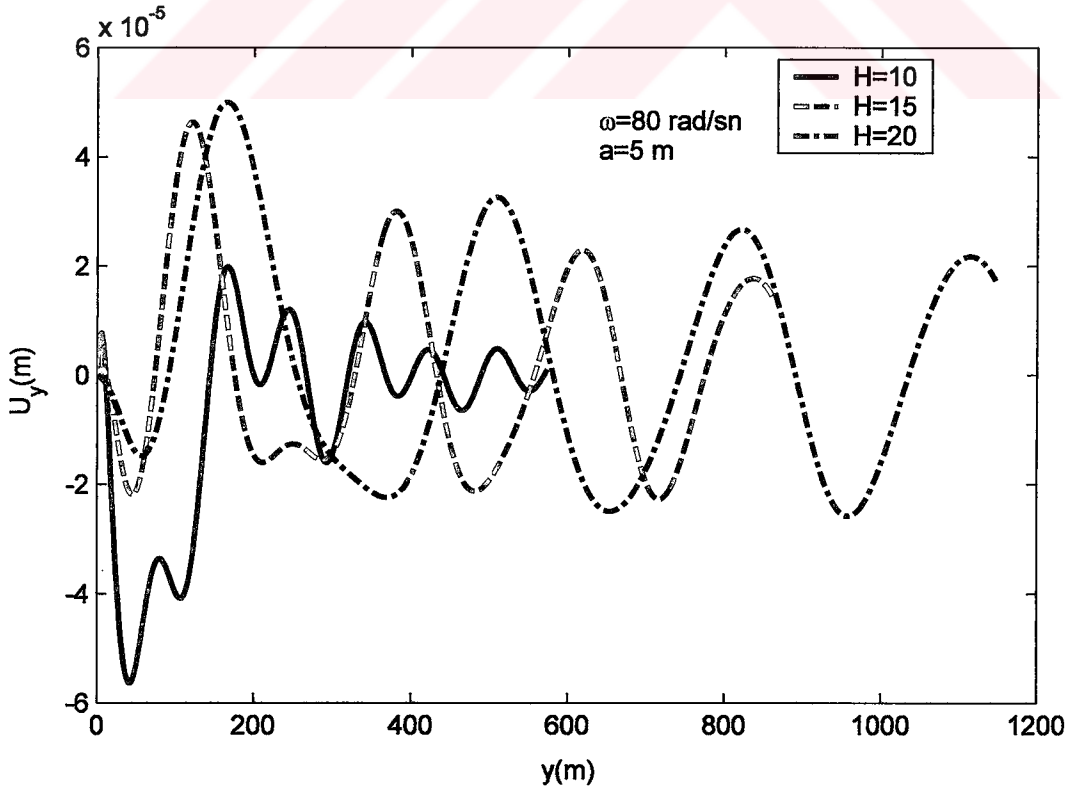
Şekil 4. 1 Serbest yüzeydeki normal gerilmeler



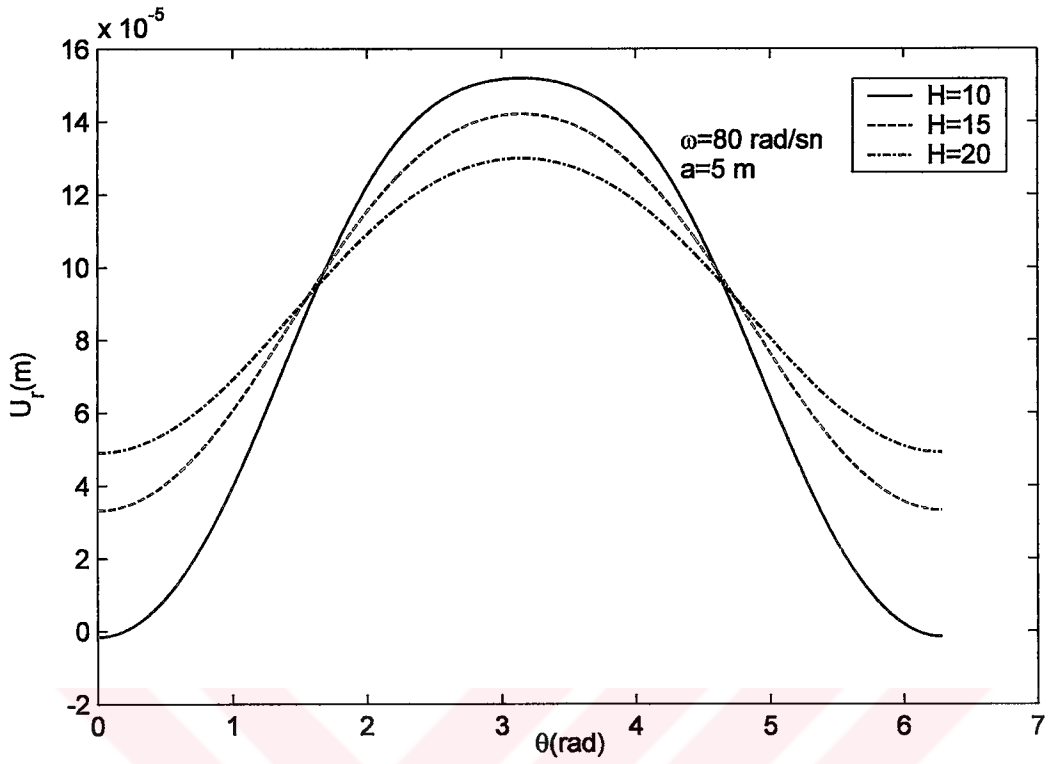
Şekil 4. 2 Serbest yüzeydeki kayma gerilmeleri



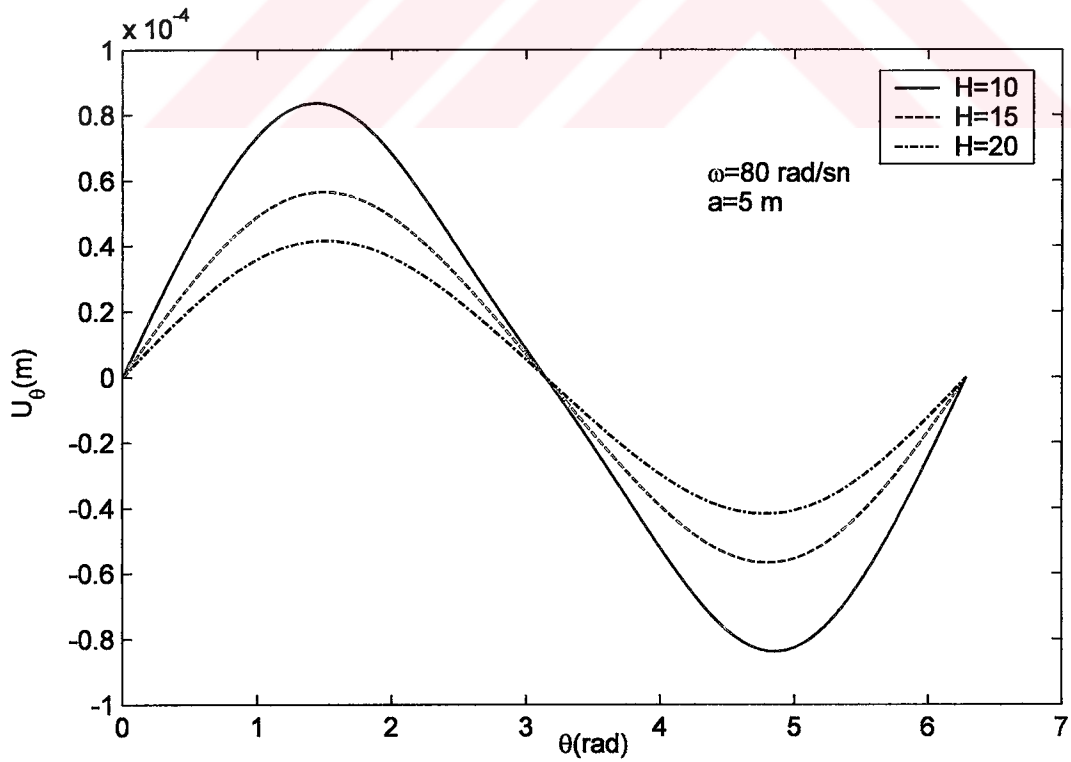
Şekil 4. 3 Serbest yüzeydeki düşey yer değiştirmeler



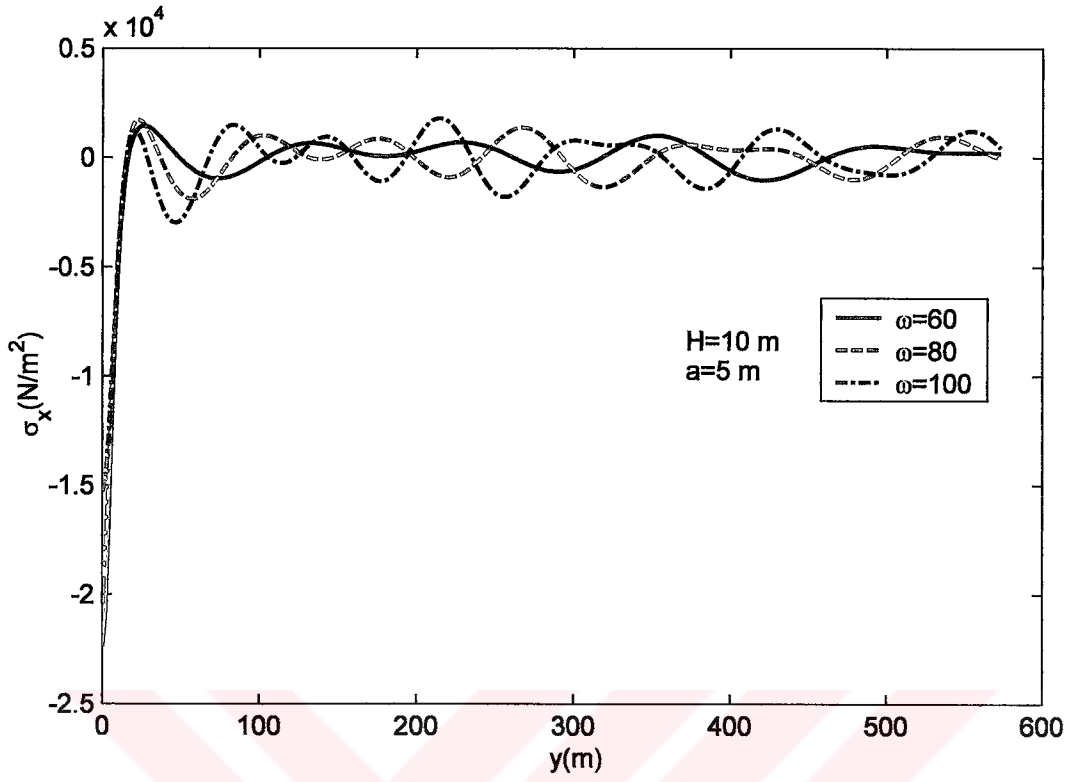
Şekil 4. 4 Serbest yüzeydeki yatay yer değiştirmeler



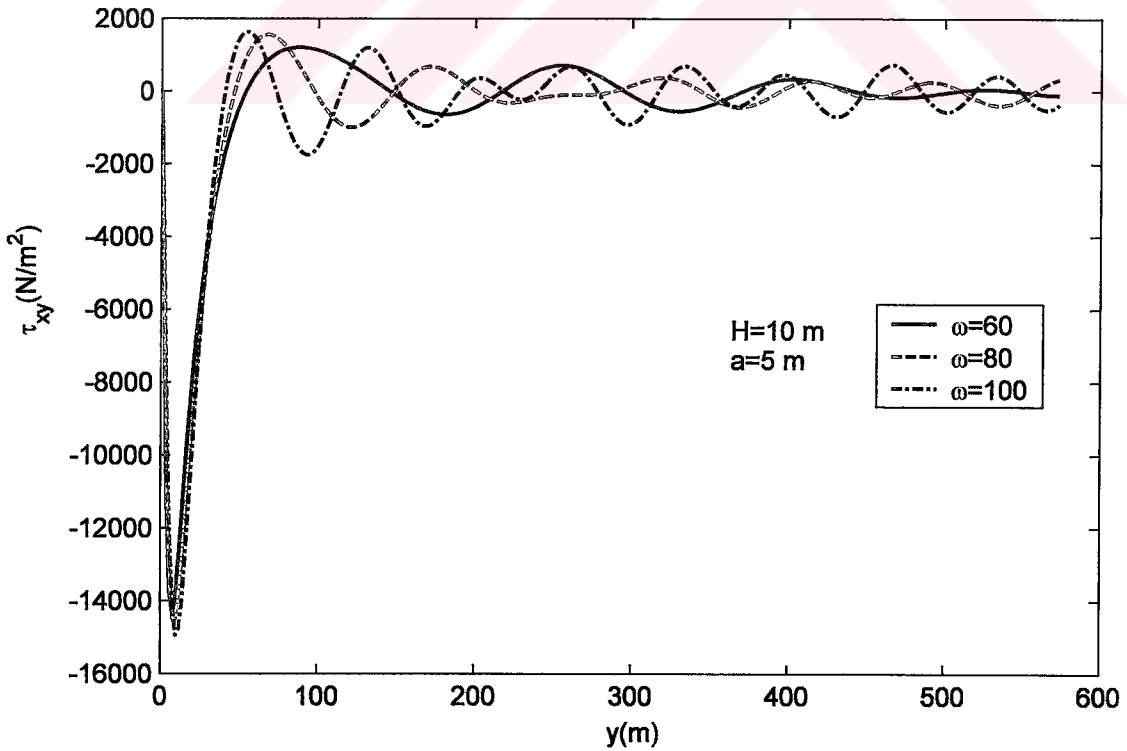
Şekil 4. 5 Delik iç yüzeyindeki radyal doğrultudaki yer değiştirmeler



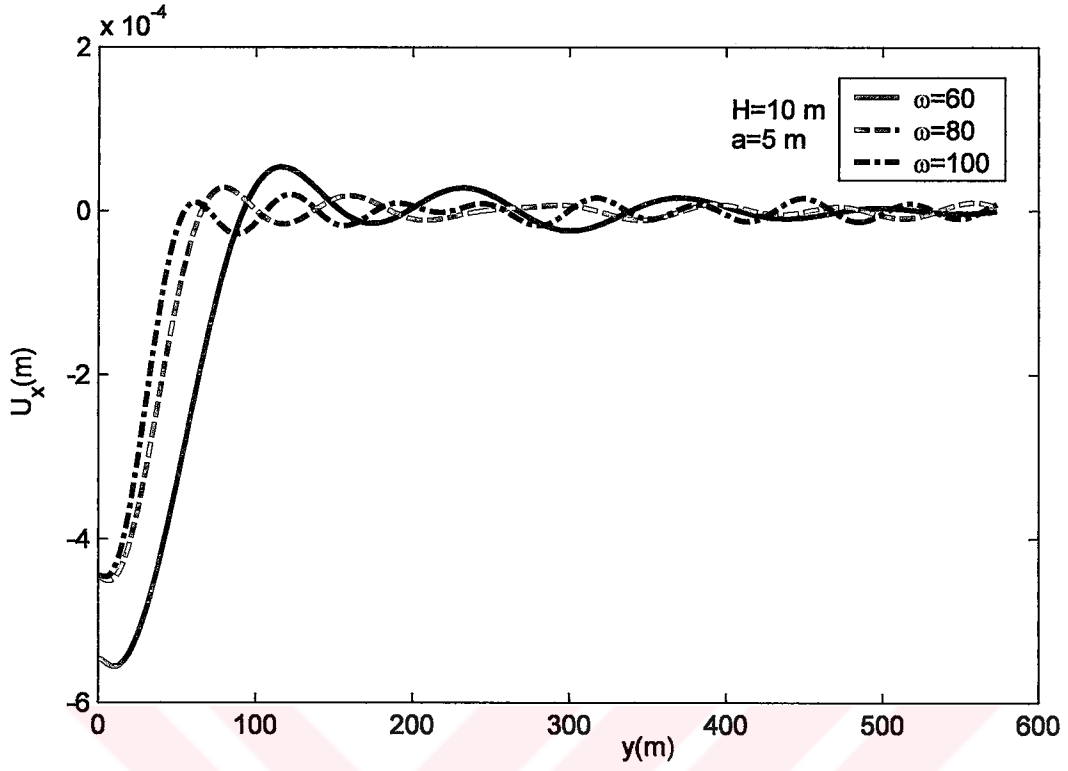
Şekil 4. 6 Delik iç yüzeyindeki açılal doğrultudaki yer değiştirmeler



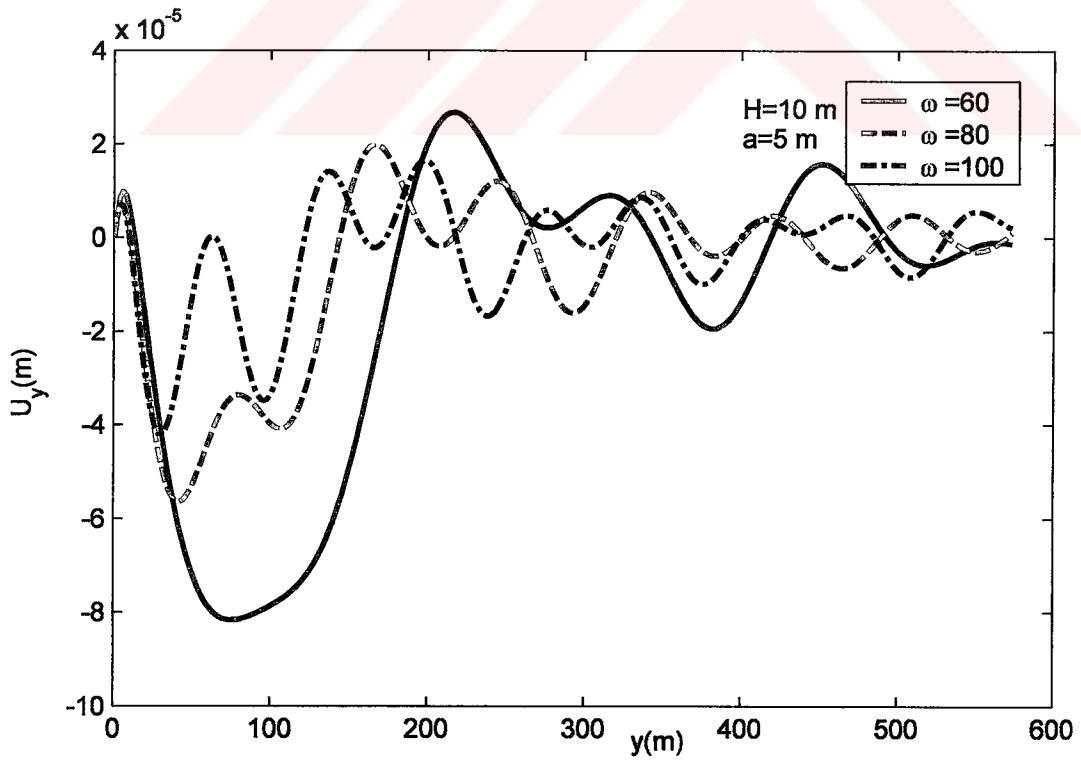
Şekil 4. 7 Serbest yüzeydeki normal gerilmeler



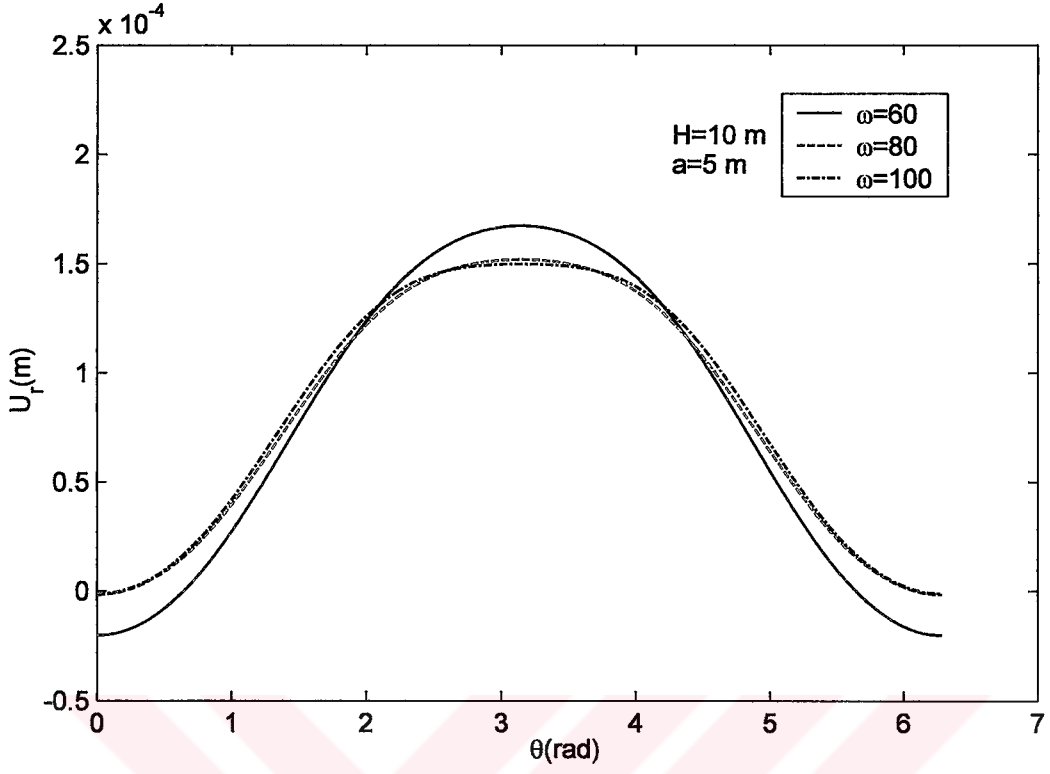
Şekil 4. 8 Serbest yüzeydeki kayma gerilmeleri



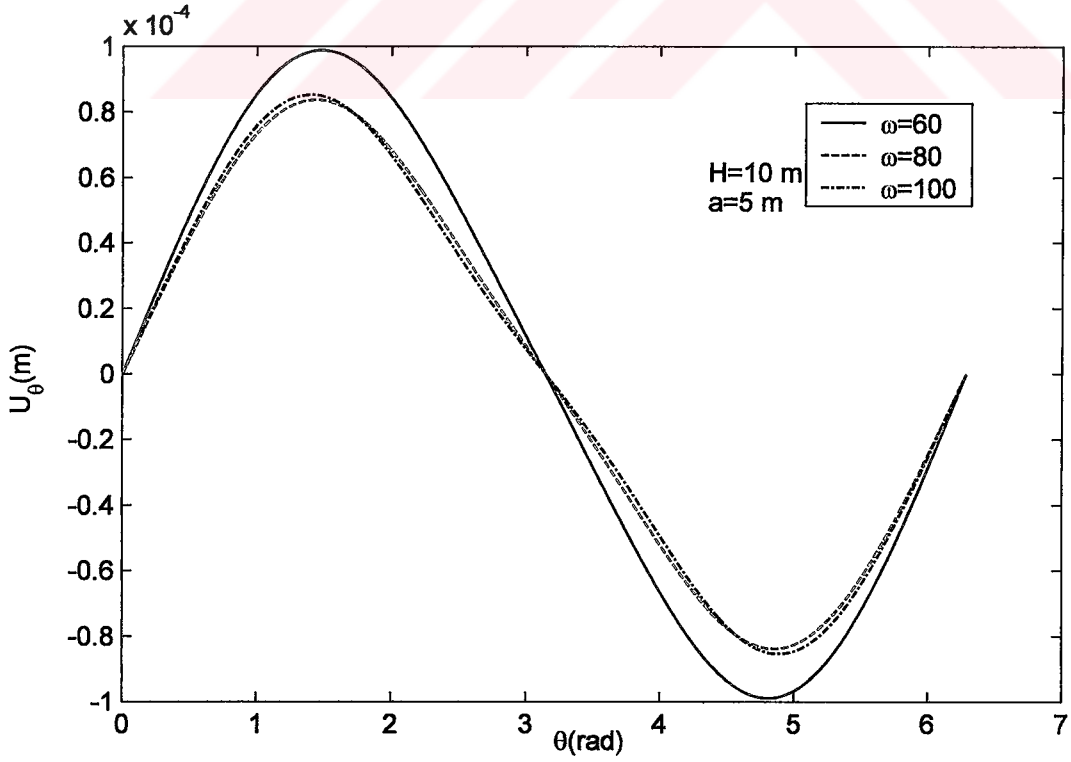
Şekil 4. 9 Serbest yüzeydeki düşey yer değiştirmeler



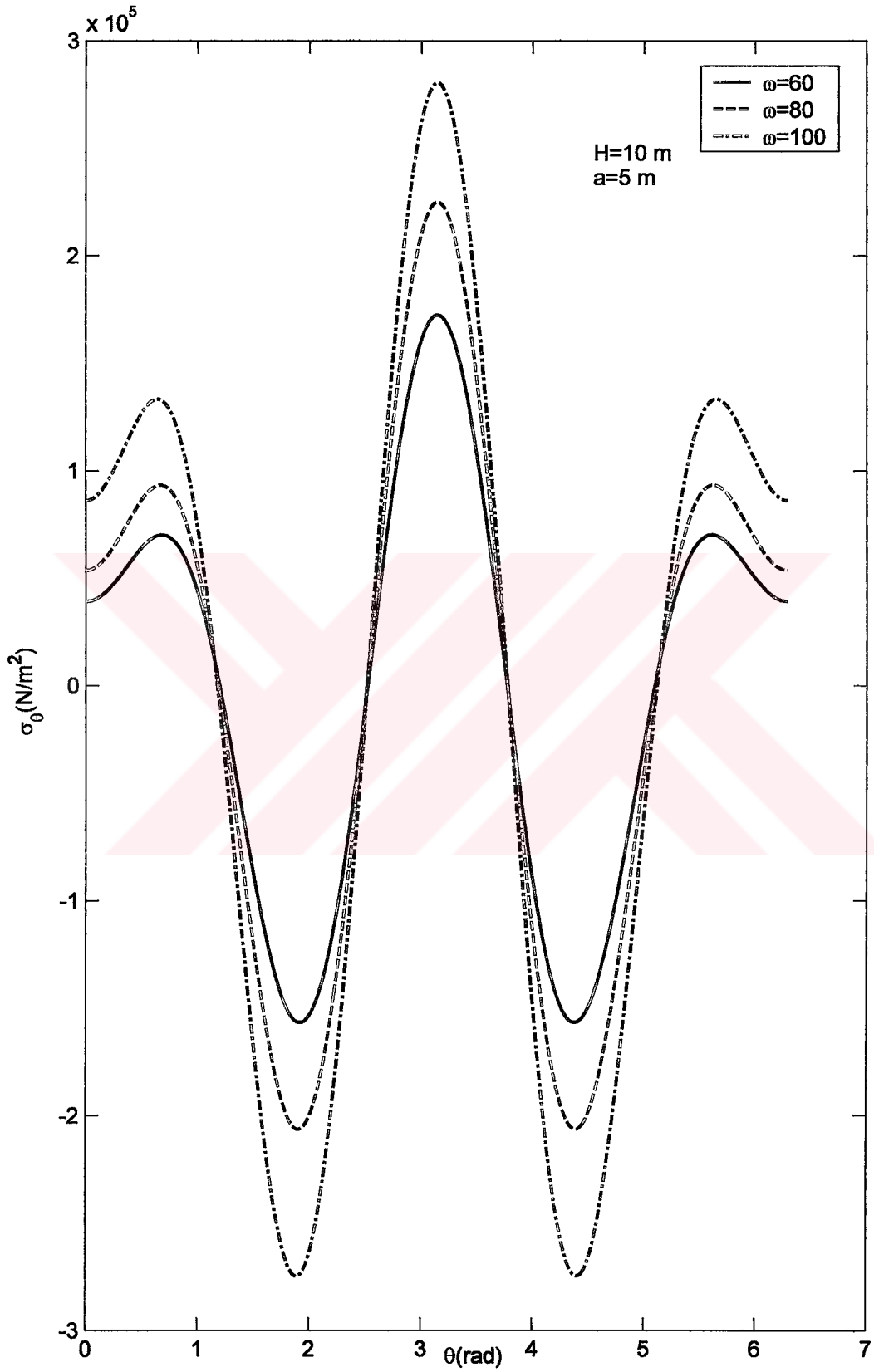
Şekil 4. 10 Serbest yüzeydeki yatay yer değiştirmeler



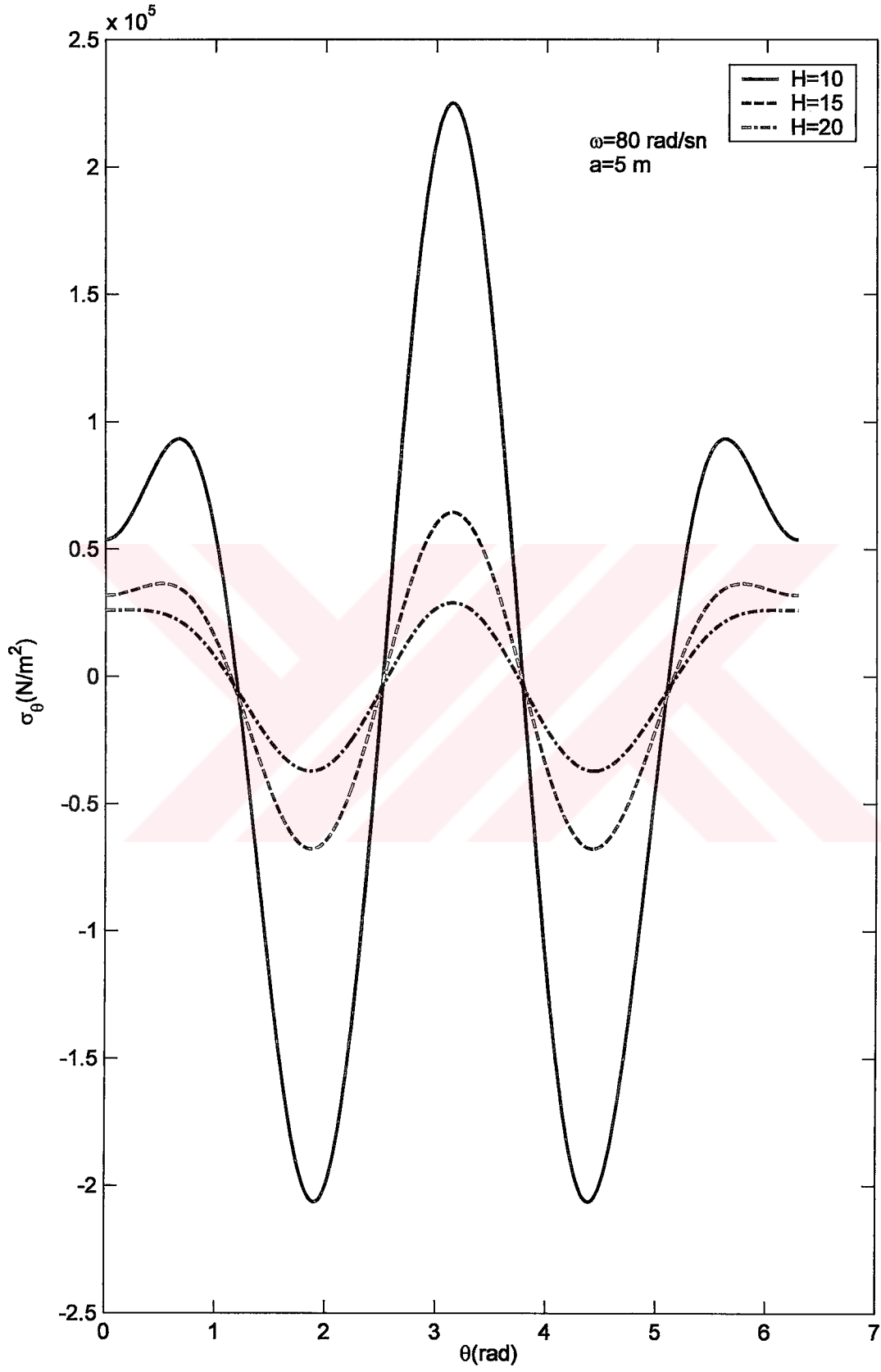
Şekil 4. 11 Delik iç yüzeyindeki radyal doğrultudaki yer değiştirmeler



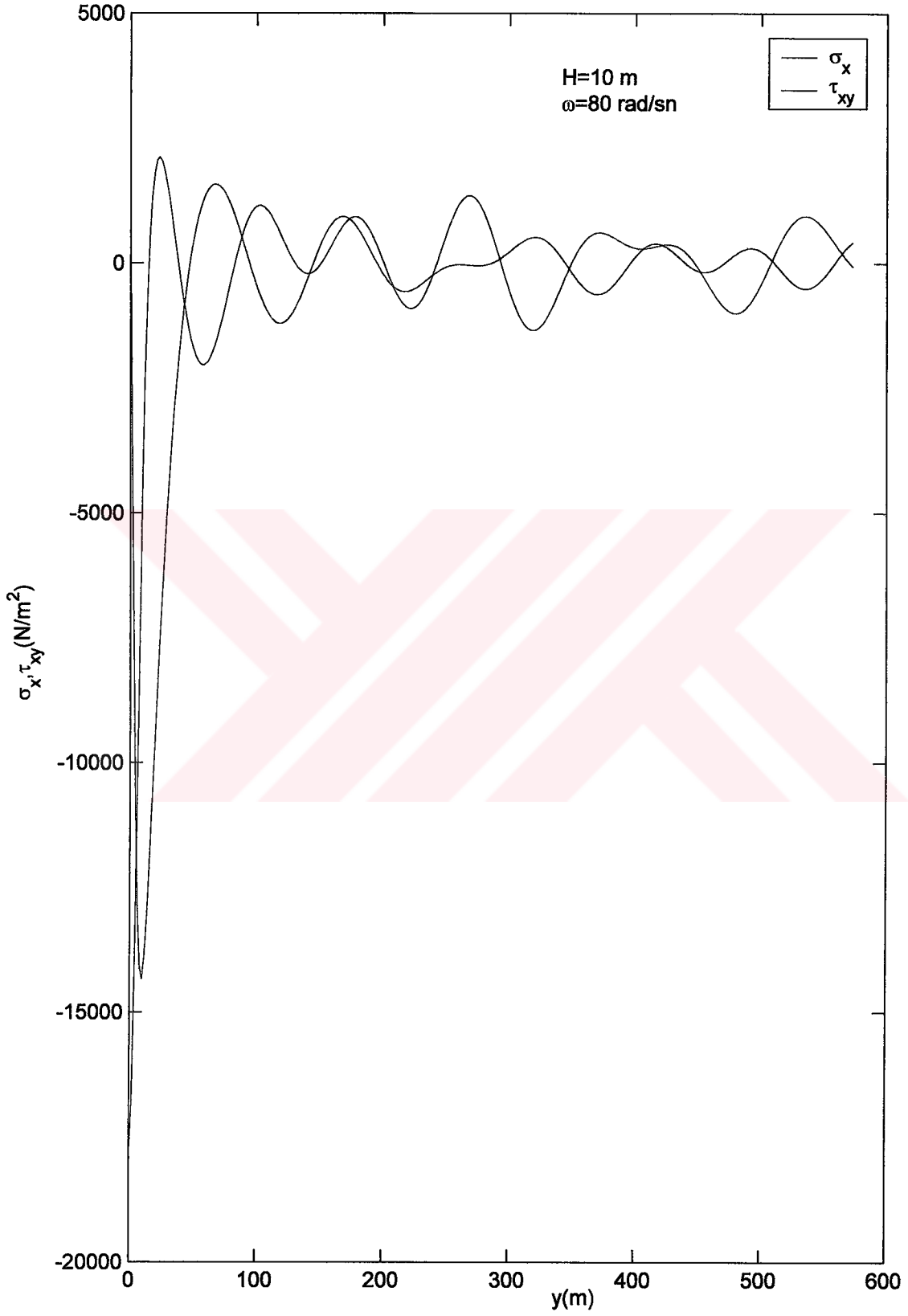
Şekil 4. 12 Delik iç yüzeyindeki açısal doğrultudaki yer değiştirmeler



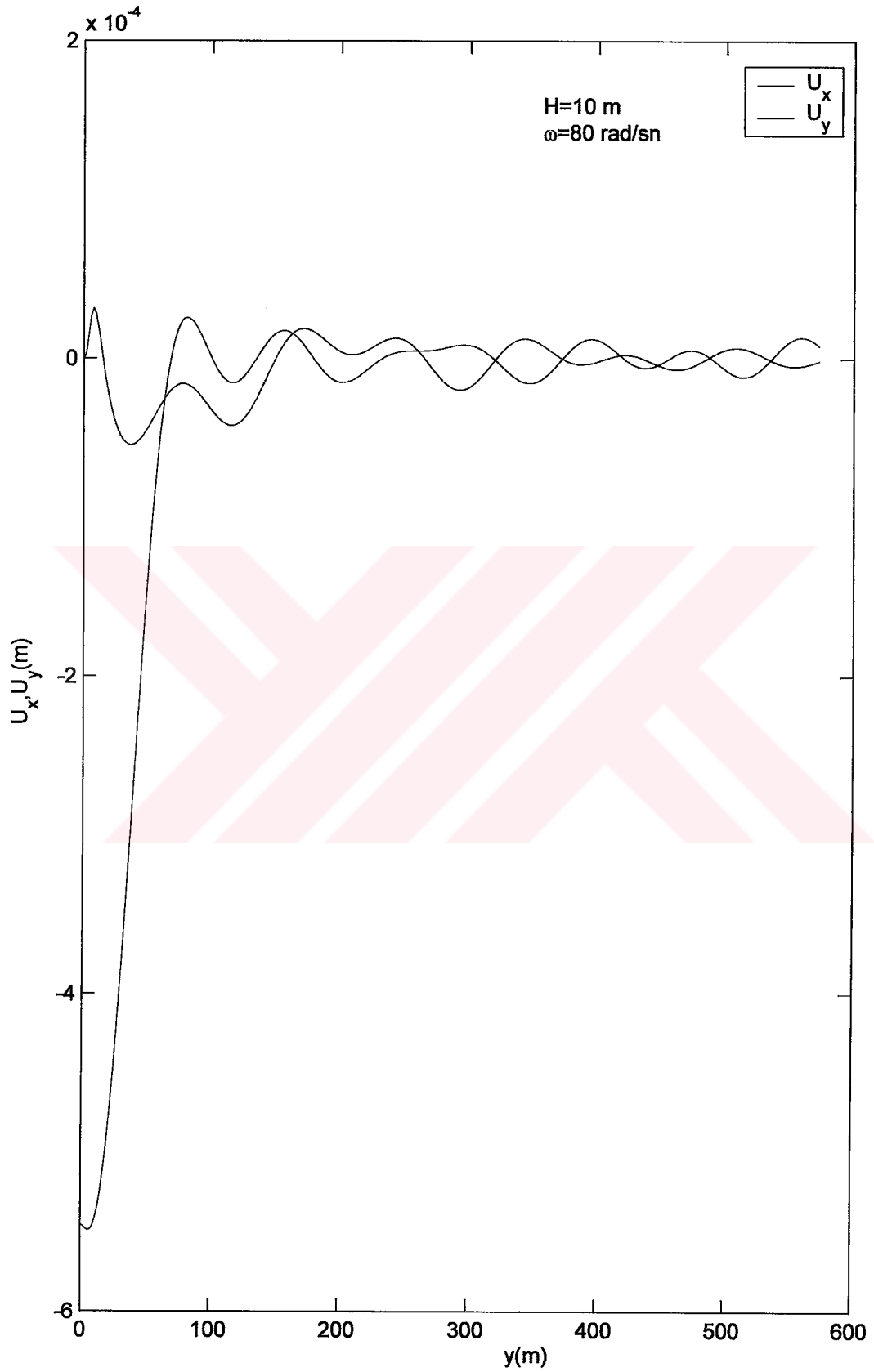
Şekil 4. 13 Delik iç yüzeyindeki açılmal gerilmeler



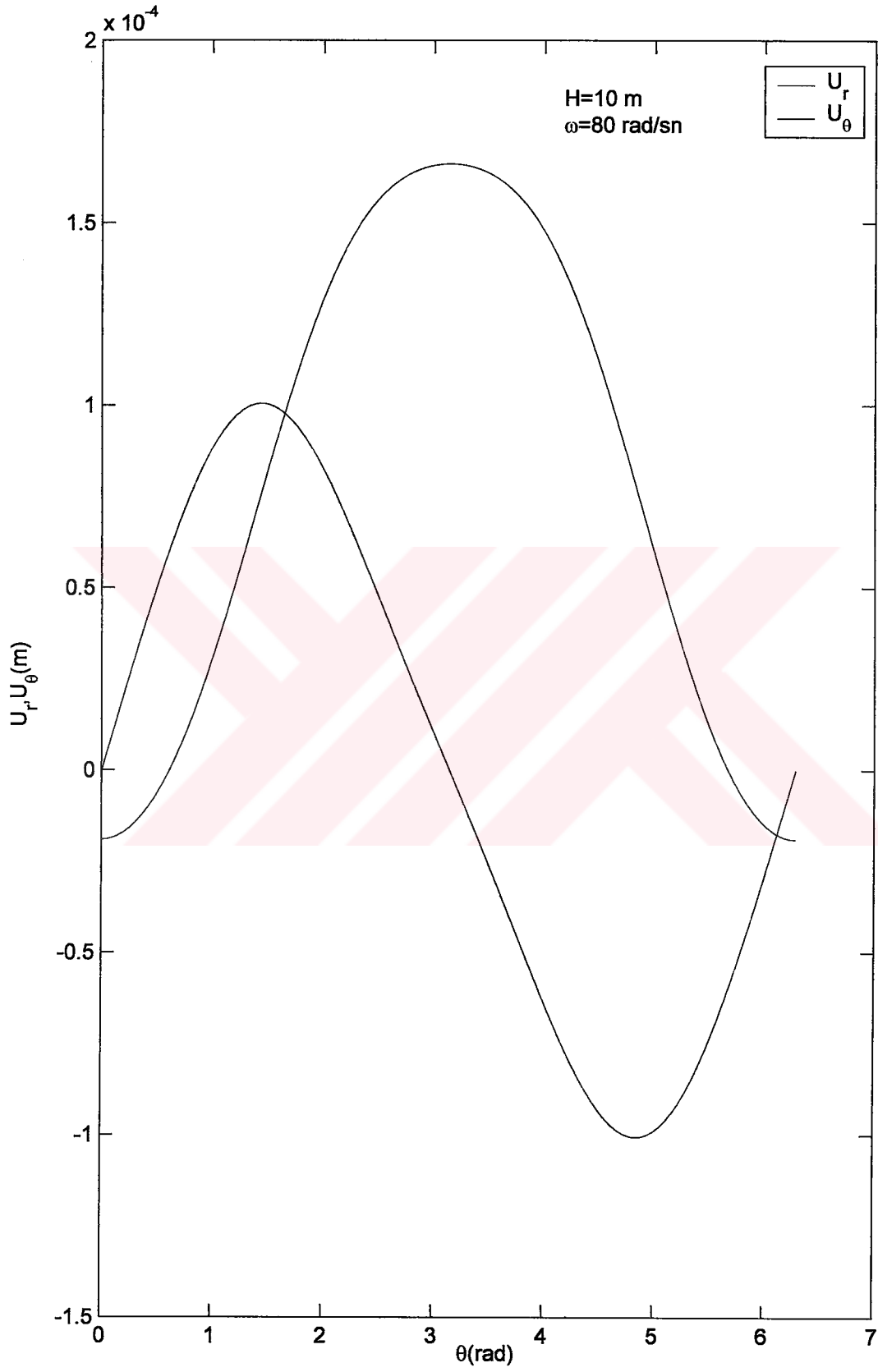
Şekil 4. 14 Delik iç yüzeyindeki açısai gerilmeler



Şekil 4. 15 Serbest yüzeydeki normal ve kayma gerilmeleri



Şekil 4. 16 Serbest yüzeydeki düşey ve yatay yer değiştirmeler



Şekil 4. 17 Delik iç yüzeyindeki radyal ve açısız yer değistirmeler

KAYNAKLAR

Akpınar, M. , (2000), “Harmonik Basınç Etkisindeki Dairesel Boşluklu Yarı Düzlem Problemi” , Yüksek Lisans Tezi, İ.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Balendra T. , Koh C. G. and Ho Y. C. , (1991), “Dynamics Response of Buildings due to Trains in Underground Tunnels”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamic*, Vol. 20, 275-279.

Barros F. C. P. De and Luco J. E. , (1994), “Seismic Response of a Cylindrical Shell Embedded in a Layered Viscoelastic Half-Space-II Validation and Numerical Results”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamic*, Vol. 23, 569-580.

Datta S. K. , Shah A. H. and Wong K. C. , (1984), “Dynamic Stresses and Displacements in Buried Pipe”, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 110, No. 10, ASCE, ISSN, October, 1984.

Eringen A. C. and Şuhubi E. S. , (1974), “Elastodynamics”, Vol. 1, Academic Press, New York.

Graff K. F. , (1975), “Wave Motion in Elastic Solids”, Ohio State University Press.

Luco J. E. and Barros F. C. P. De, (1994), “Seismic Response of a Cylindrical Shell Embedded in a Layered Viscoelastic Half-Space-I Formulation”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamic*, Vol. 23, 553-567.

Mow C. C. and Pao Y. H. , (1973), “The Diffraction of Elastic Waves and Dynamics Stress Concentrations”, Crane and Russak, New York.

Nelson I. and Weidlinger P. , (1978), “Dynamic Seismic Analysis of Long Segmented Lifelines”, *ASME J. Pressure Vessel Technology*, 101, 10-20.

Thiruvengatachar V. R. and Viswanathan K. , (1965), “Dynamic Response of an Elastic Half-Space with Cylindrical Cavity to Time-Dependent Surface Traction Over the Boundary of the Cavity”, *Journal of Mathematics and Mechanics*, Vol. 14, No. 4.

Wong K. C. , Shah A. H. and Datta S. K. , (1985), “Dynamic Stresses and Displacements in a Buried Tunnel”, *Journal of Engineering Mechanics*, 111, 218-234.

EKLER

Ek 1	Matlab Programı Hazırlanırken Yapılan İşlemler.....	31
Ek 2	Bessel Fonksiyonları Hakkında Açıklamalar.....	33
Ek 3	Dalga Denklemleri Hakkında Açıklamalar.....	34



Ek 1 Matlab Programı Hazırlanırken Yapılan İşlemler

Delik iç yüzeyinde oluşacak σ_r gerilmesinden aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$A_n f_{1n} + B_n f_{2n} + C_n f_{3n} + D_n f_{4n} = 0$$

$$A_n f_{1n} + B_n f_{2n} = -C_n f_{3n} - D_n f_{4n} \quad (1.1)$$

Ayrıca $n=0$ için, $A_0 f_{01} + B_0 f_{02} = -P_0 / 2\mu$ ifadesi elde edilir ve bu ifadeden A_0, B_0 cinsinden yazılabilir.

Benzer şekilde delik iç yüzeyinde oluşacak $\tau_{r\theta}$ gerilmesinden aşağıdaki ifadeleri elde edebiliriz:

$$A_n g_{1n} + B_n g_{2n} + C_n g_{3n} + D_n g_{4n} = 0$$

$$A_n g_{1n} + B_n g_{2n} = -C_n g_{3n} - D_n g_{4n} \quad (1.2)$$

Bu ifadeler kullanılarak A_n ve B_n ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$A_n f_{1n} + B_n f_{2n} = -C_n f_{3n} - D_n f_{4n}$$

$$A_n g_{1n} + B_n g_{2n} = -C_n g_{3n} - D_n g_{4n}$$

(1.3)

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} f_{1n} & f_{2n} \\ g_{1n} & g_{2n} \end{vmatrix} = f_{1n} g_{2n} - f_{2n} g_{1n} \quad (1.4)$$

$$A_n = \begin{vmatrix} -C_n f_{3n} - D_n f_{4n} & f_{2n} \\ -C_n g_{3n} - D_n g_{4n} & g_{2n} \end{vmatrix} \frac{1}{\Delta_n} = \frac{1}{\Delta_n} [C_n (f_{2n} g_{3n} - f_{3n} g_{2n}) + D_n (f_{2n} g_{4n} - f_{4n} g_{2n})]$$

(1.5)

$$B_n = \begin{vmatrix} f_{1n} & -C_n f_{3n} - D_n f_{4n} \\ g_{1n} & -C_n g_{3n} - D_n g_{4n} \end{vmatrix} \frac{1}{\Delta_n} = \frac{1}{\Delta_n} [C_n (f_{3n} g_{1n} - f_{1n} g_{3n}) + D_n (f_{4n} g_{1n} - f_{1n} g_{4n})]$$

(1.6)

Buradaki f ve g fonksiyonları çeşitli tipten Bessel fonksiyonlarını ve bunların trigonometrik fonksiyonlarla çarpımlarını içermektedir. Serbest yüzeyde oluşacak σ_x ve τ_{xy} ler ise şöyle yazılabilir:

$$\sigma_x = A_n \alpha_{1n} + B_n \alpha_{2n} + C_n \alpha_{3n} + D_n \alpha_{4n} \quad (1.7)$$

$$\tau_{xy} = A_n \beta_{1n} + B_n \beta_{2n} + C_n \beta_{3n} + D_n \beta_{4n} \quad (1.8)$$

Bu denklemde A_n ve B_n sabitleri yerine yazılırsa C_n ve D_n cinsinden σ_x ifadesi elde edilmiş olur. Bu şekilde hareket etmemizin sebebi bilinmeyen sayısı ile denklem sayısını eşitleyerek sistemi çözülebilir hale getirmektir. Sonuçta aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \alpha_{1n} \left[C_n (f_{2n} g_{3n} - f_{3n} g_{2n}) / \Delta_n + D_n (f_{2n} g_{4n} - f_{4n} g_{2n}) / \Delta_n \right] + \alpha_{2n} \left[\begin{array}{l} C_n \left(\frac{f_{3n} g_{1n}^-}{f_{1n} g_{3n}} \right) / \Delta_n + \\ D_n \left(\frac{f_{4n} g_{1n}^-}{f_{1n} g_{4n}} \right) / \Delta_n \end{array} \right] \\ & + \alpha_{3n} C_n + \alpha_{4n} D_n \\ \tau_{xy} = & \beta_{1n} \left[C_n (f_{2n} g_{3n} - f_{3n} g_{2n}) / \Delta_n + D_n (f_{2n} g_{4n} - f_{4n} g_{2n}) / \Delta_n \right] + \beta_{2n} \left[\begin{array}{l} C_n \left(\frac{f_{3n} g_{1n}^-}{f_{1n} g_{3n}} \right) / \Delta_n + \\ D_n \left(\frac{f_{4n} g_{1n}^-}{f_{1n} g_{4n}} \right) / \Delta_n \end{array} \right] \\ & + \beta_{3n} C_n + \beta_{4n} D_n \end{aligned} \quad (1.9)$$

Genel olarak gerilme ifadelerini şu şekilde yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \sigma_x = & P_1 + B_0 \gamma_{10} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \gamma_{1n} + D_n \psi_{1n} \\ \tau_{xy} = & P_2 + B_0 \gamma_{20} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \gamma_{2n} + D_n \psi_{2n} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Ek 2 Bessel Fonksiyonları Hakkında Açıklamalar

Bessel fonksiyonları. elektriksel alan, titreşim, ısı denetimi gibi problemlerin çözümünde kullanılmaktadır. Bessel fonksiyonları ismi, Alman astrolog ve matematikçi Friedrich Wilhelm Bessel' den (1784-1846) gelmektedir.

Problemimizde geçen J_n ve Y_n terimleri birinci ve ikinci tip Bessel fonksiyonları olarak bilinmektedir. $J_n(x)$ Bessel fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Mow ve Pao, 1973):

$$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m!(n+m)!} \quad (2.1)$$

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) + \frac{x^n}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} (h_m + h_{m+n})}{2^{2m+n} m!(m+n)!} x^{2m} - \frac{x^{-n}}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{2^{2m-n} m!} x^{2m} \quad (2.2)$$

$J_n(x)$ fonksiyonu için şu özellikler vardır:

$$\frac{\partial J_n(kr)}{\partial r} = kJ_{n-1} - \frac{n}{r} J_n = -kJ_{n+1} + \frac{n}{r} J_n \quad (2.3)$$

$$kJ_{n-1} = \frac{n}{r} J_n + \left(-kJ_{n+1} + \frac{n}{r} J_n \right) = \frac{2n}{r} J_n - kJ_{n+1} \quad (2.4)$$

$$J_{n-1} = \frac{2n}{rk} J_n - J_{n+1} \quad (2.5)$$

Benzer ifadeler Y_n için de geçerlidir.

$$\frac{\partial Y_n(kr)}{\partial r} = kY_{n-1} - \frac{n}{r} Y_n = -kY_{n+1} + \frac{n}{r} Y_n \quad (2.6)$$

$$kY_{n-1} = \frac{n}{r} Y_n + \left(-kY_{n+1} + \frac{n}{r} Y_n \right) = \frac{2n}{r} Y_n - kY_{n+1} \quad (2.7)$$

$$Y_{n-1} = \frac{2n}{rk} Y_n - Y_{n+1} \quad (2.8)$$

Ek 3 Dalga Denklemleri Hakkında Açıklamalar

Bir ortamda ani olarak meydana gelen bir değişim bu ortama yakın diğer ortama da iletilir, yayılır. İşte bu basit gerçek, dalga yayılımı olarak bilinen ilginç konu üzerindeki çalışmaların temelini oluşturur. Bu kavram; sesin hava içinde yayılması, su göletinin içindeki dalgacıkların yayılması veya radyo dalgalarının yayılması olaylarındaki işleyişle açıklanabilir. Bunlar ve bunlara benzer örnekler gaz, yarı akışkan veya katı ortamlarda ve serbest uzayda dalgaların yayılımını ispatlamak için kaynak gösterilebilir.

Homojen, izotrop ve elastik bir katı için denklemler kartezyen notasyon kullanılarak şöyle ifade edilebilir (Eringen ve Şuhubi, 1974):

$$\begin{aligned}
 T_{ij,j} + \rho f_i &= \rho \ddot{u}_i \\
 T_{ij} &= \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \\
 \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\
 \omega_{i,j} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Burada T_{ij} bir noktadaki gerilme tansörünü, u_i malzemenin o noktadaki deplasman vektörünü ifade etmektedir. Gerilme tansörü simetrik olduğundan $T_{ij} = T_{ji}$ olur. ρ malzemenin kütle yoğunluğunu; f_i , malzemenin birim kütesine ait cisim kuvvetini göstermektedir. Şekil değiştirme ve dönme tansörleri ε_{ij} ve ω_{ij} olup λ ve μ elastik sabitlerdir. Şekil değiştirme bileşenleri, gerilme-şekil değiştirme bağıntılarında yerine yazılıp düzenleme yapılırsa Navier denklemleri şu şekilde elde edilir (Graff, 1975):

$$(\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,ji} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \tag{3.2}$$

Bu ifadenin vektör karşılığı şöyledir:

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot u + \mu\nabla^2 u + \rho f = \rho \ddot{u} \tag{3.3}$$

Bu ifadeyi de şu şekilde yazmak mümkündür:

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + \mu \nabla^2 u + \rho f_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.4)$$

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) + \mu \nabla^2 v + \rho f_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.5)$$

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \mu \nabla^2 w + \rho f_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.6)$$

Bu ifadelerdeki u , v ve w ; x , y , z doğrultularındaki deplasmanları göstermektedir.

Vektörel gösterimle bir malzemenin genişmesini şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\Delta = \nabla \cdot \mathbf{u} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_{kk} \quad (3.7)$$

Bu yüzden (3.3) ifadesi şöyle yazılabilir:

$$(\lambda + \mu) \nabla \Delta + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} = \rho \dot{\mathbf{u}} \quad (3.8)$$

$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$ olarak yazılabildiğinden (3.8) ifadesi şu şekilde yazılabilir:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} = \rho \dot{\mathbf{u}} \quad (3.9)$$

ω dönme vektörü için $\omega = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}$ yazılarak;

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \Delta - 2\mu \nabla \times \omega + \rho \mathbf{f} = \rho \dot{\mathbf{u}} \quad (3.10)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde genişleme ve dönme terimleri daha açık bir şekilde görülmektedir. Dalga yayılım problemlerinde potansiyel fonksiyonların kullanılması oldukça yaygındır. Bunun için yer değiştirme vektörü bir ϕ skaler ve \vec{H} vektör potansiyelinin toplamı olarak yazılmaktadır.

$$\vec{u} = \nabla \phi + \nabla \times \vec{H} \quad (3.11)$$

Kütle kuvvetlerinin ihmal edilmesi ve bu ifadenin (3.8) de yerine yazılmasıyla;

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c_1^2} \ddot{\phi}$$

$$\nabla^2 H = \frac{1}{c_2^2} \ddot{H} \quad (3.12)$$

denklemleri elde edilmektedir. Burada c_1 ve c_2 sırasıyla boyuna ve enine dalga hızlarını göstermektedir.

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad , \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (3.13)$$



ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	13.10.1978	
Doğum yeri	Antalya	
Lise	1993-1996	Akdeniz Koleji Özel Mahmut Celal Ünal Fen Lisesi
Lisans	1996-2000	Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Fak. İnşaat Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	2000-2003	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Müh. Anabilim Dalı, Mekanik Programı

